REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

En vue de l'obtention du diplome
de Magister EN MATHEMATIQUES APPLIQUEES
OPTION: Modelisation mathématiques et Techniques de décision

THEME

ETUDE DES ACCROISSEMENTS DE PROCESSUS GAUSSIENS

Présenté par TAMI OMAR

Devant le jury:

Président: A. GUESSOUM M.C., U. de Blida

Examinateurs: K. AMMOUR M.C., U. de Blida
H. SALHI M.C., U. de Blida
A. GRINE C.C. U. d'Alger
S. MANSEUR C.C. U. de Blida

Rapporteur: HAMID OULD ROUIS C.C. U. de Blida

Date de Soutenance le:

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

En vue de l'obtention du diplome
de Magister EN MATHEMATIQUES APPLIQUEES
OPTION: Modelisation mathématiques et Techniques de décision

THEME

ETUDE DES ACCROISSEMENTS DE PROCESSUS GAUSSIENS

Présenté par TAMI OMAR

Devant le jury:

Président:	A. GUESSOUM	M.C., U. de Blida
Examinateurs:	K. AMMOUR	M.C., U. de Blida
	H. SALHI	M.C., U. de Blida
	A. GRINE	C.C. U. d'Alger
	S. MANSEUR	C.C. U. de Blida
Rapporteur:	HAMID OULD ROUIS	C.C. U. de Blida

Date de Soutenance le:

RESUME

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi avec $E(X) = m$ et $\mathrm{Var}X = \sigma^2$ alors le Théorème Central Limite dit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Ce qui montre que $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i \right) - m$ tend vers 0 de la même façon que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ceci est vraie pour une valeur fixée de n.

Pour avoir une borne uniforme de convergence vers 0, on doit s'attendre à une vitesse un peu plus lente.

Hartman et Wintner prouvèrent que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2n\log\log n}} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{X_i - m}{\sigma} \right] = 1 \text{ avec probabilité } 1$$

Ceci donne une vitesse de convergence de l'ordre de $\sqrt{(\log\log n/n)}$

De la même façon il a été prouvé que si on suppose les X_i uniformes sur [0,1], que le processus empirique

$$\alpha_n(x) = \sqrt{n}\,(U_n(x) - U(x)),\ x \in [0,1] \quad \text{avec } U_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \{ X_i ; X_i \leq x \}$$

peut être approximé par une suite de ponts browniens et par un processus de Kiefer de façons optimales.

Donc pour mieux comprendre les fluctuations aussi bien des sommes partielles $S_n = X_1+X_2+....+X_n$ que de $\alpha_n(x)$ introduisons le mouvement brownien à travers sa représentation mathématique le processus de Wiener.

Par définition on dira qu'un processus de Wiener $\{W(t);t\geq 0\}$

1- est une fonction aléatoire continue de t tq $W(0)=0$

2- $\forall t_1,t_2,....,t_k \geq 0$ $\{ W(t_1),W(t_2),...,W(t_k)\}$ suit une loi normale

3- $E(W(t)) = 0$ et $E(W(t)W(s)) = \min(s,t)$

Il a les propriétés suivantes

1- $W(t)$ est à incréments indépendants c'est à dire si $0=t_0<t_1<t_2<....<t_k$ alors $\{ W(t_i)-W(t_{i-1})\}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

2- $W(t)$ est à incréments stationnaires c'est à dire que $\{ W(t+h)- W(h) \}$ a même loi que $\{ W(t)\}$.

3- $\{W(\lambda t),t>0\}$ a même loi que $\{ \sqrt{\lambda}\, W(t),t\geq 0\}$

4- $W(.)$ est un processus markovien.

5- $P(\operatorname{Sup} W(s) < x\sqrt{t}) = 1-2P(W(t)>x\sqrt{t}) = \sqrt{(2/\pi)}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

C'est le principe de refexion.

6- $$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Sup} \frac{|W(t)|}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$$ c'est la loi du logarithme itéré.

7- $$\lim_{T\to\infty} \operatorname{Sup}_{0\leq t\leq T-c\log t} \frac{|W(t + c\log T) - W(t)|}{c\log T} = \sqrt{2}$$ presque surement.

C'est la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi.

La loi du logarithme itéré et la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi pour le procesus de Wiener standard peuvent être combinées en une seule loi. Elle a la forme suivante:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le t\le T-a_T} \frac{|W(t+a_T) - W(t)|}{\sqrt{2a_T(\log\frac{T}{a_T} + \log\log T)}} = 1 \text{ avec probabilité } 1$$

W étant le processus de Wiener standart et $a_T = T$ ou $a_T = \log T$.
Avec $a_T = T$ on obtient la loi du logarithme itéré tandis qu'avec $a_T = \log T$ c'est la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi.
Récemment Csörgö et Révész prouvèrent que si $0 < a_T \le T$ et certaines conditions sur a_T (assez légères), alors la relation précédente reste toujours valable.

Leurs conditions sont aussi satisfaites si $a_T = T$ et $a_T = \log T$. Ainsi, Csörgö et Révész trouvèrent le lien qui existe entre la loi du logarithme itéré et la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi. Les résultats analogues pour les processus de Wiener à plusieurs variables ne sont pas évidents. La loi du logarithme itéré pour les processus de Wiener de dimension d ($d > 1$) a été démontrée par R. Pyke en 1972.

Dans ce travail, on établit d'abord la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi pour les processus de Wiener à plusieurs variables. Le résultat donne aussi une forme plus générale pour la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi comme dans le cas du processus de Wiener standard.

Ensuite, comme l'ont fait Csörgö et Révész pour le processus de Wiener standard, on peut combiner les deux théorèmes en un seul dans le cas des processus à plusieurs variables. On donnera la démonstration de cette version.

On utilisera la même argumentation pour prouver le module de continuité de Paul Lévy pour les processus de Wiener à plusieurs variables, en l'incluant dans le théorème de Csörgö pour le cas multivarié.

Enfin, on prouvera à la fin des résultats analogues pour les processus de Kiefer.

Table des Matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION et PRELIMINAIRES

Soit $U(x)$, $x \in [0,1]^d$, la distribution uniforme de dimension d, $d \geq 1$.

Soit $X_1, X_2,$ $, X_n$, une suite de vecteurs aléatoires indépendants de même loi U.

Il a été prouvé dans [7] que le processus empirique :

$$\alpha_n(X) = \sqrt{n}\,[U_n(X) - U(X)] \quad , X \in [0,1]^d$$

$$\text{où } U_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{X_i, X_i \leq x\right\} = \frac{1}{n}\#\left\{X_i : 1 \leq i \leq n, X_i \leq x\right\}$$

peut être approximé par une suite de ponts browniens de dimension d et par un processus de Kiefer de dimension (d+1).

[L'écriture $X_i \leq x$implique toutes les coordonnées de X_i sont $\leq$ aux coordonnées respectives de x et $\#\{-\}$ est le nombre d'éléments de $\{-\}$].

Ces processus peuvent être définis à l'aide du processus de Wiener multidimensionnel.

En établissant la meilleure approximation dans le cas d=1 [17],la loi du logarithme itéré et la loi des grands nombres d'Erdoï-Renyi jouent un très grand rôle dans les accroissements du processus de Weiner standart.

Ces deux lois sur les accroissements du processus de Weiner peuvent être combinées en un seul théorème de la façon suivante:

Soit W(.) un processus de Wiener standard .Alors :

$$(*) \qquad \lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T-a_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \frac{|W(t+s)-W(t)|}{\sqrt{2\, a_T [\mathrm{Log} \frac{T}{a_T} + \mathrm{Log\, Log}\, T]}} = 1$$

avec : $a_T = \mathrm{Log}\, T$ ou $a_T = T$

Si $a_T = \mathrm{Log}\, T$,c'est la loi des grands nombres d'Erdös Renyi et si $a_T = T$ c'est la loi du log itéré .

La question que l'on pourrait se poser est si la limite (*) reste valable pour $\log T \leq a_T \leq T$.

La réponse est positivement donnée par Csörgö et Revesz [9] avec certaines conditions sur a_T donnant ainsi une relation entre la loi du logarithme itéré et la loi des grands nombres d'Erdös-Renyi [13].

Pour le cas ou d>1,peu de chose est connu sur les p r opr i étés des accroissements du processus de Wiener de dimension d.

La loi du logarithme itéré pour le processus de Wiener de dimension d a été prouvée par R.Pyke [28].

Dans ce travail,on donne d'abord la généralisation de la loi des Grands nombres d'Erdös-Rényi pour le processus de Wiener de dimension d.

Après on montre que ces 2 lois peuvent être combinées en une seule comme en dimension 1.

Les résultats sont ensuite utilisés pour étudier certaines propriétés des accroissements du processus de Kiefer de dimension (d+1).

Dans le chapitre 1,on donne quelques résultats et définitions de base utilisés par la suite.

Le chapitre 2 est consacré aux accroissements du processus de Wiener standard.

Dans le chapitre 3,on étend l'étude aux accroissements du processus de Wiener de dimension d > 1.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de certaines propriétés du processus de Keifer de dimension (d+1).

Préliminaires :

On suppose connu les résultats de base de la théorie des probabilités et des processus stochastiques .Pour les références voir [1],[5],[11],et [29].

Dans cette partie ,on introduit quelques notations et résultats de base utiles pour la suite.

(Ω,A,P) désignera toujours un espace de probabilité.Un processus stochastique $X(t,w)$,$t \in T \subseteq \mathbb{R}^d$ et $w \in \Omega$ est une fonction

$$X(.,.): T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tq , $\forall$ t $\in$ T fixé, $X(t,.)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre c'est à dire est une variable aléatoire.

On dit que X est un processus stochastique à valeurs sur T est défini sur l'espace de probabilité (Ω,A,P) .La famille des valeurs réelles de la fonction $X(.,w)$,$w \in \Omega$ est appelée trajectoire du processus stochastique X .(ou courbe représentative).

Définition 1.1: La trajectoire du processus stochastique $X(t,w)$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}^d$et $w \in \Omega$,est continue avec probabilité 1 s'il existe un ensemble N avec $P(N)=0$ tq $X(.,w)$ est continue $\forall$ $w \notin N$.

Pour éviter d'alourdir l'écriture ,on supprimera w dans la notation et on écriraX(t) au lieu de X(t,w).

Ainsi on écrira $\{X(t) < \lambda\}$ pour $\{w:X(t,w) < \lambda\}$ etc...

La probabilité $P\left\{X(t) < \lambda\right\}$, $t \in T$ et $-\infty<\lambda< \infty$ est appelée distribution de $X(t)$.

Définition 1.2: Un processus stochastique $X(t)$, $t \in T$ est un processus Gaussien si $X(t_1),\dots,X(t_n)$ a une loi jointe Gaussienne $\forall\ t_1,t_2,\dots,t_n \in T$ et $\forall\ n\geq 1$ fini.

Définition 1.3: Un processus stochastique $X(t), t\in T$, est dit séparable s'il existe $D \subseteq T$ mesurable et tq X est uniquement déterminé par $X(t), t \in D$. Dans ce cas D est dit un séparant.
Pour plus de détail sur la séparabilité voir [11].

Les résultats suivants sur la séparabilité sont souvent utilisés dans ce travail.

Proposition 1.4: Si $X(t), t \in T$, est un processus séparable avec séparant D .Alors :

$$\sup_{t\in T} X(t) \overset{\mathbb{D}}{=} \sup_{t\in D} X(t)$$

C'est à dire : $P\left\{\sup_{t\in T} X(t) < \lambda\right\} = P\left\{\sup_{t\in D} X(t) < \lambda\right\} \quad \forall\ \lambda\in(-\infty,\infty)$

Le séparant d'un processus séparable n'est pas unique car on a:

Proposition 1.5: Si $X(t), t \in T$, est un processus séparable ayant une trajectoire continue avec probabilité 1 (c'est à dire $X(t)$ continue avec probabilité 1 $\forall\, t \in T$), alors toute partie D dense et mesurable de T est un séparant.
Pour la démonstration voir [23] page 88.

Définition 1.6: Soit X et Y deux processus séparables définis sur (Ω, A, P) et à valeurs sur $T \subseteq \mathbb{R}^d$.

On écrit $X \overset{\mathbb{D}}{=} Y$ ou $X(t) \overset{\mathbb{D}}{=} Y(t), t \in T$ si les distributions jointes sont égales c'est à dire :

$$P\left\{X(t_1) \leq a_1, \ldots, X(t_n) \leq a_n\right\} = P\left\{Y(t_1) \leq a_1, \ldots, Y(t_n) \leq a_n\right\}$$

Pour toutes suites finies $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Si X est un processus Gaussien séparable ayant une trajectoire continue avec probabilité 1 (En fait un processus Gaussien ayant une trajectoire continue avec probabilité 1 doit être séparable), alors la distribution jointe finie est déterminée par la structure de la covariance de X. Elle détermine la distribution de X sur un ensemble mesurable et dense et par conséquent le processus lui même. Ainsi:

Proposition 1.7: Un processus Gaussien séparable est déterminé par la structure de sa covariance.

Notations: On utilise toujours $\phi(.)$ pour la distribution normale standard c'est à dire :

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2} dx \qquad \text{pour tout } \lambda \in R$$

L'inégalité élémentaire est souvent utilisée dans certaines démonstrations :

$$\frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda^2/2} \leq \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda^2/2} \qquad \forall \lambda > 0.$$

Proposition 1.8 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit $\{A_n, n \geq 1\}$ une suite d'événements telle que :

a- $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad P(\lim_n \text{Sup } A_n) = 0.$

(En d'autres termes, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il n'y a qu 'un nombre fini d'indices p tel que $\omega \in A_p$).

b- Si $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = +\infty$ et les A_n, $n \geq 1$, indépendants, alors

$$P(\lim_n \text{Sup } A_n) = 1.$$

Chapitre 2

Les accroissements du processus de Wiener Standard

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés des accroissements du processus de Wiener standard.

Dans le premier paragraphe, on donne les définitions et quelques propriétés élémentaires tandis qu'au second paragraphe, on parlera du module de continuité de Paul Lévy pour un processus de Weiner standard.

Dans les paragraphes 3 et 4, on étudie la loi du logarithme itéré (LLI) et la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi pour le processus de Wiener.

Enfin, dans le paragraphe 5, on montre que la L.L.I et la loi des grands nombres d'Erdös-Rényi peuvent être combinées en un seul théorème sur les accroissements du processus de Wiener avec des conditions différentes sur les accroissements. Ces conditions sont les 2 extrêmes de la famille des suites d'accroissements et ainsi donnent un lien entre elles. C'est dans le théorème de Csörgö-Revesz qu'on trouve ce lien.

2.1 Définitions et propriétés:

Un processus de Wiener $W(t), t \geq 0$ est un processus Gaussien, séparable tq:

(2.1.1) $W(.)$ est continue avec probabilité 1.

