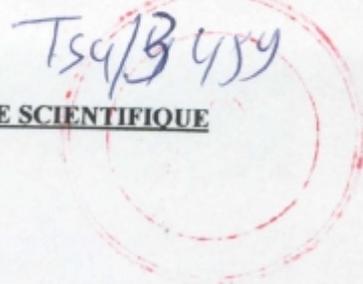


MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS
SETIF



MEMOIRE

présenté à

L'institut de Physique

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : PHYSIQUE DE LA MATIERE ET DU RAYONNEMENT

Par

CHERBAL Omar

Thème :

EVOLUTION EXACTE DES ETATS COHERENTS FERMIONIQUES INVARIANT-ANGLE , PHASE DE BERRY ET ANGLE DE HANNAY

Date de soutenance : 06/06 / 1998

Devant le Jury :

Président : Pr. M. FELLAHI.U.S.T.H.B.
Rapporteurs : M. MAAMACHE. M.C. U.F.A. Sétif.
Examineurs : K. BENCHEIKH. M.C. U.F.A. Sétif.
M. DRIR. M.C. U.S.T.H.B.
H.HACHEMI. M.C. U.F.A. Sétif

الدعاء

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿قل ربي زدني علما﴾

صدق الله العظيم

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements au Dr Mustapha Maamache, d'avoir accepté de diriger ce travail. Tout au long de ce travail, Mr Maamache m'a soutenu, conseillé qu'il trouve ici une nouvelle fois mes sincères remerciements.

Par le passé Mr le professeur M. Fellah a présidé les jurys de thèses de magister et de doctorat d'état de Mr M. Maamache. Je suis très honoré qu'il ait accepté de présider également le jury de ma thèse.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à monsieur M. Drir , maître de conférence à l'USTHB, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie vivement messieurs K.Bencheikh et H.Hachemi maîtres de conférence à l'université de Sétif, pour l'honneur qu'ils me font d'être membres du jury.

Je suis heureux d'exprimer mes remerciements affectueux à mon frère Mokrane pour son soutien moral.

Enfin, je remercie tous mes amis et mes collègues.

O.Cherral

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

- Mes très chers parents
- Mes frères et soeurs
- Toute ma famille
- Tous mes amis

O.Cherral

SOMMAIRE

I : Introduction	02
 CHAPITRE II : Rappels sur les phases et angles géométriques, et états cohérents action-angle.	
II-1 . Théorème adiabatique quantique et phase de Berry.....	07
II-2 . Généralisation au cas non adiabatique.....	08
II-3 . Théorème adiabatique classique et angle de Hannay.....	10
II-4 . Les états cohérents action-angle.....	12
 CHAPITRE III: Version Grassmanienne du Spin 1/2 et Angle de Hannay non adiabatique	
III-1 . Spin $\frac{1}{2}$ dans sa version Grassmanienne.....	16
III-2 . Angle de Hannay non adiabatique.....	21
 CHAPITRE IV : États cohérents fermioniques invariant - angle et angle de Hannay non adiabatique.	
IV-1 . Définition des états cohérents fermioniques invariant-angle.....	25
IV-2 . Calcul de l'angle de Hannay non adiabatique.....	28
 APPENDICE : Calcul du Lagrangien en fonction des coordonnées normales.....	
	32
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.	36
ANNEXE	40



I: INTRODUCTION

Berry [Berry (1984)] a découvert un effet géométrique relatif à la phase des états stationnaires. Cet effet apporte un complément au théorème adiabatique standard. Ce dernier énonce que si les paramètres d'un Hamiltonien varient lentement en fonction du temps, le nombre quantique principal ne varie pas c'est-à-dire que l'évolution d'un état propre reste toujours état propre de l'Hamiltonien. Le point nouveau mis en évidence par Berry est que l'évolution de la variable conjuguée (la phase) n'est pas uniquement "dynamique", c'est-à-dire fixée par l'Hamiltonien instantané, il s'y ajoute une phase géométrique entièrement déterminée par le chemin suivi dans l'espace des paramètres de l'Hamiltonien.

La phase de Berry a été généralisée à des évolutions non adiabatiques par Aharonov et Anandan [Aharonov et Anandan (1987)] mettant ainsi en évidence la phase géométrique pour des évolutions cycliques. Une manière d'obtenir des états cycliques est de considérer l'évolution d'états propres de l'opérateur invariant [Lewis et Riesenfeld (1969)] qui joue le même rôle que l'Hamiltonien dans le cas adiabatique, ce qui a conduit plusieurs auteurs [Molares (1988), Cervero et Lejarreta (1989), Gao et al (1990), Bose et Dutta Roy (1991), Maamache (1995), Ji et al (1995)] à utiliser la théorie des invariants pour l'étude des phases géométriques non adiabatiques.

L'analogue classique de la phase de Berry a été mis en évidence par Hannay [Hannay (1985)]. En effet, ce dernier a montré que lorsque les paramètres d'un Hamiltonien classique, supposé intégrable, varient lentement en fonction du temps, l'évolution de la variable conjuguée à l'action (conservée d'après le théorème adiabatique classique) contient en plus de la partie dynamique une partie géométrique entièrement déterminée par le chemin suivi dans l'espace des paramètres de l'Hamiltonien.

De nature géométrique l'angle de Hannay apparaît également pour des évolutions non adiabatiques. La version classique de l'approche d'Aharonov et Anandan a été étudiée par Berry et Hannay [Berry et Hannay (1988)], et celle utilisant

la théorie des invariants par Bhattachargee et Sen [Bhattachargee et Sen (1988)].

Le lien de l'angle géométrique avec la phase quantique [Berry (1985)] faisait appel à l'approche de Maslov [Maslov et Fedoriuk (1983), Berry (1983)] reliant ainsi, dans la limite semiclassique, la fonction d'onde aux trajectoires dans l'espace de phase. Ce lien entre angle et phase géométrique a été retrouvé par une approche opposée à celle de Berry par Maamache et al; [Maamache et al. (1990), (1994)] et consiste à décrire "quantiquement" l'espace de phase classique à l'aide des états cohérents action-angle.

Dans la littérature, l'illustration de la phase et de l'angle géométrique a été souvent étudiée dans le cas de l'oscillateur harmonique généralisé et du spin $\frac{1}{2}$ dans un champs magnétique.

La phase géométrique non adiabatique du spin $\frac{1}{2}$ dans un champs magnétique variable a été, discutée et calculée de différentes manières. Parmi elles, les évolutions cycliques [Layton et al (1990)], les évolution régie par des Hamiltoniens périodiques [Bulgac (1988), Moore (1990), Moore et Stedman (1990)] et enfin les évolutions relevant de l'approche des invariants [Mizrahi (1989)]. Récemment, Maamache [Maamache (1996)] a discuté et calculé l'angle géométrique non adiabatique relatif à un spin $\frac{1}{2}$ dans un champs magnétique dans le cas commutatif (Bosonique) en utilisant l'approche des invariants.

La question de la description classique d'une particule à spin était posée depuis longtemps, ce n'est que dans le cadre d'une mécanique classique Grassmanienne [Casalbuoni (1976)] que Berezin et Marinov [Berezin et Marinov (1977)] ont pu les premiers traiter la dynamique Hamiltonienne d'un spin "classique" en présence d'un champs magnétique. Gozzi et Thacker [Gozzi et Thacker (1987)] ont pu, les premiers, calculer l'angle de Hannay adiabatique pour un spin $\frac{1}{2}$ placé dans un champs magnétique en utilisant la mécanique "classique" Grassmanienne. Abe [Abe (1989)] avait introduit les états cohérents fermioniques dans le but de retrouver les résultats de

Gozzi et Thacker [Gozzi et Thacker (1987)]. Maamache et al [Maamache et al (1992)] ont montré que l'angle de Hannay calculé dans l'approche d'Abe n'apparaît pas dans la phase globale de l'état cohérent fermionique, mais apparaît dans l'argument du nombre complexe définissant les états cohérents fermioniques, de la même manière que dans le cas commutatif.

On se propose dans cette thèse de retrouver les résultats classiques non adiabatiques du spin $\frac{1}{2}$ dans un champs magnétique variable :

- En étudiant la version grassmanienne du spin $\frac{1}{2}$ dans un champs magnétique.
- En étudiant l'évolution des états cohérents fermioniques invariant angle, c'est-à-dire on donne une description quantique à l'évolution classique.

Avant d'étudier ces deux derniers point en détails, nous allons rappeler les notions de phases et angles géométriques et d'états cohérents action-angle au chapitre II. Le chapitre III est consacré à la détermination de l'invariant du spin $\frac{1}{2}$ dans sa version grassmanienne et enfin l'évolution classique exacte et l'angle de Hannay non adiabatique. Une fois que le spin $1/2$ dans sa version grassmanienne aura été quantifié, on définit les états cohérents fermioniques invariant-angle qui rendent compte de l'évolution classique exacte et de l'angle de Hannay non adiabatique à l'instar des états cohérents action-angle dans les cas commutatif. C'est l'objet du chapitre IV. un appendice termine cette thèse.

Chapitre II

RAPPELS SUR LES PHASES ET ANGLES

GÉOMÉTRIQUES, ET ÉTATS COHÉRENTS

ACTION-ANGLE

II-1 . Théorème adiabatique quantique et phase de Berry :

En considérant l'évolution d'un système quantique, régie par un Hamiltonien dépendant de paramètres $\vec{X}(t)$ qui varient lentement en fonction du temps, Berry [Berry (1984)] a découvert un effet géométrique relatif à la phase des états stationnaires. Cet effet apporte un complément au théorème adiabatique [Messiah (1964)] qui stipule qu'un système initialement dans un état stationnaire non dégénéré, repéré par un ensemble donné des nombres quantiques, restera dans un état spécifié par les mêmes nombres quantiques lors d'une évolution adiabatique.

