

**République Algérienne Démocratique Et Populaire**  
**Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique**  
**Université Saad Dahleb Blida -1-**  
**Institut D'aéronautique Et Des Etudes Spatiales**  
**Département De Construction Aéronautique**



## **Mémoire De Master**

**En Vue De L'obtention Du Diplôme De Master En Aéronautique**

**Option : Structures Aéronautiques**

**Thème :**

**Etude Paramétrique De L'influence De La Porosité Sur Les Fréquences De Vibrations Libres D'une Plaque FGM**

**Représenté Par :**

- ✓ Guerfi Fadi Khelifa.
- ✓ Ould El Hocine Yacine.

**Encadré Par :**

Dr. Hamadouche Mahi Amale

**À Blida, juillet 2021**



# Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Bon Dieu de nous avoir donné la force, la santé et la patience afin que nous puissions accomplir ce travail.

Nous tenons à remercier vivement nos chers parents, dont nous sommes extrêmement fières, et qui nous ont donné le courage, la foi, la patience et l'amour...

Notre profonde gratitude va :

A notre promotrice, Dr. **AMEL MAHI**, nous a aidés, soutenu et bien orienté et formé afin de pouvoir rédiger ce mémoire et finir ce travail « merci Madame » qui trouve ici l'expression de notre reconnaissance et notre profond respect pour ses précieux conseils, son aide et sa disponibilité.

Il nous est très agréable d'exprimer nos très vifs remerciements à tous les responsables et l'ensemble de l'équipe pédagogique de l'institut d'aéronautique à l'université Saad Dahleb de Blida.

Nos remerciements vont aussi aux membres du jury qui nous font l'honneur d'examiner notre travail.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A nos camarades et nos amies sans exception.



# Dédicace

« À ma source de tendresse, d'espoir et de force, mes chers parents ;

À ma chère grand-mère **LEMOUCHI Lyamna.**

À tous mes chers frères, **Sohaib** et **Nader.**

À ma chère sœur **Ibtihal.**

À mes chers amis **Amin, Saïd, Adem, Abdelkader, Hakim, Amar, Housseem, Sadek,**

**Rabah, Anis, Amin, Ali, Adel .....**

À Nous, les étudiants en master II, à nos espoirs et nos illusions, à l'éternel  
retour de la chance... ».

À mon binôme **Yacine** avec qui j'ai partagé de longues heures et journées de travail.

**GUERFI Fadi Khelifa**



# Dédicace

Avec un énorme plaisir et une immense joie que je dédie ce travail ;

À mes chers parents, qui ont été toujours à ma coté pour me  
soutenir, m'encourager toute au long de mes études.

À ma chère grand-mère.

À mes chères sœurs.

À toute ma grande famille, à mes enseignants depuis mon  
passage chez eux n'ont cessé un jour de me soutenir et de m'aider  
tout le long de mon cursus universitaire.

À tous mes amis **Anis, Amine, Tahir, Abdelkader, Zakaria, Amar, Housseem, Ayoub,**  
**Walid, Aymen, Imad** ..... ;

À mon binôme **Fadi** avec qui j'ai partagé de longues heures et journées de travail.

À toute personne qui m'ont encouragé ou aidé le long de mes études.

**Ould El Hocine Yacine**



## **Résumé :**

Dans cette étude, une théorie raffinée de déformation en cisaillement à quatre variables utilisant une fonction de forme hyperbolique a été utilisée afin d'examiner l'influence de certains paramètres essentiels sur la valeur des fréquences propres de vibration libre d'une plaque FGM poreuse. La distribution de la porosité à travers l'épaisseur de la plaque obéit à deux lois mathématiques. La première loi décrit une distribution uniforme et la deuxième loi décrit une distribution non uniforme. La plaque est du type P-FGM métal/céramique.

Les équations différentielles du mouvement vibratoire libre de la plaque P-FGM poreuse ont été établies grâce au principe variationnel de Hamilton. Une méthode analytique basée sur la procédure de Navier a été retenue pour extraire les valeurs propres de la plaque poreuse simplement appuyée. La variation des propriétés mécaniques avec la porosité a été présentée afin de faciliter l'analyse des résultats.

Une validation numérique du code de calcul développé a été ensuite effectuée en comparant les résultats trouvés avec ceux déjà publiés. Plusieurs analyses correspondant aux variations des paramètres géométriques et physiques ont été faites afin de montrer leur influence significative sur les fréquences propres. En particulier, il a été montré que le taux de porosité contribue à réduire significativement la valeur nominale des propriétés mécaniques et la valeur des fréquences propres des vibrations libre quel que soit la variation des paramètres considérés.

**Mots clés :** Plaques fonctionnellement graduées ; Vibration libre; Principe de Hamilton; Porosité; Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur; Distribution de loi de puissance.

## **Abstract:**

In this study, a refined four-variable shear deformation theory using a hyperbolic shape function was used to examine the influence of some key parameters on the value of the free vibration eigenfrequencies of a porous FGM plate. The distribution of porosity through the thickness of the plate obeys two mathematical laws. The first law describes a uniform distribution and the second law describes a non-uniform distribution. The plate is of the P-FGM metal/ceramic type.

The differential equations of free vibratory motion of the porous P-FGM plate were established using Hamilton's variational principle. An analytical method based on Navier's procedure was chosen to extract the eigenvalues of the simply supported porous plate. The variation of mechanical properties with porosity was presented to facilitate the analysis of the

A numerical validation of the developed computational code was then performed by comparing the results found with those already published. Several analyses corresponding to the variations of the geometrical and physical parameters were performed to show their significant influence on the natural frequencies. In particular, it was shown that the porosity level contributes to significantly reduce the nominal value of the mechanical properties and the value of the natural frequencies of free vibrations whatever the variation of the considered parameters.

**Keywords:** Functionally graded plates; Free vibration; Hamilton's principle; Porosity; Higher order shear deformation theory; Power law distribution.

### ملخص:

في هذه الدراسة، تم استخدام نظرية تشوه القص بأربعة متغيرات باستخدام وظيفة الشكل الزائدي لفحص تأثير بعض المعلمات الرئيسية على قيمة الترددات الذاتية للاهتزاز الحر للوحة تشويه الأعضاء التناسلية الأنثوية المسامية. يخضع توزيع المسامية من خلال سماكة الصفيحة لقانونين رياضيين. يصف القانون الأول توزيعاً منتظماً ويصف القانون الثاني توزيعاً غير منتظم. اللوحة من النوع P-FGM المعدني / الخزفي.

تم إنشاء المعادلات التفاضلية للحركة الاهتزازية الحرة للوحة المسامية باستخدام مبدأ هاملتون المتغير، تم اختيار طريقة تحليلية تعتمد على إجراء Navier لاستخراج القيم الذاتية للوحة المسامية المدعومة ببساطة، تم عرض تباين الخواص الميكانيكية مع المسامية لتسهيل تحليل النتائج.

ثم تم إجراء التحقق العددي من الكود الحسابي المطور من خلال مقارنة النتائج التي تم العثور عليها مع تلك المنشورة، تم إجراء العديد من التحليلات المقابلة لتغيرات المتغيرات الهندسية والفيزيائية لإظهار تأثيرها الهام على الترددات الطبيعية على وجه الخصوص، تبين أن مستوى المسامية يساهم بشكل كبير في تقليل القيمة الاسمية للخصائص الميكانيكية وقيمة الترددات الطبيعية للاهتزازات الحرة مهما كانت تباين المعلمات المدروسة.

**الكلمات المفتاحية:** لوحات متدرجة وظيفيا، اهتزاز مجاني مبدأ هاملتون، المسامية، نظرية تشوه القص الأعلى مرتبة، توزيع قانون السلطة.

## Liste des symboles

---

$U, V, W$	Déplacements dans les directions x,y,z.
$U_0, V_0, W_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
$W_b, W_s$	Composantes du champ du déplacement transversale W de flexion et de cisaillement respectivement.
$\varepsilon_{ij}$	Déformation normale.
$\gamma_{ij}$	Déformation de cisaillement
$\varepsilon^{(0)}$	Déformation en membrane.
$\varepsilon^{(1)}$ (ou $\varepsilon^b$ )	Déformation en flexion.
$\gamma^{(2)}$ (ou $\gamma^s$ )	Déformation en cisaillement.
$\sigma_{ij}$	Déformation normale et de cisaillement.
$E$	Module de Young.
$E_c$	Module de Young de la céramique.
$E_m$	Module de Young du métal.
$E_0$	Module de Young minimal.
$E_1$	Module de Young maximale
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\nu_c$	Coefficient de Poisson de la céramique.
$\nu_m$	Coefficient de Poisson du métal.
$\nu_0$	Coefficient de Poisson minimale.
$\nu_1$	Coefficient de Poisson maximale.
$G$	Module de cisaillement.
$\rho$	La masse volumique.

## Liste des symboles

---

$\rho_c$	La masse volumique de la céramique.
$\rho_m$	La masse volumique du métal.
$\rho_0$	La masse volumique minimale.
$\rho_1$	La masse volumique maximale.
$Q_{ij}$	Coefficient de rigidité.
$\phi_i$ Et $\psi_i$	Rotation de la normale.
$\varphi_i$	Fonction inconnue
$f(z)$ Et $\varphi(z)$	Fonction de forme (de cisaillement) ET $g(z)$ .
$P$	Paramètre du matériau.
$V(z)$	La fraction volumique.
$V_c$	Fraction volumique de la céramique
$V_m$	Fraction volumique du métal
$\alpha$	Fraction volumique de porosité.
$V_{pores}$	Volume des pores
$V_{total}$	Volume total du matériau
$e$	Coefficient de porosité.
$e_0$	Coefficient de porosité (minimale).
$e_m$	Coefficient de porosité pour la densité volumique.
$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}$	Les efforts normaux.
$M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b$	Les moments de flexion.
$M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s$	Les moments supplémentaires du au cisaillement transverse.

## Liste des symboles

---

$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Les moments de cisaillement transverse d'ordre supérieur dus à la fonction de $f(z)$ .
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, H_{ij}$ ,	Les rigidités (traction, traction-flexion, flexion d'ordre élevé) de la plaque.
$\omega$	La fréquence propre de vibration libre.
[K] et [M]	Les matrices de rigidité et de masse
$A$	La section de la plaque.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[ ]$	Matrice.
$Al$	Aluminium.
$Al_2O_3$	Alumine.
$FGM$	Matériau fonctionnellement graduée.
$CLPT$	La théorie classique de la plaque laminée.
$FSDT$	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
$ESDPT$	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.
$TSDT$	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre.
$HSDT$	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.
$P-FGM$	Matériau à gradient fonctionnel en puissance.
$E-FGM$	Matériau à gradient fonctionnel en exponentiel.
$S-FGM$	Matériau à gradient fonctionnel en sigmoïde

# Table des matières

---

Remerciements	
Dédicace	
Résumé	
Tables des symboles	
Table des matières	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Introduction Générale : .....	2
<b>Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites à gradient fonctionnel</b>	
I.1. Introduction : .....	6
I.2. Définition d'un matériau composite : .....	7
I.3. Caractéristiques générales du matériau composite : .....	7
I.4. Constituant d'un matériau composite : .....	9
I.4.1. Le renfort : .....	9
I.4.2. La matrice : .....	10
I.5. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites : .....	10
I.6. Etude bibliographique sur les matériaux FGM : .....	11
I.7. Concept des Matériaux à Gradient de Propriétés : .....	12
I.8. Types de matériaux fonctionnellement gradués : .....	15
I.8.1. Composition chimique du FGM : .....	17
I.8.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité : .....	16
I.8.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure : .....	17
I.9. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels : .....	21
I.10. Domaines d'application des FGM : .....	23
I.11. Avantages des FGM : .....	23
I.12. Difficultés des FGM : .....	24
I.13. Conclusion : .....	24
<b>Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM</b>	
II.1. Introduction : .....	26
II.2. Définition d'une plaque : .....	26
II.2.1. Les plaques isotropes : .....	27
II.2.2. Les plaques orthotropes : .....	27
II.2.3. Les plaques anisotropes : .....	27
II.3. Les modèles analytiques des plaques FGM : .....	27

# Table des matières

---

II.3.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) : .....	27
II.3.1.1. Détermination du champ des déformations :.....	29
II.3.1.2. Détermination du champ des contraintes :.....	30
II.3.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de REISSNER-MINDLIN (FSDT) : .....	33
II.3.2.1. Détermination du champ des déformations :.....	34
II.3.2.2. Détermination du champ des contraintes :.....	35
II.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) : .....	36
II.3.4. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à 4 variables : .....	39
II.3.4.1. Détermination du champ des déformations :.....	41
II.3.4.2. Détermination du champ des contraintes :.....	43
II.3.5. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à 5 variables : .....	44
II.3.5.1. Détermination du champ des déformations :.....	44
II.3.5.2. Détermination du champ des contraintes :.....	46
II.4. Conclusion : .....	48
Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités	
III.1. Introduction : .....	51
III.2. Les propriétés matérielles des plaques FGM :.....	51
III.2.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM : .....	53
III.2.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :.....	54
III.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :.....	55
III.4. Définition de la porosité : .....	56
III.5. Différents types de distribution de porosités dans les FGM :.....	57
III.5.1. Porosités dispersées uniformément dans l'épaisseur d'une plaque FGM :.....	57
III.5.2. P-FGM avec porosité : .....	58
III.5.2.1. P-FGM avec porosité de type I (uniforme) : .....	59
III.5.2.2. P-FGM avec porosité de type II (non uniforme): .....	61
III.6. Autre type de porosités dans un FGM : .....	62
III.6.1. FGM avec porosité de type I (symétrique) : .....	62
III.6.2. FGM avec porosité de type II (non symétrique) :.....	63
III.7. Conclusion : .....	64
Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités	
IV.1. Introduction : .....	66
IV.2. Equations fondamentales : .....	66
IV.2.1. Cinématique et déformations : .....	67
IV.2.2. Equations de mouvement : .....	68

# Table des matières

---

IV.2.3. Solutions analytiques pour les plaques FG poreuses simplement supportées :.....	71
IV. 3. Conclusion : .....	74
<b>Chapitre V : Résultats numériques et discussions</b>	
V.1. Introduction : .....	75
V.2. Résultats numériques et discussion : .....	75
V.2.1. Variation des propriétés mécaniques : .....	76
V.2.2. Etude comparative : .....	85
V.2.3. Résultats numériques : .....	87
V.3. Organigramme des principales étapes du programme : .....	99
IV.4. Conclusion : .....	101
Conclusion générale et perspectives : .....	102
Références bibliographiques : .....	106

# Liste des figures

---

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites à gradient fonctionnel

<b>Figure I.1</b> : Matériau composite.....	9
<b>Figure I.2</b> : (Constituant des matériaux composites).....	9
<b>Figure I.3</b> : Les structures géométriques des composites.....	10
<b>Figure I.4</b> . Différentes natures de la matrice.....	10
<b>Figure I.5</b> : Variation continue.....	13
<b>Figure I.6</b> : Variation discrète.....	13
<b>Figure I.7</b> : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	14
<b>Figure I.8</b> : Variation continue de la microstructure (photo).....	14
<b>Figure I.9</b> : Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme.....	15
<b>Figure I.10</b> : Variation multi-phases de la microstructure.....	15
<b>Figure I.11</b> : Schéma de l'excision à gradient de porosité.....	17
<b>Figure I.12</b> : Schéma de principe d'une partie cylindrique.....	18
<b>Figure I.13</b> : Schéma de microstructure classé.....	19
<b>Figure I.14</b> : Schéma du concept de gradation.....	20
<b>Figure I.15</b> : La distribution composante des matériaux.....	22
<b>Figure I.13</b> : Les principaux domaines d'application des FGM.....	22

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

<b>Figure II.1</b> : Géométrie d'une plaque.....	27
<b>Figure II.2</b> : Géométries non déformées et déformées de la plaque de Love-Kirchhoff.....	28
<b>Figure II.3</b> : Composants du tenseur des contraintes.....	31
<b>Figure II.4</b> : Illustration de la plaque (non déformée et déformée) de REISSNER-MINDLIN.....	33
<b>Figure II.5</b> : Illustration de la plaque (non déformée et déformée) d'ordre élevé.....	37

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

<b>Figure III.1</b> : Géométrie d'une plaque en FGM.....	52
<b>Figure III.2</b> : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	53
<b>Figure III.3</b> : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	55
<b>Figure III.4</b> : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	56
<b>Figure III.5</b> : (a)Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores.....	57

## Liste des figures

---

<b>Figure III.6 :</b> Configuration géométrique d'une plaque FG avec porosité en coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	58
<b>Figure III.7 :</b> Distribution uniforme de la porosité à travers la section transversale du P-FGM.....	59
<b>Figure III.8 :</b> Plaque poreuse avec distribution uniforme de type I.....	60
<b>Figure III.9 :</b> Plaque poreuse avec distribution non uniforme de type II.....	61
<b>Figure III.10 :</b> Plaque poreuse avec distribution de type I.....	62
<b>Figure III.11 :</b> Plaque poreuse avec distribution de type II.....	63
<b>Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités</b>	
<b>Figure IV.1 :</b> Géométrie d'une plaque FGM avec porosité dans le système de coordonnées rectangulaires.....	67
<b>Chapitre V : Résultats numériques et discussions</b>	
<b>Figure V.1 :</b> Variation du module de Young E d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=0,5).....	78
<b>Figure V.2 :</b> Variation du module de Young E d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=5).....	79
<b>Figure V.3 :</b> Variation du module de cisaillement G d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=0,5).....	80
<b>Figure V.4 :</b> Variation du module de cisaillement G d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=5).....	81
<b>Figure V.5 :</b> Variation de la masse volumique $\rho$ d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=0,5).....	82
<b>Figure V.6 :</b> Variation de la masse volumique $\rho$ d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=5).....	83
<b>Figure V.7 :</b> Variation du coefficient de Poisson $\nu$ d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=0,5).....	84
<b>Figure V.8 :</b> Variation du coefficient de Poisson $\nu$ d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=5).....	85
<b>Figure V.9 :</b> Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.....	89

## Liste des figures

---

<b>Figure V.10</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.....	89
<b>Figure V.11</b> : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.....	91
<b>Figure V.12</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.....	91
<b>Figure V.13</b> : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	92
<b>Figure V.14</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	92
<b>Figure V.15</b> : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	94
<b>Figure V.16</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	94
<b>Figure V.17</b> : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	95
<b>Figure V.18</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	96
<b>Figure V.19</b> : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	97
<b>Figure V.20</b> : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.....	97
<b>Figure V.21</b> : Organigramme du programme de calcul (Maple).....	99

# Liste des tableaux

---

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites à gradient fonctionnel

<b>Tableau I.1</b> : Les familles des matériaux composites.....	8
<b>Tableau I.2</b> : Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM.....	13
<b>Tableau I.3</b> : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites.....	21

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

<b>Tableau III.1</b> : Différentes fonctions de forme de théorie HSDT pour des plaques FGM.....	39
---	----

## Chapitre V : Résultats numérique et discussions

<b>Tableau V.1</b> : Variation du module de Young E (GPa) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e = 0$ ) et poreuse ( $e = 0.2$ ).....	78
<b>Tableau V.2</b> : Variation du module de cisaillement G (GPa) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0.2$ ).....	80
<b>Tableau V.3</b> : Variation de la masse volumique $\rho$ ( $\text{Kg/m}^3$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0,2$ ).....	82
<b>Tableau V.4</b> : Variation du coefficient de Poisson $\nu$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0,2$ ).....	84
<b>Tableau V.5</b> : Comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque poreuse P-FGM ( $a=b$ , P-FGM=Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , $n=1$ ).....	86
<b>Tableau V.6</b> : Comparaison des fréquences propres d'une plaque P-FGM poreuse ( $a=b$ , P-FGM=Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , $n=1$ , $a/h=20$ ).....	87
<b>Tableau V.7</b> : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et de l'index de la fraction volumique ( $a/h = 10$ , $a= b$ ).....	89
<b>Tableau V.8</b> : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et de l'index de la fraction volumique ( $a/h = 10$ , $a = b$ ).....	90
<b>Tableau V.9</b> : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM carrée en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et du rapport $a/h$ ( $n = 2$ , $a = b$ ).....	92
<b>Tableau V.10</b> : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM carrée en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et du rapport $a/h$ ( $n = 2$ , $a=b$ ).....	93

## Liste des tableaux

---

**Tableau V.11** : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM rectangulaire en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et du rapport  $a/h$  ( $n = 2$ ,  $b=2a$ ).....95

**Tableau V.12** : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM rectangulaire en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et du rapport  $a/h$  ( $n = 2$ ,  $b=2a$ ).....97

# **Introduction Générale**

# Introduction Générale

---

Les matériaux composites sont des matériaux généralement constitués de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Ces matériaux ont été utilisés avec succès dans des applications d'aéronefs et d'autres applications d'ingénierie pendant de nombreuses années en raison de leur excellente résistance au poids et de la rigidité aux rapports pondéraux.

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une nouvelle classe des composites (matériaux composites avancés) dans lesquels les propriétés des matériaux varient continuellement dans le sens de l'épaisseur en mélangeant deux matériaux différents, par exemple de la céramique et du métal. En conséquence, les contraintes internes ne se produisent pas et cela permet d'éviter la concentration de contraintes que nous retrouvons dans les composites laminés.

L'utilisation de ce nouveau matériau est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition principalement riche en céramique. Cependant les FGM (Functionally Graded Material) touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, le génie civil, le nucléaire, constructions, l'automobile, les barrières pour les moteurs en céramique, les dispositifs électriques, la transformation de l'énergie, l'ingénierie biomédicale et l'optique (Akbaş (2015), Bennai et al. (2015), Arefi (2015), Ait Atmane et al. (2015), Ebrahimi et al. (2015), Darılmaz (2015), Ebrahimi et al. (2016), Kar et al. (2016), Moradi-Dastjerdi (2016), Trinh, T.H. et al. (2016) et A. Hadj Mostefa et al. (2018)).

Historiquement, le concept de matériau à gradient fonctionnel a été envisagé pour la première fois au Japon en 1984 lors d'un projet d'avion spatial. Ce type de matériau est produit en mélangeant deux ou plusieurs matériaux par une distribution graduelle des fractions volumiques des constituants (Koizumi (2017)). Il est à noter que l'importance d'inclure les effets de déformation en cisaillement transversal vient du fait que les matériaux composites ont des rapports très élevés entre les modules d'Young dans le plan et les modules de cisaillement transversal. En utilisant des hypothèses similaires à celles de Shimpi (2002), de nombreuses théories de la déformation en cisaillement à quatre inconnues ont été développées en utilisant différentes fonctions de forme. Par exemple, Merdaci et al. (2011) et Ameer et al. (2011) ont développé une HSDT (Higher-order Shear Deformation Theory) à quatre inconnues pour les plaques sandwich FGM et les plaques FGM en utilisant une

## Introduction Générale

---

fonction sinusoïdale. La bibliographie consultée permet de dire que quelques travaux ont été réalisés sur le comportement mécanique des structures poreuses FGM. Rezaei et al. (2016) ont étudié l'effet de la porosité sur la fréquence naturelle des plaques cellulaires poreuses épaisses en utilisant la formulation unifiée de Carrera. L'effet du couplage de déformation entre le solide et le fluide sur les caractéristiques de vibration libre des plaques rectangulaires poreuses rigides isotropes sous condition non drainée a été étudié par les mêmes auteurs (Rezaei et al. (2017)). Kamranfard et al. (2017) ont présenté une approche analytique pour la vibration et le flambage des plaques poreuses annulaires sous une charge de compression uniforme dans le plan. Benachour et al. (2011) et Belabed et al. (2014) ont développé un modèle pour la vibration libre des plaques FGM avec un coefficient arbitraire. Des solutions approximatives sont obtenues en utilisant la solution de Navier. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant un problème de valeurs propres. Récemment, Wagih et al. (2019) ont étudié l'effet du contact avec un substrat FG élastoplastique et une indentation sphérique rigide à l'aide de la FEM. Merdaci et al. (2019) ont étudié les FGP (Functionally Graded Porous Material) épais poreux rectangulaires en appliquant la théorie d'ordre supérieur pour la réponse à la flexion.

Cependant, dans la fabrication de FGM, des micro-vides ou des porosités peuvent se produire au sein des matériaux pendant le processus de frittage. Cela est dû à la grande différence de température de solidification entre les constituants des matériaux (Neves et al. (2017)). Wattanasakulpong et al. (2012) ont également présenté une discussion sur les porosités qui se produisent dans les échantillons de FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes. Suite à cette recherche bibliographique, il est par conséquent, important de prendre en compte l'effet de la porosité dans la conception des structures FGM soumises à des charges statiques Merdaci et al. (2019) et Merdaci (2018) et dynamiques (Wattanasakulpong et al. (2014), Mouaici et al. (2016), Merdaci (2018), Merdaci et al. (2019), Merdaci (2019), Saidi et al. (2019) et Reddy (2002)). C'est pourquoi, les études consacrées à la compréhension du comportement statique et dynamique des structures en matériaux FGM ont reçu de plus en plus d'attention ces dernières années.

Le présent travail se concentre sur l'analyse des vibrations libres de plaques poreuses à gradient fonctionnel (FGP) simplement supportées pour une distribution uniforme et non uniforme de la porosité, basée sur la théorie de déformation des plaques par cisaillement d'ordre supérieur. Cette théorie satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement contrairement aux autres théories.

# Introduction Générale

---

Dans cette étude, les plaques FGM sont supposées avoir une distribution de la porosité selon la direction de l'épaisseur obéissant à deux lois mathématiques. Les équations différentielles de mouvement de la plaque poreuse sont déterminées en appliquant le principe variationnel de Hamilton. Les solutions analytiques sont obtenues en appliquant la procédure de Navier. La fiabilité du code de calcul développé avec le langage Maple est vérifiée en comparant les résultats trouvés avec ceux publiés par d'autres auteurs utilisant d'autres théories de déformation des plaques. Plusieurs calculs ont été fait afin de montrer l'influence des paramètres géométriques (rapports  $a/h$  et  $a/b$ ), et physiques (index de la fraction volumique, le taux de porosité et le type de distribution de la porosité) sur les valeurs des fréquences propres d'une plaque P-FGM poreuse simplement appuyée.

Pour une meilleure clarté, le présent mémoire est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre d'ordre général est dédié à l'introduction sur les matériaux composites et en particulier à la description des structures FGM.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes théories de déformation des plaques, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, puis les plus utilisées et enfin les plus récentes.

Le troisième chapitre montre comment modéliser mathématiquement les plaques FGM non poreuse. La définition de la porosité dans les matériaux composites a été ensuite abordée. Enfin, nous montrons comment modéliser mathématiquement les plaques FGM poreuses tout en introduisant les différents types les plus utilisées de la distribution de la porosité.

Nous avons présenté en chapitre IV le développement de la théorie de déformation de cisaillement raffinée pour étudier le comportement vibratoire des plaques FGM simplement appuyées en tenant compte de l'effet de la porosité, en utilisant un champ de déplacement à quatre variables.

La validation et les discussions des résultats obtenus par la présente méthode sont présentés dans le cinquième chapitre. Nous avons ajouté dans ce chapitre, une étude comparative des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature pour confirmer le bon choix de la théorie et démontrer la robustesse du code de calcul développé.

Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera l'ensemble des travaux et permet aussi de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives pour les futurs travaux dans le domaine d'étude des structures composites avancés.

# **Chapitre I**

## **Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel**

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

## I.1. Introduction :

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, ... etc. Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont tous temps été utilisé par l'homme, citons par exemple le bois, le béton et le béton armé. Le développement de ces matériaux est né de la volonté d'allier les qualités techniques au besoin d'allègement dans un même matériau, qui par la suite doit s'adapter aux solutions technologiques des problèmes à résoudre.

Un matériau composite résulte de l'association de deux matériaux différents aussi bien par leur forme que par leurs propriétés mécaniques ou chimiques pour tenter d'accroître leurs performances. Les deux constituants du composite sont la matrice et le renfort, qui en se combinant donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés diffèrent suivant les directions. Les matériaux constituant le composite sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite en faire par la suite. Les critères de choix peuvent être, par exemple, les propriétés mécaniques requises, la résistance à la chaleur ou à l'eau, ou même la méthode de mise en œuvre. [1]

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : **Functionally Graded Material " F.G.M "**).

Les matériaux composites à gradients évalués FGM représentent un des derniers développements. Ils sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatial, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales.

Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermique de la structure qu'ils constituent. Les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière, ceci en choisissant selon les applications spécifiques et charges environnementales le matériau adéquat pour chaque interface. Ces matériaux possèdent de multiples avantages avec des rapports de

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

résistance/poids et épaisseur/poids très élevés, qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telle que la réduction des contraintes locales, ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [10].

## I.2. Définition d'un matériau composite :

Dans un sens large, le mot "composite" signifie "constitué de deux ou plusieurs parties différentes". En fait, l'appellation *matériau composite* ou *composite* est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l'instant la définition générale suivante. Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Des exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés au **tableau I.1**. [2]

## I.3. Caractéristiques générales du matériau composite :

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant (**figure I.1**). Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées. Les propriétés des matériaux composites résultent : [2]

- Des propriétés des matériaux constituants.
- De leur distribution géométrique.
- De leurs interactions.