(2.1.2) $W(0)=0$ avec probabilité 1 et si $t>0$

$$P(W(t)<\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda/\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) \quad \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

(2.1.3) $E(W(s)W(t)) = s\wedge t = \min(s,t) \quad \forall\ s,t \geq 0$

(2.1.4) Si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$,

alors les variables aléatoires gaussiennes $W(t_i) - W(t_{i-1})$ sont indépendantes 2 à 2 de moyenne 0 et de variance $t_i - t_{i-1}$.

L'existence du processus de Wiener a été prouvé par N.Wiener (Voir [32] ou [1]). De la proposition 1.7 et des conditions (2.1.3)et (2.1.1) les autres conditions sont redondantes. On a :

Proposition 2.2: Soit $W(t), t\geq 0$ un processus de Wiener. Alors pour tout $T>0$,on a:

(2.2.1) $$\sqrt{T}\, W(t/T) \overset{\mathbb{D}}{=} W(t) \qquad 0\leq t\leq T$$

et par conséquent :

(2.2.2) $$\sup_{0\leq t\leq T} W(t) \overset{\mathbb{D}}{=} \sqrt{T} \sup_{0\leq t\leq 1} W(t)$$

Maintenant, on va définir le pont brownien . Comme on l'a dit précédemment le pont brownien a la même covariance que le processus empirique $\alpha_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n(x)-x)$, où $F_n(x)$ est la distribution empirique définie à partir d'un échantillon de taille n uniformément distribué. La covariance de $\alpha_n(x)$ est :

$$E(\alpha_n(x)\alpha_n(y)) = x_\wedge y - xy = \min(x,y) - xy \quad \forall\ x,y \in [0,1]$$

On définit :

Définition 2.3: Un pont brownien $B(t)$, $0\leq t\leq 1$ est un processus Gaussien séparable tel que :

(2.3.1) $B(0) = B(1) = 0$ avec probabilité 1 et si $0<t<1$

$$P\{B(t) \leq \lambda\} = \phi(\lambda/\sqrt{t(t-1)}) \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

(2.3.2) $E(B(s)B(t)) = s_\wedge t - st = \min(s,t) - st$

Donc, on peut écrire :

(2.3.3) $B(t)=W(t) - tW(1) \qquad 0\leq t\leq 1$

oú $W(1)$ est un processus de Wiener défini en 2.1.

Le résultat concernant la structure de la covariance de 2 processus Gaussiens donne:

Proposition 2.4:

Soit $B(.)$ et $W(.)$ respectivement un pont Brownien et un processus de Wiener. Alors :

(2.4.1) $(1+t)B(\frac{t}{t+1}) \overset{\mathbb{D}}{=} W(t) \qquad 0\leq t<\infty$

(2.4.2) $B(t) \overset{\mathbb{D}}{=} (1-t)W(\frac{t}{1-t}) \qquad 0\leq t<1$

L'un des premiers problèmes concernant les propriétés des processus stochastiques est de trouver la distribution du supremum sur un intervalle.

Dans la suite, on établira sans donner la preuve, la distribution de $\sup_{0\leq t\leq 1} W(t)$ et $\sup_{0\leq t\leq 1} B(t)$. Les démonstrations de ces résultats peuvent être trouvées dans [10].

Théorème 2.5 : Pour tout $\lambda > 0$, on a :

(2.5.1) $$P\left\{\sup_{0\leq t\leq 1} W(t) \leq \lambda\right\} = 1-2\phi(-\lambda)$$

et donc, par la proposition 2.2 ,on a :

(2.5.2) $$P\left\{\sup W(t) \leq \lambda\right\}= 1-2\Phi(\frac{-\lambda}{\sqrt{T}}) \ \forall \ T>0$$

Concernant un résultat similaire pour B(t),une démonstration remarquable fut donnée par J.L.Doob dans [10].C'est le théorème suivant:

Théorème 2.6: Pour tout $\lambda > 0$, ona:

$$(2.6.1) \quad P\left\{ \sup_{0\le t\le 1} B(t) \le \lambda \right\} = 1-\exp\left\{-2\lambda^2\right\}$$

et

$$(2.6.2) \quad P\left\{ \sup_{0\le t\le 1} |B(t)| \le \lambda \right\} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp\left\{-2n^2\lambda^2\right\}$$

Pour la distribution de $\sup_{0\le t\le 1}|W(t)|$, la forme est plus simple.

Théorème 2.7: On a:

$$P\left\{ \sup_{0\le t\le 1} |W(t)| > \lambda \right\} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left\{ -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{8\lambda^2} \right\}$$

Pour la démonstration voir [1] page 80.

2.2 Module de continuité de P.Lévy.

On a vu que la trajectoire d'un processus de Wiener est continue. Cependant elle est aussi très irrégulière. Le théorème suivant:

Théorème 2.8: Avec probabilité 1,la trajectoire du processus de Wiener n'est pas différentielle.

Il est aussi intéressant de voir de combien elle s'éloigne de la différentiabilité?

La réponse est donnée par le module de continuité de P.Lévy.

Théorème 2.9: On a,avec probabilité 1,

$$(2.9.1) \qquad \overline{\lim_{h \to 0}} \; \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h \log 1/h}} = 1$$

Remarque: Orey et Taylor [25] montrèrent que la lim dans (2.9.1) peut être remplacée par lim.

La preuve du théorème 2.9 peut être basée sur plusieurs processus stochastiques standards.

2.3 La loi du logarithme itéré:

Le module de continuité de P.Lévy traite les petits accroissements du processus de Wiener.En particulier les accroissements considérés tendent vers 0.

D'abord on donne la version Gaussienne de la loi du logarithme itéré de Khintchine [14].

Théorème 2.10: On a avec probabilité 1 ,

$$(2.10.1) \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{W(n)}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1$$

Remarque:Le résultat original de Khintchine concernait la somme de v.a.i.i.d de loi quelconque et de moyenne 0.

Il est clair que :

$$W(n) = \sum_{k=1}^{n} W(k) - W(k-1)$$

est une somme de v.a.iid.

La suite est une version plus forte que le théorème 2.10.

Théorème 2.11: On a, avec probabilité 1,

$$(2.11.1) \quad \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le t\le T} \frac{W(t)}{\sqrt{2T \log \log T}} = 1$$

d'oú

$$(2.11.2) \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \sup_{0\le t\le 1-h} \frac{W(t)}{\sqrt{2h\log \log 1/h}} = 1$$

On donnera la preuve de ces deux théorèmes.

2.4 Loi des grands nombres d'Erdös-Rényi

Dans leur article [13] Erdös et Rényi prouvèrent une nouvelle loi des grands nombres.

Leur résultat concerne le problème de la moyenne mobile maximum d'une suite de v.a.iid.

Exemple, si $\{X_n\}$ est une suite de "pile ou face", alors quel est le saut maximum ou le nombre maximum de "pile" pendant n essaies.

Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a.iid de fonction de répartition F(.) tel que la fonction génératrice des moments existe au voisinage de 0. La loi des grands nombres d'Erdös-Rényi montre avec probabilité 1 que :

$$\lim_{N\to +\infty} \max_{0\le n\le N-a_N} \frac{S_{n+a_N} - S_n}{a_N} = \alpha$$

où $S_n = \sum_{K=1}^{N} X_K$, $a_N = [c\log N]$, $[X]$ = le plus grand entier inférieur ou égal à X et $\alpha = \alpha(c)$ est uniquement déterminée par la fonction génératrice des moments de F(.).

Par exemple, si F est discrète et F(1) = F(-1) = 1/2 , α est définie par :

$$\frac{1}{c} = 1-h\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

où $h(x) = x\log_2 \frac{1}{x} + (1-x)\log_2 \frac{1}{1-x}$, $0<x<1$

et si F est continue, α est définie par:

$$e^{-1/c} = \min_t \phi(t)e^{-\alpha t}$$

oú $\phi(t) = E\,[e^{xt}]$ en le supposant fini au voisinage de t=0.

Pour des sommes de v.a.i.i.d : $S_n = W(n)$.

La loi des grands nombres d'Erdös-Rényi est comme suit :

Théorème 2.12:

On a avec probabilité 1 :

$$(2.12.1)\quad \lim_{N\to+\infty} \max_{0\le n\le N-[c\log N]} \frac{W(n+[c\log N])-W(n)}{[c\log N]} = \sqrt{2/c}\ ;\ \forall\ c>0.$$

Il est assez facile de voir que, pour tout $\varepsilon>0$

$$p\left\{\sup_{n\le t\le n+1} W(t+[c\log N])-W(t) > (\sqrt{2/c}+\varepsilon)[c\log N]\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le t\le 1} W(t+[c\log N])-W(t) > (\sqrt{2/c}+\varepsilon)[c\log N]\right\}$$

$$=P\left\{\sup_{0\le t\le 1} W(t) > \left(\sqrt{\frac{2}{c}}+\varepsilon\right)\sqrt{[c\log N]}\right\}$$

$$= 2\,P\left\{W(1) > \left(\sqrt{\frac{2}{c}}+\varepsilon\right)\sqrt{[c\log N]}\right\}$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{c}}+\varepsilon\right)\sqrt{[c\log N]}}\exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{2}{c}}+\varepsilon\right)^2[c\log N]\right\}$$

$$\leq A.\frac{1}{N^{1+\delta}}$$

pour tout $n \geq 0$ et $A > 0$ constante appropriée et $\delta > 0$

Le lemme de Borel-Cantelli et les inégalités ci-dessus donnent :

$$\overline{\lim_{N\ \infty}} \sup_{n\leq t\leq n+1} \frac{W(t+[c\log N])-W(t)}{[c\log N]} \leq \sqrt{\frac{2}{c}} \quad \text{avec proba 1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

En conséquence, on a

Corollaire 2.13: On a, avec probabilité 1

$$(2.13.1) \quad \lim_{N\to\infty} \sup_{0\leq t\leq N-[c\log N]} \frac{W(t+[c\log N])-W(t)}{[c\log N]} = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

Remarque: il est aussi facile de montrer que, avec probabilité 1 on a

$$(2.13.2) \quad \lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T-[c\log T]} \frac{W(t+[c\log T])-W(t)}{[c\log T]} = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

pour tout $c > 0$.

Dans [3], Chan améliora le théorème 2.12 sous la forme suivante:

Théorème 2.14: Soit a_N une suite d'entiers tel que $\frac{a_N}{N^{\delta}} \to 0, \forall\delta > 0$.

Alors, avec probabilité 1, on a

$$(2.14.1) \quad \lim_{N\to\infty} \max_{0\leq n\leq N-a_N} \frac{W(n+a_N)-W(n)}{\sqrt{a_N[c\log N]}} = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

pour tout $c > 0$.

Si, en plus, on a $a_N \to \infty$ pour $N \to \infty$, alors avec probabilité 1, on a

$$(2.14.2)\quad \lim_{N\to\infty} \sup_{0\le t\le N-a_N} \sup_{0\le s\le a_N} \frac{W(t+s)-W(t)}{\sqrt{a_N[c\log N]}} = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

On ne donnera pas la preuve de ce théorème ici. Mais on donnera la preuve complète pour la version de ce théorème en dimension d, qui englobera ce résultat.

2.5 Théorème de Csörgö et Révész sur les accroissement du processus de Wiener

D'abord, supposons que a_T est une fonction réelle de T. Alors on peut facilement déduire des théorèmes 2.11 et 2.12 que

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le t\le T-a_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{W(t+s)-W(t)}{\sqrt{2a_T[\log(T/a_T)+\log\log T]}} = 1 \quad \text{avec proba } 1$$

si $a_T = T$ ou $a_T=[\log T]$. Il est évident, qu'il y a une grande différenceentre logT et T.

Dans [9], Csörgö et Révész montrèrent, avec certaines conditions sur a_T, que l'égalité précédente est toujours vraie pour tout a_T vérifiant $0 < a_T \le T$. Ainsi, ils donnèrent la relation entre la L.L.I et la loi des Grands Nombres d'Erdös-Rényi.

Avant de donner leur théorème, on définit ce qui suit:

<u>Définition 2.5:</u> a_T etant une fonction positive, monotone et non décroissante, est dite β_T-fonction si

(2.15.1) $\quad 0 < a_T \le T$.

(2.15.2) $\quad a_{\theta^{k+1}}/a_{\theta^k} \leq \theta \quad \forall\, \theta > 1$ et $\forall\, k > 0$

(2.15.3) $\quad a_T/_T$ est monotone non croissante.

Remarque: **Notons que (2.15.3) implique (2.15.2).Car,supposons que (2.15.2) soit fausse.Alors il existe θ > 1 tel que**

$a_{\theta^{k+1}}/a_{\theta^k} > \theta$ pour une infinité de k.

donc $\quad a_{\theta^k} < a_{\theta^{k+1}}/_{\theta}$ c'est à dire

$a_{\theta^k}/_{\theta^k} < a_{\theta^{k+1}}/_{\theta^{k+1}}$ pour une infinité de k

ceci implique que $a_T/_T$ n'est pas non croissante,ce qui contredit (2.15.3).Néanmoins on prendra cette condition dans la définition pour commodités.

Théorème 2.16: Supposons que a_T, est une β_T-fonction. Alors on a, avec probabilité 1

(2.16.1) $$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\leq t\leq T-a_T} \beta_T|W(t+a_T)- W(t)| = 1$$

et

(2.16.2) $$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\leq t\leq T-a_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \beta_T|W(t+s)-W(t)| = 1$$

ou $\beta_T = \left(2a_T[\log \frac{T}{a_T} + \log\log T]\right)^{-1/2}$

Si en plus on a

(2.16.3) $$\lim_{T\to\infty} \frac{\log(T/a_T)}{\log\log T} = \infty$$

alors $\overline{\lim}$ dans (2.16.1) et (2.16.2) peut être remplacé par lim. On ne donnra pas la démonstration du théorème 2.16 car on a un résultat analogue dans le cas des processus de Wiener de dimension d, qui sera prouvé au chapitre 3.

Quelques corollaires du théorème 2.16

Corollaire 2.17: On a, avec probabilité 1

(2.17.1) $\lim_{T\to\infty} \beta_T|W(T+a_T)-W(T)| = 1$

où a_T est une β_T-fonction avec β_T définie au théorème 2.16. Le corollaire 2.17 est une simple généralisation du théorème de Lai [19] qui prouva ce résultat sous des conditions plus fortes sur a_T.

Corollaire 2.18: On a, avec probabilité 1,

(2.18.1) $\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le T-1} \frac{|W(t+1)-W(t)|}{(2\log T)^{1/2}} = 1$

Bien sur, le théorème 2.14 implique aussi que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_n^{(n)}}{[2\log n]} = 1 \quad \text{avec probabilité 1}$$

où $X_n^{(n)}$ est la $n^{ième}$ statistique d'ordre de la suite de v.a.i.i.d normale de moyenne 0et de variance 1 c'est à dire $X_n^{(n)}=\max_{0\le i\le n} X_i$

Dans [17], Komlös-Major-Tusnâdy montrèrent que si

$S_n=\sum_1^n X_i$ est la somme partielle d'une suite $\{X_i\}$ de v.a i.i.d t.q $E(X_1)=0$, $E(X_1^2)=1$ et $E(e^{tX_1})<\infty$ au voisinage de 0,

alors $|S_n - W(n)| = O(\log n)$ avec probabilité 1, pour $n\to\infty$.