Soit $\hat{H}(\vec{X})$ un Hamiltonien ayant des vecteurs propres non dégénérés $|n, \vec{X}\rangle$ et des valeurs propres $E_n(\vec{X})$:

$$\hat{H}(\vec{X})|n, \vec{X}\rangle = E_n(\vec{X})|n, \vec{X}\rangle, \quad (2.1)$$

or d'après le théorème adiabatique, l'évolué $|\psi(t)\rangle$ par $\hat{H}(\vec{X}(t))$ d'un état initial $|\psi(0)\rangle = |n, \vec{X}(0)\rangle$, état propre de l'Hamiltonien à l'instant zéro $\hat{H}(\vec{X}(0))$, est toujours état propre de l'Hamiltonien $\hat{H}(\vec{X}(t))$. L'idée de Berry est que la phase ϕ_n de cet état, défini par rapport aux états de références $|n, \vec{X}(t)\rangle$ par :

$$|\psi(t)\rangle = \exp(i\phi_n(t))|n, \vec{X}(t)\rangle, \quad (2.2)$$

est entièrement déterminée si on impose à $|\psi(t)\rangle$ de satisfaire l'équation de Schrodinger "en moyenne",

$$\langle \psi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{H}(\vec{X}(t)) | \psi(t) \rangle. \quad (2.3)$$

on obtient alors

$$\frac{d}{dt} \phi_n(t) = -\frac{1}{\hbar} E_n(\vec{X}) + \langle n, \vec{X} | i \frac{\partial}{\partial t} | n, \vec{X} \rangle, \quad (2.4)$$

d'où la phase $\phi_n(t)$ contient deux termes, le premier appelé phase dynamique est "attendu", car il est présent même si les paramètres \vec{X} ne dépendent pas du temps,

$$\beta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds ; \quad E_n(t) = \langle n, \vec{X} | \hat{H}(\vec{X}) | n, \vec{X} \rangle . \quad (2.5)$$

Le second terme est la phase de Berry γ_n (ou phase géométrique) donné par :

$$\gamma_n(t) = \int_{\vec{x}(0)}^{\vec{x}(t)} \langle n, \vec{X} | i \nabla_{\vec{x}} | n, \vec{X} \rangle d\vec{X} . \quad (2.6)$$

Son caractère géométrique est justifié par le fait que lorsque les paramètres effectuent adiabatiquement un cycle C , γ_n ne dépend que du chemin suivi dans l'espace des paramètres, et cela se remarque sur la formule précédente car le temps n'apparaît pas.

II-2 . Généralisation au cas non adiabatique:

Dé nature géométrique, la phase de Berry apparaît également pour des évolutions autres qu'adiabatiques. Aharonov et Anandan [Aharonov et Anandan (1987)] ont généralisés l'évolution adiabatique cyclique de Berry, en considérant une évolution cyclique quelconque au cours de laquelle un état prend au bout du temps T sa valeur initiale à une phase constante près :

$$| \psi(t+T) \rangle = e^{i\phi} | \psi(t) \rangle . \quad (2.7)$$

Si on choisit les états de références $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, tel que

$$|\tilde{\psi}(t+T)\rangle = |\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (2.8)$$

on définit la phase $\phi(t)$ de l'état $|\psi(t)\rangle$ au cours de son évolution par

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi(t)} |\tilde{\psi}(t)\rangle . \quad (2.9)$$

Comme par hypothèse $|\psi(t)\rangle$ satisfait de manière exacte l'équation de Schrodinger, cette phase est déterminée elle aussi de manière exacte. Sa dérivée

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \langle \tilde{\psi}(t) | \hat{H} | \tilde{\psi}(t) \rangle + i \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \tilde{\psi}(t) \rangle \quad (2.10)$$

contient deux termes, qu'Aharonov et Anandan (A-A) interprètent comme des contributions dynamique et géométrique.

Une approche généralisant celle de (A-A) est la théorie des invariants [Lewis et Riesenfeld (1969)]. Soit $\hat{I}(t)$ un opérateur dépendant du temps vérifiant l'équation

$$\frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{I}(t), \hat{H}(t)] \quad (2.11)$$

et soit $|n,t\rangle$ un choix de vecteurs propres de références de $\hat{I}(t)$. $\hat{I}(t)$ s'exprime en fonction de l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t)$ de l'équation de Schrodinger $\left(i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U} \right)$

par
$$\hat{I}(t) = \hat{U}(t)\hat{I}(0)\hat{U}^\dagger(t), \quad (2.12)$$

il en résulte que l'évolué $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|n,0\rangle$ d'un état initial $|n,0\rangle$ est toujours état propre de $\hat{I}(t)$. Repérant alors sa phase $\phi_n(t)$ par rapport aux états $|n,t\rangle$ par

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|n,0\rangle = e^{i\phi_n(t)} |n,t\rangle, \quad (2.13)$$

on établit facilement pour elle l'équation

$$\frac{d\phi_n(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \langle n,t | \hat{H}(t) | n,t \rangle + i \langle n,t | \frac{\partial}{\partial t} | n,t \rangle \quad (2.14)$$

dont le second membre contient lui aussi une partie dynamique et une partie géométrique. Donc un état propre de l'invariant évolue comme un état propre de

l'Hamiltonien dans le cas adiabatique, d'où on en déduit que dans le cas non adiabatique l'invariant joue le rôle que l'Hamiltonien dans le cas adiabatique. C'est une des raisons majeures que la théorie des invariants a pris une place très importante dans les travaux sur la phase géométrique non adiabatique [Molares (1988), Cervero et Lejarreta (1989), Gao et al (1990), Bose et Dutta Roy (1991), Maamache (1995), Ji et al (1995)].

II-3 .Théorème adiabatique classique et angle de Hannay :

En mécanique classique le théorème adiabatique applicable au systèmes Hamiltoniens intégrables [Arnold (1976)] stipule qu'au cours d'un changement adiabatique des paramètres d'un Hamiltonien intégrable les variables d'action I_i restent constantes. On pourrait penser que les variables angulaires conjuguées θ_i évoluent avec des vitesses $\dot{\theta}_i(t)$ égales aux fréquences instantanées associées à l'Hamiltonien au même instant. Hannay [Hannay (1985)] a montré que comme dans le cas quantique, s'ajoute à cette contribution "dynamique" aux angles θ_i , une contribution géométrique qui ne dépend que du circuit suivi dans l'espace des paramètres.

Au lieu de se placer avec Berry [Berry (1985)] dans le cadre des transformations canoniques dépendantes du temps [Goldstein (1964)]; plaçons nous avec Maamache et al [Maamache et al. (1990), (1994)] dans le cadre du principe variationnel moyenné qui permet d'obtenir le théorème adiabatique standards ($\dot{I} = 0$) et l'angle de Hannay d'une manière plus simple et rapide, et considérons le cas à une dimension. Soient I et θ les variables action et angle associés à un Hamiltonien $H(q,p, \vec{X}) = \mathcal{H}(I, \vec{X})$. Ces variables permettent un paramétrage $q(I,\theta, \vec{X}), p(I,\theta, \vec{X})$ de l'espace de phase. $2\pi I$ représente l'aire d'une trajectoire et θ est la variable conjuguée mesurée sur chaque trajectoire (ce qui implique un choix d'origine sur les trajectoires). L'angle de Hannay peut être obtenue de manière exacte en moyennant le principe variationnel

$$\delta \left[\int \mathcal{L} dt \right] = 0 ; \quad \mathcal{L} = p\dot{q} - H \quad (2.15)$$

de la mécanique classique Hamiltonienne. Ce principe moyenné s'écrit :

$$\delta \left[\int \overline{\mathcal{L}} dt \right] = 0 \quad (2.16)$$

où $\overline{\mathcal{L}}$ est la valeur moyenne de \mathcal{L} définie par

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{L}(q(I, \theta, \vec{x}), p(I, \theta, \vec{x}), \vec{x}) \\ &= \overline{p \frac{\partial q}{\partial I} \dot{I} + I \dot{\theta} + p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \vec{\dot{X}} - \mathcal{H}(I, \vec{X})} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(en remarquant que $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = p \frac{\partial q}{\partial \theta}$). Comme θ est une variable cyclique

pour $\overline{\mathcal{L}}$, l'action $I = \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}}$ est automatiquement conservée ($\dot{I} = 0$ théorème adiabatique standard). Utilisant ce résultat dans l'extrémalisation par rapport à I , on obtient :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{X}} \left(p \frac{\partial q}{\partial I} \right) - \frac{\partial}{\partial I} \left(p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right) \right] \vec{X} = \dot{\theta}_D + \dot{\theta}_H \quad (2.18)$$

La partie géométrique qui s'écrit sous forme d'un crochet de poisson [Koiller (1989)]

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_H &= \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial \vec{X}} \cdot \frac{\partial q}{\partial I} - \frac{\partial p}{\partial I} \cdot \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right)} \vec{X} \\ &= \overline{\{p, q\}_{\vec{x}, I}} \cdot \vec{X} \end{aligned} \quad (2.19)$$

s'identifie facilement à l'expression donnée par Berry et Hannay.

II-4 . Les états cohérents Action -Angle :

Dans son article consacré à l'angle de Hannay, Berry [Berry (1985)] établit une relation "semi classique" entre l'angle classique et la phase quantique en utilisant la méthode de Maslov [Maslov et Fedoriuk (1983), Berry (1983)]. Cette méthode relie de manière générale la fonction d'onde, définie en représentation q , aux trajectoires dans l'espace de phase. Une approche opposée pour retrouver la relation semiclassique entre l'angle classique et la phase quantique a été développée par Maamache et al [Maamache et al (1990)] et consiste (à l'aide de la notion d'états cohérents) de décrire quantiquement l'espace de phase classique.

Les états cohérents action-angle utilisés sont analogues aux états cohérents usuels (de l'oscillateur harmonique)

$$|\alpha, \bar{X}\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, \bar{X}\rangle, \quad \alpha = |\alpha|e^{-i\theta} \in \mathbb{C} \quad (2.20)$$

$|n, \bar{X}\rangle$ étant les vecteurs propres de l'Hamiltonien $\hat{H}(\bar{X})$. Dans la limite classique ($\hbar \rightarrow 0$, $|\alpha| \rightarrow +\infty$, $\hbar|\alpha|^2$ finie), le nombre complexe α est relié aux variables classiques action-angle par :

$$\alpha = \sqrt{\frac{I}{\hbar}} e^{-i\theta} \quad (2.21)$$

Étant donné que la somme (2.20) est piquée autour de $N=|\alpha|^2$, alors un changement de phase de l'état $|n, \bar{X}\rangle \rightarrow e^{i\varphi_n(\bar{X})} |n, \bar{X}\rangle$ induit un changement sur les états $|\alpha, \bar{X}\rangle$ dans la limite classique

$$|\alpha, \bar{X}\rangle \rightarrow e^{i\left(\varphi_N - N \frac{\partial \varphi_N}{\partial N}\right)} |\alpha e^{i \frac{\partial \varphi_N}{\partial N}}, \bar{X}\rangle \quad (2.22)$$

Cette dernière expression a été obtenue en utilisant le développement

$\varphi_n = \varphi_N + (n - N) \frac{\partial \varphi_N}{\partial N} \dots$ c'est-à-dire en se plaçant dans l'hypothèse où la dépendance en n de φ_n peut être considérée comme une dépendance "continue" dans la variable classique $I = n\hbar$, en d'autres termes une dépendance "lente" dans la variable n .