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

Classe	Constituants	Domaine d'application
1. Composites à matrice Organique(CMO) Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Emballage, Transports, Structures légères diverses
2. Composites à matrice Céramique (CMC) Béton Composite carbone carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aérospatial, aviation, sport, biomécanique, thermomécaniques
3. Composites à matrice Métallique(CMM)	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches Peaux Ames	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples
5. Matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded material)	Métaux /céramique	Chimique, électronique, aérospatiale...

**Tableau I.1** : Les familles des matériaux composites. [2]

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

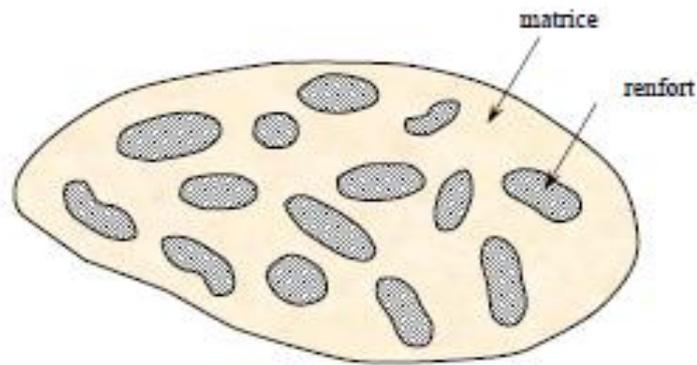


Figure I.1 : Matériau composite. [2]

## I.4. Constituant d'un matériau composite :

Un matériaux composites est constitué de différentes phases qui sont : le renfort et la matrice (présentés dans la **figure (I.2)**). Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, et leurs rôle est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure la cohésion de la structure et le transfert de charges entre les renforts. [3]

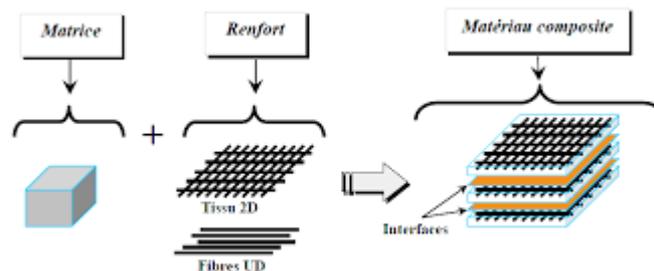


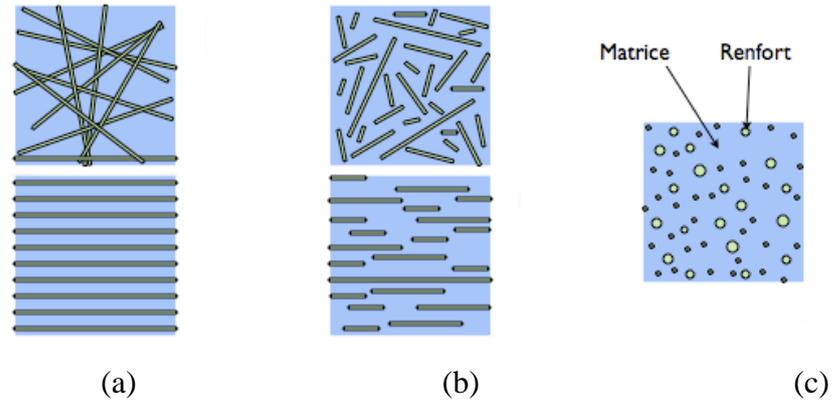
Figure I.2 : (Constituant des matériaux composites)

### I.4.1. Le renfort :

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres, ils sont constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes :

Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage : tri directionnelle ou plus) et aussi des fibres longues, courtes, particules (voir **figureI.3**) [3].

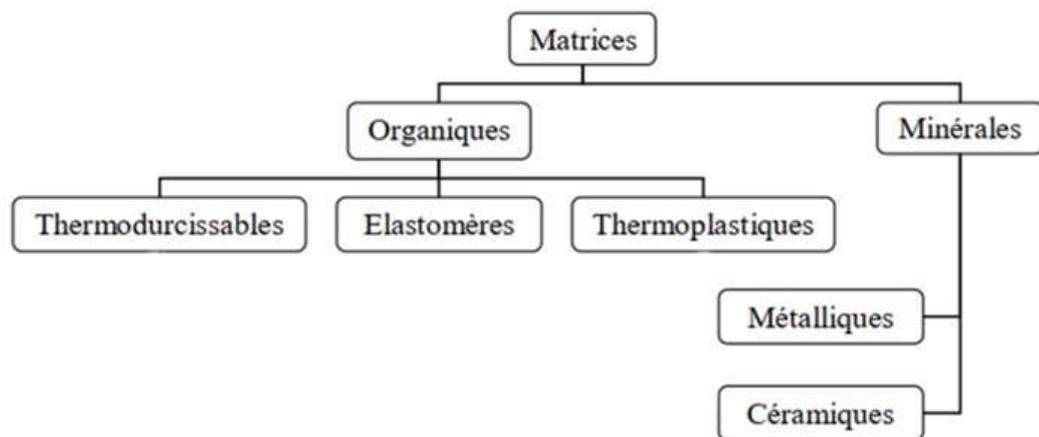
# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel



**Figure I.3 :** Les structures géométriques des composites :  
Fibres longues(a), fibres courtes(b), particules(c). [4]

## I.4.2. La matrice :

La matrice d'un composite a pour rôles d'enrober les renforts, les protégeant ainsi du milieu extérieur, d'assurer une répartition spatiale homogène des renforts, transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir, et de conférer sa forme à la pièce en matériau composite. La matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Il existe un grand nombre de polymères pouvant servir de matrice aux matériaux composites. [6]



**Figure I.4.** Différentes natures de la matrice. [5]

## I.5. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites :

### Les Avantages :

- La légèreté.

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

- Leur résistance à la corrosion et la fatigue.
- Leur possibilité de prendre plusieurs formes.

## Les Inconvénients :

- Les coûts des matières premières et des procédés de fabrication.
- La gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.
- La difficulté de la réparation (position de défaut, la réparation perd beaucoup de temps ...)[7]

## I.6. Etude bibliographique sur les matériaux FGM :

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? [8]

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [9].

En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). [8]

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

Dans la durée (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées en 1987. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique, et aussi la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes.

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique. [9]

## I.7. Concept des Matériaux à Gradient de Propriétés :

L'invention du matériau à gradient de fonction (FGM) est attribuée à M. Niino et ses collègues à Sendai en 1984 dans le cadre de son travail sur les barrières thermiques. Il s'agit d'une classe de composites constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes.

Un FGM est caractérisé par un changement graduel et continu des propriétés du matériau. Ils présentent donc une microstructure hétérogène et contrôlée, modulée par le gradient de **20** compositions, de porosité, de distribution de phase ou de texture qui induit des différences de propriétés (densité, dureté, conductivité thermique, conductivité électrique...). Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes (**Tableau I.5**).

Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas. Les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (**figure I.5**) ou discrète (**figure I.6**) à travers l'épaisseur. [9]

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel



**Figure I.5 :** Variation continue. [8]



**Figure I.6 :** Variation discrète. [8]

1. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (**figure I.5**), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).
2. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (**figure I.6**).

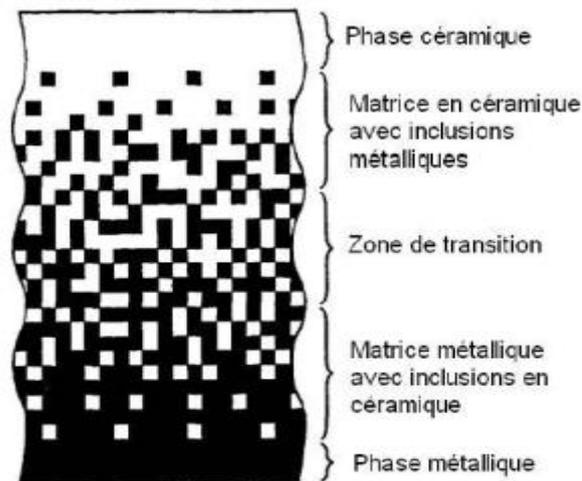
Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique. - Bonne résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermiques.
« Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre.	Céramique métal	- Elimination de problème de l'interface. - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique. - Conductivité thermique élevée.

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

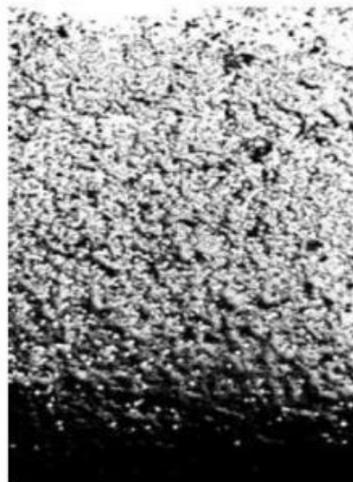
		- Très bonne ténacité.
--	--	------------------------

**Tableau I.2 :** Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM. [9]

La variation continue des propriétés (**Figures I.7 et Figures I.8**) trouve son application lorsque, par exemple les deux faces sont exposées à différentes températures, à une haute température sur la face supérieure et une basse température sur la face inférieure. Dans ce cas la face supérieure est en 100 % céramique et la face inférieure est à 100 % métal, avec une transition graduelle entre les deux. [8]



**Figure I.7 :** Variation continue de la microstructure (schématisée). [8]

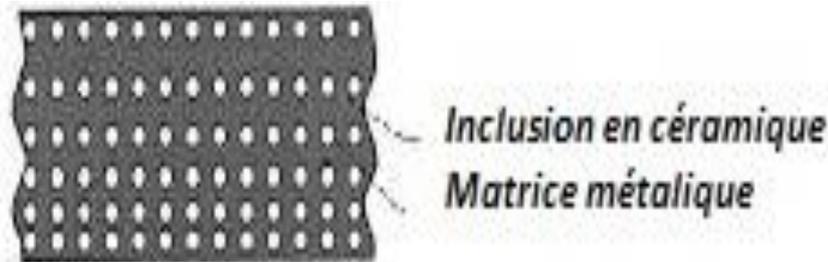


**Figure I.8 :** Variation continue de la microstructure (photo). [8]

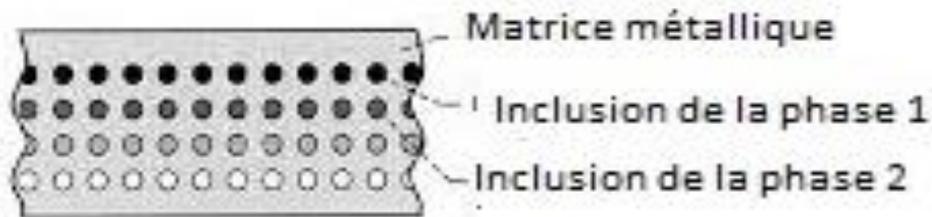
Il a une possibilité d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et de contraintes, cette possibilité est utilisé pour la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc....). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

des revêtements pare-feu. Faire varier la microstructure en assurant un espacement non uniforme (**figure I.9**) ou en incluant plusieurs renforcements (**figure I.10**) on trouve son application dans la réduction des différences entre les propriétés thermomécaniques des différentes couches adjacentes des plaques multi couches. [8]



**Figure I.9 :** Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme. [8]



**Figure I.10 :** Variation multi-phases de la microstructure. [8]

### I.8. Types de matériaux fonctionnellement gradués :

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et de le remplacer par l'interface progressivement changeante, qui a été traduite par la composition chimique changeante de ce composite. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine habituellement le type de FGM à utiliser. Dans l'application biomédicale, par exemple, certains implants doivent vraiment imiter l'organe humain qu'ils ont l'intention de remplacer ou de réparer, afin qu'ils puissent fonctionner correctement sans détruire les tissus environnants. Ils ont également besoin de pouvoir durer plus longtemps en service. On a constaté que la plupart du corps humain était constitué de FGM, en raison de l'exigence de fonctionnalité. C'est l'une des raisons pour lesquelles les implants doivent également être constitués de FGM, afin de faire correspondre la pièce en cours de remplacement ou de réparation. Les différents types de FGM qui se produisent maintenant comprennent le gradient

## **Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel**

---

de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté en détail dans les sections suivantes [8].

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

## I.8.1. Composition chimique du FGM :

C'est le type de matériaux fonctionnellement classés, où la composition chimique varie graduellement, en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait se faire sous la forme d'une seule phase, ou d'un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit en une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage [11]. Le changement progressif dans la répartition des éléments chimiques en phase unique entraîne la formation du matériau à gradation fonctionnelle. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau à phase unique (mais avec une composition chimique variable) en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins fréquent. Les matériaux fonctionnellement classés les plus couramment utilisés sont ceux avec une composition chimique polyphasée. Les phases et la composition chimique sont faites pour varier selon le volume en vrac du matériau [12-13]. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideront à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication tels que le taux de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, puis on procède à un compactage en poudre puis à un frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieront selon la position spatiale dans le matériau à gradation fonctionnelle.

## I.8.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité :

Le matériau à gradient fonctionnel à gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec la variation de la position spatiale dans le matériau en vrac. La forme et la taille du pore sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnelle. Le diagramme schématique d'un gradient de porosité typique, un matériau à gradient fonctionnel est représenté sur la (**figure I.11**). Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer se compose de

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

porosité à gradient fonctionnel et la porosité graduée aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant, et elle contribue également à la circulation sanguine des tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids global de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. La gradation de la taille des pores peut être obtenue en faisant varier les granulométries de poudre qui sont utilisées à différents endroits du matériau en vrac pendant le processus de gradation. Il peut également être produit en faisant varier les paramètres de traitement de la production ou en utilisant différents paramètres de frittage pour produire le gradient de porosité requis. Le gradient de porosité dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau. Un certain nombre de FGM à gradient de porosité ont été rapportés dans la littérature pour une application biomédicale.

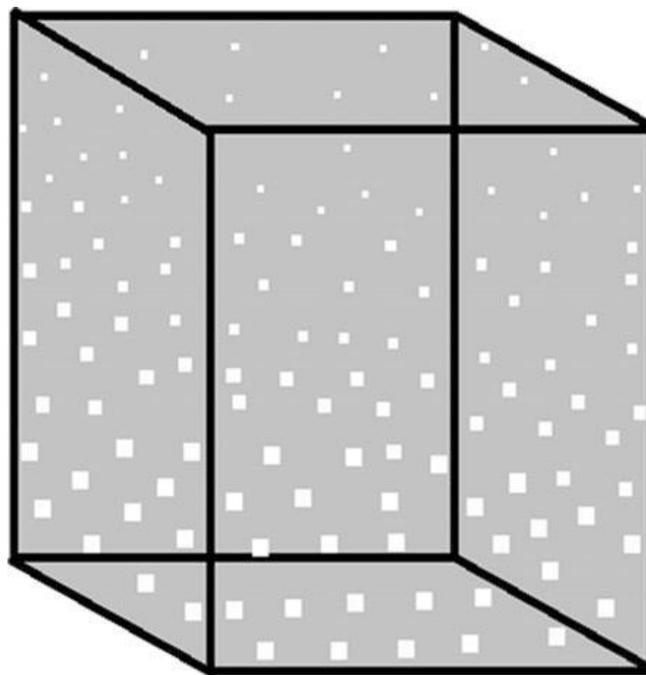


Figure I.11 : Schéma de l'excision à gradient de porosité.

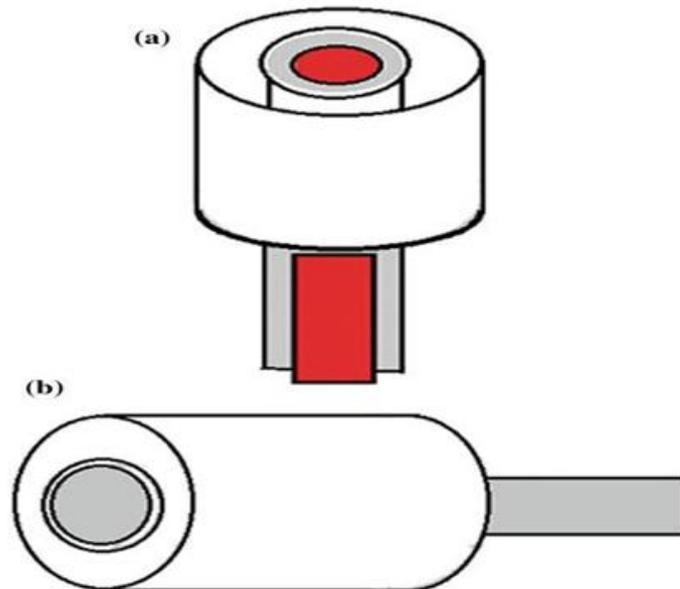
### I.8.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure :

Le matériau à gradient fonctionnel de microstructure est un autre type de FGM, où la microstructure est conçue de sorte que différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation en microstructures peut être réalisée pendant le processus de solidification, de telle sorte que la surface de la matière est trempée, par exemple, lors de la

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est autorisé à refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles sur la surface du matériau vers la partie la plus interne. En outre, la gradation microstructurale peut être obtenue grâce à un processus de traitement thermique contrôlé. Par exemple, une microstructure variable peut être produite par un traitement thermique contrôlé d'une partie cylindrique en alliage de titane, comme le montre le diagramme schématisé de la **(figure I .12)**.

On peut obtenir une microstructure à gradation fonctionnelle par d'abord permettre à un métal liquide, dont la température de fusion est inférieure à la température de fusion de l'alliage de titane, et de telle sorte que soit atteint la température de recristallisation de l'alliage de titane lorsque ce métal fondu est exécuté dans un Type d'installation de l'échangeur de chaleur, comme le montre la **(figure I .12.a)**. Le métal liquide est autorisé à fonctionner pendant une certaine période de temps, puis retiré, puis la partie est autorisée à refroidir. La chaleur est transférée de la partie interne du cylindre à la partie externe. On s'attend à ce que la température de la partie la plus interne du cylindre soit beaucoup plus élevée que celle de la température la plus à l'extérieur.



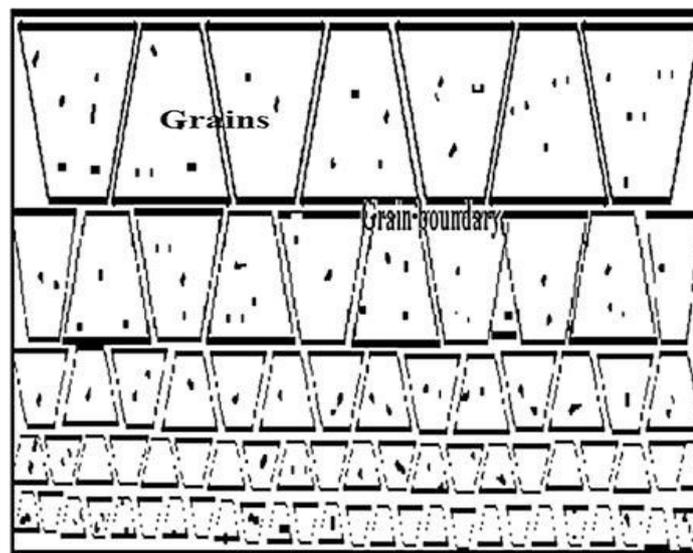
**Figure I .12** : Schéma de principe d'une partie cylindrique soumise à : (a) écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement.

Cela entraînerait une microstructure variable, car la partie est autorisée à refroidir. La partie extérieure se comporterait comme un dissipateur de chaleur, et la microstructure de cette zone serait plus grande en raison de la croissance des grains, tandis que la microstructure

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

la plus intérieure serait plus petite et équi-axe, en raison du processus de recristallisation et le refroidissement lent. Dans un autre type de processus de gradation microstructural, le cylindre pourrait être chauffé à une certaine température, puis l'eau de refroidissement pourrait être traversée par la partie interne du cylindre également dans une configuration d'échangeur de chaleur, comme le montre-la (**figure.I.12.b**). La partie interne du cylindre serait soumise à un refroidissement rapide, provoquant ainsi la formation d'une microstructure non équilibrée sur cette face. La microstructure la plus interne consisterait en une microstructure martensitique plus difficile, tandis que la microstructure du cylindre, loin de la partie la plus interne, serait complètement différente de la microstructure sur la partie extérieure du cylindre.

Un diagramme schématique d'une microstructure classiquement gradués est représenté sur la (**figure I .13**).C'est parce que la partie la plus extérieure du cylindre refroidirait plus lentement, ce qui favoriserait la formation d'une microstructure plus à l'équilibre et une microstructure largement équi-axe serait produite. Les gradients dans la microstructure en raison du traitement thermique pourraient également provoquer des changements dans la composition élémentaire, et dans certains cas, la phase intermétallique pourrait être produite dans la microstructure graduée.



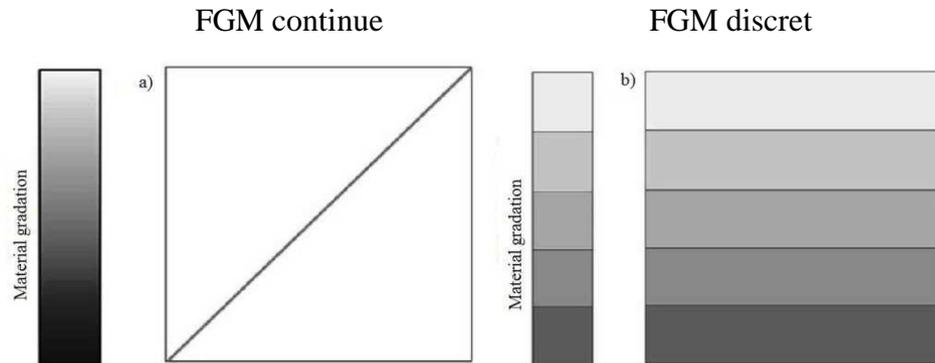
**Figure I .13** : Schéma de microstructure classée.

La microstructure graduée entraînerait un changement graduel des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et parce que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau. Le FGM de gradient microstructural trouve leur application dans les composants qui doivent avoir une surface très difficile de résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact important qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau à gradient fonctionnel

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

comprend l'acier durci, les cames ou la couronne dentée, les roulements ou les arbres, et les applications de turbine [14-15]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante et sont classés selon différents critères :

- **Selon la structure** : FGM structuré continue et discontinu (Layered) FGM. La différence est montrée par la (figure I .14.a) et la (figure I .42.b).



**Figure I .14** : Schéma du concept de gradation.

- **Selon le processus de fabrication** : FGM mince et Bulk FGM. Les FGM minces sont fabriquées avec des méthodes différentes telles que le dépôt physique de vapeur (PVD), le dépôt chimique de vapeur (CVD), la méthode de synthèse à haute température auto-propagée (SHS) et bien d'autres, alors que les FGM en vrac sont fabriqués par des procédés tels que la technique métallurgique en poudre, la technique « Solid Free Form », etc.

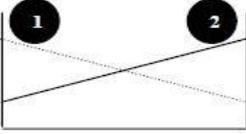
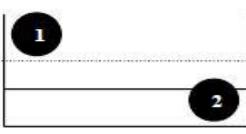
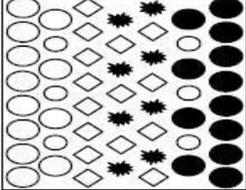
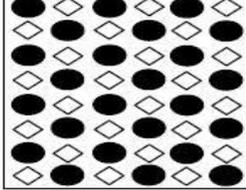
## I.9. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels :

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le (tableau I.6). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple,

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

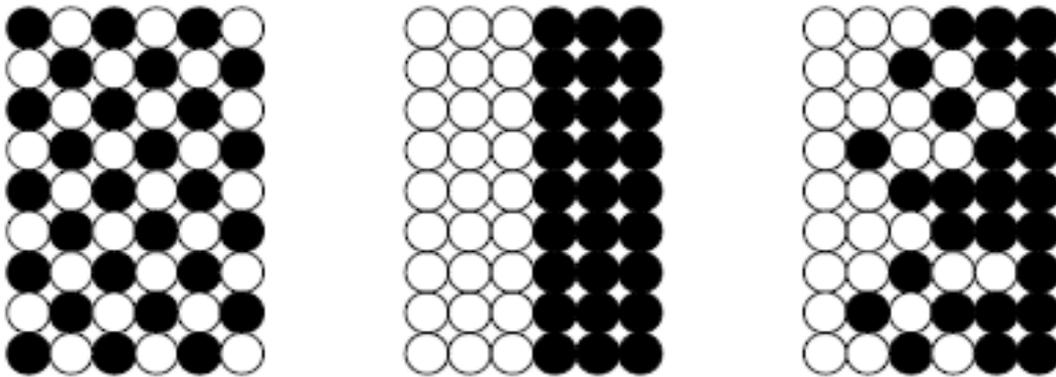
convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ✱</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Tableau I.3 :** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites. [16]

Yoshihisa a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la **(figure I.15)** : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique. [16]

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

Figure I.15 : La distribution composante des matériaux [16].

## I.10. Domaines d'application des FGM :

Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques comme il est illustré dans la (figure I.17). En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. [9]

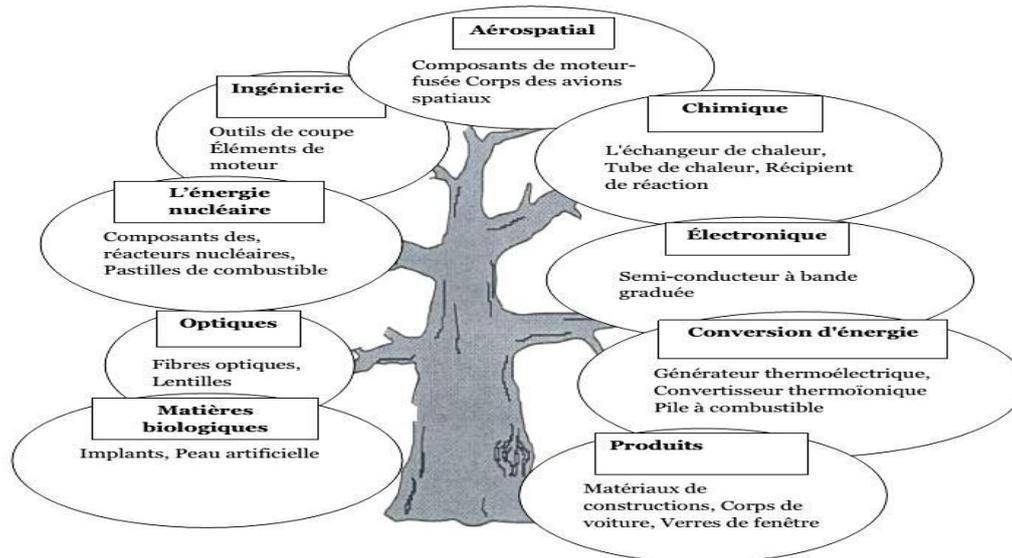


Figure I.16 : Les principaux domaines d'application des FGM. [16]

## I.11. Avantages des FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement ; Narottam et al (2011) et beaucoup d'autres soulignent divers

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel

---

avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

## I.12. Difficultés des FGM :

Certaines questions nécessitent une étude approfondie et une attention particulière, principalement dans les aspects suivants :

- Une base de données appropriée de matériau à gradient fonctionnel (comprenant les propriétés de matériaux, certains paramètres, le procédé de préparation des matériaux et de l'évaluation de la performance) doit être mise au point.
- Encore besoin d'autres recherches et un examen sur les propriétés physiques du modèle de matériau. La structure microscopique et la relation quantitative entre les conditions de préparation à établir afin de prévoir avec précision et fiabilité les propriétés physiques des matériaux classés.
- La recherche doit se concentrer sur la variation du gradient du matériau par rapport à la relaxation des contraintes thermiques et garder la route ouverte à la variété des applications d'ingénierie.
- Les matériaux à gradient fonctionnel préparés sont des échantillons de petite taille ou des structures simples. Des matériaux plus pratiques et valorisés doivent encore être développés.
- Les coûts de préparation sont très élevés.

# **Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et à gradient fonctionnel**

---

## **I.13. Conclusion :**

Ce chapitre est essentiellement consacré à la description de l'organisation interne des matériaux composites et leurs constituants. Ce sont des matériaux légers et très utilisés dans l'industrie aéronautique. Puis nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel, l'histoire de leur développement, leur comparaison avec les matériaux composites ainsi que leur domaine d'application et enfin leurs avantages et inconvénients.

