



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENTS SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**  
**INSTITUT D'AERONAUTIQUE**

**Mémoire de Magister en Aéronautique**

Soutenu par :  
HABES Abdelkader

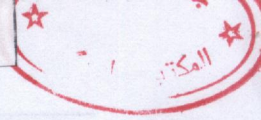
Thème

**ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT  
D'UNE PARTICULE A LA TRAVERSEE  
D'UNE ONDE DE CHOC**

**DEVANT LE JURY D'EXAMEN :**

Président	Mr Z. YOUBI	M.C.	Université de Blida
Rapporteur	Mr T. REZOUG	C.C.	Université de Blida
Examineurs	Mr S. LARBI	M.C.	E.N.P
	Mr S. BOUKRAA	M.C.	Université de Blida
	Mr M. BOUNEDER	C.C.	Université de Blida

**Année Universitaire 2001-2002**



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
 MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENTS SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA**  
**INSTITUT D'AÉRONAUTIQUE**

**Mémoire de Magister en Aéronautique**

Soutenu par :  
**HABES Abdelkader**

Thème

**ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT  
 D'UNE PARTICULE A LA TRAVERSE  
 D'UNE ONDE DE CHOC**

**DEVANT LE JURY D'EXAMEN :**

<b>Président</b>	<b>Mr Z. YOUBI</b>	<b>M.C.</b>	<b>Université de Blida</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>Mr T. REZOUG</b>	<b>C.C.</b>	<b>Université de Blida</b>
<b>Examineurs</b>	<b>Mr S. LARBI</b>	<b>M.C.</b>	<b>E.N.P</b>
	<b>Mr S. BOUKRAA</b>	<b>M.C.</b>	<b>Université de Blida</b>
	<b>Mr M. BOUNEDER</b>	<b>C.C.</b>	<b>Université de Blida</b>

**Année Universitaire 2001-2002**

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse le Docteur T. Rezoug, Directeur de la Post-Graduation et de la Recherche Scientifique à l'Institut d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour toute la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant de diriger ce travail. Ses conseils et sa large expérience scientifique ont permis à l'aboutissement de ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements, tout en témoignant ma profonde gratitude au Docteur Z. Youbi, Maître de Conférence à l'Institut d'Aéronautique et Recteur de l'Université de Blida, en me faisant l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur S. Larbi, Maître de Conférence à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Monsieur S. Boukraa, Maître de Conférence à l'Université de Blida, ainsi que Monsieur M. Bouneder, Chargé de Cours à l'Institut d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour avoir accepté de rapporter sur ce travail. Leurs remarques constructives ont permis d'améliorer la qualité.

Je tiens de même à remercier le Docteur M. Lammari et Monsieur A. Hammour ex. Maître de conférence à l'Institut d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour m'avoir proposé le sujet et pour leurs aides précieuses.

Je ne manquerai pas de remercier Monsieur S. Berguel, Directeur de l'Institut d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour son soutien moral et ses encouragements.

Tout travail, pour arriver à maturation, doit pouvoir s'effectuer dans de bonnes conditions. Aussi remercierai-je le personnel technique et administratif de la compagnie nationale AIR ALGERIE, qui m'a apporté son aide et son soutien, ainsi qu'à tous mes collègues étudiant(e)s.

Enfin, je garderai le meilleur pour la fin en remerciant très chaleureusement mes parents, qui ont su me donner une éducation saine et équilibrée en m'apportant amour et chaleur.

