

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



Université Saad Dahlab, Blida 1
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Projet de Fin d'Etude Master en mathématique
Option : recherche opérationnelle

Thème :

Optimisation unidimensionnelle et
multidimensionnelle du rendement d'un panneau
photovoltaïque.

Réalisé par :

MOSTEFAOUI Abir & FERHAT TALEB Nadjet

Président: Mr. CHELLALI Mustapha

Examineur: Mr. BOUDJEMAA Redouane

Promoteur: Mr. BENDRAOUCHE Mohamed

Encadreur: Mr. BELMILI Hocine

Co-promoteur: Mr. DOUMAZ Toufik

Année universitaire : 2020/2021

Remerciement

Avant tout nous tenons nos remerciements à Allah de nous avoir donné la force et le courage.

Aussi, nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr.BENDRAOUCHE pour son aide à réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier Mr.DOUMAZ pour les conseils précieux qu'il nous a apporté. Nous restons et nous resterions très reconnaissantes.

Nous tenons à remercier Mr.BELMILI pour sa contribution à l'aboutissement de ce travail, qu'il trouve ici notre profonde gratitude.

Aussi, nous remercions les membres de jury Mr.CHELLALI et Mr.BOUDJEMAA d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail a tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

* A ma mère

J'espère qu'elle le trouve récompensant de tous les sacrifices qu'elle a consenti pour moi.

* A mon père

En témoignage de ma sincère gratitude pour ses sacrifices qu'il a consenti pour moi et pour toute la famille.

*A mes sœurs et frères

Qu'ils trouvent toute ma profonde affectation et mes profondes considérations.

* A tous mes amis

En témoignage de mon amitié et mon attachement.

Résumé

L'énergie photovoltaïque est une source importante d'énergie renouvelable. Cependant, leur système de conversion d'énergie en électricité souffre souvent d'un rendement faible, dépend aux variations des conditions météorologiques .

A cet effet, dans le présent travail l'objectif est de réaliser une optimisation assurant de trouver le rendement optimal de la cellule à faire simultanément varier plusieurs paramètres physiques et géométriques de la cellule solaire.

Mots clés : Photovoltaïque, optimisation.

Abstract

Photovoltaic energy is an important source of renewable energy. However, their energy to electricity conversion system often suffers from a low efficiency, the maximum power point of depends on weather and load variations.

For this purpose, in the present work we are interested in the conversion performance of conversion of solar cells. The goal is to achieve an optimization that is to find the optimal performance of the cell to simultaneously vary multiple physical and geometric parameters of the solar cell.

Keywords: Photovoltaic, optimization.

ملخص

تعد الطاقة الكهروضوئية مصدرًا مهمًا للطاقة المتجددة. ومع ذلك ، فإن نظام تحويل الطاقة الشمسية إلى الطاقة الكهروضوئية لكن هذا نظام غالبا ما يعاني من نقص في المردود ، وايضا النقطة القصوى للطاقة تتغير بتغير الطقس أو الاحمال و لهذا نحن مهتمون بأداء التحويل لتحويل الخلايا الشمسية. والهدف هو تحقيق تحسين والعثور على الأداء الأمثل للخلية و هذا لمحاكاة التغيرات المتعلقة بالظروف المناخية للخلية الشمسية.

الكلمات المفتاحية: الطاقة الكهروضوئية، تحسين.

Table des matières

Introduction générale.....	1
Généralités	
1.Introduction.....	2
2.Description d'un problème d'optimisation	2
3.Rappels et notations de calcul différentiel	4
4.Convexité	4
5.Existence et unicité	7
6.Conditions d'optimalité.....	7
Quelque méthodes d'optimisation	
1.Introduction	12
2.Méthode d'optimisation unidimensionnelle	12
2.1 Méthode de dichotomie	13
2.2 Méthode de section dorée	14
3. Méthodes d'optimisation multidimensionnelles.....	19
3.1 Les méthodes de descentes.....	19
3.2 Méthode de Newton	26
Energie solaire photovoltaïque	
1. Introduction	34
2. Historique de l'énergie photovoltaïque	34
3. Rayonnement solaire	35
3.1. Le soleil	35
3.2. L'atmosphère	36
3.3. Le spectre solaire	36
4. Déclinaison de solaire	37
5. Principe de la conversion photovoltaïque	38
6. Cellules photovoltaïque ou photopile	39
6.1. Définition.....	39
6.2. Caractéristique d'une cellule photovoltaïque	39
6.3 Influence des différents paramètres sur une cellule photovoltaïque.....	40
7. Modélisation des cellules photovoltaïque	41
8. Avantages et inconvénients de l'énergie photovoltaïque.....	46
8.1. Avantages.....	46
8.2.Inconvénients.....	46
9. Conclusion	46
Optimisation de la puissance	
1.Introduction.....	48
2..Modélisation mathématique	48
3.Optimisation de la puissance par les méthodes de Newton, Dichotomie	49

4.Le nouveau modèle	53
Conclusion générale.....	57
Références	

Liste des figures

Figure 1.1 : Exemple de minima et de maxima locaux et globaux pour la fonction $f: x3e^{-x^2} e^{-(x-3)^2}$..	2
Figure 1.2 : pour la fonction $f: x \rightarrow \cos(x)$, il existe une infinité de minima et maxima globaux.....	3
Figure 1.3 : pour la fonction $f: x \cos(x)$, il existe une infinité de minima et maxima locaux mais aucun minimum ou maximum global.....	3
Figure 1.4 : un ensemble convexe et non convexe	4
Figure 1.5 : L'ensemble de X.....	5
Figure 1.6 : fonction convexe et non convexe.....	5
Figure 1.7 : le graphe de x^2 et x^3	6
Figure 1.8 : le graphe de $f(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4$	8
Figure 1.9 : le graphe de $f(x_1, x_2) = 50x_1^2 - x_2^3$	9
Figure 1.10 : le graphe de $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 \cos x_2$	10
Figure 2.1 : fonction unimodale.....	12
Figure 2.2 : Évaluation de la fonction objective en deux points intermédiaires.....	14
Figure 2.3 : le cas où $f(a_1) < f(b_1)$; le minimiseur $x^* \in [a_0, b_1]$	15
Figure 2.4 : Trouver la valeur de ρ résultant en une seule nouvelle évaluation de f	16
Figure 2.5 : Itérations des algorithmes de gradient à pas fixe et optimal, générées à partir du point (7,1.5).....	24
Figure 2.6 : Solutions du système d'équations.....	29
Figure 2.7 : Fonctionnement de l'algorithme de Newton avec $x^{(0)} = [1 \ 5]$	31
Figure 2.8 : La fonction : $f(x) = e^x - 2 \cdot \cos(x)$	32
Figure 3.1 : schème de la conversion photovoltaïque.....	35
Figure 3.2 : Répartition spectrale du rayonnement solaire hors atmosphère.....	37
Figure 3.3 : courbe de déclinaison du soleil.....	38
Figure 3.4 : Caractéristique $I(V)$ et $P(V)$ MPP d'une cellule PV.....	39
Figure 3.5 : influence de l'éclairement sur la caractéristique $I(V)$	40
Figure 3.6 : influence de l'éclairement sur la caractéristique $P(V)$	40
Figure 3.7 : Influence de la température sur la caractéristique $I(V)$	41
Figure 3.8 : circuit équivalent simplifié d'une cellule solaire	42
Figure 3.9 : schéma équivalent d'une cellule solaire.....	43
Figure 3.10 : schéma équivalent a une diode sans résistance shunt.....	44
Figure 3.11 : schéma équivalent a deux diodes.....	44
Figure 3.12 : schéma équivalent a deux diodes sans résistance shunt.....	45
Figure 3.13 : schéma bloc d'une cellule PV.....	45
Figure 4.1 : la représentation graphique de la fonction $g(x, y)$	51
Figure 4.2 : la représentation graphique de la fonction $g(x, y)$	52

Figure 4.3 : les graphes de la puissance P et de courant I en fonction de tension V.....	55
Figure 4.4 : Graphe de la puissance (courbe noir) et le graphe approximatif (courbe rouge) en fonction de la tension.	55

Notations

$f(.)$	Fonction objectif.
$\ \cdot\ $	Norme d'un vecteur.
$x = (x_1, \dots, x_n)^t$	Vecteur d'éléments en colonne.
$\langle \cdot \rangle$	Produit scalaire canonique.
x^t	Transposée d'un vecteur x .
F	Gradient de f .
$M_{m,n}$	Matrice de m ligne et n colonne.
$C(R^n, R)$	L'espace des fonctions continues de R^n dans R .
x^*	$l = \min f(x)$
PV	Photovoltaïque.
GPV	Générateur photovoltaïque.
K	Constant de Boltzmann.
R_s	Résistance série.
R_{sh}	Résistance shunt.
I	Le courant fourni par la cellule.
I_0	Le courant de saturation de la diode.
I_{ph}	Le photo-courant.
I_d	Courant de diode.
I_s	Courant inverse de saturation de la diode.
q	Charge d'électron.
T	La température de cellule en Kelvin.
V	Tension aux bornes de la cellule.
E	Ensoleillement dans le plan de la cellule (W/m ²).

Introduction générale

Introduction générale

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou à maximiser une fonction sur un ensemble, au sens d'un critère quantitatif donné.

L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle, dans les mathématiques appliquées (fondamentales pour l'industrie et l'ingénierie), en analyse et en analyse numérique, en statistique pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution, pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, ou encore en théorie du contrôle et de la commande.

En pratique, la résolution d'un problème d'optimisation mathématique consiste à trouver la meilleure solution à un problème qu'on a su préalablement exprimer sous une forme mathématique particulière qui fait intervenir un ou plusieurs critères. Ce ou ces critères sont exprimés sous la forme d'une fonction mathématique, appelée souvent fonction objectif.

La solution optimale ou meilleure solution correspond à trouver une valeur extrême, appelée aussi extremum – c'est à dire un maximum ou un minimum – à cette fonction objective. L'optimisation se rapproche donc des calculs d'extremum de fonctions. Un problème d'optimisation peut par exemple consister à chercher le maximum du rendement d'une unité de production industrielle, la distance maximale parcourue par un véhicule pour une quantité de carburant donnée, le nombre maximal de clients servis à un guichet dans un intervalle de temps fixé, la résistance mécanique maximale d'une pièce produite, etc. Un problème d'optimisation peut également consister à chercher le minimum des coûts de production d'une usine, à minimiser les pertes thermiques d'un procédé industriel, à identifier le temps de fabrication minimal, etc. Dans tous ces exemples, il est nécessaire d'avoir modélisé (c'est à dire mis en équations) la grandeur qu'on cherche à minimiser ou maximiser. En fait, on retrouve des problèmes d'optimisation dans de nombreuses applications telles que les problèmes de conception, d'optimisation des conditions de fonctionnement de procédés, d'ordonnancement, de planification de production, de transport, de localisation, mais également dans les domaines économiques et financiers, comme la gestion de portefeuilles.

Dans ce mémoire, notre attention est portée sur l'étude de certaines méthodes d'optimisation unidimensionnelles et multidimensionnelles qu'on va les appliquer pour chercher le maximum du rendement d'un panneau photovoltaïque.

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

1.Introduction

Dans ce chapitre on commence par donner des notions mathématiques fondamentales, on définit et on introduit les outils fonctionnels de base nécessaires pour l'optimisation sans contraintes, la notion de solution locale et quelques éléments d'analyse convexe. Ainsi, nous étudierons quelques résultats théoriques (existence et unicité de solutions), aussi, les points stationnaires et leurs natures.

2 Description d'un problème d'optimisation [1]

Tous les problèmes d'optimisation peuvent être exprimés de la façon suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1.1)$$

Sous la contrainte : $x \in X$, où X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

On pourra écrire aussi $\min_{x \in X} f(x)$.

Les variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ sont appelées "variables d'optimisation" ou variables de décision. La fonction $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objectif et l'ensemble X ensemble des contraintes. Le problème (1.1) est dit réalisable si $X \neq \emptyset$.

Définition 1.1 Soit $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

• $x \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum local de f sur X si

$$x \in X \text{ et } \exists r > 0 / \forall y \in X \cap B(x, r), f(x) \leq f(y). \quad (1.2)$$

où B est la boule fermée de centre x et de rayon r .

On dit alors que x est **un minimum local** de f sur X .

• $x \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum global de f sur X ssi

$$x \in X \text{ et } \forall y \in X \quad f(x) \leq f(y) \quad (1.3)$$

On dit alors que x est **un minimum global** de f sur X .

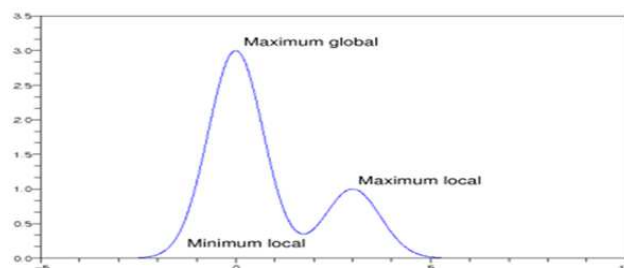


Figure 1.1 : Exemple de minima et de maxima locaux et globaux pour la fonction $f: x \rightarrow 3e^{-x^2} + e^{-(x-3)^2}$.

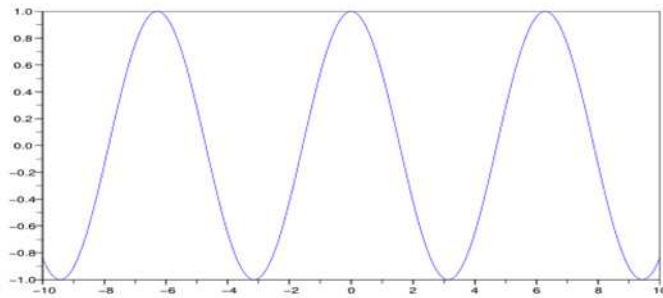


Figure 1.2 : pour la fonction $f: x \rightarrow \cos(x)$, il existe une infinité de minima et maxima globaux

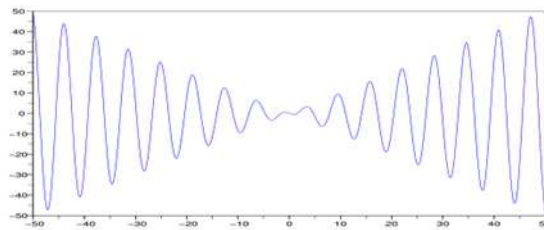


Figure 1.3 : pour la fonction $f: x \cos(x)$, il existe une infinité de minima et maxima locaux mais aucun minimum ou maximum global.

Résoudre le problème (1.1) revient à chercher des points de minimum local (ou global, c'est encore mieux !) au sens des définitions précédentes.

Les notions de maximum local et global sont définies de façon tout à fait similaire. En fait, on peut facilement démontrer que les problèmes (avec ou sans contraintes) :

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{et} \quad \max_{x \in X} -f(x)$$

sont équivalents dans le sens où ils ont même ensemble de solutions et :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\max_{x \in \mathbb{R}^n} -f(x) \quad \text{Ou encore} \quad \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\min_{x \in \mathbb{R}^n} -f(x)$$

Ainsi la recherche d'un maximum pouvant se ramener à la recherche d'un minimum.

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

3. Rappels et notations de calcul différentiel

Définition 1.2 Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^n si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur \mathbb{R}^n . On définit dans ce cas le gradient de f

en un point x de \mathbb{R}^n par:
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Définition 1.3 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur \mathbb{R}^n . On définit dans ce cas la matrice Hessienne de f la matrice carrée d'ordre n : $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i x_j}(x) \right)$

Remarque : cette matrice est symétrique d'après un résultat de Mathématiques.

