

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique*  
*Université de Blida*  
*Département Aéronautique*



**Mémoire de fin d'étude**  
En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur  
d'état en aéronautique  
Option : Installations

# THEME

*Estimation de la direction d'arrivée  
(DOA) des signaux par les méthodes  
haute résolution Esprit et TLS\_Esprit*

Présenté par :

- MANSOURI MUSTAPHA.
- SAILIA DJAMEL.

Proposé par :

Melle DOUDOU .F

ANNEE UNIVERSITAIRE 2004/2005



## REMERCIEMENTS

*Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la force de mener à bien ce travail.*

*Nous souhaiterions à remercier particulièrement notre promotrice M<sup>elle</sup> DOUDOU, pour l'aide précieuse fournie pour la réalisation de cette étude. Nous la remercions aussi pour ses précieux conseils et son soutien et sa sympathie.*

*Nous remercions aussi nos parents pour leur soutien moral durant toute cette période.*

*Nous tenons aussi à remercier et à exprimer nos profondes gratitudees à JALLAL, le responsable de la salle de navigation pour son aide durant les jours de la rédaction de cette mémoire.*

*Merci aussi à toutes les personnes qui ont contribué plus ou moins à la réussite de cette étude.*

## *❧ Dédicace ❧*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- › Ma mère*
- › Mon père*
- › Mes frères et mes sœurs*
- › Tous mes amis*

**MANSOURI MUSTAPHA**

## ❧ Dédicace ❧

*Je dédie ce modeste travail à :*

❧ *Ma mère.*

❧ *Mon père.*

❧ *Mes frères et mes sœurs.*

❧ *Les petits enfants de la famille ( Illiasse, Nasro, Nydal )*

❧ *La première promotion des IP 1999, particulièrement Sofiane,*

*El hadj, Samir, Salim, Aziz, Ehcen, Salahi, Karim, Hadeef et*

*Nassim.*

❧ *Tous mes amis.*

SAILIA DJAMEL

## Résumé

Un travail de recherche important est déployé depuis plusieurs années pour permettre aux radars de réaliser la localisation des cibles. Les radars à haute résolution sont particulièrement adaptés pour cette tâche, car ils sont capables de séparer des cibles très proches.

Nous proposons dans cette thèse le développement et l'analyse de deux méthodes haute résolution de traitement d'antenne, la méthode ESPRIT et la méthode TLS\_ESPRIT qui ont pour but d'estimer les angles d'arrivée des signaux (DOA).

Il s'agit de comparer leurs performances, en matière de localisation de sources, et cela, en comparant les biais et les variances obtenus à partir des simulations pour chacune des méthodes étudiées en tenant compte de certains paramètres (le rapport signal à bruit, position des sources, dimension du réseau ...etc).

Nous avons abordé par la suite, le problème de signaux cohérents, où les algorithmes proposés pour la détermination de la DOA, Esprit et TLS-Esprit, échouent dans la convergence des résultats. Pour résoudre ce problème, nous avons fait introduire une intéressante méthode qui permet la décorrélation des signaux sources. Cette méthode porte le nom de schéma de lissage spatial.

Et montrons par la suite que l'algorithme TLS\_ESPRIT est le plus adéquat pour donner une estimation stable, précise et robuste des positions des cibles.

## Abstract

Many efforts have been devoted in the last years to the automatic recognition of the radar targets. High resolution radars are highly recommended for this task, because of their capability to separate very near targets.

We suppose in that thesis the development and the analysis of two methods high determination of array signal processing, the Esprit method and the TLS\_Esprit method are used for estimate signals arrival direction (DOA.)

It acted to compare their performances, concerning localisation sources, and heir, at comparing bias and variances gotten at depart simulations about each method studied to keeping account from some parameters (signal-to-noise ratio, position of sources, size of array... etc.)

After we have accosted, the problem of coherent signals, where the algorithms intended for the determination of DOA, Esprit and TLS\_Esprit, fail in the convergence of results. To resolve this problem, we have inserted an interesting method which permits the decorrelation of sources signals. This method called spatial smoothing schemes.

It has been found that the TLS-ESPRIT algorithm is the most appropriate to provide a stable, accrete and robust estimation of the targets positions.

## Les notations

- $||$  : Module d'un vecteur.
- $*$  : Le conjugué d'une matrice.
- $T$  : Le Transposé d'une matrice.
- $H$  : Le Transposé de conjugué d'une matrice.
- $\sim$  : Valeur pris en unité absolue.
- $+$  : Pseudo inverse d'une matrice.
- $\wedge$  : Valeur estimée.
- $I, J$  : Matrices identités.
- $Tr ( )$  : Trace d'une matrice.
- $Det ( )$  : Déterminant d'une matrice.
- $rang ( )$  : Rang d'une matrice.
- $Diag ( )$  : Matrice diagonale remplie par les valeurs d'un vecteur.
- $E[ ]$  : Moyenne statistique.
- $\oplus$  : Symbole d'orthogonalité entre deux sous espaces.
- $i, j, k$  : Indices pour décrire les éléments d'une matrice.
- $b$  : Indices pour représenter les éléments de sortie du sous réseau de retour.
- $f$  : Indices pour représenter les éléments de sortie du sous réseau directe.
- $l$  : Indice pour représenter le  $l^{ème}$  sous réseau.



## Les symboles

$OEM$	: Onde électromagnétique.
$\lambda$	: Longueur d'onde de l'onde porteuse.
$\omega_0$	: Pulsation de l'onde porteuse.
$f_0$	: Fréquence de l'onde porteuse.
$P$	: Puissance de la source.
$P_B$	: Puissance calculée par la méthode Beamformer.
$P_C$	: Puissance calculée par l'estimateur de Capen.
$P_L$	: Puissance calculée par prédiction linéaire.
$u(t)$	: Vecteur représentant le signal source.
$n(t)$	: Vecteur représentant le bruit.
$c$	: Vitesse de la lumière.
$d$	: Distance interélémentaire.
$\theta, DOA$	: Direction d'arrivée.
$\tau$	: Retard de propagation par rapport au capteur de référence.
$M$	: Nombre total de capteurs dans le réseau.
$Q$	: Nombre de capteurs dans le sous réseau.
$K$	: Nombre de sources.
$L$	: Nombre de sous réseaux.
$\rho$	: Coefficient de corrélation.
$\alpha$	: Atténuation complexe.
$\phi(t)$	: Phase du signal.
$\delta_{ij}$	: Fonction de Dirac.
$w$	: Facteur de Pesée.



- $n$  : Nombre d'observations.
- $(SNR)_t$  : Rapport signal sur bruit de chaque source.
- $(SNR)_o$  : Rapport signal sur bruit à la sortie du réseau.
- $x$  : Le signal issue à partir de la sortie du capteur.
- $X$  : Vecteur comprenant les signaux de sortie issues de chaque capteur.
- $a(\omega)$  : Vecteur de direction normalisée.
- $A$  : Matrice contenant les  $K$  vecteurs de directions (matrice de Vandermonde).
- $U$  : Matrice contenant les  $K$  vecteurs sources.
- $R_{xx}, R$  : Matrice de covariance de sortie du réseau.
- $R_u$  : Matrice de covariance de sous espace signal.
- $\lambda_i$  : Valeurs propres de  $R$ .
- $\mu_i$  : Valeurs propres de  $R_u$ .
- $\beta_i$  : Vecteurs propres associé au  $\lambda_i$ .
- $B$  : Matrice contenant les vecteurs propres.
- $H$  : Espace de HILBERT.
- $N$  : Sous espace de dimension  $(M - K)$ .
- $S$  : Sous espace de dimension  $(K)$ .
- $\nu_i$  : Représentant les nombres complexes contenant les directions d'arrivée.
- $\Phi$  : Matrice diagonale contenant les  $\nu_i$ .
- $\Lambda$  : Matrice diagonale obtenue par la diagonalisation d'une matrice.
- $\xi$  : Log de vraisemblance.
- $R^f$  : Représente la matrice de covariance du sous réseau directe (Forward).
- $R^b$  : Représente la matrice de covariance du sous réseau de retour (backward).

# LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1 :** Réseau linéaire dispersif, description.
- Figure 1.2 :** Guide d'ondes avec fentes sur le grand côté.
- Figure 1.3 :** Distributeurs apériodiques.
- Figure 1.4 :** Réseau circulaire : description.
- Figure 1.5 :** Réseau cylindrique : représentation.
- Figure 2.1 :** Paire d'éléments de capteurs identiques.  $u(t)$ ,  $v(t)$  représentant l'enveloppe des signaux complexes  $\tilde{u}(t)$  et  $\tilde{v}(t)$ .
- Figure 2.2 :** Schéma de traitement en utilisant des facteurs de phases.
- Figure 2.3 :** Puissance de sortie du réseau obtenu pour la méthode Beamformer et estimateur de Capon. Deux angles d'arrivées ( $60^\circ$  et  $100^\circ$ ) sont détectés, avec  $SNR_0 = 10\text{dB}$ , sept capteurs uniformes sont utilisés dans le réseau.
- Figure 2.4 :** Estimateur de Capon à variance minimale et la méthode de prédiction linéaire basées sur l'estimation de la puissance. Six capteurs sont utilisés pour recevoir 03 sources suffisamment rapprochées.
- Figure 3.1 :** Une scène typique de rangée d'antennes pour des sources non cohérentes.
- Figure 3.2 :** Une situation complètement cohérente.
- Figure 3.3 :** Méthode de lissage spatial (forward/backward).
- Figure 4.1 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.2 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 80).
- Figure 4.3 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 500).
- Figure 4.4 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Trente capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.5 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Quatre capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.6 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à -11dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.7 :** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $62^\circ$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).

- Figure 4.8** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) sans lissage spatial. Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux, Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 1, nombre des observations = 250).
- Figure 4.9** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=9$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 1, nombre des observations = 250).
- Figure 4.10** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=9$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.11** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=9$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à -11dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.12** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=8$ ). Dix capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.13** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=8$ ). Douze capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.14** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=9$ ). Trente capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).
- Figure 4.15** : Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=87$ ). Quatre vingt treize capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

# LISTE DES TABLEAUX

- Tableau (1.1)** : Comparaison entre les types de lignes et d'antennes utilisés dans les réseaux.
- Tableau (4.1)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $n=250$ ).
- Tableau (4.2)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $n=80$ ).
- Tableau (4.3)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $n=500$ ).
- Tableau (4.4)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $M=30$ ).
- Tableau (4.5)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $M=4$ ).
- Tableau (4.6)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $(SNR_i)=-11\text{dB}$ ).
- Tableau (4.7)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (rapprochement des cibles).
- Tableau (4.8)** : Les valeurs du biais pour sources cohérentes ( $S=1$ ) sans lissage spatial.
- Tableau (4.9)** : Les valeurs du biais pour sources cohérentes ( $S=1$ ) avec lissage spatial.
- Tableau (4.10)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $S=30$ ).
- Tableau (4.11)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $SNR_i=-11\text{dB}$ ).
- Tableau (4.12)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $L=3$ ).
- Tableau (4.13)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $L=5$ ).
- Tableau (4.14)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (sources rapprochées).
- Tableau (4.15)** : Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (sources rapprochées,  $n/2 < Q < n/3$ ).

## TABLE DES MATIERES

<i>Remerciements</i> .....	I
<i>Dédicaces</i> .....	II
<i>Résumé</i> .....	IV
<i>Notations et Symboles</i> .....	V
<i>Liste des figures</i> .....	VIII
<i>Liste des tableaux</i> .....	X
<i>Introduction</i> .....	1
<b>Chapitre 01 : Généralités sur les réseaux d'antennes.</b>	
1.1 Introduction.....	3
1.2 Généralités sur les ondes planes.....	3
1.3 Les phénomènes de propagation. ....	4
1.3.1 Dispersion fréquentielle.....	4
1.3.2 Interactions obstacles-OEM. ....	4
1.3.2.2 Diffraction. ....	4
1.3.2.1 Réflexion et réfraction.....	5
1.3.2.3 Diffusion. ....	5
1.4 Réseaux d'antennes.....	5
1.4.1 Réseaux linéaires. ....	6
1.4.1.1 Réseaux linéaires dispersifs. ....	6
1.4.1.2 Réseaux linéaires non dispersifs. ....	7
1.4.2 Réseaux circulaires.....	9
1.4.3 Réseau cylindrique. ....	10
1.4.4 Réseau plan. ....	10
<b>Chapitre 02 : Les méthodes classiques de détection de signaux multiples.</b>	
2.1 Introduction.....	12
2.2 Signaux et bruit. ....	12
2.3 Avantage de l'utilisation du réseau d'antennes.....	16
2.4 Techniques conventionnelles.....	18
2.4.1 Beamformer. ....	19
2.4.2 Estimateur de Capon. ....	20
2.4.3 Méthode de prédiction linéaire. ....	21



**Chapitre 03 : Les méthodes haute résolution de détection de signaux multiples.**

3.1	Introduction aux méthodes hautes résolution (HR).....	22
3.2	Terminologie des méthodes HR. ....	22
3.3	Technique basée sur les vecteurs propres. ....	23
3.4	Cas complément cohérent. ....	27
3.5	Schéma de lissage spatial.....	31
	(Détermination des directions d'arrivée dans un environnement cohérent.)	
3.6	La méthode ESPRIT. ....	38
3.6.1	Origines. ....	38
3.6.2	Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT). ....	38
3.7	La résolution par TLS_ESPRIT. ....	40

**Chapitre 04 : Simulations des méthodes Esprit et TLS-Esprit  
pour la détermination de la DOA.**

4.1	Introduction.....	43
4.2	Calcul de la matrice de covariance .....	43
4.3	Structure du programme principal .....	44
4.4	Structure des sous programmes .....	47
4.4.1	Estimation de la matrice de covariance.....	47
4.4.2	L'algorithme de lissage spatial.....	47
4.4.3	L'algorithme ESPRIT. ....	47
4.4.4	L'algorithme TLS_ESPRIT. ....	48
4.5	Simulation et commentaires.....	49
4.5.1	Simulations. ....	49
4.5.2	Commentaires. ....	65
	<b>Conclusion</b> .....	67

**Bibliographie.**

**Annexes.**

---

# **Introduction**



# INTRODUCTION

Le traitement d'antenne est un domaine de traitement de signal qui a suscité beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique au cours de ces trois dernières décennies. Le problème de l'estimation de direction d'arrivée DOA de sources en particulier fait l'objet de nombreuses études qui ont permis notamment l'élaboration des méthodes classiques comme beamformer, Estimateur de Capon, méthode de prédiction linéaire.

Les performances de ces méthodes sont en générale évaluées en supposant d'une part que les réseaux d'antennes utilisés sont linéaires, à répartition régulière, uniformes des capteurs et d'autre part que les sources et le bruit sont gaussiens, temporellement non corrélés et indépendants entre eux.

Actuellement, le traitement d'antenne est renforcé par suite de l'augmentation des moyens de calculs en rapidité et en volume. Il couvre des domaines aussi différents que la radio-astronomie, le sonar, le radar, la tomographie (l'imagerie médicale), la sismique, la physiologie.

Plusieurs méthodes d'analyse spectrale paramétrique ont été appliquées au traitement d'antenne, leur introduction a conduit à une certaine amélioration par rapport aux méthodes classiques, ce qui a permis de les qualifier de méthodes à « haute résolution » comme la méthode **MUSIC, ESPRIT, TLS-ESPRIT**.

Le traitement d'antenne est le traitement de signal que l'on doit réaliser en aval des antennes. Ces antennes peuvent être utilisées de deux manières :

- l'écoute passive, c'est la réception des sources étrangères ou des signaux émis par des émetteurs indépendants, exemples, les radios et le radar en électromagnétisme, l'écoute des bruits émis par des avions en acoustique aérienne ou des bruits émis par des navires ou des sous-marins en sonar.
- l'écoute active, c'est la détection des réflexions des signaux émis par l'antenne elle-même ou par un dispositif lui étant associé, sur des corps étrangers.

Le traitement d'antenne peut être modélisé par un modèle, ayant  $M$  capteurs qui représentent les antennes localisant  $K$  sources émettant des signaux.

Dans ce cadre général notre étude a porté sur les points suivants :

- Chapitre 01 présente des généralités sur les phénomènes de propagation et les types de réseaux d'antennes qui existent.
- Chapitre 02 est consacré à l'étude des méthodes conventionnelles basant sur l'estimation de la puissance des sources en fonction de leurs angles d'arrivée , parmi ces méthodes , on va citer la méthode Beamformer, Estimateur de Capon, méthode de prédiction linéaire.
- Chapitre 03 est consacré à l'étude des méthodes à haute résolution qui sont des méthodes basées sur la décomposition de l'espace des observations en deux sous espaces : un sous espace signal et un sous espace bruit, parmi ces méthodes on va étudier les méthodes : MUSIC, ESPRIT, TLS-ESPRIT.
- Chapitre 04 présente une simulation du problème posé en utilisant les méthodes à haute résolution ESPRIT et TLS-ESPRIT en comparant leur performance en terme de résolution et robustesse au bruit.

## **Chapitre 1**

---

# **Généralités sur les réseaux d'antennes**

## 1. Généralités sur les réseaux d'antennes

### 1.1 Introduction

La propagation des OEM d'une zone de l'espace à une autre et d'un instant à l'autre est décrite par les équations de Maxwell et en particulier par l'équation d'onde, appelée aussi équation de propagation. De plus une liaison entre deux points nécessite le rayonnement et la réception du champ électromagnétique, opérations effectuées par des antennes.

On décrit ensuite les différents phénomènes de propagation pouvant être rencontrés dans la réalité (dispersion fréquentielle et interactions obstacles).

Enfin, On abordera les réseaux d'antennes, éléments indispensables pour le traitement d'antennes.

### 1.2 Généralités sur les ondes planes

La solution élémentaire d'onde plane est largement utilisée dans le contexte de la propagation en espace libre. Physiquement, cette approximation est valable dans le cas où la zone d'observation est suffisamment éloignée de la source. Pour valider cette approximation, on donne une définition d'une onde plane.

Une onde plane est une onde dont les surfaces équiphasés forment des plans. Quelle que soit la forme des surfaces équiphasés (par exemple sphériques ou planes), la direction de propagation de l'onde en un point est définie par la direction perpendiculaire à la surface équiphasé autour de ce point. La direction de propagation d'une onde plane est donc identique en tout point. En pratique, on l'utilise lorsque l'hypothèse champ lointain est satisfaite. L'hypothèse champ lointain signifie que les distances entre la source et les différents points du récepteur sont approximativement égales.



### 1.3 Les phénomènes de propagation

#### 1.3.1 Dispersion fréquentielle

Les phénomènes de dispersion fréquentielle s'expriment par une variation des propriétés électromagnétiques du milieu en fonction de la fréquence. Dans un milieu sans pertes, ceci se traduit par une variation de la vitesse de propagation avec la fréquence. Dans un milieu à pertes, l'atténuation peut dépendre de la fréquence et même si la vitesse de propagation de l'onde est constante avec la fréquence, on observe des dispersions fréquentielles.

Dans les deux cas, c'est la variation du nombre d'onde avec la fréquence qui caractérise la dispersion fréquentielle. Dans le cas d'un milieu non dispersif, la relation de dispersion étant linéaire, la vitesse de phase est égale à la vitesse de la lumière dans le milieu. La vitesse de groupe est la vitesse à laquelle un groupe d'ondes de fréquences assez proches se propage. Elle

s'exprime par  $V_g = \frac{d\omega}{dk}$  où  $k$  représente le nombre d'onde.

et cette pente représente donc la relation de dispersion autour d'une fréquence donnée. Néanmoins, l'information se propage à la vitesse de groupe et non à la vitesse de phase et son transport reste donc toujours inférieur à la vitesse de la lumière dans le vide.

D'autre part, le phénomène de dispersion fréquentielle se retrouve dans les milieux à pertes et plus particulièrement lors des interactions contre des obstacles.

#### 1.3.2 Interactions obstacles-OEM

Ces phénomènes représentent des interactions possibles entre les obstacles et le champ électromagnétique.

##### 1.3.2.1 Réflexion et réfraction

La réflexion et la réfraction ont lieu sur des obstacles de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde. La réfraction décrit l'onde transmise à travers l'obstacle.

Si l'obstacle est parfaitement conducteur, il n'y a pas de transmission de l'onde, ce qui signifie que toute l'énergie est réfléchie.

Les coefficients de réflexion et de réfraction dépendent des propriétés électromagnétiques de l'obstacle, de la polarisation, de la fréquence et de la direction de l'onde incidente.

Lorsqu'il y a des irrégularités de dimension comparable voire supérieure à la longueur d'onde sur la surface de l'obstacle, la réflexion devient diffuse, et dans ce cas l'onde est réfléchie dans plusieurs directions pour une seule direction incidente. De même lorsque le plan de réflexion est de dimension finie, même s'il est lisse, la réflexion devient diffuse. On parle alors de réflexion diffuse cohérente.

### **1.3.2.2 Diffraction**

La diffraction a lieu sur l'arrête d'obstacle de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde ou sur des obstacles dont certaines dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde. Le principe de Huyghens , qui dit que chaque point éclairé de l'obstacle peut s'apparenter à une source repropageant l'onde sous forme sphérique, permet de prendre en compte et calculer la diffraction. On peut citer, par exemple, la diffraction par dessus des toits ou sur les coins des bâtiments. Généralement, l'énergie diffractée est de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'obstacle et que la fréquence devient plus grande.

### **1.3.2.3 Diffusion**

La diffusion d'une onde a lieu lorsque celle-ci arrive dans un milieu contenant beaucoup d'obstacles de dimensions de l'ordre de la longueur d'onde. Dans ce cas, l'onde est redirigée dans toutes les directions avec différentes atténuations. L'effet sur un obstacle pris séparément relève de la diffraction mais lorsqu'on l'étudie dans une zone à fortes densité d'obstacles, on préférera utiliser une approche statistique débouchant sur le mécanisme de diffusion. On retrouve ce type de phénomènes en présence d'arbres, par exemple.

## **1.4 Réseaux d'antennes**

Un réseau d'antennes est constitué comme son nom l'indique par plusieurs antennes élémentaires (appelées aussi capteurs) dont les signaux issus des ports, d'entrée ou de sortie, selon le cas émission ou réception, sont utilisés en coopération. Pour l'application concernée, la disposition relative des antennes élémentaires est figée et elles sont généralement fixées sur un même support.

Parmi les réseaux les plus répandus, on retrouve les réseaux uniformes linéaires, sphériques, cylindriques, circulaires et rectangulaires. Pour ces réseaux, les antennes élémentaires sont généralement choisies les plus identiques possibles et ce d'autant plus dans le contexte de l'estimation des directions d'arrivée (DOA).

### 1.4.1 Réseaux linéaires

Les réseaux linéaires sont utilisés principalement en radar

- soit directement pour certaines applications telles que radars secondaires (ou IFF, Interrogation Friend or Foe), radars de trafic maritime...
- soit, plus généralement, comme composant d'une structure plus complexe.

On peut, par exemple, les empiler pour former un réseau plan.

On peut classer les réseaux linéaires en deux types

- les réseaux dispersifs, qui ont une direction de rayonnement maximal qui varie avec la longueur d'onde.
- les réseaux non dispersifs, c'est-à-dire ceux dont la direction de rayonnement maximal ne dépend pas de la longueur d'onde.

#### 1.4.1.1 Réseaux linéaires dispersifs

- Principe

Ces réseaux sont aussi appelés réseaux à alimentation série, parce que les différentes sources rayonnantes sont alimentées successivement à partir d'une seule ligne d'alimentation.