**Chapitre II**

**Théories de déformation des plaques**

**FGM**

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

---

### II.1. Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff pour fonder une théorie des plaques minces également appelée théorie classique (CPT). À l'aide des travaux de RAYLEIGH, TIMOSHENKO, REISSNER et UFLYAND, MINDLIN a présenté une théorie des plaques semi-épaisses appelée théorie des déformations du premier ordre (FSDT). La limite des théories classiques et du premier ordre (applicables pour les plaques minces et semi-épaisses) a mené au développement de théories d'ordre élevé qui sont venues pour améliorer l'évaluation de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques, et il y a les théories en cisaillement d'ordre supérieur à 4 variables et à 5 variables. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. [17]

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

### II.2. Définition d'une plaque :

Une plaque est un élément de structure mince et plat soumis à des charges qui provoquent une flexion, définie par une surface plane (plan  $x, y$ ) et par une petite épaisseur notée ( $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur) (voir **figure II.1**), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou bien non homogène. [9]

On définit :

- **Le plan moyen (plan médian)** : plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen ( $\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ ), avec  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .
- **La fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit ( $x, y$ ) donné ; elle a pour direction  $z$ .
- **L'épaisseur  $h$**  : l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $\mathbf{z} = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $\mathbf{z} = +h/2$ . **(II.2.d)** [9]

Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

### II.2.1. Les plaques isotropes :

Elles sont constituées d'un matériau isotrope et leur section transversale est homogène, ce type de plaque est définie par deux paramètres élastiques qui sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson. On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art...)

### II.2.2. Les plaques orthotropes :

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires, elles sont définies par quatre paramètres élastiques. On les retrouve dans les bâtiments, les ouvrages d'art et dans les réservoirs de l'industrie chimique, dans les constructions navales et aéronavales.

### II.2.3. Les plaques anisotropes :

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale. [17]

Nous considérons une plaque en FGM (isotrope) d'épaisseur  $h$ , de longueur  $a$  et largeur  $b$ , ayant les dimensions représentées en (figure II.1).

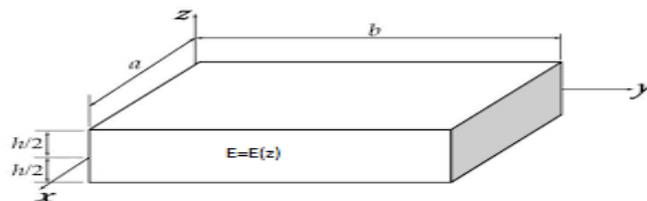


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque.

Le système de coordonnées  $(x, y, z)$ , est choisi et placé au milieu de la plaque.

## II.3. Les modèles analytiques des plaques FGM :

### II.3.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

La théorie classique des plaques CPT est fondée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

La théorie classique est considérée comme le modèle le plus simple, elle ne convient qu'aux plaques minces où la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

---

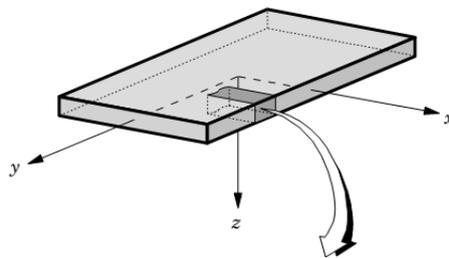
homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'éclatement ( $h/a$  ou  $h/b$ ). [9]

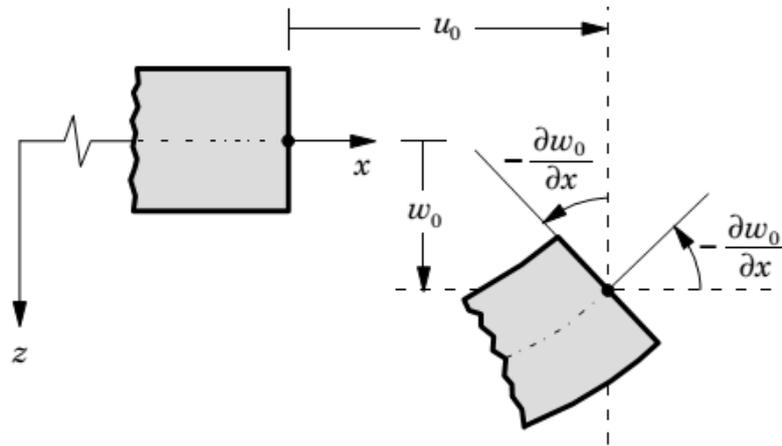
La théorie classique des plaques est celle dans laquelle le champ de déplacement est basé sur l'hypothèse de Kirchhoff, qui comprend les hypothèses suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'éclatement  $h/a$  ou  $h/b \leq 0.05$ ). Elle possède un plan moyen également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation et les lignes droites perpendiculaires à la surface médiane (c'est-à-dire les normales transversales) avant la déformation restent droites après la déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont inextensibles), et elles tournent de telle sorte qu'elles restent perpendiculaires à la surface centrale après déformation.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, l'inertie de rotation est aussi négligée.

La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque. [18], [8]

Examinons les conséquences de l'hypothèse de Kirchhoff. Considérons une plaque d'épaisseur uniforme  $h$  (voir **figure II.2**). Nous utiliserons les coordonnées cartésiennes rectangulaires ( $x, y, z$ ). Le plan ( $x, y$ ) coïncide avec le plan médian géométrique de la plaque et la coordonnée  $z$  étant positive vers le haut. [18]





**Figure II.2 :** Géométries non déformées et déformées de la plaque de Love-Kirchhoff. [18]

A partir des hypothèses de Love-Kirchhoff, le champ de déplacement peut s'écrire comme suit [19] :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_0}{\partial x} \\
 V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_0}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{II.1.a}$$

$$W(x, y, z, t) = W_0(x, y, t)$$

$U_0$  et  $V_0$  : déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement sur le plan moyen de la plaque  $Z = 0$ .

$W_0$  : flèche de la plaque (déplacements de membrane dans les directions z ( $Z = 0$ )).

$\frac{\partial W_0}{\partial x}$  et  $\frac{\partial W_0}{\partial y}$  : rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement  $h/a$  ou  $h/b$  est supérieur ou égal à 0.05.

Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses qui peuvent être interprétées par une surestimation de la rigidité de flexion et par conséquent une surestimation des fréquences propres de vibration et une sous-estimation des déplacements. (Reddy) [19]

### II.3.1.1. Détermination du champ des déformations :

Nous pouvons considérer le **tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé** pour modéliser la déformation en fonction du déplacement. Dans le cas général, les relations déformations- déplacements (de Green Lagrange) sont données par (Reddy) : [8]

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} + \frac{d^2 U_i U_j}{dx_i dx_j} \right) \quad \text{Et} \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} + \frac{d^2 U_i U_j}{dx_i dx_j} \right) \quad (\text{II.1.b})$$

Dans le cadre d'une théorie linéarisée (petites déformations), la relation se réduit (en négligeant les termes du 2ème degré) à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right) \quad \text{Et} \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

### (II.1.c)

Sous forme explicite, l'équation devient [18] :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

### (II.1.d)

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{Et} \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = 0 \quad (\text{II.1.e})$$

Les déformations de l'équation (II.1.d) sont appelées déformations de Von Karman, et la théorie des plaques associées est appelée théorie des plaques de Von Karman. Notez que les déformations transversales ( $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zz}$ ) sont identiquement nulles dans la théorie classique des plaques.

Les déformations de l'équation (II.1.d) : ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ ) ont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + Z \varepsilon^{(1)} \quad (\text{II.1.e})$$

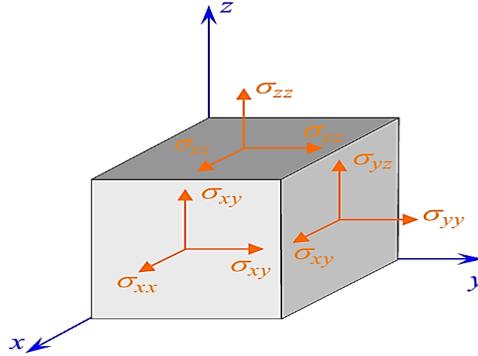
$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.f})$$

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

Où  $(\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$  sont les déformations en membrane, et  $(\varepsilon_{xx}^{(1)}, \varepsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)})$  sont les déformations en flexion. [19]

### II.3.1.2. Détermination du champ des contraintes :

Etudions maintenant le tenseur de contraintes et son lien avec le tenseur de déformation définissant la loi de comportement de la plaque mince, les différentes contraintes agissant sur un point matérielle sont représentées sur la **figure II.3**.



**Figure II.3** : Composants du tenseur des contraintes. [8]

Si nous reprenons la formulation de la **loi élastique de Hooke**  $\sigma = E\varepsilon$  en fonction de **module de Young**  $E$ , du **coefficient de poisson**  $\nu$  et du **module de cisaillement**  $G$ , la relation entre les contraintes et les déformations est exprimée par [20] :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} & , & \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} = 0 & (\gamma_{xz} = 0) \\ \sigma_{yy} = Q_{21}\varepsilon_{xx} + Q_{22}\varepsilon_{yy} & , & \sigma_{yz} = Q_{44}\gamma_{yz} = 0 & (\gamma_{yz} = 0) \\ \sigma_{zz} = Q_{13}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} = 0 & , & \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \end{cases}$$

#### (II.1.g)

Où :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  sont les éléments de contraintes et déformations respectivement. Les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont donnés par les relations suivantes [19] :

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} & , & Q_{12} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad \text{(II.1.k)}$$

Les composantes  $(\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$  du tenseur de contraintes sont ainsi nulles sur les deux faces de la plaque (supérieure et inférieure) et, pour des raisons de continuité, sont négligeables à

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

l'intérieur de la plaque. Pour la même raison, les composantes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  sont non nulles mais peuvent être dépendantes de  $Z$ .

Les contraintes de l'équation (II.1.g) ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = Q_{21} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{xy} = Q_{66} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \end{cases}$$

(II.1.h)

Ou encore sous forme matricielle :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

(II.1.i)

### II.3.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de REISSNER-MINDLIN (FSDT) :

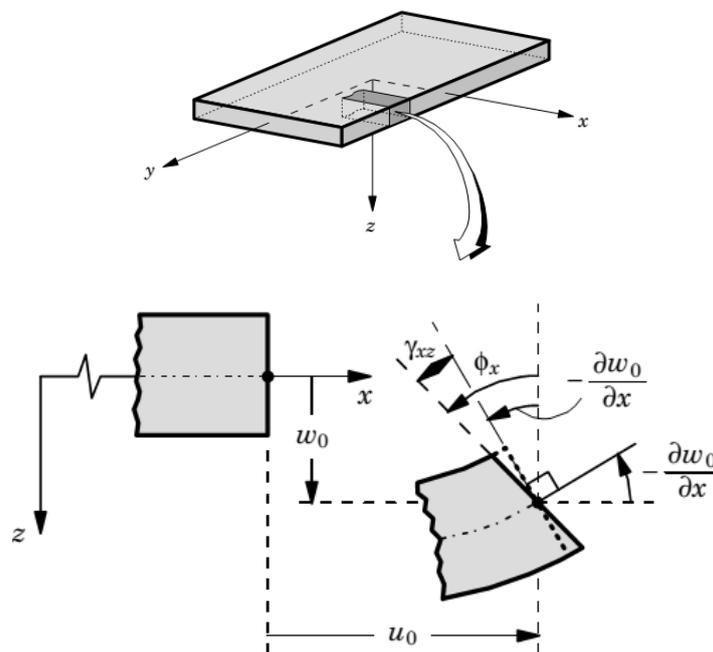
La théorie du premier ordre, applicable pour les plaques moyennement épaisses, s'appelle la théorie du premier ordre car seuls les termes  $z$  du premier ordre apparaissent dans les développements des déplacements dans le plan et tient en compte de l'effet du cisaillement transversale [19]. Contrairement à la théorie classique des plaques minces, cette théorie suppose que les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et non nécessairement perpendiculaire à celui-ci après déformation, et elle étend la cinématique de la CPT en relâchant la restriction de normalité (voir **figure II.4**) et en permettant une rotation arbitraire mais constante des normales transversales. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation.

Dans la littérature on peut trouver trois approches d'approximation pour les plaques épaisses à savoir : MINDLIN, REISSNER et AMBARTSMYAN.

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

L'approche de REISSNER suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de HENCHY-MINDLIN suppose un champ de déplacement linéaire dans le plan à travers l'épaisseur, tandis que l'approche d'AMBARTSMYAN suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées. [9]

Nous considérons une plaque d'épaisseur  $h$  comme la théorie des plaques minces (voir **figure II.4**)



**Figure II.4 :** Illustration de la plaque (non déformée et déformée) de REISSNER-MINDLIN.

[19]

Le champ de déplacements, dans le cadre de la théorie du premier ordre, est donné par [19] :

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) + Z\phi_x(x, y, t)$$

$$V(x, y, z, t) = V_0(x, y, t) + Z\phi_y(x, y, t) \tag{II.2.a}$$

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$W(x, y, z, t) = W_0(x, y, t)$$

Avec :

$U_0$  et  $V_0$  et  $W_0$  : déplacements de membrane dans les directions x et y, z respectivement.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement. Elles sont données par :

$$\phi_x = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial W_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \phi_y = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial W_0}{\partial y} \quad (\text{II.2.b})$$

### II.3.2.1. Détermination du champ des déformations :

Nous utilisons les relations déformations- déplacements de Green Lagrange (Reddy) que nous avons utilisé dans la théorie classique des plaques minces (II.1.c) pour déterminer le tenseur de déformations [8] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right) \quad \text{et} \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

Les déformations non linéaires de Von Karman associées au champ de déplacement [18] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + Z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} + Z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial y} + Z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.2.c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right), \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \left( \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.2.d})$$

Notez que les déformations  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$  sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que les déformations de cisaillement transversal  $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  sont constantes. Les déformations des équations (II.2.c), (II.2.d) peuvent être exprimées sous forme matricielle (tensorielle) comme suit :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = (\varepsilon^{(0)}) + Z(\varepsilon^{(1)}) + (\varepsilon^{(2)})$$

(II.2.e)

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(II.2.f)}$$

Où  $(\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$  sont les déformations en membrane, et  $(\varepsilon_{xx}^{(1)}, \varepsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)})$  sont les déformations en flexion et  $(\gamma_{xz}^{(2)}, \gamma_{yz}^{(2)})$  sont les déformations en cisaillement. [19]

### II.3.2.2. Détermination du champ des contraintes :

Nous procédons de la même manière que pour la théorie classique des plaques minces pour déterminer le tenseur des contraintes. Nous utilisons la loi élastique de Hooke reliant  $E, \nu$  et  $G$ .

La relation entre les contraintes et les déformations sont [20] :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yy} = Q_{12}\varepsilon_{xx} + Q_{22}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{yz} = Q_{44}\gamma_{yz} \\ \sigma_{zz} = Q_{13}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} = 0, & \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \end{cases} \quad \text{(II.2.g)}$$

Où :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  sont les éléments de contraintes et déformations respectivement. Avec :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{II.2.h})$$

La composante  $\sigma_{zz}$ , du tenseur de contraintes est nulle sur les deux faces de la plaque et par raison de continuité sont négligeables à l'intérieur de la plaque. Pour la même raison, les composantes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  sont non nulles mais peuvent dépendre de  $z$ . Les contraintes de l'équation (II.2.h) ont la forme suivante (du tenseur) :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right), \sigma_{xz} = Q_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} = Q_{12} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right), \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xy} = Q_{66} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right), \sigma_{yz} = Q_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{cases}$$

(II.2.i)

Sous forme matricielle, on obtient :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.j})$$

### II.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les conditions de distribution linéaire du déplacement suivant l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. La principale motivation de cette théorie est d'éliminer le facteur arbitraire de

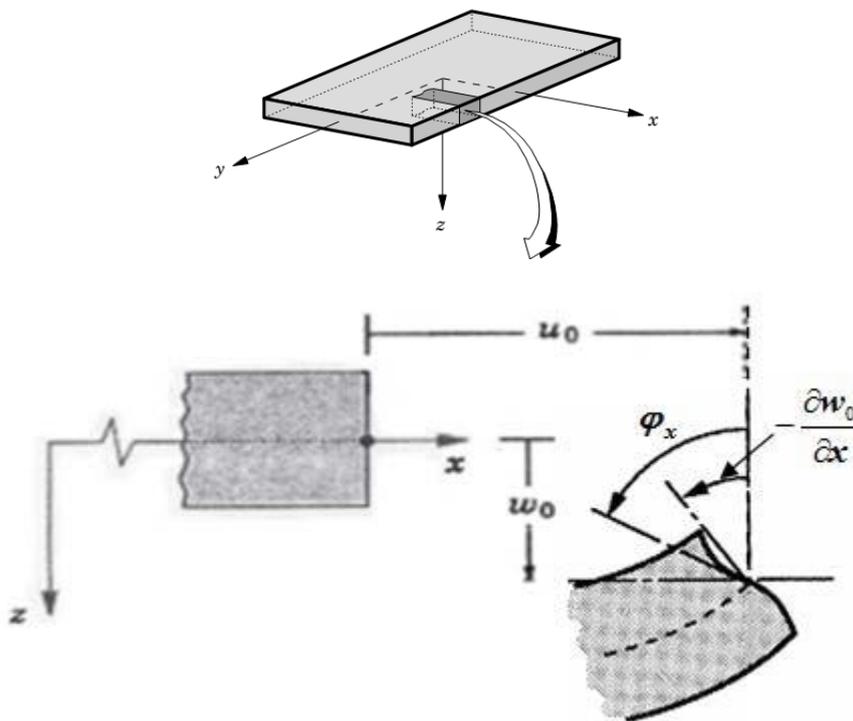
## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

correction du cisaillement et d'obtenir de meilleures estimations des contraintes et des déplacements dans le plan en prenant en compte la déformation des normales (voir **Figure II.5**). [17]

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre élevé ont été proposées par NAGHDI, REDDY, IYENGAR et KRISHNA-MURTY. [9]

Les hypothèses qui sont à l'origine du développement de ces théories d'ordre élevé sont:

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable. [8]



**Figure II.5 :** Illustration de la plaque (non déformée et déformée) d'ordre élevé. [10], [19]

Généralement cette théorie utilise un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement ayant la forme suivante : [9]

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) + Z\phi_\alpha(x, y, t) + Z^2\phi_\alpha^2(x, y, t) + \dots + Z^n\phi_\alpha^n(x, y, t) \quad (\text{II.3.a})$$

Où  $n$  détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love  $n = 0$ . La théorie de REISSNER-MINDLIN est une théorie du premier ordre avec  $n = 1$  pour les déplacements dans le plan et  $n = 0$  pour le déplacement normal.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de REISSNER, HENCHY-MINDLIN et d'AMBARTSMYAN et leur champ de déplacements est donné par : [17]

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) + Z\phi_x(x, y, t) + f(z)\varphi_x(x, y, t)$$

$$V(x, y, z, t) = V_0(x, y, t) + Z\phi_y(x, y, t) + f(z)\varphi_y(x, y, t) \quad (\text{II.3.b})$$

$$W(x, y, z, t) = W_0(x, y, t)$$

$$\text{On pose : } \varphi_x = \frac{\partial W_0}{\partial x} + \phi_x \text{ et } \varphi_y = \frac{\partial W_0}{\partial y} + \phi_y \quad (\text{II.3.c})$$

Avec :

$U_0$  et  $V_0$  et  $W_0$  : déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $z$  respectivement.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

$\varphi_x$  et  $\varphi_y$  : fonctions inconnues dépendant des variables  $x$ ,  $y$ ,  $t$ .

$f(z)$  : est une fonction de cisaillement transverse (ou de forme) caractérisant les théories correspondantes. Elle est propre à chaque théorie (voir **tableau III.1**).

Nous pouvons noter que les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) peuvent être obtenus en prenant  $f(z) = 0$  ( $n = 0$ ), tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction  $f(z) = Z$  ( $n = 1$ ). Il existe aussi des théories de déformation d'ordre élevé du deuxième ordre ( $n = 2$ ) et du troisième ordre ( $n = 3$ ).

Le tableau suivant résume quelques fonctions de cisaillement  $f(z)$  [8] :

Théorie	Fonction de forme $f(z)$
REDDY	$f(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2)$
TOURATIER	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin(\frac{\pi z}{h})$
KARAMA	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

REISSNER	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)$
SOLDATOS	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
MANTARI	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos(\pi z/h)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right)$
AIT ATMAN	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$
ELMEICHE	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} - z$
AYDOGDU	$f(z) = z \alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$
NGUYEN	$f(z) = \sin^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$
MAHI et al.	$f(z) = \frac{h}{2} \tan\left(2\frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3\cos^2(1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$
MAHI et al.	$f(z) = z \left(1 - \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \beta \left(\frac{z}{h}\right)^4\right)$

**Tableau III.1 :** Différentes fonctions de forme de théorie HSDT pour des plaques FGM. [8]

### II.3.4. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à 4 variables :

Cette théorie raffinée satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement contrairement à d'autres théories. La théorie de déformation en cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) à 4 variables prend en compte la déformation par cisaillement transversal dans la formulation avec les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion ( $W_b$ ) et de cisaillement ( $W_s$ ).

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

– Les parties de flexion et de cisaillement sont des fonctions des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $t$  uniquement, et la partie d'étirement est une fonction  $x$ ,  $y$ ,  $t$  et  $z$ .

– Les déplacements dans le plan ( $U$  et  $V$ ) dans les coordonnées  $x$  et  $y$  sont divisés en parties extension, flexion et cisaillement. Il est montré que les déplacements dans le plan sont des fonctions de  $x$ ,  $y$ ,  $t$  et  $z$  dans lesquelles les parties de flexion sont semblables à celles présentées par le CPT, et les parties de cisaillement sont en liaison avec les variations hyperboliques des déformations de cisaillement.

Selon cette théorie, le champ des déplacements axiaux et transversaux de la plaque, est donné par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial W_s}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial W_s}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{(II.4.a)}$$

$$W(x, y, z, t) = W_b(x, y, t) + W_s(x, y, t)$$

Où :

$U_0$  et  $V_0$  : Déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Le déplacement transversal  $W$  comprend deux composantes de flexion  $W_b$  et de cisaillement  $W_s$

Nous avons donc quatre variables :  $U_0, V_0, W_b$  et  $W_s$

$f(z)$  et  $\varphi(z)$  : sont les fonctions de forme représentatives qui dénote la distribution de la contrainte ou de la déformation de cisaillement transversal le long de l'épaisseur de la plaque.

Dans cette étude, nous utilisons la fonction de forme suivante :

$$\begin{aligned} f(z) &= Z - \left[ \frac{h}{2} \tan\left(2 \frac{Z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cos^2(1)} \left(\frac{Z^3}{h^2}\right) \right], \quad \varphi(z) = \left[ \frac{h}{2} \tan\left(2 \frac{Z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cos^2(1)} \left(\frac{Z^3}{h^2}\right) \right] \\ g(z) &= 1 - \frac{df(z)}{dz} = 1 - \left[ \tanh^2\left(2 \frac{Z}{h}\right) + \frac{4}{\cos^2(1)} \left(\frac{Z}{h}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

(III.4.b)

Il à noter que pour utiliser les fonctions de forme citées du tableau III.1 dans le champ de déplacement à 4 variables, il suffit de remplacer  $f(z)$  par  $Z - f(z)$ . [21]

### II.3.4.1. Détermination du champ des déformations :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

Nous procédons de la même manière que pour la théorie du premier ordre (relation **(II.1.c)** de Green Lagrange proposée par Reddy) pour déterminer le tenseur de déformation [8]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right) \quad \text{Et} \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

D'où les déformations suivantes [21] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} + 2f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_b}{\partial x} + g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_b}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_b}{\partial y} + g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial W_b}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

### (II.4.c)

Les déformations de cisaillement sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} + 2f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left( -\frac{\partial W_b}{\partial x} + g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_b}{\partial x} \right) = g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \left( -\frac{\partial W_b}{\partial y} + g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial W_b}{\partial y} \right) = g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

### (II.4.d)

Les déformations des équations **(II.3.3.c)**, **(II.3.3.d)** peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(b)} \\ \varepsilon_{yy}^{(b)} \\ \gamma_{xz}^{(b)} \\ \gamma_{yz}^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} + g(z) \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + Z \varepsilon^{(b)} + f(z) \varepsilon^{(s)} + g(z) \gamma^{(s)} \quad (\text{II.4.e})$$

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(b)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(b)} \\ \varepsilon_{yy}^{(b)} \\ \gamma_{xz}^{(b)} \\ \gamma_{yz}^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ -2\frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.f})$$

$$\varepsilon^{(s)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ 2\frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(s)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial W_s}{\partial x} \\ \frac{\partial W_s}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### II.3.4.2. Détermination du champ des contraintes :

Les relations contrainte-déformation pour une plaque élastique linéaire sont données par la loi de Hooke généralisée  $\sigma = E\varepsilon$ . Elles s'écrivent comme suit [21] :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yy} = Q_{21}\varepsilon_{xx} + Q_{22}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{yz} = Q_{44}\gamma_{yz} \\ \sigma_{zz} = 0(\varepsilon_{zz} = 0) & , \quad \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \end{cases}$$

(II.4.g)

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

Où :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. Les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

### (II.4.h)

Les contraintes de l'équation (II.3.g) ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = Q_{21} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{xy} = Q_{66} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} + 2f(z) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_{xz} = Q_{55} g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} = Q_{44} g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) \end{cases} \quad \text{(II.4.i)}$$

Sous forme matricielle :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} + f(z) \left[ \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} + f(z) \left[ \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} + f(z) \left[ 2 \frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \right] \\ g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) \\ g(z) \left( \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) \end{pmatrix}$$

### (II.4.j)

#### II.3.5. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à 5 variables :

Dans cette section, nous décrivons une nouvelle théorie d'ordre supérieur de déformation en cisaillement des plaques proposée par MAHI et al. Les déplacements dans le

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

plan utilisent une combinaison de la fonction tangente hyperbolique et de la fonction polynomiale. L'effet d'étirement de l'épaisseur est ignoré. Cette nouvelle théorie possède cinq degrés de liberté, fournit des déformations transversales, paraboliques dans le sens de l'épaisseur et ne nécessite donc pas de facteur de correction du cisaillement.

Le champ de déplacement de cette théorie s'exprime par :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x(z) \left[ \psi_x(x, y, t) + \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\ V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W}{\partial y} + \varphi_y(z) \left[ \psi_y(x, y, t) + \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.5.a})$$

$$W(x, y, z, t) = W_0(x, y, t)$$

$U_0$  et  $V_0$  et  $W_0$  : déplacements de membrane dans les directions x et y, z respectivement.

$\psi_x$  et  $\psi_y$  : rotations de la normale transversale au plan moyen autour des axes x, y.

Nous avons donc cinq variables :  $U_0, V_0, W_0, \psi_x$  et  $\psi_y$ .

$\varphi$  : la fonction de forme (cisaillement) de la théorie unifiée qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque.

Elle est définie comme suit :

$$\varphi_x(z) = \varphi_y(z) = \varphi(z) = \frac{h}{2} \tan\left(2\frac{Z}{h}\right) - \frac{4}{3\cos^2(1)} \left(\frac{Z^3}{h^2}\right)$$

### (II.5.b)

Comme nous pouvons le voir, la fonction de forme de la présente théorie utilise une combinaison de fonctions tangentes hyperboliques et polynomiale. Il convient de noter que le présent modèle de déformation par cisaillement est basé sur les mêmes hypothèses que celles de la théorie de Reddy. En effectuant des dérivations simples, on peut facilement vérifier que la présente théorie tient compte de la variation parabolique des déformations transversales de cisaillement et, par conséquent, des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. [22]

### II.3.5.1. Détermination du champ des déformations :

Nous procédons de la même manière que pour la théorie du premier ordre (relation (II.1.c) de Green Lagrange proposée par Reddy) pour déterminer le tenseur de déformation [8] :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right) \quad \text{et} \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

D'où les déformations suivantes [22] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

### (II.5.c)

Les déformations de cisaillement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left( -\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \left( -\frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad \text{(II.5.d)}$$

Les déformations représentées par les équations (II.5.c), (II.5.d) peuvent être exprimées sous forme matricielle (tensorielle) comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} + \varphi(z) \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \\ \gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + Z \varepsilon^{(1)} + \varphi(z) \varepsilon^{(2)} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \varepsilon^{(3)}$$

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ -2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.e})$$

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \\ \gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.f})$$

### II.3.5.2. Détermination du champ des contraintes :

L'état de la contrainte linéaire pour une plaque est déterminé à l'aide de la loi de Hooke généralisée  $\sigma = E\varepsilon$  qui permet d'obtenir les contraintes normales et de cisaillement transversal sous la forme suivante : [22]

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11}\varepsilon_{xx} + Q_{12}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yy} = Q_{21}\varepsilon_{xx} + Q_{22}\varepsilon_{yy} & , \quad \sigma_{yz} = Q_{44}\gamma_{yz} \\ \sigma_{zz} = 0(\varepsilon_{zz} = 0) & , \quad \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.5.g})$$

Où :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy})$  sont les éléments de contraintes et déformations respectivement. Les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés comme suit :

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad (\text{II.5.h})$$

Les contraintes de l'équation (II.5.g) ont la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = Q_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \right) \\ \sigma_{yy} = Q_{21} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \right) \\ \sigma_{xy} = Q_{66} \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] \right) \\ \sigma_{xz} = Q_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} = Q_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

(II.5.i)

Sous forme matricielle, l'état des contraintes devient :

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.j})$$

## Chapitre II : Théories de déformation des plaques FGM

---

### II.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les théories des plaques applicables aux structures FGM ainsi que les différents modèles analytiques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Nous avons introduit, en particulier, les théories d'ordre élevé en cisaillement à quatre et cinq variables qui sont aussi des théories HSDT. Leur formulation est basée sur les hypothèses simplificatrices ayant une approche bidimensionnelle d'élasticité. Nous avons écrit les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés propres à chaque théorie de déformation. Le tenseur de déformation de Von Karman linéaire a été utilisé pour obtenir les relations déformation-déplacement bidimensionnelles. Le tenseur de contraintes, pour les plaques en matériau à gradient de propriétés (FGM), est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée d'élasticité linéaire. Enfin, quelques fonctions de forme (appelées aussi fonctions de cisaillement) de la théorie d'ordre élevé ont été aussi introduites afin de compléter ce chapitre.