Exemple 1.1 : [3]

Fonction d'une variable :

- Fonction : $f(x) = -x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 6x$
 - Gradient : $\nabla f(x) = f'(x) = -4x^3 + 36x^2 - 94x + 60$
 - La matrice hessienne : $\nabla^2 f(x) = f''(x) = -12x^2 + 72x - 94$

Fonction de deux variables :

- Fonction : $100(x_2 - x_1^2) + (1 - x_1)^2$
 - Gradient : $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix}$
 - Hessien : $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -400(x_2 - 3x_1^2) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$

4. Convexité [6][2]

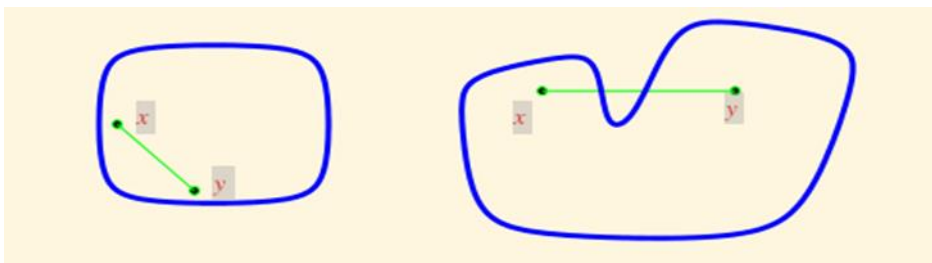


Figure 1.4 : un ensemble convexe et non convexe

Définition 1.4 : Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in K^2$ et $\forall \lambda \in [0,1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

Exemple 2 : Ensemble : $X = \{(x_1, x_2) \text{ avec } x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \rightarrow \text{convexe}$

Ensemble : $X = \{(x_1, x_2) \text{ avec } x_1^2 + x_2^2 \geq 1\} \rightarrow \text{non convexe}$

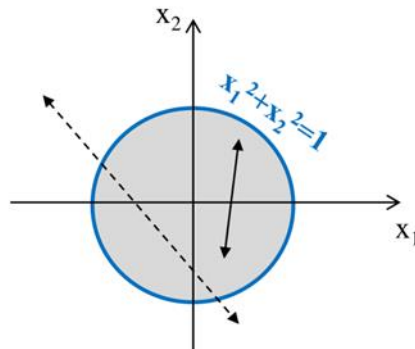


Figure 1.5 : L'ensemble de X

Cette définition peut s'interpréter en disant que le segment reliant x et y doit être dans K .

Elle se généralise de la façon suivante : on dira qu'un vecteur y est une combinaison convexe des points $\{x^1, \dots, x^p\}$ si on a $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i$, avec $\lambda \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

On peut citer quelques cas particuliers : \mathbb{R}^n tout entier est un ensemble convexe, de même qu'un singleton $\{a\}$.

Proposition 1.3 Soit une famille $\{K_i\}_{i=1 \dots p}$ d'ensembles convexes et

$S = \bigcap_{i=1}^p K_i$. Alors S est convexe.

Fonctions convexes On dit qu'une fonction $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un ensemble convexe K est convexe si elle vérifie $\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

On dira que f est strictement convexe si $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y, \forall \lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.10)$$

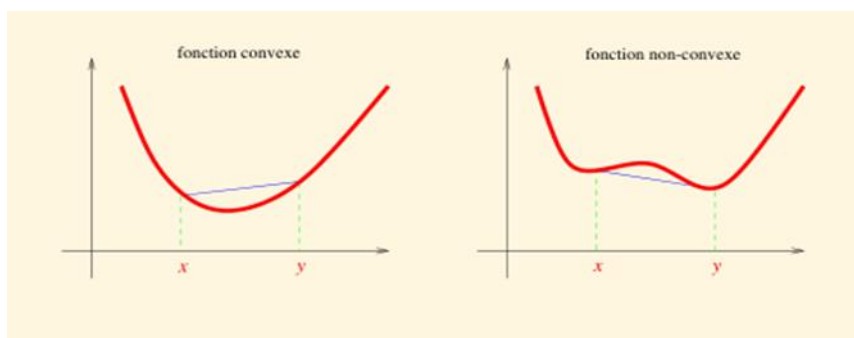


Figure 1.6 fonction convexe et non convexe

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

Définition 1.5 : A est une matrice carré d'ordre n

A est dite semi définie positive sur \mathbb{R}^n si $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^t Ax \geq 0$.

A est dite définie positive sur \mathbb{R}^n si $\forall x \in (\mathbb{R}^n)^*, x^t Ax > 0$.

Dans le cas où $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a le résultat suivant :

Propriété 1.1 Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois continûment dérivable sur K convexe on a:

1) f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0, \forall x \in K$

2) et strictement convexe si et seulement si

Si $f''(x) > 0, \forall x \in K$ alors f est strictement convexe sur \mathbb{R} .

Ce résultat se généralise pour $n > 1$: le résultat suivant fait le lien entre le hessien et la propriété de convexité :

Théorème 1.3 Soit $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 on a :

1) f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive sur K

2) si $\nabla^2 f(x)$ est définie positive sur K alors f est strictement convexe.

Exemple 1.3 :

Fonction : $f(x) = x^2$

$$f''(x) = 2 \rightarrow \text{convexe sur } \mathbb{R}$$

Fonction : $f(x) = x^3$

$$f''(x) = 6x \rightarrow \text{convexe sur } \mathbb{R}^+$$

\rightarrow non convexe sur \mathbb{R}^-

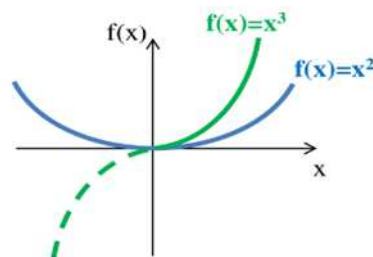


Figure 1.7 : le graphe de x^2 et x^3

Propriété 1.2 Soit f une fonction quadratique c'est à dire de la forme

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x, \text{ où } A \text{ est symétrique.}$$

alors f est convexe si et seulement si A est semi définie positive, et strictement convexe si A est définie positive.

Cela provient du fait que $\nabla^2 f(x) = A$.

Dans le cas où la fonction f n'est supposée qu'une fois différentiable (c'est à dire de classe C^1 , on a le résultat suivant :

Théorème 1.4 Soit $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction une fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \forall (x, y) \in K^2. \quad (1.11)$$

La fonction f est strictement convexe si

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \forall (x, y) \in K^2, x \neq y. \quad (1.12)$$

5. Existence et unicité [7]

Théorème 1.5 Soit f une fonction continue sur un sous-ensemble C fermé de \mathbb{R}^n . On suppose que

- ou bien C est borné,
- ou bien C et non borné et $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, alors f possède un minimum sur C .

La convexité joue un rôle extrêmement important en optimisation puisqu'elle permet d'étudier en général l'unicité des solutions d'un problème d'optimisation.

Proposition 1.4 Soit f une fonction convexe définie sur un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n . Alors,

- tout minimum local de f sur C est un minimum global,
- si f est strictement convexe, il y a au plus un minimum global.

6. Conditions d'optimalité [4]

Nous supposons que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et on considère le problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. On notera x^* un minimum (local) de f .

Conditions nécessaires d'optimalité locale du 1er ordre :

Théorème 1.6 : Soit x^* , un minimum local du problème : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

Si f est de classe C^1 , Alors, x^* vérifie nécessairement $\nabla f(x^*) = 0$.

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

Un tel point satisfaisant les conditions d'optimalité du premier ordre est appelé **point stationnaire** (ou point critique).

Exemple 1.4 :

- La fonction $x \rightarrow x^2$ admet un point critique en $x = 0$, qui est aussi minimum local.
- La fonction $x \rightarrow -x^2$ admet un point critique en $x = 0$ qui est aussi maximum local.
- La fonction $x \rightarrow x^3$ admet un point critique en $x = 0$ qui n'est ni minimum local ni maximum local.
- La fonction $(x, y) \rightarrow (x^2, y^2)$ admet un point critique en $(x, y) = (0, 0)$ qui n'est ni minimum local ni maximum local, c'est ici un point-selle.

Cependant, la condition du premier ordre joue un rôle central en optimisation numérique : elle permet de sélectionner un certain nombre de points candidats à être des extrema locaux, même s'il faut vérifier que les points critiques que l'on a sélectionnés sont bien des minimas locaux.

• Condition Nécessaire d'optimalité locale du second ordre :

Théorème 1.7 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n , de classe C^2 , si x^* est un minimum local de f alors

- 1) $\nabla f(x^*) = 0$
- 2) la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive

Exemple 1.5 : [8]

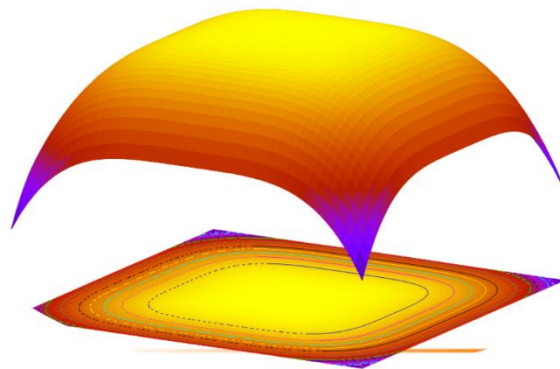


Figure 1.8 : le graphe de $f(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4$

$x^* = (0, 0)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4x_1^3 \\ -4x_2^3 \end{pmatrix}$$

Et $\nabla f(0, 0) = 0$

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 \\ 0 & -12x_1^2 \end{pmatrix}$$

Et $\nabla^2 f(0,0)$ est semi défini positif .

$(0,0)$ n'est pas un minimum local

Exemple 1.6 :

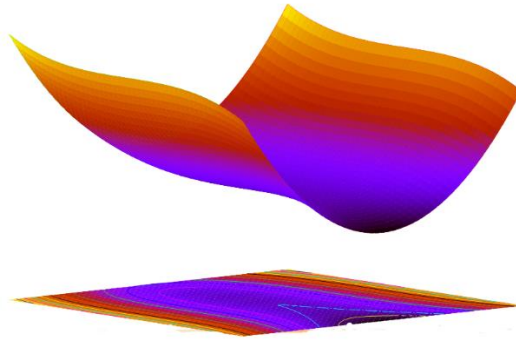


Figure 1.9 : le graphe de $f(x_1, x_2) = 50x_1^2 - x_2^3$

$x^* = (0,0)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 100 x_1 \\ -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Et $\nabla f(0,0) = 0$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -6x_2 \end{pmatrix}$$

Et $\nabla^2 f(0,0)$ est semi défini positif .

- Considérons la direction $\mathbf{d} = (0, 1)^T$ en $(0,0)$.

- Avançons d'un pas α . On obtient

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } f \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = -\alpha^3 < 0 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ n'est pas un minimum local.

- Considérons la direction $\mathbf{d} = (0, -1)^T$ en $(0,0)$.

- Avançons d'un pas α . On obtient

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } f \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha^3 > 0 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

$(0,0)$ est point selle.

Conditions suffisantes d'optimalité locale du 2nd ordre :

Théorème: Soit une fonction f de classe C^2 sur \mathbb{R}^n . On suppose que $\nabla f(x^*) = 0$ et que $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive, Alors, x^* est un minimum local de f .

Exemple 1.7 :

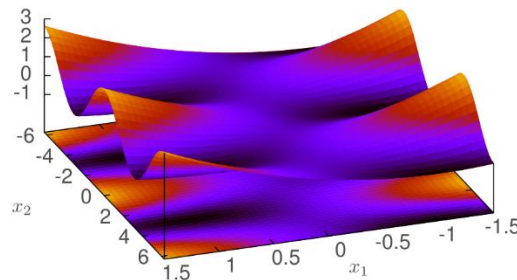


Figure 1.10 : le graphe de $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 \cos x_2$

Utilisons les conditions d'optimalité pour identifier les minimas locaux

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + \cos x_2 \\ -x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

Le gradient s'annule pour

- $x_k^* = ((-1)^{k+1}, k\pi)^T, k \in \mathbb{Z}$,
- $\bar{x}_k = (0, \frac{\pi}{2}, k\pi)^T, k \in \mathbb{Z}$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin x_2 \\ -\sin x_2 & -x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_k^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}_k) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

x_k^* vérifient les conditions suffisantes d'optimalité pour tout k

\bar{x}_k ne vérifient pas les conditions suffisantes d'optimalité pour aucun k .

Dans le cas où f est convexe, on a le résultat suivant:

Chapitre 1 : Généralités sur l'optimisation

Cas d'une fonction convexe :

Proposition 1.5 : Soit f une fonction convexe, définie sur \mathbb{R}^n de classe C^1 et soit x^* de \mathbb{R}^n un minimum local de f . Alors x^* est un minimum global de f si et seulement $\nabla f(x^*) = 0$. Si de plus f est strictement convexe, x^* est l'unique minimum global de f .

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes d'optimisation les plus utilisées dans la pratique, deux classes d'algorithmes sont présentées : les algorithmes unidimensionnels et les algorithmes multidimensionnelles. La première classe présente les algorithmes locaux et la deuxième classe présente les algorithmes uniquement globaux.

2. Méthode d'optimisation unidimensionnelle

L'optimisation unidimensionnelle est l'étude de minimiser ou de maximiser des fonctions de la forme suivante : minimiser $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, où la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire d'une seule variable. L'objectif est de trouver la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimale.

Nous considérerons les problèmes de minimisation en sachant que minimiser $f(x)$ est identique à maximiser $-f(x)$. Les méthodes d'optimisation unidimensionnelle sont simples et faciles à comprendre. Une compréhension claire de cette méthode sera utile pour apprendre les algorithmes complexes permettant de résoudre des problèmes d'optimisation multidimensionnels sans contraintes. Au départ, on appelle fonction f la fonction objectif, qui est continue et unimodale. Cette fonction n'a qu'un seul minimiseur sur l'intervalle donné $[a, b]$ où a est une limite inférieure et b une limite supérieure. Cet intervalle est appelé niveau initial d'incertitude. [9]

Définition 2.1 : fonction unimodale : une fonction $f(x)$, définie dans $[a ; b]$, est dite unimodale si pour $x \in [a ; x^*]$, $f(x)$ est monotone décroissante, et pour $x \in [x^* ; b]$, $f(x)$ est monotone croissante. [10]

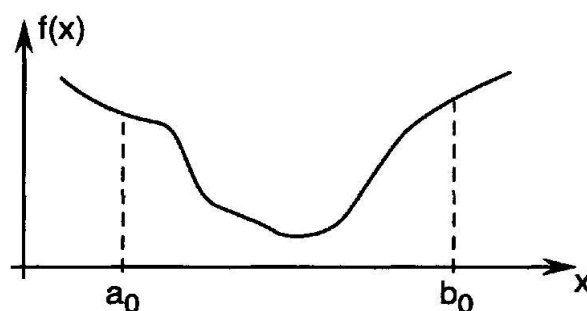


Figure 2.1 : fonction unimodale.

Une fonction unimodale sur $[a, b]$ a donc la propriété d'avoir un minimum locale unique, mais elle n'est pas nécessairement dérivable, ni même continue. [11].

2.1 Méthode de dichotomie

C'est une méthode d'optimisation unidimensionnelle qui ne suppose pas la dérivabilité ni même la continuité de la fonction étudiée, mais seulement son unimodalité. Elle s'applique à une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$, l'intervalle duquel nous savons qu'elle possède un minimum unique. [12]

La méthode de dichotomie ou méthode de la bisection est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

Dans cette méthode on suppose que l'on sait calculé la valeur de la fonction objectif f en cinq points de l'intervalle $[a, b]$: $a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b$, comme la fonction est unimodale, seuls les cinq cas suivants peuvent se présenter : [12]

i) $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$ alors on peut éliminer x_3, x_4, x_5 , car le minimum est forcément entre x_1 et x_2 .

ii) $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$ alors on peut éliminer x_4, x_5 , car le minimum est forcément entre x_1 et x_3 .

iii) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$ alors on peut éliminer x_1, x_5 , car le minimum est forcément entre x_2 et x_4 .

iv) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) < f(x_5)$ alors on peut éliminer x_1, x_2 , car le minimum est forcément entre x_3 et x_5 .

v) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5)$ alors on peut éliminer x_1, x_2 et x_3 car le minimum est forcément entre x_4 et x_5 .

Le principe de la méthode de dichotomie réside dans les choix des points x_2, x_3 et x_4 . Pour ce faire, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en quatre quarts avec :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_5}{2}, \quad x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad x_4 = \frac{x_3 + x_5}{2}.$$

Ce qui revient à enlever au moins deux quarts. On a réduit $[a, b]$ de moitié (dichotomie = coupe en deux) l'intervalle de départ.