On demande généralement à ces réseaux d'avoir les trois propriétés suivantes

- absence de lobe de réseau.
- TOS (taux d'ondes stationnaire) faible.
- direction du rayonnement maximal voisin de la normale au réseau.

La structure générale représentée par la figure 1.1 permet de satisfaire ces trois exigences.

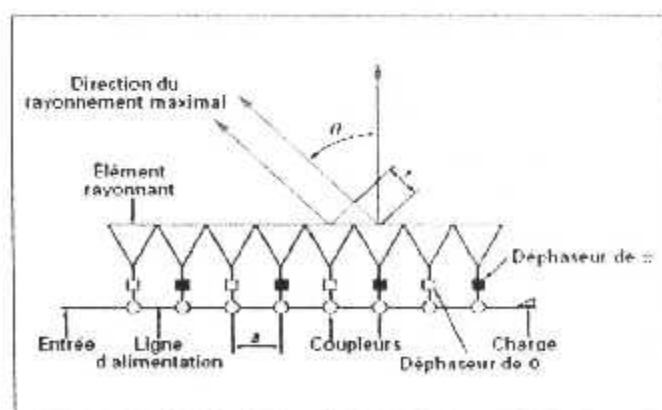


Figure 1.1 Réseau linéaire dispersif, description.



▪ **Exemples de réseaux linéaires dispersifs**

Les guides à fentes sont des réseaux linéaires dispersifs très utilisés, parce qu'ils sont faciles à réaliser et donc économiques, à faibles pertes ; ils peuvent de plus fournir des diagrammes à très faibles lobes de réseau.

Si le balayage n'est pas une propriété recherchée, il faut tenir compte du fait que la direction du faisceau varie avec la fréquence.

Les fentes peuvent être réalisées soit sur le grand côté, soit sur le petit côté.

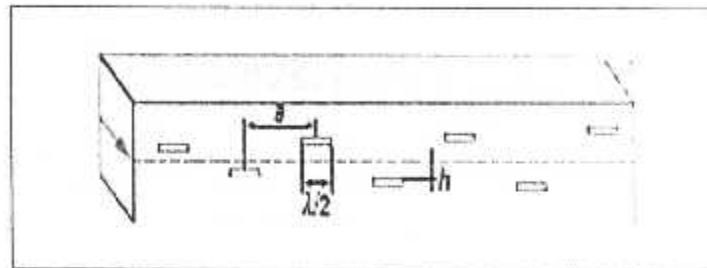


Figure 1.2 Guide d'ondes avec fentes sur le grand côté.

**1.4.1.2 Réseaux linéaires non dispersifs**

Le gros inconvénient des réseaux dispersifs est la variation de leur direction de rayonnement maximal avec la fréquence. Si parfois cette propriété est un avantage (balayage électronique par la fréquence), généralement c'est un handicap qui oblige à réaliser des réseaux non dispersifs, ceux-ci ont la propriété d'avoir un faisceau fixe quelle que soit la fréquence et la plupart du temps dans la direction normale au réseau.

Dans un tel réseau, l'alimentation des éléments rayonnants est faite en parallèle, c'est-à-dire que tous les chemins électriques entre chacun et l'entrée de l'antenne sont égaux.

Les réseaux linéaires non dispersifs peuvent être caractérisés par

- la nature du distributeur.
- le type de ligne.
- l'antenne élémentaire.
- le type de coupleur.

▪ **Distributeur**

La figure 1.3 montre les deux types de distributeurs apériodiques généralement utilisés.

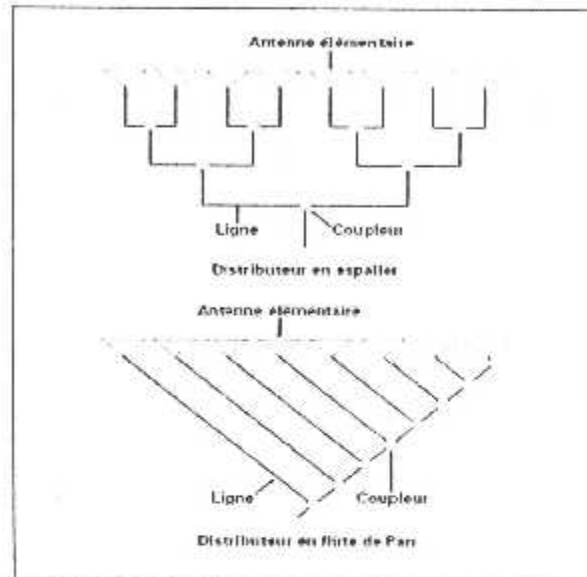


Figure 1.3 Distributeurs apériodiques.

▪ **Ligne et antenne**

Tous les types de lignes sont utilisables et ont été utilisés. Le tableau suivant les compare entre elles et indique le type d'antenne le mieux adapté.

Type	Avantages principaux	Inconvénients principaux	Antennes élémentaires préférentielle
Coaxial	- Peu coûteux - Souplesse par le « packaging »	- Connectique complexe - pertes	- Dipôle - hélice
Guide rectangulaire	- Très faibles pertes - Apte au puissance élevées.	- Connectique complexe - Poids - coût	- Cornet
Microstrip ou triplaque à diélectrique	- Peu cher - Léger - Apte à la photogravure - Intègre facilement des déphaseurs ou des modules actifs.	- Pertes - Incompatible avec des puissance élevées	- Patch - Dipôle
Triplaque à air	- Apte à la photogravure - Intègre facilement des déphaseurs ou des modules actifs - Pertes faibles	- Nécessite la pose de très nombreux petit supports (nécessitant un robot pour des réalisations industrielle)	- Dipôle - hélice

Tableau (1.1) Comparaison entre les types de lignes et d'antennes utilisés dans les réseaux.

- **Coupleurs**

Les coupleurs peuvent être directifs ou non directifs.

- Les coupleurs directifs ont l'avantage d'être adaptés à chaque entrée, ce qui évite les réflexions internes dues soit aux tolérances de fabrication, soit à la géométrie du réseau. Ces coupleurs sont plus complexes et donc plus chers, notamment à cause de la charge qui doit terminer le quatrième accès.

**Nota :** un coupleur directif comporte 4 accès ; dans les distributeurs, on utilise généralement 3 accès (l'entrée et deux sorties) ; le quatrième accès est fermé sur charge.

- Les coupleurs non directifs qui sont de simples « tés » sont moins chers et moins performants pour les raisons indiquées précédemment.

### 1.4.2 Réseaux circulaires

Les réseaux circulaires sont des réseaux dont les antennes élémentaires sont situées sur un cercle. On va considérer uniquement le cas d'un réseau régulier c'est-à-dire un réseau dont le pas est constant. La figure 1.4 illustre ce type de réseau.

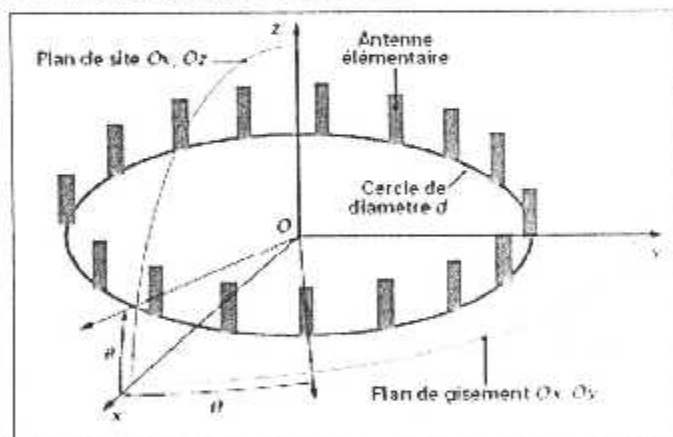


Figure 1.4 Réseau circulaire description.

- **Intérêt du réseau circulaire**

C'est l'antenne fixe la plus simple qui permette de rayonner (ou de recevoir) sur un angle de 360°. Si chaque source est munie d'un déphaseur, on peut pointer, dans n'importe quelle direction du plan horizontal, un faisceau qui garde les mêmes caractéristiques (contrairement, par exemple, à un réseau linéaire dont le diagramme s'élargit d'autant plus que l'on pointe le faisceau loin de la normale).

### 1.4.3 Réseau cylindrique

Le réseau cylindrique est bien adapté pour balayer un faisceau sur  $360^\circ$  en gisement, sans déformation, en raison de son axe de symétrie circulaire.

Le réseau cylindrique est généralement constitué de sources régulièrement réparties sur un cylindre, comme sur la figure 1.5.

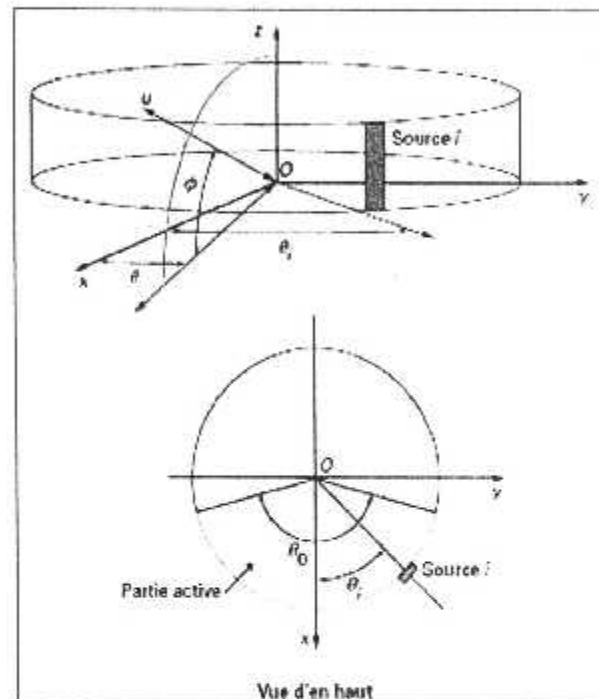


Figure 1.5 Réseau cylindrique représentation.

### 1.4.4 Réseau plan

Les réseaux plans sont très utilisés, notamment dans les antennes à balayage électronique qui ont tendance à devenir la norme dans les radars.

Les réseaux plans réguliers sont les plus utilisés, ils sont généralement constitués par un grand nombre d'antennes élémentaires. Toutes les antennes simples peuvent être utilisées.

- La polarisation à rayonner
  - hélice, dipôles en croix pour la polarisation circulaire.
  - dipôle simple, patch, embouchure de guide, petit cornet, fente pour la polarisation rectiligne.
- Le type de distributeur
  - un guide, par exemple, est mieux adapté comme antenne élémentaire, si la distribution se fait en guides d'ondes.
  - un dipôle est facile à réaliser, si la distribution est en triplaque ou en microstrip.

## **Conclusion**

Nous avons présenté dans ce chapitre des généralités sur les phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques et les réseaux d'antennes. Ces éléments seront utiles au chapitre suivant portant sur la description physique du problème posé dans le contexte de localisation des sources.

## **Chapitre 2**

---

# **Méthodes classiques de détection de signaux multiples**



## 2. Méthodes classiques de détection de signaux multiples

### 2.1 Introduction

Les réseaux de capteurs ont été utilisés depuis plusieurs décennies et dans plusieurs applications pratiques du traitement du signal. Un tel réseau consiste en un ensemble de capteurs qui sont spatialement distribués dans des positions connues par référence à un point de référence commun. Ces capteurs collectent les signaux de sources dans leurs champs de vision. Dépendant des caractéristiques du capteur et du chemin de propagation, la forme d'onde de la source subit des modifications déterministes ou aléatoires. Les sorties des capteurs sont composées par des signaux sources et des bruits additifs comme le bruit de mesure et le bruit thermique.

### 2.2 Signaux et bruit

Dans cette partie nous allons discuter sur le problème de détection et de modélisation des signaux multiples en utilisant l'information issue par de multiples capteurs. Pour comprendre les avantages de l'utilisation de rangée de capteurs, il est nécessaire de comprendre la nature des signaux et du bruit que le réseau doit les recevoir.

Dans les situations de capture active tel que le radar et le sonar, une forme d'onde connue de durée finie est générée, et qui propage à travers un milieu connue, est réfléchié par quelques cibles au point d'origine.

Le signal transmis est habituellement modulé en amplitude et en phase par les caractéristiques de la cible, qui eux même devront changer leur position avec le temps dans l'espace. Ces perturbations provoquent un signal de retour de nature aléatoire.

Dans un contexte passif, le signal reçu au niveau du réseau est auto-généré par la cible, tel que les propulseurs ou le bruit d'engin de sous-marins dans le cas de sonar. Encore une fois, les signaux sont aléatoires dans la nature. En plus de ces signaux directs que les cibles génèrent, il existe d'autres sources de perturbations tel que les nuages dans le cas du radar et les réverbérations de la surface océanique dans le cas du sonar. Les signaux des cibles peuvent subir des réflexions créant des retours de multi sources qui sont retardés, modifiés en amplitude, répliqués à partir du signal direct qui arrive aux capteurs. Dans tous ces cas, les signaux arrivant au réseau peuvent être vus comme aléatoires, et le phénomène physique responsable de cet aléa dans le signal peut être supposé comme un processus aléatoire Gaussien (loi normal).



De même que le bruit thermique du capteur et le bruit ambiant, sont aussi aléatoires dans la nature. Ces composantes additives aux sorties du capteur, représentent habituellement la totalité de plusieurs petites sources indépendantes et identiques, et l'application du théorème de la limite centrale, permet de modéliser le bruit résultant comme un processus Gaussien et habituellement stationnaire. Nous avons besoin de dire, que dans telles situations, la totalité du signal et du processus de bruit peuvent être complètement spécifiés par leurs moments de premier et second ordre.

À n'importe quel moment, chaque signal a une composante d'amplitude et de phase (respectivement à une référence). En plus de cette composante, il est nécessaire de générer sa partie en quadrature pour un traitement optimum. Au lieu de porter tout le calcul séparément en terme de leur partie en phase et en quadrature, il est plus avantageux de les représenter sous forme de partie réelle et imaginaire d'un signal complexe. Les signaux actuels qui apparaissent dans n'importe quel système physique, sont réels et dans cette représentation il apparaît comme une partie réelle de signal complexe équivalent. Ainsi, le signal porteur de l'information est modulé en phase avec un facteur de phase  $\theta$ .

$$u_r(t) = \sqrt{P} \cos(\omega_0 t + \phi(t) + \theta)$$

sa représentation complexe est

$$\tilde{u}(t) = \sqrt{P} e^{j(\omega_0 t + \phi(t) + \theta)} \quad (2.1)$$

il est claire que

$$u_r(t) = \text{Re}[\tilde{u}(t)]$$

et

$$u(t) = \sqrt{P} e^{j(\phi(t) + \theta)} \quad (2.2)$$

est connue comme étant la bande de base de l'enveloppe complexe extraite par le signal réel  $u_r(t)$ . Ainsi, seul la composante porteuse de l'information, apparaît dans cette description. En terme physique, si les signaux sont originaires de très loin du réseau alors ils peuvent être modélisés comme des ondes planes, uniformes, porteuses de l'information. Si ces ondes planes avancent à travers un milieu non dispersif et qui introduit seulement des retards de propagation, la sortie de n'importe quel autre élément du réseau peut être présentée par une avance ou un retard de temps pour l'enveloppe complexe par rapport à l'élément de référence, et ceci évite la description de la fréquence porteuse.

Des signaux tels que ci-dessus qui peut être caractérisé par une seule fréquence porteuse sont connus en tant que sources à bande étroite. Par contre à ceci, les signaux occupant une bande spectrale significative constitue des sources à larges bandes. De plus, tous ces signaux peuvent être incorréllés, corrélés ou cohérents avec n'importe quel autre source.

En particulier, pour deux signaux stationnaires  $u_i(t)$ ,  $u_j(t)$ , soit  $\rho_{ij}$  représentant leur coefficient de corrélation. Par définition

$$\rho_{ij} = \frac{E [u_i(t)u_j^*(t)]}{\sqrt{E [ |u_i(t)|^2 ] E [ |u_j(t)|^2 ]}} \quad \text{avec } |\rho_{ij}| \leq 1 \quad (2.3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= 0 && \rightarrow && u_i(t), u_j(t) \text{ sont incorrélés} \\ 0 < |\rho_{ij}| < 1 && \rightarrow && u_i(t), u_j(t) \text{ sont corrélés} \\ |\rho_{ij}| &= 1 && \rightarrow && u_i(t), u_j(t) \text{ sont cohérents} \end{aligned} \quad (2.4)$$

alors sous des conditions de cohérence

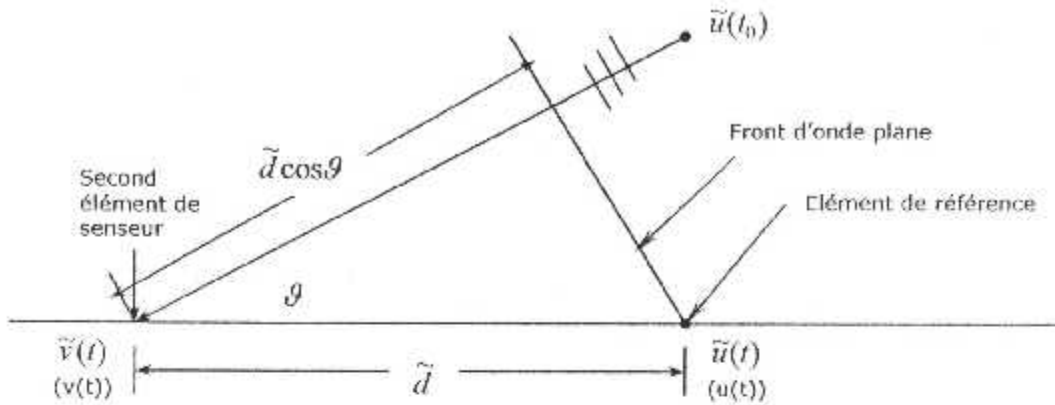
$$u_j(t) = \alpha u_i(t)$$

Où  $\alpha$  est un constant complexe non aléatoire. En pratique les composantes de bruit additif sont incorrélées avec la partie du signal. Cependant, parmi eux les bruits d'interélément peuvent être corrélés ou incorrélés avec d'autres. Une supposition standard est de les considérer incorrélés (indépendant dans le cas Gaussien) et identiques entre eux, i.e, si  $n_i(t)$  et  $n_j(t)$  représentent le  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  bruit du capteur, alors

$$E [n_i(t)n_j^*(t)] = \sigma^2 \delta_{ij} \quad (2.5)$$

où  $\sigma^2$  représente la puissance commune de bruit à tous les capteurs.

On a déjà remarquer que pour une onde plane progressif, passant à travers un milieu non dispersif, le signal de sortie à n'importe quel élément du capteur immergé dans ce milieu peut être représenté comme une version retardée ou avancée de son enveloppe complexe par rapport à l'élément de référence. Pour voir ceci, soit  $\tilde{u}(t)$  dans (2.1) dénote le signal complexe représentant l'onde plane modulée à l'élément de référence dans la figure 2.1.



**Figure 2.1** Paire d'éléments de capteurs identiques.  $u(t)$ ,  $v(t)$  représentant l'enveloppe des signaux complexes  $\tilde{u}(t)$  et  $\tilde{v}(t)$ .

La normale au front d'onde plane fait un angle  $\theta$  avec la ligne joignant les capteurs dans le réseau linéaire. Soit d'autre part  $\tilde{d}$  dénotant la distance du second capteur par rapport au point de référence en unité absolue. La sortie  $\tilde{v}(t)$  au second capteur est retardée par le temps requis pour la propagation de l'onde plane à travers  $\tilde{d} \cos \theta$  et, alors ce temps de retard  $\tau$  est donné par

$$\tau = \frac{\tilde{d} \cos \theta}{c} \quad c \text{ La vitesse de propagation} \quad (2.6)$$

Ainsi

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t - \tau) \quad (2.7)$$

Si la fréquence porteuse est assez large comparée à la largeur de bande du signal modulé, alors ce signal peut être traité comme quasi-statique durant les intervalles de temps de l'ordre de  $\tau$  et dans ce cas (2.7) est réduite à

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t) e^{-j \omega_0 \frac{\tilde{d} \cos \theta}{c}} = \tilde{u}(t) e^{-j 2\pi \frac{\tilde{d} \cos \theta}{\lambda}} \quad (2.8)$$

Où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde porteuse. En terme de représentation d'enveloppe complexe, le signal de référence  $u(t)$  est donné par (2.2) et à partir de (2.8) la sortie du second capteur est  $v(t) = u(t) e^{-j 2\pi \tilde{d} \cos \theta / \lambda}$  (2.9)

Souvent il est plus avantageux d'exprimer l'espacement des interéléments en terme d'unités de dimensionnement normalisées. Il est plus intéressant de normaliser toutes les distances respectivement à la moitié de la longueur d'onde. Soit  $d$  représentant la distance normalisée entre l'élément de référence et le second capteur.

Alors  $d = \tilde{d}/(\lambda/2)$  et (2.9) devienne

$$v(t) = u(t)e^{-j\pi d \cos \theta} \tag{2.10}$$

Pour les signaux à bande étroite, le temps de retard apparaît comme un retard de phase pur par rapport au signal de référence. De plus, ce retard de phase dépend uniquement de l'espacement entre les capteurs et de l'angle d'arrivée de l'onde plane, et est indépendant de la variable temporel. Cependant ceci n'est pas le cas dans une situation en large bande et si l'enveloppe complexe  $u(t)$  à l'élément de référence représente un signal à large bande, alors la sortie correspondante  $v(t)$  au second capteur dans la (fig 2.1) peut être écrite comme

$$v(t) = u(t - \tau) \tag{2.11}$$

Avec  $\tau$  comme dans (2.6), et  $U(f)$  et  $V(f)$  représentent la transformée de Fourier de  $u(t)$  et  $v(t)$  respectivement, (2.11) se réduit à

$$V(f) = U(f)e^{-j2\pi f \tau} = U(f)e^{-j\pi f \tilde{d} \cos \theta / f_0} \tag{2.12}$$

Noter que (2.12) est structurellement identique à une situation de bande étroite représentée dans (2.10) et par conséquent, au moins, les techniques conçues pour les cas de bande étroite peuvent être appliquées pour les signaux à large bande dans le domaine fréquentiel.

### 2.3 Avantage de l'utilisation du réseau d'antennes

La possibilité de modifier la sortie du réseau pour augmenter le signal de réception désiré et simultanément de supprimer les signaux indésirés, peut être illustré en considérant une situation de source unique comme dans la figure (2.1), en présence de  $M$  capteurs identiques.

Soit  $d_1, d_2, \dots, d_M$  représentant les distances normalisées de ces capteurs respectivement au point de référence et  $u(t)$  l'enveloppe complexe du signal à ce point. D'autre part, soit  $n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)$  représentant respectivement les composantes de bruit qui sont supposées indépendantes et identiques comme dans (2.5).

Avec  $x_i(t)$  représente l'enveloppe complexe du signal total reçu au  $i^{\text{ème}}$  capteur, et en utilisant (2.10) il très facile de voir que

$$x_i(t) = u(t).e^{-j\pi d_i \cos \theta} + n_i(t) \tag{2.13}$$

et le rapport signal à bruit (SNR) de l'entrée est :

$$(SNR)_i = \frac{E[|u(t)|^2]}{E[|n_i(t)|^2]} = \frac{P}{\sigma^2}$$

Où  $P = E[|u(t)|^2]$  par définition, représente la puissance du signal.