Ce résultat simple montre que :

- Le module de α (la variable action) n'est pas modifié.
- L'argument de α (la variable angulaire) est modifié selon la règle

$$\theta \rightarrow \theta - \frac{\partial \varphi_N}{\partial N} . \quad (2.23)$$

- Si ce changement de phase correspond au transport de Berry

$|n, \vec{X}(0) \rangle \rightarrow e^{i\gamma_n(t)} |n, \vec{X}(t) \rangle$, Il se traduit sur les états cohérent par ($N = |\alpha|^2$);

$$|\alpha, \vec{X}(0) \rangle \rightarrow e^{i(\gamma_N(t) - N \frac{\partial \gamma_N(t)}{\partial N})} |\alpha e^{i \frac{\partial \gamma_N(t)}{\partial N}}, \vec{X}(t) \rangle \quad (2.24)$$

de la relation $\alpha = \sqrt{\frac{I}{\hbar}} e^{-i\theta}$, on déduit le transport de Hannay dans l'espace de phase classique :

$$(q, p)(I, \theta, \vec{X}(0)) \rightarrow (q, p)(I, \theta + \theta_H(t), \vec{X}(t)) \quad (2.25)$$

avec
$$\dot{\theta}_H(t) = - \frac{\partial \dot{\gamma}_N(t)}{\partial N} . \quad (2.26)$$

Cette dernière expression est la formule semi classique entre la phase de Berry et l'angle de Hannay.

- Une autre propriété fondamentale des états cohérents action-angle $|\alpha, \vec{X} \rangle$ concerne la valeur moyenne d'opérateur

$$\bar{A}_{\text{cl}}(I, \bar{X}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \langle |\alpha|e^{+i\theta}, \bar{X} | \hat{A} | e^{-i\theta} |\alpha\rangle, \bar{X} \rangle, \quad (2.27)$$

qui ne dépend que de l'action dans la limite classique.

Chapitre III

*VERSION GRASSMANIENNE DU SPIN 1/2
ET ANGLE DE HANNAY NON ADIABATIQUE.*

III-1. Spin 1/2 dans sa version Grassmannienne:

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, le spin 1/2 dans un champs magnétique est un des modèle proposé pour mettre en évidence la phase géométrique dans le cas non adiabatique (ou adiabatique) . Il est donc naturel de faire appel à sa version Grassmannienne pour mettre en évidence l'angle de Hannay non adiabatique (ou adiabatique) dans le cas fermionique. L'Hamiltonien d'un tel système (spin 1/2 dans un champs magnétique) est donné par

$$\begin{aligned} H(\vec{B}) &= -\frac{i}{2} \vec{B}(t) (\vec{\xi} \wedge \vec{\xi}) \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon_{km\ell} B_k(t) \xi_m \xi_\ell \end{aligned} \quad (3.1)$$

\vec{B} , désignant le champs magnétique et $\vec{\xi} \equiv \{\xi_m\}$, (m=1,2,3) trois variables dynamiques anticommutantes réelles qui engendrent une algèbre de Grassmann

$$[\xi_m, \xi_\ell]_+ = \xi_m \xi_\ell + \xi_\ell \xi_m = 0. \quad (3.2)$$

La dynamique est régie par l'équation

$$\frac{df(\vec{\xi})}{dt} = \{H, f\}_{P.B} \quad (3.3)$$

l'algèbre de Grassmann étant munie d'une structure de crochets de Poisson (P.B) définie par :

$$\left\{ f(\vec{\xi}), g(\vec{\xi}) \right\}_{P.B} = i \sum_m f(\vec{\xi}) \bar{\partial}_m \cdot \bar{\partial}_m g(\vec{\xi}) \quad (3.4)$$

où $\bar{\partial}_m$ et $\bar{\partial}_m$ sont respectivement les dérivations à droite et à gauche par rapport à ξ_m . Cette définition implique en particulier

$$\{\xi_m, \xi_\ell\}_{P.B} = i\delta_{m\ell} . \quad (3.5)$$

Alors la règle de quantification canonique (avec $\hbar = 1$) qui consiste à remplacer les crochets de poisson des variables $\{\xi_m\}$ par i fois l'anticommutateur des opérateurs correspondants $\hat{\xi}_m$

$$-i\{\xi_m, \xi_\ell\}_{P.B} \rightarrow [\xi_m, \xi_\ell]_+ = \delta_{m\ell} , \quad (3.6)$$

conduit à identifier les opérateurs $\{\sqrt{2}\hat{\xi}_m\}$ avec les matrices de Pauli $\{\hat{\sigma}_m\}$ (les matrices de Pauli constituant la seule représentation matricielle irréductible de ces relations d'anticommutation). Il en résulte que le "quantifié" du Hamiltonien $H(\vec{B}(t))$ de départ, n'est autre que :

$$\hat{H}(\vec{B}(t)) = \frac{1}{2} \vec{B}(t) \cdot \vec{\sigma} \quad (3.7)$$

et que, le Hamiltonien $\hat{H}(\vec{B}(t))$ est exactement celui d'un spin "classique" dans un champs magnétique variable.

Compte tenu de l'équation dynamique (3.3), on obtient l'équation du mouvement pour les variables dynamiques ξ_m

$$\dot{\xi}_m = \{H, \xi_m\}_{P.B} = -i\epsilon_{kml} B_k(t)\xi_\ell . \quad (3.8)$$

Avant de résoudre cette équation, nous allons reprendre quelques résultats obtenus par Gozzi et Thacker [Gozzi et Thacker (1987)] relatif au cas où le champs \vec{B} est constant et établir la relation entre les variables Grassmanniennes et les variables action-angle. En effet, la décomposition des variables de Grassmann $\vec{\xi}$ en modes normaux complexes

$$\psi_m = \left(S^+ \right)_{m\ell} \xi_\ell \quad (m, \ell = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

$S_{m\ell}$ désignant les éléments de la matrice unitaire

$$S (R_\pm \rightarrow B_\pm , R_3 \rightarrow B_3) \quad (3.10)$$

donnée ci-dessous (page 21 formule (3.25)) affectée du coefficient $\frac{1}{B}$ et le nombre imaginaire i lui affecté de B et $R_\pm = R_1 \pm iR_2 \rightarrow B_\pm = B_1 \pm iB_2$, $R_3 \rightarrow B_3$ la substitution de R_\pm et R_3 par B_\pm et B_3 respectivement, permet d'écrire le Hamiltonien

$$H = -\frac{B}{2} \psi_1^* \psi_1 + \frac{B}{2} \psi_2^* \psi_2 \quad (3.11)$$

en fonction des modes normaux $\psi_1 = \psi_2^*$ complexes conjugués l'un à l'autre, B désigne le module du vecteur \vec{B} . Les solutions relatives à ces deux modes normaux sont données par

$$\psi_1(t) = e^{-iBt} \psi_1(0) \quad , \quad \psi_2(t) = e^{iBt} \psi_2(0) \quad (3.12)$$

Ceci permet d'identifier

$$\frac{1}{2} \psi_m^*(t) \dot{\psi}_m(t) = \frac{1}{2} \psi_m^*(0) \dot{\psi}_m(0) = \frac{1}{2\pi} \oint \pi_m \dot{\psi}_m dt = I_m \quad (m=1,2) \quad (3.13)$$

aux actions I_m en fonction desquels l'Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = (-I_1 + I_2)B \quad (3.14)$$

et où $\pi_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_m} = \frac{i}{2} \psi_m^*$ est le moment canonique conjugué. Il est simple de voir

à partir des équations de Hamilton que l'argument de $\psi(t)$ s'identifie à la variable angulaire θ .

Revenons à la résolution de l'équation du mouvement (3.8) où le champs $\vec{B}(t)$ dépend maintenant du temps et introduisons l'invariant ;

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{i}{2} \vec{R}(t) (\vec{\xi} \wedge \vec{\xi}) \\ &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{kml} R_k(t) \xi_m \xi_l \end{aligned} \quad (3.15)$$

défini par :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = -\left\{ H(\vec{\xi}), I(\vec{\xi}) \right\}_{P.B.}, \quad (3.16)$$

où $R_k(t)$ ($k = 1,2,3$) désignent des paramètres dépendant du temps à déterminer .

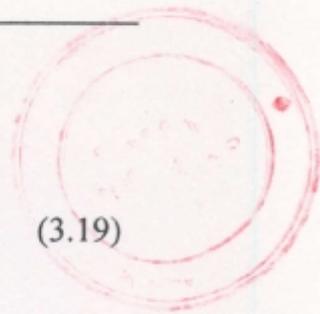
En identifiant les deux termes de l'équation (3.16), on obtient le système d'équations différentielles du premier ordre couplé reliant les paramètres de $H(\vec{B}(t))$ à ceux de $I(\vec{R}(t))$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{B}(t) \wedge \vec{R}(t), \quad (3.17)$$

ce système est équivalent au système différentiel couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{R}_+ = i(B_3 R_+ - R_3 B_+) \\ \dot{R}_- = i(R_3 B_- - B_3 R_-) \\ \dot{R}_3 = \frac{i}{2} (B_+ R_- - B_- R_+) \end{cases} \quad (3.18)$$

pour le découpler, posons



$$R_+ = \frac{r^2(t)}{2}, \quad (3.19)$$

on obtient alors

$$R_3 = \frac{i\dot{r} + \frac{r^2}{2} B_3}{B_+} \quad (3.20)$$

et

$$R_- = \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{\left(i\dot{r} + \frac{r^2}{2} B_3 \right)^2}{B_+^2} \right) \quad (3.21)$$

où la fonction auxiliaire $r(t)$ obéit à l'équation auxiliaire non linéaire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{B_+} \right) + \frac{r}{4} \left[\frac{B_- B_+ + B_3^2}{B_+} - 2i \frac{d}{dt} \left(\frac{B_3}{B_+} \right) \right] - \frac{B_+}{r^3} = 0. \quad (3.22)$$

Il en résulte que l'invariant $I(t)$ s'écrit

$$I(t) = -\frac{i}{4} \left\{ \left(r^2 + r^{*2} \right) \varepsilon_{1ml} - i \left(r^2 - r^{*2} \right) \varepsilon_{2ml} + \frac{2}{B_+} \left(i\dot{r} + \frac{B_3}{2} r^2 \right) \varepsilon_{3ml} \right\} \xi_m \xi_l \quad (3.23)$$

et que son "quantifié" n'est autre que

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{r^2 + r^{*2}}{2} \right) \sigma_1 - i \left(\frac{r^2 - r^{*2}}{2} \right) \sigma_2 + \frac{\left(2i\dot{r} + r^2 B_3 \right)}{B_+} \sigma_3 \right\} \quad (3.24)$$

Il est possible aussi de réécrire l'invariant $I(t)$ (3.23) en fonction des modes normaux $\psi_1 = \psi_2^*$. En effet, la décomposition des variables de Grassmann $\vec{\xi}$ en mode normaux complexes $\psi_m = \left(S^+ \right)_{ml} \xi_l$ où S_{ml} sont les éléments de la matrice unitaire S donnée par :

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1+R_3) \frac{r}{r^*} - (1-R_3) \frac{r^*}{r} \right] & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1+R_3) \frac{r^*}{r} - (1-R_3) \frac{r}{r^*} \right] & \left(\frac{r^2 + r^{*2}}{2} \right) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[(1+R_3) \frac{r}{r^*} + (1-R_3) \frac{r^*}{r} \right] & \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(1+R_3) \frac{r^*}{r} + (1-R_3) \frac{r}{r^*} \right] & -i \left(\frac{r^2 - r^{*2}}{2} \right) \\ -\frac{\pi^*}{\sqrt{2}} & -\frac{\pi}{\sqrt{2}} & 2R_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

permet d'exprimer l'invariant sous une forme quadratique ;

$$I = -\frac{1}{2} \psi_1^* \psi_1 + \frac{1}{2} \psi_2^* \psi_2 = -\psi_1^* \psi_1 = \psi_2^* \psi_2 . \quad (3.26)$$

Notons que $\psi_3 = \psi_3^*$ (est réel) et que $\psi_1 = \psi_2^*$ sont complexes conjuguées l'un à l'autre.