## **Chapitre III**

# **Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités**

## **Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités**

---

### **III.1. Introduction :**

L'objectif de ce chapitre est de modéliser mathématiquement une plaque FGM poreuse. Habituellement, pour modéliser mathématiquement un FGM, on utilise une loi de distribution de la matière selon l'épaisseur de la plaque. Il existe plusieurs lois de propriétés (S-FGM, E-FGM, P-FGM, ...). Une loi de ces propriétés décrit une continuité de matière : on commence par un matériau de la face inférieure et on se retrouve avec un autre matériau sur la face supérieure de la plaque. Entre les deux faces il y a un mélange des deux matériaux. Le pourcentage des constituants change en allant de la face inférieure à la face supérieure. Cela veut dire que plus on avance vers la face supérieure, plus la quantité du matériau de la face inférieure diminue et celui de la face supérieure augmente juste que le mélange ne soit constitué que du matériau de la face supérieure au niveau de cette face. Dans certaines, nous pouvons choisir un pourcentage de constituants au niveau de chaque faces et non pas des couches isotropes. La modélisation sera ensuite complétée en incluant la porosité.

Selon le glossaire international d'hydrologie [23], la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz).

Pour notre étude, nous avons choisi la loi de mélanges P-FGM modifiée basée sur le modèle de Voigt et qui tient compte d'une distribution uniforme ou non uniforme de la porosité à travers l'épaisseur de la plaque.

### **III.2. Les propriétés matérielles des plaques FGM :**

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur. Différentes lois de mélange existent et découlent des travaux menés sur composites. Nous citons à titre d'exemple : le modèle de Voigt, Reuss, Hirsch-Dougill, les

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

approches de Tsai-Pagano ou de Popovics qui sont des cas particuliers du modèle de Hirsch-Dougill, du modèle de Hashin-Shtrikman, etc.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{III.1})$$

$P$  : Propriété le long de l'axe  $z$  ;

$P_i$  : La propriété mécanique du constituant (i) ;

$V_i$  : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{III.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{III.3})$$

$P$  : Propriété le long de l'axe  $z$  ;

$P_m$  : La propriété mécanique du métal ;

$P_c$  : La propriété mécanique de la céramique ;

$V_m$  : La fraction volumique du métal ;

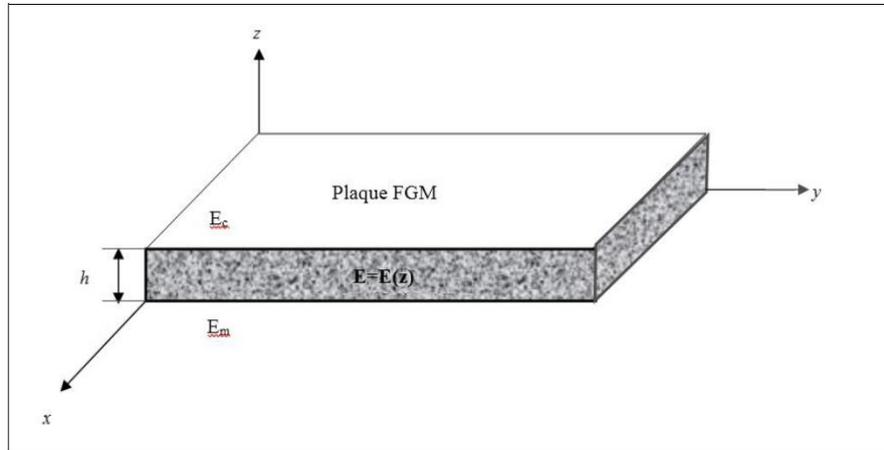
$V_c$  : La fraction volumique de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{III.4})$$

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure III.1 :** Géométrie d'une plaque en FGM. [9]

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (**figure III.1**).

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes et sont déterminés en fonction du besoin (conditions d'utilisation). Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (**l'axe  $z$** ) soit :  $E = E(z)$  et  $V = V(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie suivant la loi de puissance P-FGM, loi de fonction sigmoïde S-FGM ou loi de fonction exponentielle E-FGM [24].

### III.2.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance qui se traduit par :

$$V(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad \text{(III.5)}$$

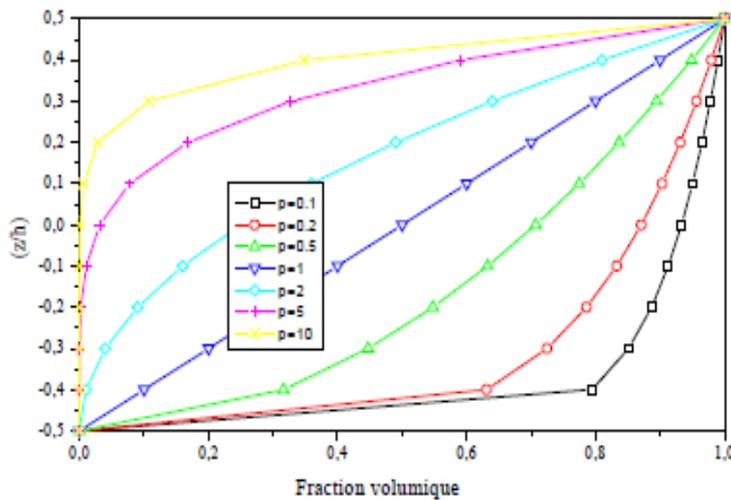
## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

Où  $p$  est un paramètre de puissance et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges suivants :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad (\text{III.6})$$

Où  $P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les propriétés de la surface inférieure (métal indice  $m$  à  $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure (céramique indice  $c$  à  $z = +h/2$ ) de la plaque FGM,  $V(z)$  étant la fraction volumique du P-FGM défini par la relation (III.5).

La variation de la fraction volumique dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure III.2). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure III.2 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM. [9]

Nous considérons une loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice  $c$ ) et surface inférieure 100% métal (indice  $m$ )), les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{III.7})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V(z) \quad (\text{III.8})$$

$E(z)$ : La variation du module de Young le long de l'axe  $z$  ;

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

---

$E_m$  : Module de Young du métal pur (100%)

$E_c$  : Module de Young de la céramique pure (100%)

$\rho(z)$  : La variation de la masse volumique le long de l'axe z

$\rho_m$  : La masse volumique du métal pur (100%) ;

$\rho_c$  : La masse volumique de la céramique pure (100%).

Lorsque  $\rho = 1$ , la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que lorsque  $\rho = 1/2$  ou  $2$ , la composition change d'une manière parabolique ou quadratique. Dans le cas par exemple d'un revêtement d'isolation thermique (barrière thermique), il est souhaitable d'avoir le maximum de céramique sur la surface exposé à de fortes températures pour améliorer l'isolation sans sacrifier les aspects mécanique des zones graduées. Pour répondre à ce besoin, un profil parabolique enrichi de la céramique est tout à fait adapté. [25]

### III.2.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [25]. La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies alors par [26] :

$$V(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{III.9.a})$$

$$V'(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{III.9.b})$$

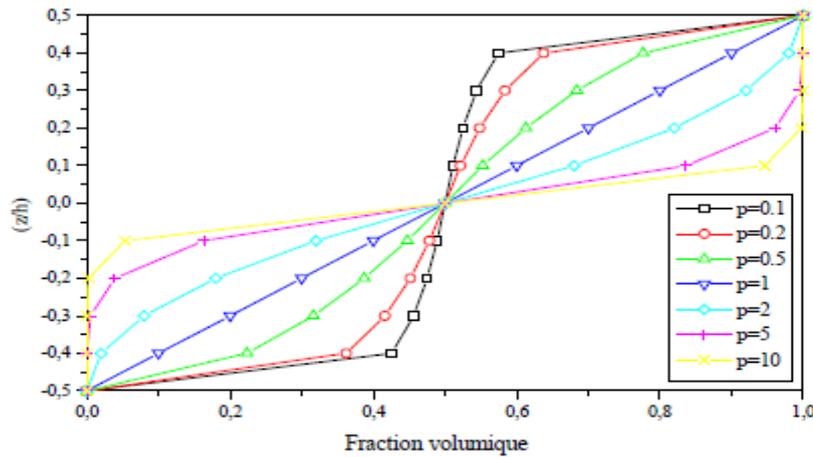
EN se basant sur la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

$$E(z) = V(z)E_1 + (1 - V(z))E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{III.10.a})$$

$$E(z) = V'(z)E_1 + (1 - V'(z))E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{III.10.b})$$

La **figure III.3** montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (III.9.a) et (III.9.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée Plaque S-FGM.



**Figure III.3 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM. [9]

### III.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, certains chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme suivante :

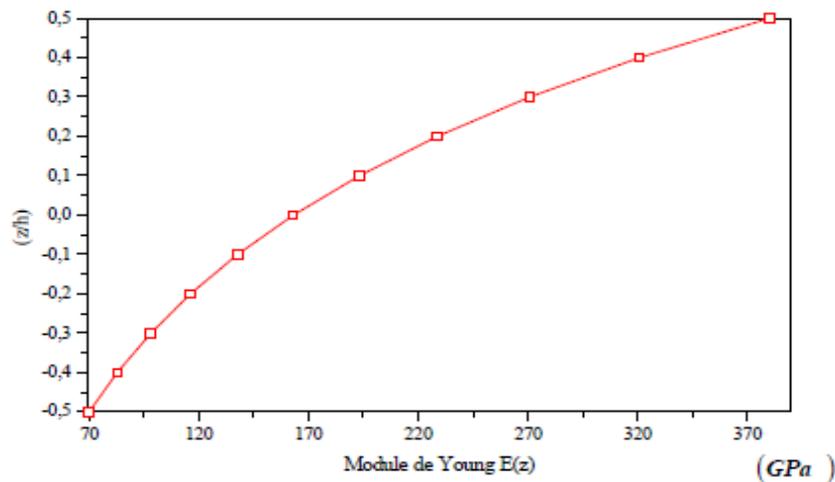
$$E(z) = E_2 e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{III.12})$$

La **figure III.4** montre que la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM. [27]

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités



**Figure III.4 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM. [9]

### III.4. Définition de la porosité :

La porosité c'est une propriété caractéristique d'un milieu et c'est aussi une valeur numérique définie comme le rapport entre le volume des vides et le volume total d'un milieu poreux :

$$\alpha = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (\text{III.13})$$

Avec :  $\alpha$  c'est la porosité,  $V_{pores}$  le volume des pores et  $V_{total}$  le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de solide et du volume des pores.

La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes qui est sans dimension).

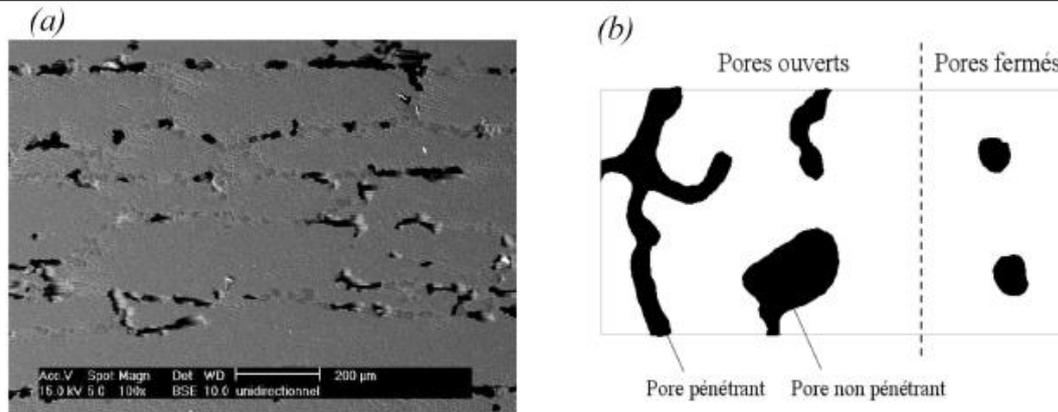
D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant à priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la **figure III.5** (a)). Schoeller, distingue deux catégories de pores représentés sur la **figure III.5** (b) :

–Les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.

–Les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité.

[23]

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités



**Figure III.5 :** (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores. [23]

### III.5. Différents types de distribution de porosités dans les FGM :

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les lois mathématiques décrivant la variation des propriétés mécaniques ainsi que la distribution de la porosité à travers l'épaisseur d'un FGM. Plusieurs lois existent mais nous avons choisi de décrire celles qui sont les plus utilisées dans la littérature scientifique.

Supposant qu'un FGM est composé d'un mélange de deux constituants 1 (métal) et 2 (céramique) et possède des porosités réparties dans l'épaisseur. Soit  $P_1$  la propriété du constituant 1 et  $P_2$  la propriété mécanique du constituant 2. Les propriétés  $P_1$  et  $P_2$  représentent soit le module de Young  $E$ , le coefficient de poisson  $\nu$ , le module de rigidité  $G$  ou la masse volumique  $\rho$ .

#### III.5.1. Porosités dispersées uniformément dans l'épaisseur d'une plaque FGM :

Lorsque les porosités sont dispersées uniformément dans les phases du constituant 1 et les phases du constituant 2, la propriété générale  $P$  du matériau de la plaque FGM poreuse est donnée par la forme modifiée suivante :

$$P(z) = P_1 \left[ V_1(z) - \frac{\alpha}{2} \right] + P_2 \left[ V_2(z) - \frac{\alpha}{2} \right] \quad \text{(III.14)}$$

Où :

$\alpha$  : est la fraction volumique de la porosité ( $\alpha \ll 1$ ).

$V_1(z)$  : est la fraction volumique du constituant 1.

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

$V_2(z)$  : est la fraction volumique du constituant 2.

Selon la loi de Voigt, nous avons :

$$V_1(z) + V_2(z) = 1 \quad \text{(III.15)}$$

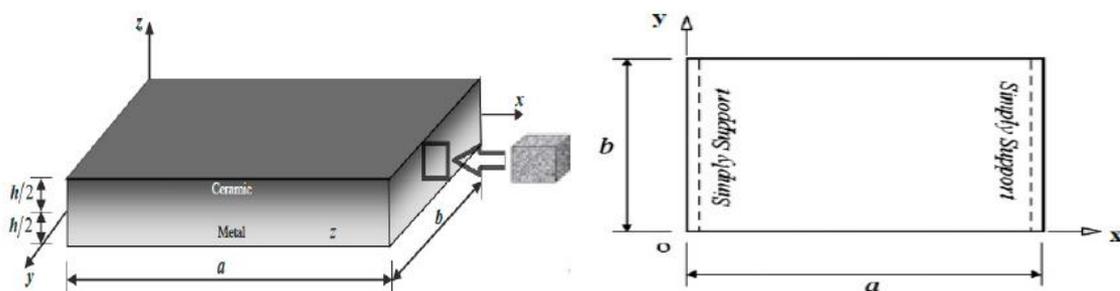
Dans le cas d'un P-FGM :

$$V_1(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n, \text{ alors } V_2(z) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^n \quad \text{(III.16)}$$

Où  $n$  est l'index de la fraction volumique. [28]

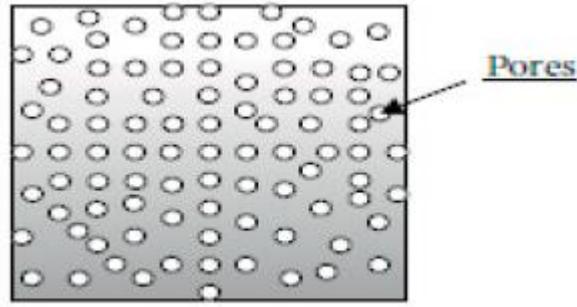
### III.5.2. P-FGM avec porosité :

Considérons une plaque FGM rectangulaire de longueur  $a$ , de largeur  $b$ , ayant une épaisseur  $h$  et faite d'un matériau fonctionnellement gradué comme illustré sur la (**figure III.6**). Comme on peut le voir sur la (**figure III.7**), la plaque FG obtenue devient une plaque FG imparfaite en raison de la présence des porosités régulières dans la distribution de ses propriétés matérielles. Les propriétés matérielles de la plaque FGM, telles que le module de Young  $E$  et la masse volumique, sont supposées être fonction de la fraction volumique des matériaux constitutifs. La fonction de la loi de puissance P-FGM est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. [21]



**Figure III.6 :** Configuration géométrique d'une plaque FG avec porosité en coordonnées cartésiennes rectangulaires. [21]

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités



**Figure III.7 :** Distribution uniforme de la porosité à travers la section transversale du P-FGM.

[21]

### III.5.2.1. P-FGM avec porosité de type I (uniforme) :

Pour la plaque P-FGM avec des porosités uniformément réparties (Porosité-type I), la propriété générale du matériau suivant l'épaisseur est exprimée comme suit [28] :

$$P(z) = (P_2 - P_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_1 - \frac{\alpha}{2} (P_2 + P_1) \quad (\text{III.17})$$

Les propriétés mécaniques s'écrivent donc comme suit :

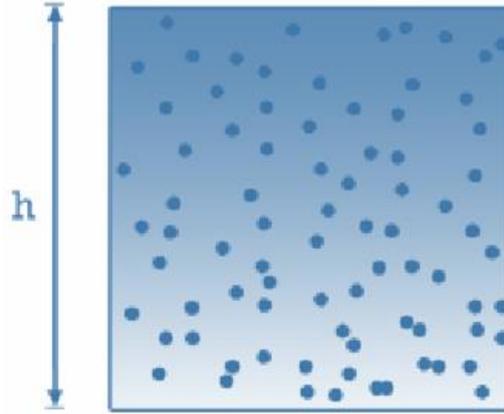
$$E(z) = (E_2 - E_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + E_1 - \frac{\alpha}{2} (E_2 + E_1) \quad (\text{III.18})$$

$$\rho(z) = (\rho_2 - \rho_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \rho_1 - \frac{\alpha}{2} (\rho_2 + \rho_1) \quad (\text{III.19})$$

$$\nu(z) = (\nu_2 - \nu_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \nu_1 - \frac{\alpha}{2} (\nu_2 + \nu_1) \quad (\text{III.20})$$

$$G(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{E(z)}{1 + \nu(z)} \right] \quad (\text{III.21})$$

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités



**Figure III.8** : Plaque poreuse avec distribution uniforme de type I. [28]

### III.5.2.2. P-FGM avec porosité de type II (non uniforme):

Pour la plaque P-FGM avec des porosités non uniformément réparties (Porosité-type II), la propriété générale du matériau suivant l'épaisseur est exprimée comme suit [28] :

$$P(z) = (P_2 - P_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_1 - \frac{\alpha}{2} (P_2 + P_1) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{h} \right) \quad (\text{III.22})$$

Dans ce cas, les propriétés mécaniques s'écrivent comme suit :

$$E(z) = (E_2 - E_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + E_1 - \frac{\alpha}{2} (E_2 + E_1) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{h} \right) \quad (\text{III.23})$$

$$\rho(z) = (\rho_2 - \rho_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \rho_1 - \frac{\alpha}{2} (\rho_2 + \rho_1) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{h} \right) \quad (\text{III.24})$$

$$\nu(z) = (\nu_2 - \nu_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \nu_1 - \frac{\alpha}{2} (\nu_2 + \nu_1) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{h} \right) \quad (\text{III.25})$$

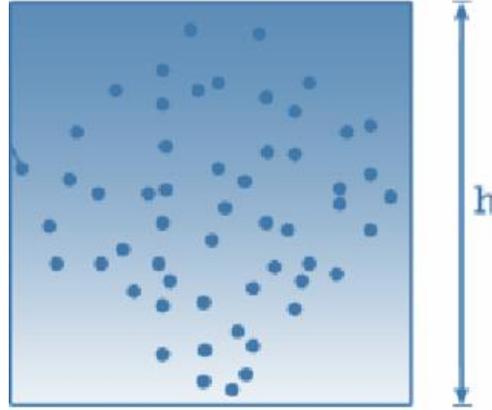
Pour les 2 types de porosités dans un FGM, les coefficients de rigidités réduites ( $Q_{ij}$ ) s'écrivent :

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \left[ \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \right] \quad (\text{III.26})$$

$$Q_{12}(z) = Q_{21}(z) = \nu(z) Q_{11}(z) = \left[ \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} \right] \quad (\text{III.27})$$

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = G(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{E(z)}{1+\nu(z)} \right] \quad (\text{III.28})$$



**Figure III.9** : Plaque poreuse avec distribution non uniforme de type II. [28]

### III.6. Autre type de porosités dans un FGM :

Certaines publications font état de plusieurs autres types de distribution de porosités dans un FGM. Nous ne citons dans ce présent travail que deux types de distribution de porosité dans l'épaisseur d'une plaque FG. [29]

#### III.6.1. FGM avec porosité de type I (symétrique) :

Pour ce type de porosité, la propriété générale du matériau suivant l'épaisseur est exprimée comme suit [32] :

$$P(z) = P_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.29})$$

Dans ce cas, les propriétés mécaniques s'écrivent :

$$E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.30})$$

$$G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.31})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.32})$$

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités

$$v(z) = v_1 = \text{constante} \quad (\text{III.33})$$

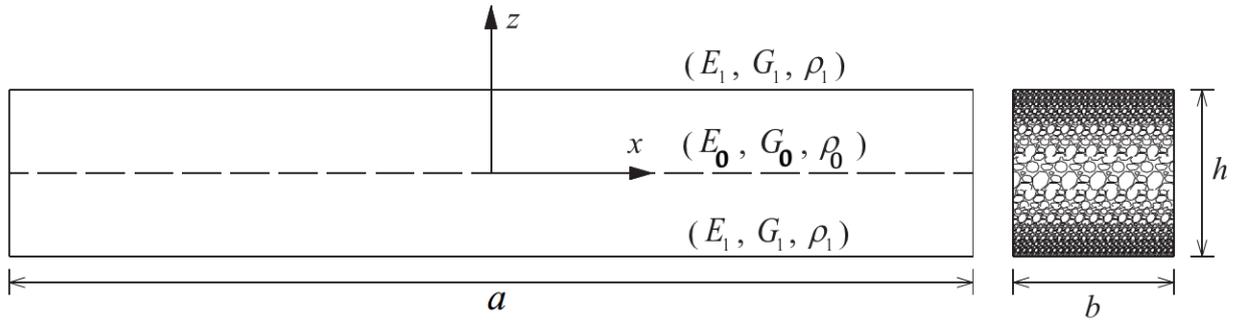


Figure III.10 : Plaque poreuse avec distribution de type I. [29]

### III.6.2. FGM avec porosité de type II (non symétrique) :

Pour ce type de porosité, la propriété générale du matériau suivant l'épaisseur est exprimée comme suit :

$$P(z) = P_1 \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{III.34})$$

Dans ce cas, les propriétés mécaniques s'écrivent :

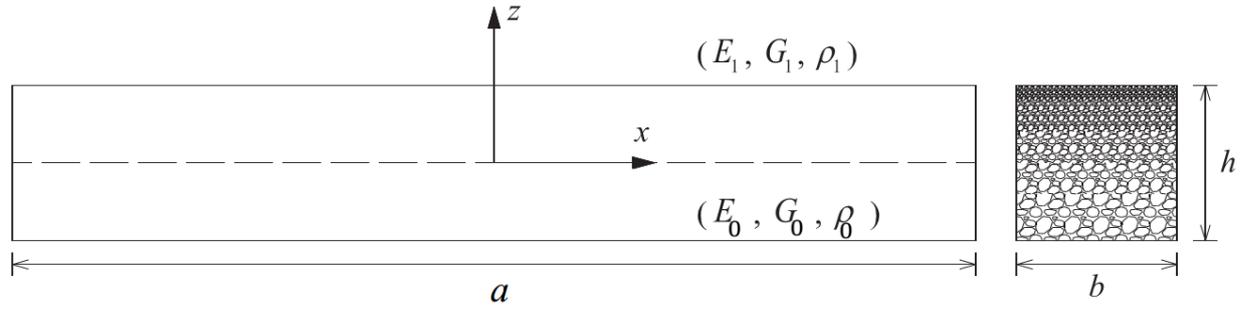
$$E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{III.35})$$

$$G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{III.36})$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{III.37})$$

$$v(z) = v_1 = \text{constante} \quad (\text{III.38})$$

## Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités



**Figure III.11** : Plaque poreuse avec distribution de type II. [29]

Ou  $E_1, G_1, \rho_1$  et  $\nu_1$  représentent les valeurs maximales des propriétés mécaniques. Ce sont les données du matériau sans porosité.

Dans les équations ci-dessus, les paramètres  $e_0$  (le coefficient de porosité) et  $e_m$  (le coefficient de porosité pour la densité massique) sont définis comme suit :

$$e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1} \quad (\text{III.39})$$

$$\text{Et } e_m = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (\text{III.40})$$

Avec :

$$\frac{E_0}{E_1} = \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \quad (\text{III.41})$$

La relation entre  $e_0$  et  $e_m$  est donnée alors par :

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (\text{III.42})$$

$E_0, G_0, \rho_0$  et  $\nu_0$  sont les valeurs minimales des propriétés mécaniques en présence de la porosité. Ces valeurs sont calculées en utilisant le coefficient de porosité  $e_0$ . [29]

## **Chapitre III : Modélisation mathématique des plaques FGM comportant des porosités**

---

### **III.7. Conclusion :**

Dans ce chapitre, la modélisation mathématique des différentes propriétés d'une plaque FGM a été faite. Des présentations graphiques de chaque modèle (modèle de la plaque S-FGM, P-FGM et E-FGM) ont été ajoutées pour mieux apprécier la distribution des propriétés principales suivant l'épaisseur de la plaque FGM. Grâce à la recherche bibliographique, nous avons constaté qu'il existe plusieurs fonctions de loi de mélange qui décrivent le gradient de distribution des deux matériaux constituants suivant l'épaisseur. Nous avons ensuite modélisé une plaque FGM comportant des porosités distribuées le long de l'épaisseur. Pour notre travail, nous avons choisi la loi de mélanges P-FGM avec une distribution uniforme et non uniforme (de type 1 et 2) de la porosité à travers l'épaisseur de la plaque. Pour compléter ce chapitre, nous avons jugé utile de décrire deux autres types de distribution de porosité (symétrique et non symétrique) dans un FGM.

## **Chapitre IV**

# **Modélisation des vibrations libres d'une plaque FGM comportant des porosités**

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

---

### IV.1. Introduction :

Pour pouvoir étudier un comportement, que soit statique ou dynamique des structures ayant comme éléments structuraux des poutres, des plaques ou des coques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate qui peut décrire correctement leurs comportements vis-à-vis des charges appliquées (mécanique, thermique, ... etc.). [30]

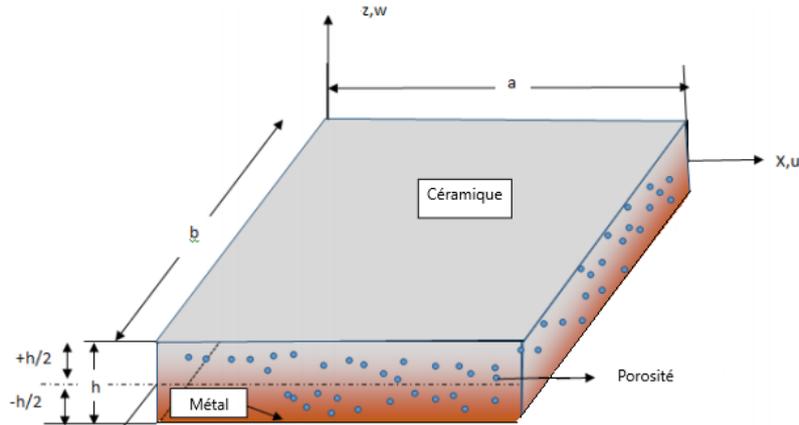
Chaque théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées (loi de Hook généralisée pour les structures élastiques). [9]

Dans ce chapitre, la modélisation de la vibration libre des plaques FGM comportant des porosités est étudiée. La théorie contient seulement quatre variables (théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à 4 variables) au lieu de cinq comme pour les autres théories de déformation HSDT. Le champ de déplacement adopté est basé sur une variation parabolique du déplacement transversal à travers l'épaisseur, ce qui permet d'éviter d'utiliser le facteur de correction du cisaillement transversal. La composante du déplacement vertical est divisée en deux termes : de flexion et de cisaillement. L'effet d'étirement de l'épaisseur est négligé (pas de déformation selon l'axe  $z$ ). Cette hypothèse permet de réduire le nombre de paramètres de déplacement et par conséquent le nombre d'équations différentielles de mouvement à résoudre. Les propriétés mécaniques (module de Young, masse volumique, etc.) de la plaque varient à travers l'épaisseur selon une distribution de la loi de puissance en termes de la fraction volumique des constituants. Les équations de mouvement, pour l'analyse des vibrations libres, sont déterminées grâce au principe de Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues en utilisant la procédure de Navier pour les plaques en appuis simples.