À partir de (2.13) les composantes du signal peuvent être combinées de façon cohérente si les sorties du réseau sont déplacés en phase par  $e^{j\pi d_i \cos \theta}$ ;  $i = 1, 2, \dots, M$  et les signaux résultants sont sommés. Ceci donne le signal de sortie  $y(t)$  qui est de la forme

$$y(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t) e^{j\pi d_i \cos \theta} = M u(t) + \sum_{i=1}^M n_i(t) e^{j\pi d_i \cos \theta} = M u(t) + n(t)$$

Le  $SNR$  en sortie dans ce cas est donné par

$$\begin{aligned} (SNR)_o &= \frac{E[Mu(t)]^2}{E[n(t)]^2} = \frac{M^2 P}{\sum_i \sum_j E[n_i(t) n_j^*(t)]} \\ &= \frac{M^2 P}{M \sigma^2} = M (SNR)_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ainsi un simple déplacement de phase et une opération d'addition parmi les sorties des capteurs produit une amélioration dans le rapport signal à bruit par un facteur égale au nombre de capteurs. Physiquement, à travers des retards de phase appropriés, le signal désiré a été combiné de façon cohérente (en puissance).

## 2.4 Techniques conventionnelles

Traditionnellement la puissance de sortie de l'antenne réseau est évaluée comme une fonction de l'angle d'arrivée, et les pics dans la distribution de la puissance de sortie correspondent aux vraies directions d'arrivée des signaux présents dans la scène.

Avec  $x_i(t)$  représente la sortie du  $i^{\text{ème}}$  capteur et  $w_i$  les facteurs de pesées (phases).

En utilisant la variable normalisée  $\omega = \pi \cos \theta$ , la sortie du réseau peut être écrite comme (2.17)

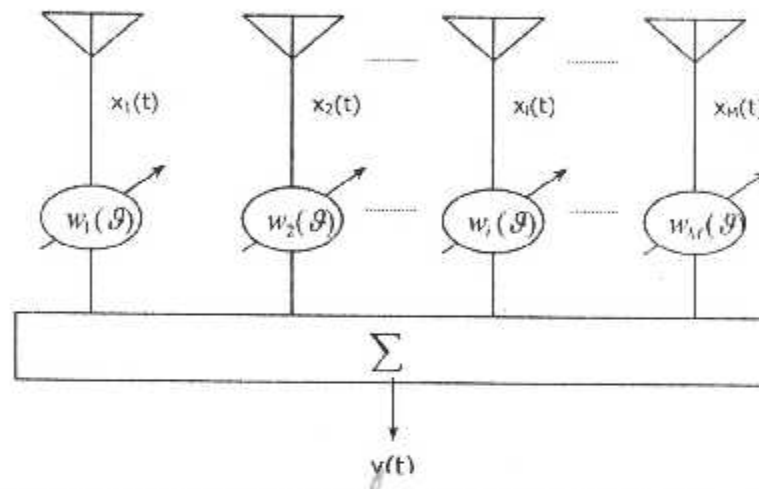


Figure 2.2 Schéma du traitement en utilisant des facteurs de phases.

Avec

$$y(t) = \sum_{i=1}^M w_i^*(\omega) x_i(t) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}(t) \quad (2.17)$$

d'où

$$\mathbf{w} = [w_1(\omega), w_2(\omega), \dots, w_M(\omega)]^T \quad (2.18)$$

$\mathbf{w}$  est le vecteur de pesée et

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (2.19)$$

$\mathbf{x}(t)$  représente le vecteur d'observation.

La puissance de sortie moyenne  $P(\omega)$  est alors donnée par

$$P(\omega) = E[|y(t)|^2] = \mathbf{w}^T E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)]\mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}\mathbf{w} \quad (2.20)$$

où

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] \quad (2.21)$$

$\mathbf{R}$  représente la matrice  $(M \times M)$  de covariance de sortie du réseau.

Notant qu'elle est hermitienne et toujours définie positive.

### 2.4.1 Beamformer

Comme son nom l'indique, les poids de la sortie du réseau sont choisis comme étant des facteurs de phase requis pour diriger l'antenne le long d'une direction spécifique  $\theta$ .

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\pi d_i \cos\theta}$$

Pour des notations conventionnelle, on définit

$$\omega = \pi \cos\theta \quad (2.22)$$

tel que

$$W_B = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ e^{-jd_1\omega}, e^{-jd_2\omega}, \dots, e^{-jd_M\omega} \right]^T = a(\omega) \quad (2.23)$$

Ainsi, la sortie de la rangée est donnée par

$$y(t) = W_B^T x(t) = a^T(\omega)x(t)$$

et utilisant (3.20), la puissance en sortie est

$$P_B(\omega) = E \left[ |y(t)|^2 \right] = a^T(\omega) R a(\omega) \quad (2.24)$$

Dans une scène d'une cible unique, cet estimateur mesure la puissance actuelle en scannant toutes les directions possibles, s'il y aura un pic alors la direction d'arrivée sera déterminée par ce pic. Cependant, ceci n'est pas vrai, dans une scène multicibles incorrélées et les contributions d'une source peuvent biaiser la sortie de l'estimateur le long d'autres directions d'arrivée. Ceci cause un déplacement du pic des vraies directions d'arrivée vers d'autres. Il est très facile de vérifier que dans une scène de sources localisées sous le lobe principal, leurs deux pics donnent un seul, ceci résulte en dégradation de la résolution.

Ceci est amélioré par la méthode d'estimateur de Capon qui permet d'optimiser le vecteur de pesée, et améliorer la résolution en terme de précision.



### 2.4.2 Estimateur de Capon

La puissance de sortie de l'antenne réseau, contient les contributions du signal désiré le long de la direction de scanning, aussi bien que celles indésirés. Pour minimiser les contributions de ces dernières, la puissance en sortie de l'antenne est minimisée tous en maintenant le gain le long de la direction de scanning. En utilisant (2.20) ceci est équivalent au problème suivant

$$\min_w w^T R w \text{ sujet à } |w^T a(\omega)|=1 \quad (2.25)$$

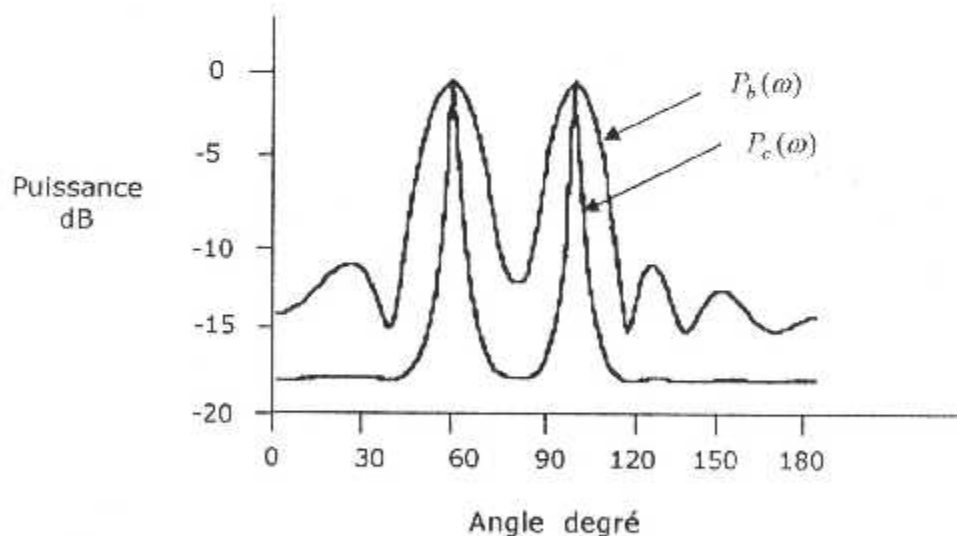
pour des matrices de covariances définies comme positives, la solution au vecteur de pesée (2.25) est donnée par

$$w_c = \frac{R^{-1} a(\omega)}{a^T(\omega) R^{-1} a(\omega)}$$

et avec ce vecteur de pesée dans (2.20), la puissance de sortie de l'antenne prend la forme

$$P_c(\omega) = \frac{1}{a^T(\omega) R^{-1} a(\omega)} \quad (2.26)$$

La relation (2.26) présente la puissance estimée en sens de Capon. La différence entre la méthode Beamformer et Capon est nettement claire en terme de précision. (Voir fig 2.4))



**Figure 2.3** Pulsance de sortie du réseau obtenu pour la méthode Beamformer et estimateur de Capon. Deux angles d'arrivées (60° et 100°) sont détectés, avec  $SNR_0 = 10\text{dB}$ , sept capteurs uniformes sont utilisés dans le réseau.

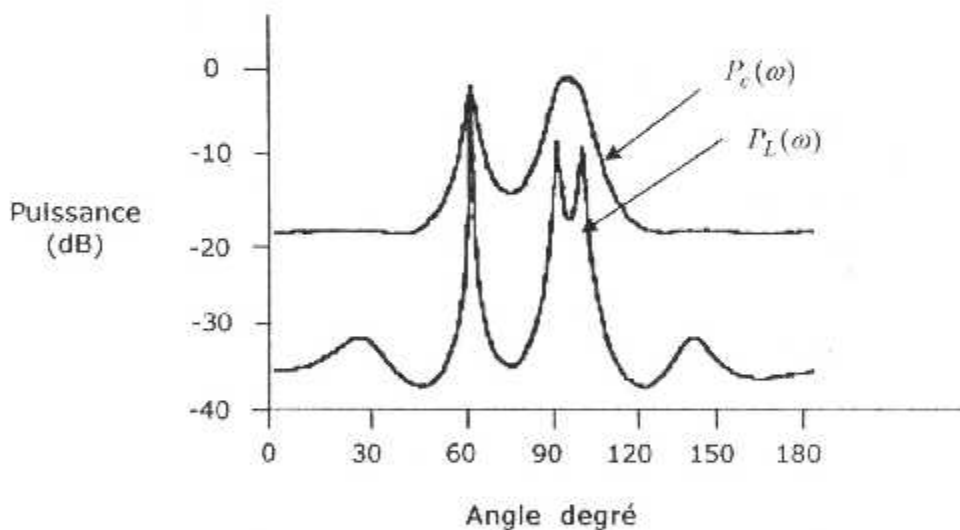
### 2.4.3 Méthode de prédiction linéaire

La prédiction linéaire basée sur l'estimation, est une procédure très commune utilisée dans l'analyse des séries temporelles pour la modélisation de tout pôle de données. Elle a déjà été utilisée avec succès dans le traitement d'antenne. Dans ce cas, les sorties de l'un des capteurs est prédit comme une combinaison linéaire des sorties des  $(M-1)$  capteurs restants à tout instant, et les coefficients de prédiction sont sélectionnés de sorte à minimiser l'erreur moyenne quadratique.

Pour trouver la puissance estimée en sens de prédiction linéaire il existe une relation qui la relie avec la puissance estimée en sens de Capon

$$\frac{1}{P_C^{(M)}(\omega)} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{1}{P_L^{(k)}(\omega)} \quad (2.42)$$

Cette relation entre l'estimateur de Capon et la prédiction linéaire, a été en premier dérivée par Burg dans la Méthode de l'estimateur du maximum d'entropie. La figure suivante présente la supériorité de la méthode de prédiction linéaire en terme de résolution.



**Figure 2.4** Estimateur de Capon à variance minimale et la méthode de prédiction linéaire basées sur l'estimation de la puissance. Six capteurs sont utilisés pour recevoir 03 sources suffisamment rapprochées.

### Conclusion

Les performances de ces méthodes conventionnelles sont limitées par le rapport signal sur bruit. Nous allons présenter dans le chapitre suivant les méthodes haute résolution qui sont basés sur la matrice de covariance estimée et qu'ils ont des performances asymptotique remarquable par rapport au méthodes classiques.

## **Chapitre 3**

---

# **Méthodes haute résolution de détection de signaux multiples**

### 3. Méthodes haute résolution de détection de signaux multiples

#### 3.1 Introduction aux méthodes haute résolution (HR)

Nous décrivons dans cette introduction quelques unes des étapes significatives de la naissance des méthodes à haute résolution (HR). La perception du déroulement chronologique par l'un des participants à leur élaboration sera sans doute subjective, mais le propos n'est pas ici d'écrire une page d'histoire scientifique. Il s'agit plutôt de présenter un procédé et de discuter du contexte dans lequel il a été conçu.

Contrairement à certaines découvertes, les méthodes HR ne proviennent pas d'une démarche providentielle, les sources sont nombreuses et correspondent aux préoccupations de plusieurs équipes dans plusieurs disciplines. Si l'on cherche à identifier dans la littérature les frémissements qui ont permis la construction de l'outil technique connu aujourd'hui sous le nom de "méthodes HR", on ne peut que constater le caractère inévitable de leur découverte.

La naissance des méthodes HR résulte de la conjonction de quatre éléments principaux

- La demande des utilisateurs (surtout aviation et marines militaires) pour l'amélioration des performances dans le contexte de la guerre froide finissante.
- Les progrès technologiques divers qui vont permettre à la fois la manipulation en temps réel et l'enregistrement des signaux numérisés.
- Les progrès de l'informatique embarquée peuvent s'appliquer sans réticence à traitements beaucoup plus complexes que ceux utilisés par le passé.
- Le développement généralisé des techniques statistiques en traitement du signal conduisant à une analyse de plus en plus fine des modélisations et des algorithmes d'estimation et de détection.

#### 3.2 Terminologie des méthodes HR

L'expression "méthodes HR" fera référence ici à un ensemble de techniques dont les performances sont asymptotiquement "illimitées". Plus précisément, une méthode HR est une méthode qui permet de mesurer des directions ou même des positions (en traitement d'antenne) ou des fréquences (en analyse spectrale) avec une erreur qui n'est limitée, que par la durée d'observation.

Par "idéalement" il faut ici entendre que cette performance asymptotique ne sera atteinte que si la modélisation reste indéfiniment valable, ce qui, bien sûr, n'est pas réaliste d'un point de vue pratique.

A ce sujet, on peut déjà remarquer que l'analyse des performances sur des durées finies et en présence d'erreurs de modélisation (biais et variance des estimations en particulier) sera un point indispensable à préciser pour être capable de juger de l'intérêt opérationnel de ces procédés. A l'origine, c'est-à-dire dans les années 1970-80, lorsqu'il était question des méthodes HR, il n'y avait aucune ambiguïté, cette dénomination étant acceptée pour toutes méthodes permettant d'obtenir une résolution angulaire ou spectrale meilleure que celle du traitement classique.

Pourtant cette dénomination s'est révélée rapidement floue et insuffisante avec l'arrivée d'un très grand nombre de techniques permettant d'améliorer la résolution : antenne adaptative (formulation de Widrow ou de Capon), prédiction linéaire (maximum d'entropie ou analyse AR), décomposition harmonique (Pisarenko), goniomètre (MUSIC), ESPRIT, Kumaresan-Tuft, méthode du propagateur, technique de représentation déterministe ou stochastique (aussi connue sous le nom de TAM), déconvolution (WB2), méthode de Bresler-Macovski, etc.

On aurait tendance aujourd'hui à réserver le caractère HR aux méthodes dont la résolution asymptotique idéale est infinie, ce qui exclut certains traitements de la liste précédente, comme l'antenne adaptative ou la prédiction linéaire (la résolution asymptotique de ces traitements est limitée par le rapport signal sur bruit des sources à séparer, et ceci quelle que soit la durée d'observation).

On ne s'intéressera qu'aux méthodes qui exploitent directement les signaux reçus par des capteurs (dans le cas des antennes) ou des échantillons de signaux scalaires (dans le cas de l'analyse spectrale). A vrai dire, ce choix est assez arbitraire, et l'on pourrait objecter que la distinction ne porte finalement que sur ce qui est appelé capteur. Sinon, les objectifs (améliorer la résolution), les techniques (résoudre un problème inverse), les modèles (sources ponctuelles et signaux Gaussiens) et les critères (maximum de vraisemblance par exemple) sont semblables.

Dans les paragraphes suivants on va détailler les techniques qui se basent sur la décomposition de la matrice de données en valeurs singulières comme la méthode de goniomètre adaptatif (MUSIC) et la méthode ESPRIT et sa version modifiée TLS\_ESPRIT.

### 3.3 Technique basée sur les vecteurs propres

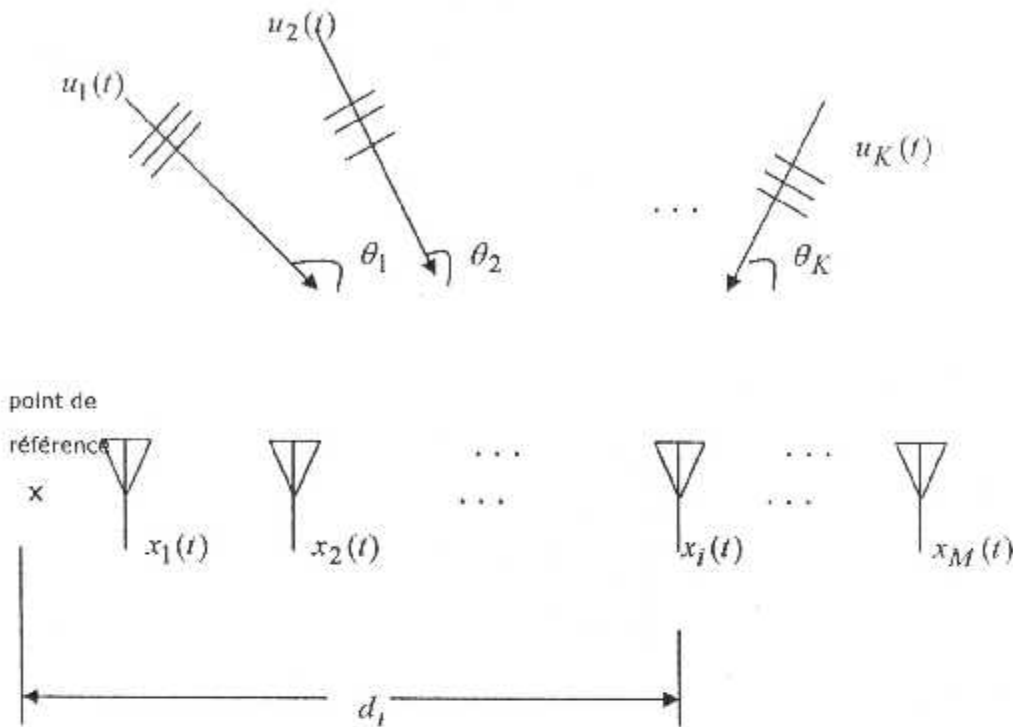
Considérons un réseau linéaire constitué de  $M$  capteurs identiques et recevant des  $K$  signaux de bande étroite  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_K(t)$  qui arrivent aux réseaux sur les directions  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$  par rapport à la ligne de réseau (fig. 3.1).

Soit  $P_k$  représentant les puissances des signaux

$$P_k = E[|u_k(t)|^2], \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.1)$$

et

$$\rho_{ij} = \frac{E[u_i(t)u_j^*(t)]}{\sqrt{P_i P_j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K; \quad |\rho_{ij}| \leq 1 \quad (3.2)$$



**Figure 3.1** Une scène typique de rangée d'antennes pour des sources non cohérentes

On suppose ici qu'aucun de ces signaux n'est cohérent. Le cas contraire est présenté dans une section prochaine.

L'utilisation de la superposition des signaux de la forme (2.13) forme le signal reçu  $x_i(t)$  au  $i^{\text{ème}}$  capteur qui sera écrit comme

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^K u_k(t) e^{-j\pi d_i \cos \theta_k} + n_i(t). \quad (3.3)$$

Comme déjà vu  $d_i$  ici représente la position normalisée du  $i^{\text{ème}}$  capteur, à la demi longueur d'onde commune par rapport au point de référence commun, et  $n_i(t)$  représente le bruit additif au  $i^{\text{ème}}$  capteur.

On suppose que le bruit est stationnaire, de moyenne nulle représentant un processus aléatoire incorrélés, et d'autre part comme dans (2.5) les bruits sont supposés incorrélés et identiques entre eux et de variance commune  $\sigma^2$ .



Réécrivant (3.3) avec  $\omega_k = \pi \cos \theta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on aura

$$x(t) = \sqrt{M} \sum_{k=1}^K u_k(t) a(\omega_k) + n(t) \quad (3.4)$$

$x(t)$  est un vecteur  $(M \times 1)$ .

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (3.5)$$

est un espace de HILBERT  $H$  de dimension  $M$  sur le champ complexe  $\mathbb{C}$ .

$a(\omega_k)$  Vecteurs de direction normalisée associée au angle d'arrivée  $\theta_k$ .

$$a(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{M}} [e^{-j d_1 \omega_k}, e^{-j d_2 \omega_k}, \dots, e^{-j d_M \omega_k}]^T \quad (3.6)$$

Le vecteur de sortie du réseau peut être écrit comme

$$X(t) = A u(t) + n(t) \quad (3.7)$$

où

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_K(t)]^T \quad (3.8)$$

$$n(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$$

et

$$A = \sqrt{M} [a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_K)] \quad (3.9)$$

$A$  est une matrice  $(M \times K)$  constituée de  $K$  vecteurs de direction.

À partir de nos suppositions, il suit que la matrice de covariance  $(M \times M)$  de sortie du réseau possède cette forme

$$R = E[X(t)X^H(t)] \quad (3.10)$$

Noté que  $R$  est hermitienne et définie positive, elle sera par définition de cette forme

$$R = AE[u(t)u^H(t)]A^H + E[n(t)n^H(t)] = AR_u A^H + \sigma^2 I \quad (3.11)$$

$$R_u = E[u(t)u^H(t)] \quad (3.12)$$

$R_u$  Représente la matrice de covariance source de taille  $(K \times K)$  qui reste non singulière aussi longtemps que les sources présentes dans les données sont non cohérents, donc  $|\rho_{ij}| \neq 1$ .

Dans ce cas  $R_u$  est de rang  $K$  et à partir de l'indépendance linéaire des vecteurs de directions  $[a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_K)]$ ,  $A$  est aussi de rang  $K$ , donc  $AR_u A^H$  est aussi de rang  $K$ .

Soit  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_K$  dénotant les  $K$  valeurs propres non nuls de  $R_u$  alors les  $M$  valeurs propres de  $R$  sont données par

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu_i + \sigma^2 & i = 1, 2, \dots, K \\ \sigma^2 & i = K+1, K+2, \dots, M \end{cases} \quad (3.13)$$

D'autre part  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$  dénotent les  $M$  vecteurs propres de la matrice de covariance  $R$  s'écrit comme suit

$$R = \sum_{i=1}^M \lambda_i \beta_i \beta_i^H = B \Lambda B^H \quad (3.14)$$

où

$$B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K, \beta_{K+1}, \dots, \beta_M] \quad (3.15)$$

et

$$B B^H = I_M \quad (3.16)$$

et

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, \sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2] \quad (3.17)$$

d'autre part, pour chaque  $i > K$ , de (3.13)

$$R\beta_i = \lambda_i \beta_i = \sigma^2 \beta_i$$

Mais

$$R\beta_i = (AR_u A^H + \sigma^2 I)\beta_i$$

L'ensemble implique

$$AR_u A^H \beta_i = 0$$

où

$$A^H \beta_i = 0 \Leftrightarrow \beta_i^H a(\omega_k) = 0, \quad K+1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq k \leq K \quad (3.18)$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $R$  sont orthogonaux avec les vecteurs de directions correspondant aux angles d'arrivée actuelles.