Exemple 2.1 : soit f une fonction définie sur I par :

$$f(x) = |x| \text{ avec } I = [-7, 2],$$

Par l'application de méthode de dichotomie on a :

$$f(x_1) = -7, f(x_5) = 2, f(x_3) = -\frac{5}{2}, f(x_2) = -\frac{19}{4}, f(x_4) = -\frac{1}{4}$$

Donc : $f(x_5) > f(x_4) > f(x_3) > f(x_2) > f(x_1)$

D'après la comparaison on peut éliminer x_1 et x_2 ; C'est à dire le minimum est forcément entre x_3 et x_5

2.2 Méthode de section dorée

Considérons une fonction unimodale f d'une variable et l'intervalle $[a_0, b_0]$. Si nous évaluons f en un seul point intermédiaire de l'intervalle, nous ne pouvons pas réduire l'intervalle dans lequel nous savons que le minimiseur est situé. Nous devons évaluer f en deux points intermédiaires, comme illustré à la (figure 2.2). Nous choisissons les points intermédiaires de manière à ce que la réduction de l'intervalle soit symétrique, c'est-à-dire que : [13]

$$a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = \rho(b_0 - a_0)$$

Ou $\rho < 1/2$.

On évalue ensuite f aux points intermédiaires. Si $f(a_1) < f(b_1)$, alors le minimiseur doit se trouver dans l'intervalle $[a_0, b_1]$. Si, par contre, $f(a_1) \geq f(b_1)$, alors le minimiseur est situé dans l'intervalle $[a_1, b_0]$ (figure 2.3).

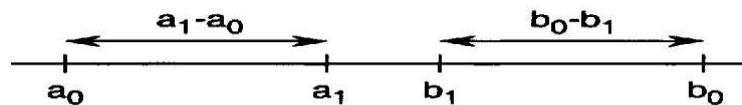


Figure 2.2 : Évaluation de la fonction objectif en deux points intermédiaires

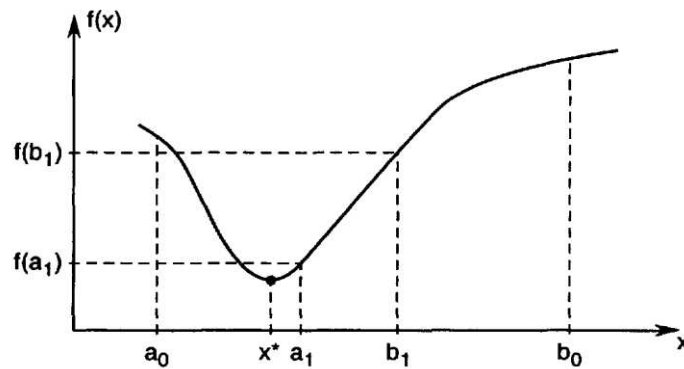


Figure 2.3 : le cas où $f(a_1) < f(b_1)$; le minimiseur $x^* \in [a_0, b_1]$

En commençant par la plage d'incertitude réduite, nous pouvons répéter le processus et trouver de la même manière deux nouveaux points, disons a_2 et b_2 en utilisant la même valeur de $\rho < 1/2$ que précédemment. Cependant, nous voudrions minimiser le nombre d'évaluations de la fonction objectif tout en réduisant la largeur de l'intervalle d'incertitude. Supposons, par exemple, que $f(a_1) < f(b_1)$, comme dans la (figure 2.3). Nous savons alors que $x^* \in [a_0, b_1]$. Parce que a_1 est déjà dans l'intervalle d'incertitude et que $f(a_1)$ est déjà connue, nous pouvons faire coïncider a_1 avec b_2 . Ainsi, une seule nouvelle évaluation de f à a_2 serait nécessaire. Pour trouver la valeur de ρ qui ne donne lieu qu'à une seule nouvelle évaluation de f (la figure 2.4).

Sans perte de généralité, imaginez que l'intervalle original $[a_0, b_0]$ est de longueur unitaire. Alors, pour n'avoir qu'une seule nouvelle évaluation de f , il suffit de choisir ρ de telle sorte que :

$$\rho(b_1 - a_0) = b_1 - b_2.$$

Parce que $b_1 - a_0 = 1 - \rho$ et $b_1 - b_2 = 1 - 2\rho$ nous avons $\rho(1 - \rho) = 1 - 2\rho$.

Nous écrivons la fonction quadratique ci-dessus de ρ comme $\rho^2 - 3\rho + 1 = 0$.

Les solutions sont $\rho_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\rho_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Parce que nous avons besoin $\rho < 1/2$ nous prenons $= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$.

Observez cela $1 - \rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, et $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1-\rho}{1}$, c'est $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1-\rho}{1}$.

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Ainsi, la division d'un intervalle dans le rapport de ρ à $1 - \rho$ a pour effet que le rapport du segment le plus court au plus long est égal au rapport du plus long à la somme des deux. Segment le plus court par rapport au plus long est égal au rapport du plus long à la somme des deux. Les géomètres de la Grèce antique appelaient cette règle le nombre d'or. L'utilisation de cette règle du nombre d'or signifie qu'à chaque étape de la réduction de la plage d'incertitude (à l'exception de la première), la fonction objective f ne doit être évaluée qu'en un seul nouveau point. La plage d'incertitude est réduite par le rapport $1 - \rho \approx 0,61803$ à chaque étape. Chaque étape. Par conséquent, N étapes de réduction par la méthode du nombre d'or réduisent la plage par le facteur $(1 - \rho)^N \approx (0.6180)^N$.

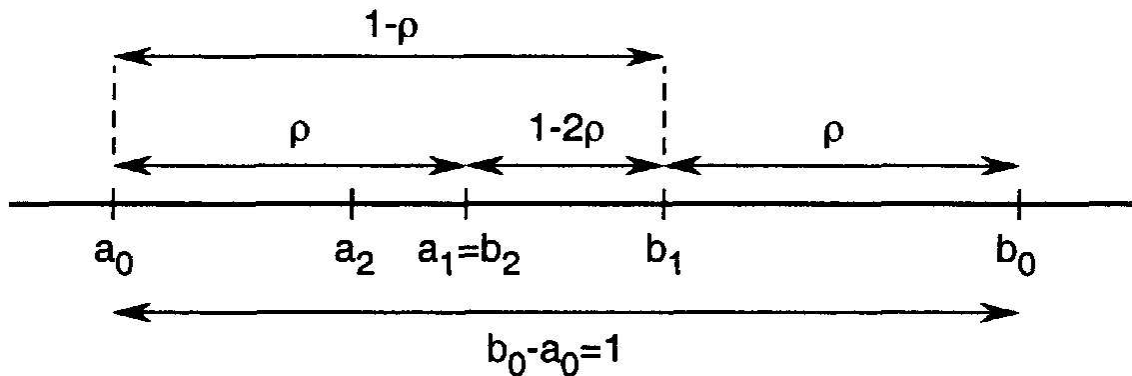


Figure 2.4 : Trouver la valeur de ρ résultant en une seule nouvelle évaluation de f

Algorithme section dorée :

```

1: Choose  $a, b \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon \ll 1$  ▷  $a$  and  $b$  are lower and upper bound,  $\varepsilon$  is tolerance
2: Set  $r \leftarrow \frac{(3-\sqrt{5})}{2}$  ▷  $r$  is a golden ratio
3: Compute  $x_1 \leftarrow a + r(b - a)$  and  $x_2 \leftarrow b - r(b - a)$ 
4: Compute  $f_1 \leftarrow f(x_1)$  and  $f_2 \leftarrow f(x_2)$ 
5:  $k \leftarrow 0$  ▷  $k$  is the number of iterations of method
6: for  $k$  to maxiter do ▷ maxiter is number of iterations to perform
7:   if  $f_1 > f_2$  then
8:     Set  $a \leftarrow x_1, x_1 \leftarrow x_2, f_1 = f_2$ 
9:     Set  $x_2 \leftarrow ra + (1 - r)b, f_2 = f(x_2)$ 
10:  else
11:    Set  $b \leftarrow x_2, x_2 \leftarrow x_1$  and  $f_2 = f_1$ 
12:    Set  $x_1 \leftarrow rb + (1 - r)a$ , and  $f_1 = f(x_1)$ 
13:  end if
14:  if  $|f_1 - f_2| < \varepsilon$  then ▷ stopping criterion
15:    Converged. Print  $x_1$  and  $f(x_1)$  ▷ best solution
16:  end if
17: end for

```

Exemple 2.2 :

Utilisez la recherche du nombre d'or pour trouver la valeur de x qui minimise

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$$

Dans l'intervalle $[0,2]$. Localisez cette valeur de x dans un intervalle de 0.3.

Après N étapes, l'intervalle $[0,2]$ est réduit de $(0.61803)^N$. Donc, nous choisissons N de sorte que $(0.61803)^N \leq 0.3/2$

Quatre étapes de réduction feront l'affaire, c'est-à-dire $N=4$.

Itération 1. Nous évaluons f en deux points intermédiaires a_1 et b_1 . Nous avons

$$a_1 = a_0 + \rho(b_0 - a_0) = 0.7639$$

$$b_1 = a_0 + (1 - \rho)(b_0 - a_0) = 1.236$$

Ou $\rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ nous calculons

$$f(a_1) = -24.36$$

$$f(b_1) = -18.96$$

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Ainsi, $f(a_1) < f(b_1)$, et donc l'intervalle d'incertitude est réduit à

$$[a_0, b_1] = [0, 1.236]$$

Itération 2. Nous choisissons b_2 pour qu'il coïncide avec a_1 , et f ne doit être évalué qu'en un seul nouveau point.

$$a_2 = a_0 + \rho(b_1 - a_0) = 0.4721.$$

On a :

$$f(a_2) = -21.10$$

$$f(b_2) = f(a_1) = -24.36$$

Maintenant, $f(b_2) < f(a_2)$, et donc l'intervalle d'incertitude est réduit à

$$[a_2, b_1] = [0.4721, 1.236].$$

Itération 3. Nous fixons $a_3 = b_2$ et calculons b_3 :

$$b_3 = a_2 + (1 - \rho)(b_1 - a_2) = 0.9443.$$

Nous avons

$$f(a_3) = f(b_2) = -24.36$$

$$f(b_3) = -23.59$$

Donc $f(b_3) > f(a_3)$. Par conséquent, l'intervalle d'incertitude est encore réduit à

$$[a_2, b_3] = [0.4721, 0.9443].$$

Itération 4. Nous fixons $b_4 = a_3$, et

$$a_4 = a_2 + \rho(b_3 - a_2) = 0.6525$$

Nous avons

$$f(a_4) = -23.84$$

$$f(b_4) = f(a_3) = -24.36$$

Donc, $f(a_4) > f(b_4)$. Ainsi, la valeur de x qui minimise f est située dans l'intervalle intervalle

$$[a_4, b_3] = [0.6525, 0.9443].$$

Notez que $b_3 - a_4 = 0.292 < 0.3$.

2.3 Méthodes d'optimisation multidimensionnelles

2.3.1 Les méthodes de descentes

Le principe de base des méthodes de descente est très simple : on fait comme sur une carte topographique, et on utilise les lignes de niveau pour se diriger vers le fond d'une vallée. [14]

Définition 2.2 Soit $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. [15]

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une direction de descente en x s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$f(x + \alpha \mathbf{d}) \leq f(x), \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$$

2. . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une direction de descente stricte en x si s'il existe

$$\alpha_0 > 0 \text{ tel } f(x + \alpha \mathbf{d}) < f(x), \forall \alpha \in]0, \alpha_0].$$

3. Une "méthode de descente" pour la recherche de x^* tel que $f(x^*) = \min f$ consiste à construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : [16]

(a) Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$;

(b) Itération k : on suppose $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ connus ($k \geq 0$)

- i. On cherche $\mathbf{d}^{(k)}$ direction de descente stricte en $x^{(k)}$
- ii. On prend $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$ avec $\alpha_k > 0$ "bien choisi

Proposition 2.1 (Caractérisation des directions de descente). Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

1. si d direction de descente en x alors $d^T \nabla f(x) < 0$
2. si $\nabla f(x) \neq 0$ alors $d = -\nabla f(x)$ est une direction de descente stricte en x .

Convergence :

Étudier la convergence d'un algorithme, c'est étudier la convergence de la suite des itérés générés par l'algorithme. Un algorithme de descente selon le modèle précédent, est dit convergent si la suite de ses itérés $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un point limite x^* , solution du problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

De plus, la convergence est dite locale si elle n'a lieu que pour des points initiaux x^0 dans un voisinage de x^* . Sinon elle est dite globale.

En pratique, le but d'un algorithme d'optimisation ne sera que de trouver un point critique (i.e. un point vérifiant la condition d'optimalité du premier ordre : $\nabla f(x^*) = 0$).

Premiers algorithmes de descente : [2]

Un algorithme de descente est déterminé par les stratégies de choix des directions de descentes successives, puis par le pas qui sera effectué dans la direction choisie. Concentrons-nous dans cette partie sur le choix de la direction de descente : l'idée est de remplacer f par un modèle local plus simple, dont la minimisation nous donnera une direction de descente de f .

Algorithmes de gradient à pas fixe /pas optimal :

Soit $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ l'itéré courant. Étant donné la valeur $f(x^{(k)})$ et le gradient $\nabla f(x^{(k)})$, on remplace f au voisinage de $x^{(k)}$ par son développement de Taylor au premier ordre: $f(x^{(k)} + d) \sim f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T d$.

On voudrait que la dérivée directionnelle $\nabla f(x^{(k)})^T d$ soit la plus petite possible dans un voisinage de $d = 0$. On cherche donc à résoudre :

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x^{(k)})^T d \quad \|d\| = \|\nabla f(x^{(k)})\|$$

dont la solution nous est donnée par : $d_k = -\nabla f(x^{(k)})$.

Le choix de la direction de plus forte descente définit une famille d'algorithmes appelés algorithmes de descente de gradient dont le schéma est le suivant :

Algorithme de descente de gradient :

- Données : f , x^0 première approximation de la solution cherchée, $\varepsilon > 0$ précision demandée

- Sortie: une approximation x^* de la solution de : $\nabla f(x) = 0$

1 $k = 0$;

2 Tant que critère d'arrêt non satisfait,

a) Direction de descente : $d_k = -\nabla f(x^{(k)})$.

b) Recherche linéaire : trouver un pas α_k tel que :

$$f(x^{(k)} + \alpha_k d_k) < f(x^{(k)}).$$

c) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$. $k = k + 1$

3 Retourner $x^{(k)}$.

Il reste maintenant à définir une stratégie de recherche linéaire pour le calcul du pas. Nous étudions ici en première approche une méthode à pas optimal, puis une à pas fixe.

Méthode de plus profonde descente :

Une idée naturelle consiste à suivre la direction de plus forte descente et à faire un pas qui rende la fonction à minimiser la plus petite possible dans cette direction. Cette méthode est appelée méthode de gradient à pas optimal ou encore méthode de plus profonde descente. L'étape 2(a) de l'algorithme de descente de gradient est alors remplacée par :

Recherche linéaire exacte. [17]

2.(a) Calculer un pas optimal α_k solution de :

$$\min_{\alpha > 0} f(x^{(k)} + \alpha d_k).$$

La méthode de plus profonde descente est une sorte d'idéalisation: d'une part, nous ne savons pas en pratique calculer de façon exacte un point minimum α_k de

l'objectif dans une direction donnée et le problème n'est en général pas trivial. D'autre part, la résolution du problème de minimisation unidimensionnel de l'étape 2 (a), même de façon approchée, coûte cher en temps de calcul. Pour ces raisons, on peut lui préférer parfois l'algorithme de gradient à pas constant (ou à pas fixe).

Algorithme du gradient à pas fixe : [18]

L'idée est très simple : on impose une fois pour toutes la taille du pas effectué selon la direction de descente calculée à chaque itération. Les itérations 2 (b) et (c) de l'algorithme de descente de gradient sont alors remplacées par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha d_k.$$

Avantages et inconvénients de la méthode. [14]

Tout d'abord, le fait d'avoir un pas variable permet d'avoir une certaine souplesse que ne permettait pas la descente de gradient à pas fixe. Ensuite, la méthode à pas fixe imposait un pas suffisamment petit, ce qui peut poser des problèmes de lenteur au démarrage lorsque le point initial est loin du minimum.