III-2. Angle de Hannay non adiabatique :

Une manière simple de résoudre (3.8) et de calculer l'angle de Hannay non adiabatique d'un spin 1/2 est d'utiliser le principe variationnel moyenné introduit au paragraphe (II-3), dont le Lagrangien

$$L = \frac{i}{2} \xi_k \dot{\xi}_k + \frac{i}{2} \varepsilon_{kml} B_k(t) \xi_m \xi_l , \quad (3.27)$$

associé à l'Hamiltonien (3.1), s'écrit en coordonnées normales (voir appendice pour le détails des calculs)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} (\psi_1^* \dot{\psi}_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3) + \frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{kj} \psi_j + \frac{i}{2} \varepsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{lj} \psi_j \\ &= \frac{i}{2} (\psi_1^* \dot{\psi}_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_+}{r^2} + \frac{B_-}{r^{*2}} \right) (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Remarquons que ce Lagrangien (3.28) exprimé en fonction des coordonnées normales ne dépend pas de la variable θ (argument de la coordonnée normale ψ), mais chacun

des deux termes $\frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{kj} \psi_j$ et $\frac{i}{2} \epsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{lj} \psi_j$ pris séparément dépend de θ , donc on peut remplacer ce Lagrangien par sa valeur moyenné sur θ

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} d\theta \quad (3.29)$$

sans affecter le résultats obtenu.

D'où le Lagrangien se réduit à :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}} &= \frac{i}{2} (\psi_1^* \dot{\psi}_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3) + \frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{ki} \psi_i + \frac{i}{2} \epsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{lj} \psi_i \\ &= \frac{i}{2} (\psi_1^* \dot{\psi}_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3) - \frac{iR_3}{2} \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{B}(t) \bar{R}(t) (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Notons que le deuxième terme $-\frac{iR_3}{2} \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2)$ dans (3.30) provenant de la valeur moyennée sur θ du terme $\frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{kj} \psi_j$ est responsable de l'angle de Hannay non adiabatique car il s'annule à paramètres fixes ($\bar{R} = \text{cte}$).

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{I}_j} \right) - \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial I_j} = 0 \quad , \quad I_j = \frac{1}{2} \psi_j^*(t) \psi_j(t), (j=1,2) \quad (3.31)$$

conduisent à

$$\dot{\theta}_j = \dot{\theta}_j^D + \dot{\theta}_j^H = (-1)^j \left(\frac{B_+}{r^2} + \frac{B_-}{r^{2*}} \right), \quad (j = 1,2)$$

la partie géométrique (ou angle de Hannay non adiabatique) s'écrit

$$\theta_j^H = (-1)^j (-i) \oint_{(C)} R_3 \left(\frac{dr^*}{r^*} - \frac{dr}{r} \right) \quad (3.32)$$

et s'identifie à l'expression obtenue par Maamache [Maamache (1996)] dans le cas commutatif.

Finalement, les solutions relatives à ces deux modes normaux sont données par :

$$\psi_j(t) = e^{i(\theta^j(t) + \theta_0^j)} \psi_j(0), \quad (j = 1, 2) \quad (3.33)$$

où l'angle θ_0^j est relié aux conditions initiales.

Ayant résolu le spin $\frac{1}{2}$ dans sa version Grassmannienne, nous allons retrouver ces résultats à l'aide des états cohérents fermioniques invariant-angle dans le prochain chapitre.

Chapitre IV

ÉTATS COHÉRENTS FERMIONIQUES
INVARIANT-ANGLE ET ANGLE DE HANNAY
NON ADIABATIQUE

IV-1. Définition des états cohérents fermioniques invariants-angle :

Le deuxième point important de cette thèse et de retrouver les résultats classiques établies au chapitre précédent (chap III) en faisant appel aux états cohérents. On souhaite obtenir des états cohérents $|\xi, t\rangle$ ayant les mêmes propriétés que les états cohérents action-angle $|\alpha, \bar{X}\rangle$ introduits au chapitre II, à savoir :

- Tout changement de phase $|n, t\rangle \rightarrow e^{i\phi_n} |n, t\rangle$ de l'état propre de l'invariant $\hat{I}(t)$ induit le changement de l'argument $|\xi e^{i\theta}, t\rangle$ des paramètres $\xi(t)$ de l'état cohérent Grassmanien invariant - angle.

- L'invariant classique est égal à la valeur moyenne de l'opérateur invariant quantique dans ces états.

$$I_c = \langle \xi, t | \hat{I}(t) | \xi, t \rangle.$$

Nous avons remarqué qu'au niveau classique, l'introduction des modes normaux complexes en fonction desquelles l'invariant est quadratique permet de résoudre complètement le problème posé. Une question naturelle se pose au niveau quantique : peut-on associer à ces modes normaux classiques des opérateurs fermioniques $b(t)$ et $b^+(t)$ en fonction desquelles l'invariant est quadratique? et où $b(t)$ annihile l'état propre fondamental $|0, t\rangle$ de $\hat{I}(t)$ et $b^+(t)$ amène l'état $|0, t\rangle$ à l'état excité propre $|1, t\rangle$ de $\hat{I}(t)$. Pour cela, il suffit de connecter les opérateurs $b(t)$, $b^+(t)$ et $c(t)$ aux opérateurs b , b^+ et c à l'aide d'une transformation unitaire U dépendante du temps similaire à la transformation unitaire S (3.25).

$$\begin{pmatrix} b(t) \\ b^+(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} b \\ b^+ \\ c \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Avec,

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+R_3)r^*/r & -(1-R_3)r^*/r & r^{*2}/\sqrt{2} \\ -(1-R_3)r/r^* & (1+R_3)r/r^* & r^2/\sqrt{2} \\ -|r|^2/\sqrt{2} & -|r|^2/\sqrt{2} & 2R_3 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

b , b^+ et c sont reliés aux opérateurs $\sqrt{2}\hat{\xi}_j$ ($j = 1, 2, 3$) par

$$\hat{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b^+), \quad \hat{\xi}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(b - b^+), \quad \hat{\xi}_3 = c = c^+ \quad (4.3)$$

s'identifient aux matrices $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$, $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3$ en représentation matricielles, et enfin ils satisfont les relations d'anticommutations

$$\begin{aligned} \{b, b^+\}_+ &= \{c, c\}_+ = 1 \\ \{b, b\}_+ &= \{b, c\}_+ = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

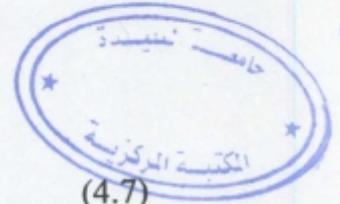
Cette transformation unitaire U transforme l'opérateur invariant $\hat{I}(t)$ en

$$\hat{I}(t) = \left(b^+(t)b(t) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.5)$$

et les relations d'anticommutations (4.4) en

$$\begin{aligned} \{b(t), b^+(t)\}_+ &= \{c(t), c(t)\}_+ = 1 \\ \{b(t), b(t)\}_+ &= \{b(t), c(t)\}_+ = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

On définit alors les états cohérents fermioniques invariant-angle à l'instant initial par :



$$|\xi(0), 0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*(0)\xi(0)} (|0, 0\rangle - \xi(0)|1, 0\rangle) \quad (4.7)$$

où $\xi(0)$ est une variable anticommutante complexe. Il est utile de remarquer que ces états peuvent être déduits de l'états fondamental par l'action de l'opérateur unitaire (ou déplacement) :

$$|\xi(0), 0\rangle = e^{-[\xi(0)b^+(0) + \xi^*(0)b(0)]}|0, 0\rangle, \quad (4.8)$$

et qu'ils sont des états propres de l'opérateur annihilation $b(0)$:

$$b(0)|\xi(0), 0\rangle = \xi(0)|\xi(0), 0\rangle. \quad (4.9)$$

Comme il est rappelé dans l'introduction et au début de ce chapitre, on souhaite formuler l'évolution classique au niveau des états cohérents fermioniques invariant-angle. En utilisant les résultats du paragraphe II.4, cette idée peut être illustrée de la façon suivante :

- l'évolution quantique exacte des états propres de l'invariant (paragraphe III-1)

$$|0, 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_0(t)}|0, t\rangle \quad (4.10)$$

et

$$|1, 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_1(t)}|1, t\rangle$$

montre immédiatement que l'évolué des l'état cohérents $|\xi(0), 0\rangle$ s'écrit :

$$|\xi(0), 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_0(t)}|\xi(t), t\rangle \quad (4.11)$$

avec

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-i(\phi_0(t) - \phi_1(t))}. \quad (4.12)$$

De l'expression de $\xi(t)$ on déduit que la valeur de l'invariant $I = |\xi(0)|^2$ est fixée. Quant au paramètre angulaire $\theta(t)$, il vaut $(\phi_0(t) - \phi_1(t))$ et admet une composante dynamique et une composante géométrique. La première, qui s'écrit

$$\theta^D = \int_0^t dt' (\langle 1, t' | \hat{H}(t') | 1, t' \rangle - \langle 0, t' | \hat{H}(t') | 0, t' \rangle) \quad (4.13)$$

fait apparaître la différence entre les valeurs moyennes de l'Hamiltonien quantique $\hat{H}(t)$ dans les états $|1, t\rangle$ et $|0, t\rangle$. La seconde de nature géométrique

$$\theta^H = i \int_0^t dt' \left(\langle 0, t' | \frac{\partial}{\partial t'} | 0, t' \rangle - \langle 1, t' | \frac{\partial}{\partial t'} | 1, t' \rangle \right) \quad (4.14)$$

n'est rien d'autre que l'angle de Hannay non adiabatique.