De cette propriété remarquable nous pouvons déduire les direction d'arrivée à partir des vecteurs propres  $\beta_{K+1}, \dots, \beta_M$  qui sont associés aux valeurs propres les plus faibles (la variance du bruit  $\sigma^2$ ). L'ensemble donne un sous espace  $N$  de dimension  $(M-K)$  de  $\mathbb{R}^M$ , et à partir de (3.18) tout vecteur de direction associé à l'angle d'arrivée actuelle est orthogonale à ce sous espace.

Les  $K$  vecteurs de direction  $a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_k)$  sont entre eux linéairement indépendants. Le sous espace  $S$  de dimension  $K$  donné par les vecteurs de la direction actuelle est orthogonale au sous espace  $N$ .

D'autre part  $H$  peut aussi être réécrit comme étant une somme directe de plusieurs sous espaces de dimensions finies et ses compléments orthogonaux,  $H = S \oplus N$ . (3.19)

Ainsi les pics de la fonction

$$P(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=K+1}^M |\beta_i^H a(\omega)|^2} \quad (3.20)$$

Par analogie les  $K$  zéros de la fonction  $Q(\omega) = \sum_{i=K+1}^M |\beta_i^H a(\omega)|^2$  (3.21)

Correspondent aux vraies directions d'arrivée, selon Schmidt, cette procédure se classe comme étant une technique de classification des signaux (MUSIC).

Les pics de  $P_\omega$  correspondent aux vraies angles d'arrivée actuelles, ils sont toujours distingués et en principe ils peuvent résoudre des situations où il y a des cibles rapprochées.

Cependant quand quelques signaux dans (3.3) sont parfaitement corrélés (propagation des plusieurs signaux de même source),  $R_y$  dans (2.58) devienne singulière et les résultats ne sont plus valables.

Pour l'instant nous allons examiner et établir une intéressante propriété de non ambiguïté de la matrice de covariance de sortie du réseau dans une situation complètement cohérente.

### 3.4 Cas complètement cohérent

Soient  $K$  signaux cohérents à bande étroite arrivant aux réseaux de directions  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ . À n'importe quel instant ces  $K$  signaux  $u_1(t), \dots, u_k(t)$  sont retardés en phase, modifiés en amplitude, et ils sont répliqués par l'un des signaux, disant le premier (voir fig 3.3).

$$u_k(t) = \alpha_k u_1(t); \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad \alpha = 1 \quad (3.22)$$

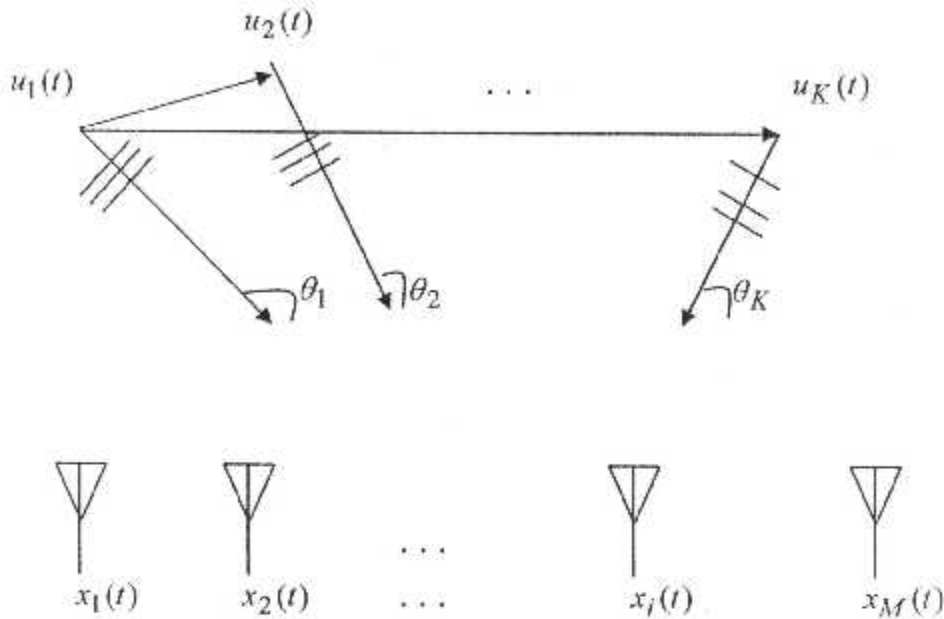


Figure 3.2 Une situation complètement cohérente

où  $\alpha_k$  représente l'atténuation complexe du  $k^{\text{ème}}$  signal par rapport au premier  $u_1(t)$ .

Avec  $\alpha_k = \rho_k e^{j\phi_k}$  ;  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $\rho_k$  est l'atténuation en amplitude et  $\phi_k$  le retard relatif de phase du  $k^{\text{ème}}$  signal par rapport au premier. À partir de (3.4) le vecteur de sortie du réseau  $x(t)$  peut être écrit comme

$$x(t) = \sqrt{M} u_1(t) \sum_{k=1}^K \alpha_k a(\omega_k) + n(t) = u_1(t) b + n(t) \tag{3.23}$$

où 
$$b = \sqrt{M} \sum_{k=1}^K \alpha_k a(\omega_k) \tag{3.24}$$

d'autre part les bruits incorrélés de capteur, sont supposés ayant des variances égales

$$E = [n_i(t) n_j^*(t)] = \sigma_i^2 \delta_{ij} \tag{3.25}$$

Avec (3.25) et (3.22) dans (3.10), et sous la normalisation que  $E[|u(t)|^2] = 1$ , la matrice de covariance  $R$  de sortie du réseau devienne

$$R = bb^H + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_M^2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

« Youla » a montré que, pour  $R$  donnée de la forme de (3.26), le vecteur  $b$  (déjà multiplié par le facteur de phase) et les variances  $\sigma_i^2$  du bruit  $i=1,2,\dots, M$  sont toujours uniques, à condition que le réseau possède au moins trois capteurs ( $M \geq 3$ ).

Pour prouver cela, supposons le contraire, où  $R$  a deux représentations telles que,

$$R = bb^H + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_M^2 \end{bmatrix} = cc^H + \begin{bmatrix} \delta_1^2 & & 0 \\ & \delta_2^2 & \\ 0 & & \delta_M^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

et ceci donne

$$bb^H - cc^H = \begin{bmatrix} \delta_1^2 - \sigma_1^2 & & 0 \\ & \delta_2^2 - \sigma_2^2 & \\ 0 & & \delta_M^2 - \sigma_M^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Noter que dans l'expression précédente, le rang de la partie gauche est la différence de rangs des deux matrices et la plupart du temps de rang deux. Ainsi la partie droite est aussi de rang deux, et comme résultat  $(M-2)$  de ses entrées doivent être différentes de zéros.

Supposons que  $\delta_3^2 = \sigma_3^2, \delta_4^2 = \sigma_4^2, \dots, \delta_M^2 = \sigma_M^2$ . Ainsi, (3.28) est réduite à

$$bb^H - cc^H = \begin{bmatrix} \delta_1^2 - \sigma_1^2 & & 0 \\ & \delta_2^2 - \sigma_2^2 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Pour procéder autrement, partitionnons  $b$  et  $c$  comme suit

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{M-2}^2 \quad ; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{M-2}^2 \quad (3.30)$$

où  $b_1, c_1$  sont de taille  $(2 \times 1)$  et  $b_2, c_2$  sont de taille  $(M-2) \times 1$ .



Avec (3.30) dans (3.29) on aura

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^H & b_2^H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^H & c_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^2 - \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 - \sigma_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Qui donne

$$b_1 b_2^H - c_1 c_2 = 0 \quad (3.32)$$

$$b_2 b_2^H - c_2 c_2^H = 0 \quad (3.33)$$

Par supposition, le réseau a au moins trois capteurs,  $b$  a au moins trois entrées non nulles et par suite  $b_2$  et  $c_2$  ne peuvent pas être des vecteurs nuls, i.e  $b_2 \neq 0, c_2 \neq 0$ . Multiplions (3.32) et (3.33) par  $c_2$  de droite, on obtient

$$\begin{aligned} b_1 (b_2^H c_2) - c_1 (c_2^H c_2) &= 0 \\ b_2 (b_2^H c_2) - c_2 (c_2^H c_2) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$b_1 = \mu c_1 \quad (3.34)$$

$$b_2 = \mu c_2 \quad (3.35)$$

où

$$\mu = c_2^H c_2 / b_2^H c_2$$

Avec (3.35) dans (3.33) nous aurons aussi  $(1 - |\mu|^2) c_2^H c_2 = 0$ , avec  $c_2 \neq 0$ , cette dernière donne  $1 - |\mu|^2 = 0$  tel que  $|\mu|^2 = 1$

Finalement, de (3.31) et (3.34)

$$b_1 b_1^H - c_1 c_1^H = (1 - |\mu|^2) c_1 c_1^H = 0 = \begin{bmatrix} \delta_1^2 - \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 - \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Et donc  $\delta_1^2 = \sigma_1^2$  et  $\delta_2^2 = \sigma_2^2$ ,  $b = \mu c$ ,  $|\mu| = 1$  et  $\delta_i^2 = \sigma_i^2$   $i=1,2,\dots, M$ .

Pour résumer, la décomposition  $R = b b^H + \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2]$  est unique, si le réseau a au moins trois sorties non nuls, et ceci est presque toujours vérifié quand  $M \geq 3$ .

La question intéressante qu'il faut posé c'est si  $b$  et  $\sigma_i^2$ ;  $i=1,2,\dots, M$  sont uniques, comment les angles d'arrivées sont évaluées, pour répondre a cette question, Evans et al ont proposés une technique qui nous la détaillerons dans le paragraphe suivant.



### 3.5 Schéma de lissage spatial (détermination des directions d'arrivée dans un environnement cohérent)

Considérons un réseau linéaire constitué de  $M$  capteurs identiques et recevant  $K$  signaux à bande étroite de sources cohérentes, arrivant au réseau à partir de directions  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ .

À n'importe quel instant ces  $K$  signaux  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_K(t)$ , sont retardés en phase et répliqués disons par la première source, et atténuée en amplitude et donc comme dans (3.22)  $u_k(t) = \alpha_k u_1(t); k = 1, 2, \dots, K$ , où  $\alpha_k$  représente l'atténuation complexe du  $k^{\text{ième}}$  signal respectivement au premier  $u_1(t)$ . Ici encore la distance des interéléments est prise comme étant la moitié de la longueur d'onde et on suppose que les signaux et les bruits sont des processus stationnaires, à moyenne nulle, incorréllés, de plus, les bruits sont supposés être incorréllés et identiques entre eux avec une variance commune  $\sigma_i^2$ .

Comme déjà vue auparavant, le signal reçu  $x_i(t)$  au  $i^{\text{ème}}$  élément de capteur peut être exprimé comme dans (3.3) avec  $d_i = (i-1)$ . D'autre part utilisons (3.22) dans (3.8) et sous la normalisation  $E[|u_1(t)|^2] = 1$ , la matrice de covariance source  $R_u$  dans (3.12) a la forme

$$R_u = E[u(t)u(t)^H] = \alpha\alpha^H \tag{3.36}$$

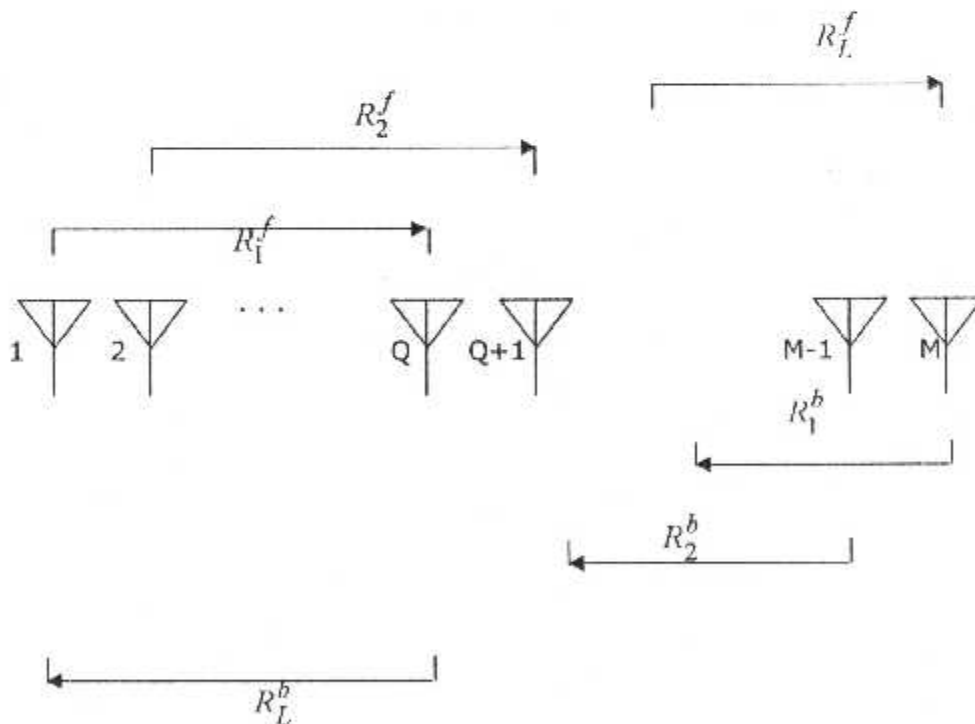


Figure 3.3 Méthode de lissage spatial (forward/backward)

où

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]^T \quad (3.37)$$

À partir de nos suppositions, la matrice  $R$  de sortie du réseau dans (3.10)-(3.11) peut être écrite comme

$$R = A\alpha\alpha^H A^H + \sigma^2 I = bb^H + \sigma^2 I \quad (3.38)$$

Où  $b$  est donné par (3.24). Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$  et  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$  sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $R$ , et résonnant comme plus haut, il suit que

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (3.39)$$

et donc

$$\beta_i^H b = 0, \quad i = 2, 3, \dots, M. \quad (3.40)$$

À cause de cette structure de Vandermonde, aucune combinaison non linéaire de vecteurs de direction peut résulter dans un autre vecteur de direction. Par conséquent  $b$  ne reste pas le vecteur de direction légitime et ainsi ne sera pas capable d'estimer n'importe quel vrai angle d'arrivée.

Le rôle crucial que joue  $R_u$  dans cette discussion a incité Evans et al et par suite Shan et al, à introduire un schéma de prétraitement qui garantie le rang complet pour  $R_u$ .

Ce schéma de prétraitement de lissage spatial, commence par diviser le réseau uniforme avec  $M$  capteurs en chevauchement de sous réseaux de taille  $Q$ , avec les capteurs  $(1, 2, \dots, Q)$  formant le premier sous réseau,  $(2, 3, \dots, Q+1)$  formant le second sous réseau, jusqu'au dernier sous réseau formé par les capteurs  $(M-Q+1, M-Q+2, \dots, M)$  (voir figure 3.4).

Soit  $x_l^f(t)$  étant la sortie du  $l^{\text{ième}}$  sous réseau pour  $l = 1, 2, \dots, L = M - Q + 1$ , où  $L$  dénote le nombre total de sous réseaux directes. Ainsi,

$$x_l^f(t) = [x_l(t), x_{l+1}(t), \dots, x_{l+Q-1}(t)]^T, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.41)$$

et procédons comme dans (3.3)-(3.9) ceci peut être écrit comme

$$x_l^f(t) = A\Phi^{l-1}u(t) + n_l(t), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.42)$$

Où  $\Phi^{l-1}$  dénote la puissance  $(l-1)$  de la matrice diagonale  $(K \times K)$

$$\Phi = \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & v_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & v_K \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

avec

$$v_i = e^{-j\omega_i}, \quad \omega_i = \pi \cos \theta_i; \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (3.44)$$

la matrice de covariance du  $i^{\text{ème}}$  sous réseau est donné par

$$R_i^f = E[x_i^f(t)(x_i^f(t))^H] = A\Phi^{l-1}R_u(\Phi^{l-1})^H A^H + \sigma^2 I \quad (3.45)$$

Définissons la matrice de covariance directe de lissage spatial,  $R^f$  comme la valeur moyenne des matrices de covariance des sous réseaux et ceci donne

$$\begin{aligned} R^f &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R_i^f = A \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \Phi^{l-1} R_u (\Phi^{l-1})^H \right] A^H + \sigma^2 I \\ &= AR_u^f A^H + \sigma^2 I \end{aligned} \quad (3.46)$$

où

$$R_u^f = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \Phi^{l-1} R_u (\Phi^{l-1})^H \quad (3.47)$$

Dans un environnement complètement cohérent  $R_u$  est donnée par (3.36) et ainsi

$$R_u^f = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \alpha^H \\ (\Phi \alpha)^H \\ (\Phi^2 \alpha)^H \\ \vdots \\ (\Phi^{L-1} \alpha)^H \end{bmatrix} = \frac{1}{L} C C^H \quad (3.48)$$



Ainsi,

$$x_l^b(t) = [x_{M-l+1}^*(t), x_l(t), \dots, x_{L-l+1}^*(t)]^T, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.50)$$

et comme dans (3.42) ceci peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} x_l^b(t) &= A[\Phi^{M-l}u(t)] + \tilde{n}_l^*(t) \\ &= A\Phi^{l-1}[\Phi^{M-1}u(t)] + \tilde{n}_l^*(t), \quad l = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $\Phi$  est définie comme (3.43) la matrice de covariance du  $l^{ème}$  sous réseaux de retour est donnée par

$$R_l^b = E[x_l^b(t)x_l^{bH}(t)] = A\Phi^{l-1}R_{\tilde{u}}(\Phi^{l-1})^H A^H + \sigma^2 I \quad (3.52)$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\tilde{u}} &= \Phi^{-(M-1)} E[u^*(t)u(t)^T(t)] \Phi^{-(M-1)H} \\ &= \Phi^{-(M-1)} R_u^*(\Phi^{-(M-1)})^H \end{aligned} \quad (3.53)$$

Et  $R_u$  définie comme dans (3.12). Comme auparavant, définissons la matrice de covariance spatialement lissée du sous réseau de retour  $R^b$  comme la valeur moyenne de ces matrices de covariance du sous réseau. Ceci donne

$$\begin{aligned} R^b &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L R_l^b = A \left[ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Phi^{l-1} R_{\tilde{u}} (\Phi^{l-1})^H \right] A^H + \sigma^2 I \\ &= AR_u^b A^H + \sigma^2 I \end{aligned} \quad (3.54)$$

où

$$R_u^b = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Phi^{l-1} R_{\tilde{u}} (\Phi^{l-1})^H \quad (3.55)$$





Il reste à voir que par l'utilisation simultanée des schémas de moyenne des sous réseaux direct et de retour, il est possible de réduire, le nombre des éléments de capteurs. Pour voir ceci, définissons la matrice de covariance lissée direct/retour  $\tilde{R}$  comme la moyenne de  $R^f$  et  $R^b$

$$\tilde{R} = \frac{R^f + R^b}{2} \quad (3.61)$$

Utilisant (3.46),(3.48),(3.54) et (3.59) dans (3.61) on a

$$\tilde{R} = A \left[ \frac{1}{2L} (CC^H + EE^H) \right] A^H + \sigma^2 I = A \tilde{R}_u A^H + \sigma^2 I \quad (3.62)$$

où

$$\tilde{R}_u = \frac{R_u^f + R_u^b}{2} = \frac{1}{2L} (CC^H + EE^H) = \frac{1}{2L} GG^H \quad (3.63)$$

ici

$$\begin{aligned} G &= [\alpha, \Phi\alpha, \Phi^2\alpha, \dots, \Phi^{L-1}\alpha, \delta, \Phi\delta, \Phi^2\delta, \dots, \Phi^{L-1}\delta] \\ &= [DV \quad FV] = D[V \quad HV] = DG_0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

avec  $D, V$  comme dans (3.49) et

$$H = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_K \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

tel que

$$\varepsilon_k = \delta_k / \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.66)$$

Donc la matrice de covariance source modifiée  $\tilde{R}_u$  donné par (3.63) est non singulière vu la cohérence de  $K$  signaux sources tant que  $2L > K$ .

### 3.6 La méthode ESPRIT

#### 3.6.1 Origines

**ESPRIT**, pour *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*, est une méthode de localisation de sources à bande étroite s'appliquant dans le cas particulier d'un réseau de capteurs constitué de deux sous antennes identiques, et déduites l'une de l'autre par une translation dont le vecteur caractéristique est supposé connu. Cet algorithme a été étendu par une version efficace, **TLS-ESPRIT** (*Total Least Square*), qui est plus fréquemment mise en œuvre [ROY 89],[OTT 91]. TLS-ESPRIT constitue la version de référence de l'algorithme, que nous présenterons plus tard, pour l'instant on va évoquer un certain nombre de variantes et d'extensions. ESPRIT réalise une estimation directe des directions d'arrivée à partir des propriétés de l'espace signal. Cette méthode, lorsqu'elle est applicable, permet d'éviter la recherche numériquement lourde des maxima d'une puissance de sortie (MUSIC). Initialement, c'est vis-à-vis de ce gain de calcul, et de la simplicité d'implantation qui en résulte, que l'intérêt d'ESPRIT a été formulé. Le succès ultérieur de la méthode et son développement sont toutefois également liés à sa capacité à réaliser la localisation dans des contextes de géométries mal connues ou partiellement inconnues, avec de bonnes caractéristiques de robustesse et de performances.

#### 3.6.2 Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT)

Soit un réseau d'antennes constituée de deux sous réseaux de  $M$  capteurs, décalés l'un de l'autre d'un vecteur de déplacement  $\mathbf{d}$ . on vérifie facilement que, par rapport à l'écriture générale, le vecteur observation s'écrit, sous forme partitionnée

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A\Phi \end{bmatrix} u(t) + n(t) \quad (3.67)$$

Avec

$$\Phi = \text{Diag} \left\{ e^{j\pi \cos(\theta_1)}, e^{j\pi \cos(\theta_2)}, \dots, e^{j\pi \cos(\theta_k)} \right\} \quad (3.68)$$

À partir du modèle (3.67) plusieurs méthodes sont proposées, le but étant de retrouver les informations sur le signal contenues dans  $\Phi$ .

En l'absence du bruit, les vecteurs d'observations correspondant à chacune des demi antennes prennent la forme :

$$\begin{cases} X_1 = AU \\ X_2 = A\Phi U \end{cases} \quad (3.69)$$

La matrice  $A$  est une matrice  $(M \times K)$  de rang  $K$ , en introduisant la pseudo-inverse de  $A$ , on déduit de (3.69) la relation suivante

$$\begin{cases} A^\dagger A = I_K \\ X_2 = A \Phi U = A \Phi (A^\dagger A) U = (A \Phi A^\dagger) X_1 \end{cases} \quad (3.70)$$

On a donc la relation suivante entre les deux sous vecteurs

$$\begin{cases} X_2 = T X_1 \\ \text{avec: } T = A \Phi A^\dagger \end{cases} \quad (3.71)$$

On constate que  $T$  est une matrice  $(M \times M)$  semblable à  $\Phi$ , ce qui entraîne qu'elle a les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  plus  $M - K$  valeurs propres nulles, tel que

$$\lambda_1 = e^{j\pi \cos(\theta_1)}, \lambda_2 = e^{j\pi \cos(\theta_2)}, \dots, \lambda_K = e^{j\pi \cos(\theta_K)}$$

On peut obtenir l'expression de  $\Phi$  en fonction de l'observation non bruitée en multipliant les deux membres de (3.71) par la pseudo inverse de  $X_1$ ,  $X_1^\dagger$

$$T = X_2 X_1^\dagger \quad (3.72)$$

En présence de bruit, la solution exacte ci-dessus pour  $T$  par la pseudo-inverse s'interprète comme une solution au sens des moindres carrés entre  $X_2$  et  $\hat{T} X_1$ .