Du côté des inconvénients, à moins que l'on puisse faire le calcul exact du pas, on doit faire la recherche du pas optimal par une méthode d'optimisation unidimensionnelle. On connaît des méthodes robustes telles que la méthode de la section dorée, qui nous donne un taux de convergence fixe, mais dans tous les cas le pas optimal sera une approximation, qui peut parfois être coûteuse en terme du nombre d'évaluations de la fonction. En pratique, le taux de convergence linéaire, pour la descente de gradient à pas optimal, n'est pas vraiment meilleur que celui de la descente de gradient à pas fixe (lorsque le pas est bien choisi).

Exemple 2.3 : [16]

Cherchons la minimisation de la fonction objective :

$$f(x) = 4x^2 + e^x \text{ et } \nabla f(x) = 8x + e^x.$$

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Cette fonction est au moins de classe C^1 sur \mathbb{R} . Exécutant le schéma numérique de l'algorithme de descente de gradient à pas fixe pour $x^0 = 1.500000$, $\alpha = 0.02$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, soit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha d_k = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$$

Solution :

$$x^{(1)} = 1.500000 - 0.02 \nabla f(1.500000) = 1.170366$$

$$x^{(2)} = 1.170366 - 0.02 \nabla f(1.170366) = 0.918644$$

$$x^{(3)} = 0.918644 - 0.02 \nabla f(0.918644) = 0.721543$$

$$x^{(4)} = 0.721543 - 0.02 \nabla f(0.721543) = 0.564944$$

$$x^{(5)} = 0.564944 - 0.02 \nabla f(0.564944) = 0.439366$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x^{(30)} = -0.10695 - 0.02 \nabla f(-0.10695) = -0.10781$$

Le test d'arrêt $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ est positif au bout de la 30^{ème} itération, soit :

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| = 8.5000 \times 10^{-4} < \varepsilon$$

L'algorithme converge vers la solution $x^{(*)} = -0.10781$ correspondant au minimum de la fonction-objectif.

Exemple 2.4 :

On souhaite minimiser $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2$, en utilisant les algorithmes de descente de gradient à pas fixe et pas optimal. Commençons par analyser le problème de minimisation : d'une part, la fonction f est deux fois différentiable sur \mathbb{R}^2 et strictement convexe. D'autre part, le point $(0,0)$ vérifie les conditions suffisantes d'optimalité.

Donc (0,0) est l'unique point de minimum global de f .

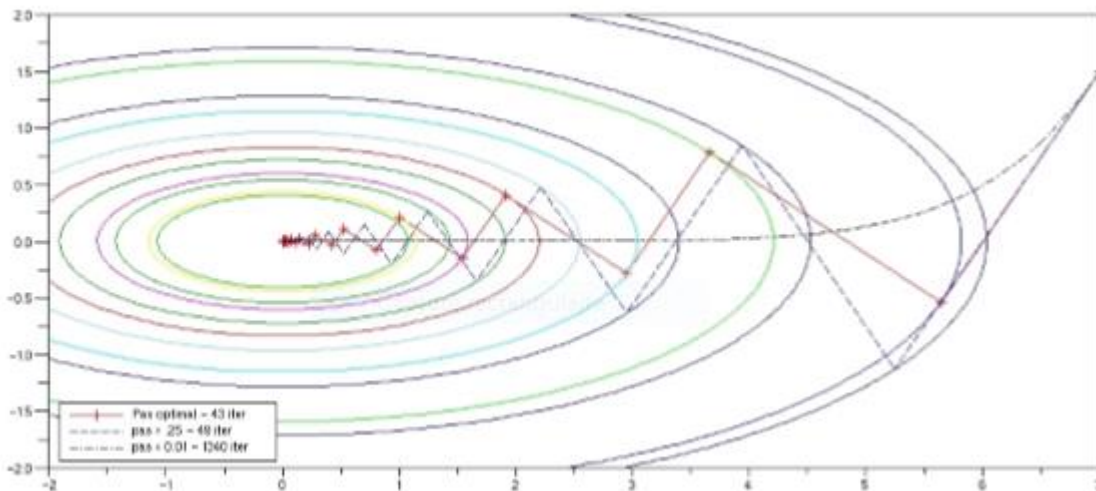


Figure 2.5 : Itérations des algorithmes de gradient à pas fixe et optimal, générées à partir du point (7,1.5).

Soit $X^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}) \in \mathbb{R}^2$ l'itéré courant tel que $\nabla f(x^{(k)}, y^{(k)}) \neq 0$ Calculons par la méthode de plus profonde descente, l'itéré suivant :

– Direction de plus forte descente : $d_k = -\nabla f(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} -x^{(k)} \\ -7y^{(k)} \end{pmatrix}$.

– Calcul du pas optimal α_k solution, si elle existe, du problème à une dimension :

$$f(\min_{\alpha > 0} f(X^{(k)} + \alpha_k d_k)) = \min_{\alpha > 0} \frac{1}{2} x_k^2 (1 - \alpha)^2 + \frac{7}{4} y_k^2 (1 - 7\alpha)^2.$$

La solution se calcule de façon immédiate :

$$\alpha_k = (x_k^2 + 7^2 y_k^2) / (x_k^2 + 7^3 y_k^2)$$

A chaque itération, la méthode génère donc le point :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{(x_k^2 + 7^2 y_k^2)}{(x_k^2 + 7^3 y_k^2)} \begin{pmatrix} -x^{(k)} \\ -7y^{(k)} \end{pmatrix}$$

Appliquons maintenant ces deux méthodes à partir du point $x^0 = (7, 1.5)$. Leurs comportements sont illustrés par la figure (2.5) et les itérations sont décrites dans les tableaux (2.1) et (2.2) Cet exemple met en évidence la lenteur de la méthode de plus profonde descente, caractérisée par le comportement en zigzag des itérés.

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Tableau 2.1 : Itérations de la méthode de plus profonde descente. Le critère d'optimalité est satisfait en 43 itérations pour une précision $\varepsilon = 10e-5$ et en 79 itérations si $\varepsilon = 10e-10$.

pas	0.325	0.25	0.125	0.05	0.01
Nb d'itérations	DV	49	101	263	1340

Tableau 2.2 : Nombres d'itérations de l'algorithme de gradient à pas fixe pour approcher l'unique argument minimum de f à $10e-5$ près, en fonction du pas choisi - Point initial :

$$x^0 = (7, 1.5).$$

k	$f(x_k, y_k)$	$\ \nabla f(x_k, y_k)\ _2$	s_k	x_k	y_k
0	32.375	10.547512	—	7	1.5
1	16.925373	7.9786973	0.1940299	5.641791	-0.5373134
2	8.8484403	6.5973298	0.3513514	3.6595401	0.7841872
3	4.6258889	3.5448339	0.1940299	2.9494801	-0.2809029
4	2.4183752	3.4490276	0.3513514	1.9131763	0.4099663
5	1.2643059	1.8532089	0.1940299	1.541963	-0.1468536
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	$1.751e-10$	2.9343653×10^{-5}	0.3513514	1.63×10^{-5}	0.35×10^{-5}
41	$9.155e-11$	1.5725775×10^{-5}	0.1940299	1.31×10^{-5}	-0.12×10^{-5}
42	$4.786e-11$	1.536522×10^{-5}	0.3513514	0.85×10^{-5}	0.18×10^{-5}
43	$2.502e-11$	0.8292768×10^{-5}	0.1940299	0.69×10^{-5}	0.07×10^{-5}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
76	$1.268e-20$	0.2523886×10^{-9}	0.3513514	0.14×10^{-9}	0.03×10^{-9}
77	$6.630e-21$	0.1303840×10^{-9}	0.1940299	0.11×10^{-9}	-0.01×10^{-9}
78	$3.466e-21$	0.1303840×10^{-9}	0.3513514	0.72×10^{-10}	0.16×10^{-10}
79	$1.812e-21$	$0.6989278 \times 10^{-10}$	0.1940299	0.58×10^{-10}	-0.05×10^{-10}

Enfin, les données du tableau 2.2 illustrent l'importance du choix du pas dans l'algorithme de pas fixe : un pas "bien choisi" donne des résultats comparables à ceux obtenus par la plus profonde descente, un pas plus petit atténue les zigzags des itérés mais augmente significativement le nombre d'itérations et enfin, un pas trop grand fait diverger la méthode

Exemple 2.5 :

Une fonction à deux variable par la méthode du gradient à pas fixe en utilisant un code Matlab

```
it = 0 ; itmax = 100 ; echelle = 0.6 ; tol = 1e-4 ; pas_fixe=0.7;
xinit = [2 1.5] ;
x = -2: 8 ; y = -6:6 ;
fxy = @(x,y) y.^2 - cos(x) ;
dfx = @(x) sin(x) ;
dfy = @(y) 2.*y ;
while it < itmax
    dk = - [dfx(xinit(1)) dfy(xinit(2))] ;
    xn = xinit + pas_fixe*dk ; xinit = xn ;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TEST D'ARRET %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if abs((dfx(xinit(1)) + dfy(xinit(2)))*pas_fixe) <= tol
        xmin = xn
        it_number = it

        break
    end
    it=it+1;
end
xn(2).^2 - cos(xn(1))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Les résultats sont : $x^* = (1.6076e - 005, -6.2915e - 005)$

Avec 10 itération pour $\alpha = 0.7$

Et 39 itération pour $\alpha = 0.2$

2.3.2 Méthode de Newton : [19]

La méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations est une généralisation de l'algorithme de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction unidimensionnelle. Le fait qu'un algorithme pour un problème unidimensionnel puisse être efficacement généralisé au cas multidimensionnel est une situation exceptionnelle. La méthode de Newton est souvent aussi appelée méthode de Newton-Raphson. [20]

- Principes :

Notons $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ le vecteur solution du système non linéaire :

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Si chaque fonction f_i est continue et continûment différentiable, alors, par développement en série de Taylor dans le voisinage d'un estimé $x^{(k)}$ proche de x^* (obtenu à la k -ième itération), on obtient :

$$f_i(x^*) = f_i(x^{(k)}) + (x^* - x^{(k)}) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^{(k)}) (x_r^* - x_r^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_r} \Big|_{x=x^{(k)}} + \dots = 0 \quad (1.2)$$

pour $i=1, \dots, n$.

si $x^{(k)}$ est un estimé proche de x^* les éléments $(x_j^* - x_j^{(k)})^2$ sont négligeables, ainsi que les termes de degré supérieur. Le système (1.2) s'écrit donc :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = -f_i(x^{(k)}) \quad (1.3)$$

définissons la matrice $E^{(k)}$ des dérivées premières telles que :

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (1.4)$$

Le vecteur d'erreur $\Delta x^{(k)}$ par :

$$\Delta x^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)} \quad (1.5)$$

Puis le vecteur $F^{(k)}$ par :

$$F_i^{(k)} = -f_i(x^{(k)}) \quad (1.6)$$

Alors la relation matricielle (1.3) s'écrit :

$$E^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)} = F_i^{(k)} \quad (1.7)$$

Dans l'équation (1.7), toutes les quantités sont connues hormis les $\Delta x^{(k)}$.

L'équation (1.7) est un système linéaire.

$\Delta x^{(k)}$ est un estimé de l'erreur commise en approximant x^* par $x^{(k)}$.

On peut donc obtenir un meilleur estimé $x^{(k+1)}$ de x^* par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (1.8)$$

On continue jusqu'à ce que

$$|x^* - x^{(k)}| \rightarrow 0$$

• Arrêt des itérations :

En pratique, x^* étant l'inconnue, on arrête les opérations par l'un des tests suivants :

1. $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon_1$
 2. $|(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})/x_i^{(k+1)}| < \varepsilon_2$
 3. $|f_i(x^{(k+1)})| < \varepsilon_3$
 4. $k > k_{max}$
- (1.9)

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des bornes supérieures de l'erreur fixées à priori et k_{max} est le nombre maximum admissible d'itérations.

Le premier test suppose que la méthode converge puisqu'il teste l'écart entre deux estimés successifs (un écart faible ne signifie pas obligatoirement la proximité de la racine x^*

Le second a l'avantage sur le précédent de normaliser toutes les composantes de x .

Toutefois, $x_i^{(k+1)}$ doit être différent de zéro.

Le troisième test suppose que l'on a un ordre de grandeur de la valeur des fonctions f_i (pour affirmer que si f_i est inférieur à ε_3 c'est qu'il est pratiquement nul).

Les tests proposés utilisent la norme du maxima. Il est bien sûr possible d'utiliser d'autres normes (euclidiennes... etc.).

Convergence de la méthode de Newton :

Dans le cas monodimensionnel la méthode de Newton convergeait généralement bien, si l'on possédait un bon estimé initial de la racine cherchée.

Dans le cas multidimensionnel, très souvent, si l'estimé initial n'est pas très proche de la racine, la méthode ne converge pas. En fait le domaine de convergence de la méthode de Newton est très réduit.

Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x)=0$

Etant donné $x^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k_{max}$

Pour $k = 0, k_{max}$

1. Calculer

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

$$F_i^{(k)} = -f_i(x^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta x_j^{(k)} = F_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si l'un des tests :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon_1$$

$$|(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})/x_i^{(k+1)}| < \varepsilon_2$$

$k > k_{max}$

Est vérifié, arrêter

Exemple 2.6 : [20]

Illustrons la méthode de Newton en résolvant le système d'équations suivant

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2): x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

La figure () montre les deux solutions $x = [0 \ 3]'$ et $x = [3 \ 0]'$

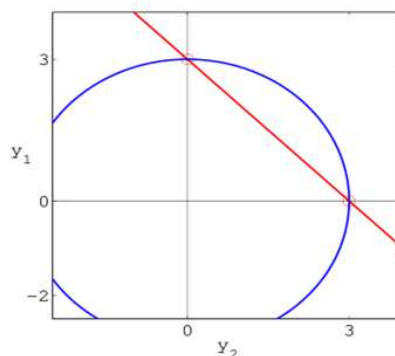


Figure 2.6 : Solutions du système d'équations

En choisissant comme point de départ $x^{(0)} = [1 \ 5]'$ et une tolérance de 10^{-5} .

Et dont la matrice Jacobienne s'écrit

$$\nabla F(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^{(k)}} & \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^{(k)}} \\ \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^{(k)}} & \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^{(k)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Si l'on choisit $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ alors

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

En résolvant le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix}$$

L'on obtient

$$\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{bmatrix} \quad \text{D'où}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.625 \\ 3.625 \end{bmatrix}, \quad F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 145/32 \end{bmatrix},$$

$$\nabla F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5/4 & 29/4 \end{bmatrix}$$

En résolvant à nouveau le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5/4 & 29/4 \end{bmatrix} \Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -145/32 \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} 145/272 \\ -145/272 \end{bmatrix} \quad \text{D'où}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.092 \\ 3.092 \end{bmatrix}$$

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

En se servant du code Matlab qui suit (en initialisant $x^{(1)}$) :

```
%method de newton pour deux variables %

y1 = [1;5];
tol = 1e-5;
it = 0;
y0 = 1+y1; % Pour premier test dans while
while ~converged(y0,y1,tol)
    y0 = y1;
    F(1) = y0(1) + y0(2) - 3;
    F(2) = y0(1)^2 + y0(2)^2 - 9;
    b = [-F(1);-F(2)];
    J = [1 1;2*y0(1) 2*y0(2)];
    %s = J \ b;
    s = inv(J)*b;
    y1 = y0 + s;
    it = it+1;
end
itmax = it
y1
```

A l'aide de la fonction Matlab **converged** suivant :

```
function res = converged(y0,y1,tol)
res = all(abs(y1-y0) ./ (abs(y0)+1) < tol);
```

On peut calculer les itérations jusqu'à la convergence, La figure 2.7 suivante montre comment ces itérations convergent vers la solution $x = [0 \ 3]'$

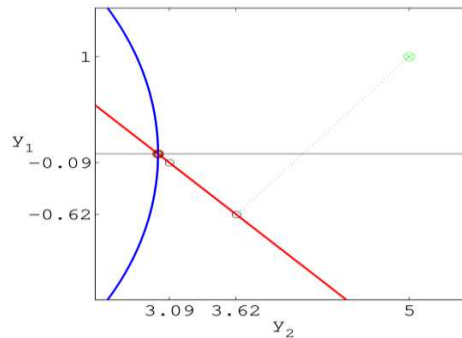


Figure 2.7 : Fonctionnement de l'algorithme de Newton avec $x^{(0)} = [1 \ 5]'$.

Iter	Solution		Erreur	
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)} - x_1^{sol}$	$x_2^{(k)} - x_2^{sol}$
0	1.0000	5.0000	1.0000	2.0000
1	-0.6250	3.6250	-0.6250	0.6250

2	-0.0919	3.0919	-0.0919	0.0919
3	-0.0027	3.0027	-0.0027	0.0027
4	-0.0000	3.0000	0.0000	0.000

Dans le cas monodimensionnelle l'algorithme de Newton s'écrit comme suit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})$$

Exemple 2.7 : On se propose d'appliquer cette méthode pour la recherche des racines de la fonction non linéaire suivante : $f(x) = e^x - 2\cos(x)$.

Dans un premier temps, et pour déterminer la valeur initiale x_0 on se propose de tracer la courbe représentative de cette fonction en utilisant le programme ci-dessous :