<b>1. Introduction</b>	i
<b>2. La V.L.D et la théorie de la Particule</b>	
1.1 Principes de base de la vélocimétrie laser	1
1.2 Problème du suivi des particules	3
<b>2. Les Différentes Théories Classiques</b>	
2.1 Lois valables en régime continu sans terme d'instationnarité	6
2.1.1 Introduction	6
2.1.2 Expression de STOKES	7
2.1.3 Expression d'OSEEN	9
2.1.4 Expression déterminées grâce aux développement asymptotiques raccordés	10
2.1.5 Expression semi-empiriques	11
2.1.6 Expression de FAXEN	11
2.2 Lois valables en régime continu avec terme d'instationnarité	12
2.2.1 Introduction	12
2.2.2 Expressions de GATIGNOL et de MAXEY et RILEY	12
2.2.3 Expressions de TCHEN et de BOUSSINESQ et BASSET	14
2.3 Lois valables en régime d'écoulement raréfié	14
2.4 Lois empiriques développées pour le suivi de particules en écoulement supersonique	16
2.4.1 Introduction	16
2.4.2 Expression de CARLSON et HOGLUND	16
2.4.3 Expression de CROWE	17
2.4.4 Expression de WALSH et de HENDERSON	18
2.4.5 Conclusion	19
<b>3. Résolution analytique de l'équation de Tchen à travers une discontinuité</b>	
3.1 Résolution analytique de l'équation de Tchen dans le cas d'un choc unidimensionnel	20
3.1.1 Présentation des conditions de cauchy et d'une analyser limite associée au problème du choc	20
3.1.2 Détermination de la constantes $t_0$	23
3.1.3 Détermination des constantes $t_1$ et $\Delta W$	24
3.1.4 Conséquences	25
3.2 Analyse dimensionnelle du problème	26
3.3 Résultats et Discussion	27
3.3.1 Calcul numérique	27
3.3.2 Importance du terme de Basset	28
3.3.3 Influence du rayon et de la masse volumique sur la solution de l'équation de Tchen	29
3.3.4 Conclusion	29
<b>4. Raréfaction et l'étude de la contribution de Tedeschi</b>	
4.1 Introduction	32
4.2 Les Différents régimes	32
4.2.1 Critère de Classification des régimes	32
4.2.2 Régime Moléculaire Libre ( R.M.L )	33
4.2.3 Régime de glissement	34
4.2.4 Régime de Transition	34
4.3 Traînée d'une particule en régime moléculaire libre	34
4.3.1 Introduction	34
4.3.2 Les différents types de réflexion	35
4.3.3 Coefficients d'accommodation	36
4.3.4 Contraintes aérodynamiques sur la particule	38
4.3.5 Simplification pour les basses vitesses ( $S \ll 1$ )	41

4.4 Traînée d'une particule en régime de glissement	42
4.4.1 Introduction	42
4.4.2 Loi de traînée en régime de glissement d'après Cunningham	42
4.5 Loi de traînée pour les écoulements supersoniques et hypersoniques	45
4.5.1 Introduction	45
4.5.2 Extension aux vitesses élevées de la loi de traînée en régime de glissement	45
4.5.3 Extension au Régime Moléculaire Libre	47
<b>5. Méthode de calcul et discussions</b>	
5.1 introduction	52
5.2 Calcul numérique	52
5.3 Modélisation de l'évolution des caractéristiques à l'intérieur de l'onde de choc	53
5.4 influence des gradients de pression, vitesse et masse volumique	55
5.4.1 Contraintes due aux gradients de pression et de vitesse	55
5.5 Expression des vitesses dans les différents repères	56
5.5.1 Introduction	56
5.5.2 Système d'axe	57
5.5.3 Vitesse de l'écoulement	57
5.5.4 Vitesse de la particule	58
5.6 Relevé expérimentales	59
5.7 Comparaison entre calculs et résultats expérimentaux	60
5.8 Interprétation d'un exemple expérimentale	60
5.9 Interprétations	61
5.10 Organigramme	62
<b>Annexes</b>	72
<b>Conclusion</b>	85
<b>Références</b>	86

$\bar{c}$	Vitesse microscopique des molécules dans la direction $j$
Re	Nombre de Reynolds
M	Nombre de Mach
Kn	Nombre de Knudsen
Cd	Coefficient de traînée
F	Force
a	Rayon de la Particule
d	Diamètre de la Particule
r	Constante spécifique des gaz parfaits
R	Distance sans dimension au centre du repère
U	Vitesse du Fluide
V	Vitesse de la Particule
$\Gamma$	Accélération
P	Pression de l'écoulement
T	Température de l'écoulement
$\rho$	Masse Volumique de l'écoulement
$\mu$	Viscosité Dynamique de l'écoulement
$\nu$	Viscosité Cinématique de l'écoulement
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques
$\lambda$	Libre Parcours Moléculaire Moyen
th	Tangente Hyperbolique
ln	Logarithme Népérien
div	Divergence
$\Delta$	Laplacien
$\bar{\nabla}$	Opérateur nabla
$\rho'$	Masse volumique de la particule
$v, v'$	Vitesse de la particule
$v_x$	Composante longitudinale de la vitesse
$u, u'$	Vitesse du fluide
w	Vitesse relative de la particule par rapport au fluide
x	Distance du choc
t	Temps
$U_1$	Vitesse du fluide en amont du choc
$U_2$	Vitesse du fluide en aval du choc
$m_p$	Masse de la Particule
m	Masse d'une Molécule
f	Fonction de distribution
n	Densité numérique