La seconde propriété souhaitée au niveau de ces états cohérents fermioniques invariant-angle concerne la valeur moyenne de l'opérateur invariant $\hat{I}(t)$ dans ces états. Il est alors immédiat de vérifier que la valeur moyenne $\langle \xi(t), t | \hat{I}(t) | \xi(t), t \rangle$ est égale à l'invariant classique $I(t)$; $\xi^*(t) \xi(t) - \frac{1}{2}$ (au terme additif $-\frac{1}{2}$) près, (sans influence sur les résultats) si on identifie le paramètre $\xi(t)$ de l'état cohérent avec le mode propre $\psi_2(t)$. ceci permet d'interpréter les états $|\xi(t), t\rangle$ comme des états invariant-angle dans la mesure où, $|\xi(t)|^2$ s'identifie à l'invariant classique $I_2(t)$ et l'argument de $\xi(t)$ à la variable conjugué $\theta_2(t)$.

IV-2 . Calcul de l'angle de Hannay non adiabatique :

Nous allons faire le calcul explicite des résultats obtenus au paragraphe précédent. En utilisant l'équation (4.1), nous pouvons réécrire l'Hamiltonien quantique (3.7) sous la forme suivante

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} (B_+(t), B_-(t), \sqrt{2}B_3(t)) U(t) \begin{pmatrix} b(t) \\ b^+(t) \\ c(t) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

il en résulte que l'angle dynamique (4.13) est

$$\theta^D = \int_0^t dt' \left(\langle 1, t' | (B_+(t'), B_-(t'), \sqrt{2}B_3(t')) U(t') \begin{pmatrix} b(t') \\ b^+(t') \\ c(t') \end{pmatrix} | 1, t' \rangle - \langle 0, t' | (B_+(t'), B_-(t'), \sqrt{2}B_3(t')) U(t') \begin{pmatrix} b(t') \\ b^+(t') \\ c(t') \end{pmatrix} | 0, t' \rangle \right) \quad (4.16)$$

seul les termes proportionnels à l'opérateur $c(t)$ contribuent au calcul de θ^D , car les états $|0, t\rangle$ et $|1, t\rangle$ sont orthonormés et l'action des opérateurs $b(t)$, $b^+(t)$ et $c(t)$ sur ces états est donnée par

$$c(t)|0, t\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0, t\rangle, \quad c(t)|1, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1, t\rangle \quad (4.17)$$

$$b(t)|0, t\rangle = 0, \quad b(t)|1, t\rangle = |0, t\rangle, \quad (4.18)$$

et

$$b^+(t)|0, t\rangle = |1, t\rangle, \quad b^+(t)|1, t\rangle = 0, \quad (4.19)$$

d'où, l'angle dynamique est donné par

$$\theta^D = \int_0^t \bar{B}(t') \cdot \bar{R}(t') dt' . \quad (4.20)$$

Quant à l'angle de Hannay non adiabatique (ou partie géométrique) (4.14), il suffit de remarquer qu'il s'écrit :

$$\theta^H = -i \int_0^t dt' \langle 1, t' | \frac{\partial b^+(t')}{\partial t'} | 0, t' \rangle . \quad (4.21)$$

La dérivée de l'équation (4.1) par rapport au temps

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial b(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial b^+(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial c(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \dot{U} + U \begin{pmatrix} b(t) \\ b^+(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

où

$$\dot{U} + U = \begin{bmatrix} -R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) & 0 & \frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} - \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} + \frac{2\dot{R}_3}{\sqrt{2}|r|^2} \\ 0 & R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) & -\frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} + \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} + \frac{2\dot{R}_3}{\sqrt{2}|r|^2} \\ \frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} - \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} - \frac{2\dot{R}_3}{\sqrt{2}|r|^2} & -\frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} + \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} - \frac{2\dot{R}_3}{\sqrt{2}|r|^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

permet d'obtenir $\frac{\partial b^+(t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial b^+(t)}{\partial t} = R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) b^+(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(r \dot{r}^* - r^* \dot{r}) - \frac{4\dot{R}_3}{|r|^2} \right] c(t), \quad (4.23)$$

seul le terme proportionnel à $b^+(t)$ donne une contribution non nulle. L'angle de Hannay non adiabatique dans une évolution cyclique (c'est-à-dire $\vec{R}(t+T) = \vec{R}(t)$)

est donné par :

$$\theta^H(T) = -i \oint_{(C)} R_3 \left(\frac{dr^*}{r^*} - \frac{dr}{r} \right) \quad (4.24)$$

et coïncide avec le résultat obtenu au chapitre III.

En conclusion, remarquons que les résultats obtenus dans ce chapitre ne sont que partiels: on n'obtient par cette méthode qu'un angle associé à l'évolution classique

et non deux (voir chapitre III). Ceci est dû au fait que tous les états propres de l'invariant quantique ne sont pas pris en compte de façon équivalente, l'état fondamental $|0,t\rangle$ jouant arbitrairement le rôle privilégié de "vide". Pour obtenir le deuxième angle, il faudrait choisir l'état $|1,t\rangle$ comme "vide" en échangeant les rôles de $b(t)$ et $b^+(t)$.

APPENDICE

APPENDICE : Calcul du Lagrangien en fonction des coordonnées normales .

On se propose d'exprimer le Lagrangien

$$L = \frac{i}{2} \xi_k \dot{\xi}_k + \frac{i}{2} \varepsilon_{kml} B_k(t) \xi_m \dot{\xi}_l \quad (\text{A.1})$$

en fonction des coordonnées normales ψ_m ($m=1,2,3$) introduites au paragraphe(III.1),

$$\psi_m = (S^+)_{ml} \xi_l = S_{lm}^* \xi_l. \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_m^* = \xi_l S_{lm}.$$

Notons qu'il y a sommation sur les indices répétés. La substitution de (A.2) dans (A.1) donne le Lagrangien.

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ S_{kj} \dot{\psi}_j + \frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{kj} \psi_j + \frac{i}{2} \varepsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{lj} \dot{\psi}_j \quad (\text{A.3})$$

qui comprend les termes $i=j$ et $i \neq j$.

1) cas où $i \neq j$.

- Le premier terme du Lagrangien est nul,

$$S_{ki}^+ S_{kj} = 0 \quad (\text{A.4})$$

- Les termes qui proviennent de $\frac{i}{2} \psi_i^* S_{ki}^+ \dot{S}_{kj} \psi_j + \frac{i}{2} \varepsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{lj} \dot{\psi}_j$ à savoir

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{mi}^+ S_{l2} = \varepsilon_{kml} B_k S_{m2}^+ S_{l1} = S_{k1}^+ \dot{S}_{k2} = S_{k2}^+ \dot{S}_{k1} = 0 \quad m \neq l$$

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{mi}^+ \dot{S}_{l3} = S_{k1}^+ \dot{S}_{k3} = -S_{k3}^+ \dot{S}_{k2} = \frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} - \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} - \frac{2\dot{R}_3}{2|r|^2}.$$

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{m2}^+ S_{l3} = S_{k2}^+ \dot{S}_{k3} = -S_{k3}^+ \dot{S}_{k1} = -\frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} + \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} - \frac{2\dot{R}_3}{2|r|^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{m3}^+ S_{l1} = S_{k3}^+ \dot{S}_{k1} = -S_{k2}^+ \dot{S}_{k3} = +\frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} - \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} + \frac{2\dot{R}_3}{2|r|^2}$$

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{m3}^+ S_{l2} = S_{k3}^+ \dot{S}_{k2} = -S_{k1}^+ \dot{S}_{k3} = -\frac{r^* \dot{r}}{2\sqrt{2}} + \frac{r \dot{r}^*}{2\sqrt{2}} + \frac{2\dot{R}_3}{2|r|^2}$$

se compensent exactement. Dans les expressions ci-dessus, nous avons exprimé les paramètres R_1, R_2, R_3 en fonction des paramètres B_1, B_2, B_3 par

$$B_1 = \frac{-\dot{R}_2 + R_1 B_3}{R_3} \quad (\text{A.6})$$

$$B_2 = \frac{\dot{R}_1 + R_2 B_3}{R_3}$$

en utilisant les équations (3.18).

2) cas où $i = j$

- Dans le premier terme du Lagrangien le produit des éléments de matrice :

$$S_{ki}^+ \cdot S_{ki} = 1 \quad (\text{A.7})$$

- Dans le second terme de Lagrangien, le produit $S_{ki}^+ \cdot \dot{S}_{ki}$ donne :

$$S_{k1}^+ \cdot \dot{S}_{k1} = -S_{k2}^+ \cdot \dot{S}_{k2} = -R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$S_{k3}^+ \cdot \dot{S}_{k3} = 0$$

- Tandis que le troisième terme en utilisant les équations (A.6), le produit

$\varepsilon_{kml} B_k \psi_i^* S_{mi}^+ S_{li} \psi_i$ ($m \neq l$) donne

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{m1}^+ S_{l1} = -\varepsilon_{kml} B_k S_{m2}^+ S_{l2} = -i(\vec{B}(t)\vec{R}(t)) \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon_{kml} B_k S_{m3}^+ S_{l3} = 0$$

Finalement, en substituant les résultats (A.4) à (A.9) dans le Lagrangien (A.3) on obtient le Lagrangien en fonction des coordonnées normales

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\psi_1^* \dot{\psi}_1 + \psi_2^* \dot{\psi}_2 + \psi_3^* \dot{\psi}_3) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_+}{r^2} + \frac{B_-}{r^{*2}} \right) (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2) \quad (\text{A.10})$$

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Abe. S; Phys. Rev. D **39**, 2327 (1989).

Aharonov. Y and Anandan. J; Phys. Rev. Lett. **52**, 1593 (1987).

Anandan. J; Phys. Lett. A **129**, 201 (1988).

Anandan. J and Aharonov. Y; Phys. Rev. Lett. **65**, 1697 (1990).

Arnold. V; "Méthodes mathématiques de la mécanique classique". Ed. Mir,
Chap. 10 (1976).

Berezin. F.A and Marinov. M.S; Ann. Phys. **104**, 336 (1977).

Berry. M.V. "Semiclassical mechanics of regular and irregular motion". In les Houches
Lectures serie **36**, (ed. G. Iooss, R.H.G.Helleman and R. Stora), Amsterdam:
North.Holand, p. 171 (1983).

Berry. M.V; Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).

Berry. M.V; J. Phys. A **18**, 15 (1985).

Berry. M.V and Hannay. J.H; J. Phys. A **21**, L325 (1988).

Berry. M.V; Dans Geometric Phases in Physics. Chap. 1. p. 7, édité par Shapere A. et
Wilezek F. World Scientific, Singapore (1989).