### IV.2. Equations fondamentales :

On considère la même plaque du chapitre précédent, la géométrie de la plaque FG est présentée dans la **figure IV.1**. Les dimensions sont  $a$ ,  $b$ ,  $h$  où " $a$ " représente la longueur, " $b$ " la largeur et " $h$ " l'épaisseur de la plaque. La gradation des caractéristiques du matériau est dans le sens de l'épaisseur, le métal et la céramique étant les constituants typiques. [31]

# Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités



**Figure IV.1** : Géométrie d'une plaque FGM avec porosité dans le système de coordonnées rectangulaires. [31]

## IV.2.1. Cinématique et déformations :

On utilise la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT) à 4 variables (qui nous avons présentée au chapitre 2). Les déplacements axiaux et transversaux des champs de plaques sont donnés par [21] :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial W_s}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) = V_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial W_s}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) = W_b(x, y, t) + W_s(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Où :

$t$  : représente le temps,

$U_0$  et  $V_0$  : sont les fonctions de déplacement axiaux de la plaque,

$W_b$  : est le déplacement dû à la flexion et  $W_s$  : est le déplacement dû au cisaillement,

$f(z)$  : est la fonction de forme qui décrit la distribution de la contrainte de cisaillement transversale ou de déformation le long de l'épaisseur de la plaque.

Dans cette étude, nous avons choisi la fonction de cisaillement suivante [22] :

$$f(z) = Z - \frac{h}{2} \tanh\left(2 \frac{Z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cos^2(1)} \left(\frac{Z^3}{h^2}\right) \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{Et } g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = 1 - \left[ \tanh^2\left(2 \frac{Z}{h}\right) + \frac{4}{\cos^2(1)} \left(\frac{Z}{h}\right)^2 \right]$$

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (IV.1) sont : [21]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(b)} \\ \varepsilon_{yy}^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{pmatrix} + f(z) \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = g(z) \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(b)} \\ \varepsilon_{yy}^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W_b}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} \\ \varepsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 W_s}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^{(s)} \\ \gamma_{yz}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_s}{\partial x} \\ \frac{\partial W_s}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En vertu de la loi de Hook généralisée, les relations contraintes-déformations pour une plaque FGM élastique linéaire, s'écrivent comme suit [21] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Où les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont donnés par les équations constitutives suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

### IV.2.2. Equations de mouvement :

Pour trouver les équations différentielles de mouvement de la plaque FGM poreuse, nous nous appuyons sur le principe de Hamilton. Le principe peut être énoncé comme suit [Reddy (2002)] : La variation de l'énergie totale  $E_T$  du système vibratoire libre, au cours du temps  $t$ , est nulle. Ceci se traduit par l'équation intégrale suivante [21] :

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

$$\int_0^T \delta L dt = \int_0^T (\delta U_p - \delta E_c) dt = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Où :

$\delta$  : est l'opérateur de différentiation,

$\delta L$  : est la variation du Lagrangien ( $L = U_p - E_c = E_T$ )

$\delta U_p$  : est la variation de l'énergie de déformation.

$\delta E_c$  : est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque, exprimée en fonction des contraintes et déformations, est calculée par :

$$\delta U_p = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz \quad (\text{IV.8a})$$

Exprimée en fonctions des efforts et moments appliqués, l'équation précédente devient :

$$\delta U_p = \int_A \left[ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b + M_{yy}^b \delta \varepsilon_{yy}^b + M_{xy}^b \delta \varepsilon_{xy}^b + M_{xx}^s \delta \varepsilon_{xx}^s + M_{yy}^s \delta \varepsilon_{yy}^s + M_{xy}^s \delta \varepsilon_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA \quad (\text{IV.8b})$$

Où :

$A$  : est la section de la plaque,

$N, M$  : sont les efforts et moments appliqués,

$S$  : moments de cisaillement transverse d'ordre supérieur dus à la fonction de  $f(z)$ .

Ces quantités sont définies par :

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & N_{yy} & N_{xy} \\ M_{xx}^b & M_{yy}^b & M_{xy}^b \\ M_{xx}^s & M_{yy}^s & M_{xy}^s \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz. \quad (\text{IV.9})$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \delta E_c = & \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\dot{U} \delta \dot{U} + \dot{V} \delta \dot{V} + \dot{W} \delta \dot{W}) \rho(z) dA dz = \\ & \int \left\{ I_1 \left[ \dot{U}_0 \delta \dot{U}_0 + \dot{V}_0 \delta \dot{V}_0 + (\dot{W}_b + \dot{W}_s) \delta (\dot{W}_b + \dot{W}_s) \right] - I_2 \left[ \dot{U}_0 \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial x} \delta \dot{U}_0 + \dot{V}_0 \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial y} \delta \dot{V}_0 \right] - \right. \\ & I_4 \left[ \dot{U}_0 \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial x} \delta \dot{U}_0 + \dot{V}_0 \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial y} \delta \dot{V}_0 \right] + I_3 \left[ \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial y} \right] + \\ & \left. I_6 \left[ \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial y} \right] + I_5 \left[ \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{W}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{W}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{W}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{W}_b}{\partial y} \right] \right\} dA \quad (\text{IV.10}) \end{aligned}$$

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

Où la convention de l'exposant indique la différentiation par rapport à la variable temporelle  $t$ .

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  et  $I_6$  : sont les coefficients d'inerties de la plaque définis comme suit :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2] \rho(z) dz \quad (\text{IV.11})$$

En substituant l'équation. (IV.3) dans l'équation. (IV.5) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, nous obtenons les résultantes des efforts  $N$  et moments  $M$  sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^b \\ \varepsilon^s \end{pmatrix}, \quad S = A^s \gamma^s \quad (\text{IV.12})$$

Les composantes des résultantes des efforts et moments sont [23] :

$$\begin{aligned} N &= \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\}^t, \quad \varepsilon^0 = \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t \\ M^b &= \{M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b\}^t, \quad \varepsilon^b = \{\varepsilon_{xx}^b, \varepsilon_{yy}^b, \varepsilon_{xy}^b\}^t, \quad \gamma^s = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}^t \\ M^s &= \{M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s\}^t, \quad \varepsilon^s = \{\varepsilon_{xx}^s, \varepsilon_{yy}^s, \varepsilon_{xy}^s\}^t \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, H_{ij}$ , sont les rigidités (traction, traction-flexion, flexion d'ordre élevé) de la plaque. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ \{B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), zf(z), f(z)^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ \{A_{ij}^s\} &= \int_{-h/2}^{h/2} ([g(z)]^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

### IV.2.3. Solutions analytiques pour les plaques FG poreuses simplement supportées :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type de support utilisé (conditions aux limites). Ce travail s'intéresse à la solution analytique d'une plaque FG poreuse simplement appuyée (génère une réaction verticale et horizontale) sur tous les côtés. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux 4 bords latéraux [21] :

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

$$V_0 = W_b = W_s = \frac{\partial W_b}{\partial y} = \frac{\partial W_s}{\partial y} = N_{xx} = M_{xx}^b = M_{xx}^s = 0 \text{ en } x=0, a \quad (\text{IV.15a})$$

$$U_0 = W_b = W_s = \frac{\partial W_b}{\partial x} = \frac{\partial W_s}{\partial x} = N_{yy} = M_{yy}^b = M_{yy}^s = 0 \text{ en } y=0, b \quad (\text{IV.15b})$$

En substituant les expressions de  $\delta U_p$  (IV.8) et  $\delta E_c$  (IV.10) dans l'équation intégrale (IV.7), en tenant compte des équations (IV.12), en intégrant les gradients des déplacements par parties et en annulant séparément les termes devant les coefficients virtuels  $\delta U_0, \delta V_0, \delta W_b$  et  $\delta W_s$ , nous obtenons ainsi les équations différentielles de mouvement vibratoire de la plaque FGM poreuse associées à la théorie de déformation choisie [21] :

$$\delta U_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{U}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{W}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{W}_s}{\partial x} \quad (\text{IV.16a})$$

$$\delta V_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_1 \ddot{V}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{W}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{W}_s}{\partial y} \quad (\text{IV.16b})$$

$$\delta W_b : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} = I_1 \left( \ddot{W}_b + \ddot{W}_s \right) + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{U}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{V}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{W}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{W}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{W}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{W}_s}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV.16c})$$

$$\delta W_s : \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_1 \left( \ddot{W}_b + \ddot{W}_s \right) + I_4 \left( \frac{\partial \ddot{U}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{V}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{W}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{W}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{W}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{W}_s}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV.16d})$$

Les 04 équations (IV.16a) à (IV.16d) sont exprimées en termes de résultantes des efforts et moments auxquels est soumise la plaque FGM poreuse pendant le mouvement vibratoire libre.

En suivant la procédure de résolution de Navier, nous supposons la forme de solution suivante (double séries de Fourier) pour les déplacements  $U, V, W_b$  et  $W_s$  qui satisfait les conditions aux limites données dans l'équation (IV.15).

## Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_b \\ W_s \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Où  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ ,

m et n : sont des numéros de mode,

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$  et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires appelés amplitudes.

En injectant les équations (IV.17) dans les équations différentielles de mouvement (IV.16a-d), nous obtenons le système algébrique suivant sous forme compacte :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{IV.18})$$

Le système ainsi obtenu est représentatif d'un problème aux valeurs propres ( $\omega^2$ ) standard.

Où :

[K] et [M] : sont les matrices de rigidité et de masse,

$\omega$  : est la fréquence propre de vibration libre.

$\Delta$  : est le vecteur des déplacements correspondants aux valeurs propres  $\omega^2$ .

En explicitant les matrices masse et rigidité et le vecteur déplacements  $\Delta$ , nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Les éléments constituant les matrices masse et rigidité sont :

$$\begin{cases} a_{11} = -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2); a_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}); a_{13} = \lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2]; a_{14} = \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ a_{21} = a_{12}; a_{22} = -(A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2); a_{23} = \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22} \mu^2]; a_{24} = \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ a_{31} = a_{13}; a_{32} = a_{23}; a_{33} = -[D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4]; a_{34} = -[D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4] \\ a_{41} = a_{14}; a_{42} = a_{24}; a_{43} = a_{34}; a_{44} = -[H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2] \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{cases} m_{11} = -I_1, m_{22} = -I_1, m_{13} = \lambda I_2, m_{14} = \lambda I_4, m_{23} = \mu I_2, m_{24} = \mu I_4 \\ m_{33} = -[I_1 + I_3 (\lambda^2 + \mu^2)], m_{34} = -[I_1 + I_5 (\lambda^2 + \mu^2)], m_{44} = -[I_1 + I_6 (\lambda^2 + \mu^2)] \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Le système algébrique (IV.19) peut être résolu avec des méthodes numériques standards. Pour notre cas, nous avons utilisé Maple pour écrire le programme complet et résoudre le problème aux valeurs propres en se basant sur les bibliothèques de ce dernier.

## **Chapitre IV : Modélisation des vibrations libre d'une plaque FGM comportant des porosités**

---

### **IV. 3. Conclusion :**

Dans le présent chapitre, nous avons supposé une plaque FGM comportant des porosités distribuées le long de l'épaisseur suivant deux lois de variation décrites dans le **chapitre III** afin de modéliser le comportement vibratoire libre. Les propriétés mécaniques telles que le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique varient dans l'épaisseur suivant une loi de mélange correspondant au type P-FGM. En se basant sur un champ de déplacement à quatre variables et sur une fonction de cisaillement appropriée, nous avons déterminé les équations différentielles de mouvement vibratoire libre en appliquant le principe de Hamilton. Grâce à la procédure de résolution de Navier, le système d'équations différentielles de mouvement a été transformé mathématiquement en un système algébrique linéaire. En supposant un mouvement de type harmonique, le problème à résoudre a été ramené à celui d'un problème standard aux valeurs propres. Pour extraire les fréquences propres de vibration libre, un programme utilisant le langage de programmation Maple a été développé. La validation du code de calcul et les résultats obtenus feront l'objet du chapitre suivant.

# **Chapitre V**

## **Résultats numériques et discussions**

# Chapitre V : Résultats numériques et discussions

---

## V.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenu suite à l'exécution du code de calcul que nous avons développé en langage Maple. Ces résultats concernent la vibration libre d'une plaque FGM comportant des porosités distribuées le long de l'épaisseur. Maple est un logiciel de calcul symbolique qui offre un langage de programmation de haut niveau. Maple combine le moteur mathématique le plus puissant au monde avec une interface qui rend extrêmement facile l'analyse, l'exploration, la visualisation et la résolution de problèmes mathématiques grâce à ensemble de bibliothèques très complet et sans cesse enrichi à chaque mise à jour du logiciel.

La présente analyse repose sur une théorie de déformation en cisaillement raffinée à quatre variables couplées à une fonction de forme hyperbolique qui a été introduite dans le **chapitre IV**. Contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur qui sont basées sur cinq variables ou plus, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est de seulement quatre. Ce qui a permis de réduire le nombre d'équation différentielle de mouvement à résoudre et de même de réduire le volume de calcul nécessaire pour obtenir les fréquences propres de vibration.

Les variations des propriétés mécaniques (module de Young  $E$  et de cisaillement  $G$ , la masse volumique  $\rho$  et coefficient de poisson  $\nu$ ) et des fréquences propres sont présentées sous forme de tableaux et graphes. Les propriétés mécaniques de la plaque FGM poreuse varient dans la direction de l'épaisseur selon deux lois de distribution de puissance : une loi P-FGM avec une distribution uniforme de la porosité (type I) et une loi P-FGM avec une distribution non uniforme de la porosité (type II). Le P-FGM est du type métal (aluminium)/céramique (alumine  $Al_2O_3$ ). Pour valider le programme de calcul développé, certains résultats sont comparés à ceux publiés. Enfin, plus de résultats ont été obtenus permettant ainsi d'enrichir ceux présents dans la littérature.

## V.2. Résultats numériques et discussion :

Dans cette section, nous considérons une plaque P-FGM poreuse carrée ou rectangulaire de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et de hauteur  $h$  (épaisseur). Les propriétés retenues des constituants sont :

- Céramique (alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 3800\text{Kg} / m^3$
- Métal (aluminium, Al):  $E_m = 70\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_m = 2702\text{Kg} / m^3$

La fréquence adimensionnelle utilisée dans les tableaux de comparaison est donnée par :

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

---

$$\omega = \omega_0 h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

(V.1)

### V.2.1. Variation des propriétés mécaniques :

Dans cette partie, nous présentons la variation des propriétés mécaniques (module de Young  $E$  et de cisaillement  $G$ , la masse volumique et coefficient de poisson) en fonction de l'index de la fraction volumique ( $n = 0.5$  à  $n = 5$ ) pour une plaque poreuse et non poreuse. Le **tableau V.1** montre la variation du module de Young  $E$  en GPa à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e = 0$ ) et poreuse ( $e = 0.2$ ). Grâce à la **Figure V.1**, nous constatons que la loi de variation P-FGM avec porosité et le choix des constituants sur les faces supérieures et inférieures conduisent à une variation croissante du module de Young de la face inférieure ( $z = -h/2$ ) à la face supérieure ( $z = +h/2$ ). Ceci est prévisible puisque le module de Young de la céramique (à  $z = +h/2$ ) est supérieur à celui du métal ( $z = -h/2$ ). Cependant et en raison de la porosité, la plaque P-FGM possède le plus grand module de young en un point  $z$  alors que la plaque P-FGM de type I présente le plus petit module de Young. Ceci est dû à la loi de variation des propriétés mécaniques et à la présence de la porosité. En effet, la porosité affecte négativement le module de Young en réduisant sa valeur nominale. Ce résultat est valable quel que soit l'index de la fraction volumique  $n$  (**Figure V.1** et **Figure V.2**). A  $z = 0$ , les lois de variation des plaques de type I et II ((III.17) et (III.22)) se réduisent à la même expression d'où le module de Young étant le même les deux cas. Même variation est observée pour le module de cisaillement  $G$  (**tableau V.2**, **Figure V.3** et **Figure V.4**) car celui-ci est relié au module de Young  $E$  par la relation (III.21) et que le coefficient de poisson est considéré le même pour les deux constituants. Nous soulignons que la présence de la porosité a aussi pour effet la réduction de la valeur nominale du coefficient de cisaillement  $G$ .

La variation de la masse volumique d'une plaque P-FGM et d'une plaque poreuse P-FGM type I et II est affichée numériquement sur le **tableau V.3** en fonction de l'index de la fraction volumique ( $n = 0.5, 1$  et  $5$ ). Les **figures V.5** et **V.6** montrent que pour la plaque P-FGM et la plaque P-FGM de type I, la masse volumique augmentent de  $z = -h/2$  à  $z = +h/2$ . La croissance est plus rapide pour  $z > 0$ . Pour le cas de la plaque P-FGM d type II, la masse volumique croit de  $z = 0$  à  $z = +h/2$  et décroît de  $z = -h/2$  à  $z = 0$  lorsque  $n = 5$  mais reste parabolique pour  $z < 0$  lorsque  $n = 0.5$ . Dans tous les cas, la masse volumique de la plaque P-FGM reste supérieure à celle de la plaque P-FGM type I ou II en tout point  $z$  de l'épaisseur en raison de l'absence de la porosité.

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

Le **tableau V.4** et les **figures V.7 et V.8** montrent la variation du coefficient de poisson en fonction de l'index de la fraction volumique et du type de plaque (P-FGM, PFGM-type I et II). La plaque P-FGM et la plaque P-FGM de type I présentent un coefficient de poisson constant le long de l'épaisseur, tandis que celui de la plaque P-FGM de type II, celui-ci varie linéairement (croissant pour  $z > 0$  et décroissant pour  $z < 0$ ).

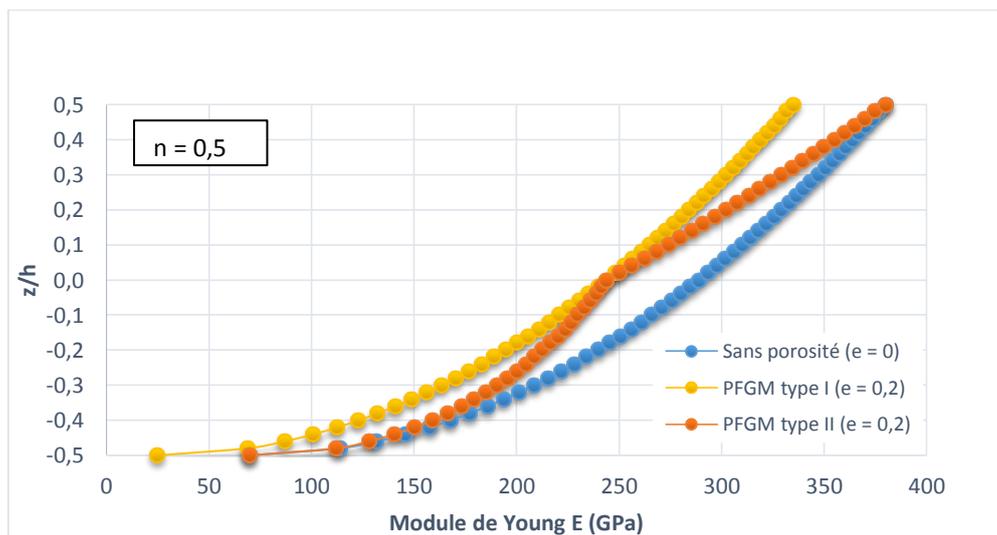
Il convient de souligner que toutes ces formes de variation des propriétés sont totalement imposées par les lois mathématiques de modélisation (relations **III.17 et III.22**) de la plaque FGM, par le choix des matériaux utilisé pour le mélange P-FGM ainsi que par le choix du matériau au niveau des faces inférieure et supérieure de la plaque. La porosité a pour effet de réduire les valeurs nominales de ces propriétés (relations **III.13 et III.14**) de telle sorte que le comportement mécanique global de la plaque s'en trouve affecté. Ceci va être démontré dans les résultats qui vont être présentés dans les sections suivantes.

	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5
z/h	Sans porosité (e = 0)			PFGM type I (e = 0,2)			PFGM type II (e = 0,2)		
-0,50	70,00	70,00	70,00	25,00	25,00	25,00	70,00	70,00	70,00
-0,48	113,84	76,20	70,00	68,84	31,20	25,00	112,04	74,40	68,20
-0,46	132,00	82,40	70,00	87,00	37,40	25,00	128,40	78,80	66,40
-0,44	145,93	88,60	70,00	100,93	43,60	25,00	140,53	83,20	64,60
-0,42	157,68	94,80	70,00	112,68	49,80	25,00	150,48	87,60	62,80
-0,40	168,03	101,00	70,00	123,03	56,00	25,00	159,03	92,00	61,00
-0,38	177,39	107,20	70,01	132,39	62,20	25,01	166,59	96,40	59,21
-0,36	185,99	113,40	70,02	140,99	68,40	25,02	173,39	100,80	57,42
-0,34	194,00	119,60	70,03	149,00	74,60	25,03	179,60	105,20	55,63
-0,32	201,52	125,80	70,06	156,52	80,80	25,06	185,32	109,60	53,86
-0,30	208,64	132,00	70,10	163,64	87,00	25,10	190,64	114,00	52,10
-0,28	215,40	138,20	70,16	170,40	93,20	25,16	195,60	118,40	50,36
-0,26	221,87	144,40	70,25	176,87	99,40	25,25	200,27	122,80	48,65
-0,24	228,07	150,60	70,37	183,07	105,60	25,37	204,67	127,20	46,97
-0,22	234,04	156,80	70,53	189,04	111,80	25,53	208,84	131,60	45,33
-0,20	239,79	163,00	70,75	194,79	118,00	25,75	212,79	136,00	43,75
-0,18	245,36	169,20	71,04	200,36	124,20	26,04	216,56	140,40	42,24
-0,16	250,76	175,40	71,41	205,76	130,40	26,41	220,16	144,80	40,81
-0,14	256,00	181,60	71,87	211,00	136,60	26,87	223,60	149,20	39,47
-0,12	261,10	187,80	72,46	216,10	142,80	27,46	226,90	153,60	38,26
-0,10	266,06	194,00	73,17	221,06	149,00	28,17	230,06	158,00	37,17
-0,08	270,90	200,20	74,05	225,90	155,20	29,05	233,10	162,40	36,25
-0,06	275,63	206,40	75,11	230,63	161,40	30,11	236,03	166,80	35,51
-0,04	280,25	212,60	76,38	235,25	167,60	31,38	238,85	171,20	34,98
-0,02	284,77	218,80	77,90	239,77	173,80	32,90	241,57	175,60	34,70
0,00	289,20	225,00	79,69	244,20	180,00	34,69	244,20	180,00	34,69
0,02	293,54	231,20	81,79	248,54	186,20	36,79	250,34	188,00	38,59
0,04	297,80	237,40	84,23	252,80	192,40	39,23	256,40	196,00	42,83
0,06	301,98	243,60	87,07	256,98	198,60	42,07	262,38	204,00	47,47

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

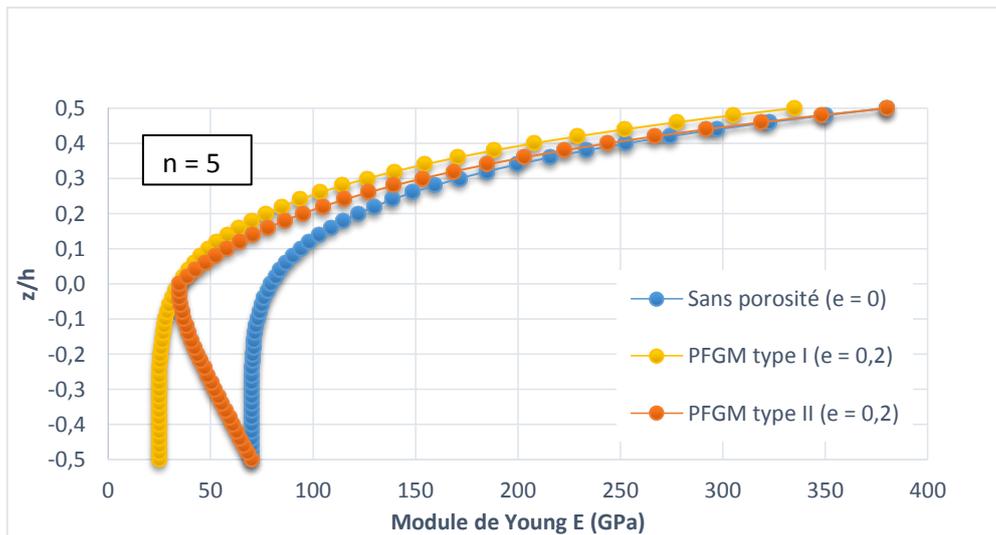
0,08	306,09	249,80	90,35	261,09	204,80	45,35	268,29	212,00	52,55
0,10	310,12	256,00	94,11	265,12	211,00	49,11	274,12	220,00	58,11
0,12	314,09	262,20	98,40	269,09	217,20	53,40	279,89	228,00	64,20
0,14	318,00	268,40	103,29	273,00	223,40	58,29	285,60	236,00	70,89
0,16	321,85	274,60	108,82	276,85	229,60	63,82	291,25	244,00	78,22
0,18	325,63	280,80	115,07	280,63	235,80	70,07	296,83	252,00	86,27
0,20	329,36	287,00	122,10	284,36	242,00	77,10	302,36	260,00	95,10
0,22	333,04	293,20	129,98	288,04	248,20	84,98	307,84	268,00	104,78
0,24	336,67	299,40	138,79	291,67	254,40	93,79	313,27	276,00	115,39
0,26	340,25	305,60	148,60	295,25	260,60	103,60	318,65	284,00	127,00
0,28	343,78	311,80	159,50	298,78	266,80	114,50	323,98	292,00	139,70
0,30	347,27	318,00	171,58	302,27	273,00	126,58	329,27	300,00	153,58
0,32	350,72	324,20	184,93	305,72	279,20	139,93	334,52	308,00	168,73
0,34	354,12	330,40	199,65	309,12	285,40	154,65	339,72	316,00	185,25
0,36	357,48	336,60	215,83	312,48	291,60	170,83	344,88	324,00	203,23
0,38	360,81	342,80	233,60	315,81	297,80	188,60	350,01	332,00	222,80
0,40	364,09	349,00	253,05	319,09	304,00	208,05	355,09	340,00	244,05
0,42	367,34	355,20	274,32	322,34	310,20	229,32	360,14	348,00	267,12
0,44	370,56	361,40	297,51	325,56	316,40	252,51	365,16	356,00	292,11
0,46	373,74	367,60	322,77	328,74	322,60	277,77	370,14	364,00	319,17
0,48	376,88	373,80	350,22	331,88	328,80	305,22	375,08	372,00	348,42
0,50	380,00	380,00	380,00	335,00	335,00	335,00	380,00	380,00	380,00

**Tableau V.1 :** Variation du module de Young E (GPa) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e = 0$ ) et poreuse ( $e = 0.2$ ).