$c_j$	Vitesse microscopique des molécules dans la direction $j$
$N$	Nombre de molécules
$S$	Rapport de vitesse moléculaire
$\xi, \xi'$	Vitesse des molécules ( $\vec{\xi} = \vec{c} + \vec{U}$ )
$P$	Contrainte normale
$\tau$	Contrainte tangentielle
$E$	Energie Cinétique
$U$	Vitesse du fluide
$V$	Vitesse de la Particule
$h$	Constante de Planck

$\frac{D}{Dt}$  Dérivée particulière

**Indices**

$\infty$	à l'infini
$0$	non perturbé
$w$	à la paroi (de la particule)
$m$	en Régime Moléculaire Libre
$g$	en Régime de glissement
$i$	incident
$r$	réfléchi

**Valeurs des coefficients et fonctions :**

$$w(t) = v(t) - u(t)$$

$$\Delta U = U_1 - U_2$$

$$\alpha(t) = \frac{3 v(t)}{a^2} \frac{3 \rho(t)}{2 \rho' + \rho(t)}$$

$$\beta(t) = \frac{3 \rho(t)}{2 \rho' + \rho(t)}$$

$$b(t) = \sqrt{\frac{3 \alpha(t) \beta(t)}{\pi}}$$

$$k(t) = \alpha(t) \left[ 1 - \frac{3 \beta(t)}{2} \right]$$

$$w^2(t) = \alpha^2(t) - k^2(t)$$

$$\varphi(t) = - (1 - \beta(t)) \dot{u}(t)$$

Le mouvement des particules dans les écoulements fluides a été étudié depuis de nombreuses années, par différents auteurs [3,4,6,11,15,16,19,20,21,22 et 23]. Le problème est d'actualité notamment pour les écoulements à vitesse supersonique. En effet, les méthodes de mesure utilisant la vélocimétrie laser nécessitent la connaissance de la relation liant les vitesses des particules diffusantes à celles de l'écoulement qui les entraîne. Généralement on identifie les mesures de vitesses des particules à celles du fluide. Dans les cas où la densité des particules est très supérieure à la densité de l'écoulement, ou dans les zones à forts gradients de vitesse, les particules ne répondent pas instantanément aux variations de vitesses et leurs célérités sont différentes de celles de l'écoulement [6,23].

A tout écoulement turbulent sont associées des fluctuations de pression, elles sont une cause de fatigue des structures d'un mobile : les ailettes et les disques des turboréacteurs par exemple. Nous proposons d'étudier le comportement d'une particule à la traversée d'une discontinuité de type onde de choc. Le sujet en question trouve son application directe dans les mesures de débit, de fluctuation, et du champs des vitesses à travers un turboréacteur. La compréhension des différents phénomènes qui régissent l'écoulement étudié, me sera d'un important apport à l'interprétation et la compréhension de différents comportements du turboréacteur, lors de son passage au banc d'essai, et une contribution plus efficace lors d'élaboration et l'interprétation des essais préliminaires de corrélations qui auront lieu sur le banc d'essai, lors de sa mise au point.

Etant donné l'état actuel de la recherche et de la technique de pointe, de plus amples connaissances sur les écoulements turbulents apparaissent indispensables. La modélisation des écoulements est maintenant un thème de recherche important pour des grosses industries telles que l'industrie aéronautique.

L'action proposée dans cette voie a pour objet, l'étude numérique de ces écoulements en adoptant des modèles mathématiques proposés dans la littérature [3,4,6,11,15,16,19,20,21,22 et 23]. Le premier chapitre décrit le principe de base de la vélocimétrie laser, tout en s'intéressant au problème de suivi des particules. Dans le deuxième chapitre, sont établies les différentes théories classiques, les lois ne seront pas présentées dans un ordre chronologique, mais seront regroupées par familles ou affinités. Le troisième chapitre est une revue de la résolution analytique de l'équation de Tchen [11], à travers une discontinuité. L'un des buts de cette étude est d'évaluer l'importance du terme de Basset [20], dans le mouvement d'une particule à travers une onde de choc, on le verra pourquoi. Dans le quatrième chapitre, Tedeschi [6] traite le problème d'écoulement autour des particules, tel que la raréfaction, on verra en détail ces critères de classification et les expressions couvrant ces régimes. Et enfin la conception d'un logiciel de calcul, permettant la comparaison des résultats obtenus par différents modèles mathématiques.