Ainsi, si a_T est une β_T-fonction t.q $\log T/T \to 0$ pour $T\to\infty$, on a un résultat similaire pour S_n. En effet on a

Corollaire 2.19:

Soit a_T une β_T-fonction tel que $\log T/a_T \to 0$ pour $T\to\infty$.

Soit S_n définie comme ci-dessus ,alors on a avec probabilité 1:

$$(2.19.1)\quad \overline{\lim_{N\to\infty}} \max_{0\le n\le N-a_N} \beta_N |S_{n+a}-S_n| = 1$$

et

$$(2.19.2)\quad \overline{\lim_{N\to\infty}} \beta_N |S_{N+a_N} - S_N| = 1$$

où β_T est définie au théorème 2.16.

Chapitre 3

Incréments du processus de Wiener multidimentionel

3.1. Définitions et propriétés:

Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $Y = (y_1, \dots, y_d) \in [0,\infty)^d$

(P1) On écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i \forall i$

(P2) $|x| = x_1 \dots x_d$

(P3) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$

$x\, y = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$

(P4) $\langle x , y \rangle = \left\{ z \text{ tq } x \leq z \leq y \right\}$ si $x \leq y$

et l'intérieur de $\langle x,y\rangle$ est définie par :

$$\mathrm{Int}\, \langle x,y \rangle = \left\{ z : x < z < y \right\}$$

(P5) $|\langle x,y\rangle| = |\mathrm{Int}\langle x,y \rangle| = \sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)$

(P6) $F_X^{(i)}(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, y_d)$ $1 \leq i \leq d$

Définition 3.1 : $W^d(x), x \in [0,\infty)^d$ est un processus de Wiener de dimension d. $W^d(x)$ est un processus réel gaussien séparable défini sur un espace de probabilité (Ω, A, p) tq:

(3.1.1) $W^d(x) = 0$ si $|x| = 0$ et si $|x| > 0$

$$P(W^d(x) < \lambda) = \phi\, (\lambda |x|^{-1/2}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(3.1.2) $W^d(.)$ est continue avec proba 1.

(3.1.3) $\forall$ **x $\leq$ y , on définit l'accroissement de <x,y> par**

$$W^d(\langle x,y\rangle) = W^d(y) + \sum_{i=1}^{d} (-1)W^d(F_x^{(i)}(y))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^2 \, W^d(F_X^{(i)} \circ F_Y^{(j)}(y)) + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d-1} \, W^d(F_Y^{(i)}(x)) + (-1)^d W(\underline{x})$$

Ainsi $W^d(\langle x,y\rangle$ et $W^d(\langle u,v\rangle)$ sont indépendants si

$$\mathrm{Int}\langle x,y\rangle \cap \mathrm{Int}\langle u,v\rangle = \emptyset \quad \text{et}$$

$$E\,[W^d(\langle x,y\rangle W^d(\langle u,v\rangle)] = |\langle x,y\rangle \cap \langle u,v\rangle|$$

si leurs intérieurs ne sont pas disjoints .

<u>Remarque</u>: L'existence de ces processus a d'abord été **prouvé par Chentson [4], en 1956, pour d = 2.**Ensuite J. Yeh prouva l' **existence** de la mesure de Wiener sur $C[0,1]^2$. Et en 1970, W. J. Park [27] prouva l'existence de $W^d(\underline{x})$ pour tout $d > 1$.

Il est évident que pour $d = 1$, $W^1(x) = W(x)$ et

$W^1(\langle x,y\rangle) = W(x) - W(y)$

Soit $s = (s_1,\ldots,s_d) > 0 = (0,\ldots,0)$

Alors $|s|^{1/2} \, W^d(s^{-1}x)$ vérifie les conditions de la def 1.

avec

$s^{-1} = (s_1^{-1}, \ldots, s_d^{-1})$ c'est à dire qu'on a :

$$|s|^{1/2} W^d(s^{-1}x) \overset{\mathbb{D}}{=} W^d(x) \quad , \quad 0 \le x \le s$$

Proposition 3.2 : $\forall\ s > 0$ **on a**

$$P\left\{ \sup_{0 \le x \le s} W^d(x) < \lambda \right\} = P\left\{ \sup_{0 \le x \le 1} W^d(x) < \frac{\lambda}{\sqrt{|s|}} \right\} \quad \forall\ \lambda \ge 0$$

<u>Proposition 3.3</u> :Soit $I \subset [0,\infty)^d$ c'est à dire $I = \langle x,y \rangle$ pour $x < y$ dans $[0,\infty)^d$. Si $J = \langle u,v \rangle \subseteq I$,on écrit $W^d(J) = W(\langle u,v \rangle)$

$\forall\ \lambda > 0$ **,on a**

(3.3.1) $$P\left\{ \sup_{J \subseteq I} W^d(J) > \lambda \right\} \le 4^d\ P\left\{ W^d(I) > \lambda \right\}$$

et ainsi $\forall\ \lambda > 0$

(3.3.2) $$P\left\{ \sup_{J \subseteq I} W^d(J) > \lambda \right\} \le 4^d \phi(-\lambda / \ |I|^{1/2})$$

où $|I| = |\langle x,y \rangle| = \prod_{i=1}^{d} (y_i - x_i)$

Théorème central limite

Soit $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ et $n = (n,n,\ldots,n) \in N^d$, $n \ge 1$

Supposons que $\{X_k\}$ **est une suite de va iid indéxée par k avec :**

$F(x) = x_1 \ldots x_d \quad \forall\ x \in \langle 0,1 \rangle = [0,1]^d$

on définit $S_n = \sum_{k \le n} X_k$ et $[k.t] = ([k_1 t_1], \ldots, [k_d t_d])$ $\forall k$ et $t \in \langle 0,1 \rangle$

Théorème 3.5: (Wichura [32]) Soit X_k et S_n définies ci-dessus :

Soit $Z_n(t) = |n|^{-1/2} S_{[n.t]}$ on a:

(3.5.1) $$Z_n \xrightarrow{\mathbb{L}} W^d$$

Définition 3.6 : Un pont Brownien à d paramètres $B^d(t), t \in <0,1>$ est un processus réel ,séparable et gaussien vérifiant :

(3.6.1.) $B^d(t) = 0$ avec prob 1 si $|t|(1-|t|)=0$

(3.6.2) $P\{B(t)<\lambda\} = \phi\ (\lambda / \sqrt{|t|(1-|t|)})$ si $|t|(1-|t|) > 0\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

(3.6.3.) $E(B^d(s)\ B^d(t)) = (s_1 \wedge t_1)\ldots(s_d \wedge t_d) - s_1\ldots s_d.\ t_1\ldots t_d$

$\forall$ s et t $\in$ <0 1>

Donc on peut écrire que

(3.6.4) $$B^d(t) = W^d(t) - |t|W^d(1) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Soit $\alpha_n(t)$ processus empirique uniforme sur $[0,1]^d$

$$\alpha_n(t) = \sqrt{n}\ (F_n(t) - |t|) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

oú $F_n(t) = \dfrac{\#\{X_i \leq t\ , 1 \leq i \leq n\}}{n}$ et $\{X_i\}$ suite de vecteurs aléatoires iid et de même distribution sur $[0,1]^d$

En 1975 Komlôs,Major et Tusnady [18] montrèrent que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |\alpha_n(x) - B_n(x)| = 0(n^{1/2}\log n) \text{ avec prob 1 pour n grand.}$$

une version de ce théorème pour d > 1 est donnée par Csörgö et Révész [7] in ZWG 31 (1975) comme suit:

Théorème (3.7) : Soit $\{X_i\}$ une suite de v.a iid uniforme sur $[0,1]^d$, sur (Ω,A,P) supposée " assez riche".

Alors on peut définir une suite (B_n^d) de ponts browniens sur (Ω,A,P) tq :

(3.7.1) $$\sup_{x \in [0,1]^d} |\alpha_n(x) - B_n^d(x)| = O(n^{-\frac{1}{2(d+2)}}(\log n)^{3/2}) \text{ avec proba } 1$$

avec n assez grand.

Proposition 3.8 (Kiefer [15] en 1961):

Pour α_n ainsi défini on a:

$\forall \varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon,d) > 0$ tq

(3.8.1) $$P\{\sup_{x\in[0,1]^d} |\alpha_n(x)| \geq \lambda\} \leq c(\varepsilon,d)e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2} \qquad \forall \lambda > 0$$

En combinant le théorème et cette proposition on a:

Proposition 3.9:

$\forall \varepsilon > 0$ et $d > 1$ $\exists$ $c(\varepsilon,d) > 0$ tq :

(3.9.1) $$P\{\sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |B^d(x)| > \lambda\} \leq c(\varepsilon,d)\, e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2} \qquad \forall \lambda > 0$$

3.2 Module de continuité de $W^d(\underline{x})$

<u>Théorème(3.10):</u> **(R.Pyke [28] et S.Orey-W.E.Pruitt[24])**

Soit $I = \langle 0,1\rangle \subset [0,\infty)^d$ et $h = (h_1,\dots,h_d)$

On a avec probabilité 1

$$(3.10.1) \qquad \lim_{|h|\to 0} \sup_{0\le x\le 1-h} \frac{|W^d(\langle x,x+h\rangle)|}{\sqrt{2|h|\log|h|^{-1}}} = 1$$

3.3 La loi du log itéré et les accroissements d'Erdös-Rényi pour $W^d(.)$

R.Pyke a trouvé la l.l.i pour le processus $W^d(.)$ .Il a montré que la suite

$$Z_n(x) = \frac{W^d(n.x)}{\sqrt{2n^d \log\log n}} \qquad n\ge 3$$

est relativement compacte avec ses points limites qui coincident avec l'ensemble des fonctions de carré intégrable absolument continues et dérivables par rapport à la mesure de Radon-Nikodym sur $[0,1]^d$.

on ne s'intéresse ici qu'à la forme suivante de la LLI.

<u>Théorème</u>3.11:Soit $T = (T,\dots,T) \in [0,+\infty)^d$. Alors

$$(3.11.1) \qquad \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le x\le I} \frac{W(x)}{\sqrt{2|T|\log\log T}} = 1 \quad \text{avec probabilité } 1$$

On regarde maintenant les accroissements d'Erdös-Renyi pour W^d

Théorème 3.12 (Chan 1976 [3]): Soit $a_N = (a_{1N}, a_{2N}, \dots, a_{dN})$ une suite de $[0,\infty)^d$ avec des coordonnées entières . Si $\{a_N\}$ vérifie :

(3.12.1) $$\lim \frac{|\underline{a}_N|}{\delta_N} = 0 \qquad \forall \delta > 0 \quad \text{alors on a}$$

(3.12.2) $$\lim_{N \to +\infty} \max_{0 \le n \le N-a_N} \frac{W^d(\langle n, n+a_N\rangle)}{\sqrt{2d|a_N|[c\log N]}} = \sqrt{\frac{1}{c}} \quad \text{avec prob 1 } \forall c>0$$

(3.12.3) Si en plus on a $\lim_{N \to \infty} a_{iN} = \infty$, $1 \le i \le d$

Alors

(3.12.4) $$\lim_{N \to \infty} \operatorname{Sup}_{0 \le y \le a_N} \operatorname{Sup}_{0 \le x \le N-y} \frac{W^d(\langle x, x+y\rangle)}{\sqrt{2d|a_N|[c\log N]}} = \sqrt{\frac{1}{c}}$$

$\forall c > 0.$ avec proba 1

Preuve:

Pour $N = (N, N, \dots, N)$ et $k = (k_1, \dots, k_d) \le N$

Posons $$\theta(N,\underline{k}) = \max_{0 \le n \le N-k} \frac{W^d(\langle n, n+k\rangle)}{\sqrt{2d|k|[\log N]}}$$ et

$$\theta^*(N,k) = \max_{\underline{0 \le n \le N-k}} \operatorname{Sup}_{J \le \langle \underline{n}, \underline{n+k}\rangle} \frac{W^d(\langle n, n+k\rangle)}{\sqrt{2d|k|[\log N]}}$$

$\forall \varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tq $\delta < 2\varepsilon + \varepsilon^2$

Remarque : $\forall \delta > 0$, le nombre de k tq $1 \le |k| \le N^{\delta}$ ne dépasse pas $N^{\delta d}$

En utilisant la proposition 2 et $\int_\lambda^\infty e^{-u^2/2}\, du \le \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda^2/2}, \lambda > 0$

On a : $\forall$ A>0

$$P\left\{\max_{1\leq|k|\leq N^{\delta}} \theta^{*}(N,k) > 1+\varepsilon\right\} \leq \sum_{1\leq|k|\leq N\delta}\ \sum_{n\leq N-k} 4^{d}\, P\left\{W^{d}(<n,n+k>)> (1+\varepsilon\sqrt{2d|k|\log n}\right\} \leq AN^{-(1+\varepsilon)^{2}d\,+\,(1+\delta)d} \leq AN^{-\gamma}$$

oú $\gamma = (1+\varepsilon)^{2}d - (1+\delta)d > 0$

Soit $E_{n} = \left\{\max_{1\leq|k|\leq N\delta} \theta^{*}(N,k) > 1+\varepsilon\right\}$ alors $E_{N}\cap \overline{E}_{N+1} = \emptyset$ si $[\log N] = [\log N+1]$

mais $[\log N] \neq [\log N+1]$ pour $N=[e^{k}]$ et pour quelques k uniquement déterminés par N.