Berry. M.V; Physics Today, December (1990).

Berry. M.V; Quantum adiabatic anholomy. In Anomalies, phases, defects. (ed. M.
Bergola, G. Marmo and G. Morandi), Naples: Bibliopolis p. 125-181, (1990).

Bhattacharjee. A and Sen. T; Phys. Rev. A **38**, 4389 (1988).

Bose. S.K. and Dutta Roy. B; Phys. Rev. A **43**, 3217 (1991).

- Bouchiat. C and Gibson. G.W; J. Phys. Paris **49**, 187 (1988).
- Bouchiat. C; J. Phys. Paris **50**, 1041 (1989).
- Bulgac. A; Phys. Rev. **A 37**, 4084 (1988).
- Casalbuoni. R; Nuovo Cimento. **A 33**, 115 (1976).
- Cervero. J.M and Lejarreta. J.D; J. Phys. **A 22**, L 663 (1989).
- Cheng. G.M and Fung. P.C.W; J. Phys. **A 22**, 3493 (1989).
- Datta. G, Ghosh. G and Engineer. M.H; Phys. Rev. **A 40**, 526 (1989).
- Engineer. M.H and Ghosh. G; J. Phys. **A 21**, L95 (1988).
- Gao. X.C, Xu. J.B and Qian. T.Z; Ann. Phys. **204**, 235 (1990).
- Goldstein. H; "Mécanique classique". Presse universitaire de France, Chap. 8 (1964).
- Gozzi. E and Thacker. W.D; Phys. Rev. **D 35**, 2388 (1987).
- Gozzi. E, Rohrlich. D and Thacker. W.D; Phys. Rev. **D 42**, 2752 (1990).
- Hannay. J.H; J. Phys. **A 18**, 221 (1985).
- Ji. J.Y, Kim. J.K, Kim. S.P and Soh. K.S; Phys. Rev. **A 52**, 3352 (1995)
- Koiller. J; AMS. Contemp. Math. **97**, 159 (1989)
- Layton. E, Huang. Y and Chu. S.I; Phys. Rev. **A 41**, 42 (1990)
- Lewis. H.R and Riesenfeld. W.B; J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969)
- Maamache. M, Provost. J.P and Vallée. G; J. Phys. **A 23**, 5765 (1990).
- Maamache. M, Provost. J.P and Vallée. G; J. Phys. **A 24**, 685 (1991).

- Maamache. M, Provost. J.P and Vallée. G; Phys. Rev. **D 46**, 873 (1992).
- Maamache. M, Provost. J.P and Vallée. G; Eur. J. Phys. **15**, 121 (1994).
- Maamache. M; Thèse de doctorat d'état, université de Sétif (1994).
- Maamache. M; Phys. Rev. **A 52**, 936 (1995).
- Maamache. M; Physica Scripta **54**, 21 (1996).
- Maslov. V.P and Fedoriuk. M.V; Semiclassical approximation in quantum mechanics.
Reidl ed. Dordrecht, (1983).
- Matthews. P.T and Salam. A; Nuovo Cimento **2**, 120 (1955).
- Messiah. A; Mécanique quantique. Vol. **2**. Dunod Paris, Chap. 17 (1964).
- Mizrahi. S.S; Phys. Lett. **A 138**, 465 (1989)
- Molares. D.A; J. Phys. **A 21**, L889 (1988).
- Moore. D.J; J. Phys. **A 23**, L665 (1990).
- Moore. D.J and Stedman. G.E.; J. Phys. **A 23**, 2049 (1990).
- Page. D.N; Phys. Rev. **A 36**, 3479 (1987).
- Samuel. J and Bhandari. R; Phys. Rev. Lett. **60**, 2339 (1988).
- Wang. S.J; Phys. Rev. **A 42**, 5107 (1990).

ANNEXE

Evolution of grassmannian invariant-angle coherent states and nonadiabatic Hannay's angle

M. Maamache and O. Cherbal

Institut de Physique, Université de Sétif, Sétif (19000) ALGERIA

Submitted to European Physical Journal D

Abstract

We show how the exact evolution and nonadiabatic Hannay's of grassmannian classical mechanics of spin one half in a varying external magnetic field is associated with the evolution of grassmannian invariant-angle coherent states.

PACS number(s): 03.65.Sq, 02.40 + m

Considering the evolution of a quantum system whose Hamiltonian $H(t)$ depends explicitly on time through a set of parameters $\vec{X}(t)$, Berry [1] has shown that, when $\vec{X}(t)$ describes adiabatically a loop \mathcal{C} in the space of parameters, an eigenstate of the Hamiltonian develops, besides an expected dynamical phase, a geometrical phase $\gamma_n(\mathcal{C})$ whose depends essentially on the closed path \mathcal{C} which has been followed in the space of parameters. Removing the adiabatic hypothesis, Aharonov and Anandan [2] have generalized Berry's result and shown that such a geometrical phase may appear for any state which is cyclic with respect to some evolution. (Cyclicity means that the state returns to itself, after some time up to a phase; in Berry's approach,

the adiabatic hypothesis ensures the cyclicity of the eigenstates of $H(t)$ after one loop). Therefore, in the study of quantum nonadiabatic holonomy effects, a complete set of cyclic states play the same basic role as the Hamiltonian eigenvectors in the adiabatic case. A naturel (but not unique) way to get such a basis of cyclic states is to consider the eigenvectors of an hermitian periodic invariant $I(t)$ defined by

$$\frac{\partial I}{\partial t} = i\hbar[I, H]. \quad (1)$$

Indeed, any eigenstate $|n, 0\rangle$ (relative to the time-indepdent eivalue λ_n) of an invariant operator $I(0)$ at time zero evolves continuously into the corresponding eigenstate $|n, t\rangle$ of the invariant operator $I(t)$ at time t [3], exactly as an eigenstate of the Hamiltonian does when the evolution is adiabatic. For this reason, invariant theroy take an important place in recent works on nonadiabatic geometric phases [4-9].

The classical analog of Berry's phase, is Hannay's angle [10]. According to the classical adiabatic theorem, any trajectory in phase space, of the classical integrable Hamiltonian at time zero evolves into a trajectory of the Hamiltonian at time t with the same action. Hannay [10] has shown that when the adiabatic excursion takes place on a closed path in the space of parameters, an extra shift analogous to Berry's phase is realized in the angle variables. This extra angle depends on the geometry of the parameter space circuit and on the conserved actions. Since the invariant action due to Lewis and Riesenfeld exists a geometrical angle can be defined on constant-action surface for a cyclic evolution [11-12] and the appropriate interpretation of the

angle thus obtained is that it is the classical counterpart of the geometrical phase due to Aharonov and Anandan [2].

This remarkable parallelism between the quantum and the classical cases as well as the semi-classical relation between geometrical phase and geometrical angle [13] are not surprising. Indeed, the classical case can be deduced from the quantum one through the semi-classical limit ($\hbar \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $n\hbar$ fixed). However, instead of basing this parallelism on semi-classical theorems, it is instructive to give a quantum perspective to geometrical angle. As explained in Refs.[14], a simple way to provide a quantum description of the evolution of a classical system and to derive the geometrical angle from the geometrical phase is to study the evolution of "action-angle" (or "invariant-angle") coherent states.

Since, we shall be interest in this paper by a purely quantum interpretation of exact solution and nonadiabatic geometrical angle associated with grassmannian classical spin, let us recall how these angles appear in the action-angle coherent states when dealing with ordinary (commutative) classical mechanics. The action-angle coherent states are defined in the classical approximation, that is for \hbar small with respect to the classical action (or invariant), in a way which resembles the definition of the usual (harmonic oscillator) coherent states:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, t\rangle. \quad (2)$$

For $|\alpha|$ large, the sum over n is highly peaked around the value $N = |\alpha|^2 = I\hbar^{-1}$ but yet contains a great number of eigenstates since the dispersion in n is $N^{1/2}$. With help of this remark one can deduce the key result

that any phase modification $|n, t\rangle \rightarrow e^{i\phi_n}|n, t\rangle$ on the quantum eigenstates lead to the change $|\alpha, t\rangle \rightarrow |\alpha e^{i\frac{\partial\phi_N}{\partial N}}, t\rangle$ of coherent rays. This phase modification may have various origins. If it is associated with the time evolution of the eigenstates $|n, t\rangle$, for the parameters fixed, the corresponding change $\alpha \rightarrow \alpha e^{-i\frac{\partial E_N}{\partial N}t}$ ($I = N\hbar$) shows that the modulus of the complex number α is constant and its argument is minus the classical variable θ . Therefore, action angle rays and points in phase space are in one to one correspondance through the relation $\alpha = \sqrt{I/\hbar} e^{-i\theta}$. If the phase modification correspond to the geometrical phase in quantum mechanics then $\theta_I^H(t) = -\frac{\partial\gamma_N^B}{\partial N}(t)$ defines the corresponding one on classical mechanics. We have exemplified the quantum-classical correspondance at the level of action (or invariant) angle coherent states, let us note that, the mean value of the quantum Hamiltonian and the quantum invariant in these states

$$\langle\alpha, t|H(t)|\alpha, t\rangle = H_c(I, t), \quad \langle\alpha, t|I|\alpha, t\rangle = I_c, \quad (3)$$

can be identified with the classical Hamiltonian H_c (which is a function of the action only) and the classical invariant I_c respectively.

All the above discussion is valid for quantum Hamiltonian with an integrable classical limit in ordinary phase space. In the classical limit such quantum Hamiltonian possess an infinite number of energy levels. Recently there has been an interest to provide a classical counterpart to Hamiltonians with a finite numbers of levels. As shown by Giavarinni and al [15], the corresponding "classical" mechanics deals with anticommutative (Grassmann) dynamical variables and is analogous to the mechanics initiated by Casalbuni and Berezin and Marinov [16] in relation with Feynman paths and the

description of "classical" fermions. Gozzi and Thacker [17] were the first to calculate the adiabatic Hannay's angle for a grassmannian system, namely the classical analogue of the quantum one half spin in a slowly time varying magnetic field. Abe [18] introduced fermionic coherent states in order to give an alternative derivation of the result by Gozzi and Tacker about the Hannay's angle for the "classical" one half spin system. Maamache and al [19] have proved that Abe's approach does not connect, as claimed, the adiabatic holonomy with adiabatic evolution of fermionic coherent states but with canonical transformations and they have clarified that Hannay's angle does not appear as an external phase in front of the fermionic coherent states but inside its parameter's argument.