```

x = -1:0.1:1;
f = exp(x) - 2 * cos(x);
plot(x, f); grid on;
```

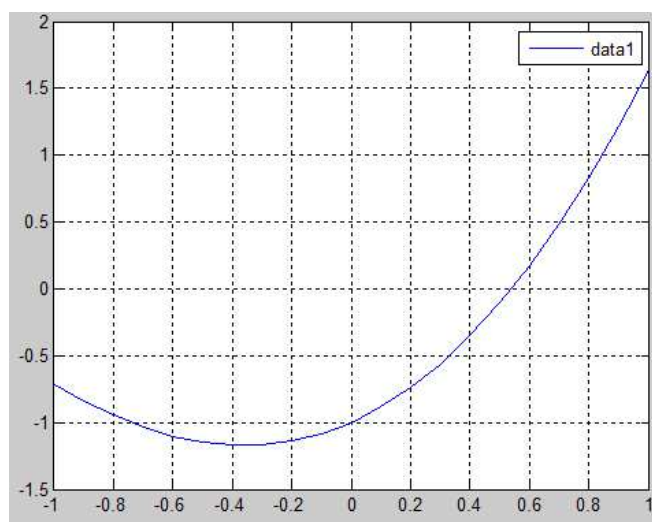


Figure 2.8 : La fonction : $f(x) = e^x - 2.\cos(x)$.

D'après cette courbe, il est judicieux de choisir un $x_0 = 0.5$; car $f(x_0)$ est proche de zéro, et cela pour avoir une convergence rapide.

La fonction dérivée $f'(x)$ a pour expression : $f'(x) = e^x - 2.\sin(x)$.le calcul de x_1 sera :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{-0.1064}{2.6075} \quad x_1 = 0.5408$$

Chapitre 2 : Quelques méthodes et algorithmes d'optimisation

Pour chercher les autres x_n , c'est-à-dire la solution de (x) , on utilise le programme Matlab de la fonction $f(x) = e^x - 2 \cdot \cos(x)$. Comme suit :