La matrice  $X_1$  étant alors de rang  $M$ , sa pseudo inverse peut s'écrire  $X_1^\dagger = X_1^H (X_1 X_1^H)^{-1}$ , d'où l'expression de la matrice  $T$  estimée

$$\hat{T} = X_2 X_1^H (X_1 X_1^H)^{-1} \quad (3.73)$$

La relation (3.73) peut se récrire en fonction des covariances entre les deux sous-antennes

$$R_{11} = \frac{1}{N} X_1 X_1^H, \quad R_{21} = \frac{1}{N} X_2 X_1^H$$

Alors,

$$\hat{T} = R_{21} R_{11}^{-1} \quad (3.74)$$

$[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_K] = K$  plus grandes valeurs propres de  $[R_{21} R_{11}^{-1}]$ .

le calcul des valeurs propres généralisées du faisceau  $[R_{11}, R_{21}]$  étant numériquement plus efficace. On ne garde que  $K$  valeurs propres, les autres se réduisant à du bruit.

### Remarque

On peut remarquer qu'à faible rapport signal sur bruit, l'inversion de  $R_{11}$  risque d'entraîner des problèmes de dégradation de l'estimation.

D'autre part, cette matrice se trouve biaisée en présence de bruit. L'idée est donc de garder un pseudo-inverse, ne portant que sur la partie signal, estimée par décomposition en éléments propres, c'est cette évaluation qui fait l'objet de l'algorithme TLS-ESPRIT qui cherche une solution des moindres carrés consistant à rendre l'erreur qui est dans notre cas le bruit, orthogonal avec le sous espace signal.

### 3.7 La résolution par TLS-ESPRIT

Soit  $X_1(t)$  et le  $X_2(t)$  comme dans (3.67)

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A\Phi \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}u(t) + \tilde{n}(t).$$

Alors la matrice de covariance du réseau complet sera

$$R_{xx} = E[X(t)X^H(t)] = \tilde{A}R_u\tilde{A}^H + \sigma^2 \Sigma_{\tilde{n}} \quad (3.75)$$

où 
$$\Sigma_{\tilde{n}} = \begin{bmatrix} I_M & \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_1^H & I_M \end{bmatrix}$$

Puisque  $\tilde{A}R_u\tilde{A}^H$  est de rang  $K$ , les valeurs propres généralisées de  $R_{xx}$  peuvent être représentées comme  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K > \lambda_{K+1} = \dots = \lambda_{2M} = \sigma^2$ .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $R_{xx}$  obéissent à la relation suivante

$$R_{xx}\beta_i = \lambda_i \Sigma_{\tilde{n}} \beta_i$$

où

$$\tilde{a}^H(\omega_k)\beta_i = 0, k = 1, 2, \dots, K, i = K + 1, K + 2, \dots, 2M$$

Où  $\tilde{a}(\omega_k), k = 1, 2, \dots, K$ , sont les  $K$  vecteurs de colonne de  $\tilde{A}$ .

D'une manière équivalente,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$  sont orthogonaux au même sous espace orthogonal aux vecteurs de colonne de  $\tilde{A}$ , i.e.

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K] = \tilde{A}C \quad (3.76)$$

où  $C$  est une matrice non singulière de  $K \times K$ .

Définissons deux matrices de  $(M \times K)$  et par la division de (3.76) d'une façon évidente.





de nouveau, partitionnons  $W$  comme

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Où  $W_1$  et  $W_2$  sont deux matrices de  $(K \times K)$ . Donc (3.83) s'écrit

$$[C \quad \Phi C] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = CW_1 + \Phi CW_2 = 0$$

Où

$$-W_1W_2^{-1} = C^{-1}\Phi C \quad (3.85)$$

Ainsi, n'importe quel matrice  $W$  satisfaisant (3.81) à la propriété intéressante c'est que les valeurs propres de la matrice  $-W_1W_2^{-1}$  générées par la partition en (3.84), sont données par  $e^{-j\alpha_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . alors l'angle d'arrivée est obtenue directement.

Pour compléter cette analyse, il faut trouver la matrice  $W$  tel que

$$E_{xy} v_i = I_i v_i = 0, \quad K < i \leq 2K \quad (3.86)$$

où  $v_i$  représente le  $i^{eme}$  vecteur de colonne de  $V$ . Puisque  $[E_x \quad E_y]$  est également du rang  $K$ , de (3.79), (3.86) est réduit à

$$[E_x \quad E_y] v_i = 0, \quad K < i \leq 2K \quad (3.87)$$

Ainsi la matrice  $W$  désirée est donnée par

$$W = [v_{K+1}, v_{K+2}, \dots, v_{2K}] = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

et les valeurs propres de  $-V_{12}V_{22}^{-1}$  donne les directions réelles de l'arrivée des signaux.

bien que TLS-esprit soit supérieur dans son exécution comparée à ESPRIT, mais beaucoup plus complexe qu'elle.

### Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre quelques unes des étapes significatives de la naissance des méthodes à haute résolution (HR) se basant sur les vecteurs propres, notamment les méthodes Esprit et TLS-Esprit, dans deux milieux de propagation, non cohérent et totalement cohérent. Ce dernier n'a pu être résolu que par le schéma proposé du lissage spatial, où les résultats seront simulés dans le chapitre suivant.

## **Chapitre 4**

---

# **Simulations des méthodes Esprit et TLS\_Esprit**

## 4. Simulations des méthodes Esprit et TLS-Esprit pour la détermination de la DOA

### 4.1 Introduction

Les méthodes haute résolution sont des méthodes à horizon infini, ou plus exactement, la précision obtenue après un temps d'observation infini est infinie. Ces méthodes ne sont efficaces que dans un domaine d'application bien défini à elles.

Dans ce chapitre, on va présenter deux méthodes **ESPRIT** et **TLS ESPRIT**, et on va accompagner chaque méthode de ses hypothèses respectives. Ces méthodes utilisent les propriétés de la matrice de covariance des signaux reçus sur le réseau, c'est pour cette raison que ce chapitre va commencer par le calcul estimatif de cette matrice qu'on appelle  $R_{xx}$ . Par ailleurs on supposera que le nombre de sources  $K$  est connu au paravent (Annexe 03), après on va comparer les performances de ces méthodes en matière de localisation de sources et cela, en comparant les biais et les variances obtenues à partir des nombreuses simulations, et le pouvoir de séparation entre des sources proches.

Pour chacune de ces deux méthodes étudiées, on va tenir compte de certains paramètres (le rapport signal à bruit, position des sources, nombre de capteurs utilisées, nature des sources c-à-d cohérentes ou non cohérentes).

### 4.2 Estimation de la matrice de covariance

L'objectif du traitement d'antenne est de déterminer à partir des signaux reçus pendant un intervalle de temps de durée finie, sur un ensemble de capteurs constituant une antenne, des paramètres caractérisant les sources rayonnantes situées dans un milieu de propagation non dispersif.

Ces paramètres sont

- le nombre de sources  $K$ .
- la direction d'arrivée de l'onde issue de chaque source, DOA ou  $\theta$  par rapport à un repère fixe de l'antenne
- l'intensité des signaux émis par ces sources  $P$ .

Alors pour estimer la matrice de covariance on utilise l'estimation au sens de maximum de vraisemblance.

La motivation de l'estimation par le maximum de vraisemblance réside dans le fait que cet estimateur est asymptotiquement sans biais et à variance minimale.

Cette situation concerne soit l'estimation sur un ensemble de réalisations tendant vers l'infinie, soit l'estimation d'un processus stationnaire sur un horizon tendant vers l'infinie.

La méthode repose sur une modélisation paramétrique. Soit  $\theta$  le vecteur de paramètre, l'observation  $X$  est supposée complexe gaussienne de covariance  $R(\theta)$ , d'où la densité de probabilité et le log-vraisemblance

$$\xi(\theta, x) = -\left\{M \log(\pi) + \log(\det R) + x^H R^{-1}(\theta)x\right\} \quad (4.1)$$

Dans le cas où l'on dispose de  $n$  observations indépendantes, les log-vraisemblances s'ajoutent.

En notant que  $x^H R^{-1}(\theta)x = \text{Tr}[R^{-1}(\theta)x x^H]$ , on obtient

$$\xi_n(\theta, x) = -n \left\{M \log(\pi) + \log(\det R) + \text{Tr}[R^{-1}(\theta)\hat{R}]\right\} \quad (4.2)$$

Alors,

$$\hat{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x(t)x(t)^H \quad (4.3)$$

### 4.3 Structure du programme principal

Dans ce paragraphe on aura pour but de présenter l'algorithme, l'organigramme et quelques éléments utilisés lors de la programmation pour chacune des méthodes étudiées dans le chapitre précédent.

On commencera par présenter la structure du programme principal puis, on développera ses éléments constitutants.

Le procédé de calcul des méthodes déjà étudiées, se résume à trouver les valeurs propres caractérisant le sous espace source qui vont correspondre au valeur désirée de la DOA ou  $\theta$  et ceci après avoir calculé la matrice de covariance  $R_{xx}$  du réseau complet pour la méthode TLS ESPRIT et les deux matrices  $R_{xx1}$  et  $R_{xx2}$  qui correspondent au deux sous réseau utilisées dans la méthode ESPRIT.

Le procédé décrit auparavant va se répéter pour un nombre de simulation  $S$  donné et pour chacune des méthodes et ceci afin de calculer par la suite, le biais et la variance donnés respectivement par

$$\text{- le biais} = E[\hat{\theta} - \theta] \quad (4.4)$$

$$\text{- la variance} = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] \quad (4.5)$$

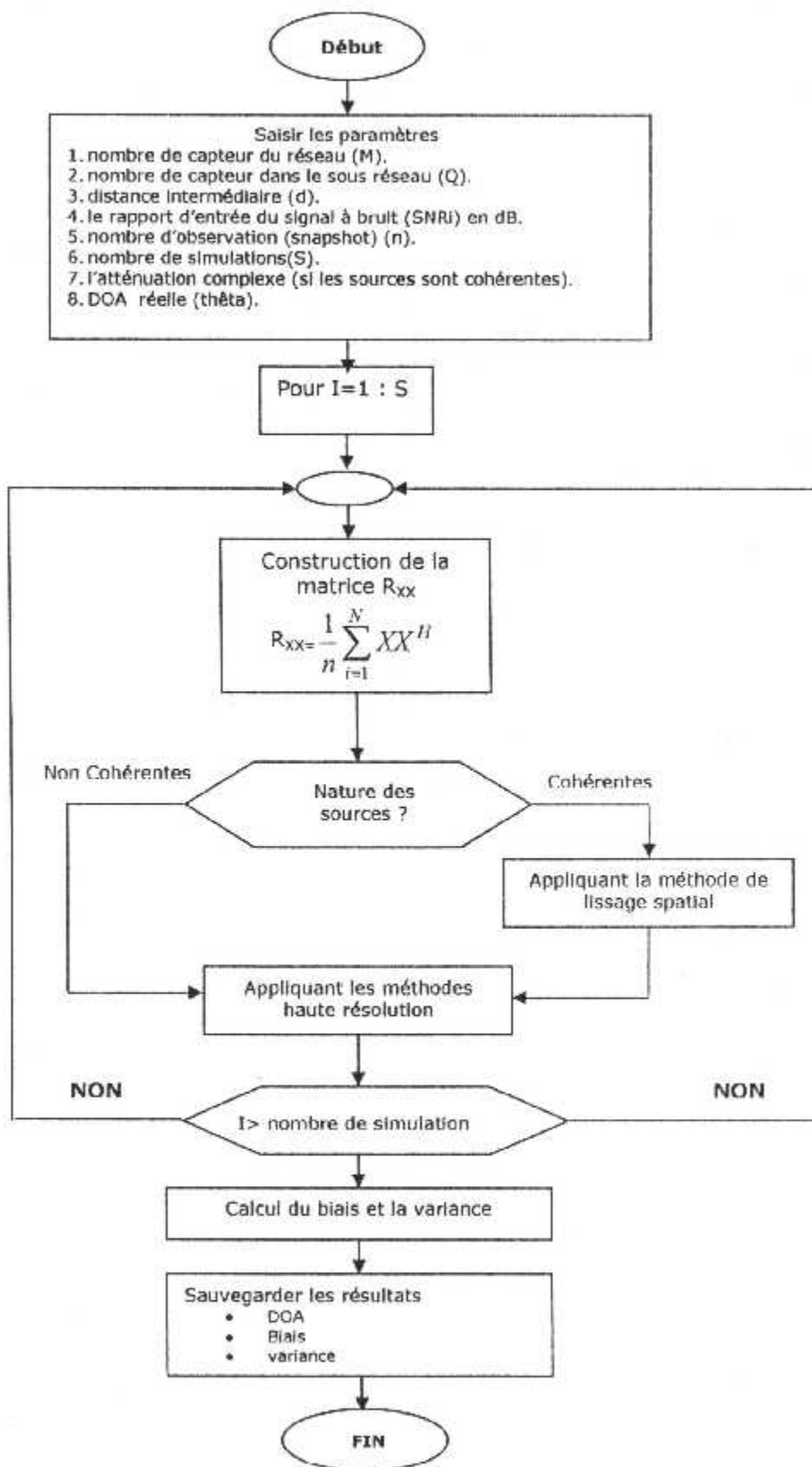
Où  $\hat{\theta}$  est l'angle estimé d'arrivée,  $\theta$  est la vraie valeur de cet angle,  $E(\hat{\theta})$  est la valeur moyenne des estimations.

L'algorithme général est basé sur trois étapes suivantes

- a- calculer la matrice de covariance pour les deux méthodes.
- b- appliquer la méthode de lissage spatial pour le cas cohérent.
- c- appliquer les algorithmes haute résolution pour estimer DOA.

Après avoir répéter les opérations a et b et c pour une durée correspondant au nombre de simulations donnés au départ, on calcule pour chaque méthode le biais, la variance.

**L'organigramme correspondant est donné par la suite.**





#### 4.4 Structure des sous programmes

L'algorithme du programme principal, nous permet de définir principalement quatre sous programmes. Ce paragraphe aura pour tâche de présenter ces sous programmes de point de vue algorithmique en incluant quelques remarques utilisées lors de leur programmation.

##### 4.4.1 Matrice de covariance

La matrice de covariance est construite à partir de l'algorithme suivant

On détermine premièrement le vecteur du signal de sortie  $X$  pour chaque capteur en calculant dans l'ordre

- les vecteurs sources. (voir (2.1)).
- associé l'enveloppe complexe aux vecteurs sources.
- ajouter les composantes du bruit qui est supposé comme un bruit gaussien blanc non corrélé pour chaque capteur.
- Signaux de sortie de chaque capteur (voir (3.3)).

Par la suite, on calcule  $X^H$ , pour obtenir finalement la matrice de covariance donnée par la relation (4.3).

##### 4.4.2 L'algorithme de lissage spatial

Cette méthode décrite au chapitre précédent permet de lisser la matrice de covariance au cas où on aura des sources cohérentes ou autrement dit pour avoir une matrice de covariance source ( $R_s$ ) non singulière c-à-d le rang de cette dernière doit être égal au nombre de sources  $K$ .

L'algorithme de cette méthode est basé sur les étapes suivantes

- Déterminer le nombre de sous réseaux ( $L$ ) à partir de nombre de capteurs ( $Q$ ).
- Appliquer les deux schémas (forward/backward).
- Calculer la moyenne des deux matrices extraites par les deux schémas (voir (3.61)).

##### 4.4.3 L'algorithme ESPRIT

L'algorithme ESPRIT est basé sur les étapes suivantes

- récupérer les signaux de sorties de chaque capteur pour le réseau complet.
- extraire  $X1$  le vecteur d'observation qui contient les signaux de sorties à partir du premier capteur jusqu'à l'avant dernier.
- extraire  $X2$  le vecteur d'observation qui contient les signaux de sorties à partir du deuxième capteur jusqu'à le dernier capteur.

- Calculer  $R_{xx1}$  et  $R_{xx2}$  les deux matrices de covariances associées à ces deux sous réseaux, tel que

$$R_{xx1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_1 * X_1^H \tag{4.6}$$

$$R_{xx2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_2 * X_2^H \tag{4.7}$$

- Appliquer la méthode de lissage spatial à ces deux matrices si les sources sont cohérentes.
- Calculer la matrice  $T$  à partir de la relation suivante

$$T = (R_{xx1})^{-1} * R_{xx2} \tag{4.8}$$

- Décomposer la matrice  $T$  en valeurs singulières et extraire les valeurs propres ( $\lambda_i$ ) les plus grandes qui correspondent aux sous espace signal.
- Calculer la DOA à partir de la relation suivante

$$\theta_i = a \cos\left(\frac{\arg(\lambda_i)}{\pi * d}\right) \quad i = 1 : K \tag{4.9}$$

$d = 1$  Pour  $\tilde{d} = \frac{\lambda}{2}$  (tel que  $d$  représente la distance normalisée entre deux capteurs successive.)

#### 4.4.4 L'algorithme TLS-ESPRIT

La structure de l'algorithme TLS-ESPRIT est comme suit

- Décomposer la matrice de données  $R_{xx}$  du réseau complet en valeurs singulières.
- Appliquer la méthode de lissage spatial à ces deux matrices si les sources sont cohérentes.
- Extraire les deux matrices  $E_x$  et  $E_y$  de dimension  $M \times K$  à partir de la matrice des vecteurs propres qui sont associés aux valeurs propres de  $R_{xx}$ .
- Calculer la matrice  $E_{xy}$  à partir de la formule (3.79).
- Décomposer  $E_{xy}$  en valeurs singulières.
- Extraire les deux matrices  $V_{12}$  et  $V_{22}$  à partir de la matrice des vecteurs propres qui sont associés aux valeurs propres de  $E_{xy}$ . (voir (3.88)).
- Calculer  $-V_{12} V_{22}^{-1}$  et décomposer la matrice qui résulte de ce calcul en valeurs singulières car ces valeurs correspondent aux vraies directions d'arrivée  $\theta_i$ . (voir (4.9))

## 4.5 Simulations et commentaires

### 4.5.1 Simulations

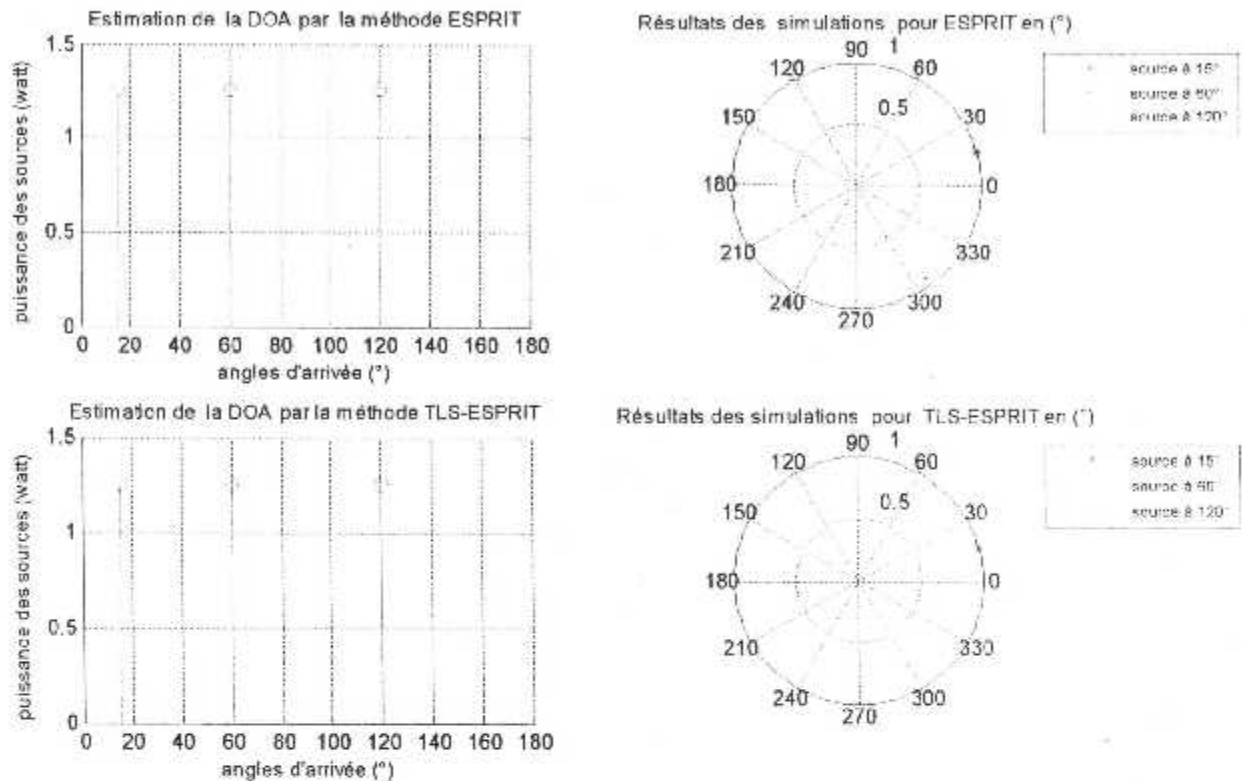
Nous allons illustrer dans ce paragraphe les méthodes haute résolution proposées à travers quelque exemples en prenant des échantillons différentes des signaux sources pour avoir des réalisations différentes de la matrice de covariance afin de calculer le biais et la variance de notre estimateur, qui nous permettront à la fois de voir l'avantage de l'utilisation de ces méthodes et de comparer leur performances en termes de précision et robustesse au bruit.

Pour nos simulations, L'antenne utilisée est une antenne linéaire munie de  $(M)$  capteurs équirépartis, omnidirectionnels et de gain unité ; le milieu de propagation est un milieu non dispersif, Les sources ont été supposées suffisamment loin du réseau pour les considérer comme des ondes planes. La distance intercapteur est égale à une demi longueur d'onde. Le bruit a été supposé blanc dans la bande passante de l'antenne et sa puissance est normalisée à 1. Le rapport d'entrer du signal à bruit de chaque source est variable de -11 à 1dB.

#### ✶ Remarque

Pour les simulations qui suivent, on va simuler deux scènes, une scène de sources non cohérentes et l'autre de sources cohérentes, avec comme vous aller remarquer deux représentations des résultats, une représentation de la moyenne des estimations pour un nombre  $S$  de simulations en fonction de la puissance réel des sources, et l'autre représentation, nous permet de voir la stabilité des méthode au fur à mesures quand change les échantillons des signaux sources. Le rapport signal sur bruit utilisé dans chaque cas des simulations et aussi précisé au moyen du paramètre «  $SNR_i$  », défini comme étant le rapport entre la puissance signal et la puissance du bruit.