The important point which we emphasise in this paper is that the anticommutative case is much like the commutative one. Indeed we shall find grassmannian invariant-angle coherent states $|\zeta, t\rangle$ (ζ denoting a complex anticommuting parameters) which possess the two key property of the state $|\alpha, t\rangle$ namely: any change of the phase $|n, t\rangle \rightarrow e^{i\phi_n}|n, t\rangle$ on the quantum invariant's eigenstates induces a change $|\zeta e^{i\theta}, t\rangle$ of the arguments of the parameters of grassmannian invariant-angle coherent states and the classical (grassmannian) invariant is equal to the expectation value of the quantum one in these states. The difference with the commutative case is that now there is no need of a classical limit $n \rightarrow \infty$ and $\hbar \rightarrow 0$. (We therefore set $\hbar = 1$ in the following.) Formula (2) is replaced by a similar expression wich contains a finite sum of terms (due to the anticommutation properties of the ζ 's) and (3) gives a relation between the quantum invariant and its classical

counterpart.

To be explicit, we start with the exact classical evolution and nonadiabatic Hannay's angle of Grassman spin in a time-dependent magnetic field. In order to get an idea of how to treat this system in a classical mechanical model, containing Grassman variables see the appendix 1 and 2. The original Hamiltonian is given by

$$H = -\frac{i}{2}\varepsilon_{kij}B_k(t)\xi_i\xi_j. \quad (4)$$

The components ξ_i ($i = 1, 2, 3$) of the vector $\vec{\xi}$ are Grassmannian: $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$. The simplest invariant $I(t)$ is, in this case

$$I(t) = -\frac{i}{2}\varepsilon_{kij}R_k(t)\xi_i\xi_j, \quad (5)$$

which satisfies the condition

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\{H(\vec{\xi}), I(\vec{\xi})\}_{PB} \equiv -iH(\vec{\xi})\overleftarrow{\partial}_j \cdot \overrightarrow{\partial}_j I(\vec{\xi}), \quad (6)$$

where $\overleftarrow{\partial}_j$ and $\overrightarrow{\partial}_j$ are right and left derivatives with respect to ξ_j . According to (6), the parameters R_j of $I(t)$ satisfy the coupled differential equations

$$\begin{aligned} \dot{R}_3 &= \frac{i}{2}[R_-B_+ - R_+B_-], \\ \dot{R}_+ &= i[R_+B_3 - R_3B_+], \\ \dot{R}_- &= i[R_3B_- - R_-B_3], \end{aligned} \quad (7)$$

(where, $B_{\pm} = B_1 \pm iB_2$, $R_{\pm} = R_1 \pm iR_2$.) The Eqs.(7) can be simplified by setting $R_+ = r^2(t)/2$ where $r(t)$ is the solution of the auxiliary equation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}}{B_+}\right) + \frac{r}{4}\left[\frac{B_-B_+ + B_3^2}{B_+} - 2i\frac{d}{dt}\left(\frac{B_3}{B_+}\right)\right] - \frac{B_+}{r^3} = 0, \quad (8)$$

where

$$R_3 = \frac{(ir\dot{r} + B_3 r^2/2)}{B_+},$$

and

$$R_- = \frac{2}{r^2} \left[\frac{1 - (ir\dot{r} + B_3 r^2/2)^2}{B_+^2} \right] = \frac{r^{*2}}{2}.$$

The invariant can be written in the form:

$$I = -\frac{i}{4} \left\{ (r^2 + r^{*2}) \varepsilon_{1tm} - i(r^2 - r^{*2}) \varepsilon_{2tm} + \frac{2}{B_+} (ir\dot{r} + \frac{B_3 r^2}{2}) \varepsilon_{3tm} \right\} \xi_t \xi_m. \quad (9)$$

When we quantize the ξ , with the rules given in appendix 2, we get the quantum Hamiltonian and the associated quantum invariant for one half spin in the time-dependant magnetic field as

$$H = \frac{1}{2} \vec{B}(t) \vec{\sigma} \quad (10-a)$$

$$I = \frac{1}{2} \vec{R}(t) \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{r^2 + r^{*2}}{2} \right) \sigma_1 - i \left(\frac{r^2 - r^{*2}}{2} \right) \sigma_2 + \left(\frac{2ir\dot{r} + B_3 r^2}{B_+} \right) \sigma_3 \right\}. \quad (10-b)$$

Decomposition of the Grassman vector $\vec{\xi}$ into the complex normal coordinate $\zeta_i = (S^+)_{ij} \xi_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) via the $r(t)$, $r^*(t)$ and $R_3(t)$ dependent unitary matrix (A.5) $S(B_\pm \rightarrow R_\pm, B_3 \rightarrow R_3)$, ($B_\pm \rightarrow R_\pm, B_3 \rightarrow R_3$ denotes the substitution of B_\pm and B_3 by R_\pm and R_3 respectively), gives the following invariant

$$I = -\frac{1}{2} \zeta_1^* \zeta_1 + \frac{1}{2} \zeta_2^* \zeta_2 = -\zeta_1^* \zeta_1 = \zeta_2^* \zeta_2 \quad (11)$$

where ζ_1 and ζ_2 are complex conjugate of each other $\zeta_2 = \zeta_1^*$, while $\zeta_3 = \zeta_3^*$ is real. The exact solution of the equations of motion for ζ_1 and ζ_2 are

$$\zeta_1(t) = e^{-i\theta(t)} \zeta_1(0), \quad \zeta_2(t) = e^{i\theta(t)} \zeta_2(0) \quad (12)$$

and nonadiabatic Hannay's angle appears in the angle variable θ after a cyclic evolution and is calculated in terms of the above-mentioned matrix S and the time derivative of S^+ [20].

Now, we proceed to study the evolution of fermionic invariant-angle coherent states. For this purpose, we express the quantum invariant $I = \vec{R}(t) \vec{\sigma} / 2$ corresponding to the classical one $I = -i\varepsilon_{kij} R_k(t) \xi_i \xi_j / 2$, in terms of fermionic operators $b(t)$ which annihilate the lowest eigenstate $|0, t\rangle$ of I and $b^+(t)$ which brings this state onto the other eigenstate $|1, t\rangle$ as

$$I(t) = (b^+(t)b(t) - \frac{1}{2}). \quad (13)$$

The time-dependant fermionic operators $b(t)$ and $b^+(t)$ are related to the operators $\hat{\xi}_i$ via the time-dependent unitary transformation U

$$\begin{pmatrix} b(t) \\ b^+(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} b \\ b^+ \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + R_3)r/r^* & -(1 - R_3)r^*/r & -|r|^2/\sqrt{2} \\ -(1 - R_3)r/r^* & (1 + R_3)r^*/r & -|r|^2/\sqrt{2} \\ r^2/\sqrt{2} & r^{*2}/\sqrt{2} & 2R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^+ \\ c \end{pmatrix}, \quad (14)$$

where the operators $b = (\hat{\xi}_1 - i\hat{\xi}_2)/\sqrt{2}$, $b^+ = (\hat{\xi}_1 + i\hat{\xi}_2)/\sqrt{2}$ and $c = c^+ = \hat{\xi}_3$ satisfy the algebra

$$\{b, b^+\} = \{c, c\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b, c\} = 0. \quad (15)$$

(In the matrix notation, $b^+ = \sigma_+$ and $b = \sigma_-$ with $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, and the Clifford number c is $\sigma_3/\sqrt{2}$.) Therefore the time-dependent operators $b(t)$, $b^+(t)$ and $c(t)$ obviously satisfy the algebra isomorphic to Eq.(15):

$$\{b(t), b^+(t)\} = \{c(t), c(t)\} = 1, \quad \{b(t), b(t)\} = \{b(t), c(t)\} = 0. \quad (16)$$

The initial fermionic invariant-angle states are taken to be

$$|\zeta(0), 0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\zeta^*(0)\zeta(0)\right] \left(|0, 0\rangle - \zeta(0)|1, 0\rangle\right) \quad (17)$$

and are eigenstates of $b(0)$ with eigenvalue $\zeta(0)$, and they are created from the ground state $|0, 0\rangle$ by the unitary operator $\exp(-[\zeta(0)b^+(0) + \zeta^*(0)b(0)])|0, 0\rangle$.

According to the Lewis-riesenfeld theory, one immediately see that the evolution

$$|0, 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_0(t)} |0, t\rangle$$

and

$$|1, 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_1(t)} |1, t\rangle \quad (18)$$

of the eigenstates of $I(0)$ induces the evolution of fermionic invariant-angle coherent states

$$|\zeta(0), 0\rangle \rightarrow e^{i\phi_0(t)} |\zeta(0) e^{i\{\phi_1(t) - \phi_0(t)\}}, t\rangle = |\zeta(t), t\rangle \quad (19)$$

i.e. the argument of parameter ζ change in the evolution. As is well known, the global phases $\phi_n(t)$ ($n = 0, 1$) contain a dynamical part $\phi_n^D = -\int_0^t \langle n, t' | H(t') | n, t' \rangle$ and a geometrical one $\phi_n^G = i \int_0^t \langle n, t' | \partial / \partial t' | n, t' \rangle dt'$. The main point of this elementary result is that the argument $\phi_1(t) - \phi_0(t)$ of the parameter $\zeta(t)$ contain a dynamical part $\phi_1^D - \phi_0^D$ and a geometrical part $\phi_1^G - \phi_0^G$. This geometrical part is nothing but (minus) Hannay's angle [10] in a cyclic evolution. The second key property $I_c = \langle \zeta(t), t | I(t) | \zeta(t), t \rangle + 1/2 = \zeta^*(0)\zeta(0)$ is an immediate consequence of (13) and (19). It allows to identify the ζ 's entering into the definition of $|\zeta, t\rangle$ with the classical normal modes and justifies the fermionic invariant-angle coherent states denomination of $|\zeta, t\rangle$: $\zeta^*\zeta$ is the classical invariant variable.