```
function x = Newton(x0)
x0 = 0.5;
tol = 1e-10;
x = x0;
iter = 0;
while abs(exp(x)-2*cos(x))>tol
    xi = x;
    x = xi - (exp(xi)-2*cos(xi))/(exp(xi)+2*sin(xi));
    iter = iter+1
```

Après exécution de ce programme on obtient : $x = 0.5398$.

Chapitre 3 : Energie solaire photovoltaïque

1. Introduction

Aujourd'hui, l'exploitation des énergies renouvelables est devenue possible grâce aux nouvelles technologies. Ces énergies sont des énergies disponibles en quantités illimitées sur la terre avec des différentes sources comme : l'hydroélectrique, la biomasse, l'éolienne, le soleil et la géothermie. L'énergie solaire, c'est une énergie disponible partout, non polluante et qui ne s'épuise jamais. Grâce au développement des semi-conducteurs, la production de l'électricité à partir de cette source est probablement faisable pour plusieurs et différentes applications.

Le mot " photovoltaïque " vient de la grecque " photo " qui signifie lumière et " voltaïque " qui tire son origine du nom d'un physicien italien Alessandro Volta (1754 -1827), qui a contribué beaucoup à la découverte de l'électricité, alors le mot photovoltaïque signifie littérairement la lumière-électricité. [21]

2. Historique de l'énergie photovoltaïque

Découvert en 1839 par Antoine Becquerel, l'effet photovoltaïque permet la transformation de l'énergie lumineuse en électricité. Ce principe repose sur la technologie des semi-conducteurs. Il consiste à utiliser les photons pour libérer les électrons et créer une différence de potentiel entre les bornes de la cellule qui génère un courant électrique continu.

L'héliogénération est apparue en 1930 avec les cellules à oxyde cuivreux puis au sélénium. Mais ce n'est qu'en 1954, avec la réalisation des premières cellules photovoltaïques au silicium dans les laboratoires de la compagnie Bell Téléphone, que l'on entrevoit la possibilité de fournir de l'énergie.

Très rapidement utilisées pour l'alimentation des véhicules spatiaux vers les années 60 avec l'équipement de satellites spatiaux. Puis à partir de 1970, les premières utilisations terrestres ont concerné l'électrification des sites isolés.

Au cours des années 80, la technologie photovoltaïque terrestre a progressé régulièrement par la mise en place de plusieurs centrales de quelques mégawatts, et est même devenue familière des consommateurs à travers de nombreux produits de faible puissance y faisant appel : montres, calculatrices, balises radio et météorologiques, pompes et réfrigérateurs solaires.

Le progrès des techniques de production de cellules photovoltaïques ainsi que l'augmentation des volumes de production ont entraîné, à partir des années 1990, une baisse des prix. La production de modules se fait en Chine (près de 60 % de la production totale), au Japon, aux EU, en Allemagne et en Europe, avec en particulier des grandes compagnies comme Yingli

Green Energy, First Solar et Suntech Power. La production mondiale de modules photovoltaïques est passée de 5 MWc en 1982 à plus de 18GWc en 2013. Concernant l'Algérie, le groupe algérien Condor Electronics, s'est lancé en juillet 2013 dans la production des panneaux photovoltaïques dont la puissance varie entre 70 W et 285 W et à des prix compétitifs.

Dans le cadre de la concrétisation du programme national algérien des énergies renouvelables, un projet de 400 MW en photovoltaïque a été lancé, faisant partie du programme complémentaire de production de l'électricité, prévu pour l'été 2014. Ce projet consiste en la réalisation de 23 centrales solaires photovoltaïques, dans la région des hauts plateaux et dans la région du sud-ouest, ainsi que dans la région du grand sud. Dans la dizaine d'années qui viendront, il est prévu la réalisation d'un parc d'énergies renouvelables de 5539 MW. L'objectif à 2030 est de 12 000 MW en énergies renouvelable pour la consommation interne d'électricité. La puissance photovoltaïque installée cumulée dans le monde a atteint 138,9 GW à la fin 2013. [22]

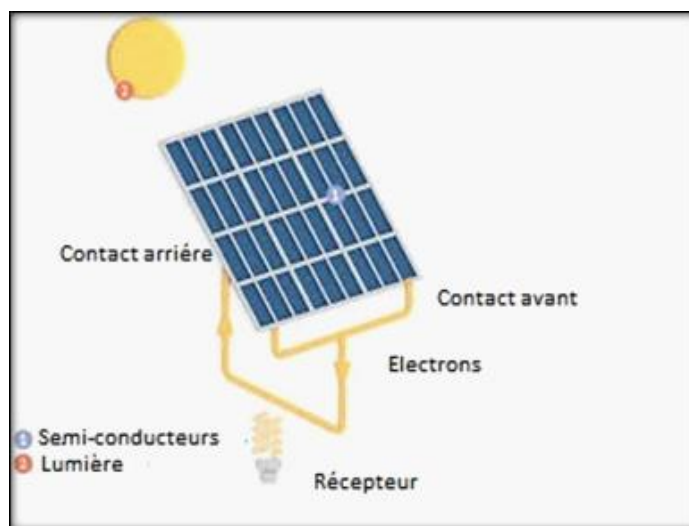


Figure 3.1 : schème de la conversion photovoltaïque.

3. Rayonnement solaire : éléments de base et définition

3.1. Le soleil :

Le Soleil est l'étoile du Système solaire. Dans la classification astronomique, c'est une étoile de type naine jaune d'une masse d'environ $1,989 1 \times 10^{30}$ kg, composée d'hydrogène (75 % de la masse ou 92 % du volume) et d'hélium (25 % de la masse ou 8 % du volume). Le Soleil fait partie de la galaxie appelée la Voie lactée et se situe à environ 8 kpc ($\sim 26 100$ a.l.) du centre galactique, dans le bras d'Orion. Le Soleil orbite autour du centre galactique en 225 à 250 millions d'années (année galactique). Autour de lui gravitent la Terre (à la vitesse

de 30 km/s), sept autres planètes, au moins cinq planètes naines, de très nombreux astéroïdes et comètes et une bande de poussière. Le Soleil représente à lui seul environ 99,854 % de la masse du Système solaire ainsi constitué, Jupiter représentant plus des deux tiers du reste.

La distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 millions de kilomètres et la vitesse de la lumière est d'un peu plus de 300 000 km/s ; les rayons du soleil mettent donc environ 8 min à nous parvenir.

La constante solaire est la densité d'énergie solaire qui atteint la frontière externe de l'atmosphère faisant face au Soleil. Sa valeur est communément prise égale à 1 360 W/m² (bien qu'elle varie de quelques % dans l'année à cause des légères variations de la distance Terre-Soleil). [23]

3.2. L'atmosphère :

Le flux énergétique reçu au sol dépend de nombreux facteurs, et son maximum au sol ne dépasse guère 1000 W/m². Le rayonnement global au sol est fonction de la composition et de l'épaisseur de l'atmosphère traversée par les rayons lumineux au cours de la journée. Il se décompose en rayonnement direct et rayonnement diffus. Ce sont ces deux rayonnements qui sont exploités par les générateurs solaires. L'intensité du rayonnement solaire reçue au niveau d'un module photovoltaïque est donc fonction de nombreux facteurs tels que les conditions météo, la hauteur du soleil dans le ciel et le nombre d'heures d'ensoleillement dans la journée. Cependant l'atmosphère terrestre reçoit ce rayonnement à un éclairement moyen de 1,37 kW/m², à plus ou moins 3 %, selon que la terre s'éloigne ou se rapproche du soleil dans sa rotation autour de celui-ci. L'atmosphère en absorbant toutefois une partie de sorte que l'éclairement atteignant la surface terrestre dépasse rarement 1,2 kW/m². La rotation et l'inclinaison de la terre font également que l'énergie disponible en un point donné varie selon la latitude, l'heure et la saison. Enfin, les nuages, le brouillard, les particules atmosphériques et divers autres phénomènes météorologiques causent des variations horaires et quotidiennes qui augmentent ou diminuent le rayonnement solaire et le rendent diffus. [24]

3.3. Le spectre solaire :

Le rayonnement électromagnétique est composé de «grains» de lumière appelés photons.

L'énergie E_{ph} de chaque photon est directement liée à sa longueur d'onde λ : $E_{ph} = h \frac{c}{\lambda}$

Où h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière et sa longueur d'onde. Ainsi, plus la longueur d'onde est courte, plus l'énergie du photon est grande. Cette découverte valut à Albert Einstein le prix Nobel en 1905.

Le soleil émet un rayonnement électromagnétique, appelé rayonnement solaire, qui est approximativement celui qu'émettrait un corps noir à la température 6000°K. Le rayonnement solaire couvre un domaine très étendu de longueurs d'onde qu'on appelle spectre solaire, allant de 10^{-4} micromètres (μm) jusqu'à 10^6 centimètres (cm).

Ce spectre comporte trois parties principales subdivisées en zones :

- ❖ Ultraviolet (UV) de longueurs d'onde comprises entre 0 μm et 0,4 μm .
- ❖ Visible de longueurs d'onde comprises entre 0,4 μm et 0,75 μm .
- ❖ Infrarouge de longueurs d'onde comprises entre 0,75 μm et 24 μm .

Le rayonnement solaire se situe dans la gamme des courtes longueurs d'onde c'est-à dire, les longueurs d'onde inférieures à 4 μm (98%). La Figure 3.2 illustre la répartition spectrale du rayonnement solaire hors atmosphère. L'énergie solaire reste donc très faible dans l'infrarouge. C'est pourquoi le rayonnement solaire porte encore le nom de « flux onde courte ».

L'atmosphère absorbe toutefois une partie du rayonnement de sorte que l'éclairement atteignant la surface terrestre dépasse rarement 1,2 kW/m². [24]

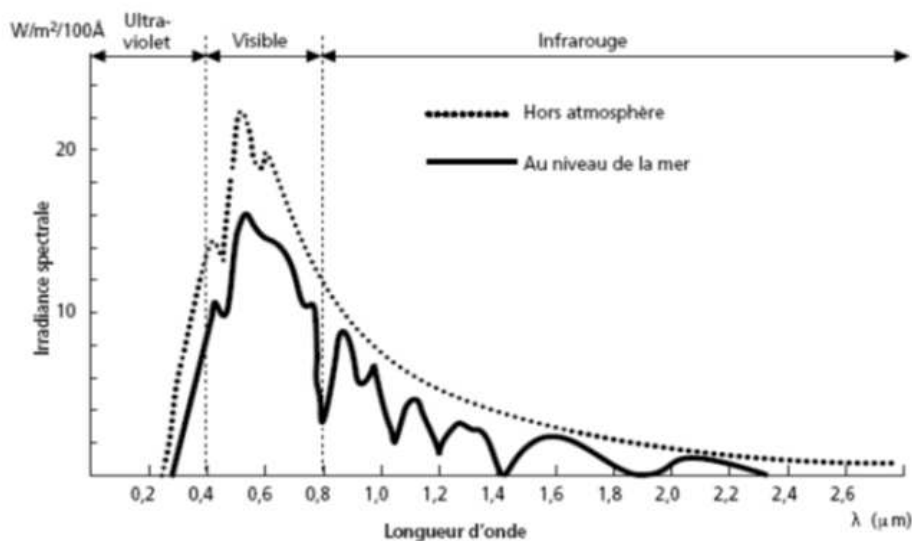


Figure 3.2 : Répartition spectrale du rayonnement solaire hors atmosphère. [24]

4. Déclinaison de solaire

La déclinaison du soleil δ est l'angle entre les rayons du soleil et le plan de l'équateur terrestre. L'inclinaison axiale de la terre (appelée obliquité de l'écliptique par les astronomes) est l'angle entre l'axe de la terre et une ligne perpendiculaire à l'orbite de la terre.

Cette angle est calculé par la formule [25] :

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(N+284)\right)$$

N est le nombre de jours de l'année (N =1 pour le 1^{er} janvier).

La déclinaison varie entre -23.45° le 21 décembre et +23.45° le 21 juin.

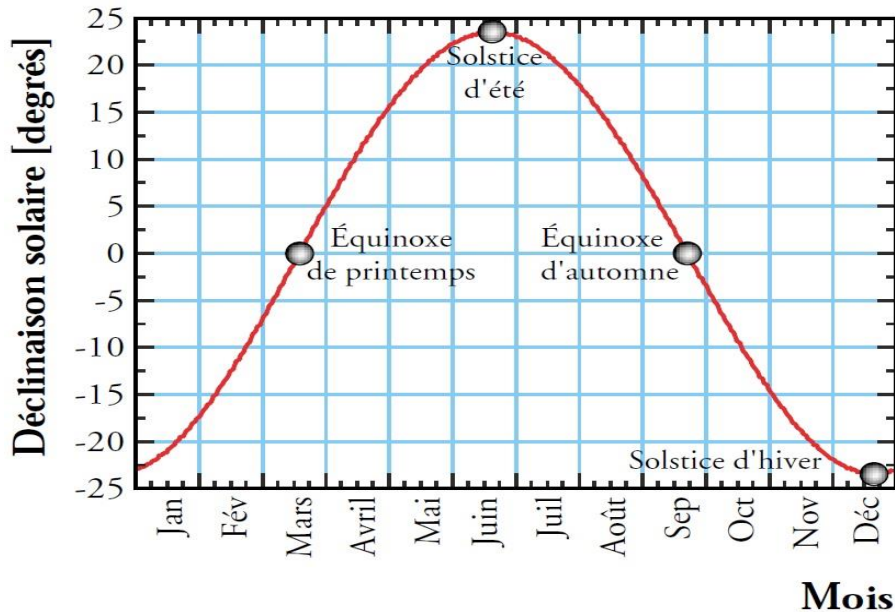


Figure 3.3 : courbe de déclinaison du soleil.

5. Principe de la conversion photovoltaïque

La cellule PV est réalisée à partir de deux couches de silicium, une dopé P (dopé au bore) et l'autre dopée N (dopée au phosphore) créant ainsi une jonction PN avec une barrière de potentiel.

Lorsque les photons sont absorbés par le semi-conducteur, ils transmettent leur énergie aux atomes de la jonction PN de telle sorte que les électrons de ces atomes se libèrent et créent des électrons (charge N) et des trous (charge P). Ceci crée alors une différence de potentiel entre les deux couches.

Cette différence de potentiel est mesurable entre les connexions des bornes positives et négatives de la cellule.

La tension maximale de la cellule est d'environ 0.6 V pour un courant nul. Cette tension est nommée tension de circuit ouvert (V_{oc}).

Le courant maximal se produit lorsque les bornes de la cellule sont court-circuitées, il est appelé courant de court-circuit (I_{cc}) et dépend fortement du niveau d'éclairement.[26]

6. Cellules photovoltaïque ou photopile

6.1. Définition

Une cellule photovoltaïque est un composant électronique qui, exposé à la lumière (photons), génère de l'électricité. C'est l'effet photovoltaïque qui est à l'origine du phénomène. Le courant obtenu est fonction de la lumière incidente. L'électricité produite est fonction de l'éclairement, la cellule photovoltaïque produit un courant continu. Les cellules photovoltaïques les plus répandues sont constituées de semi-conducteurs, principalement à base de silicium (Si) et plus rarement d'autres semi-conducteurs : séléniure de cuivre et d'indium CuInSe_2 ou uInGaSe_2 , tellurure de cadmium (CdTe), etc. Elles se présentent généralement sous la forme de fines plaques d'une dizaine de centimètres de côté, prises en sandwich entre deux contacts métalliques, pour une épaisseur de l'ordre du millimètre. Les cellules sont souvent réunies dans des modules solaires photovoltaïques ou panneaux solaires, en fonction de la puissance recherchée.

6.2. Caractéristique d'une cellule photovoltaïque :

La caractéristique de la cellule photovoltaïque est définie par la caractéristique $I(V)$ et la caractéristique $P(V)$. La figure (3.4) représente les deux caractéristiques $I(V)$ et $P(V)$ avec le point de puissance maximal.[27]

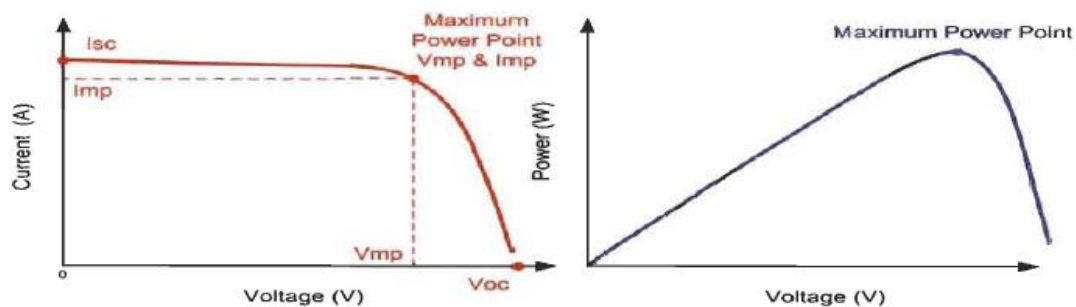


Figure 3.4 : Caractéristique $I(V)$ et $P(V)$ MPP d'une cellule PV[27]

D'après la courbe non linéaire de la caractéristique $I(V)$, nous remarquons que la cellule se comporte comme une source de courant constant (partie horizontale) et comme un générateur de tension dans la partie verticale.

Noté que la puissance délivrée par une cellule PV est le produit entre le courant et la tension de chaque point de la courbe $I(V)$.

6.3 Influence des différents paramètres sur une cellule photovoltaïque

Les différents paramètres qui peuvent influer sur le rendement d'une cellule solaire PV sont plusieurs, nous présentons quelques uns de ces paramètres [28]:

❖ Influence de l'éclairement G :

L'énergie fournie par une cellule est dépendante de l'éclairement qu'elle reçoit sur sa surface, les figures 3.5 et 3.6 montrent l'influence de l'éclairement sur la caractéristique $I(V)$ et $P(V)$:

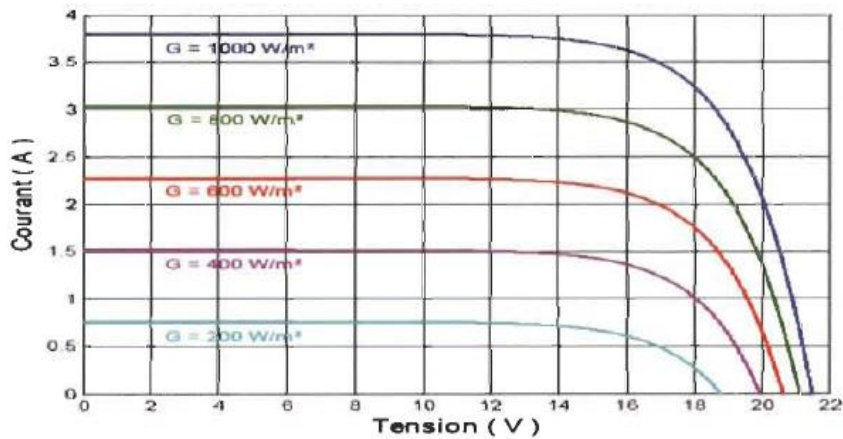


Figure 3.5 : influence de l'éclairement sur la caractéristique $I(V)$ [28]

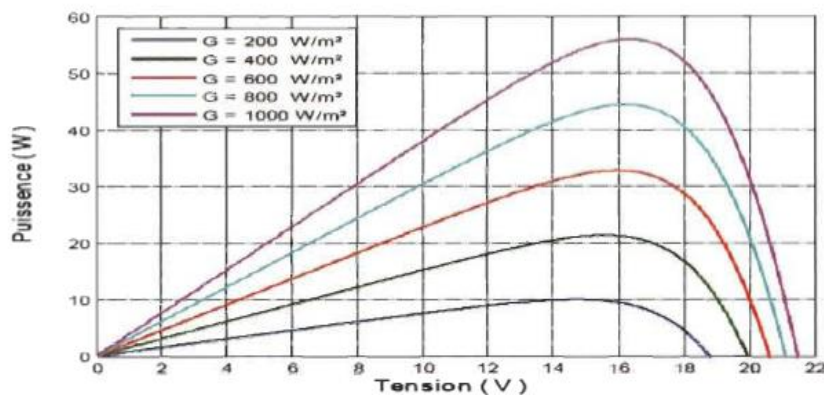


Figure 3.6 : influence de l'éclairement sur la caractéristique $P(V)$ [28]

D'après les figures 3.5 et 3.6 nous remarquons que le courant du court-circuit I_{cc} et la puissance p sont proportionnels à l'éclairement reçu.

❖ Influence de la température :

Les modules PV sont conçus pour fonctionner sous la lumière du soleil avec des températures différentes.

En voyant bien l'influence de la température sur la caractéristique courant-tension dans la figure (3.7).

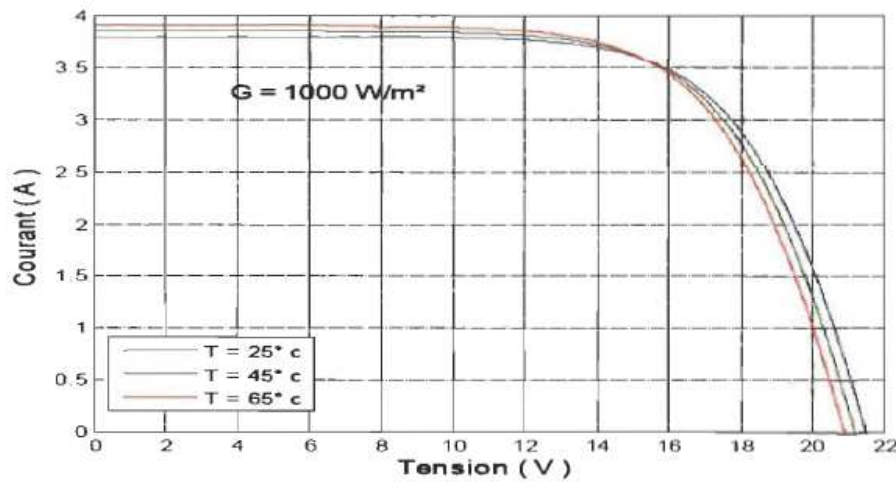


Figure 3.7 : Influence de la température sur la caractéristique $I(V)$ [28]

On remarque qu'une diminution de la tension due à l'augmentation de la température, ce qui engendre par la suite une faible puissance. D'une façon simple on conclut que les cellules PV fonctionnent mieux lorsque l'éclairement est important et la température est basse.

7. Modélisation des cellules photovoltaïques

La modélisation des cellules photovoltaïques passe nécessairement par un choix judicieux des circuits électriques équivalents.