**Figure V.1 :** Variation du module de Young E d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=0,5$ ).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions



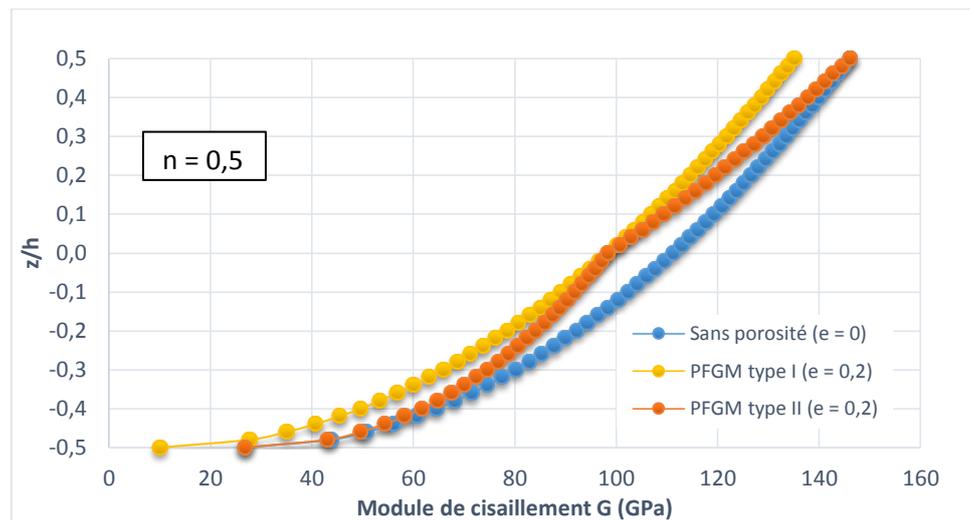
**Figure V.2 :** Variation du module de Young E d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité (n=5).

z/h	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5
	Sans porosité (e = 0)			PFGM type I (e = 0,2)			PFGM type II (e = 0,2)		
-0,50	26,92	26,92	26,92	10,08	10,08	10,08	26,92	26,92	26,92
-0,48	43,78	29,31	26,92	27,76	12,58	10,08	43,17	28,67	26,28
-0,46	50,77	31,69	26,92	35,08	15,08	10,08	49,57	30,42	25,63
-0,44	56,13	34,08	26,92	40,70	17,58	10,08	54,35	32,18	24,98
-0,42	60,65	36,46	26,92	45,44	20,08	10,08	58,31	33,94	24,33
-0,40	64,63	38,85	26,92	49,61	22,58	10,08	61,74	35,71	23,68
-0,38	68,23	41,23	26,93	53,38	25,08	10,08	64,79	37,49	23,03
-0,36	71,54	43,62	26,93	56,85	27,58	10,09	67,56	39,28	22,37
-0,34	74,62	46,00	26,94	60,08	30,08	10,09	70,11	41,07	21,72
-0,32	77,51	48,38	26,95	63,11	32,58	10,10	72,48	42,87	21,06
-0,30	80,24	50,77	26,96	65,98	35,08	10,12	74,70	44,67	20,42
-0,28	82,85	53,15	26,98	68,71	37,58	10,15	76,79	46,48	19,77
-0,26	85,33	55,54	27,02	71,32	40,08	10,18	78,77	48,30	19,13
-0,24	87,72	57,92	27,06	73,82	42,58	10,23	80,65	50,13	18,51
-0,22	90,01	60,31	27,13	76,22	45,08	10,30	82,45	51,96	17,90
-0,20	92,23	62,69	27,21	78,55	47,58	10,38	84,17	53,80	17,31
-0,18	94,37	65,08	27,32	80,79	50,08	10,50	85,83	55,64	16,74
-0,16	96,45	67,46	27,46	82,97	52,58	10,65	87,42	57,50	16,20
-0,14	98,46	69,85	27,64	85,08	55,08	10,84	88,96	59,36	15,70
-0,12	100,42	72,23	27,87	87,14	57,58	11,07	90,44	61,22	15,25
-0,10	102,33	74,62	28,14	89,14	60,08	11,36	91,88	63,10	14,85
-0,08	104,19	77,00	28,48	91,09	62,58	11,71	93,27	64,98	14,51
-0,06	106,01	79,38	28,89	93,00	65,08	12,14	94,62	66,87	14,24
-0,04	107,79	81,77	29,38	94,86	67,58	12,66	95,94	68,77	14,05
-0,02	109,53	84,15	29,96	96,68	70,08	13,27	97,22	70,67	13,96
0,00	111,23	86,54	30,65	98,47	72,58	13,99	98,47	72,58	13,99
0,02	112,90	88,92	31,46	100,22	75,08	14,83	100,75	75,66	15,53
0,04	114,54	91,31	32,40	101,94	77,58	15,82	102,99	78,73	17,21
0,06	116,15	93,69	33,49	103,62	80,08	16,96	105,19	81,78	19,03

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

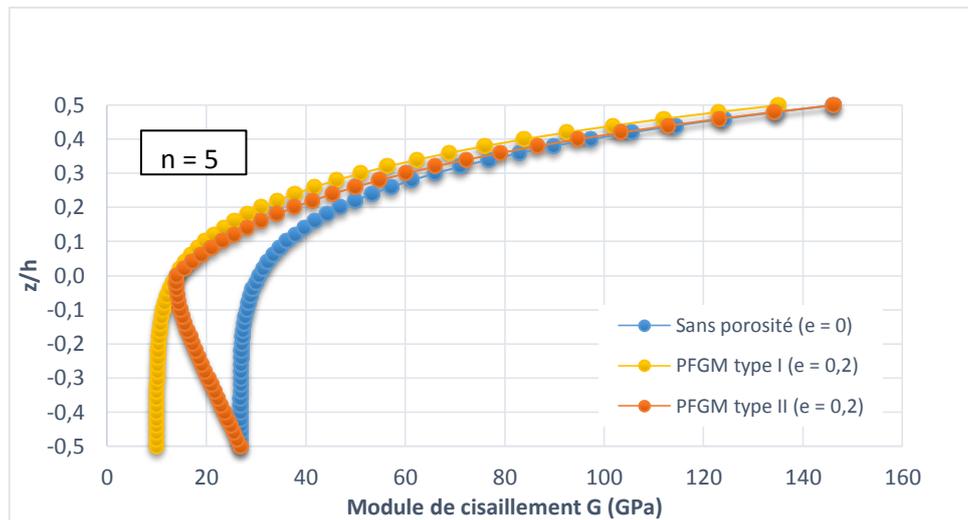
0,08	117,73	96,08	34,75	105,28	82,58	18,29	107,35	84,83	21,03
0,10	119,28	98,46	36,19	106,91	85,08	19,80	109,47	87,86	23,21
0,12	120,81	100,85	37,85	108,51	87,58	21,53	111,56	90,88	25,59
0,14	122,31	103,23	39,73	110,08	90,08	23,50	113,62	93,89	28,20
0,16	123,79	105,62	41,85	111,63	92,58	25,73	115,65	96,89	31,06
0,18	125,24	108,00	44,26	113,16	95,08	28,25	117,64	99,87	34,19
0,20	126,68	110,38	46,96	114,66	97,58	31,09	119,61	102,85	37,62
0,22	128,09	112,77	49,99	116,15	100,08	34,27	121,54	105,81	41,37
0,24	129,49	115,15	53,38	117,61	102,58	37,82	123,45	108,76	45,47
0,26	130,87	117,54	57,15	119,05	105,08	41,77	125,34	111,71	49,95
0,28	132,22	119,92	61,35	120,48	107,58	46,17	127,19	114,64	54,85
0,30	133,57	122,31	65,99	121,88	110,08	51,04	129,03	117,55	60,18
0,32	134,89	124,69	71,13	123,27	112,58	56,42	130,83	120,46	65,99
0,34	136,20	127,08	76,79	124,65	115,08	62,36	132,62	123,36	72,32
0,36	137,49	129,46	83,01	126,00	117,58	68,88	134,38	126,25	79,19
0,38	138,77	131,85	89,84	127,34	120,08	76,05	136,13	129,12	86,65
0,40	140,04	134,23	97,33	128,67	122,58	83,89	137,85	131,99	94,74
0,42	141,29	136,62	105,51	129,98	125,08	92,47	139,55	134,84	103,50
0,44	142,52	139,00	114,43	131,27	127,58	101,82	141,23	137,69	112,98
0,46	143,74	141,38	124,14	132,56	130,08	112,00	142,89	140,52	123,21
0,48	144,96	143,77	134,70	133,82	132,58	123,07	144,53	143,34	134,25
0,50	146,15	146,15	146,15	135,08	135,08	135,08	146,15	146,15	146,15

**Tableau V.2 :** Variation du module de cisaillement G (GPa) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0.2$ ).



**Figure V.3 :** Variation du module de cisaillement G d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=0,5$ ).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions



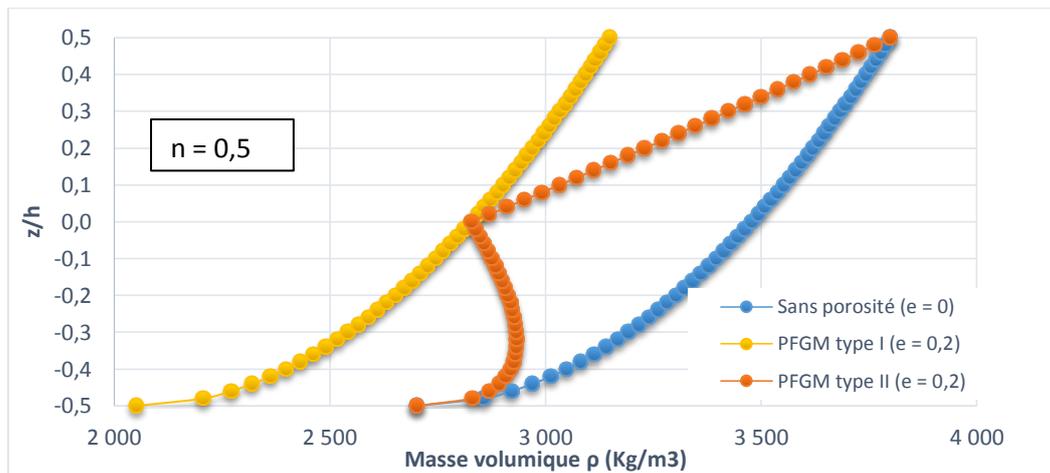
**Figure V.4 :** Variation du module de cisaillement  $G$  d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=5$ ).

$z/h$	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5
	Sans porosité (e = 0)			PFGM type I (e = 0,2)			PFGM type II (e = 0,2)		
-0,50	2702,00	2702,00	2702,00	2051,80	2051,80	2051,80	2702,00	2702,00	2702,00
-0,48	2857,28	2723,96	2702,00	2207,08	2073,76	2051,80	2831,27	2697,95	2675,99
-0,46	2921,60	2745,92	2702,00	2271,40	2095,72	2051,80	2869,58	2693,90	2649,98
-0,44	2970,95	2767,88	2702,00	2320,75	2117,68	2051,80	2892,93	2689,86	2623,98
-0,42	3012,56	2789,84	2702,00	2362,36	2139,64	2051,80	2908,53	2685,81	2597,97
-0,40	3049,22	2811,80	2702,01	2399,02	2161,60	2051,81	2919,18	2681,76	2571,97
-0,38	3082,36	2833,76	2702,03	2432,16	2183,56	2051,83	2926,31	2677,71	2545,98
-0,36	3112,83	2855,72	2702,06	2462,63	2205,52	2051,86	2930,78	2673,66	2520,00
-0,34	3141,20	2877,68	2702,12	2491,00	2227,48	2051,92	2933,14	2669,62	2494,05
-0,32	3167,84	2899,64	2702,21	2517,64	2249,44	2052,01	2933,77	2665,57	2468,14
-0,30	3193,04	2921,60	2702,35	2542,84	2271,40	2052,15	2932,96	2661,52	2442,27
-0,28	3217,01	2943,56	2702,57	2566,81	2293,36	2052,37	2930,92	2657,47	2416,48
-0,26	3239,91	2965,52	2702,87	2589,71	2315,32	2052,67	2927,81	2653,42	2390,78
-0,24	3261,87	2987,48	2703,30	2611,67	2337,28	2053,10	2923,77	2649,38	2365,20
-0,22	3283,01	3009,44	2703,89	2632,81	2359,24	2053,69	2918,89	2645,33	2339,78
-0,20	3303,40	3031,40	2704,67	2653,20	2381,20	2054,47	2913,28	2641,28	2314,55
-0,18	3323,12	3053,36	2705,68	2672,92	2403,16	2055,48	2906,99	2637,23	2289,56
-0,16	3342,24	3075,32	2706,99	2692,04	2425,12	2056,79	2900,10	2633,18	2264,85
-0,14	3360,80	3097,28	2708,64	2710,60	2447,08	2058,44	2892,66	2629,14	2240,50
-0,12	3378,85	3119,24	2710,70	2728,65	2469,04	2060,50	2884,70	2625,09	2216,55
-0,10	3396,44	3141,20	2713,24	2746,24	2491,00	2063,04	2876,28	2621,04	2193,08
-0,08	3413,59	3163,16	2716,35	2763,39	2512,96	2066,15	2867,42	2616,99	2170,18
-0,06	3430,33	3185,12	2720,11	2780,13	2534,92	2069,91	2858,15	2612,94	2147,93
-0,04	3446,70	3207,08	2724,61	2796,50	2556,88	2074,41	2848,52	2608,90	2126,43
-0,02	3462,72	3229,04	2729,98	2812,52	2578,84	2079,78	2838,52	2604,85	2105,79
0,00	3478,40	3251,00	2736,31	2828,20	2600,80	2086,11	2828,20	2600,80	2086,11
0,02	3493,78	3272,96	2743,75	2843,58	2622,76	2093,55	2869,59	2648,77	2119,55
0,04	3508,86	3294,92	2752,42	2858,66	2644,72	2102,22	2910,68	2696,74	2154,23
0,06	3523,67	3316,88	2762,47	2873,47	2666,68	2112,27	2951,49	2744,70	2190,29
0,08	3538,21	3338,84	2774,07	2888,01	2688,64	2123,87	2992,04	2792,67	2227,90

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

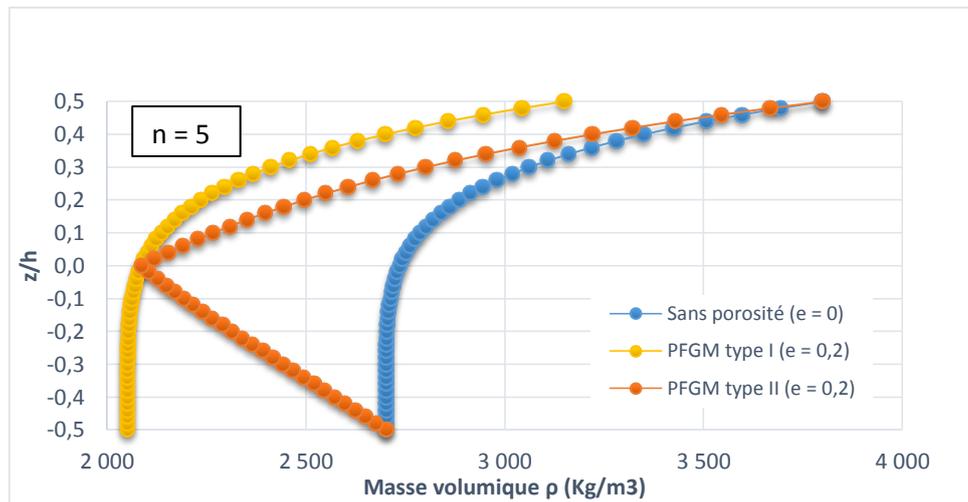
0,10	3552,51	3360,80	2787,38	2902,31	2710,60	2137,18	3032,35	2840,64	2267,22
0,12	3566,57	3382,76	2802,59	2916,37	2732,56	2152,39	3072,41	2888,61	2308,44
0,14	3580,40	3404,72	2819,90	2930,20	2754,52	2169,70	3112,26	2936,58	2351,75
0,16	3594,02	3426,68	2839,51	2943,82	2776,48	2189,31	3151,88	2984,54	2397,37
0,18	3607,43	3448,64	2861,64	2957,23	2798,44	2211,44	3191,31	3032,51	2445,51
0,20	3620,65	3470,60	2886,54	2970,45	2820,40	2236,34	3230,53	3080,48	2496,42
0,22	3633,68	3492,56	2914,45	2983,48	2842,36	2264,25	3269,57	3128,45	2550,34
0,24	3646,54	3514,52	2945,65	2996,34	2864,32	2295,45	3308,43	3176,42	2607,54
0,26	3659,21	3536,48	2980,40	3009,01	2886,28	2330,20	3347,12	3224,38	2668,30
0,28	3671,73	3558,44	3019,01	3021,53	2908,24	2368,81	3385,64	3272,35	2732,92
0,30	3684,08	3580,40	3061,79	3033,88	2930,20	2411,59	3424,00	3320,32	2801,71
0,32	3696,28	3602,36	3109,07	3046,08	2952,16	2458,87	3462,21	3368,29	2875,00
0,34	3708,33	3624,32	3161,20	3058,13	2974,12	2511,00	3500,27	3416,26	2953,13
0,36	3720,24	3646,28	3218,53	3070,04	2996,08	2568,33	3538,19	3464,22	3036,47
0,38	3732,02	3668,24	3281,45	3081,82	3018,04	2631,25	3575,97	3512,19	3125,40
0,40	3743,65	3690,20	3350,36	3093,45	3040,00	2700,16	3613,61	3560,16	3220,32
0,42	3755,16	3712,16	3425,67	3104,96	3061,96	2775,47	3651,13	3608,13	3321,64
0,44	3766,55	3734,12	3507,83	3116,35	3083,92	2857,63	3688,53	3656,10	3429,80
0,46	3777,82	3756,08	3597,28	3127,62	3105,88	2947,08	3725,80	3704,06	3545,26
0,48	3788,96	3778,04	3694,51	3138,76	3127,84	3044,31	3762,96	3752,03	3668,50
0,50	3800,00	3800,00	3800,00	3149,80	3149,80	3149,80	3800,00	3800,00	3800,00

**Tableau V.3 :** Variation de la masse volumique  $\rho$  ( $\text{Kg/m}^3$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0,2$ ).



**Figure V.5 :** Variation de la masse volumique  $\rho$  d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=0,5$ ).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions



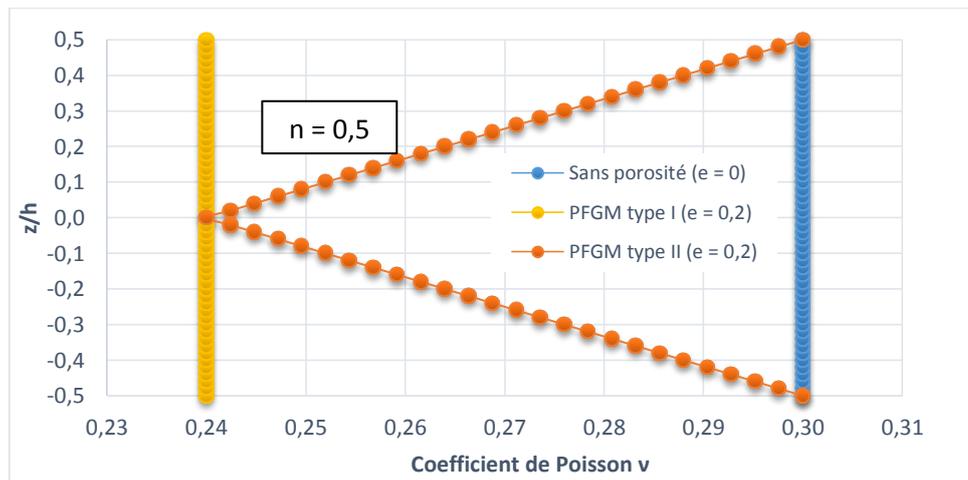
**Figure V.6 :** Variation de la masse volumique  $\rho$  d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=5$ ).

	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5	n=0,5	n=1	n=5
z/h	Sans porosité (e = 0)			PFGM type I (e = 0,2)			PFGM type II (e = 0,2)		
-0,50	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,3000	0,3000	0,3000
-0,48	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2976	0,3000	0,2976
-0,46	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2952	0,3000	0,2952
-0,44	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2928	0,2900	0,2928
-0,42	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2904	0,2900	0,2904
-0,40	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2880	0,2900	0,2880
-0,38	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2856	0,2900	0,2856
-0,36	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2832	0,2800	0,2832
-0,34	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2808	0,2800	0,2808
-0,32	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2784	0,2800	0,2784
-0,30	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2760	0,2800	0,2760
-0,28	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2736	0,2700	0,2736
-0,26	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2712	0,2700	0,2712
-0,24	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2688	0,2700	0,2688
-0,22	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2664	0,2700	0,2664
-0,20	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2640	0,2600	0,2640
-0,18	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2616	0,2600	0,2616
-0,16	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2592	0,2600	0,2592
-0,14	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2568	0,2600	0,2568
-0,12	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2544	0,2500	0,2544
-0,10	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2520	0,2500	0,2520
-0,08	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2496	0,2500	0,2496
-0,06	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2472	0,2500	0,2472
-0,04	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2448	0,2400	0,2448
-0,02	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2424	0,2400	0,2424
0,00	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400
0,02	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2424	0,2400	0,2424
0,04	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2448	0,2400	0,2448
0,06	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2472	0,2500	0,2472
0,08	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2496	0,2500	0,2496

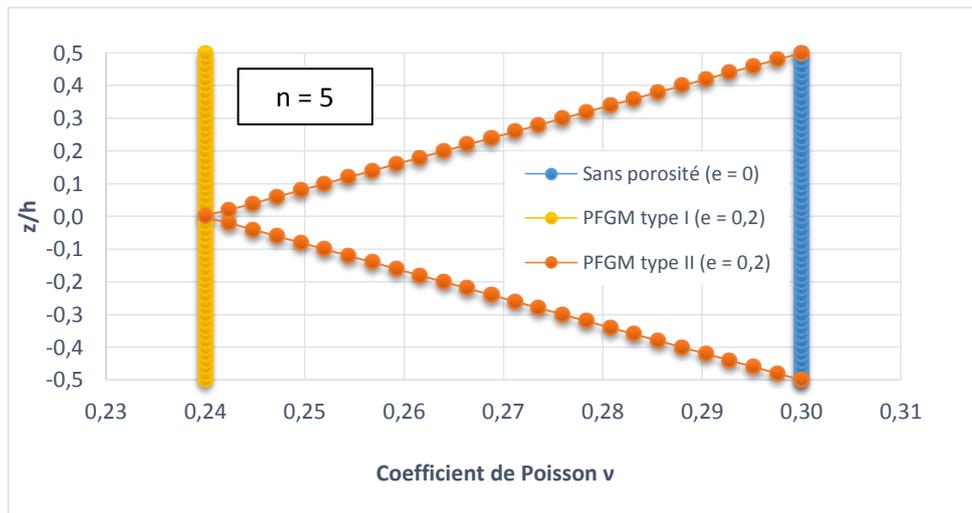
## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

0,10	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2520	0,2500	0,2520
0,12	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2544	0,2500	0,2544
0,14	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2568	0,2600	0,2568
0,16	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2592	0,2600	0,2592
0,18	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2616	0,2600	0,2616
0,20	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2640	0,2600	0,2640
0,22	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2664	0,2700	0,2664
0,24	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2688	0,2700	0,2688
0,26	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2712	0,2700	0,2712
0,28	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2736	0,2700	0,2736
0,30	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2760	0,2800	0,2760
0,32	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2784	0,2800	0,2784
0,34	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2808	0,2800	0,2808
0,36	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2832	0,2800	0,2832
0,38	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2856	0,2900	0,2856
0,40	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2880	0,2900	0,2880
0,42	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2904	0,2900	0,2904
0,44	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2928	0,2900	0,2928
0,46	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2952	0,3000	0,2952
0,48	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,2976	0,3000	0,2976
0,50	0,3000	0,3000	0,3000	0,2400	0,2400	0,2400	0,3000	0,3000	0,3000

**Tableau V.4 :** Variation du coefficient de Poisson  $\nu$  à travers l'épaisseur d'une plaque FGM non poreuse ( $e=0$ ) et poreuse ( $e=0,2$ ).



**Figure V.7 :** Variation du coefficient de Poisson  $\nu$  d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=0,5$ ).



**Figure V.8 :** Variation du coefficient de Poisson  $\nu$  d'une plaque P-FGM en fonction de la porosité ( $n=5$ ).

### V.2.2. Etude comparative :

Pour démontrer la bonne fiabilité du programme développé pour ce présent travail, nous avons choisi de comparer nos résultats à ceux déjà publiés (trois sources de comparaison). Pour ce faire, une plaque poreuse avec deux configurations a été retenue : P-FGM (sans porosité,  $e = 0$ ) et P-FGM type I (porosité uniformément répartie,  $e = 0.2$ ). Trois épaisseurs relatives sont considérées :  $a/h = 5$  (plaque épaisse),  $a/h = 10$  (plaque moyennement épaisse) et  $a/h = 20$  (plaque mince).

L'erreur relative moyenne présentée dans les deux tableaux de comparaison a été calculée selon la formule suivante :

$$\text{erreur (\%)} = \frac{\omega_m - \omega_1}{\omega_m} \times 100 \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Avec : } \omega_m = \left( \omega_1^{\text{source1}} + \omega_1^{\text{source2}} + \omega_1^{\text{source3}} \right) / 3$$

Source	e = 0			e = 0,1			e = 0,2		
	a/h								
	5	10	20	5	10	20	5	10	20
Zenkour (20 05)	0,3204	0,0868	0,0222	0,3144	0,0850	0,0217	0,3062	0,0826	0,0211
Saidi et al. (2019)	0,3206	0,0868	0,0222	0,3146	0,0850	0,0217	0,3062	0,0826	0,0211
Merdaci et	0,3205	0,0868	0,0222	0,3082	0,0834	0,0213	0,2953	0,0798	0,0204

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

al (2020)									
<b>Présent</b>	0,3206	0,0868	0,0222	0,3123	0,0843	0,0215	0,3014	0,0810	0,0207
<b>% d'erreur (moyenne)</b>	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,04%	0,26%	0,34%	0,39%	0,82%	0,99%

**Tableau V.5** : Comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque poreuse P-FGM ( $a=b$ , P-FGM=Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>,  $n=1$ ).

Le **tableau V.5** présente une comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM métal/céramique poreuse ( $e = 10\%$  et  $e = 20\%$ ) et non poreuse ( $e = 0$ ). Trois rapports  $a/h$  sont considérés (5, 10 et 20) avec un index de la fraction volumique  $n$  fixé à 1. Nous constatons que, quel que soit le type de plaque P-FGM et le rapport  $a/h$ , les résultats sont en bonne concordance avec ceux publiés par Zenkour [2005], Sadi et al. [2019] et Merdaci et al. [2020], puis que l'erreur relative moyenne reste inférieure à 1% dans tous les cas considérés.

		Mode				
P-FGM TYPE I	e	Source	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)
	0,1		Rezai et al. (2017)	0,0217	0,0538	0,0851
		Askari et al. (2018)	0,0217	0,0537	0,0850	0,1055
		Merdaci et al. (2020)	0,0213	0,0527	0,0833	0,1034
		<b>Présent</b>	<b>0,0215</b>	<b>0,0532</b>	<b>0,0843</b>	<b>0,1046</b>
		<b>% erreur (moy.)</b>	<b>0,17%</b>	<b>0,32%</b>	<b>0,26%</b>	<b>0,27%</b>
0,2		Rezai et al. (2017)	0,0210	0,0520	0,0824	0,1024
		Askari et al. (2018)	0,0210	0,0520	0,0823	0,1022
		Merdaci et al. (2020)	0,0203	0,0502	0,0794	0,0985
		<b>Présent</b>	<b>0,0207</b>	<b>0,0511</b>	<b>0,0810</b>	<b>0,1006</b>

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

		% erreur (moy.)	0,51%	0,54%	0,49%	0,48%
--	--	-----------------	-------	-------	-------	-------

**Tableau V.6 :** Comparaison des fréquences propres d'une plaque P-FGM poreuse ( $a=b$ , P-FGM=Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>,  $n=1$ ,  $a/h=20$ ).

Le tableau **V.6** présente une autre comparaison des résultats avec ceux publiés par Rezai et al [2017], Askari et al [2018] et Merdaci et al [2020]. Ces résultats représentent les fréquences propres des quatre modes de vibration libre (1, 1), (1, 2), (2, 2) et (1, 3) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour  $n=1$  et  $a/h = 20$ . Les fréquences diminuent lorsque la porosité augmente pour les 4 modes. La faible erreur relative montre une grande concordance des résultats avec ceux publiés.

Grâce aux comparaisons présentées sur les deux tableaux précédents et au choix de la fonction de cisaillement de type hyperbolique, nous pouvons conclure que notre code de calcul est en mesure de produire de bons résultats et permet donc d'entreprendre une étude détaillée de l'influence de certains paramètres (rapport  $a/h$ , index de la fraction volumique et type de matériaux) sur les fréquences propres d'une plaque FGM poreuse ou non poreuse.

### V.2.3. Résultats numériques :

Dans cette présente section, nous allons présenter les résultats numériques permettant d'étudier l'influence des paramètres essentiels tels que le rapport  $a/h$  (plaque épaisse à fine), rapport  $a/b$  (plaque carrée ou rectangulaire), taux de porosité (plaque poreuse ou pas), l'index de la fraction volumique et le type de distribution de la porosité sur les fréquences propres de vibration libre d'une plaque P-FGM.