Let us embark on the calculation of these angles. From Eqs.(10-a) and (14), we have

$$\theta^D = \int_0^t dt' \langle 1, t' | \frac{1}{2} (B_+(t'), B_-(t'), \sqrt{2}B_3(t')) U(t') \begin{pmatrix} b(t') \\ b^+(t') \\ c(t') \end{pmatrix} | 1, t' \rangle - \int_0^t dt' \langle 0, t' | \frac{1}{2} (B_+(t'), B_-(t'), \sqrt{2}B_3(t')) U(t') \begin{pmatrix} b(t') \\ b^+(t') \\ c(t') \end{pmatrix} | 0, t' \rangle \quad (20)$$

we see that only the term proportionnal to $c(t)$ contribute to the calculation of the dynamical angle, which yields

$$\theta^D = \int_0^t \vec{R}(t') \cdot \vec{B}(t') dt'. \quad (21)$$

Using Eq.(14), the $\partial b^+ / \partial t$ can be expressed as

$$\frac{\partial b^+}{\partial t} = R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right) b^+(t) + \left(\frac{\dot{R}_3}{\sqrt{2}|r|^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} (r\dot{r}^* - r^*\dot{r}) \right) c(t), \quad (22)$$

so that

$$\begin{aligned} \theta^G &= -i \int_0^t dt' \left(\langle 1, t' | \frac{\partial}{\partial t'} | 1, t \rangle - \langle 0, t' | \frac{\partial}{\partial t'} | 0, t \rangle \right) = \\ &= -i \int_0^t dt' \langle 1, t' | \frac{\partial b^+}{\partial t'} | 0, t \rangle = -i \int_0^t dt' R_3 \left(\frac{\dot{r}^*}{r^*} - \frac{\dot{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

For a cyclic evolution of duration T the nonadiabatic Hannay's angle is

$$\theta^G = -i \oint_C R_3 \left(\frac{dr^*}{r^*} - \frac{dr}{r} \right). \quad (24)$$

We note here that r must return to its original value, and indeed there do exist such solutions to Eq.(8). These above results agrees with those obtained by Cherbel [20] in the classical Grassmannian case and by Maamache [21] for the classical bosonic model of spin one half.

In the exemple we studied there is only one angle variable $\theta_1(t) = \phi_1(t) - \phi_0(t)$ instead of two corresponding to the classical normal modes Eq.(12).

The reason is that the fundamental state $|0, t\rangle$ taken to be the "vacuum" is not left invariant by the evolution. (We note that the second normal mode could be obtained if $|1, t\rangle$ has been chosen as "vacuum". This is done by interchanging the roles of $b(t)$ and $b^+(t)$; in this case we would obtain the second angle $\theta_0 = -\theta_1$.) Although this approach has the attractive consequence that the Hannay's angle appears as the difference of two Berry's phases it has the major drawback of privileging one of the two eigenstates and thus not allowing a generalisation to the case $N > 2$ levels.

Appendix 1

In this appendix we study the evolution of Grassmanian variables at fixed parameters. We introduce three classical anticommuting variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 satisfying $\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = \{\xi_i, \xi_j\} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$). If we employ Grassmann variables, the Lagrangian and Hamiltonian for the two level system can be written as a classical model [16,17]

$$\begin{aligned} L &= \frac{i}{2} \xi_k \dot{\xi}_k + \frac{i}{2} \vec{B} (\vec{\xi} \wedge \dot{\vec{\xi}}), \\ H &= -\frac{i}{2} \vec{B} (\vec{\xi} \wedge \dot{\vec{\xi}}), \end{aligned} \quad (A.1)$$

where $\vec{\xi}$ is a Grassmann vector, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ is a set of external parameters. We introduce the Poisson brackets (PB) structure

$$\{f(\vec{\xi}), g(\vec{\xi})\}_{PB} \equiv i \left(f \overrightarrow{\partial}_j \right) \left(\overrightarrow{\partial}_j g \right), \quad (A.2)$$

where $\overrightarrow{\partial}_j$ and $\overleftarrow{\partial}_j$ are right and left derivatives with respect to ξ_j , and f and g are functions of ξ_1, ξ_2, ξ_3 . In particular we have

$$\{\xi_i, \xi_j\}_{PB} = i \delta_{ij}. \quad (A.3)$$

Hamilton's equation of motion then yield

$$\dot{\xi}_i = \{H, \xi_i\} = -i\varepsilon_{kij} B_k \xi_j. \quad (\text{A.4})$$

To solve this equation we hold the parameters fixed and we decompose the Grassman vector $\vec{\xi}$ into the complex normal coordinates $\zeta_i = (S^+)_{ij} \xi_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) via the \vec{B} dependent unitary matrix:

$$S = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} (B_1 B_3 + i B_2 B) / \sqrt{2B_+ B_-} & (B_1 B_3 - i B_2 B) / \sqrt{2B_+ B_-} & B_1 \\ (B_2 B_3 - i B_1 B) / \sqrt{2B_+ B_-} & (B_2 B_3 + i B_1 B) / \sqrt{2B_+ B_-} & B_2 \\ -\sqrt{B_+ B_-} / \sqrt{2} & -\sqrt{B_+ B_-} / \sqrt{2} & B_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

which diagonalize the Lagrangian and Hamiltonian

$$L = \frac{i}{2} \zeta_1^* \dot{\zeta}_1 + \frac{i}{2} \zeta_2^* \dot{\zeta}_2 + \frac{i}{2} \zeta_3^* \dot{\zeta}_3 - \frac{B}{2} \zeta_1^* \zeta_1 + \frac{B}{2} \zeta_2^* \zeta_2, \\ H = -\frac{B}{2} \zeta_1^* \zeta_1 + \frac{B}{2} \zeta_2^* \zeta_2, \quad (\text{A.6})$$

with $B = |\vec{B}|$. As seen from (A.5), ζ_1 and ζ_2 are complex conjugate of each other $\zeta_2 = \zeta_1^*$, while $\zeta_3 = \zeta_3^*$ is real. The Poisson brackets (A.2) and (A.3) are preserved by the transformation to normal coordinates the solutions of the equations of motion for ζ_i ,

$$\zeta_1(t) = e^{-iBt} \zeta_1(0), \quad \zeta_2(t) = e^{iBt} \zeta_2(0), \quad \zeta_3 = \zeta_3(0). \quad (\text{A.7})$$

They are something like harmonic oscillators in the Grassman variables [17].

The normal coordinates have the following canonical momenta

$$\Pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_j} = \frac{i}{2} \zeta_j^* \quad (j = 1, 2). \quad (\text{A.8})$$

As consequence, the action variables are

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint \Pi_j \dot{\zeta}_j dt = \frac{1}{2} \zeta_j^*(t) \zeta_j(t) = \frac{1}{2} \zeta_j^*(0) \zeta_j(0), \quad (\text{A.9})$$

in terms of which the Hamiltonian is

$$H = (-I_1 + I_2)B. \quad (\text{A.10})$$

The angle variables are given by the equations of motion

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} \quad (\text{A.11})$$

giving $\dot{\theta}_1 = -B$, $\dot{\theta}_2 = B$ with solutions $\theta_1(t) = -Bt$, $\theta_2 = Bt$, (where we have made the choice $\theta(0) = 0$.) Therefore the normal coordinates are related to the angle variables by

$$\zeta_1(t) = e^{i\theta_1(t)}\zeta_1(0), \quad \zeta_2(t) = e^{i\theta_2(t)}\zeta_2(0) \quad (\text{A.12})$$

Appendix 2

Our goal in this appendix is to recall the quantization rules for Grassmannian system [17]. For this, the quantization rules say that we should replace the Poisson brackets (A.3) by the anticommutator (instead of the commutator)

$$\{\xi_i, \xi_j\}_{PB} \rightarrow i\{\widehat{\xi}_i, \widehat{\xi}_j\}_+ / \hbar = 1. \quad (\text{A.13})$$

The operators $\widehat{\xi}_i$ are shown to generate the structure of Clifford algebra

$$\{\widehat{\xi}_i, \widehat{\xi}_j\} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.14})$$

, and therefore they can be represented irreducibly by the Pauli matrix as $\widehat{\xi}_i \rightarrow \sigma_i / \sqrt{2}$. When we quantize the ξ , with the rules just given above, we get for the classical Hamiltonian (A.1) the quantum one

$$H = -\frac{i}{2}\varepsilon_{kij}B_k\widehat{\xi}_i\widehat{\xi}_j, \quad (\text{A.15})$$

and using the Pauli matrix representation for $\hat{\xi}_i$, we obtain

$$H = -\frac{i}{4}\varepsilon_{kij}B_k\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{\sigma}. \quad (A.16)$$

This is the quantum mechanical Hamiltonian for a one half spin in the magnetic field \vec{B} .

REFERENCES

- [1] Berry, M.V., Proc. R. Soc. London Ser. A **392**, 45 (1984), J. Phys. A **18**, 15 (1985).
- [2] Aharonov, Y and Anandan, J., Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987).
- [3] Lewis, H.R. and Riesenfeld, W.B., J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [4] Molaes, D.A., J. Phys. A **21**, L889 (1988).
- [5] Cervero, M. and Lejarreta, J.D., J. Phys. A **22**, L1663 (1989).
- [6] Gao, X., Xu, J.B., and Qian, T.Z., Ann. Phys. (N.Y) **204**, 235 (1990).
- [7] Bose, S.K. and Dutta Roy, B., Phys. Rev. A **43**, 3217 (1991).
- [8] Maamache, M., Phys. Rev. A **52**, 936 (1995), J. Phys. A **29**, 2833 (1996), Ann. Phys. (N.Y.) **254**, 1 (1997).
- [9] Ji, J.Y., Kim, J.K., Kim, S.P. and Soh, K.S., Phys. Rev. A **52**, 3352 (1995).
- [10] Hannay, J.H., J. Phys. A **18**, 221 (1985).
- [11] Berry, M.V. and Hannay, J.H., J. Phys. A **21**, L325 (1988).
- [12] Bhattacharjee, A. and Sen, T., Phys. Rev. A **38**, 6389 (1988).
- [13] Berry, M.V., J. Phys. A **18**, 15 (1985).
- [14] Maamache, M., Provost, J.P. and Vallée, G., J. Phys. A **23**, 5765 (1990), Eur. J. Phys. **15**, 121 (1994).
- [15] Giavarini, G., Gozzi, E., Rohrlich, D. and Thacker, W.D., Phys. Rev. D **39**, 3007 (1989).
- [16] Casalbuoni, R., Nuovo Cimento A **33** 115 (1976), **33** 389 (1976).
Berezin, F.A. and Marinov, M.S., Ann. Phys. (N.Y) **104**, 336 (1977).

- [17] Gozzi, E. and Thacker, W.D., Phys. Rev. D **35**, 2388 (1987).
- [18] Abe, S., Phys. Rev. D **39**, 2327 (1989).
- [19] Maamache, M., Provost, J.P. and Vallée, G., Phys. Rev. D **46**, 873 (1992).
- [20] Cherbel, O., Magister Thesis, Université de Sétif (1998) unpublished.
- [21] Maamache, M., Physica Scripta **54**, 21 (1996).

ERRATUM

- Une erreur s'est glissée dans la page 10 à la fin de la deuxième ligne :
Il faut remplacer " le cas non adiabatique" par "le cas adiabatique" .
- Dans la page 14 il faut remplacer la formule (2. 27) par : $\bar{A}_c(I, \bar{X}) = \langle \alpha, \bar{X} | \hat{A} | \alpha, \bar{X} \rangle$.
- Dans la page 38 , la deuxième référence : Bouchiat ; remplacer (1889) par (1989)

de l'avis : 18/10/1989
de l'avis : 1/11/1989
de l'avis : Halperin
de l'avis : 2/11/1989