1.1 Principes de base de la vélocimétrie laser

La Vélocimétrie Laser à effet Doppler, est l'une des applications laser dont le principe repose sur le décalage en fréquence de la lumière laser diffusée par des particules inertielles (appelées traceurs), que l'on injecte dans l'écoulement et dont on cherche à déterminer la vitesse. Elle constitue dans de nombreux cas un moyen d'investigation efficace dans des écoulements turbulents. Le caractère non destructif de cette technique a suscité l'intérêt des expérimentateurs en mécanique des fluides, notamment pour l'étude des caractéristiques dynamiques du champ de vitesse dans des écoulements supersoniques. Toutefois, cette technique n'est pas exempte de difficultés, particulièrement dans les écoulements supersoniques, où le problème d'ensemencement doit être effectué de manière correcte.

# Chapitre : 1

VLD est basée sur l'effet Doppler. Lorsque l'on passe à côté d'une source sonore, ou lorsque celle-ci se déplace, on peut se rendre compte que la hauteur du son perçu varie au cours du temps. En 1842, Doppler découvrit que ce phénomène particulier était dû à un changement de fréquence. Pizeau lui étendit ceci aux ondes lumineuses. L'invention, vers 1960, du rayon laser, faisceau lumineux cohérent et monochromatique, permit à la vélocimétrie laser de voir le jour.

Si une particule P se déplaçant à une vitesse  $V$  est éclairée par un faisceau de fréquence  $f_0$  (longueur d'onde  $\lambda_0$ ) de direction  $i_0$ , un observateur fixe dans la direction  $j$  recevra un signal de fréquence  $f$  tel que  $f = f_0 \frac{c}{c - V \cos \theta}$  où  $\theta$  est l'angle entre  $i_0$  et  $j$ .

## la V.L.D et la Théorie de la Particule

Or, en pratique cette dernière fréquence atteint des valeurs de l'ordre de  $10^7$  MHz et se révèle trop importante pour être mesurée directement. C'est pourquoi on utilise le phénomène d'interférence. Lorsque l'on croise deux faisceaux lasers de même fréquence, on voit apparaître à l'intersection un réseau de franges d'interférences, bandes parallèles à la bissectrice des rayons et constituées alternativement de maxima et de minima d'intensité lumineuse. La distance entre deux bandes, ou interférange, dépendra de la longueur d'onde des rayons incidents, ainsi que de l'angle  $\theta$  entre ceux-ci et leur bissectrice :

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta}$$

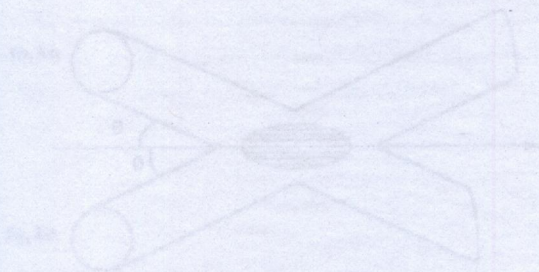


Figure 1.1 Croisement de deux faisceaux lasers de même fréquence.



Figure 1.2 Réseau de franges d'interférences

## 1.1 Principes de base de la vélocimétrie laser

La Vélocimétrie Laser à effet Doppler, est l'une des applications laser dont le principe repose sur le décalage en fréquence de la lumière laser diffusée par des particules mobiles (appelées traceurs), que l'on injecte dans l'écoulement et dont on cherche à déterminer la vitesse. Elle constitue dans de nombreux cas un moyen d'investigation efficace dans des écoulements turbulents. Le caractère non instructif de cette technique a suscité l'intérêt des expérimentateurs en mécanique des fluides, notamment pour l'étude des caractéristiques dynamiques du champ de vitesse dans des écoulements supersoniques. Toutefois, cette technique n'est pas exempte de difficultés, particulièrement dans les écoulements supersoniques, où le problème d'ensemencement doit être effectué de manière correcte.

VLD est basée sur l'effet Doppler-Fizeau. Lorsque l'on passe à côté d'une source sonore, ou lorsque celle-ci se déplace, on peut se rendre compte que la hauteur du son perçu varie au cours du temps. En 1842, Doppler découvrit que ce phénomène particulier était dû à un changement de fréquence. Fizeau, lui, étendit ceci aux ondes lumineuses. L'invention, vers 1960, du rayon laser, Faisceau lumineux cohérent et monochromatique, permit à la vélocimétrie laser de voir le jour.