Pour développer un circuit équivalent précis pour une cellule PV, il est nécessaire de comprendre la configuration physique des éléments de la cellule aussi bien que les caractéristiques électriques de chaque élément, en prenant plus ou moins de détails. Selon cette philosophie, plusieurs modèles mathématiques sont développés pour représenter un comportement fortement non linéaire, résultant de celui des jonctions semi-conductrices qui sont à la base de leurs réalisations. Ces modèles se différencient entre eux par les procédures mathématiques et le nombre de paramètres intervenant dans le calcul de la tension et du courant du module photovoltaïque. [29]

Il existe plusieurs modèles électriques caractérisant le fonctionnement de la cellule photovoltaïque, et ils ont comme facteur commun la considération de la cellule PV comme générateur de courant idéal. Généralement on a trois modèles différents selon la modélisation électrique des comportements physiques de la cellule.

❖ **Modèle idéal :**

C'est le modèle le plus simple pour représenter la cellule solaire, car il ne tient compte que du phénomène de diffusion.

Le circuit équivalent simplifié d'une cellule solaire se compose d'une diode et d'une source de courant montés en parallèle. La source de courant produit le photo courant I_{ph} , qui est directement proportionnel à l'éclairement solaire E.

L'équation courant tension I-V du circuit équivalent simplifié est déduite à partir de la loi de Kirchhoff (première loi de Kirchhoff : la somme de tous les courants entrant et sortant d'un point est égale à zéro)[30]

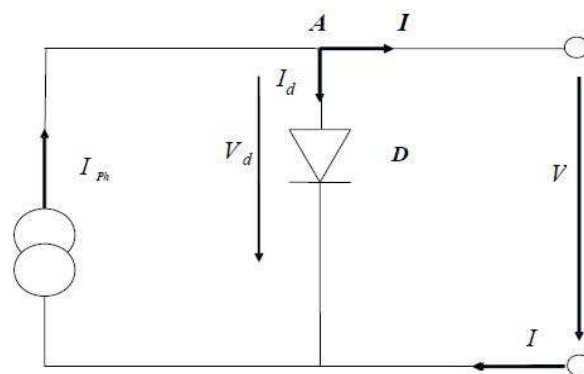


Figure 3.8 : circuit équivalent simplifié d'une cellule solaire. [31]

$$I = I_{ph} - I_d$$

Avec :

$$I_d = I_s \left(e^{\frac{V}{AVt}} - 1 \right)$$

D'où :

$$I = I_{ph} - I_s \left(e^{\frac{V}{AVt}} - 1 \right)$$

Avec :

- I_{ph} : Photo courant.
- I_d : Courant de diode.
- I_s : Courant inverse de saturation de la diode.
- A: Facteur d'idéalité de la diode.
- Vt: Tension thermique.

❖ **Modèle réelle :**

On rencontre dans la littérature plusieurs modèles de la cellule photovoltaïque qui diffèrent entre eux par le nombre de paramètres intervenant dans le calcul de la tension et de l'intensité de courant de sortie.

Rauschenbach (1980) et Townsend (1981) ont prouvés que des cellules photovoltaïques peuvent être modélisées par un circuit électrique équivalent qui contient des paramètres ayant les significations liées aux phénomènes physiques de la cellule.

Rauschenbach (1980) et Green (1981) ont passé en revue plusieurs circuits équivalents et ils ont recommandé l'utilisation de circuit d'une seule diode à quatre paramètres.

Roger (1984), Appelbaum (1987), Ekstein (1990), Duffie et Beckmann (1991) et Alghuwainem (1992) ont employés le modèle à quatre paramètres.

Dans ce qui suit on récapitule les différents modèles électriques des cellules photovoltaïques rencontrées dans la littérature. [32]

• **Modèle à une diode (à une seule exponentielle) :**

Réellement il existe plusieurs influences des résistances parasites dans la production de l'énergie électrique, et la cellule photovoltaïque est représentée généralement par le schéma suivant :

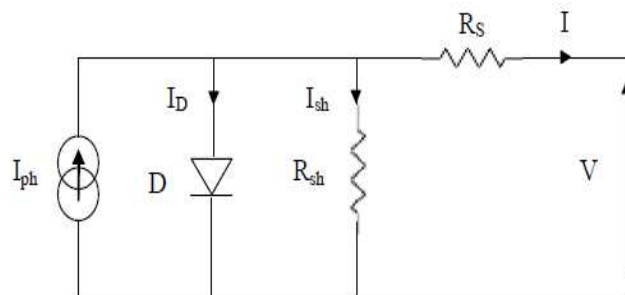


Figure 3.9 : schéma équivalent d'une cellule solaire [32]

C'est le modèle le plus classique dans la littérature, il fait intervenir un générateur de courant pour la modélisation du flux lumineux incident, une diode pour les phénomènes physiques de polarisation et deux résistances (série et shunt).

Ces résistances auront une certaine influence sur la caractéristique $I-V$ de la photopile :

- la résistance série est la résistance interne de la cellule, elle principalement la résistance du semi-conducteur utilisé, de la résistance de contact des grilles collectrices et de la résistivité de ces grilles.

- la résistance shunt est due à un courant de fuite au niveau de la jonction, elle dépend de la façon dont celle-ci a été réalisée.

Le courant de la diode est donné par :

$$I_D = I_0 \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right]$$

Avec q : Charge d'électron.

R_s : Résistance série.

I_0 : courant de saturation de la diode.

Le courant généré par la cellule PV est donné par la loi des mailles

$$I = I_{ph} - I_d - I_{sh}$$

$$= I_{ph} - I_0 \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right] - \left(\frac{V + IR_s}{R_{sh}} \right)$$

R_{sh} : Résistance shunt.

• **Modèle à une diode sans résistance shunt :**

Un modèle électrique empirique simple, le plus proche du générateur photovoltaïque, est actuellement le plus utilisé en raison de la qualité des résultats obtenus, c'est le modèle à une diode. La figure 3.9 illustre le circuit électrique équivalent au modèle à une diode.

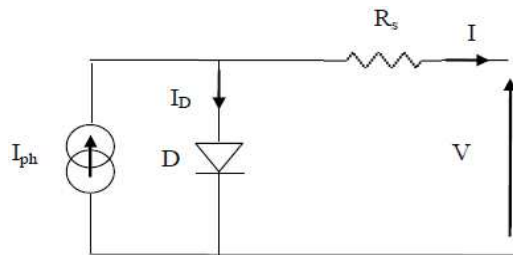


Figure 3.10 : schéma équivalent a une diode sans résistance shunt [32]

Le courant généré par la cellule PV est donné par la loi des mailles

$$I = I_{ph} - I_d$$

$$I = I_{ph} - I_0 \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right]$$

• **Modèle à deux diodes (à deux exponentielles) :**

La cellule photovoltaïque est représentée par le circuit électrique suivant figure 3.10 , qui se compose d'une source de courant modélisant le flux lumineux, deux diodes pour la polarisation de la cellule, une résistance shunt et une résistance série.

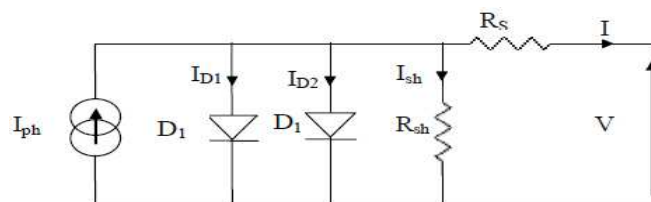


Figure 3.11 : schéma équivalent a deux diodes [32]

Le courant généré par la cellule PV est donné par la loi des mailles

$$I = I_{ph} - (I_{D1} + I_{D2}) - I_{sh}$$

Le courant de la diode est donné par :

$$I_{D1} = I_{01} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right]$$

$$I_{D2} = I_{02} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right]$$

Avec I_{01}, I_{02} courant de saturation des diodes.

$$I = I_{ph} - I_{01} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right] - I_{02} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right] - \left(\frac{V + IR_s}{R_{sh}} \right)$$

- **Modèle à deux diodes sans résistance shunt :**

La cellule photovoltaïque est représentée par le circuit électrique (figure 3.11), qui se compose d'une source de courant modélisant le flux lumineux (éclairage), deux diodes pour la polarisation de la cellule et une résistance série.

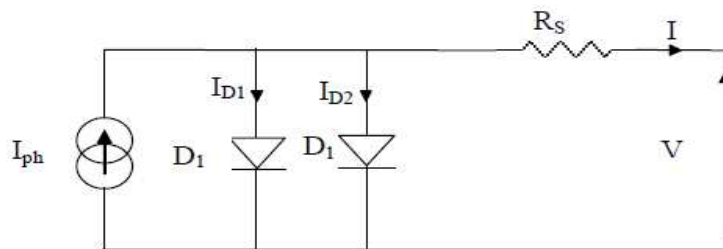


Figure 3.12: schéma équivalent a deux diodes sans résistance shunt [32]

Le courant généré par la cellule PV est donné par la loi des mailles

$$I = I_{ph} - (I_{D1} + I_{D2})$$

$$I = I_{ph} - I_{01} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right] - I_{02} \times \left[e^{\frac{q \times (V + IR_s)}{AKT}} - 1 \right]$$

D'une façon générale on peut mettre le circuit électrique équivalent d'une cellule solaire en schéma bloc comportant quatre paramètres (figure 3.12).

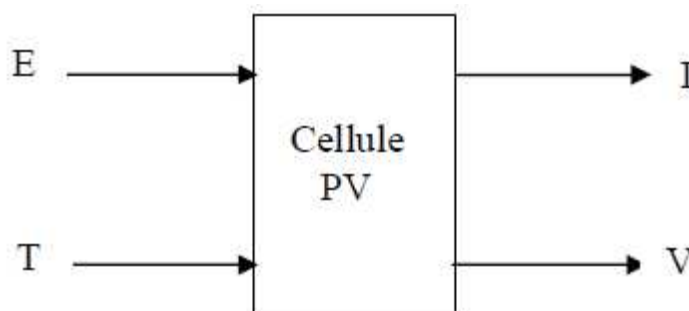


Figure 3.13 : schéma bloc d'une cellule PV [32]

Avec deux variables d'entrée :

E : ensoleillement dans le plan de la cellule (W/m²).

T : température de la cellule (°C).

Et deux variables de sortie :

I : intensité de courant fournie par la cellule (A).

V : tension aux bornes de la cellule.

8. Avantages et inconvénients de l'énergie photovoltaïque

Les avantages de l'énergie photovoltaïque les plus importants sont : [33]

8.1. Avantages :

- ✚ Energie indépendante, le combustible (le rayonnement solaire) est renouvelable et gratuit.
- ✚ L'énergie photovoltaïque est une énergie propre et non-polluante qui ne dégage pas de gaz à effet de serre et ne génère pas de déchets.
- ✚ Génère l'énergie requise.
- ✚ Réduit la vulnérabilité aux pannes d'électricité.
- ✚ L'extension des systèmes est facile, la taille d'une installation peut aussi être augmentée par la suite pour suivre les besoins de la charge.
- ✚ La revente du surplus de production permet d'amortir les investissements voir de générer des revenus.
- ✚ Entretien minimal.
- ✚ Aucun bruit.

8.2. Inconvénients :

- ✚ La fabrication des panneaux photovoltaïques relève de la haute technologie demandant énormément de recherche et développement et donc des investissements coûteux.
- ✚ Les rendements des panneaux photovoltaïques sont encore faibles.
- ✚ Nécessite un système d'appoint (batteries) pour les installations domestiques.
- ✚ Le coût d'investissement sur une installation photovoltaïque est cher.

9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique par cellule photovoltaïque, ainsi que les différents paramètres qui influence sur le rendement d'un cellule solaire, et enfin on a présenté les différents modèle (à une seule exponentielle et celui en double exponentielle)caractérisant les cellule photovoltaïque ce qui

nous a permis de modéliser et optimiser le modèle en une seule exponentielle (sans la résistance shunt) en fonction de la température et de l'éclairement .ceci va nous permette d'estimer la puissance fournie par une installation photovoltaïque.

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

1. Introduction

Dans ce chapitre nous avons appliquée quelques méthodes d'optimisation pour augmenter et maximiser la puissance P en fonction de plusieurs variables (paramètres) pour améliorer les performances du système photovoltaïque.

2. Modélisation mathématique :

L'étude de la physique d'une cellule photovoltaïque permet d'exprimer le courant de charge I par l'équation suivante : [34]

$$I = I_{\varphi} - I_d$$

où I_{φ} :photo courant

I_d : courant d'obscurité

Dans la mesure où l'on peut négliger le courant I_p compte tenu de la valeur élevée de la résistance parallèle R_p .

Le photocourant I_{φ} est proportionnel à l'éclairement direct S^* tombant sur la cellule .

Soit a_1 le coefficient de proportionnalité .

On a :

$$I_{\varphi} = a_1 S^*$$

Le courant d'obscurité, quand a lui, est de la forme :

$$I_d = a_2 [\exp(a_3 \cdot V) - 1].$$

Dans ces expressions les paramètres a_1 , a_2 et a_3 sont fonctions de la température T de fonctionnement de la cellule .

Ils peuvent être calculés par les expressions suivantes :

$$a_1 = 2.5 * 10^{-7} T + 2 * 10^{-4} \quad [\text{en A}/(\text{W}/\text{m}^2)]$$

$$a_2 = 4 * 10^{-6} T^4 \exp(-a_3) \quad [\text{en A}]$$

$$a_3 = \frac{q}{K.T} = \frac{1.6 * 10^{-19}}{1.38 * 10^{-23} . T} \quad [\text{en A}/\text{W}]$$

Avec T en degrés kelvin, étant la charge de l'électron (en coulomb) et K la constante de Boltzmann (en J/K).

On a donc : $I = a_1 S^* - a_2 [\exp(a_3 \cdot V) - 1]$

La puissance $P=I.V$ s'écrit alors :

$$P = a_1 S^* V - a_2 [\exp(a_3 \cdot V) - 1] V$$

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

3. Optimisation de la puissance par les méthodes de Newton, Dichotomie :

Fonction objective 1 :

Le but est maximiser la puissance P en fonction de V , on pose $P=f$ et $V = x$ et, on choisit $S^*=700 \text{ W/m}^2$ et $T = 300 \text{ K}$.

On obtient les valeurs suivantes pour les trois paramètres

$$a_1 = 2,75 \cdot 10^{-4}$$

$$a_2 = 5,3 \cdot 10^{-13}$$

$$a_3 = 38,65$$

$$D'où : f(x) = 0,1925 x - 5,3 \cdot 10^{-13} x e^{38,65 x}$$

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2]$ par :

$$f(x) = 0,1925 x - 5,3 \cdot 10^{-13} x e^{38,65 x}$$

$$\text{On sait que : } \max f(x) = - \min -f(x) = -\min g(x)$$

$$\text{Donc on pose : } g(x) = -f(x) = -0,1925 x + 5,3 \cdot 10^{-13} x e^{38,65 x}$$

Méthode de Newton :

L'algorithme est donné par :

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné}, \varepsilon = 10^{-4} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \end{cases}$$

Ou bien

$$\begin{cases} x^0 = 0,7, \varepsilon = 10^{-4} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - [g''(x^{(k)})]^{-1} g'(x^{(k)}) \end{cases}$$

La fonction g est différentiable, donc :

$$g'(x) = -0,1925 + 5,3 \cdot 10^{-13} \cdot ((1 + 38,65 \cdot x) \cdot e^{38,65 \cdot x} - 1)$$

$$g''(x) = 204,845 \cdot 10^{-13} ((2 + 38,65 \cdot x) e^{38,65 \cdot x} - 1)$$

Itération 1 :

$$x_1 = x_0 - [g''(x_0)]^{-1} g'(x_0)$$

$$x_1 = 1 - 0,0234$$

$$x_1 = 0,6756$$

Tableau 4.1 : Les résultats obtenus par la méthode Newton

X_k	$g'(x)$	$g''(x)$	$g'(x) / g''(x)$	\mathcal{E}
0.6756	2.9522	126.0259	0.0234	-0.0244
0.6522	1.0367	49.3215	0.0210	-0.0234

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

0.6311	0.3361	21.2350	0.0158	-0.0210
0.6153	0.0873	11.2510	0.0078	-0.0158
0.6076	0.0123	8.2386	0.0015	-0.0078
0.6061	3.6118e-004	7.7593	4.6548e-005	-0.0015
0.6060	3.3747e-007	7.7448	4.3574e-008	-4.6548e-005

D'où $x^* = 0.6060$ $f(x^*) = 0.1137$ c.à.d. la tension $V = 0.6060$ volt et la puissance $P = 0.1137$ w.

Méthode de dichotomie :

D'après la formule de la fonction g , on a la continuité et l'unimodalité de g sur l'intervalle $[0.5 ; 0.7]$, alors $g(x)$ admet un seul minimum dans cet intervalle, donc on peut appliquer la méthode de dichotomie avec $\varepsilon = 10^{-4}$: Alors on partage à l'aide de points d , c et e l'intervalle $[a, b]$ en quatre sous-intervalles égaux avec $a = 0,5$ et $b = 0,7$;

$$c = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0,5+0,7}{2} = 0,6$$

$$d = \frac{a+c}{2} = 0,55, \quad e = \frac{c+b}{2} = 0,65$$

Avec $g'(x) = -0,1925 + 5,3 \cdot 10^{-13} \cdot ((1 + 38,65 \cdot x) \cdot e^{38,65 \cdot x} - 1)$

Après les calculs, on obtient

$$g'(a) = -0.1898, g'(b) = 8.1659, g'(c) = -0.0414, g'(d) = -0.1724, g'(e) = 0.9343$$

$$g'(a) = -0.1898 < g'(d) = -0.1724 < g'(c) = -0.0414 < g'(e) = 0.9343 < g'(b) = 8.1659$$

On remarque que l'optimum est entre c et e

D'après la comparaison on peut éliminer a , b et d , donc le minimum est forcément entre c et e : Donc le nouvel intervalle est $[0.6; 0.65]$:

Après 15 itérations on trouve :

$$x^* = 0.6060$$

$$f(x^*) = 0.1137$$

c.à.d. la tension $V = 0.6060$ volt et la puissance $P = 0.1137$ w.

Tableau 4.2 : Comparaison entre la méthode de Newton et de Dichotomie

	Newton	Dichotomie
x^0	0.7	a=0.5 b=0.7
x^*	0.6060	0.6060
N-itération	7	15

Fonction objective 2 :