**Simulation n°01** L'effet du nombre d'observations ( $n$ ) sur l'estimation.



**Figure 4.1** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT			TLS_ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	15.16146	59.98835	120.0219	14.97309	60.01156	120.0058
<b>Variance</b>	0.11436	0.0079245	0.0075246	0.07313	0.004098	0.0027448
<b>Biais</b>	0.16146	-0.011649	0.021926	-0.026914	0.011558	0.0058298

**Tableau (4.1)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (n=250).



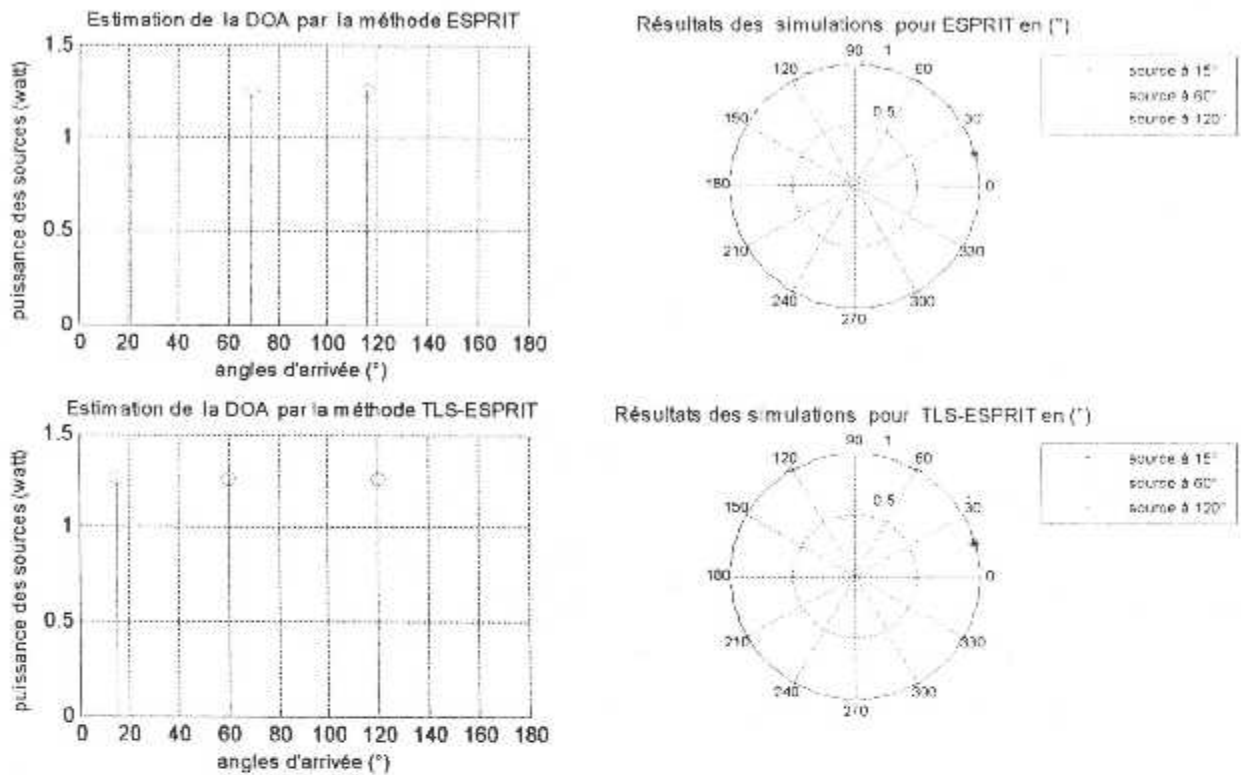
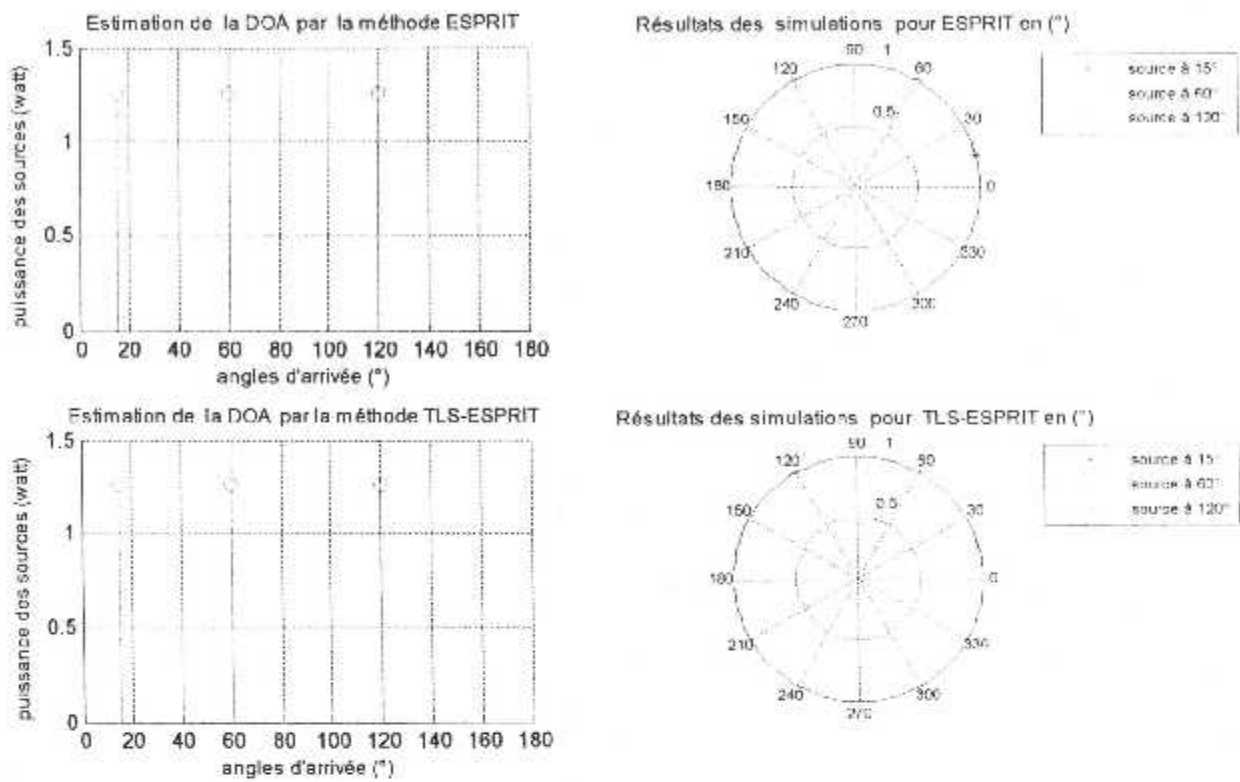


Figure 4.2 Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 80).

	ESPRIT			TLS_ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	21.46912	69.82227	115.7661	14.87971	60.03664	119.9718
<b>Variance</b>	212.638	378.002	290.9532	0.15212	0.015669	0.0075809
<b>Biais</b>	6.4691	9.8223	-4.2339	-0.12029	0.036635	-0.028167

Tableau (4.2) Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (n=80).



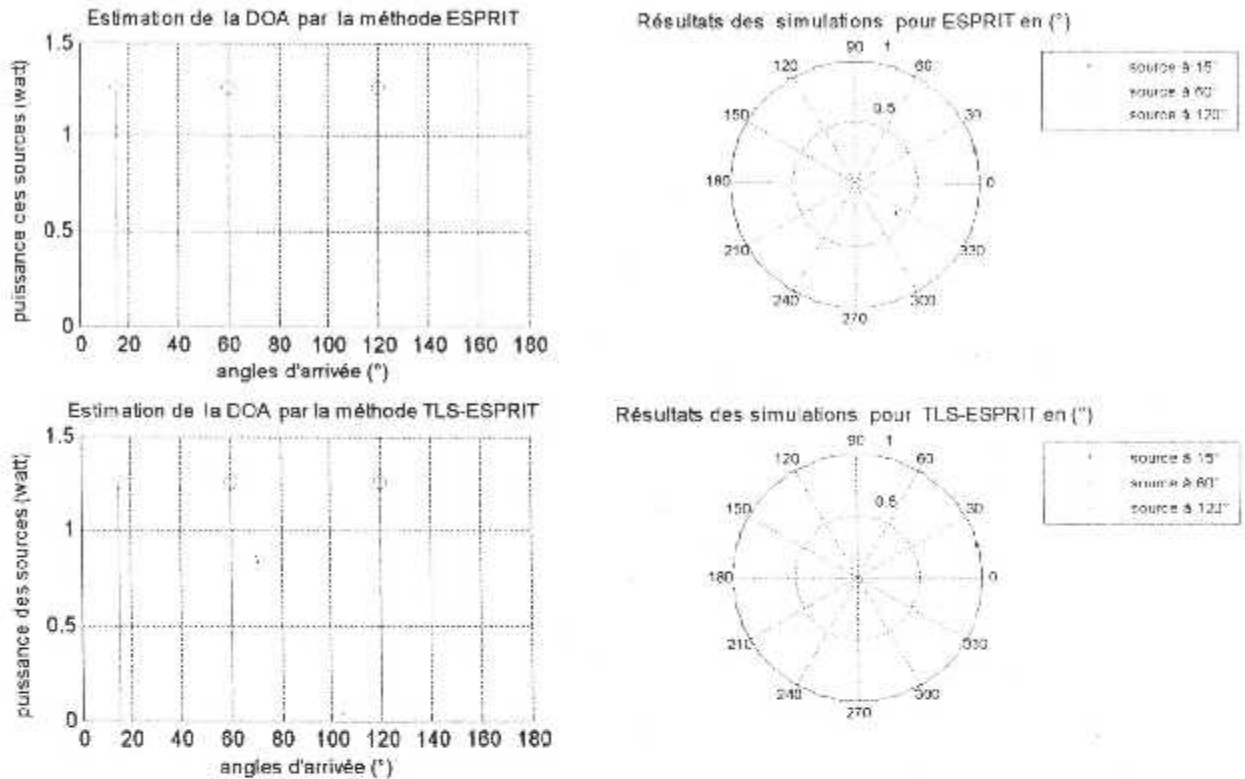
**Figure 4.3** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 500).

	ESPRIT			TLS_ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	15.05172	59.97733	120.0054	14.98715	60.00064	119.998
<b>Varlance</b>	0.043578	0.0040823	0.003277	0.024514	0.0022349	0.002941
<b>Biais</b>	0.051716	-0.022675	0.0053896	-0.012853	0.00063766	-0.0019925

**Tableau (4.3)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (n=500).



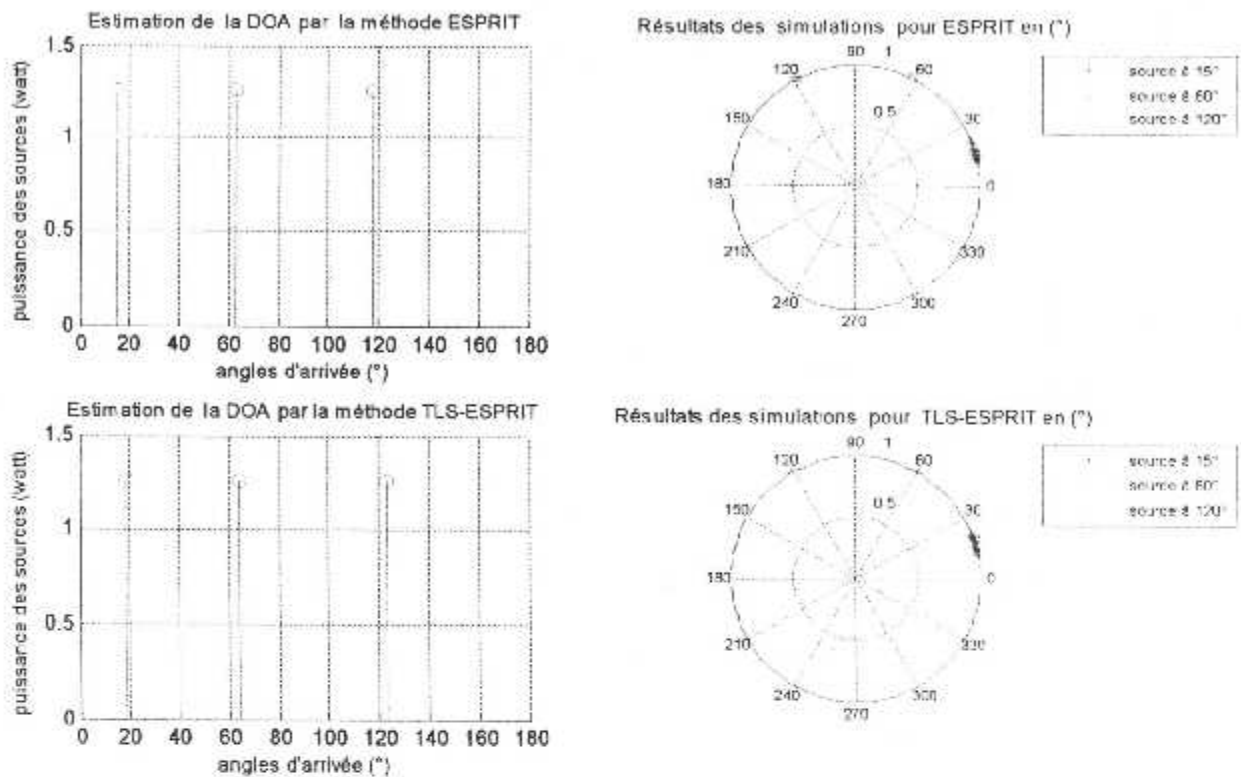
**Simulation n°02** L'effet du nombre de capteurs( $M$ ) sur l'estimation.



**Figure 4.4** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Trente capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT			TLS_ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	15.0598	59.99587	119.9839	15.00304	59.99538	120.0008
<b>Variance</b>	0.052823	0.00512	0.0029749	0.022882	0.00099805	0.0019383
<b>Biais</b>	0.059803	-0.0041331	-0.016076	0.0030424	-0.0046239	0.00078045

**Tableau (4.4)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $M = 30$ ).

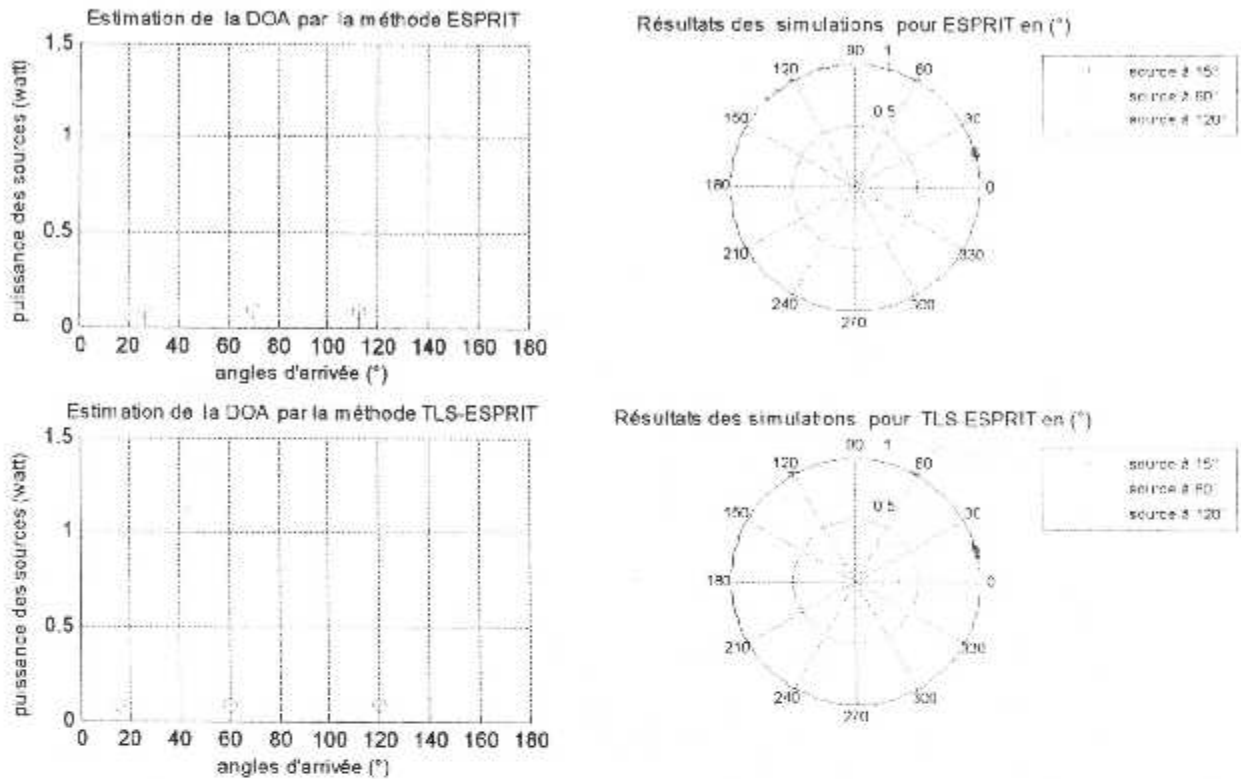


**Figure 4.5** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Quatre capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT			TLS ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	14.83867	62.89033	117.698	18.19656	64.09996	123.5267
<b>Variance</b>	8.8037	0.30595	0.37543	135.7049	225.5167	187.3121
<b>Biais</b>	-0.16133	2.8903	-2.302	3.1966	4.1	3.5267

**Tableau (4.5)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes ( $M = 4$ ).

**Simulation n°03** L'effet du rapport signal à bruit ( $SNR_i$ ) sur l'estimation.

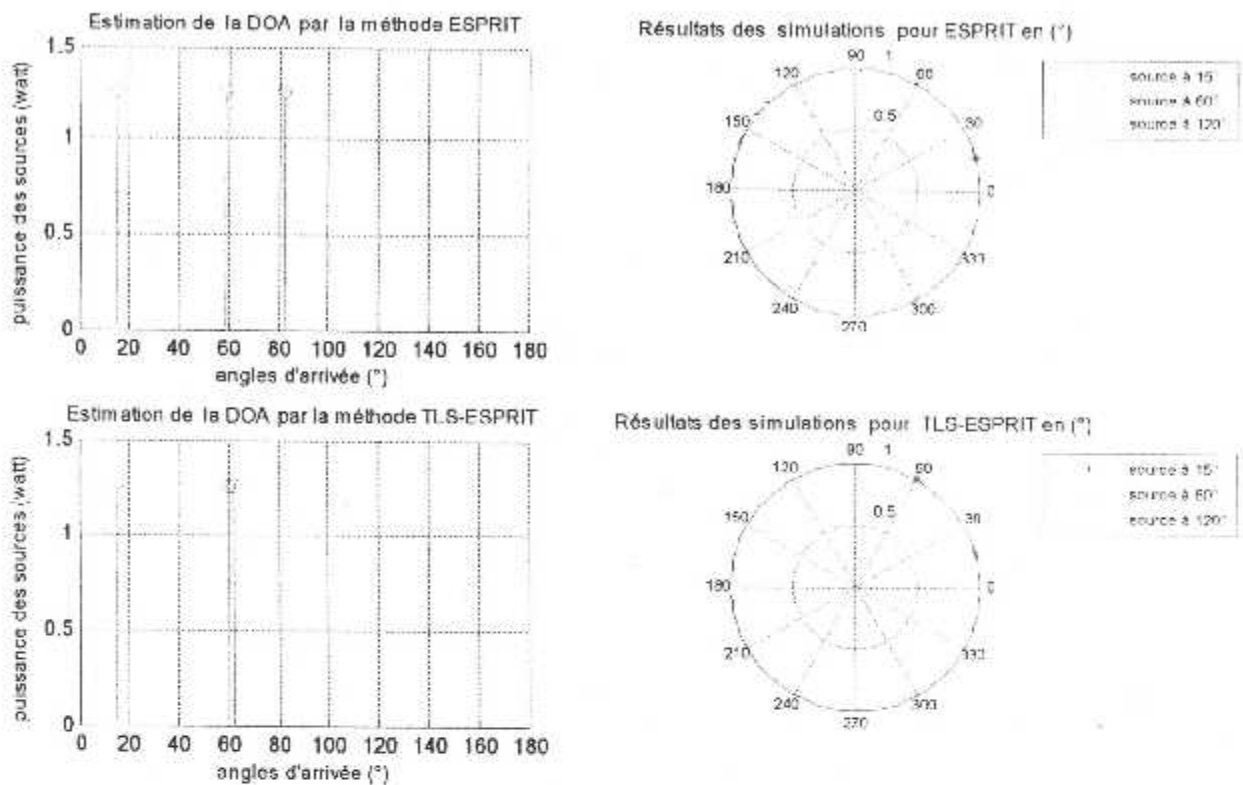


**Figure 4.6** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à -11dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT			TLS ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	26.56917	70.07834	112.4784	15.17929	60.09994	119.8878
<b>Variance</b>	393.4629	449.7876	612.0811	2.9089	0.26657	0.16524
<b>Biais</b>	11.5692	10.0783	-7.52156	0.17929	0.09994	-0.11215

**Tableau (4.6)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (( $SNR_i$ ) = -11dB)

**Simulation n°04** estimation de la DOA pour des sources très rapprochées



**Figure 4.7** Résultats des simulations pour 03 sources non cohérentes (15°, 60°, 120°). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation = 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT			TLS_ESPRIT		
	Source 1	Source2	Source 3	Source 1	Source 2	Source 3
<b>DOA estimée</b>	15.1757	58.777	82.2884	14.953	60.0124	62.1086
<b>Variance</b>	0.097866	37.653215	1005.4374	0.075673	0.05446	0.028681
<b>Biais</b>	0.175682	-1.22296	20.2884	-0.46971	0.012377	0.10862

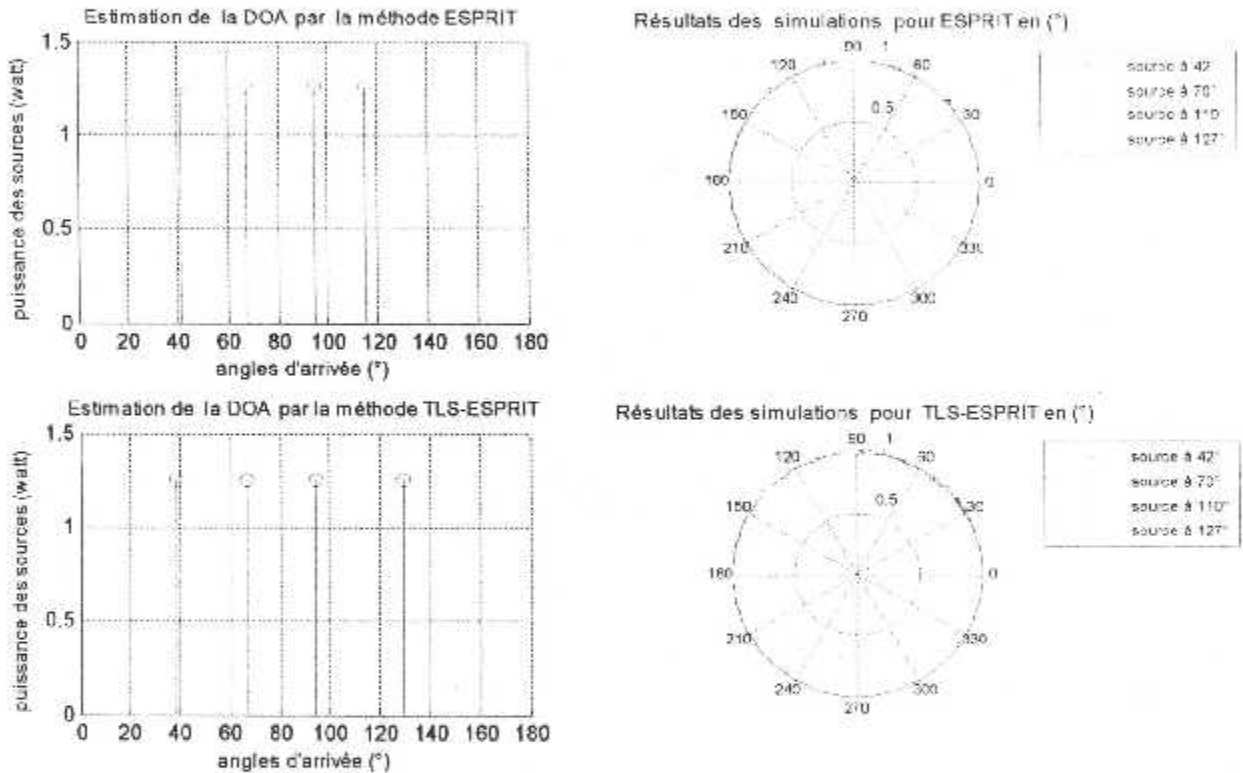
**Tableau (4.7)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources non cohérentes (rapprochement des cibles)



• **Remarque** dans les simulations qui viennent, on va utiliser trois sources cohérentes ( $70^\circ, 110^\circ, 127^\circ$ ) avec les coefficients d'atténuations  $0.4+j0.8, -0.3-j0.7, 0.5-j0.6$  respectivement, issues d'un signal de référence arrivant à  $42^\circ$  par rapport à un repère fixe de l'antenne réseaux. On va utiliser au début neuf capteurs pour estimer la matrice de covariance lissée ( $Q=9$ ).