Le **tableau V.7** et les **figures V.9** et **V.10** présentent l'influence de l'index de la fraction volumique  $n$  sur les dix premières fréquences propres d'une plaques P-FGM de type I carrée ( $a=b$ ) poreuse et non poreuse ( $e = 0$ ,  $e = 0,1$  et  $e = 0,2$ ). Grâce aux **Figure V.9** (mode fondamental) et **Figure V.10** (5ème mode), nous constatons que les fréquences décroissent avec l'augmentation de l'index  $n$  et du paramètre de porosité  $e$ . Lorsque  $n$  augmente, le mélange devient moins riche en céramique et plus riche en métal ( $n = 0$  correspond à une plaque en 100% céramique et  $n \rightarrow \infty$  correspond à une plaque en 100% métal). Comme le module de Young du métal est plus faible que celui de la céramique, la plaque tend à être moins rigide, d'où la décroissance des fréquences avec la croissance de  $n$ . Le même phénomène d'influence est constaté lorsque la plaque est du type P-FGM II (**tableau V.8** et **les figures V.11** et **V.12**). Nous soulignons que la présence de la porosité a aussi pour effet la réduction de la valeur nominale de la rigidité de la plaque car le module de Young diminue

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

d'où aussi la diminution de la valeur des fréquences lors que le taux  $e$  de la porosité augmente. Ceci est parfaitement visible sur les **figures V.9, V.10, V.11 et V.12** où les fréquences d'une plaque P-FGM sans porosité est supérieure à celle d'une plaque P-FGM avec une porosité de 10% et la fréquence de cette dernière est aussi supérieure à celle d'une plaque ayant 20% de porosité.

Les tableaux **V.9 et V.10** ainsi que les figures **V.13 à V.16** présentent la variation des fréquences propres de vibration libre d'une plaque P-FGM carrée de type I et II avec le rapport  $a/h$  pour différentes valeurs du taux de porosité ( $e = 0$ ,  $e = 0,1$  et  $e = 0,2$ ). Nous remarquons que la valeur des fréquences propres diminue lorsque le rapport  $a/h$  augmente et ceci quel que le taux de la porosité. En effet, lorsque le rapport  $a/h$  augmente, la plaque tend à être plus mince, d'où une augmentation de la flexibilité globale, ceci provoque une décroissance de la valeur des fréquences propres. Le taux de porosité a aussi pour effet de diminuer la valeur des fréquences propres quel que soit le rapport  $a/h$ .

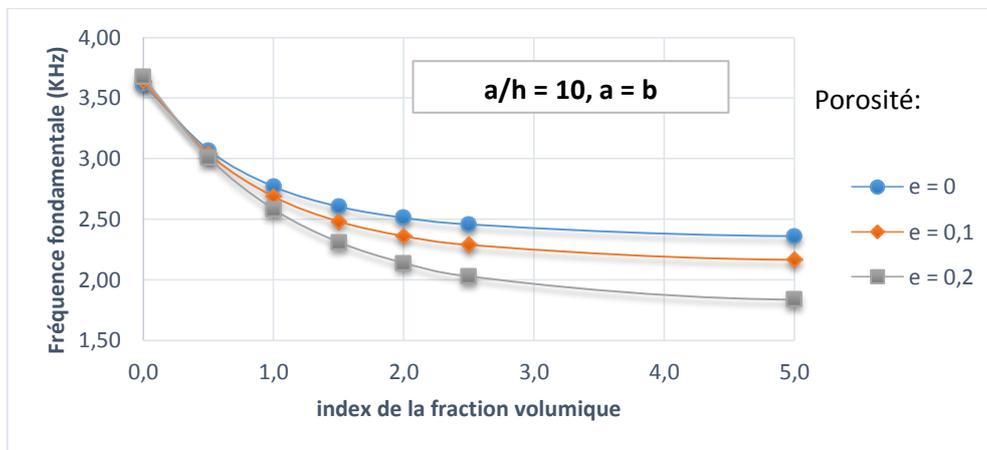
Les mêmes variations sont constatées sur les tableaux **V.11 et V.12** ainsi que sur les figures **V.17 à V.20** pour les fréquences propres d'une plaque rectangulaire ( $b = 2a$ ) car l'influence de la géométrie (rapport  $a/h$ ) de la plaque étant identique. De plus, nous constatons que, quel que soit le rapport  $a/h$ , l'index de la fraction volumique  $n$ , le taux de porosité  $e$  et le type de distribution de la porosité, les fréquences propres d'une plaque carrée sont supérieures à celles d'une plaque rectangulaire. Ceci s'explique par le fait que la plaque rectangulaire est moins rigide que la plaque carrée d'où les fréquences propres sont moins grandes.

P-FGM type I	Index de la fraction volumique $n$								
	$e$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	5	100
$\omega_i$	$e = 0$	3,6154	3,0715	2,7693	2,6042	2,5120	2,4580	2,3604	1,9404
		8,6269	7,3568	6,6369	6,2346	6,0025	5,8607	5,5784	4,6181
		8,6269	7,3568	6,6369	6,2346	6,0025	5,8607	5,5784	4,6181
		13,2413	11,3271	10,2241	9,5964	9,2252	8,9915	8,4984	7,0738
		16,1362	13,8282	12,4858	11,7138	11,2512	10,9553	10,3135	8,6103
		16,1362	13,8282	12,4858	11,7138	11,2512	10,9553	10,3135	8,6103
		17,2649	15,4968	14,3631	13,5681	12,9771	12,5194	11,2119	8,9602
		20,2494	17,3940	15,7128	14,7326	14,1354	13,7461	12,8743	10,7891
		20,2494	17,3940	15,7128	14,7326	14,1354	13,7461	12,8743	10,7891
	25,3728	21,8533	19,7524	18,5088	17,7371	17,2241	16,0395	13,4969	
	$e = 0,1$	3,6370	3,0414	2,6870	2,4813	2,3610	2,2887	2,1650	1,7284
		8,6898	7,2970	6,4533	5,9553	5,6572	5,4723	5,1231	4,1148
		8,6898	7,2970	6,4533	5,9553	5,6572	5,4723	5,1231	4,1148
		13,3522	11,2505	9,9588	9,1855	8,7142	8,4151	7,8135	6,3044
		16,2814	13,7456	12,1742	11,2258	10,6421	10,2669	9,4886	7,6750
		16,2814	13,7456	12,1742	11,2258	10,6421	10,2669	9,4886	7,6750

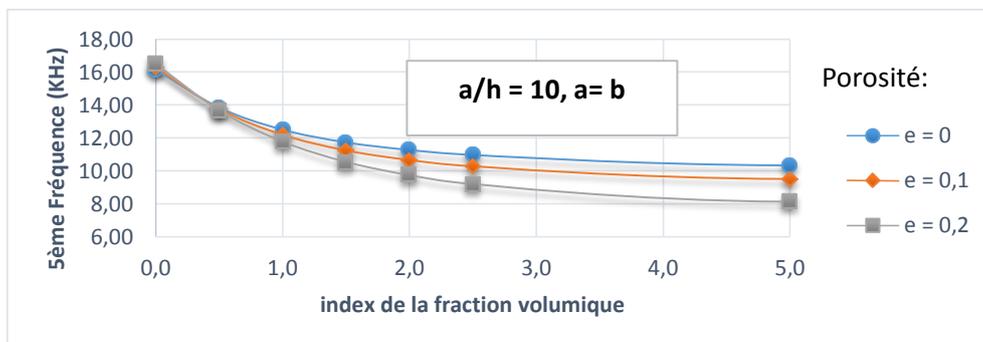
## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

e = 0,2	17,7175	15,7939	14,5317	13,6315	12,9532	12,4220	10,8719	8,0386
	20,4481	17,3083	15,3415	14,1416	13,3936	12,9053	11,8552	9,6190
	20,4481	17,3083	15,3415	14,1416	13,3936	12,9053	11,8552	9,6190
	25,6454	21,7718	19,3156	17,7992	16,8403	16,2039	14,7858	12,0361
	3,6714	3,0113	2,5825	2,3110	2,1392	2,0293	1,8364	1,4140
	8,7826	7,2368	6,2169	5,5634	5,1444	4,8717	4,3589	3,3609
	8,7826	7,2368	6,2169	5,5634	5,1444	4,8717	4,3589	3,3609
	13,5083	11,1731	9,6126	8,6028	7,9483	7,5168	6,6653	5,1431
	16,4812	13,6621	11,7644	10,5293	9,7239	9,1890	8,1068	6,2571
	16,4812	13,6621	11,7644	10,5293	9,7239	9,1890	8,1068	6,2571
	18,2308	16,1264	14,7065	13,2903	12,2669	11,5808	10,1502	6,5212
	20,7148	17,2216	14,8475	13,2903	12,2669	11,5808	10,1502	7,8354
	20,7148	17,2216	14,8475	13,6720	12,8791	12,2489	10,3540	7,8354
	26,0023	21,6892	18,7262	16,7657	15,4657	14,5851	12,6908	9,7953

**Tableau V.7 :** Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et de l'index de la fraction volumique ( $a/h = 10$ ,  $a = b$ ).



**Figure V.9 :** Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.



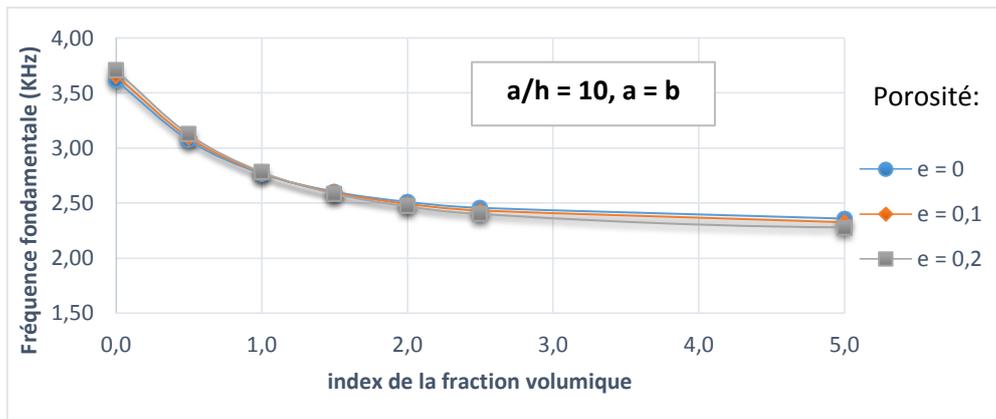
**Figure V.10 :** Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

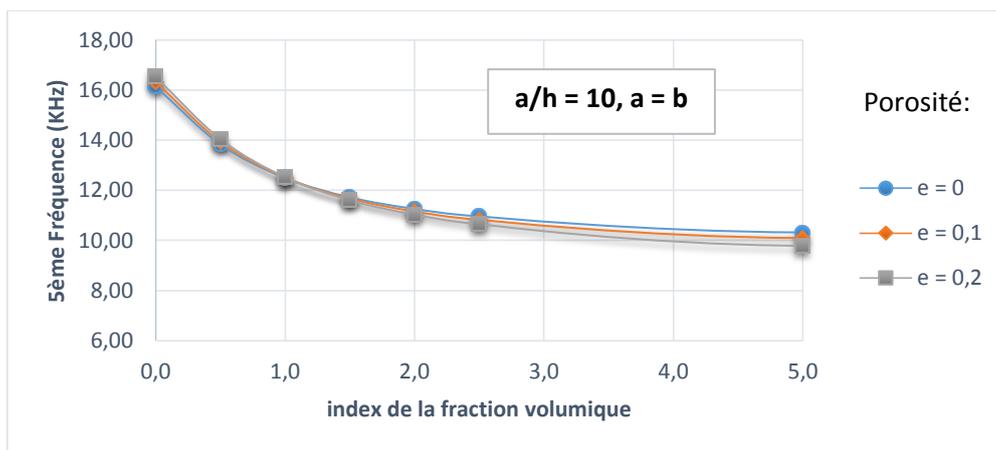
P-FGM type II		Index de la fraction volumique n							
e		0	0,5	1	1,5	2	2,5	5	100
$\omega_i$	e = 0	3,6154	3,0715	2,7693	2,6042	2,5120	2,4580	2,3604	1,9404
		8,6269	7,3568	6,6369	6,2346	6,0025	5,8607	5,5784	4,6181
		8,6269	7,3568	6,6369	6,2346	6,0025	5,8607	5,5784	4,6181
		13,2413	11,3271	10,2241	9,5964	9,2252	8,9915	8,4984	7,0738
		16,1362	13,8282	12,4858	11,7138	11,2512	10,9553	10,3135	8,6103
		16,1362	13,8282	12,4858	11,7138	11,2512	10,9553	10,3135	8,6103
		17,2649	15,4968	14,3631	13,5681	12,9771	12,5194	11,2119	8,9602
		20,2494	17,3940	15,7128	14,7326	14,1354	13,7461	12,8743	10,7891
		20,2494	17,3940	15,7128	14,7326	14,1354	13,7461	12,8743	10,7891
	25,3728	21,8533	19,7524	18,5088	17,7371	17,2241	16,0395	13,4969	
	e = 0,1	3,6582	3,0964	2,7755	2,5963	2,4943	2,4341	2,3273	1,9147
		8,7266	7,4138	6,6491	6,2120	5,9554	5,7968	5,4806	4,5321
		8,7266	7,4138	6,6491	6,2120	5,9554	5,7968	5,4806	4,5321
		13,3917	11,4117	10,2395	9,5573	9,1470	8,8855	8,3268	6,9122
		16,3175	13,9293	12,5023	11,6633	11,1520	10,8208	10,0902	8,3933
		16,3175	13,9293	12,5023	11,6633	11,1520	10,8208	10,0902	8,3933
		17,4838	15,6430	14,4455	13,5975	12,9627	12,4684	11,0440	8,5445
		20,4740	17,5178	15,7300	14,6647	14,0047	13,5688	12,5718	10,4842
		20,4740	17,5178	15,7300	14,6647	14,0047	13,5688	12,5718	10,4842
	25,6503	22,0043	19,7692	18,4176	17,5650	16,9907	15,6311	13,0698	
	e = 0,2	3,7052	3,1241	2,7820	2,5855	2,4714	2,4027	2,2811	1,8804
		8,8356	7,4768	6,6609	6,1820	5,8945	5,7137	5,3443	4,4079
		8,8356	7,4768	6,6609	6,1820	5,8945	5,7137	5,3443	4,4079
		13,5552	11,5045	10,2534	9,5058	9,0464	8,7481	8,0888	6,6720
		16,5143	14,0399	12,5163	11,5970	11,0245	10,6469	9,7816	8,0198
		16,5143	14,0399	12,5163	11,5970	11,0245	10,6469	9,7816	8,0676
		17,7147	15,7951	14,5267	13,6188	12,9338	12,3970	10,8340	8,0676
		20,7170	17,6524	15,7429	14,5758	13,8372	13,3404	12,1557	10,0232
20,7170		17,6524	15,7429	14,5758	13,8372	13,3404	12,1557	10,0232	
25,9497	22,1673	19,7793	18,2986	17,3451	16,6911	15,0718	12,4216		

**Tableau V.8 :** Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et de l'index de la fraction volumique ( $a/h = 10$ ,  $a = b$ ).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions



**Figure V.11 :** Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.



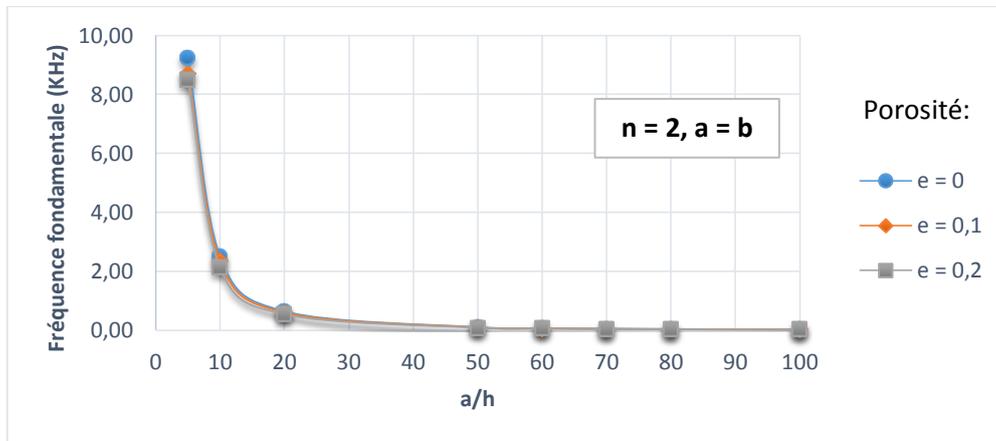
**Figure V.12 :** Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II en fonction de la porosité et de l'index de la fraction volumique.

P-FGM type I	a/h								
	e	5	10	20	50	60	70	80	100
e = 0	9,2252	2,5120	0,6438	0,1038	0,0721	0,0530	0,0406	0,0260	
	20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649	
	20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649	
	25,9542	9,2252	2,5120	0,4133	0,2875	0,2115	0,1620	0,1038	
	29,4672	11,2512	3,1152	0,5160	0,3591	0,2641	0,2024	0,1297	
	34,9139	11,2512	3,1152	0,5160	0,3591	0,2641	0,2024	0,1297	
	34,9139	12,9771	4,0031	0,6694	0,4661	0,3430	0,2629	0,1685	
	41,0372	14,1354	4,0031	0,6694	0,4661	0,3430	0,2629	0,1685	
	41,0372	14,1354	5,1574	0,8729	0,6084	0,4479	0,3434	0,2202	
	42,3578	17,7371	5,1574	0,8729	0,6084	0,4479	0,3434	0,2202	
e = 0,1	8,7142	2,3610	0,6042	0,0973	0,0676	0,0497	0,0381	0,0244	
	19,2843	5,6572	1,4926	0,2428	0,1688	0,1241	0,0951	0,0609	
	19,2843	5,6572	1,4926	0,2428	0,1688	0,1241	0,0951	0,0609	
	25,9065	8,7142	2,3610	0,3878	0,2697	0,1984	0,1520	0,0973	
	28,1329	10,6421	2,9294	0,4841	0,3369	0,2478	0,1899	0,1216	

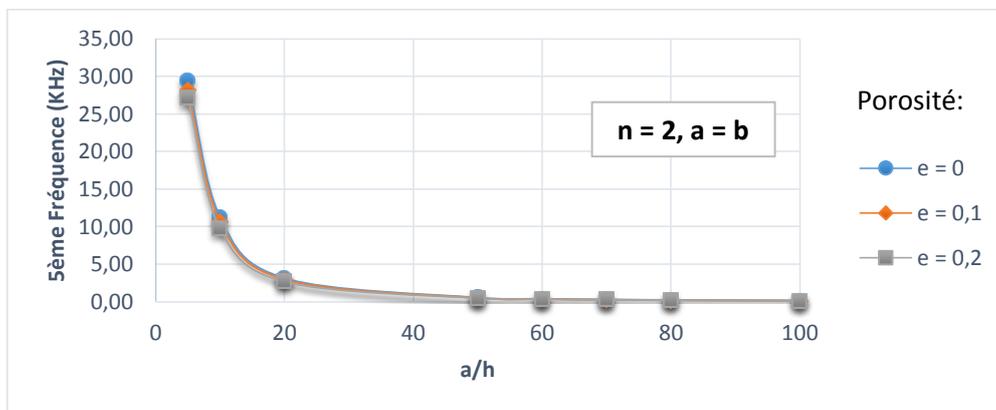
## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

$\omega_i$		33,4056	10,6421	2,9294	0,4841	0,3369	0,2478	0,1899	0,1216
		33,4056	12,9532	3,7670	0,6281	0,4373	0,3218	0,2466	0,1580
		40,6358	13,3936	3,7670	0,6281	0,4373	0,3218	0,2466	0,1580
		40,6358	13,3936	4,8577	0,8193	0,5709	0,4203	0,3222	0,2065
		40,9617	16,8403	4,8577	0,8193	0,5709	0,4203	0,3222	0,2065
	e = 0,2	8,4964	2,1392	0,5463	0,0879	0,0611	0,0449	0,0344	0,0220
		18,3580	5,1444	1,3510	0,2195	0,1525	0,1121	0,0859	0,0550
		18,3580	5,1444	1,3510	0,2195	0,1525	0,1121	0,0859	0,0550
		25,7582	7,9483	2,1392	0,3505	0,2438	0,1793	0,1373	0,0879
		27,1213	9,7239	2,6559	0,4376	0,3045	0,2239	0,1716	0,1099
		31,4462	9,7239	2,6559	0,4376	0,3045	0,2239	0,1716	0,1099
		31,4462	12,2669	3,4186	0,5679	0,3953	0,2908	0,2229	0,1428
		38,8490	12,2669	3,4186	0,5679	0,3953	0,2908	0,2229	0,1428
		38,8490	12,8791	4,4136	0,7410	0,5161	0,3799	0,2912	0,1866
		40,7262	15,4657	4,4136	0,7410	0,5161	0,3799	0,2912	0,1866

**Tableau V.9 :** Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM carrée en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et du rapport a/h (n = 2, a = b).



**Figure V.13 :** Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.



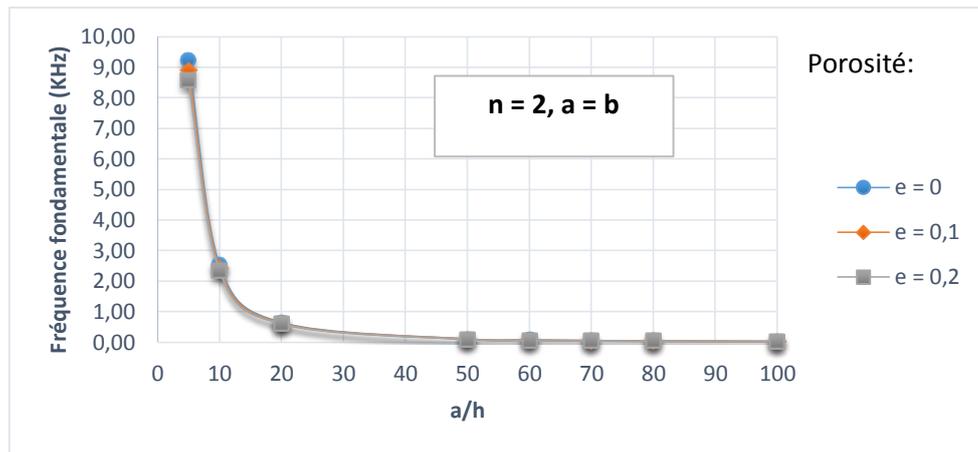
**Figure V.14 :** Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I carrée en fonction de la porosité et du rapport a/h.

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

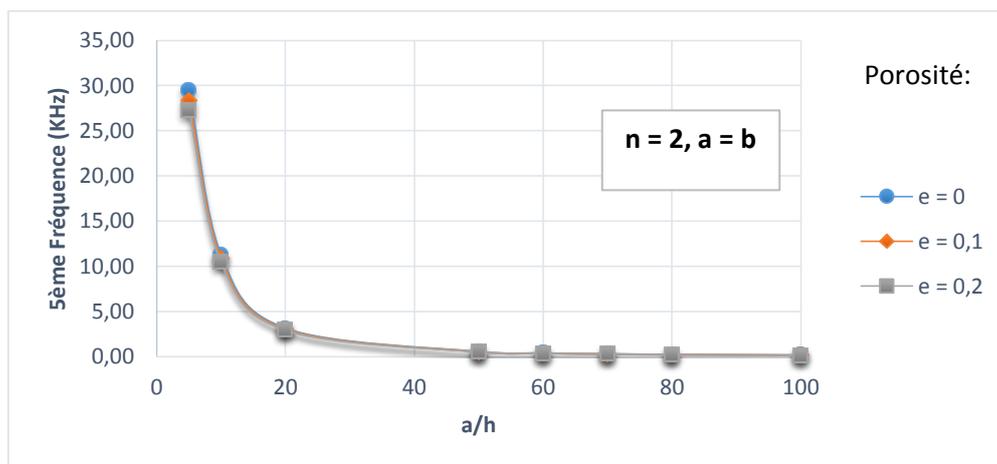
P-FGM type II	a/h								
	e	5	10	20	50	60	70	80	100
$\omega_i$	e = 0	9,2252	2,5120	0,6438	0,1038	0,0721	0,0530	0,0406	0,0260
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		25,9542	9,2252	2,5120	0,4133	0,2875	0,2115	0,1620	0,1038
		29,4672	11,2512	3,1152	0,5160	0,3591	0,2641	0,2024	0,1297
		34,9139	11,2512	3,1152	0,5160	0,3591	0,2641	0,2024	0,1297
		34,9139	12,9771	4,0031	0,6694	0,4661	0,3430	0,2629	0,1685
		41,0372	14,1354	4,0031	0,6694	0,4661	0,3430	0,2629	0,1685
		41,0372	14,1354	5,1574	0,8729	0,6084	0,4479	0,3434	0,2202
		42,3578	17,7371	5,1574	0,8729	0,6084	0,4479	0,3434	0,2202
	e = 0,1	8,9060	2,4278	0,6225	0,1003	0,0697	0,0512	0,0392	0,0251
		19,5601	5,7976	1,5363	0,2503	0,1740	0,1279	0,0980	0,0628
		19,5601	5,7976	1,5363	0,2503	0,1740	0,1279	0,0980	0,0628
		25,2294	8,9060	2,4278	0,3997	0,2780	0,2045	0,1567	0,1003
		28,3991	10,8591	3,0104	0,4989	0,3472	0,2554	0,1957	0,1254
		33,6412	10,8591	3,0104	0,4989	0,3472	0,2554	0,1957	0,1254
		33,6412	12,6147	3,8678	0,6472	0,4507	0,3317	0,2542	0,1629
		39,8912	13,6382	3,8678	0,6472	0,4507	0,3317	0,2542	0,1629
		39,8912	13,6382	4,9821	0,8439	0,5882	0,4331	0,3321	0,2129
		40,8059	17,1073	4,9821	0,8439	0,5882	0,4331	0,3321	0,2129
	e = 0,2	8,5628	2,3376	0,5997	0,0967	0,0672	0,0494	0,0378	0,0242
		18,7780	5,5777	1,4796	0,2412	0,1677	0,1233	0,0944	0,0605
		18,7780	5,5777	1,4796	0,2412	0,1677	0,1233	0,0944	0,0605
		24,4587	8,5628	2,3376	0,3850	0,2679	0,1970	0,1509	0,0967
		27,2438	10,4369	2,8981	0,4806	0,3345	0,2461	0,1886	0,1208
		32,2635	10,4369	2,8981	0,4806	0,3345	0,2461	0,1886	0,1208
		32,2635	12,2294	3,7227	0,6234	0,4342	0,3195	0,2449	0,1570
		38,6726	13,1024	3,7227	0,6234	0,4342	0,3195	0,2449	0,1570
		38,6726	13,1024	4,7940	0,8130	0,5666	0,4172	0,3199	0,2051
		39,1244	16,4278	4,7940	0,8130	0,5666	0,4172	0,3199	0,2051

**Tableau V.10** : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM carrée en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et du rapport a/h (n = 2, a = b).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions



**Figure V.15 :** Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II carrée en fonction de la porosité et du rapport  $a/h$ .



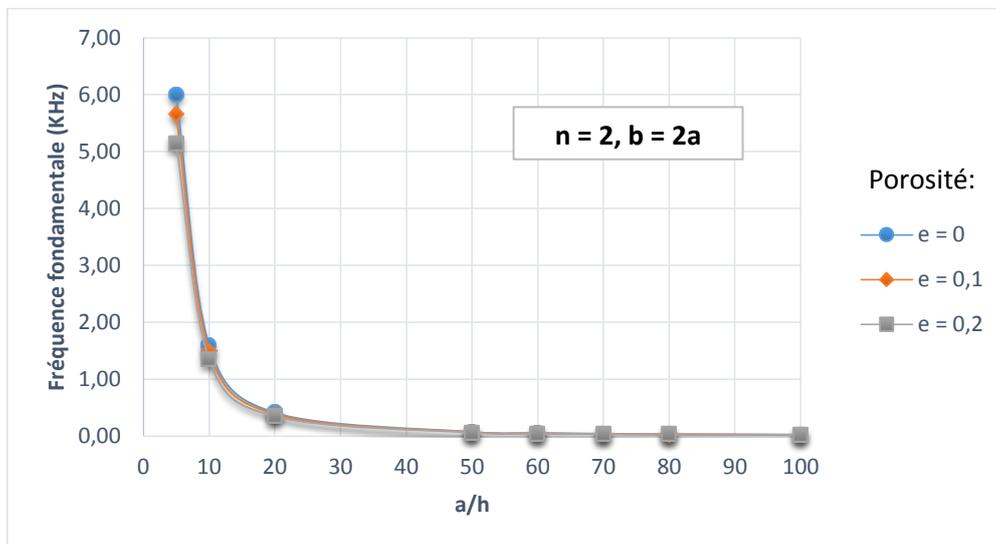
**Figure V.16 :** Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II carrée en fonction de la porosité et du rapport  $a/h$ .