Soit $Q = \{N;[\log N]\cong[\log N+1\}$ alors

$$\sum_{N} P(E_{N}\cap\overline{E}_{N+1}) = \sum_{N\in Q} P(E_{N}\cap\overline{E}_{N+1}) \leq \sum_{N\in Q} P(E_{N}) \leq \sum_{k} A\,[e^{k}]^{-\gamma} < \infty$$

Comme $P(E_{N}) \leq AN^{-\gamma} \longrightarrow 0$ pour $N \longrightarrow \infty$ on obtient

$$P(E_{N}\ \text{i.o}) \leq \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcup_{m\geq N} t_{m}\Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} P\Big\{E_{N}\cup\Big(\bigcup_{m>n}(E_{m+1}\cap\overline{E}_{m+2}\Big)\Big\}$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \Big\{P(E_{N}) + \sum_{N<m} P(E_{m}\cap\overline{E}_{m+1})\Big\}$$

$$= 0$$

Ceci veut dire que :

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \max_{1\leq|k|\leq N^{\delta}} \theta^{*}(N,K) \leq 1+\varepsilon \quad \text{avec proba 1 } \forall\, \varepsilon>0$$

Comme $|a_N| / N^{\delta} \longrightarrow 0$ alors $\overline{\lim}_{N \to \infty} \; \theta(N, a_N) \leq 1$ avec prob 1

c'est à dire :

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \; \max_{0 \leq n \leq N-a} \; \frac{W^d(\langle n, n+a_N \rangle)}{\sqrt{2d\,|a_N|[\log N]}} \leq 1 \quad \text{avec prob } 1$$

On suppose que (3) est réalisée c'est à dire $\overline{\lim}_{N \to \infty} a_{iN} = \infty \quad \forall i \in A,d$

Posons $\forall\, k \leq N$ $\quad S(N,k) = \sup_{0 \leq y \leq k} \; \sup_{0 \leq x \leq N-y} \; \dfrac{W^d(\langle x, x+y \rangle)}{\sqrt{2d|a_N|[\log N]}} \leq 1$

Remarquons que $\forall\; 0 \leq y \leq a_N$ et $0 \leq x \leq N-y$ ils existent $n \leq N$ et $k \leq a_N + 1$ tq

$$\langle x, x+y \rangle \subseteq \langle n, n+k \rangle$$

Ainsi, pour N assez grand tq $|a_N + 1| \leq N^{\delta}$ on a

$$S(N, a_N + 1) \leq \max_{1 \leq |k| \leq N^{\delta}} \theta^*(N,k)$$

où

$$S(N, a_N) \leq \left\{ \frac{|a_N + 1|}{|a_N|} \right\}^{1/2} S(N, a_N + 1)$$

Comme $\overline{\lim}_{N \to \infty} \; \max_{1 \leq |k| \leq N^{\delta}} \theta^*(N,k) \leq 1$ avec prob 1

et la condition (3) du théorème implique $\dfrac{|a_N + 1|}{|a_N|} \longrightarrow 1, \; N \longrightarrow \infty$

on a

$$\lim_{N\to\infty}(S_N,a_N) = \lim_{N\to\infty} \sup_{0\le y\le a_N} \sup_{0\le x\le N-y} \frac{W^d(\langle x,x+y\rangle)}{\sqrt{2d\,|a_N|\,[\log n]}} \le 1$$

avec probabilité 1.

Inversement :

Soit $\varepsilon>0$ quelconque ,posons $k_N = (k_{1N},\dots,k_{dN})$ oú $k_{iN} = [\frac{N}{a_{iN}}]$

$1\le i\le d$ .Ainsi $|k_N| \ge \dfrac{N^d}{2^d\,|a_N|}$

Soit $\delta>0$ tq $\alpha = (2\varepsilon-\varepsilon^2)d - \delta > 0$

Alors si N est tq :

$$\frac{\sqrt{(1-\varepsilon)^2\, 2\, d[\log N]}}{1 + (1-\varepsilon)^2\, 2\, d[\log N]} > N^{-\delta} \qquad \text{on a}$$

$$P\left\{ \theta(N,a_N) \le 1-\varepsilon \right\} \le P\left\{ \frac{W^d(\langle n\,a_N,(n+1)a_N\rangle)}{\sqrt{2d|a_N|\,[\log N]}} \le 1-\varepsilon ,0\le n\le N-a_N\right\}$$

$$\le \prod_{0\le n\le N-a_N} P\left\{ \frac{W^d(\langle n\,a_N,(n+1)a_N\rangle)}{\sqrt{2d\,|a_N|\,[\log N]}} \le 1-\varepsilon \right\}$$

$$\leq \left(P\left\{ W^d(1) \leq \sqrt{(1-\varepsilon)^2 2d\,[\log N]} \right\} \right)^{|k_N|}$$

$$\leq \left(1- \frac{N^{-(1-\varepsilon)^2 d - \delta}}{\sqrt{2\pi}} \right)^{N^d/2^d |a_N|} \leq e^{-BN^{\alpha}}$$

oú $\alpha = (2\varepsilon-\varepsilon^2)d - \delta > 0$

Le lemme de Borel-Cartelli implique que :

$$\underline{\lim}_{N \longrightarrow \infty} \theta\,(N,a_N) \geq 1 \quad \text{avec prob } 1$$

et ainsi $\underline{\lim}_{N \longrightarrow \infty} S\,(N,a_N) \geq \underline{\lim}_{N \longrightarrow \infty} \theta\,(N,a_N) \geq 1$ avec prob 1.

Donc les relations (2) et (4) sont prouvées pour c=1 .

Si c>0 qcq le résultat provient du fait que :

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{[c\log N]}{[\log N]} \longrightarrow c$$

Le théorème 3.12 inclus le cas $d = 1$.Ainsi en prenant $d = 1$ on a les résultats des théorèmes 2.14 et 2.12.

Quelques conséquences du théorème 2:

Corollaire 3.13 :Soit c>0 fixé et supposons que $\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{|a_N|}{[c\log N]} = 1$

Alors $\lim_{N \to \infty} \max_{0 \leq n \leq N-a_N} \frac{W^d(<n,n+a>)}{|a_N|} = \sqrt{\frac{2d}{c}}$ avec prob 1. (3.13.1)

Corollaire 3.14 :Supposons que a_N vérifie les conditions (1) et (3) du théorème 2, alors :

$$(3.14.1)\quad \lim_{N\to\infty} \sup_{0\le x\le N-a_N} \frac{W^d(\langle x,x+a_N\rangle)}{\sqrt{2d|a_N|[c\log N]}} = \sqrt{\frac{1}{c}} \quad \text{avec prob } 1\ \forall\, c > 0$$

3.4 Théorème de Csörgö-Révész sur les accroissements du processus de Wiener de dimension d.

On peut formuler le théorème 3.11 et le théorème 3.12. en un seul théorème sous la forme suivante:

$$(*)\quad \overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{0\le y\le a_N} \sup_{0\le x\le N-a_N} \beta_N |W^d(\langle x,x+y\rangle)| = 1 \quad \text{avec prob } 1$$

oú $\beta_N = (2|a_N|[\log(|N|/|a_N|) + \log\log N])^{-1/2}$ et $a_N = N$ oú a_N

vérifie les conditions (3.12.1) et (3.12.3) du théorème .

Comme pour les processus dans $\mathbb{R}$,on cherche quelles conditions sur a_N, (*) est vraie .

D'abord on donne les définitions suivantes:

Définition (def2.15) :Soit a_T fonction monotone, non décroissante, positive est dite β_T-fonction si:

(1.) $0 < a_T \le T$

(1.) $a_{\theta^{k+1}} / a_{\theta^k} \le \theta \quad \forall\, \theta > 1$ et $\forall$ k>0

(1.) a_T / T est monotone non croissante .

Définition 3.15 : Une d-β_T fonction $a_t = (a_{t1}^{(1)}, \ldots, a_{td}^{(d)})$ est une fonction de $[0,\infty)^d$ dans lui même tq $a_t^{(i)}$, $1 \le i \le d$ est une β_T-fonction et $\forall$ i,j, $1<i,j\le d$,

$$\lim \frac{a_T^{(i)}}{a_T^{(j)}} = \rho_{ij} \quad \text{existe.}$$

Cette limite peut être infinie.

Théorème 3.16: $\forall$ $T \ge 0$,posons $\mathbf{T} = (T,T,\ldots,T)$. Supposons que a_T est une d-β_T fonction .Alors

$$(3.16.1) \qquad \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le x\le T-a_T} \beta_T |W^d(\langle x,x+a_T\rangle)| = 1 \text{ avec probabilité 1}$$

et

$$(3.16.2) \qquad \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0<x<T-a_T} \sup_{J\subseteq\langle x,x+a_T\rangle} \beta_T |W^d(J)| = 1 \quad \text{avec proba 1}$$

où

$$\beta_T = (2|a_T|[\log |T|/|a_T| + \log\log T\,)^{-1/2}$$

Si en plus on a:

$$(3.16.3) \qquad \lim_{T\to\infty} \log \frac{|T|}{|a_T|} / \log\log T = \infty$$

alors :

$$(3.16.4) \qquad \lim_{T\to\infty} \sup_{0\le x\le T-a_T} \beta_T |W^d(\langle x,x+a_T\rangle)| = 1 \quad \text{avec prob 1}$$

et

$$(3.16.5) \qquad \lim_{T\to\infty} \sup_{0\le x\le T-a_T} \sup_{J\subseteq\langle x,x+a_T\rangle} \beta_T^d |W(J)| = 1 \text{ avec proba 1}$$

Remarque : Si on prend $a_T = (T,...,T)$ alors le théorème précédent est une version de la loi du log itéré pour le cas multivarié.

Si a_N vérifie les conditions (1) et(3) du théorème 2 de Chan (1976)

alors $\beta_N \left(\frac{2d}{c} |a_N| [c\log N] \right)^{1/2} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$

Et ceci prouve le théorème 2 de Chan (1976) avec quelques conditions sur a_N.

Lemme 3.17 : $\forall\ \varepsilon>0$ petit , ($\varepsilon \leq \sqrt{4/5}$) , il existe une constante $c=c(\varepsilon,d)>0$ tq :

(3.17.1) $$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_{J\subseteq\langle t,t+h\rangle} |W^d(J)| > \lambda |h|^{1/2} \right\} \leq c|h|^{-1} e^{-\lambda^2/2+\varepsilon}$$

$\forall\ \lambda>0$ et $0<h\leq 1$

Preuve : Soit $\delta>0$ tq $(1+\delta)^d=(1+\varepsilon/2)$ et $h = (h_1,...,h_d)$.

Soit R_i le plus petit entier tq $1/R_i \leq \delta^2 h_i/2$ $\forall\ 1\leq i\leq d$ et soit m_i le plus petit entier tq $h_i \leq \frac{m_i}{R_i}$. Alors $\forall\ x_i$, $0\leq x_i \leq 1$, $\exists\ n_i$, $0\leq n_i\leq R_i$ tq

$(x_i, x_i + h) \leq \left(\frac{n_i}{R_i}, \left(\frac{n_i}{R_i}\right) + (m_i + 1/R_i)\right)$

Soit $m = (m_1,...,m_d)$, $R = (R_1,...,R_d)$ et $R^{-1} = (R_1^{-1},...,R_d^{-1})$

Alors ,$\forall\ x \in [0,1]^d$,$\exists$ n tq $0\leq n\leq R$ tq

$\langle x,x+h\rangle \subseteq \langle nR^{-1}, nR^{-1} + (m+1)R^{-1}\rangle$

Ceci implique que :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} \sup_{0\leq s\leq R} |W^d(\langle x,x+s\rangle)| \leq \max_{0\leq n\leq R} \sup_{0\leq s\leq m+1} |W^d(\langle nR^{-1}, nR^{-1}+s\rangle)|$$

Comme $h_i \leq \frac{m_i}{R_i} \leq h_i + \frac{1}{R_i}$

$$h_i \leq m_i + \frac{1}{R_i} \leq h_i + 2/R_i \leq h_i(1+\delta^2) \leq h_i\ (1+\delta)^2$$

on a $\frac{R_i h_i}{m_i+1} > (1+\delta)^{-2}$ et ainsi :

$$\frac{|\mathbf{R}|\,|\mathbf{h}|}{|m+1|} = \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{R_i h_i}{m_i + 1} \right) \geq (1+\delta)^{-2d} = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-2}$$

Ainsi par la proposition 2 et $\int_{\lambda}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda^2/2}$ $(\lambda > 0)$

On a :

$$P\left\{ \max_{0 \leq s \leq m+1} |W^d(\langle nR^{-1}, nR^{-1} + s \rangle)| > \lambda |\bar{h}|^{\dagger} \right\}$$

$$\leq 4^d P\left\{ |W^d(\langle nR^{-1}, nR^{-1} + (\underline{m}+\underline{1})\underline{R}^{-1} \rangle)| > \lambda |h|^{-1} \right\}$$

$$\leq 4^{d+1} \phi\left(-\lambda\left(\frac{|h|\,|R|}{|m+1|}\right)^{1/2}\right)$$

$$\leq 4^{d+1} \phi\left(\frac{-\lambda}{1+\varepsilon/2}\right) = 4^{d+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\lambda}{1+\varepsilon/2}} e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$\leq 4^{d+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{1+\varepsilon/2}}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \leq \frac{4^{d+1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+\varepsilon/2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2(1+\varepsilon/2}}$$

$$\leq \frac{4^{d+1}(1+\varepsilon/2)}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{(2+\varepsilon)}} \leq A\, e^{-\lambda^2/(2+\varepsilon)} \qquad (\lambda > 1>$$

avec $A = \dfrac{4^{d+1}(1+\varepsilon/2)}{\lambda\sqrt{2\pi}}$

Ainsi :

$$P\left\{\sup_{0\le x\le 1}\ \sup_{J\subseteq\langle x,x+h\rangle} W^d(J)|>\lambda\ |h|^{1/2}\right\}\le A|R+1|e^{-\lambda^2/2+\varepsilon}$$

$$\le C\ |h|^{-1}e^{-\lambda^2/2+\varepsilon}$$

pour $C = C(\varepsilon,d)>0$ convenablement choisi.

Et le lemme est prouvé.