**Simulation n°05** l'importance de la méthode de lissage spatial sur l'estimation des sources cohérentes.

• Sans lissage spatial

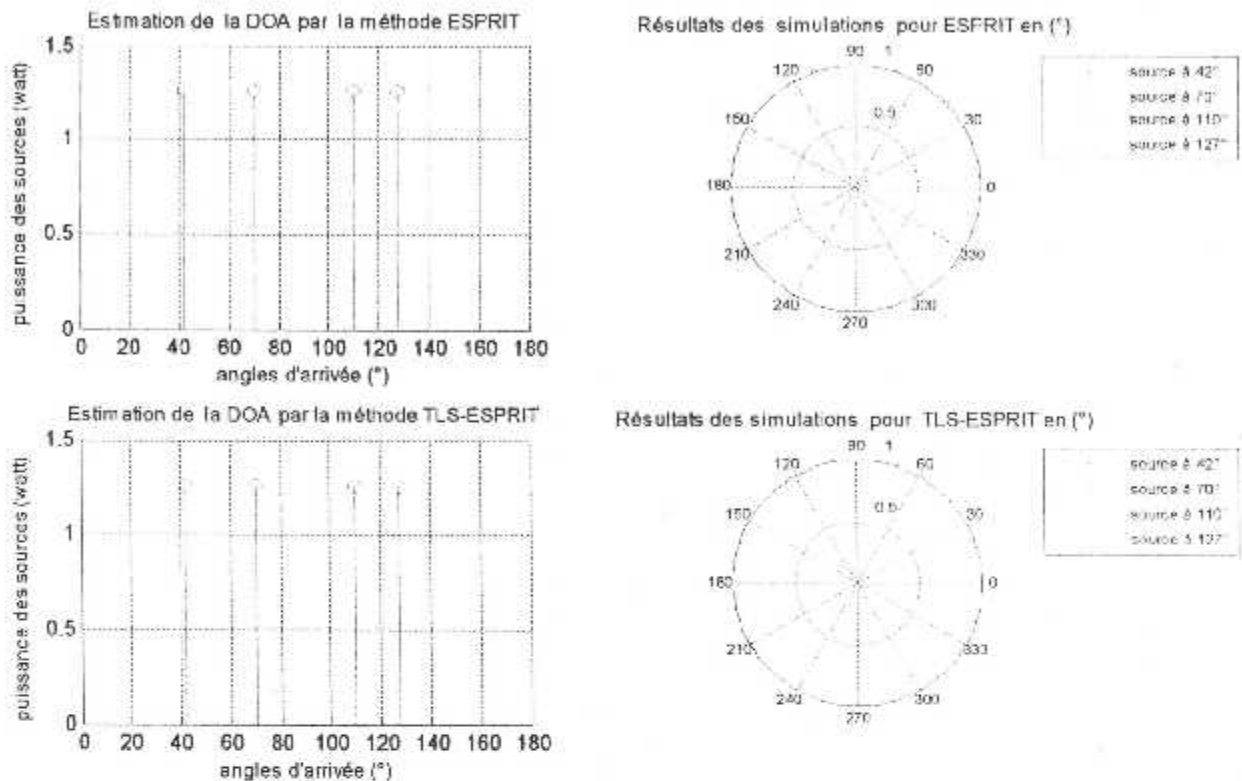


**Figure 4.8** Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 127^\circ$ ) sans lissage spatial. Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux, Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 10, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.0243	67.75117	95.33453	115.1378	38.43154	66.51939	94.65488	129.2512
<b>Variance</b>	0.44427	13.42571	315.8215	143.8861	78.52368	85.99527	153.7972	281.723
<b>Biais</b>	-0.9757	-2.24883	-14.6655	-11.8622	-3.56846	-3.48061	-15.3451	2.25118

**Tableau (4.8)** Les valeurs du biais pour sources cohérentes ( $S=10$ ) sans lissage spatial.

- Avec lissage spatial en gardant les mêmes paramètres utilisées précédemment.

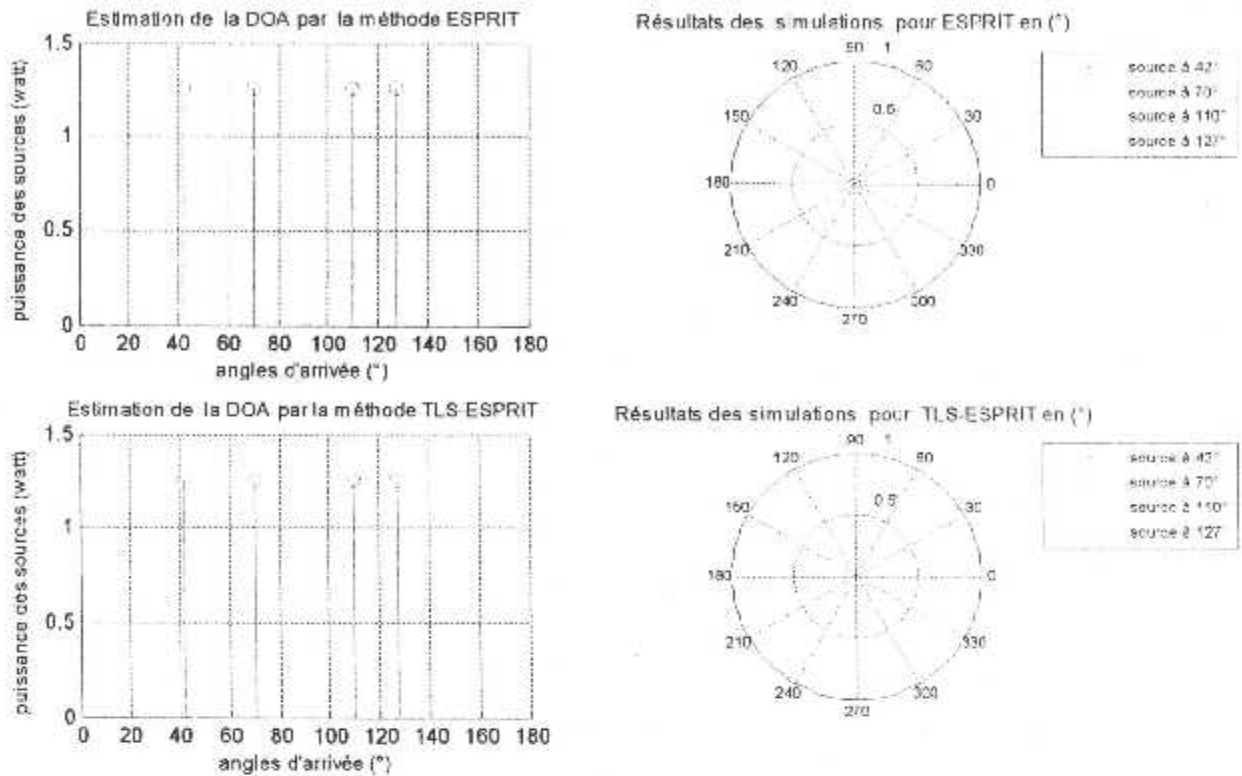


**Figure 4.9** Résultats des simulations pour sources cohérentes (42°, 70°, 110°, 127°) avec lissage spatial (Q=9). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 10, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.80097	70.08568	110.0485	126.9809	41.99442	70.02307	109.9822	126.986
<b>Variance</b>	0.000523	0.00096	0.0016406	0.0035367	0.0015787	0.0040949	0.0016847	0.0038094
<b>Biais</b>	-0.19903	0.085684	0.048489	-0.019135	-0.005584	0.023074	-0.01781	-0.014017

**Tableau (4.9)** Les valeurs du biais pour sources cohérentes (S=10) avec lissage spatial.



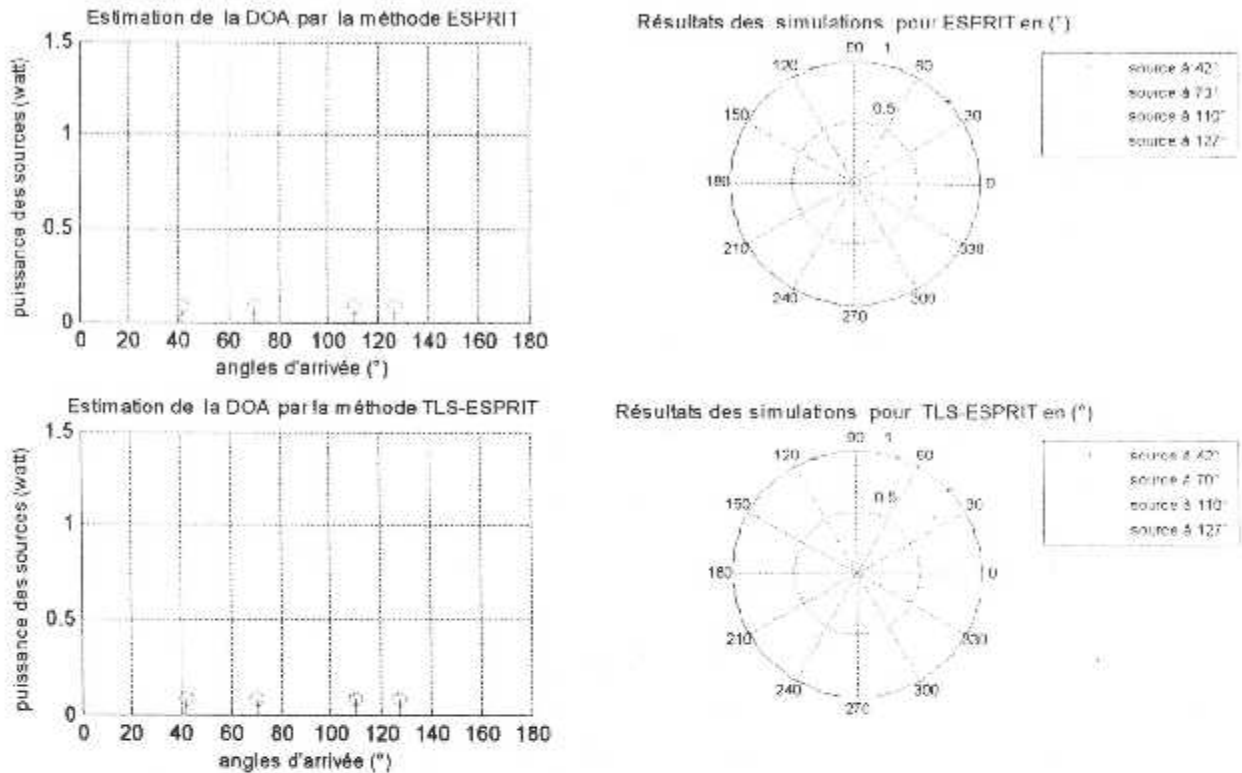


**Figure 4.10** Résultats des simulations pour sources cohérentes (42°, 70°, 110°, 127°). avec lissage spatial (Q=9). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.78393	70.08586	110.0463	127.0024	42.00207	70.00445	109.9986	126.9941
<b>Variance</b>	0.0019217	0.0011519	0.0023643	0.0041051	0.0017859	0.0024448	0.0018272	0.0031972
<b>Biais</b>	-0.21607	0.085865	0.0463	0.0024493	0.0020736	0.0044509	-0.001371	-0.005868

**Tableau (4.10)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (S=30)

**Simulation n°06** l'importance du rapport signal à bruit ( $SNR_s$ ) sur l'estimation des sources cohérentes.

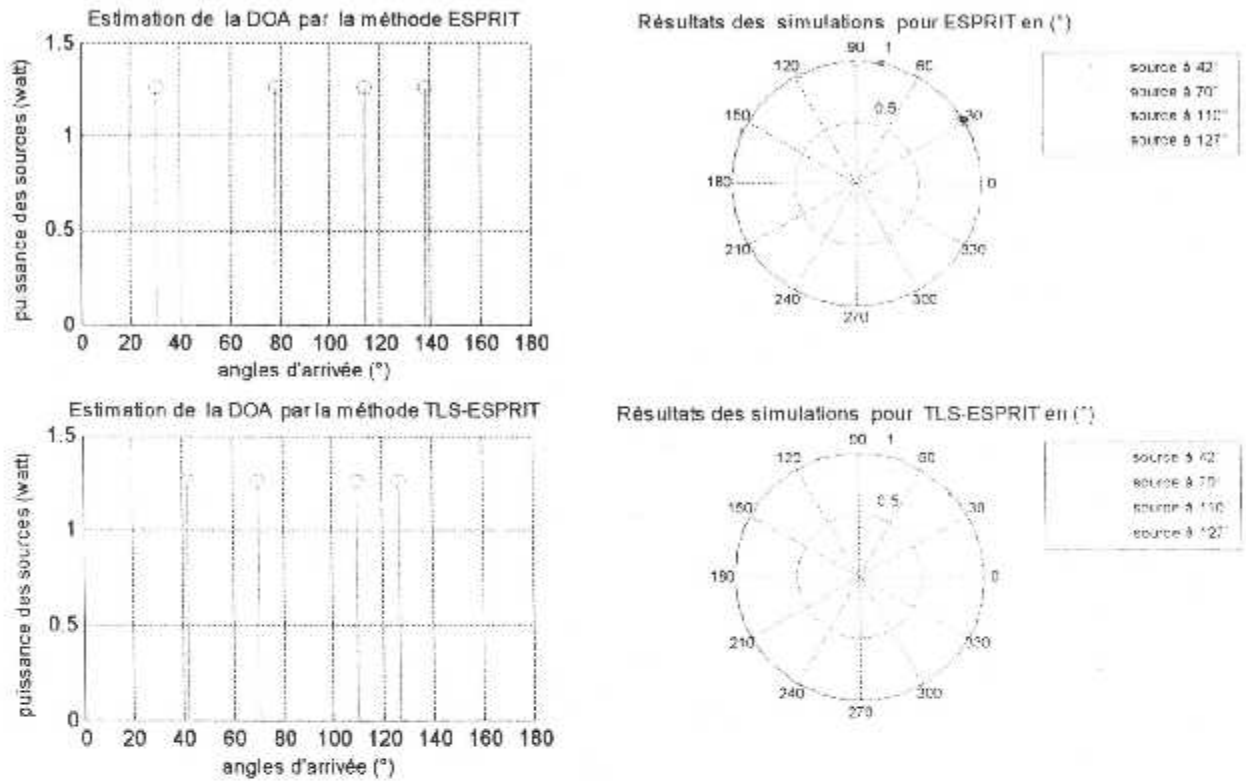


**Figure 4.11** Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 127^\circ$ ) avec lissage spatial ( $Q=9$ ). Vingt capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le  $SNR$  d'entrée est fixé à  $-11\text{dB}$  (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.28485	70.4409	110.3508	126.4985	42.0616	70.01306	109.9501	127.0149
<b>Variance</b>	0.071762	0.045445	0.040135	0.080034	0.1176	0.18651	0.20912	0.21642
<b>Biais</b>	-0.71515	0.4409	0.35077	-0.50152	0.061601	0.013064	-0.049921	0.014596

**Tableau (4.11)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $SNR_s=-11\text{dB}$ ).

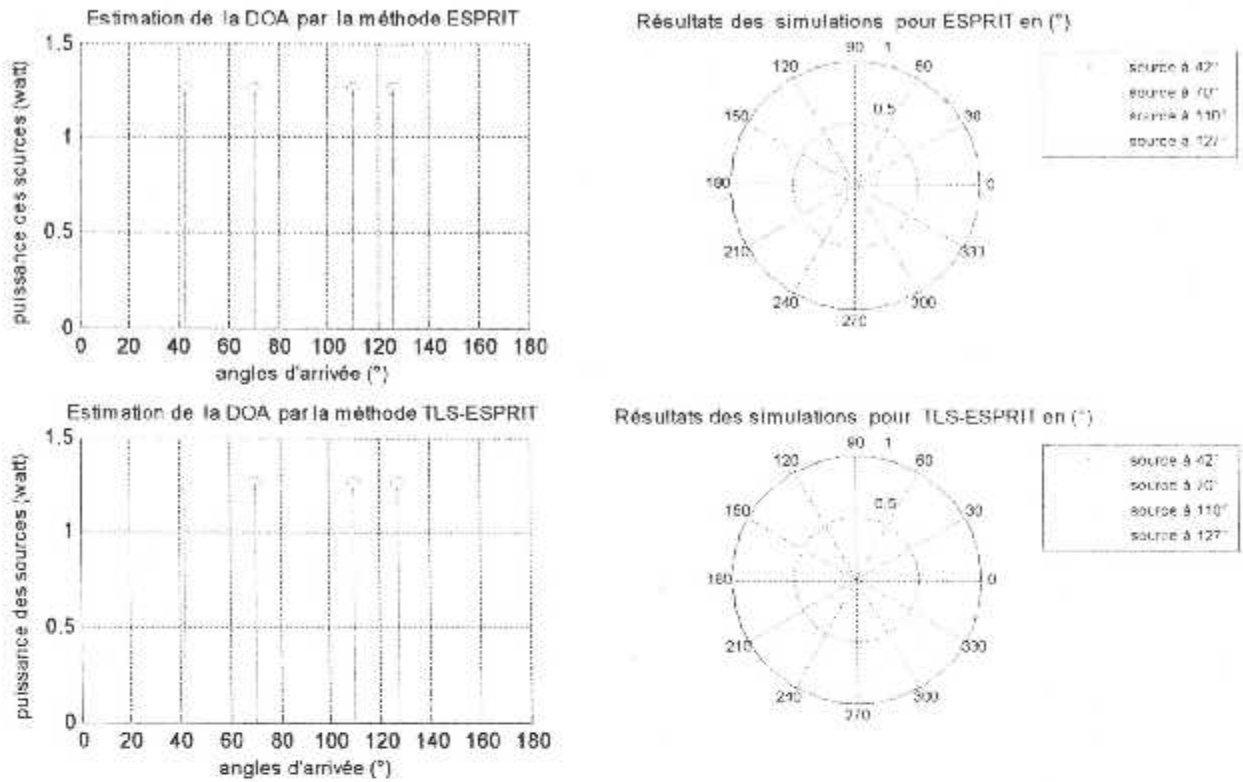
**Simulation n°07** l'importance du nombre de sous réseau ( $L$ ) utilisé dans la méthode de lissage spatial sur l'estimation des sources cohérentes.



**Figure 4.12** Résultats des simulations pour sources cohérentes ( $42^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 127^\circ$ ), avec lissage spatial ( $Q=8$ ). Dix capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	30.83063	78.02133	113.926	138.1697	42.01376	70.03941	110.0182	126.9387
<b>Variance</b>	1.499628	0.3147663	99.53835	366.5583	0.029881	0.019742	0.029242	0.030739
<b>Biais</b>	-11.1694	8.02133	3.92602	11.1697	0.013757	0.039408	0.018229	-0.061282

**Tableau (4.12)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes ( $L=3$ ).

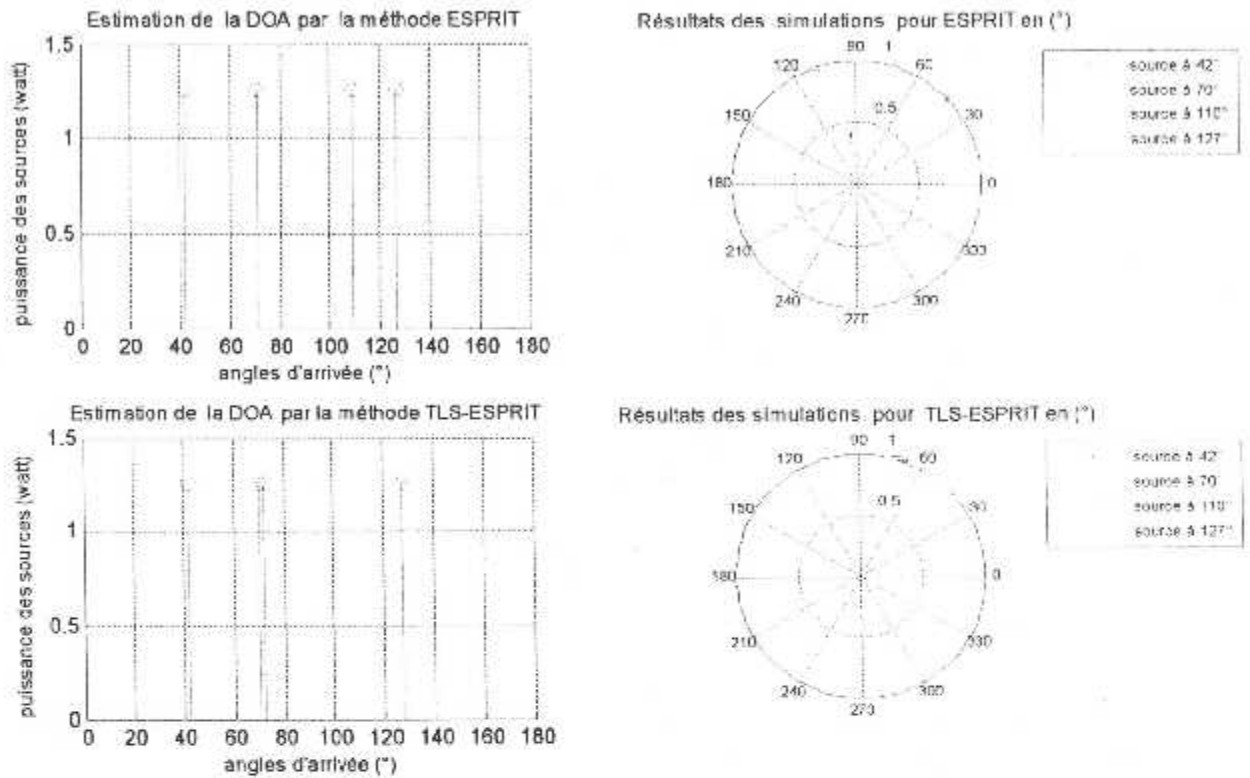


**Figure 4.13** Résultats des simulations pour sources cohérentes (42°, 70°, 110°, 127°), avec lissage spatial (Q=8). Douze capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	42.72538	69.90153	110.0325	126.1768	41.98949	70.02489	109.9964	126.978
<b>Variance</b>	0.020684	0.0092155	0.030567	0.058733	0.011184	0.0079631	0.017302	0.02459
<b>Biais</b>	0.72538	-0.09847	0.032487	-0.82322	-0.010506	0.02489	-0.003641	-0.021996

**Tableau (4.13)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (L=5).

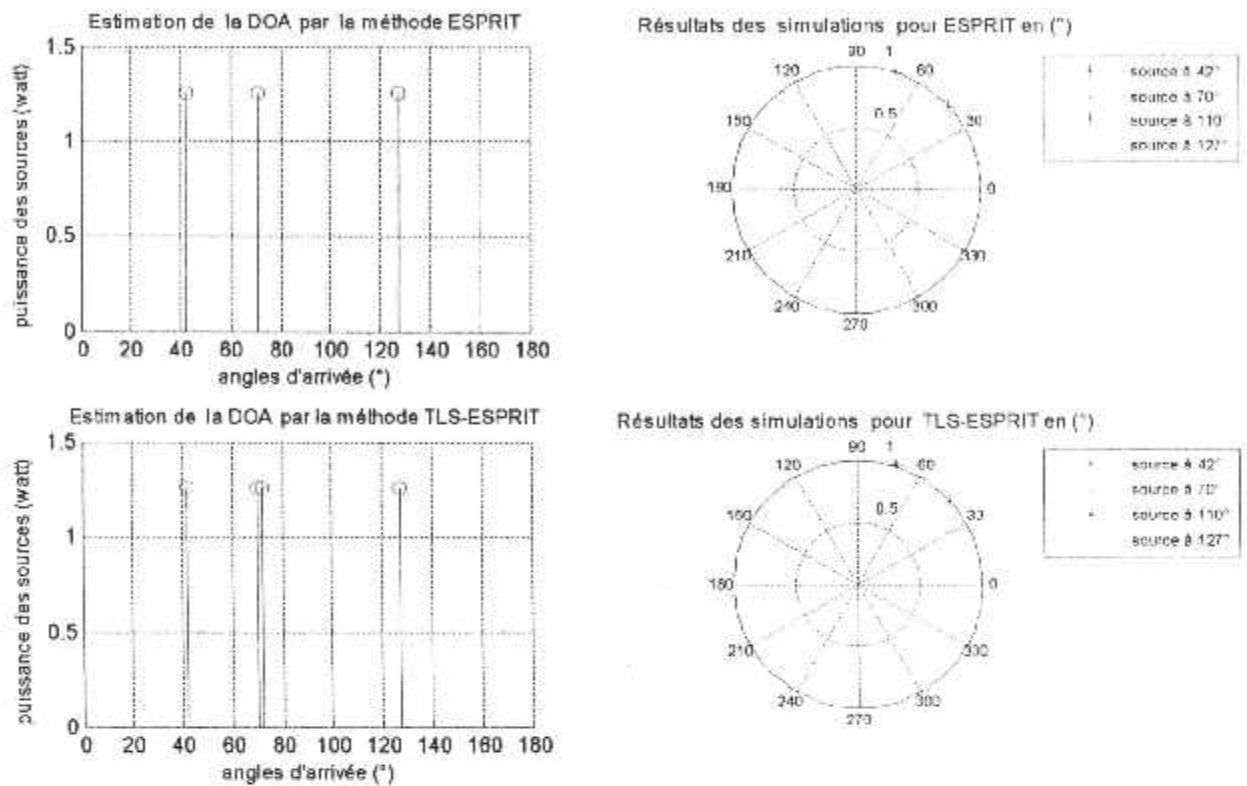
**Simulation n°08** Relation entre nombre de capteurs de sous réseaux ( $L$ ) et le pouvoir de résolution entre des sources cohérentes très proches.