Si une particule P se déplaçant à une vitesse  $\vec{V}$  est éclairée par un faisceau de fréquence  $f_0$  (longueur d'onde  $\lambda_0$ ) de direction  $\vec{i}_0$ , un observateur fixe dans la direction  $\vec{i}_1$  recevra un signal de fréquence  $f_1 = f_0 + \frac{1}{\lambda_0} \vec{V} \cdot (\vec{i}_1 - \vec{i}_0)$ . La différence de fréquence, ou fréquence Doppler sera alors :  $f_D = \frac{1}{\lambda_0} \vec{V} \cdot (\vec{i}_1 - \vec{i}_0)$ .

Or, en pratique cette dernière fréquence atteint des valeurs de l'ordre de  $10^8$  MHz et se révèle trop importante pour être mesurée directement. C'est pourquoi on utilise le phénomène d'interférence. Lorsque l'on croise deux faisceaux lasers de même fréquence, on voit apparaître à l'intersection un réseau de franges d'interférences, bandes parallèles à la bissectrice des rayons et constituées alternativement de maxima et de minima d'intensité lumineuse. La distance entre deux franges, ou interfrange, dépendra de la longueur d'onde des rayons incidents, ainsi que de l'angle  $\theta$  entre ceux-ci et leur bissectrice :  $\Delta x = \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta}$ .

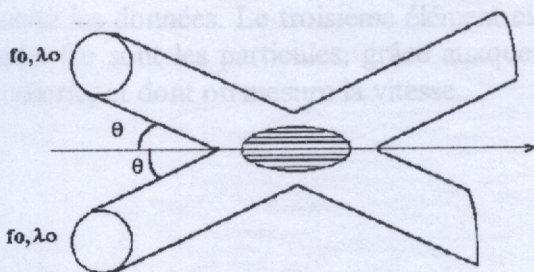


Figure:1.1 Croisement de deux faisceaux lasers de même fréquence.

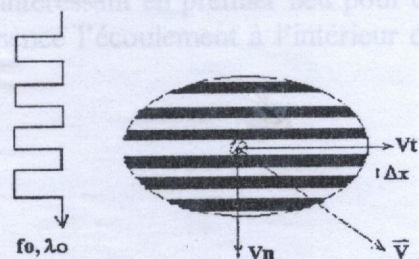


Figure:1.2 Réseau de franges d'interférences

Comme toute onde électromagnétique, la lumière laser est la superposition d'un champ électrique et d'un champ magnétique, régis par les équations de Maxwell. En général tous les lasers sont polarisés rectiligne (c-a-d que la direction privilégiée des vecteurs est perpendiculaire à l'axe du laser). Il est caractérisé par une distribution transversale d'intensité lumineuse. Il procure le diamètre et la divergence angulaire les plus faibles.

Dans un dispositif de VLD, un réseau de franges est localisé dans un ellipsoïde de révolution qui constitue le volume de mesure au point de convergence et de focalisation des deux faisceaux. Chaque particule passant par ce réseau diffuse de la lumière lorsqu'elle traverse une frange brillante. La lumière diffusée est focalisée sur un photomultiplicateur qui la collecte et la transforme en courant électrique modulé à la fréquence Doppler, laquelle est transmise vers un processeur de signal VLD. Les particules arrivent aléatoirement dans le volume de mesure.

L'intersection sera appelée volume de mesure. Si une particule de taille suffisamment petite passe à l'intérieur de celui-ci, elle sera alternativement sombre et éclairée. Elle va donc émettre un signal lumineux, dont la fréquence dépendra de l'espacement entre les franges, mais aussi de la composante de sa vitesse  $V_n$  normale à la bissectrice des rayons :

$$f_D = \frac{2 V_n \sin \theta}{\lambda_0}$$

Si l'on connaît la longueur d'onde des rayons incidents, ainsi que leur angle, on peut déterminer la vitesse de la particule dans une direction donnée, en mesurant la fréquence du signal émis par celle-ci.

La mise en œuvre d'une chaîne de vélocimétrie laser à franges pour la mesure de vitesses d'un écoulement nécessite alors plusieurs éléments. La partie émission est constituée d'un générateur laser et d'une optique permettant de diviser le rayon en deux parties et de les émettre dans des directions choisies de façon à faire apparaître le volume de mesure à un emplacement donné. La partie réception est constituée d'un photomultiplicateur permettant de recevoir le signal et d'une unité d'acquisition pour traiter. Un ordinateur stocke et traite ensuite les données. Le troisième élément est celui nous intéressant en premier lieu pour cette étude. Ce sont les particules, grâce auxquelles onensemence l'écoulement à l'intérieur de la soufflerie, et dont on mesure la vitesse.