Comme $\left\{ W^d(x),0\le x\le s \right\} \overset{loi}{=} \left\{ |s|^{1/2}W^d(x\ s^{-1}),0\le x\le s \right\}$

$\forall\ s = (s_1,\dots,s_d)$ et $s^{-1} = (s_1^{-1},\dots,s_d^{-1})$ on a

<u>Lemme</u> 3.18: $\forall\ \varepsilon>0$,il existe $c=c(\varepsilon,d) > 0$ tq

(3.18.1) $$P\left\{\sup_{0\le x\le d}\ \sup_{J\subseteq\langle x,x+h\rangle} |W^d(j)|>\lambda|h|^{1/2}\right\}\le C\ \frac{|s|}{|h|}e^{-\frac{\lambda^2}{2+\varepsilon}}$$

$\forall\ \varepsilon > 0$ et $0\le h\le s$

<u>Démonstration du théorème(3.16) :</u>

Soit $T = (T,T,\dots,T)$ et

$$A(T) = \sup_{0\le t\le T-a_T}\ \sup_{J\subseteq\langle t,t+a_T\rangle} \beta_T|W^d(j)|$$

Donc par le lemme 2 ,on a :

$$P\left\{ A(T) \geq 1+\varepsilon \right\} \leq C \frac{|T|}{|a_T|} \exp\left\{-(1+\varepsilon)[\ln \frac{|T|}{|a_T|} + \log\log T]\right\} =$$

$$C \frac{|T|}{|a_T|} \left(\frac{|a_T|}{|T| \log T} \right)^{1+\varepsilon}$$

$$= C \left(\frac{|a_T|}{|T|} \right)^{\varepsilon} . \frac{1}{(\log T)^{1+\varepsilon}}$$

Posons $T_N = \theta^N$ ($\theta > 1$). Alors si a_T est une d-β_T fonction, on a :

$$\sum_N P(A(T_N) \geq 1+\varepsilon) \leq \sum_N C \left(\frac{|a_{T_N}|}{|T_N|} \right)^{\varepsilon} . \frac{1}{N^{1+\varepsilon} . (\log \theta)^{1+\varepsilon}} < \infty$$

$\forall \varepsilon > 0$ et $\theta > 1$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli on a

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} A(T_N) \leq 1 \quad \text{avec probabilité 1.}$$

Remarquons que pour θ proche de 1 et N assez grand on a:

$$(3.16.6) \qquad 1 \leq \frac{\beta_{T_N}}{\beta_{T_{N+1}}} \leq \theta^{\frac{d}{2}}$$

Comme $\beta_{T_N}^{-1} \leq \beta_T^{-1} \leq \beta_{T_{N+1}}^{-1}$

$$\leq \left(1-A\frac{1}{\left[\log\frac{|T|}{|a_T|}+\log\log T\right.}\exp\left\{-(1-\varepsilon)^2\left[\log\frac{|T|}{|a_T|}+\log\log T\right]\right\}\right)^{\left[\frac{|T|}{|a_T|}\right]}$$

$$\leq\left\{1-A\left(\left[\log\frac{|T|}{|a_T|}+\log\log T\right].\left(\frac{|T|\log T}{|a_T|}\right)\right)^{-(1-\varepsilon)^2}\right\}^{\left[\frac{|T|}{|a_T|}\right]}$$

$$\leq\left\{1-A\left(\left[\log\frac{|T|\ \mathrm{Log}T}{|a_T|}\right]\cdot\left(\frac{|T|\log T}{|a_T|}\right)\right)^{-(1-\varepsilon)^2}\right\}^{\left[\frac{|T|}{|a_T|}\right]}$$

$$\leq\exp\left[-\left(\frac{|T|}{|a_T|}\right)^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}T}\right)^{(1-\varepsilon)^2}\left(\frac{A}{\mathrm{Log}\frac{|T|\ \mathrm{Log}T}{|a_T|}}\right)\right]$$

$$\leq\exp\left[-\left(\left|\frac{|T|}{a_T}\right|\right)^{\varepsilon'}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}T}\right)^{1-\varepsilon'}\right]\qquad \text{avec } \varepsilon'=2\varepsilon-\varepsilon^2$$

Comme (1) implique $\sum\exp\left[-\left(\left|\frac{|T|}{a_T}\right|\right)^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}T}\right)^{1-\varepsilon}\right]<\infty,\quad\forall\ \varepsilon>0.$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on a :

$$\underline{\lim}_{T\to\infty}\ \sup_{\underline{0}\leq\underline{x}\leq\underline{T}-a_T}\beta_T|W(\underline{x},\underline{x}+a_T)|\geq 1\qquad\text{avec proba 1.}$$

Ceci prouve (3.16.4) et (3.16.5).

Pour montrer la première partie du théorème, considérons d'abord le cas où $\lim \dfrac{|a_T|}{|\underline{T}|} < 1$.

Alors, dans ce cas, il existe nécessairement $a_T^{(i)}$ tel que

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{a_T^{(i)}}{T} < 1.$$

Supposons que $\lim_{T \longrightarrow \infty} \dfrac{a_T^{(i)}}{T} = c_i < 1$; $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq r \leq d$.

et $\lim_{T \to \infty} \dfrac{a_T^{(i)}}{T} = 1$ pour $r+1 \leq j \leq d$.

Comme $\dfrac{a_T^{(i)}}{T}$ n'est pas croissante, on a $a_T^{(i)} = T$ pour $r+1 \leq j \leq d$

Supposons que $\dfrac{a_T^{(i)}}{a_T^{(j)}}$ $1 \leq i , j \leq r$ est aussi monotone

alors $c_1 \geq c_i$ $1 \leq i \leq r$ et $a_T^{(1)} \geq a_T^{(i)}$ pour T assez grand.

Posons $F(T) = T - a_T^{(1)}$ $T \geq 0$ et $T_k = \inf \left\{ T : T_{k-1} = F(T) \right\}$, $k \geq 2$

Avec $T_1 > 0$ tq $F(T_1) > 0$.

Notons Z_k l'ensemble de tous les intervalles $J = \langle x,y \rangle$ avec

$x = \langle T_k - n_1 a_{T_k}^{(1)}, \ldots, T_k - n_r a_{T_k}^{(r)}, 0, \ldots, 0 \rangle$

et $Y = X + (a_{T_k}^{(1)}, \ldots, a_{T_k}^{(d)})$

où $1 \le n_i \le [T_k / a^{(i)}_{T_k}]$, $1 \le i \le r$ tq le plus petit des $n_i = 1$

Ainsi tous les intervalles J dans Z_k ont des intérieurs disjoints

et intJ dans Z_k et intI dans Z_{k+1} sont disjoints.

Par conséquent les évènements

$$B_k = \max_{J \in Z_k} \beta_{T_k} |W^d(J)| \qquad k \ge 1 \quad \text{sont indépendants}$$

Pour montrer la 1ere partie de notre théorème (cad 3.16.1 et 3.16.2) il suffit de montrer que

$$\sum P \left\{ B_k > 1-\varepsilon \right\} = \infty .$$

D'abord, on peut écrire T_k comme suit :

$$T_k = T_1 \left(1 - \frac{a^{(1)}_{T_2}}{T_2}\right)^{-1} . \left(1 - \frac{a^{(1)}_{T_3}}{T_3}\right)^{-1} \ldots\ldots \left(1 - \frac{a^{(1)}_{T_k}}{T_k}\right)^{-1}$$

$$= T_1 \left(\prod_{n=2}^{k} \left(1 - \frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n}\right)\right)^{-1} \qquad k \ge 2,$$

De l'inégalité $e^{-x} \ge 1 - x \ge e^{-\frac{x}{1-x}}$, $0 < x < 1$ on a :

$$T_k \le T_1 \exp\left\{ \sum_{n=2}^{k} \frac{a^{(1)}_{T_n} / T_n}{(1 - a^{(1)}_{T_n} / T_n} \right\} \le T_1 \exp\left\{ \frac{1}{T_1 - a^{(1)}_{T_1}} \sum_{n=2}^{k} \frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n} \right\}$$

On a donc $$\frac{T_k}{T_1} \leq \exp\left\{ \frac{1}{T_1 - a^{(1)}_{T_1}} \sum_{n=2}^{k} \frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n} \right\}$$

$$\mathrm{Log}\, T_k - \mathrm{Log}\, T_1 \leq \frac{1}{T_1 - a^{(1)}_{T_1}} \sum_{n=2}^{k} \frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n}$$

$$(T_1 - a^{(1)}_{T_1})\,(\log T_k - \log T_1) \leq \sum_{n=2}^{k} \frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n}$$

Comme $\dfrac{a^{(j)}_{T_k}}{T_k} \longrightarrow 1$ pour $k \longrightarrow \infty$,on a pour k assez grand, $\#Z_k$,

le nombre d'intervalles dans Z_k est plus grand que

$$(\, T_k^{d-1} / \,|a^{(1)}_{T_k}|\,).\, a^{(1)}_{T_k} \geq T_k^{r-1} .\, a^{(1)}_{T_k} \,/\, a^{(1)}_{T_k} \ldots a^{(r)}_{T_k}$$

$\forall\, \varepsilon > 0$ et pour A_0 et A_1 convenablement choisies on a :

$$P\left\{ B_k < 1-\varepsilon \right\} = \left(P\left\{ W^d(1) < (1-\varepsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{|T_k|}{|a_{T_k}|}\log T_k\right)} \right\}\right)^{\#Z_k}$$

$$\leq \left\{ 1 - A_1\left(\frac{a^{(1)}_{T_k} \ldots a^{(r)}_{T_k} T_k \ldots T_k}{T_k^d \log T_k} \right)^{1-2\varepsilon} \right\}^{T_k^{r-1} a^{(1)}_{T_k} / a^{(1)}_{T_k} \ldots a^{(r)}_{T_k}}$$

$$\leq \exp\left\{-A_1 \frac{(a^{(1)}_{T_k}\ldots a^{(r)}_{T_k})^{-2\varepsilon} . a^{(1)}_{T_k}}{T_k^{1-2\varepsilon r} \quad (\log T_k)^{1-2\varepsilon}}\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-A_1\left(\frac{a^{(1)}_{T_k}}{T_k}\right)^{1-2\varepsilon r} . \left(\frac{1}{\log T_k}\right)^{1-2\varepsilon}\right\}$$

$$\leq 1-A_0\left(\frac{a^{(1)}_{T_k}}{T_k}\right)^{1-2\varepsilon r} . \left(\frac{1}{\log T_k}\right)^{1-2\varepsilon} \leq 1-A_0\left(\frac{a^{(1)}_{T_k}}{T_k}\right) \frac{1}{(\log T_k)^{1-2\varepsilon}}$$

Ainsi

$$\sum_{n=2}^{k} P\left\{B_n > 1-\varepsilon\right\} \geq \sum_{n=2}^{k} A_0\left(\frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n}\right)\left(\frac{1}{\log T_n}\right)^{1-2\varepsilon}$$

$$\geq A_0\left(\frac{1}{\log T_k}\right)^{1-2\varepsilon} \sum_{n=2}^{k}\left(\frac{a^{(1)}_{T_n}}{T_n}\right)$$

$$\geq A_0\left(\frac{1}{\log T_k}\right)^{1-2\varepsilon} (\log T_k - \log T_1)(T_1 - a^{(1)}_{T_1})$$

$$\geq A_0 . \frac{(\log T_k - \log T_1)(T_1 - a^{(1)}_{T_1})}{(\log T_k)^{1-2\varepsilon}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

Suppposons maintenant que $\dfrac{a_T^{(i)}}{a_T^{(j)}}$ ne soit pas monotone, alors

comme a_T est une d-β_T fonction, on peut supposer que $\lim \dfrac{a_T^{(1)}}{a_T^{(i)}} \geq 1$

pour $1 \leq i \leq r$ (cette limite peut être infinie) et $a_T^{(j)} = T$ pour $r+1 \leq j \leq d$.

On définit $\hat{Z}_k = \left\{ J \cap \overline{L_k} : J \in Z_k \right\}$ et $\check{Z}_k = \left\{ J \cap L_k : J \in Z_k \right\}$

Où $L_k = \left\{ x : 0 \leq x_i \leq T_{k-1} ; 1 \leq i \leq r \text{ et } 0 \leq x_j \leq T_k , r+1 \leq j \leq d \right\}$

Comme $J = (J \cap \overline{L_k}) \cup (J \cap L_k)$ $\forall J \in Z_k$ on a :

$\hat{B}_k - \check{B}_k \leq B_k \leq \hat{B}_k + \check{B}_k$ $k \geq 2$ avec B_k déjà définie et

$\hat{B}_k = \text{Sup} \left\{ \beta_{T_k} |W^d(j)| : J \in \hat{Z}_k \right\}$ et $\check{B}_k = \text{Sup} \left\{ \beta_{T_k} |W^d(j)| : J \in \check{Z}_k \right\}$

Aussi $\lim\limits_{T \to \infty} a_T^{(1)} / a_T^{(i)} \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ implique que $\# \hat{Z}_k = \# Z_k$ pour

k grand et $\# \check{Z}_k \leq \# Z_k \leq \dfrac{|T_k|}{|a_{T_k}|}$

Soient $m_k = \min \left\{ |J| : J \in \hat{Z}_k \right\}$ et $M_k = \max \left\{ |J| : J \in \check{Z}_k \right\}$

Comme $\lim \dfrac{a_T^{(1)}}{a_T^{(i)}} \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$, on a :

$$\frac{m_k}{|a_{T_k}|} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{M_k}{|a_{T_k}|} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Comme les $\hat{B}_k$ sont indépendants, on refait la même démonstration que pour les B_k et en utilisant le fait que :

$$\frac{m_k}{|a_{T_k}|} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \quad \text{on obtient} \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \ \hat{B}_X \geq 1 \text{ avec probabilité } 1$$

La preuve en partie est:

On a:

$$P(\hat{B}_k < 1-\varepsilon) \leq \prod_{J \in \hat{Z}_k} P\left\{ W^d(1) < (1-\varepsilon) \sqrt{2 \frac{|a_{T_k}|}{|J|} \left[\log\left(\frac{|T_k|}{|a_{T_k}|} \right) + \log \log T_k \right]} \right\}$$

$$\leq \prod_{J \in \hat{Z}_k} P\left\{ W^d(1) < (1-\varepsilon) \sqrt{2 \frac{|a_{T_k}|}{m_k} \log\left(\frac{|T_k| \log T_k}{|a_{T_k}|} \right)} \right\}$$

$$\leq \left[P\left\{ W^d(1) < (1-\varepsilon) \sqrt{2(1+\varepsilon)^2 \log\left(\frac{|T_k| \log T_k}{|a_{T_k}|} \right)} \right\} \right]^{\# Z_k}$$

$$\leq 1- A_0\left(\frac{a^{(1)}_{T_k}}{T_k}\right)\left(\frac{1}{\log T_k}\right)^{1-2\varepsilon}$$

d'après le résultat pour B_k

Pour k assez grand tel que $|a_T|/m_k \leq (1+\varepsilon)^2$ et $A_0>0$ constante convenablement choisie.

Ainsi, comme pour B_k on a : $\sum P\left\{ \hat{B}_n > 1-\varepsilon \right\} = \infty$

Maintenant pour montrer les résultats (3.16.1) et (3.16.2)

il suffit de montrer que $\lim_{k\to\infty} \check{B}_k = 0$ avec probabilité 1

Comme pour tout w , $B_k \geq \hat{B}_k - \check{B}$

Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$P\left\{ \check{B}_k > \varepsilon \right\} \leq (\#\check{Z}_k) P\left\{ |W^d(x)| > \varepsilon\sqrt{2 \frac{|a_{T_k}|}{M_k}\left[\frac{\log|T|\,\mathrm{c}\log T_k}{\ }\right]} \right\}$$

$$\leq 2(\#\check{Z}_k)\exp\left\{-\varepsilon^2\frac{|a_{T_k}|}{M_k}\left[\frac{\log|T_k|\,\mathrm{c}\log T_k}{|a_{T_k}|}\right]\right\}$$

$$\leq 2(\#\check{Z})\left(\frac{|a_{T_k}|}{|T_k|\log_{\mathrm{c}} T_k}\right)^{\varepsilon^2|a_{T_k}|/M_k}$$

$$\leq 2\left(\frac{|T_k|}{|a_{T_k}|}\right)\left(\frac{|a_{T_k}|}{|T_k|}\right)^{\varepsilon^2|a_{T_k}|/M_k} \leq 2\left(\frac{|a_{T_k}|}{|T_k|}\right)^{\left(\varepsilon^2\frac{|a_{T_k}|}{M_k}\right)-1}$$

Comme $\dfrac{|a_{T_k}|}{M_k} \longrightarrow \infty$ et $\dfrac{|a_{T_k}|}{|T_k|} \longrightarrow c < 1$

On a : $\sum P\left\{ \check{B}_k > \varepsilon \right\} < \infty$

Ceci est suffisant pour conclure que $\lim \check{B}_k = 0$ avec proba 1

Considérons maintenant le cas où $a_T^{(i)} = T \quad \forall\ i=1,2,\dots,d.$

Posons $T_k = k^k$ et $\mathbf{T}_k = (T_k,\dots,T_k)$ pour $k=1,2,\dots.$

Soit $\Gamma_i^{(k)}$, $1 \le i \le d$, l'hyperplan passant par le point $(0,\dots,T_k,\dots 0)$ et parallèle à $X_1\dots X_{i-1}\,X_{i+1}\dots X_d$ plan.