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

Le but est maximiser la puissance P en fonction de T (température) et de E (rayonnement), on pose $P=f$ et $T = x$ et $E = y$

On sait que :

$$P = a_1 E \cdot V - a_2 [\exp(a_3 \cdot V) - 1] V$$

On choisit $V=0.606$

D'où :

$$f(x, y) = 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot y \cdot x + 0,00012 \cdot y - 2,4 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 e^{-\frac{4637,68}{x}} + 2,4 \cdot 10^{-6} x^4 e^{-\frac{11594,2029}{x}}$$

On sait aussi que : $\max f(x, y) = -\min -f(x, y) = -\min g(x, y)$

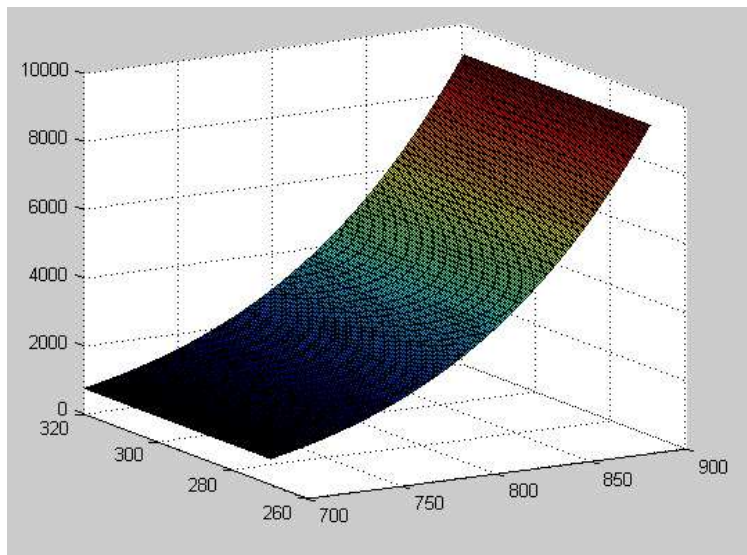


Figure 4.1 : la représentation graphique de la fonction $g(x, y)$.

Trouver le minimum de $g(x, y)$ revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow G(x, y) = 0 \rightarrow \begin{cases} G_1(x, y) = 0 \\ G_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -1,5 \cdot 10^{-7} \cdot y - 9,6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \cdot e^{-\frac{4637,68}{x}} - 0,0111 \cdot x^2 e^{-\frac{4637,68}{x}} \\ \quad + 9,6 \cdot 10^{-6} x^3 e^{-\frac{11594,2029}{x}} + 0,027 x^3 e^{-\frac{11594,2029}{x}} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -1,5 \cdot 10^{-7} \cdot x - 0,00012. \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow -1,5 \cdot 10^{-7} \cdot x - 0,00012 = 0$$

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

D'où $x = -800$ et $y = 7.5e+23$

D'où $(x, y) = (-800, 7.5e+23)$ est un point stationnaire.

En calculons la matrice hessienne au point stationnaire on trouve :

$$H = \begin{bmatrix} -8.46e + 10 & -1.5e - 07 \\ -1.5e - 07 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut bien constater que la matrice hessienne n'est pas semi définie positive donc les conditions d'optimalité de second ordre ne sont pas vérifiées, par conséquent le point

$(x, y) = (-800, 7.5e+23)$ n'est pas un minimum de g .

Fonction objective 3 :

Le but est maximiser la puissance P en fonction de T (température) et de V (tension), on pose $P=f$ et $V = x$ et $T = y$

On sait que :

$$P = a_1EV - a_2[\exp(a_3.V) - 1]V$$

On choisit $E=700W/m^2$.

D'où :

$$f(x, y) = \left(4 \cdot 10^{-6} \cdot y^4 \cdot e^{\left(\frac{11600(-1+x)}{y}\right)} - 4 \cdot 10^{-6} \cdot y^4 \cdot e^{\left(\frac{11600}{y}\right)} - 0,000175 \cdot y - 0,14 \right) \cdot x$$

On sait aussi que : $\max f(x, y) = -\min -f(x, y) = -\min g(x, y)$

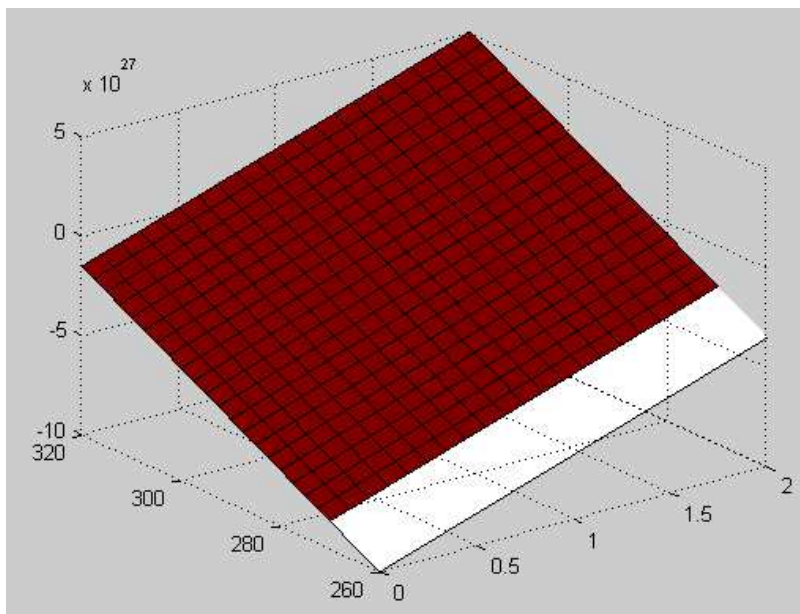


Figure 4.2 : la représentation graphique de la fonction $g(x, y)$.

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

La fonction n'admet pas un minimum dans \mathbb{R} car les conditions d'optimalité du premier ordre ne sont pas vérifiées en aucun point (x,y)

Physiquement l'augmentation de la température entraîne une diminution de la tension V et par suite une baisse de la puissance P, par conséquent la puissance va diminuer jusqu'à l'infini, donc pour trouver des résultats plus précis il faut beaucoup mieux utiliser des méthodes d'optimisation avec contraintes. [34]

4. Le nouveau modèle :

Tableau 4.3 : les données réelles de l'UDES (l'unité de développement des équipements solaire) :

(Puissance, courant et tension) d'un panneau photovoltaïque

T sens:	46.7	°C
T mod:	47.1	°C
E eff:	1006	W/m ²
Isc 0:	8.44	A
Uoc 0:	22.7	V
I _{pmax0} :	7.37	A
U _{pmax0} :	13.6	V
P _{pk} :	110.5	W

U in V	I in A	P in W
0	8,489936	0
6,192719	8,489936	52,57579
9,763339	8,373332	81,75168
10,50209	8,351051	87,70348
11,17454	8,269355	92,40623
11,83752	8,128242	96,21822
12,46261	7,920288	98,70749
13,04982	7,667772	100,0631
13,58968	7,370694	100,1654
14,10112	7,043908	99,327
14,57468	6,702268	97,6834
15,01035	6,345774	95,2523
15,40814	5,981853	92,16923
15,79646	5,632786	88,97806
16,14689	5,28372	85,31562
16,45943	4,956933	81,58832
16,76251	4,637575	77,7374
17,0277	4,33307	73,78223
17,2929	4,050846	70,05085
17,52967	3,776048	66,1929
17,74751	3,523532	62,53392
17,93693	3,285869	58,93842
18,12636	3,055634	55,3875
18,29684	2,855106	52,23941
18,46732	2,654578	49,02294
18,59991	2,476331	46,05954
18,73251	2,305511	43,18801
18,8651	2,149545	40,5514
18,97876	2,008433	38,11757
19,09241	1,874748	35,79346
19,17765	1,74849	33,53193
19,27236	1,629659	31,40737
19,3576	1,525681	29,53354
19,43337	1,421704	27,6285
19,49967	1,33258	25,98488
19,56597	1,243457	24,32944
19,61333	1,169187	22,93165
19,67015	1,087491	21,39111
19,72698	1,028075	20,28082

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

19,77433	0,961233	19,00774
19,81222	0,901817	17,867
19,8501	0,849828	16,86918
19,88799	0,79784	15,86743
19,92587	0,753278	15,00972
19,95429	0,708716	14,14193
19,9827	0,671582	13,42001
20,01111	0,62702	12,54736
20,03953	0,597312	11,96985
20,05847	0,567604	11,38527
20,08688	0,537896	10,80466
20,09635	0,508189	10,21274
20,12477	0,485908	9,778779
20,13424	0,4562	9,185237
20,15318	0,433919	8,744848
20,17212	0,411638	8,303616
20,18159	0,396784	8,007739
20,20053	0,374503	7,565169
20,21001	0,35965	7,268519
20,21948	0,344796	6,971587
20,22895	0,322515	6,524134
20,23842	0,315088	6,376879
20,25736	0,300234	6,081946
20,25736	0,292807	5,931496
20,2763	0,277953	5,63586
20,2763	0,263099	5,334677
20,28578	0,255672	5,186508
20,29525	0,248245	5,038198
20,29525	0,233391	4,736734
20,31419	0,225964	4,590282
20,31419	0,21111	4,288537
20,32366	0,21111	4,290537
20,32366	0,203683	4,139594
20,33313	0,196257	3,99051
20,33313	0,18883	3,839497
20,33313	0,181403	3,688483
20,3426	0,173976	3,539118
20,3426	0,166549	3,388034
20,35207	0,159122	3,238458
20,35207	0,159122	3,238458
20,35207	0,151695	3,087304
20,36155	0,144268	2,937516
20,36155	0,144268	2,937516
20,37102	0,136841	2,787588
20,37102	0,136841	2,787588
20,37102	0,136841	2,787588
20,37102	0,129414	2,636293
20,38049	0,129414	2,637519
20,38049	0,121987	2,486154
20,38996	0,121987	2,48731
20,38996	0,11456	2,335874
20,38996	0,11456	2,335874
20,38996	0,107133	2,184439
20,38049	0,107133	2,183424
20,38996	0,107133	2,184439
20,38996	0,099706	2,033004
20,39943	0,099706	2,033948
20,38996	0,099706	2,033004
20,38996	0,092279	1,881569
20,38996	0,092279	1,881569
20,4089	0,092279	1,883317
20,46762	0	0

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

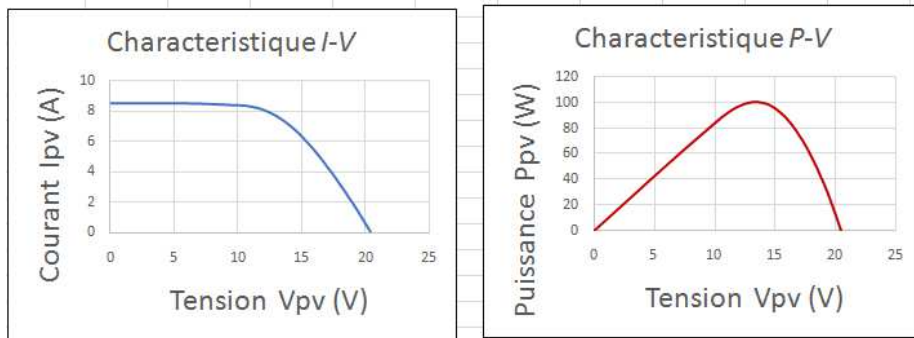


Figure 4.3 : les graphes de la puissance P et de courant I en fonction de tension V.

Par logiciel origin on a essayé de trouver un graphe approximatif de la réel pour trouver la fonction.

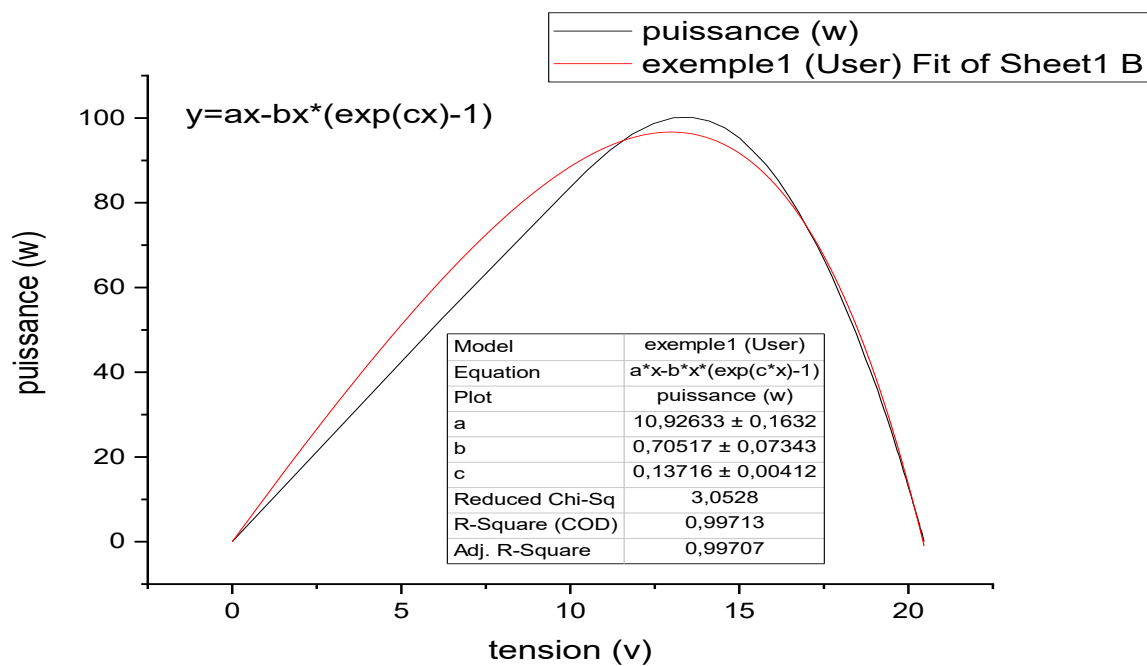


Figure 4.4 : Graphe de la puissance (courbe noir) et le graphe approximatif (courbe rouge) en fonction de la tension.

La fonction objective de la puissance en fonction de tension et donnée par :

$$f(x)=ax-bx(\exp(cx)-1)$$

$$a=11.0895$$

$$b=0.7786$$

Chapitre 4 : Optimisation de la puissance

$$c=0.1412$$

$$\text{D'où } f(x)=11.0895x-0.7786x(\exp(0.1412x)-1)$$

En résolvant cette fonction par l'algorithme de newton on trouve : $V_{\max}=12.20$ V et

$$P_{\max}=91.60$$
 W

Remarque : nous avons utilisé le calculateur **MAPLE** pour calculer le vecteur gradient et la matrice Hessienne des fonctions objectifs 1 et 2.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les méthodes d'optimisation présentées précédemment ne donnent qu'un bref aperçu des très nombreuses méthodes que l'on peut trouver dans la littérature. Le choix d'une méthode adaptée à la problématique traitée est généralement très difficile. Car si on a vu qu'il existe plusieurs méthodes d'optimisation, il n'existe pas de méthodes d'optimisation parfaite pour tous les types des problèmes d'optimisation. En effet, aucun algorithme ne peut logiquement prétendre être meilleur que les autres en termes de performances sur tous les types de problèmes. Il faut donc chercher en fonction du problème, la méthode là mieux adaptée. Ce choix va bien évidemment être conditionné par les propriétés et la nature de la fonction objective : convexité, linéarité, ou encore l'existence ou non de contraintes.

Dans ce travail, nous nous intéresser à l'optimisation de rendement de conversion des cellules solaires. L'objectif était de réaliser une optimisation assurant de trouver le rendement optimal de la cellule. L'approche consistait à faire simultanément varier plusieurs paramètres physiques et géométriques de la cellule solaire afin de trouver le jeu de paramètres donnant le meilleur rendement de conversion de la cellule.

Nous avons réalisé un test de méthode d'optimisation présentées dans le chapitre 4, en optimisant le rendement en fonction de plusieurs paramètres (la tension, la température et le rayonnement).

À partir de ce test, nous nous sommes vite rendu compte que les méthodes d'optimisation sans contraintes donnent la plupart du temps des paramètres optimaux hors des intervalles d'optimisation, ce qui peut conduire à des paramètres physiques et géométriques irréalisables.

D'où les méthodes d'optimisation sans contraintes ne permettent donc pas de respecter les limites physiques et géométriques de la cellule solaire. Par conséquent, l'espace de recherche de l'optimum devient très vaste.

Références

Références

- [1] Frederic de gournay, Aude Rondepierre. Introduction à l'optimisation Numérique 1
- [2] Mottelet, Stéphane. "RO04/TI07-Optimisation non-linéaire." ([2000](#)).
- [3] Technique d'optimisation, Max CERF 2018.
- [4] AZENCOTT, Robert. Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann. In: Séminaire de Probabilités XVI, [1980/81](#) Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique. Springer, Berlin, Heidelberg, [1982](#). p. [237-285](#).
- [5] Aude Rondepierre et Sébastien Tordeux , Introduction à l'optimisation Numérique, département STPI.
- [6] Moreau, Jean-Jacques. Fonctionnelles convexes. Séminaire Jean Leray, [1966](#), 2: [1-108](#).
- [7] Yannick PRIVAT, Introduction à l'optimisation Aspects théoriques et numériques Laboratoire, Jacques-Louis Lions, UMR [7598](#) Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 & CNRS.
- [8] Michel Bierlaire, Optimisation sans contrainte : condition d'optimalité, EPFL-Laboratoire transport et mobilité - ENAC
- [9] SHASHI, K., & MISHRA, R. (2021). *Introduction To Unconstrained Optimization With R*. Springer Verlag, Singapor.
- [10] Che-Rung Lee, March 1.2011.Numerical optimization unit 1 :one-demensional optimization .
- [11] Ibtissem didi,17 mars 2020. Optimisation .
- [12] Rahal, M. (2018). *Extension de certaines méthodes de recouvrement en optimisation globale* (Doctoral dissertation).
- [13] Chong, E. K., & Zak, S. H. (2004). *An introduction to optimization*. John Wiley & Sons.
- [14] Ceremade ceremade dauphine ~amic MNO,Méthodes numériques d'optimisation
- [15] R. Herbin, Analyse numérique I, télé-enseignement, L3 , Université d'Aix-Marseille, 10 septembre [2015](#)
- [16] Samir Kenouch, Chapitre 1 Algorithmes d'optimisation : application à des fonctions-objectifs non-linéaires Master Physique - département des sciences de la matière - umkb méthodes mathématiques et algorithmes pour la physique.

- [17] Hirriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe, p [17-19](#) et p [53-56](#)
- [18] Dahlquist, Germund & Bjorck, Numerical Methods, Ake ([trans.by](#) Ned Anderson) Published by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., [1974](#)
- [19] Boumahrat, M. et Gourdin, A. Méthodes numériques appliquées. OPU, Alger N, [1993](#), vol. 8
- [20] Manfred GILLI, Méthodes numériques, 2006, département d'économétrie Université de Genève
- [21] Serrar, A. (2019). *Étude et conception des systèmes de recharge solaire pour voiture électrique en Algérie* (Doctoral dissertation, Université du Québec à Trois-Rivières).
- [22] Sofia, B. L. (2015). Cours Energie Solaire Photovoltaïque. *Université A. MIRA de BEJAIA, Année universitaire 2014*.
- [23] Labouret, A., Cumunel, P., & Braun, J. P. (2001). *Cellules solaires: les bases de l'énergie photovoltaïque*. ETSF.
- [24] Ndiaye, A. (2013). *Étude de la dégradation et de la fiabilité des modules photovoltaïques-Impact de la poussière sur les caractéristiques électriques de performance* (Doctoral dissertation, Ecole Supérieure Polytechnique (ESP)-UCAD).
- [25] Yaiche, R. (2007). Logiciel de calcul des paramètres astronomiques à l'usage des installations solaires. *Revue des Energies Renouvelables ICRES-07 Tlemcen*, 343-348.
- [26] Marir, M. Simulation numérique de modèle de collecteur hybride photovoltaïque/photothermique.
- [27] EYOUM, P. H., DE FAIBLE, C. D. U. A., & SUR, B. B. (2008). COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAITRISE EN GENIE ELECTRIQUE.
- [28] ZERDOUDI, A., & Chenni, R. (2015). Etude de l'influence des différents paramètres sur un module photovoltaïque. *Sciences & Technologie. A, sciences exactes*, 19-24.
- [29] Helali, K. (2012). *Modelisation d'une cellule photovoltaïque: etude comparative* (Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri).
- [30] Hichem, M. M. (2013). Détermination intelligente de la puissance maximale des modules photovoltaïques>>. *Mémoire Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister, UNIVERSITE EL HADJ LAKHDAR BATNA, 2014*.

[31] Slama, F. (2012). *Modélisation d'un système multi générateurs photovoltaïques interconnectés au réseau électrique* (Doctoral dissertation, Université de Sétif 1-Ferhat Abbas).

[32] Boukhers, D. (2007). *Optimisation d'un système d'énergie photovoltaïque. Application au pompage.*

[33] Lalouni, S. (2005). *Optimisation de la qualité d'énergie électrique dans le cas d'un chargeur de batteries* (Doctoral dissertation, Béjaïa, Université Abderrahmane Mira. Faculté des Sciences et des Sciences de L'ingénieur).

[34] Bernard, J. (2011). *Energie solaire : calculs et optimisation.* Ellipses.

[35] Abdoulwahab Adaine. *Optimisation numérique de cellules solaires à très haut rendement à base d'InGaN.* Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Lorraine, 2018. Français.