D'une part l'ensemencement doit être effectué de manière correcte. Cela suppose que le nombre de particules soit suffisamment faible pour ne pas perturber l'écoulement, mais assez suffisamment élevé, pour permettre une acquisition du signal dans de bonnes conditions. L'injection doit se faire à proximité d'une ligne de courant passant par le volume de mesure (de façon à ce que les particules passent dans le volume de mesure), et bien en amont pour ne pas modifier l'écoulement, et les particules seront considérées traçantes dans l'étude de leur mouvement.

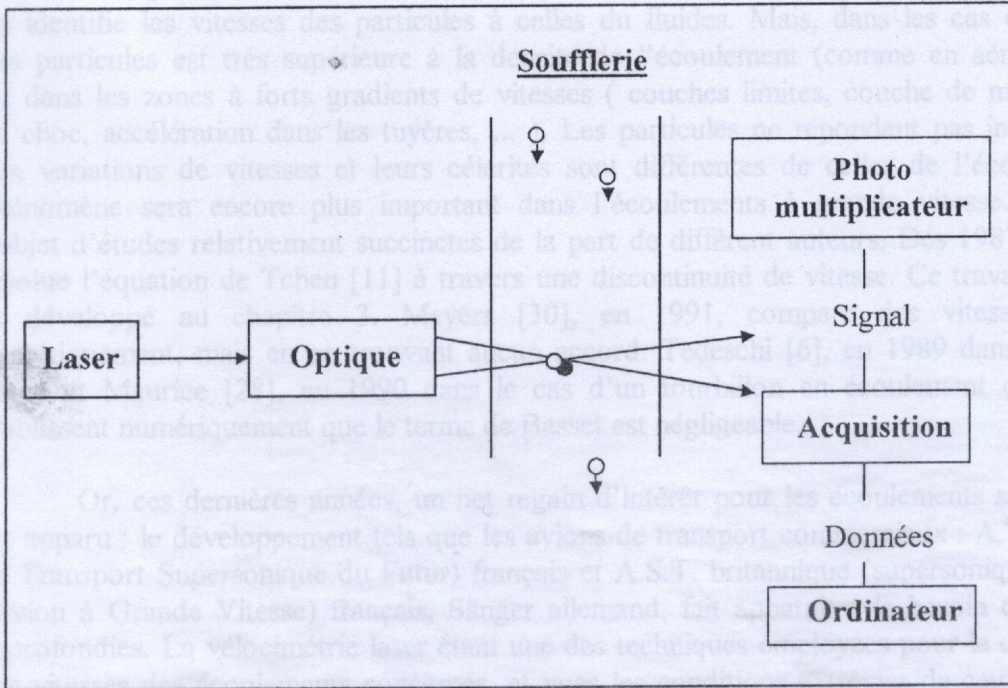


Figure:1.3 Chaîne de Vélocimétrie Laser

Bien qu'onéreuse et difficile à mettre en œuvre, la vélocimétrie laser présente de nombreux avantages. Elle ne nécessite la présence d'aucune sonde matérielle à l'intérieur de l'écoulement et ne perturbe donc pas celui-ci. Le signal reçu dépend uniquement de la vitesse, à l'exclusion de toute autre grandeur ( température, pression, ... ). Elle permet la mesure de vitesse instantanées et donc l'étude de la turbulence. On peut également déterminer plusieurs composantes de la vitesse simultanément ( généralement deux ), à condition de disposer de deux faisceaux lasers de couleurs différentes ( souvent bleu et vert ) et de deux parties réception.

## I.2 Problème du suivi des particules

Toutefois, outre les inconvénients dus à la mise en œuvre compliquée un certain nombre de problèmes se posent, essentiellement liés aux particules traceuses.

D'une part l'ensemencement doit être effectué de manière correcte. Cela suppose que la densité de particules soit suffisamment faible pour ne pas perturber l'écoulement, mais aussi suffisamment élevée pour permettre une acquisition du signal dans de bonnes conditions. L'injection doit se faire à proximité d'une ligne de courant passant par le volume de mesure ( de façon à ce que les particules passent dans le volume de mesure ), et bien en amont pour ne pas modifier l'écoulement. et les particules seront considérées isolées dans l'étude de leur mouvement.