Alors $\Gamma_1^{(k)}$ divise l'intervalle $\langle 0, T_{k+1}\rangle$ en deux intervalles d'intérieurs disjoints .
De même l'hyperplan $\Gamma_2^{(k)}$ divise ces deux intervalles en 4 intervalles .Ainsi par recurrence on a 2^d intervalles avec des interieurs disjoints.
Parmi ces intervalles, il y a l'intervalle $\langle I_k, I_{k+1}\rangle$, et le reste des intervalles $J_1,\dots,J_{2^d-1}$.

Remarquons que $a_{T_{k+1}}^{(i)} > T_{k+1} - T_k$. $\forall$ k assez grand .

Ainsi on a :

$$E\left[(W^d(J_m))^2\right] = |J_m| \le (T_{k+1} - T_k)^{d-1}\ T_k$$

$$\forall\ m = 1,2,\dots,2^d-1$$

Comme $\dfrac{|a_{T_{k+1}}|}{|T_{k+1}|} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ on a

$$P\left\{ \max_m \beta_{T_{k+1}} |W^d(J_m)| > \delta \right\} \leq 2^d \max P \left\{ \beta_{T_{k+1}} |W^d(J_m)| > \delta \right\}$$

$$\leq 2^d P \left\{ |W^d(1)| > \delta \ (2[\log \frac{|T_{k+1}|}{|a_{T_{k+1}}|} + \log\log T_{k+1}] . \frac{|a_{T_{k+1}}|}{(T_{k+1}-T_k)^{d-1} T_k})^{1/2} \right\}$$

$$\leq A_2 \exp \left\{ -\delta |a_{T_{k+1}}| / (T_{k+1}-T_k)^{d-1} . T_k \right\}$$

Et ceci pour tout $\delta>0$ et $A_2 = A_2(d) > 0$ constante convenablement choisie.

Comme $a_T^{(i)} = T \ \forall i$ on a $\dfrac{|a_{T_{k+1}}|}{(T_{k+1}-T_k)^{d-1} . T_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

Donc $\sum P(\max_m \beta_{T_{k+1}} |W^d(J_m)| > \delta) < \infty$

et donc $\max_m \beta_{T_{k+1}} |W^d(J_m)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ avec proba 1

D'un autre coté, en remarquant que $\forall \varepsilon > 0$ on a:

$$(2(1-\varepsilon)(T_{k+1}-T_k)^d \log\log (T_{k+1} - T_k))^{1/2}$$

$$\geq (1-(3/4)\varepsilon)(2|a_{T_{k+1}}|[\log \frac{T^d_{k+1}}{|a_{T_{k+1}}|} + \log\log T_{k+1}])^{1/2}$$

Et ceci implique

$$P\left\{\beta_{T_{k+1}} W^d(<T_k,T \quad >)>1-\frac{3}{4}\varepsilon\right\} \geq$$

$$\geq P\left\{W^d(<T_k,T_k \quad) > (2(1-\varepsilon)(T_{k+1}-T_k)^d \log\log(T_{k+1}-T_k))^{1/2}\right\}$$

$$\geq \frac{A_3}{k^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}}$$ A_3 constante positive convenablement choisie.

L'indépendance des $<T_k,T_{k+1}>$ et le lemme de Borel-Cantelli impliquent:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \beta_{T_{k+1}} |W^d(<T_k,T_{k+1}>)| \geq 1 \text{ avec proba } 1.$$

Mais comme :

$$|W^d(<T_{k+1}-a_{T_{k+1}},T_{k+1}>)| \geq |W^d(<T_{k+1},T_k>)|-\sum_{n=1}^{2^d-1}|W^d(J_m)|$$

Ceci prouve le cas où $\frac{a_T^{(i)}}{T} \longrightarrow 1 \ \forall i$. Ceci complète la démonstration du théorème 3.16.

3.5 Discussions supplémentaires sur les grands et les petits accroissements.

Rappel: $W^d(x) = |s|^{-1/2} . W^d(s.x)$, $0 \leq x \leq 1$ $\forall s = (s_1, \ldots, s_d) \geq 0$

Alors avec $h = (h_1, \ldots, h_d)$ on a

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \sup_{J \subseteq <t, t+h>} \alpha_h |W^d(J)| > 1-\varepsilon \right\} \leq C|h|^{-\varepsilon}$$

Ou $\alpha_h = (2|h| [\log|h|^{-1} + \log \log \frac{1}{h})^{-1/2}$

En utilisant la même argumentation que pour la démonstration du théorème. Ceci donne :

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \sup_{J \subseteq < t, t+h>} \frac{|W^d(J)|}{\sqrt{2|h| \log|h|^{-1}}} \leq 1 \text{ avec proba } 1$$

De la même façon on peut montrer que :

$$\underline{\lim}_{|h| \to 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \sup_{J \subseteq < t, t+h>} \frac{|W^d(J)|}{\sqrt{2|h| \log|h|^{-1}}} \geq 1$$

Ces 2 inégalités combinées impliquent le théorème 3.10 (de Pyke-Orey et Pruitt)

Dans ce qui suit on va combiner le module de continuité de P.Lévy et le théorème de Csörgö-Revesz sur les incréments en un seul théorème, c'est à dire qu'on va laisser une partie des coordonnées dans les accroissements tendre vers 0 et le reste non décroissants Ces 2 théorèmes résument ceci.

Considérons $W^2(x) = W^2(x_1, x_2)$ processus de Wiener à 2 paramètres avec $0 \leq x_1 \leq 1$ et $x_2 \geq 0$

On notera J intervalle dans $[0,1]x[0,\infty)$

Théorème 3.19 :

Soit $\mathbf{a_T} = (a_T^{(1)}, a_T^{(2)})$, $\mathbf{T} = (T,T)$ et $T \geq 0$ une $2\text{-}\beta_T$-fonction

tq
$$\frac{a_T^{(1)}}{T} \xrightarrow[T \to \infty]{} 0$$

On pose $b_T = \dfrac{a_T^{(1)}}{T}$; $c_T = a_T^{(2)}$; $\hat{a}_T = (b_T, c_T)$

Soit $\alpha_T = (2|\hat{a}_T|.[\log(T/|\hat{a}_T|) + \log\log T])^{-1/2}$ alors

(3.19.1) $$\overline{\lim_{T \to \infty}} \sup_{0 \leq x \leq (1,T) - \hat{a}_T} \alpha_T |W^2(\langle x, x+\hat{a}_T\rangle)| = 1 \text{ avec proba } 1$$

et (3.19.2) $$\overline{\lim_{T \to \infty}} \sup_{0 \leq x \leq (1,T) - \hat{a}_T} \sup_{J \subseteq \langle x, x+\hat{a}_T\rangle} \alpha_T |W^2(J)| = 1 \text{ avec proba } 1$$

Si en plus on $\lim_{T\to+\infty} \log \frac{|T|}{|a_T|} / \log\log T = \infty$ alors $\overline{\lim}$ peut être remplacée par lim.

Une évidente généralisation de ce théorème est le cas où on considère le processus de Wiener à d-paramètres (d>2).

$W^d(x) = W(x_1,\dots, x_d)$ (d>2) où $(x_1,\dots,x_r) \in [0,1]^r$ et

$$(x_{r+1},\dots,x_d) \in [0,\infty)^{d-r}$$

Pour $1\leq r\leq d$ où $[0,\infty)^0 = \emptyset$

Soit $e_T=(1,1,\dots,T,\dots,T)$ où les r premières coordonnées sont égales à 1 et le reste égal à T ,alors on a :

Théorème (3.20) Soit $a_T= (a_T^{(1)},\dots,a_T^{(d)})$ une d-β_T fonction tq :

$$\frac{a_T^{(i)}}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \quad \text{pour } 1\leq i\leq r \text{ et } C_T^{(j)}= a_T^{(j)} \text{ pour } r+1\leq j \leq d$$

et $\hat{a}_T = (b_T^{(1)},\dots,b_T^{(r)},c_T^{(r+1)},\dots,c_T^{(d)})$.

Alors avec $\alpha_T=(2|\hat{a}_T|[\log(T^{d-r}/|\hat{a}_T|)+\log\log T])^{-1/2}$

On a : $\overline{\lim}_{T\to\infty} \sup_{0\leq x\leq e_T-\hat{a}_T} \alpha_T|W^d((x,x+a_T)|= 1$ avec proba 1. (3.20.1) et

(3.20.2) $\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{0\le x\le e_T - \hat{a}_T} \sup_{J\subseteq\langle x, x+\hat{a}_T\rangle} \alpha_T |W^d(J)| = 1$ avec proba 1

Si en plus $a_T^{(i)}$, $1\le i\le d$, vérifie $\lim_{T\to\infty} \dfrac{\log T/a_T^{(i)}}{\log\log T} = \infty$

Alors $\overline{\lim}$ peut être remplacée par lim.

On prouvera seulement le théorème (3.19) à la lumière du théorème (3.16)

Le théorème (3.19) ne ressemble pas très bien au module de continuité de P.Lévy. Cependant le théorème suivant montre sa ressemblance avec le module de continuité .

Theoreme (3.21)

Soit $W^2(t_1,t_2)$, $0\le t_1\le 1$ et $0\le t_2\le\infty$,processus de Wiener à 2 paramètres.

Supposons que c_T est une β_T - fonction et soit $\hat{h} = (h, c_{1/h})$

Alors

(3.21.1) : $\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le (1,1/h)-\hat{h}} \alpha_{1/h} |W^2(\langle t, t+\hat{h}\rangle)| = 1$ avec proba 1

et

(3.21.2) $\lim_{h\to 0} \sup_{0<t<(1,1/h)-\hat{h}} \sup_{J\subseteq\langle t, t+\hat{h}\rangle} \alpha_{1/h} |W^2(J)| = 1$

avec proba 1

où : $\alpha_{1/h} = 2|\hat{h}|[\log \dfrac{1}{h|h|} + \log\log \dfrac{1}{h}]^{-1/2}$

Le théorème 3.21 peut être généralisé comme suit :

Théorème 3.22: Soit $W^d(t)$, $t_i \in [0,1]$ pour $1 \le i \le r \le d$ et $t_j \in [0,\infty)$ pour $r+1 \le j \le d$, un processus de Wiener à d paramètres .

Supposons que $a_T^{(j)}$, $r+1 \le j \le d$,sont des β_T-fonctions et

$(1,1,\dots,1,a_T^{(r+1)},\dots,a_T^{(d)})$ une d-β_T-fonction .

Soit $\hat{h} = (h,\dots,h,a_{1/h}^{(r+1)},\dots,a_{1/h}^{(d)})$ et $e_h = (1,\dots,1,\frac{1}{h},\dots,\frac{1}{h})$.

Alors :

$$(3.22.1)\quad \lim_{h \to 0} \ \sup_{0 \le t \le e_h - \hat{h}} \alpha_{\frac{1}{h}} |W^d(<t,t+\hat{h}>)| = 1 \quad \text{avec proba 1}$$

$$(3.22.2)\quad \lim_{h \to 0} \ \sup_{0 \le t \le e_h - \hat{h}} \ \sup_{J \subseteq <t,t+\hat{h}>} \alpha_{\frac{1}{h}} |W^d(J)| = 1 \quad \text{avec proba 1.}$$

avec $\alpha_{\frac{1}{h}} = (2|\hat{h}|[\log(h^{r-d}|\hat{h}|^{-1}) + \log\log(\frac{1}{h})])^{-1/2}$

Pour la preuve du théorème 3.19 on utilisera les lemmes suivants:

Lemme 3.23: Soit $a_T, \hat{a}_T$ et α_T comme définies dans le théorème 3.19.

Posons $V(T) = \sup_{0 \le x \le (1,T) - \hat{a}_T} \ \sup_{J \subseteq <x,x+\hat{a}_T>} |W^2(J)|$

Alors on a :

$$\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} \ \alpha_T V(T) \leq 1 \text{ avec proba } 1.$$

Preuve : par le lemme 3.18 on a

$$P(\alpha_T V(T) > 1+\varepsilon) = P(V(T) > |a_T|^{1/2} (2(1+\varepsilon)^2 \log(T/|a_T|)\log T)^{1/2})$$

$$\leq C.\frac{T}{|a_T|} \exp\{-\frac{2(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon} \log(\frac{T}{|a_T|}\log T)\}$$

$$\leq C.(\frac{|a_T|}{T^2})^{\varepsilon}.(\frac{1}{\log T})^{1+\varepsilon} = C.(\frac{|a_T|}{T^2})^{\varepsilon} (\frac{1}{\log T})^{1+\varepsilon}$$

En posant $\theta = 1+\varepsilon$ et $T_k = \theta^k$ on obtient:

$$\sum_k P(\alpha_{T_k} V(T_k) > 1+\varepsilon) \leq \sum_k c \ (\frac{|a_T|}{T^2})^{\varepsilon} . (\frac{1}{k\log\theta}) < \infty$$

et ainsi par le lemme de Borel-Cantelli et $\forall\varepsilon > 0$ on a

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \ \alpha_{T_k} V(T_k) \leq 1+\varepsilon \quad \text{avec proba } 1.$$

Comme $\dfrac{\alpha_T}{\alpha_{T_{k+1}}} \leq \theta$ et $V(T) < V(T_{k+1})$ pour $T_k < T < T_{k+1}$

Choisissons T_k comme dans la démonstration du théorème 3.16 ainsi que Z_k.

On a:

$$P\left(\underset{J \in Z_{T_k}}{\mathrm{Max}} \alpha_{T_k} |W^2(J)| > 1-\varepsilon\right) = P\left(\underset{I \in Z_k}{\mathrm{Max}} \alpha_{T_k} |W^2(I)| > 1-\varepsilon\right)$$

$$= P(B_k > 1-\varepsilon)$$

où $W^2(.)$ est un processus de Wiener sur $(0,+\infty)^2$.

Ainsi $\sum P\left(\underset{J \in Z_{T_k}}{\mathrm{Max}} \alpha_{T_k} |W^2(J)| > 1-\varepsilon\right) = \infty$.

qui implique:

$$\overline{\lim}\, \Gamma(T) \geq \overline{\lim_{k \to \infty}} \underset{J \in Z_{T_k}}{\mathrm{Max}} \alpha_{T_k} |W^2(J)| \geq 1 \quad \text{avec proba } 1.$$

La seconde partie du théorème découle du fait que si $a_T^{(1)}$ vérifie

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\log \frac{|T|}{|a_T|}}{\varepsilon \log \log T} = \infty$$

alors $\sum \exp\left\{ -\left(\frac{n^2}{|a_n|}\right)^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\log n}\right)^{1-\varepsilon} \right\} < \infty$

et ceci veut dire que $\sum P(\Gamma(n) < 1-\varepsilon) < \infty$

D'ou en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on a le résultat.