P-FGM type I	$a/h$								
	$e$	5	10	20	50	60	70	80	100
$\omega_i$	$e=0$	6,0025	1,5893	0,4037	0,0649	0,0451	0,0331	0,0254	0,0162
		9,2252	2,5120	0,6438	0,1038	0,0721	0,0530	0,0406	0,0260
		14,1354	4,0031	1,0407	0,1685	0,1171	0,0861	0,0659	0,0422
		17,7371	5,1574	1,3551	0,2202	0,1530	0,1125	0,0862	0,0552
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		20,5186	7,3744	1,9764	0,3233	0,2248	0,1653	0,1266	0,0811
		24,2856	8,4415	2,2834	0,3748	0,2607	0,1917	0,1469	0,0941
		25,9542	9,2252	2,5120	0,4133	0,2875	0,2115	0,1620	0,1038
	27,3000	10,2593	2,8900	0,4775	0,3323	0,2444	0,1873	0,1200	
	$e=0,1$	5,6572	1,4926	0,3788	0,0609	0,0423	0,0311	0,0238	0,0152
		8,7142	2,3610	0,6042	0,0973	0,0676	0,0497	0,0381	0,0244
		13,3936	3,7670	0,9769	0,1580	0,1098	0,0807	0,0618	0,0396

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

		16,8403	4,8577	1,2725	0,2065	0,1435	0,1055	0,0808	0,0517
		19,2843	5,6572	1,4926	0,2428	0,1688	0,1241	0,0951	0,0609
		19,2843	5,6572	1,4926	0,2428	0,1688	0,1241	0,0951	0,0609
		20,4809	6,9571	1,8568	0,3033	0,2109	0,1551	0,1188	0,0761
		23,1331	7,9697	2,1457	0,3516	0,2445	0,1798	0,1377	0,0882
		25,9065	8,7142	2,3610	0,3878	0,2697	0,1984	0,1520	0,0973
		26,0397	9,9285	2,7172	0,4480	0,3117	0,2293	0,1757	0,1125
	e = 0,2	5,1444	1,3510	0,3423	0,0550	0,0382	0,0281	0,0215	0,0138
		7,9483	2,1392	0,5463	0,0879	0,0611	0,0449	0,0344	0,0220
		12,2669	3,4186	0,8837	0,1428	0,0992	0,0729	0,0559	0,0358
		15,4657	4,4136	1,1514	0,1866	0,1297	0,0953	0,0730	0,0467
		17,7420	5,1444	1,3510	0,2195	0,1525	0,1121	0,0859	0,0550
		17,7420	5,1444	1,3510	0,2195	0,1525	0,1121	0,0859	0,0550
		20,3636	6,3348	1,6814	0,2741	0,1906	0,1401	0,1073	0,0687
		21,3388	7,2641	1,9437	0,3178	0,2210	0,1625	0,1245	0,0797
		24,0643	7,9483	2,1392	0,3505	0,2438	0,1793	0,1373	0,0879
		25,7582	9,0661	2,4630	0,4050	0,2817	0,2072	0,1587	0,1017

**Tableau V.11** : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM rectangulaire en fonction de la porosité de type I (uniformément répartie) et du rapport a/h (n = 2, b = 2a).



**Figure V.17** : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type I rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

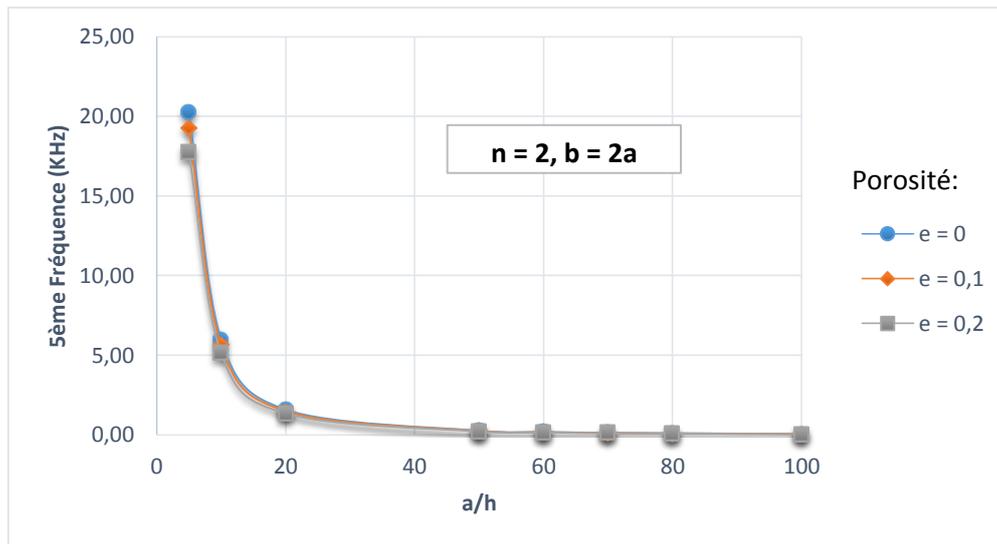


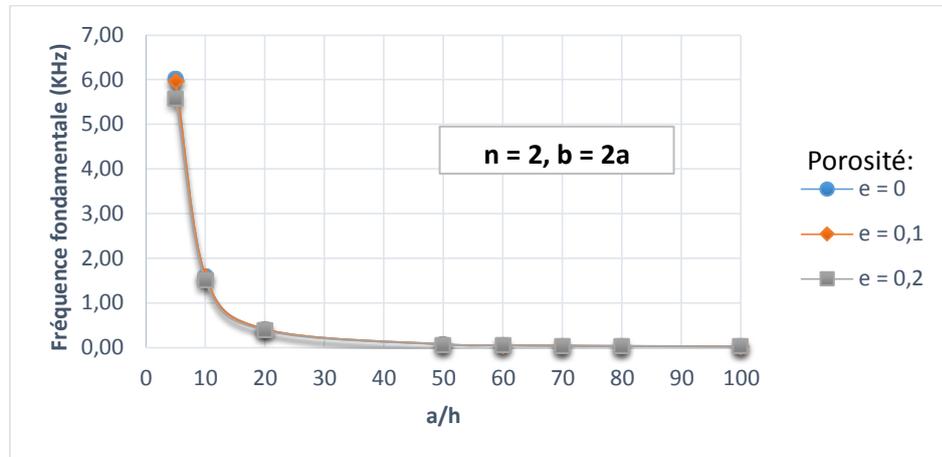
Figure V.18 : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type I rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport  $a/h$ .

P-FGM type II	a/h								
	e	5	10	20	50	60	70	80	100
$\omega_i$	e = 0	6,0025	1,5893	0,4037	0,0649	0,0451	0,0331	0,0254	0,0162
		9,2252	2,5120	0,6438	0,1038	0,0721	0,0530	0,0406	0,0260
		14,1354	4,0031	1,0407	0,1685	0,1171	0,0861	0,0659	0,0422
		17,7371	5,1574	1,3551	0,2202	0,1530	0,1125	0,0862	0,0552
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		20,2844	6,0025	1,5893	0,2589	0,1800	0,1323	0,1013	0,0649
		20,5186	7,3744	1,9764	0,3233	0,2248	0,1653	0,1266	0,0811
		24,2856	8,4415	2,2834	0,3748	0,2607	0,1917	0,1469	0,0941
		25,9542	9,2252	2,5120	0,4133	0,2875	0,2115	0,1620	0,1038
		27,3000	10,2593	2,8900	0,4775	0,3323	0,2444	0,1873	0,1200
	e = 0,1	5,9554	1,5785	0,4011	0,0645	0,0448	0,0329	0,0252	0,0161
		9,1470	2,4943	0,6396	0,1031	0,0716	0,0526	0,0403	0,0258
		14,0047	3,9735	1,0338	0,1674	0,1163	0,0855	0,0655	0,0419
		17,5650	5,1179	1,3461	0,2188	0,1521	0,1118	0,0856	0,0548
		20,0820	5,9554	1,5785	0,2572	0,1788	0,1315	0,1007	0,0645
		20,0820	5,9554	1,5785	0,2572	0,1788	0,1315	0,1007	0,0645
		20,4959	7,3145	1,9628	0,3212	0,2234	0,1643	0,1258	0,0806
		24,0345	8,3712	2,2675	0,3724	0,2590	0,1905	0,1459	0,0935
		25,9255	9,1470	2,4943	0,4107	0,2857	0,2101	0,1610	0,1031
		27,0114	10,2479	2,8695	0,4744	0,3301	0,2428	0,1861	0,1192
	e = 0,2	5,5777	1,4796	0,3761	0,0605	0,0420	0,0309	0,0236	0,0151
		8,5628	2,3376	0,5997	0,0967	0,0672	0,0494	0,0378	0,0242
		13,1024	3,7227	0,9691	0,1570	0,1091	0,0802	0,0614	0,0393
		16,4278	4,7940	1,2618	0,2051	0,1426	0,1048	0,0803	0,0514
		18,7780	5,5777	1,4796	0,2412	0,1677	0,1233	0,0944	0,0605
		18,7780	5,5777	1,4796	0,2412	0,1677	0,1233	0,0944	0,0605
		19,3363	6,8491	1,8397	0,3012	0,2095	0,1540	0,1180	0,0756
		22,4677	7,8373	2,1251	0,3491	0,2428	0,1786	0,1368	0,0876

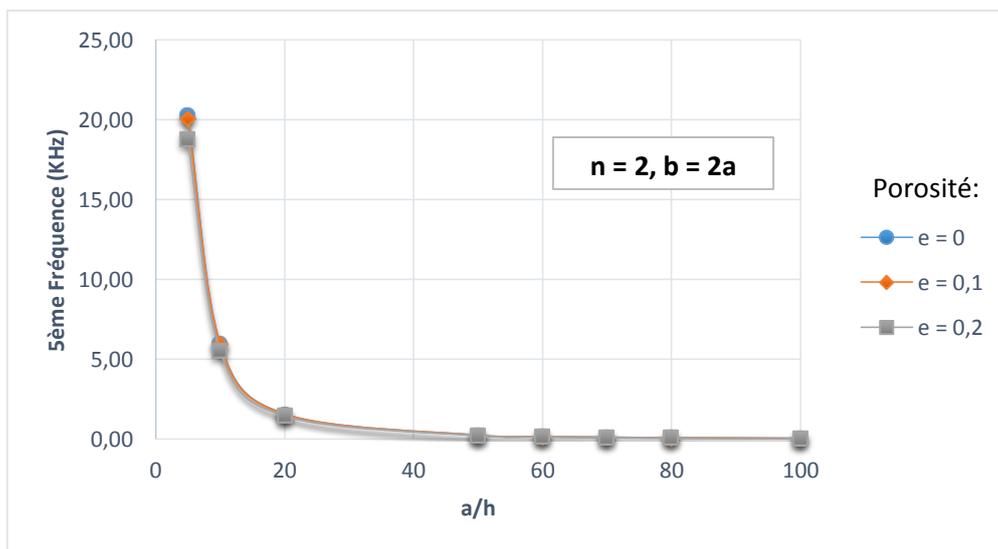
## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

		24,4587	8,5628	2,3376	0,3850	0,2679	0,1970	0,1509	0,0967
		25,2464	9,6682	2,6890	0,4448	0,3095	0,2277	0,1745	0,1118

**Tableau V.12** : Variation des fréquences propres (en KHz) d'une plaque FGM rectangulaire en fonction de la porosité de type II (non uniformément répartie) et du rapport a/h ( $n = 2$ ,  $b=2a$ ).



**Figure V.19** : Variation de la 1ère fréquence d'une plaque P-FGM type II rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.



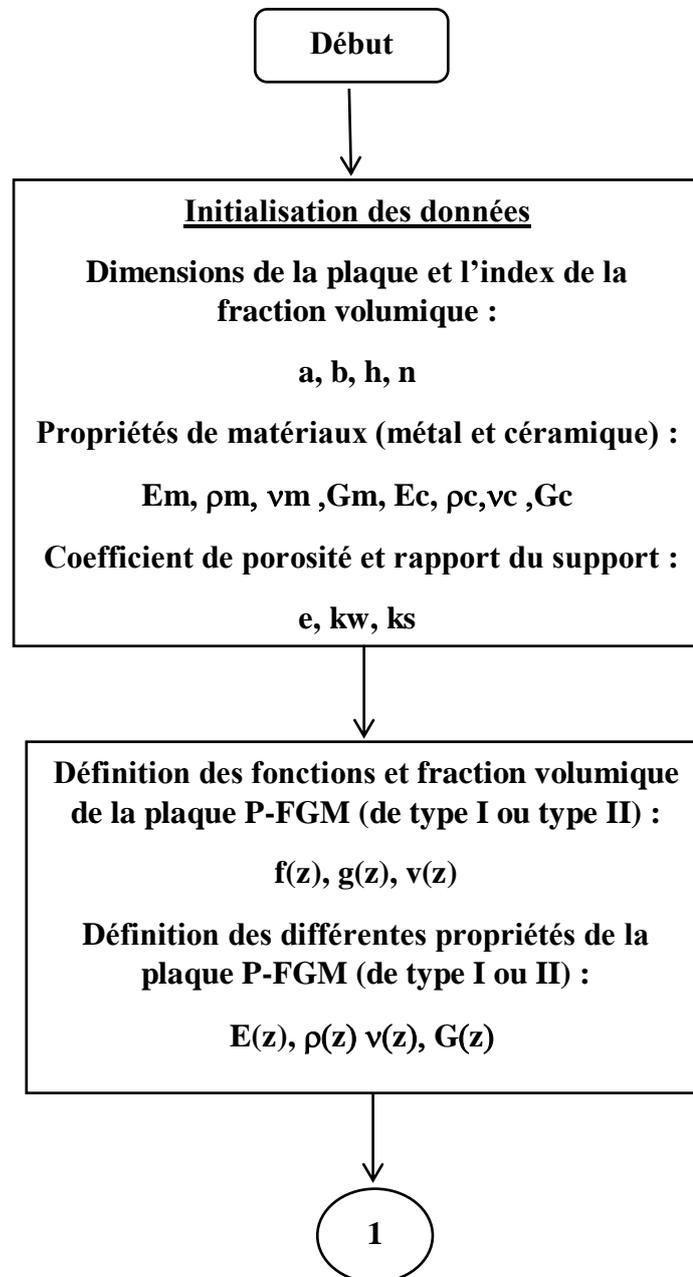
**Figure V.20** : Variation de la 5ème fréquence d'une plaque P-FGM type II rectangulaire en fonction de la porosité et du rapport a/h.

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

En fin, l'organigramme suivant récapitule les étapes principales du calcul du programme élaboré en langage Maple.

### V.3. Organigramme des principales étapes du programme :

L'organigramme suivant résume les étapes principales employées dans le programme Maple pour la résolution des équations de mouvements de plaque P-FGM avec porosité de type I et de type II simplement appuyée basée sur la méthode de Navier.



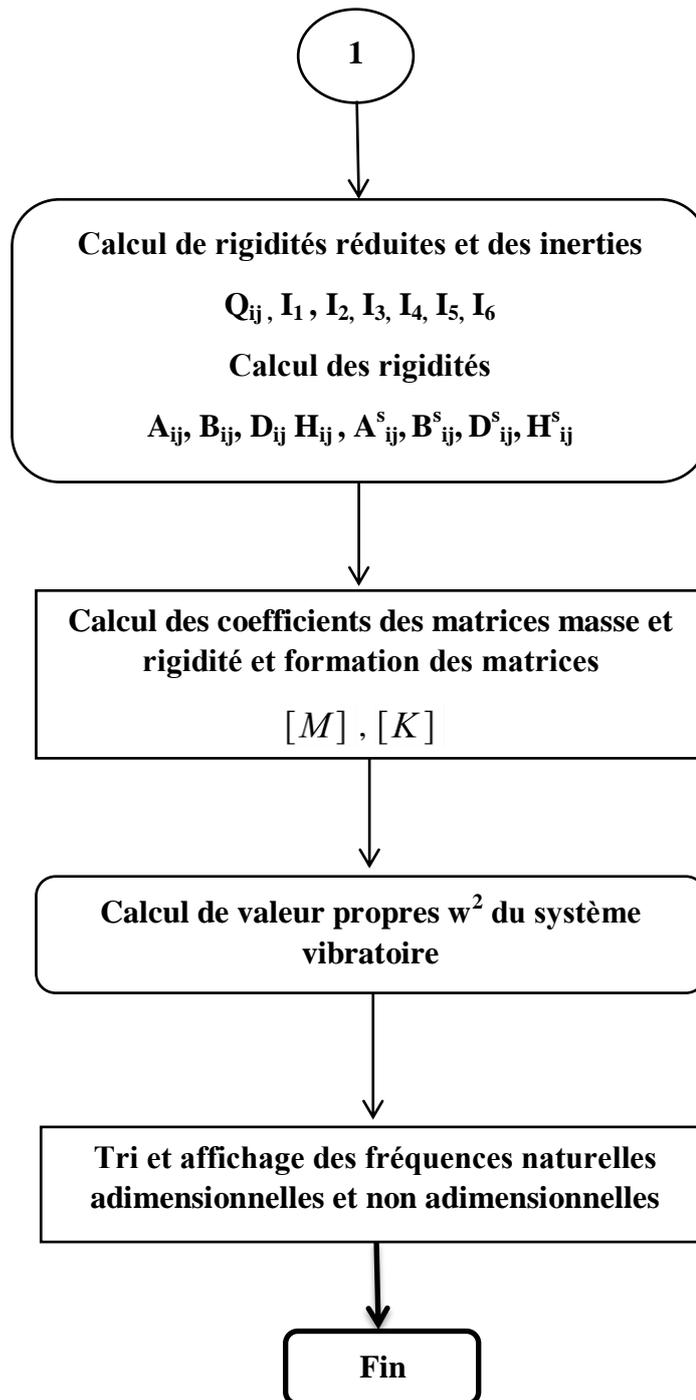


Figure V.21 : Organigramme du programme de calcul (Maple).

## Chapitre V : Résultats numériques et discussions

---

### V.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons choisi tout d'abord d'effectuer des calculs pour montrer la variation des propriétés mécaniques d'une plaque P-FGM (module de Young  $E$  et de cisaillement  $G$ , la masse volumique et coefficient de poisson) en fonction de l'index de la fraction volumique  $n$ . Nous avons mis aussi l'accent sur la présence ou non de la porosité et du type de distribution de la porosité à travers l'épaisseur de cette plaque. C'est cette variation des propriétés mécaniques avec les paramètres cités qui va expliquer en grande partie les résultats numériques des fréquences propres.

Une validation numérique a été ensuite effectuée pour tester la fiabilité du code de calcul développé à fournir des fréquences propres de vibration libre d'une plaque FGM comportant des porosités. Les résultats obtenus par le modèle présenté montrent que les résultats obtenus sont en parfait accord avec ceux publiés par Zenkour [2005], Sadi et al. [2019] et Merdaci et al. [2020]. Ceci nous amène à conclure que le choix d'une théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables utilisant une fonction de forme hyperbolique a été très concluant.

Plusieurs calculs ont été fait afin de montrer que les paramètres géométriques (rapports  $a/h$  et  $a/b$ ), les paramètres mécaniques (index de la fraction volumique, le taux de porosité et le type de distribution de la porosité) ont une influence significative sur les valeurs des fréquences propres d'une plaque P-FGM et qu'en particulier la porosité contribue à réduire de manière significative la valeur nominale des propriétés mécaniques et la valeur des fréquences propres des vibrations libre y compris pour les modes supérieurs.

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale et perspectives

---

Dans la présente étude, une théorie de déformation hyperbolique par cisaillement est choisie pour étudier le comportement dynamique des plaques poreuses en FGM à deux constitutions (100% céramique (alumine) au niveau de la face supérieure et 100% métal (aluminium) à la face inférieure). Contrairement aux autres théories sur la déformation par cisaillement, seules quatre fonctions de déplacement inconnues sont utilisées dans la théorie actuelle, contre cinq fonctions de déplacement inconnues utilisées dans d'autres théories. L'avantage principal de la théorie proposée par rapport aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé existant est que, la présente théorie implique moins d'inconnues, donc moins d'équations différentielles à résoudre, sans faire intervenir de facteur de correction de cisaillement. Combinée à une fonction de forme de type hyperbolique adéquate, moins de volume de calcul est nécessaire pour arriver à des résultats très précis, d'où une réduction des coûts liés à l'analyse numérique.

Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon la règle du mélange P-FGM avec une distribution de porosité de type I (uniforme) et de type II (non uniforme). Ces distributions sont pilotées par des lois mathématiques distinguées. Qui permettent d'évaluer les caractéristiques du matériau en présence de la porosité. Les équations différentielles de mouvement vibratoire libre sont obtenues en appliquant le principe variationnel de Hamilton. Nous avons utilisé Maple pour écrire le programme de résolution numérique d'un système d'équation algébriques au quel a été réduit le système d'équation aux dérivées partielles couplées grâce à la méthode analytique de Navier. Le système ainsi obtenu a été transformé en un problème aux valeurs propres en supposant un mouvement harmonique. Les fréquences propres d'une plaque P-FGM poreuse et non poreuse ont été extraites puis comparées à ceux publiées afin de valider le code de calcul développé. Conforté par les bons résultats trouvés, nous effectués une étude numérique afin d'examiner l'influence des paramètres géométriques (rapports  $a/h$  et  $a/b$ ), et physiques (index de la fraction volumique, le taux de porosité et le type de distribution de la porosité) sur les fréquences propres d'une plaque P-FGM poreuse simplement appuyée. Dans cette étude, l'accent a été mis sur l'examen de l'influence du taux de porosités sur la valeur nominale des propriétés mécaniques (module de Young, Module de cisaillement, masse volumique et coefficient de Poisson) et la valeur des fréquences propres des vibrations libre quel que soit la variation des paramètres d'étude.

Les résultats issus de cette étude paramétriques ont été présentés sur des tableaux et représentées graphiquement d'une manière appropriée. Ceci nous a permis de dégager les points suivants :

## Conclusion générale et perspectives

---

- La porosité a pour effet de réduire les valeurs nominales des propriétés de la plaque (module de Young, Module de cisaillement, masse volumique et coefficient de Poisson), le comportement mécanique global de la plaque est ainsi affecté,
- Le type de distribution de la porosité suivant l'épaisseur a un effet considérable sur la fréquence propres : la distribution de la porosité non uniforme (de type II) fournit des fréquences inférieures à celles de la distribution uniforme (de type I),
- L'augmentation du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) réduit la fréquence propre (la plaque tend à être plus mince car il conduit à une augmentation de la flexibilité globale),
- La fréquence décroît avec l'augmentation de l'index de la fraction volumique  $n$  et du paramètre de porosité  $e$  car la plaque devient moins rigide,
- Les fréquences propres d'une plaque carrée poreuse sont supérieures à celles d'une plaque rectangulaire poreuse qui est moins rigide, quelques soit les paramètres considérés et le taux de porosité,
- L'augmentation de la porosité réduit la valeur des fréquences propres, quel que soit le rapport d'épaisseur  $a/h$  et l'index de la fraction volumique  $n$  car la valeur nominal du coefficient de Young diminue.

Les perspectives auxquelles nous pensons et qui permettent d'étendre le champ d'application de cette étude sont les suivantes :

- Appliquer le présent travail pour des plaques en FGM comportant de porosités pour d'autres types des matériaux par exemple : (Aluminium/Zirconium  $ZrO_2$ ), (Aluminium/Carbure de Silicium, Sic), etc. afin de mener une étude comparative,
- Etude de la vibration libre des plaques en FGM renforcées par des nanotubes de carbone comportant de porosités,
- Utilisation de la théorie raffinée pour différents types d'appuis (libres, appuis simples encastrés et leurs combinaison),
- Etude statique (flexion et flambage) des plaques et poutres FGM par la théorie raffinée à quatre variables,
- Etude statique des plaques FGM sandwich poreuse par la théorie raffinée à quatre variables,
- Valider les modèles analytiques par l'élaboration de modèles numériques basées sur les éléments finis permettant de résoudre des formes géométriques de structure complexes,
- Etude du comportement statique des structures poreuses en tenant compte de l'effet de l'amortissement visqueux,

## **Conclusion générale et perspectives**

---

- La prise en compte de l'effet des efforts hygrothermiques sur les fréquences propres d'une plaque poreuse,
- La prise compte de l'effet de la déformation normale en  $z$  (stretching effect) dans l'étude de la réponse dynamique afin d'approcher au mieux les modèles à base d'élasticité 3D.

# **Références bibliographiques**

## Références bibliographiques

---

- [1] **Frédéric. Laurin**, "Introduction Générale sur les Matériaux composites", 2016.
- [2] **J.-M. Berthelot**. Matériaux composites. "Comportement mécanique et analyse des structures". Masson, 1996.
- [3] **Laurent Gornet**, "Généralités sur les matériaux composites". Ecole d'ingénieur. 2008. cel-00470296, version 1-6 Apr 2010.
- [4] **Lionel Gendre**. "Matériaux composites et structures composites"- CultureSciences de l'Ingénieur. Portail national de ressources - éducol STI.
- [5] **D. Youcef**. "Etude de la Rupture en mode I d'ouverture de Matériaux Composites". Mémoire de Magister, Université Mohamed Khider Biskra, 2003-2004.
- [6] **Walter Rosen und Carl H. Zweben**. "Tensile Failure Criteria for Fiber Composite Materials." Materials Sciences Corporation. NASA, Août 1972.
- [7] **K.Rouam**. "Elaboration, caractérisation mécanique et hygrothermique", Mémoire de Magister. Université M'hamed Bougara, Boumerdes : Faculté des sciences de l'ingénieur, 2013-2014.
- [8] **Mahi Amale**. "Analyse et Etudes des Plaques Composites FGM en Vibrations Libres". Thèse de Doctorat, Université Saad Dahlab Blida, 2012.
- [9] **Benbakhiti Abdeldjalil**. "Modélisation du Comportement Thermomécanique des Plaques FGM (Functionally Graded Materials)". Thèse de Doctorat, Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, 2017.
- [10] **Meksi Rafik**. "Investigation sur les différents Comportements Mécaniques des Structures en Matériaux Composites Avancés". Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, 2018.
- [11] **Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.**: "Novel applications of functionally graded nano, opto electronic and thermo-electric materials". Int. J. Mater. Mech. Manuf. 1, 221–224 (2013).
- [12] **Mahmood, R.M., Akinlabi, E.T.** Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. Mater. Des. 84, 402–410 (2015).
- [13] **Mahmood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.**: Functionally graded material: An overview. In: Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012, vol. 3, pp. 1593–1597 (2012).
- [14] **Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G.**: Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. NDT and E Int. 44(2), 169–177 (2011).

## Références bibliographiques

---

- [15] **Shumiya, H., Kato, K., Okubo, H.**: Feasibility studies on FGMs (functionally graded materials) application for gas insulated equipment. In: IEEE Conference on Electrical Insulation and dielectric Phenomena, pp. 360–363 (2004).
- [16] **Said Abderrahmane.** "Etude et Analyse des plaques FGM en Génie Civil". Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes, 2015.
- [17] **Ait Sidhoum Imene.** "Analyse de la Vibration Libre des Plaques Epaissees en Matériaux Fonctionnellement Gradués". Thèse de Doctorat, Université Mohamed Boudiaf Oran, 2019.
- [18] **Reddy, J. N.** Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
- [19] **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated composite Plates and shells: theory and analysis. 2nd ed. CRC PRESS. 2004.
- [20] **Barbero, E. J., Reddy J, N.,**"Modeling of Delamination in Composite Laminates Using a Layer-Wise Plate Theory"International Journal of Solids and Structures, 28(3), 373-388 (1991).
- [21] **SLIMANE, Merdaci, ADDA, Hadj Mostefa, MOHAMED, Merazi,** et al. Effects of evenpores distribution of functionally graded plate porous rectangular and square. Procedia Structural Integrity, 2020, vol. 26, p. 35-45.
- [22] **Mahi et al. Amale Mahi, Adda Bedia El Abbas, Tounsi Abdelouahed.** "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates". Applied Mathematical Modelling 39 (2015) 2489–2508. Elsevier.
- [23] **YOUSFI Mahfoud.** " Etude de l'effet de porosités sur le comportement mécanique des structures FGM ". Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes , Sidi Bel Abbes, 2020.
- [24] **Shen, H.-S. (2009),** "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [25] **Bao, G, Wang, L. (1995),** Multiple cracking in functionally graded ceramic/metalcoatings, Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871.
- [26] **Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003),** Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243.
- [27] **Delale. F, Erdogan. F. (1983),** The crack problem for a non-homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614.
- [28] **EBRAHIMI, Farzad et JAFARI, Ali.** " A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. Journal of Engineering", 2016,

## Références bibliographiques

---

vol. 2016.

[29] **Da Chen, Jie Yang, Ssritawat Kitipornchai.** "Free and forced vibrations of sheardeformable functionally graded porous beams ", International Journal of Mechanical Sciences 108-109 (2016) 14–22.

[30] **Love, A.E.H.,** ", On the small free vibrations and deformations of elastic shells". London : Philosophical trans. Of the Royal Society, 1988.

[31] **Rahul Kumar\*, Achchhe Lal, B. N. Singh, and Jeeoot Singh.** "Meshfree approach on buckling and free vibration analysis of porous FGM plate with proposed IHSDT resting on the foundation ". Curved and Layer. Struct. 2019 ; 6 :192–211.

[32] **Abdelkader MAHMOUDI, Rabbab BACHIR-BOUIADJRA, Samir BENYOUCEF, Abdelouahed TOUNSI, El Abbas ADDA-BEDIA.** " Influence de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sur fondation élastique ". a. Laboratoire des Matériaux et Hydrologie.