D'autre part, la vélocimétrie laser nécessite la connaissance de la relation liant les vitesses des particules diffusantes à celles de l'écoulement qui les entraîne. Généralement, on identifie les vitesses des particules à celles du fluide. Mais, dans les cas où la densité des particules est très supérieure à la densité de l'écoulement (comme en aérodynamique) ou dans les zones à forts gradients de vitesses (couches limites, couche de mélange, onde de choc, accélération dans les tuyères, ...), Les particules ne répondent pas instantanément aux variations de vitesses et leurs célérités sont différentes de celles de l'écoulement. Ce phénomène sera encore plus important dans l'écoulements à grande vitesse. Ceci a fait l'objet d'études relativement succinctes de la part de différents auteurs. Dès 1987 Eléna [29], résout l'équation de Tchen [11] à travers une discontinuité de vitesse. Ce travail sera repris et développé au chapitre 3. Meyers [30], en 1991, compare des vitesses calculées numériquement, mais en ne trouvant aucun accord. Tedeschi [6], en 1989 dans le cas d'un choc, et Maurice [28], en 1990 dans le cas d'un tourbillon en écoulement compressible, établissent numériquement que le terme de Basset est négligeable.

Or, ces dernières années, un net regain d'intérêt pour les écoulements supersoniques est apparu : le développement tels que les avions de transport commerciaux : A.T.S.F (Avion de Transport Supersonique du Futur) français et A.S.T. britannique (supersoniques), A.G.V (Avion à Grande Vitesse) français, Sänger allemand, fait apparaître le besoin d'expériences approfondies. La vélocimétrie laser étant une des techniques employées pour la détermination des vitesses des écoulements concernés, et vues les conditions extrêmes de ceux-ci (grandes vitesses, forts gradients, faibles densités), il devient nécessaire de mener une étude poussée concernant la validité des mesures effectuées, notamment au niveau du suivi de particules.

Des expériences dans ce sens ont été réalisées en 1985 à l'I.M.S.T ( Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence ), visant à mieux connaître la façon dont la vitesse des particules rattrape celle de l'écoulement derrière une onde de choc. En effet, une onde de choc est un phénomène aérodynamique relativement bien connu, présentant un saut de vitesse important grâce auquel on peut effectuer une comparaison du suivi des particules par rapport à l'écoulement . Elle permet de qualifier de manière relativement simple leur comportement . Or, ces expériences firent apparaître une indépendance du suivi vis-à-vis de la taille, contrairement à ce que prédisent toutes les théories actuelles. Bien que sujettes à caution, elles ont constitué le point de départ du présent travail, en mettant en lumière le manque d'analyses théoriques et expérimentales concernant ce point crucial de la vélocimétrie laser. Une étude a vu le jour à l'I.M.S.T à Marseille, Tedeschi [6] pour la partie théorique, et le D.L.R à Göttingen, Allemagne pour la partie expérimentale.

Le mouvement d'une particule est déterminé grâce aux forces auxquelles elle est soumise, et aux conditions initiales. Sa masse étant constante, la relation fondamentale de la dynamique nous donne l'équation vectorielle du mouvement dans un repère galiléen :

$$m_p \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \quad m_p \text{ étant la masse de la particule}$$

Le problème réside alors dans la détermination de la force  $\vec{F}$ . Pour cela, on devra poser un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, on supposera les particules sphériques ( ce qui n'est pas forcément vrai, notamment dans le cas de fumée d'encens ou de gouttes d'huile ) et indéformables, de rayon  $a$  très petit (de l'ordre du micro ).

Elles ne doivent pas perturber l'écoulement à cause d'une concentration trop importante, et les interactions avec la paroi ne seront pas prises en compte. Les seules forces considérées ici seront les forces surfaciques dues au tenseur des contraintes, et non les forces volumiques (électrostatique, électromagnétique, de pesanteur) trop faibles pour jouer un rôle.

Une étude bibliographique des théories classiques est faite en premier lieu, exposant les différentes expressions de la force exercée sur une sphère placée dans un écoulement ou, ce qui revient au même, du coefficient de traînée :

$$C_D = \frac{2 F}{\rho V^2 \pi a^2}$$

Dans la suite de cette étude sauf indication contraire, le coefficient de traînée  $C_D$ , le nombre de Reynolds  $Re = \frac{2 \rho V a}{\mu}$  et le nombre de Mach  $M = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T}}$  seront basés sur la vitesse relative entre la particule et l'écoulement.