CHAPITRE 4

LES INCREMENTS DU PROCESSUS DE KIEFER

Introduction :

Une présentation grossière du processus de Kiefer est:Un processus de Kiefer à (d+1) paramètres est un processus Gaussien tq si on fixe les d premiers paramètres,on obtient un processus de Wiener à 1 paramètre et si on fixe le $(d+1)^{ieme}$paramètre,on a un pont brownien à d paramètres.

Définition 4.1:Un processus de Kiefer à (d+1) variables noté $K(x,t), x \in [0,1]^d$ et $t \geq 0$, est un processus Gaussien séparable tq sa covariance est :

$$(4.1.1) \qquad E(K(x,t)K(y,s))=(t\wedge s)\left(\prod_{i=1}^{d} x_i \wedge y_i - x_i \ldots x_d y_1 \ldots y_d\right)$$

$\forall\ (x,t),(Y,s) \in [0,1]^d \times [0,\infty)$

On peut aussi écrire :

$$(4.1.2) \quad K(x,t) = W^{d+1}(x,t) - |x|W^{d+1}(1,t) \quad \forall\ (x,t) \in [0,1]x[0,\infty)$$

avec $W^{d+1}(x,t) = W(x_1,x_2,\ldots,x_d,t)$ processus de Wiener à (d+1) paramètres.

Si $I \subseteq [0,1]^d \times [0,\infty)$ on posera $I= <x,y>x<s,t>$

Un accroissement de K qu'on écrira $\Delta K(I)$ est défini par

$$(4.1.3) \quad \Delta K(I) = K(<x,y>,t) - K(<x,y>,s)$$

$$= W^{d+1}(\langle x,y\rangle,t)-|y-x|W^{d+1}(1,t)$$

$$- W^{d+1}(\langle x,y\rangle,s)+|y-x|W^{d+1}(1,s)$$

où $W^{d+1}(\langle x,y\rangle,t) = W^{d+1}(y,t) + (-1)\sum_{i=1}^{d} W^{d+1}(y_1,\dots,x_i,\dots,y_d,t)+$

$+\dots+(-1)^d W^{d+1}(x,t)$

c'est à dire défini de la même façon que $W^{d+1}(\langle x,y\rangle)$

Les processus de Kiefer tiennent un rôle très important dans les principes d'invariance forts pour les processus empiriques multivariés.Le théorème suivant illustre bien ce rôle.

Théorème 4.2 : On peut construire un espace de probabilité (Ω,A,P) ,une suite de v.a. indépendantes uniformément distribuées sur I^d,et un processus de Kiefer $K(.,.)$ tq :

(4.2.1) $\quad \sup_x |\sqrt{n}\ \alpha_n(x)-K(x,n)| = O(r(n))$ p.s

avec $r(n) = \log^2 n$ si d=1 (Komlos-Major-Tusnady)(1975)

et $r(n) = n^{\frac{d+1}{2(d+2)}}\log^2 n$ $\forall$ d>1 (Csörgö-Revesz)(1976)

Dans ce chapitre,on étudie les propriétés des accroissements du processus de Kiefer à (d+1) variables.

Dans le paragraphe 1 on examine les propriétés des accroissements du processus de Kiefer en fixant les d premiers paramètres c'est à dire la partie de Wiener du processus de Kiefer. Ce résultat est du à Csörgö et Chan [6].
Et dans le paragraphe 2, on discutera sur les propriétés des accroissements du processus de Kiefer à (d+1) paramètres.

4.1- Les accroissements du processus de Wiener comme partie du processus de Kiefer. En fixant x, le processus de Kiefer K(x,t) devient un processus de Wiener.
On va étudier les incréments de ce processus de Wiener lorsqu'on prend le sup pour $x \in [0,1]^d = \langle 0,1 \rangle$

Théorème 4.3: Soit a_T une β_T-fonction. Alors, on a avec probabilité 1

$$(4.3.1) \qquad \overline{\lim_{T \to \infty}} \sup_{0 \le t \le T-a_T} \sup_{x \in [0,1]^d} \alpha_T |K(x,t+a_T)-K(x,t)| = 1$$

et (4.3.2)

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \sup_{0 \le t \le T-a_T} \sup_{0 \le s \le a_T} \sup_{x \in [0,1]^d} \alpha_T |K(x,t+s)-K(x,t)| = 1$$

avec $\alpha_T = \left(\frac{1}{2} a_T [\log \frac{T}{a_T} + \log \log T] \right)^{-1/2}$

Si en plus on a (4.3.3) $\dfrac{\log \frac{T}{a_T}}{\log \log T} \longrightarrow \infty$ pour $T \longrightarrow \infty$

Alors, avec probabilité 1, on a

$$(4.3.4)\quad \lim_{T\to\infty}\ \sup_{0\le t\le T-a_T}\ \sup_{x\in[0,1]^d} \alpha_T |K(x,t+a_T)-K(x,t)|=1$$

et (4.3.5)

$$\lim_{T\to\infty}\ \sup_{0\le t\le T-a_T}\ \sup_{0\le s\le a_T}\ \sup_{x\in[0,1]^d} \alpha_T |K(x,t+s)-K(x,t)|=1$$

Corollaire 4.4: Si on pose $a_T=T$ dans le théorème, on obtient :

$$(4.4.1)\quad \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \sup_{0\le t\le T}\ \sup_{x\in[0,1]^d} \frac{|K(x,t)|}{\sqrt{2T\log\log T}} = 1 \quad \text{avec prob } 1$$

Corollaire 5: Si on pose $a_T=$ [log T] alors on a:

$$(4.5.1)\quad \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \sup_{0\le t\le T-[\log T]}\ \sup_{0\le x\le 1} \frac{|K(x,t+[\log T])-K(x,t)|}{[\log T]} =1$$

avec prob 1

Quelques lemmes avant de prouver le théorème 4.3:

Lemme 4.6: $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ c_1 = c_1(\varepsilon,d)$ constante positive tq

$$(4.6.1)\quad P\left\{ \sup_{x\in[0,1]^d} (K(x,t+h)-K(x,t)) > \lambda \right\} \le C_1 e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2/h}$$

$\forall\ \lambda>0, h>0$ et $t\ge 0$. Donc

$$(4.6.2)\quad P\left\{ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+h)-K(x,t)| > \lambda\sqrt{h} \right\} \le C\, e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2}$$

avec $C=2C_1$

Démonstration: On sait que $\forall t>0; \forall h>0$ on a:

$$K(x,t+h) - K(x,t) \overset{L}{=} K(x,h) \overset{L}{=} \sqrt{h}\, B(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]^d$$

B(x) etant un pont Brownien à d variables.

Les relations4.6.1 et4.6.2 découlent de la proposition suivante:

$\forall\, \varepsilon > 0$ et $d>1$ $\exists$ $C = C(\varepsilon, d) > 0$ constante tq :

$$P\left\{ \sup_{x \in [0,1]^d} |B^d(x)| > \lambda \right\} \leq C(\varepsilon,d)\, e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2} \qquad \forall\, \lambda > 0$$

Donc

$$P\left\{ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+h)-K(x,t)| > \lambda\sqrt{h} \right\} = P\left[\sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,h)| > \sqrt{h} \right]$$

$$= P\left[\sup_{x\in[0,1]} \sqrt{h}\, |B(x)| > \lambda\sqrt{h} \right] \leq C(\varepsilon,d)\, e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2}$$

Lemme 4.7: $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists$ $C_2 = C_2(\varepsilon,d) > 0$ tq

$$(4.7.1) \qquad P\left\{ \sup_{0\leq s\leq h} \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+s)-K(x,t)| > \lambda\sqrt{h} \right\} \leq C_2\, e^{-(2-\varepsilon)^2\lambda^2}$$

$\forall$ $h>0$, $\lambda>0$ et $t\geq 0$

Preuve : Comme $K(x,t)$ est un processus stationnaire et à accroissements indépendants en t, donc il suffira de montrer que:

$$(4.7.2) \qquad P\left\{\sup_{0\le s\le h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,s) > \lambda\sqrt{h}\right\} \le C_2 e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2}$$

$K(x,t)$ est aussi un processus séparable. Donc l'ensemble $D = \bigcup_n D_n$

mesurable et dense; où

$$D_n = \left\{\left(\frac{m_1}{2^n}, \ldots, \frac{m_d}{2^n}, \frac{m_{d+1}}{2^n}\right) : 0\le m_i \le 2^n \ ; \ 1\le i\le d+1 \right\}$$

détermine complètement $K(.,.)$ sur $[0,1]^d \times [0,h]$

Pour n fixé, posons $m=1+ m_1 + m_2 2^n + \ldots + m_{d+1} 2^{nd}$ pour $0\le m_i \le 2^n$ et $1\le i\le d+1$.

On définit $K_m = K\left(\frac{m_1}{2^n}, \ldots, \frac{m_d}{2^n}, \frac{hm_{d+1}}{2^n}\right)$, $K'_m = K\left(\frac{m_1}{2^n}, \ldots, \frac{m_d}{2^n}, h\right)$

et $E_m = \left\{ K_m > \lambda \ ; \ K'_m \le \lambda \ , \text{ pour } m' < m \right\}$ $m=1,2,\ldots,2^{n^{(d+1)}}$

Les E_m sont disjoints et $\bigcup_m E_m = \left\{ \max_{(x,t)\in D_n} K(x,t) > \lambda \right\}$

Soit l'évènement :

$$B_n = \left\{ K_m > \lambda \ , \ m_{d+1} = 2^n \right\} = \left\{ K'_m > \lambda \right\}$$

alors, comme $K'_m - K_m$ est symétrique et indépendant de E_m

$$P\left\{E_m B_n^c\right\} \leq P\left(E_m, K'_m - K_m < 0\right\} = 1/2\ P(E_m)$$

Ainsi $\quad P(E_m) \leq 2P(E_m B_n)$

Comme $\quad B_n \subseteq \bigcup E_m \quad$ on a $\quad P(\bigcup E_m) \leq 2P(B_n)$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on a $\forall\ \lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} K(x,s) > \lambda\right\} \leq 2P\left\{\sup_{x\in[0,1]^d} K(x,h) > \lambda\right\}$$

et en utilisant le lemme (4.6) on a le résultat c'est à dire:

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} K(x,s) > \lambda h^{1/2}\right\} \leq 2P\left\{\sup_{x\in[0,1]^d} K(x,h) > \lambda h^{1/2}\right\}$$

$$= 2P\left\{\sup_{x\in[0,1]^d} B(x) > \lambda\right\} \leq C(\varepsilon,d) e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2}$$

Lemme 4.8 : $\forall\ \varepsilon > 0$ petit , $\exists\ C = C(\varepsilon\ d) > 0$ tq

$$(4.8.1)\quad P\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\ \sup_{0\leq s\leq h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+s)-K(x,t)| > \lambda\sqrt{h}\right\} \leq C\,\frac{T}{h}\, e^{-(2-\varepsilon)\lambda^2}$$

$\forall\ \lambda > 0$ et $h > 0$

Démonstration : Comme $K(x,t) \overset{L}{=} \sqrt{T}\, K(x, \frac{t}{T})\ \forall\ x \in [0,1]^d$ et $0 \le t \le T$, $\not\subset$ il suffira de vérifier (1.7.1) pour T=1.

Soit R le plus petit entier tq $\frac{1}{R} \le \frac{\varepsilon h}{4}$ et m le plus petit entier tq :

$$h \le \frac{m}{k} \le h + \frac{1}{k} \le h(1+\frac{\varepsilon^2}{4}) \le h(1+\frac{\varepsilon}{2})$$

alors :

$$\sup_{0\le t\le 1}\ \sup_{0\le s\le h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+s)-K(x,t)| \le$$

$$\le \max_{0\le n\le R}\ \sup_{1\le s\le \frac{m}{R}}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,\frac{n}{R}+s)-(x,\frac{n}{R}|$$

Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon^2}{2}$ .Comme $\frac{Rh}{m} > \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$, on a

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\ \sup_{0\le s\le h}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,t+s)-K(x,t)| > \lambda\sqrt{h}\right\} \le$$

$$\sum_{n=0}^{R} P\left\{\sup_{0\le s\le \frac{m}{R}}\ \sup_{x\in[0,1]^d} |K(x,\frac{n}{R}+s)-K(x,\frac{n}{R})| > \lambda\sqrt{h}\right\}$$

$$\le (R+1)C_2(\varepsilon',d)\ \exp\left\{-(2-\varepsilon')\lambda^2.[\frac{Rh}{m}]\right\}$$

$$\le (R+1)C_2 \exp\left\{-\frac{(2-\varepsilon')}{(1+\frac{\varepsilon}{2})}\lambda^2\right\} \le Ch^{-1}\exp\left\{-(2-\varepsilon)\lambda^2\right\} \qquad \text{pour } R>2$$

Démonstration du théorème 4.3:

Soit $\varepsilon>0$,on définit :

$$A(T)=\sup_{0\le t\le T-a_T}\ \sup_{0\le s\le T-a_T}\ \sup_{x\in[0,1]^d} \alpha_T|K(x,t+s)-K(x,t)|$$

Choisissons $0<\varepsilon'<2(1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2})$ .Alors $(2-\varepsilon')(1+\varepsilon)^2>2$ et posons

$(2-\varepsilon')(1+\varepsilon)^2= 2+2\delta$, $\delta>0$.Ainsi

$$P\left\{A(T)>1+\varepsilon\right\}\le C(\varepsilon',d)\frac{T}{a_T}\exp\left\{-\log(\frac{T\log T}{a_T})^{1+\delta}\right\}$$

$$\le C(\varepsilon',d)(\frac{a_T}{T})^{\delta}.(\frac{1}{\log T})^{1+\delta}$$

Posons $\theta=1+\varepsilon$ et $T_N=\theta^N$ Alors:

$$\sum P(A(T_N))\le\sum C(\varepsilon',d)(\frac{a_{\theta^N}}{\theta^N})^{\delta}(\frac{1}{N\log\theta})^{1+\delta}<\infty$$

et $\overline{\lim}\, A(T_N)\le 1+\varepsilon$ avec probabilité 1

On a $1\le\dfrac{\alpha_{T_{N+1}}}{\alpha_{T_N}}\le\theta$ pour N assez grand.

Comme $\alpha_{T_N}^{-1}\le\alpha_T^{-1}\le\alpha_{T_{N+1}}^{-1}$ et $\alpha_N^{-1}A(T_N)\le\alpha_T^{-1}A(T)\le\alpha_{T_{N+1}}A(T_{N+1})$

pour $T_N\le T\le T_{N+1}$

On obtient de ces observations:

$$A(T) \leq \frac{\alpha_T}{\alpha_{T_{N+1}}} A(T_{N+1}) \leq (1+\varepsilon)^2 \text{ avec probabilité 1}$$

Ceci nous donne :

$$\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} A(T) \leq (1+\varepsilon)^2 \text{ avec proba 1 } \forall \varepsilon>0$$

c'est à dire : $\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} A(T) \leq 1$ avec proba 1.