**Figure 4.14** Résultats des simulations pour sources cohérentes (42°, 70°, 72°, 127°) avec lissage spatial (Q=9). Trente capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.98149	70.96366	109.7093	126.8869	42.00302	69.71135	71.9815	127.0037
<b>Variance</b>	0.0005889	0.000559	19.9807	0.000895	0.0012062	0.36137	0.37468	0.000976
<b>Biais</b>	-0.018512	0.963657	37.7093	-0.113088	0.0030216	-0.28865	-0.018502	0.0037399

**Tableau (4.14)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (sources rapprochées).



**Figure 4.15** Résultats des simulations pour sources cohérentes (42°, 70°, 72°, 127°), avec lissage spatial (Q=87). Quarante vingt treize capteurs sont utilisés pour recevoir les signaux. Le SNR d'entrée est fixé à 1dB (nombre des simulation= 30, nombre des observations = 250).

	ESPRIT				TLS_ESPRIT			
	Source1	Source2	Source3	Source4	Source1	Source2	Source3	Source4
<b>DOA estimé</b>	41.97013	70.76991	71.16352	127.1077	42.00098	69.99968	71.99789	126.9983
<b>Variance</b>	0.0011607	7.213 10 <sup>-5</sup>	6.402 10 <sup>-5</sup>	0.000294	4.017 10 <sup>-5</sup>	2.466 10 <sup>-5</sup>	6.517 10 <sup>-5</sup>	3.177 10 <sup>-5</sup>
<b>Biais</b>	-0.029869	0.76991	-0.83648	0.1077	0.0009771	-0.000321	-0.002113	-0.001698

**Tableau (4.15)** Les valeurs du biais, la variance et la DOA estimées pour sources cohérentes (sources rapprochées, n/3 < Q < n/2).



### 4.5.2 Commentaires

Pour la **simulation (01)**, on remarque un même comportement pour la méthodes ESPRIT et TLS\_ESPRIT ( $n=250$ ) mais avec des résultats plus précis pour cette dernière.

Quand le nombre d'observations ( $n$ ) augmente, il y a une nette amélioration du biais et de la variance pour les deux méthodes, par contre quand  $n$  diminue il y a une dégradation de l'estimation pour la méthode ESPRIT, alors que la méthode TLS\_ESPRIT parvient comme même à estimer les directions d'arrivée mais avec moins de précision par rapport au premier cas. Pour expliquer ceci, nous rappelons que ces méthodes haute résolution se basent sur la matrice de covariance estimée, alors que en augmentant le nombre d'observations, cette matrice tend vers la vraie matrice de covariance et cela nous a conduit à conclure que ces deux estimateurs sont asymptotiquement sans biais c-a-d que lorsque  $n$  tend vers l'infini le biais et la variance tendent vers zéros.

Dans la **simulation (02)**, on remarque que en augmentant le nombre de capteurs du réseau, nous parviendrons à trouver les valeurs réelles de la DOA ce qui implique que ces estimateurs ont un biais qui tend vers zéros et une variance minimale, alors dans le cas contraire ( $M=4$ ), TLS\_ESPRIT réagit mal en la comparant avec ESPRIT. En plus, il est clair que les résultats des estimations sont biaisées et dispersées par rapport à la moyenne, parce que, en diminuant le nombre de capteurs, on va réduire la dimension de la matrice de covariance et ceci revient à diminuer la bande effective des signaux sources et par conséquent le pouvoir séparateur des vecteurs d'observations.

En regardant les paramètres des simulations (01) et (02), on remarque que le rapport signal à bruit est suffisant pour mettre en évidence les trois sources non cohérentes, par contre lorsque le bruit devient important, comme c'est le cas dans la **simulation (03)**, l'algorithme ESPRIT commence à donner des erreurs. Et en dégradant le rapport signal à bruit on atteint la limite de robustesse pour la méthode ESPRIT à  $-7$  dB, Alors que pour la méthode TLS\_ESPRIT cette limite se trouve à  $-12$ dB.

La **simulation (04)** montre une propriété intéressante c'est que la méthode TLS\_ESPRIT parvient à séparer deux sources très proche de  $1$  à  $2^\circ$ , près avec un nombre de capteurs confortable pour la séparation des sources.

Pour des sources cohérentes nous avons montré dans le chapitre précédent que Le rang de la matrice de covariance  $R_u$  est égal à  $1$  et pour avoir des résultats justes et stables il faut que le rang de  $R_u$  soit égal au nombre de sources  $K$ . Pour le faire on doit appliquer la méthode de lissage spatial qui a pour but de reconstituer le rang de  $R_u$ .

Nous avons prouvé ces résultats par **simulation (5)**, où nous avons pris deux cas, le premier avec lissage (direct/retour) et le deuxième sans lissage, et à partir de ces deux cas nous avons conclu que l'estimation sans lissage nous à donner des résultats erronées avec un grand biais de calcul et une variance énorme, d'où la nécessité de la méthode de lissage spatial.

Comme les simulations précédentes (cas non cohérent), il faut tester la robustesse au bruit de ces méthodes en cas des sources de nature cohérentes. À partir de **la simulation (6)** nous avons constaté que pour des apports faible du  $SNR$ , la méthode TLS\_ESPRIT est très robuste en la comparant avec ESPRIT mais avec un biais et une variance moins par rapport au cas non cohérent, et ceci prouve encore une fois l'importance de la méthode de lissage spatial qui à bien minimiser les erreurs d'estimation et la limite de robustesse pour la méthode ESPRIT se trouve à  $-12\text{dB}$ , et pour la méthode TLS\_ESPRIT en atteint la limite de robustesse à  $-16\text{dB}$ .

Les performances des méthodes haute résolution en cas des sources cohérentes sont liés par l'efficacité de la méthode de lissage spatial parce qu'elle permet de décorréler les signaux sources, et pour le faire, il faut que le nombre de sous réseau  $L$  pour la méthode TLS\_ESPRIT soit supérieur à  $K/2$ , par contre la méthode ESPRIT nécessite que  $L$  soit supérieur à  $K+1$ , et les résultats du biais et de la variance dans la **simulation (7)** confirme cette supposition. Donc pour mieux décorréler les sources cohérentes, il faut avoir un nombre de sous réseaux confortable pour l'estimation mais ceci est vérifié seulement pour des sources suffisamment loin les une par rapport les autres et la **simulation (8)** montre ceci où nous avons augmenter  $L$  par rapport à la simulation qui la précède, et cette fois ci encore la méthode TLS\_ESPRIT est également supérieur par rapport à ESPRIT du point de vue de stabilité par rapport au choix de nombre de sous réseau  $L = M - Q + 1$ .

Alors ce ci nous a conduit à conclure que si le nombre de capteurs utilisés lors de la méthode de lissage spatial est faible alors on aura une bonne décorrélation des sources cohérentes mais le pouvoir de résolution diminue c'est pour ça qu'il faut chercher un compromis entre ces deux propriétés pour la méthode ESPRIT, pour cela certains auteurs [2](Annexe 02) conseillent quand même empiriquement une valeurs de  $Q$  entre  $n/2$  et  $n/3$  où  $n$  représente le nombre d'observations, et la **simulation (9)** montre la justesse de ce choix pour la méthode ESPRIT.

---

## **Conclusion et perspective**

## Conclusion et Perspective

Nous avons cité dans cette mémoire de thèse, les méthodes conventionnelles qui s'appuient sur la recherche des maxima d'une fonction basée sur l'estimation de la puissance des sources par rapport aux angles d'arrivées possibles. Mais à cause de la limitation de ces méthodes en matière de précision et de résolution et de robustesse par rapport au bruit, on s'est intéressé aux méthodes haute résolution basées sur l'estimation de la matrice de covariance à partir des vecteurs d'observations des signaux de sorties des capteurs. Et la recherche des valeurs propres d'une matrice (ESPRIT, TLS\_ESPRIT) nous donne les valeurs de la DOA souhaitées.

La présentation de ces deux méthodes haute résolution a été faite en comparant leur performance en matière de biais, et de variance, et ceci dans plusieurs cas de simulations.

On a présenté l'ensemble des résultats obtenus en faisant varier le rapport signal à bruit, le nombre d'observations, la dimension du réseau, la nature de sources estimées (cohérente ou non cohérentes), séparation des sources proches.

Nous avons pu démontrer que ces méthodes puissent être appliquées avec succès pour des sources non cohérentes, et à condition quand on applique la méthode de lissage spatial pour des sources cohérentes.

Bien que ces deux méthodes soient présentées dans la littérature comme ayant des performances théoriquement équivalentes, nous avons trouvé que statistiquement, pour notre problème, elles pouvaient être différenciées en fonction de leurs performances. Ainsi, l'algorithme TLS\_ESPRIT nous semble le plus adéquat pour donner une estimation stable, précise et robuste des positions des cibles.

Dans tout ce travail, nous avons considéré que la DOA était fixe, notre but majeur était de résoudre le problème de sources complètement cohérentes. Ce travail peut être étendu dans le cas d'une DOA variable au cours du temps, et qui est notamment le problème des radars de poursuite s'intéressant à une seule source.

---

# **Bibliographie**



# Bibliographie

- 📖 [1] S.U. Pillai: Array signal processing. Brooklyn, 1998.
- 📖 [2] S. Marcos : Méthodes haute résolution. Hermes, Paris, 1998.
- 📖 [3] R. Badeau : Méthodes haute résolution. Télécom Paris, 2005
- 📖 [4] R. H.Roy, ESPRIT: Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Technique, Ph.D.thesis, Stanford Univ., Stanford, CA, 1987.
- 📖 [5] S.U. Pillai, B.H.Kwon, An improved spatial smoothing technique for coherent signal identification. In ONR Annual Report, 1987.
- 📖 [6] [www.techniques-ingénieur.fr](http://www.techniques-ingénieur.fr) : détection et estimation en traitement d'antennes.
- 📖 [7] E.Radoi : Contribution à la reconnaissance des objets 3D à partir de leur signature Électromagnétique, thèse de doctorat, Université de Bretagne, 1999.
- 📖 [8] O.Besson : Estimation en traitement de signal. Paris, 1999.

---

# **Annexes**

# ANNEXE 01

## LE THEOREME DE LA DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES

Soit  $A$  une matrice ( $m \times n$ ) de rang  $k$ , dont les éléments sont généralement complexes. Alors, il existe un ensemble de valeurs  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$ , appelées valeurs singulières de  $A$ , et les matrices unitaires ( $m \times m$ )  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$  et ( $n \times n$ )  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  telles que:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^H = \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^H \quad (A1.1)$$

où:  $\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$  et  $H$  désigne la transposition Hermitienne.

Étant donné que :

$$\begin{cases} A^H = V \cdot \Sigma^H \cdot U^H \\ U^H \cdot U = I_m ; V^H \cdot V = I_n \end{cases} \quad (A1.2)$$

il en résulte:

$$\begin{cases} A^H \cdot A = V \cdot (\Sigma^H \cdot \Sigma) \cdot V^H \\ A^H \cdot A = U \cdot (\Sigma \cdot \Sigma^H) \cdot U^H \end{cases} \quad (A1.3)$$

et pour  $i = 1, k$  :

$$\begin{cases} A^H \cdot A \cdot v_i = \sigma_i^2 \cdot v_i \\ A^H \cdot A \cdot u_i = \sigma_i^2 \cdot u_i \end{cases} \quad (A1.4)$$

Les matrices  $A^H \cdot A$  et  $A \cdot A^H$  sont hermitiennes, respectivement de taille ( $n \times n$ ) et ( $m \times m$ ). Les colonnes de  $U$  sont donc les vecteurs propres orthonormaux de  $A \cdot A^H$  et les colonnes de  $V$ , les vecteurs propres orthonormaux de  $A^H \cdot A$ .

Les matrices  $A \cdot A^H$  et  $A^H \cdot A$  partagent les mêmes valeurs propres  $\sigma_i^2$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Ainsi, les valeurs singulières sont les racines carrées positives des valeurs propres non-nulles de ces deux matrices. En utilisant la propriété d'unitarité des matrices  $U$  et  $V$ , on peut également écrire pour  $i = 1, k$  :

$$\begin{cases} A \cdot V = U \cdot \Sigma \\ U^H \cdot A = \Sigma \cdot V^H \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i \\ A \cdot u_i = \sigma_i \cdot v_i \end{cases} \quad (A1.5)$$

La pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice  $A$  peut être alors exprimée en fonction des valeurs singulières calculées ci-dessus comme étant :

$$A^\# = V \cdot \Sigma^\# \cdot U^H = \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \cdot v_i \cdot u_i^H \quad (A1.6)$$

avec :  $\Sigma^\# = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## ANNEXE 02

### Le Choix du paramètre $Q$

On rappelle que la valeur choisie de  $Q$  devra rendre la matrice d'autocorrélation (covariance) des vecteurs d'observation non-singulière, ce qui équivaut à la décorrélation des signaux réfléchis par les différents cibles. Cette condition est accomplie si le rang de la matrice de données du sous-espace signal est égal à  $K$ .

Pour cela que plus la valeur de  $Q$  est fiable, plus le nombre de vecteurs d'observation générés est important et donc meilleure sera la décorrélation des signaux sources.

Par ailleurs, diminuer la valeur de  $Q$  revient à diminuer la bande effective et par conséquent le pouvoir séparateur des vecteurs d'observation. L'idée est donc d'utiliser un paramètre  $Q$  issu de ce compromis.

Pour pouvoir étudier ce compromis il faut définir deux mesures pour quantifier les deux grandeurs qui entrent en jeu. Ainsi, comme mesure de la décorrélation il est préférable d'utiliser l'inverse du nombre de conditionnement de la matrice  $R$ , défini

par la relation :  $cond(R) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

où  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{min}$  sont respectivement ses valeurs propres maximale et minimale.

Lorsque la corrélation est forte cette matrice est singulière et par conséquent  $\frac{1}{cond(R)}$  sera très proche de zéro. Au fur et à mesure que la matrice devient bien conditionnée ce rapport augmente progressivement.

Le deuxième paramètre décrit la dégradation du pouvoir séparateur individuel de chaque vecteur d'observation lorsque  $Q$  diminue, en raison de la réduction de sa bande efficace. L'idée est de dire que la cible peut être vue à différentes échelles de résolution.

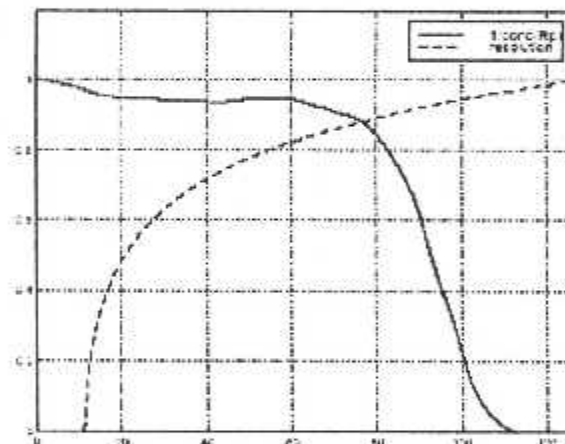
Sur le premier niveau, la cible est contenue dans une seule cellule de résolution, dont la longueur est à la limite égale à la dimension de la cible:

$\Delta R_{sv} = \frac{c}{2\Delta f \cdot Q_0} \Rightarrow Q_0 = 10$  Aucune séparation des sources n'est possible et donc le pouvoir séparateur est nul.

Ensuite, pour passer d'un niveau de résolution à un autre il faut chaque fois doubler la bande de fréquences, c'est-à-dire la valeur de  $Q$ . Ainsi, cette courbe aura l'allure de la fonction  $\log_2 Q$ .

Le pouvoir séparateur maximal est obtenu pour  $Q = n - 1$

Les deux courbes sont représentées sur la figure suivante :



**Description graphique du compromis pour le choix de Q**

Les deux courbes ont été normalisées avant la représentation. La courbe représentant la variation du nombre de conditionnement de la matrice  $R$  a été obtenue par moyennage des 100 vecteurs de données correspondant à l'avion Mirage 2000, pour des incréments angulaires de  $0.5^\circ$ , entre  $-5^\circ$  et  $45^\circ$ .

Il est maintenant aisé de constater sur cette courbe que le meilleur compromis entre la dégradation des performances en résolution des vecteurs d'observation et la décorrélation des contributions des différents points brillants est en effet obtenu pour des valeurs de  $Q$  entre  $n/3$  et  $n/2$ .

Le même résultat a été également retrouvé dans le cas des autres cibles, ce qui permet naturellement à le généraliser.

## ANNEXE 03

### Le Choix du paramètre K

Lorsque la dynamique des sources est faible et le rapport signal sur bruit est important l'estimation de la dimension du sous-espace signal peut être faite à partir de la distribution des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation ou des valeurs singulières de la matrice de données.

Ainsi, si la matrice d'autocorrélation était non-singulière, les valeurs propres du sous-espace bruit étaient les plus faibles et en plus elles étaient toutes égales à la variance du bruit  $\sigma^2$ .

La dimension du sous-espace bruit pourrait être donc déduite à partir de l'ordre de multiplicité de la valeur propre la plus faible. Le problème est que nous utilisons une estimée de la matrice d'autocorrélation et dans ce cas les valeurs propres du sous-espace bruit sont toutes différentes.

La séparation des deux sous-espaces est réalisée alors au moyen d'un seuil qui sépare les valeurs propres faibles des valeurs propres fortes. Néanmoins, lorsque les deux conditions ne sont plus accomplies, comme c'est le cas des profils de distance, il n'est plus possible de déterminer un tel seuil qui sépare correctement les sous-espaces signal et bruit à partir de ces distributions.

Akaike a alors proposé de déterminer la dimension du sous-espace signal à partir d'un critère informatif, car le problème est équivalent à celui qui consiste à rechercher l'ordre d'un modèle.

L'idée est de rendre optimale l'adéquation entre ce modèle et les vecteurs d'observation.

L'ordre du modèle (la dimension du sous-espace signal, dans notre cas) sera alors estimé par la relation suivante :

$$\hat{K} = \arg \left\{ \min_{k=1, Q} [C(k)] \right\} \quad (\text{A3.1})$$



où  $C$  désigne la fonction critère utilisée, qui a la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} C(k) &= -L(k) + N_{PL} \\ L(k) &= (n - Q - 1) \cdot (Q + 1 - k) \cdot \log\left[\frac{MA(k)}{MG(k)}\right] \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

est la valeur maximale, par rapport aux paramètres du modèle, de la log-vraisemblance, pour un ordre du modèle donné et :

$$MA(k) = \frac{1}{Q + 1 - k} \sum_{i=k+1}^{Q+1} \mu_i \quad \text{et} \quad MG(k) = \left( \prod_{i=k+1}^{Q+1} \mu_i \right)^{\frac{1}{Q+1-k}} \quad (\text{A3.3})$$

désignent les moyennes arithmétique et géométrique respectivement des dernières  $Q + 1 - k$  valeurs propres.

Lorsque  $N_{PL}$  représente le nombre de paramètres libres du modèle, à savoir :

$$N_{PL} = k[2 \cdot (Q + 1) - k] \quad (\text{A3.4})$$

On obtient le critère informationnel d'Akaike AIC (Akaike Information Criterion).

L'inconvénient de ce critère est qu'il présente une probabilité de surestimation asymptotique non nulle, c'est-à-dire que pour un nombre d'échantillons important il aura tendance à surestimer le nombre de sources.

Pour régler la probabilité de surestimation asymptotique à zéro, Rissanen a ajouté un facteur de pénalité dans l'expression précédente sous la forme :

$$N_{PL} = 0.5 \cdot k \cdot [2 \cdot (Q + 1) - k] \cdot \log(n - Q - 1) \quad (\text{A3.5})$$

Le critère ainsi obtenu est connu sous le nom de MDL (Minimum Description Length). Il élimine l'inconvénient du critère AIC, mais il a en revanche tendance à sous-estimer le nombre de sources pour un faible nombre d'échantillons ( $n$ ).

Dans notre cas le critère MDL donne des résultats corrects tant sur des signaux synthétiques que sur des signaux réels car le nombre d'échantillons est suffisamment grand par rapport au support des profils de distance.