D'un autre coté $K(\frac{1}{2},1,\ldots,1,t) \overset{L}{=} \frac{1}{2} W(t)$ pour $0 \leq t \leq \infty$

Aussi $\frac{1}{2}\beta_T = \alpha_T$ avec $\beta_T = (2a_T[\log\frac{T}{a_T} + \log\log T])^{-1/2}$

$$\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \alpha_T |K(\frac{1}{2},1,\ldots,1,t+a_T)-K(\frac{1}{2},1,\ldots,1,t| =$$

$$\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} 2\alpha_T |W(t+a_T)-W(t)| =$$

$$\overline{\lim_{T \longrightarrow \infty}} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \beta_T |W(t+a_T)-W(t)| \geq 1 \text{ avec proba 1}$$

et aussi

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le T-a_T} \alpha_T |K(\tfrac{1}{2},1,\dots,1,t+a_T)-K(\tfrac{1}{2},1,\dots,1,t)| \ge 1$$

avec proba 1 si $\lim_{T\to\infty} \dfrac{\log \frac{T}{aT}}{\log\log T} = \infty$

Ceci termine la démonstration du théorème.

En utilisant une argumentation semblable à celle du parag 3.5 on peut montrer ce qui suit

Théorème 4.9:

Soit $K(.,.)$ un processus de Kiefer:

Alors :

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \sup_{x\in[0,1]} {}^{d} \frac{|K(x,t+h)-K(x,t)|}{\sqrt{h\log(h^{-1})}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

avec proba 1.

Remarque :Le théorème 9 montre que le processus

$$Y(t) = \sup_{0\le x\le 1} K(x,t) \ , \quad t\ge 0$$

est presque surement un processus à valeurs positives,partout continue mais non différentiable.

4.2. Les Δ accroissements du processus de Kiefer.

Dans cette partie, on va montrer que les résultats des théorèmes 3.21. et 3.22 restent vrais si on substitue K à $W^2(.)$ et $W^d(.)$

On a :

Théorème 4.10 : Soit $K(x,t)$, $x \in [0,1]^2$ et $t \geq 0$ un processus de Kiefer à 2 variables et que C_T soit une β_T-fonction .

On définit : (4.10.1)

$$A(h) = \sup_{0 \leq x \leq 1-h} \ \sup_{0 \leq t \leq T-c_{1/h}} \ \sup_{0 \leq y \leq h} \ \sup_{0 \leq s \leq c_{1/h}} |K(\langle x,x+y\rangle,t+s)-K(\langle x,x+y\rangle,t)|$$

Alors on a :

(4.10.2) $\quad \lim_{h \to 0} \alpha_{1/h} A(h) = 1$ avec proba. 1

avec $\quad \alpha_{1/h} = (2h\, c_{1/h}[\log(h^2 c_{1/h})^{-1} + \log\log h^{-1}])^{-1/2}$

Démonstration : On définit (4.10.3)

$$B(h) = \sup_{0 \leq x \leq 1-h} \ \sup_{0 \leq t \leq T-c_{1/h}} \ \sup_{0 \leq y \leq h} \ \sup_{0 \leq s \leq c_{1/h}} |W^2(\langle x,x+y\rangle,t+s)-W^2(\langle x,x+y\rangle,t)|$$

et (4.10.4)

$$C(h) = \sup_{0 \leq t \leq T-c_{1/h}} \ \sup_{0 \leq y \leq h} \ \sup_{0 \leq s \leq c_{1/h}} |y|\ |W^2(1,t+s)-W^2(1,t)|$$

alors $\quad B(h)-C(h) \leq A(h) \leq B(h)+C(h)$

On a par le théorème 3.21.

$$\lim_{h \to 0} \alpha_{1/h}\, B(h) = 1 \text{ avec proba } 1$$

Donc pour montrer le théorème 4.10,il suffira de prouver que

$$\lim_{h \to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} C(h) = 0 \text{ avec proba } 1$$

Posons $F(t) = \sup_{0 \leq t \leq T - C_T} \sup_{0 \leq s \leq C_T} |W^2(1,t+s) - W^2(1,t)|$

et $\beta_T = \left(2C_T \left(\log \frac{T}{C_T} + \log\log T\right)\right)^{-1/2}$

Donc par le théorème de Csörgö-Révész (2.16) sur les incréments du processus de Wiener à 1 paramètre et du fait que :

$$W^2(1,t) \overset{L}{=} W(t) \quad , \; t \geq 0 \text{ on a}$$

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \beta_T F(T) \leq 1 \quad \text{avec proba } 1$$

donc $\overline{\lim_{h \to 0}} \beta_{\frac{1}{h}} F\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1$ avec proba 1

Avec $\alpha_T \leq \sqrt{T}\, \beta_T$ où $\alpha_{\frac{1}{h}} \leq \sqrt{\frac{1}{h}}\, \beta_{\frac{1}{h}}$

Ainsi $\alpha_{\frac{1}{h}} C(h) \leq \sqrt{\frac{1}{h}}\, \beta_{\frac{1}{h}} F\left(\frac{1}{h}\right) \sup_{0 \leq y \leq h} |y| \leq \sqrt{h}\, \beta_{\frac{1}{h}} F\left(\frac{1}{h}\right)$

Ceci donne $\lim\limits_{h \to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} C(h) = 0$ avec proba 1.

Avant de généraliser le théorème précédent on donne :

Lemme 4.11 : Pour $h>0$ posons

$$E(h) = \sup_{0 \le y \le h} \ \sup_{0 \le t \le T-\alpha_T} \ \sup_{0 \le s \le \alpha_T} |y| \, |W^{d+1}(1,t+s) - W^{d+1}(1,t)|$$

où $h = (h,\dots,h)$ et $T = \frac{1}{h}$. Soit α_T définit par

$$\alpha_T = \left(2 \frac{a_T}{T^d} \left[\log\left(\frac{T^{d+1}}{a_T}\right) + \log\log T\right)^{-1/2}$$

alors

$$(4.11.1) \quad \overline{\lim_{h \to 0}} \ \alpha_{\frac{1}{h}} E(h) = 0 \text{ avec proba. } 1$$

avec a_T une β_T-fonction

Preuve : Posons $\beta_T = (2a_T[\log \frac{T}{a_T} + \log\log T])^{-1/2}$ alors :

$$\alpha_T \le T^{\frac{d}{2}} \beta_T$$

On définit pour tout T

$$F(T) = \sup_{0 \le t \le T-\alpha_T} \ \sup_{0 \le s \le a_T} |W^{d+1}(1,t+s) - W^{d+1}(1,t)|$$

Remarque : $W^{d+1}(1,t) \overset{L}{=} W(t) \quad t\geq 0$

théorème de Csörgö-Revesz : On a $\lim_{T\to\infty} \beta_T F(T) \leq 1$ avec proba. 1.

Comme

$$\alpha_{\frac{1}{h}} E(h)\leq |h|\alpha_{\frac{1}{h}} F(\frac{1}{h})\leq |h|(\frac{1}{h})^{d/2}\beta_{\frac{1}{h}} F(\frac{1}{h})\leq |h|^{1/2}\beta_{\frac{1}{h}} F(\frac{1}{h}) \underset{h\to 0}{\to} 0$$

On a donc $\overline{\lim_{h\to 0}} \alpha_{\frac{1}{h}} E(h) = 0$ avec prob 1.

et le lemme 4.11 est prouvé.

En utilisant le lemme 4.11 et le théorème 3.22 on a:

Théorème 4.12 : Soit $h = (h,\dots,h) > 0 \in [0,1]^d$ et C_T une β_T-fonction . On définit : (4.12.1)

$$D(T)= \sup_{0\leq x\leq 1-h} \ \sup_{0\leq t\leq T-c_T} \ \sup_{0\leq y\leq h} \ \sup_{0\leq s\leq c_T} |K(<x,x+y>,t+s)-K(<x,x+y>,t)|$$

où $T=\frac{1}{h}$

Soit $\alpha_{\frac{1}{h}} = (2h^d C_{\frac{1}{h}} [\log(h^d C_{\frac{1}{h}})^{-1} + \log\log \frac{1}{h}])^{-1/2}$

alors on a : (4.12.2) $\lim_{h\to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} D(h) = 1$ avec prob 1.

Démonstration : On définit B(h) comme suit:

$$B(h) = \sup_{0 \leq x \leq 1-h} \ \sup_{0 \leq t \leq T-c_T} \ \sup_{0 \leq y \leq h} \ \sup_{0 \leq s \leq c_T} \left| W^{d+1}(\langle x, x+y \rangle, t+s) - W^{d+1}(\langle x, x+y \rangle, t) \right|$$

On a $\quad B(h) - E(h) \leq D(h) \leq B(h) + E(h)$

ou E(h) est défini comme au lemme 4.11

Le théorème 3.22. et le lemme 4.11 impliquent que :

$$\lim_{h \to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} B(h) = 1 \text{ avec prob } 1$$

et

$$\lim_{h \to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} E(h) = 0 \text{ avec prob } 1$$

C'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \alpha_{\frac{1}{h}} D(h) = 1 \text{ avec prob } 1$$

Ceci complète notre démonstration.

Conclusion

On a étudié les propriétes des accroissements du processus de Wiener à plusieurs dimensions ainsi que ceux du processus de Kiefer.

Dans le chapitre 3, on a étudié les incréments sur des rectangles et toutes les convergences possibles.

De la même façon, on a étudié les incréments du processus de Kiefer au chapitre 4.

Cependant, il y a encore plusieurs problèmes intéressants liés aux propriétes de ces accroissements.Entre autres:

1-On sait que $W^d(.)$ est le processus limite du processus des sommes partielles $Z_n(.)$ (voir théorème 3.5 du chapitre 3) de la distibution uniforme de dimension d.

Supposons que $Z_n(.)$ est le processus empirique de distribution F sur R^d et $F \neq U$. Révész dans [30] , pour d = 2, et pour d > 1 Csörgö et Révész dans [5] montrèrent que Z_n converge vers un processus gaussien dont la covariance est fonction de F.

C'est très différentdu cas à un paramètre ou K(.) ne dépend pas de la distribution.

Pour cette sorte de processus gaussiens il très difficile de définirles accroissements.

Un problème intéressant serait de définir les accroissements de ces processus et de prouver des résultats semblables à ceux des chapitres 3 et 4.

2- Il serait très intéressant de prouver le théorème de Strassen pour une partie du théorème 3.16 ou dans le théorème 2.16.

3-La condition (3.16.3) du théorème 3.16 est suffisante pour changer la $\overline{\lim}$ par lim. Est-elle aussi nécéssaire ? Sinon à quelle condition ?

4-La bibliographie est relativement ancienne car les théorèmes de Kömlos-Major-Tusnady sont optimaux sauf la partie concernant l'approximation par un processus de Kiefer.

REFERENCES

[1] Billingsley,P (1968) "Convergence of Probability Measures" John Wiley,New York.

[2] Chan,Arthur H.C (1975). Some lower bonds for the supremum of the Wiener process over a rectangular region J.Appl.Prob,12,824-830.

[3] Chan,Arthur H.C (1976).Erdös-Rényi type modulus of continuity for Brownian sheets . Studia Sci.Math.Hungar.

[4] Chantson,N.N (1956).Wiener random fields depending of several parameters. Dokl.Akad,Nauk SSSR (N.S) 106,607-609

[5] Chung,K.L (1974)."A course in Probability Theory" ,Seconde Edition ,Academic Press ,New York

[6] Csörgo,M & Chan,A.H.C (1976).On the Erdös-Rényi increments and P.Lévy modulus of continuity of Kiefer process Springer Verlag .Empirical Process,Lecture Note 566,17-32

[7] Csörgo,M & Révész,P (1975).A new method to prove Strassen type laws of invariance principle II Z.W.G 31,261-269.

[8] ------------------ (1975).A strong approximation of the multivariate empirical process. Studia Sci Math Hungar.10 427-434

[9] ----------------- (1979).How big are the increments of a Wiener process ? Stochastic Processes Appl.8.119-129

[10] Doob,J.L (1949).Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.Ann.Math.Statist.20,393-403

[11]--------.(1953)."Stochastic Process",John Wiley,New York

[12] Dvoretsky,A , Erdös,P & Kakutani,S (1961):Nonincreasing everywhere of the Brownian motion process;
4th B.S.M.S.P 2 ,103-116.

[13] Erdös,P & Rényi,A (1970).On a new law of large numbers .
J.d'Analyse Mathématique 13,103-111

[14] Khintchine ,A (1924).Uber einen satz der Wahrschei..
Fondamenta Math 6,9-20

[15] Kiefer,J.(1961).On large deviations of vector chance variables and a law of iterated logarithm.
Pacific J Math. 11,649-660

[16]---------(1972).Skorohod embedding of multivariate rv's and the sample DF.Z.W.G 32, 111-132

[17] Komlös,J.,Major,P & Tusnady,G (1975).An approximation of partial sums of independant rv's and the sample DF I
Z.W.G 32,111-132

[18]------------------------------(1975).An approximation of partial sums of independant rv's and the sample DF II
Z.W.G 34,33-58

[19] Lai,T.L (1974).Limiting theorems for delayed sums.
Ann.Probability 3,432-440

[20] Lévy,P.(1937).Théorie de l'addition des variables aleatoires indépendantes, Gauthier-Villars Paris

[21] Major,P.(1976).The approximation of partial sums of independant rv's
Z.W.G 35 ,213-220

[22] Muller,D.W (1970).On Glivenko-Cantelli convergence. Z.W.G 16,195-210

[23] Neveu,J (1965)."Mathematical Foundations of Calculus of Probability" Holden Day San Francisco

[24] Orey,S & Pruit,W.E (1973).Sample functions of the N-parameter Wiener process.Annal.of Proba.1,138-163

[25] Orey,S & Taylor,S.J.(1974).How often on a Brownian path does the L.I.L fail ?Proc-London Math Soc.(3)28,174-192

[26] Paranjape,S.R & Park,C (1973).Distribution of the supremum of the two parameter Wiener process on the boundary. J.App.Prob 10,875-880

[27] Park,W.J (1970).A multi-parameter Gaussien process. Ann.Math.Statist.41,1582-1595

[28] Pyke,J.(1973).Partial sums of matrix arrays and Brownian sheets.Stochastic Analysis.Kendall & Harding.John Wiley New York

[29] Rényi,A (1970)."Fondations of Probability" Holden Day San Francisco

[30] Révész,P (1976).Three theorems on the multivariate empirical process. Springer Verlag Empirical Process.Lecture Note 566.

[31] Révész,P (1976).On strong approximation of multidimensional empirical process.Ann. of Proba.4,729-743

[32] Wichura,M.J (1973).Some Strassen-type laws of the L.I.L for multiparameter stochastic processes with independent increments.Ann.of Proba.1,272-296

[33] Wiener,N (1923).Differential space.J.Math.Physics M.I.T 2,131-174

[34] Yeh,J (1960).Wiener measure in the space of functions of two variables.
Trans.Amer.Math.Soc.95,433-450