Dans le cas d'un choc obtenu dans une tuyère dont le nombre de Mach nominal est 2,3 à une pression génératrice de 0,5 atm, on aura pour valeur maxima :

$$Re_{\max} = 3 \quad (a = 2 \mu\text{m}), \quad M_{\max} = 0,25$$

Les conditions particulières de l'écoulement et de la particule, vont nous conduire à l'étude de phénomènes particuliers, tels que l'instationnarité ou la raréfaction. Cette dernière notion nous permettra de mettre en évidence des régimes d'écoulement peu habituels autour de la particule. Ainsi, nous proposerons une nouvelle loi [6] pour le suivi de particules en écoulement supersonique, plus adaptée que les lois classiques, et moins empirique que certaines expressions proposées par certains auteurs [4,13,15,16,19,21 et 22] pour le même cas. Cette loi utilisée pour le calcul du mouvement de particules à la traversée d'une onde de choc oblique. Les différents effets (grands nombres de Reynolds, raréfaction, compressibilité) pouvant influencer le mouvement des particules seront analysés. Auparavant, une étude sera menée pour connaître l'effet spécifique produit par le choc lui-même sur le mouvement.

Le mouvement d'une sphère solide et indéformable et la traînée d'une telle sphère ont fait l'objet de nombreuses études par différents auteurs [3,4,6,11,15,16,19,20,21,22,23]. Certaines sont théoriques mais nécessitent des conditions d'emploi assez strictes, d'autres admettent des champs d'application plus vastes mais sont le plus souvent empiriques.

Les lois ne seront pas présentées dans un ordre chronologique mais seront regroupées par familles ou affinités. Ce choix n'est évidemment pas unique, les théories pouvant certainement être rapprochées autrement. Le premier groupe correspondra aux lois variables en régime continu et ne mentionnant pas des termes d'instantanéité. Le deuxième comprendra, lui, des lois faisant intervenir des termes d'instantanéité, en régime continu. Dans le troisième seront réunies celles variables en régime d'écoulement raréfié. Certains auteurs ont développé des formules empiriques afin de les appliquer à l'étude du comportement de particules en écoulement supersoniques, celles-ci sont regroupées au sein du quatrième groupe.

## Chapitre : 2

### 2.1 Lois variables en régime continu sans terme d'instantanéité

## Les Différentes Théories Classiques

### 2.1.1 Introduction

La première étude théorique de la force exercée sur une sphère par un écoulement fluide a été effectuée par Stokes [4] en 1851. Il a supposé que le nombre de Reynolds était très petit devant 1, de façon à pouvoir négliger les termes non linéaires de convection dans les équations de Navier-Stokes. Cependant, comme il sera vu au paragraphe 2.1.2, cette solution, bien que permettant de déterminer l'expression de la force, conduit aux paradoxes dus de Stokes et de Watahead. Oseen [22] en 1911, a trouvé que ces derniers étaient dus à la non prise en compte des termes de convection. Il propose alors une linéarisation de ces termes, permettant de déterminer une nouvelle solution. La découverte des développements asymptotiques réordonnés permet à Proudman et Pearson [6] en 1957, ainsi qu'à Chester et Breach [17] en 1969, de proposer des expressions du coefficient de traînée incluant des développements en ite à des ordres supérieurs.

Ces lois sont cependant limitées aux nombres de Reynolds très faibles à 1. C'est pourquoi certains auteurs, dont Schüller et Nauman [16] en 1933, ont cherché des expressions semi-empiriques, de structures voisines aux lois ci-dessus, variables pour les nombres de Reynolds supérieurs à 1. Toutefois, ces expressions ne conviendront qu'aux écoulements incompressibles et ne tiennent pas compte de l'instantanéité de l'écoulement.

On considère dans un repère lié à la particule (en mouvement uniforme), un écoulement stationnaire et incompressible. On utilise les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité :

Le mouvement d'une sphère solide et indéformable et la traînée d'une telle sphère ont fait l'objet de nombreuses études par différents auteurs [3,4,6,11,15,16,19,20,21,22,23]. Certaines sont théoriques mais nécessitent des conditions d'emploi assez strictes, d'autres admettent des champs d'application plus vastes mais sont le plus souvent empiriques.

Les lois ne seront pas présentées dans un ordre chronologique mais seront regroupées par familles ou affinités. Ce choix n'est évidemment pas unique, les théories pouvant certainement être rapprochées autrement. Le premier groupe correspondra aux lois valables en régime continu et ne mettant pas en jeu de termes d'instationnarité. Le deuxième comprendra, lui, des lois faisant intervenir des termes d'instationnarité, en régime continu. Dans le troisième seront réunies celles valables en régime d'écoulement raréfié. Certains auteurs ont développé des formules empiriques afin de les appliquer à l'étude du comportement de particules en écoulement supersoniques, celles-ci sont regroupées au sein du quatrième groupe.

## 2.1 Lois valables en régime continu sans terme d'instationnarité.

### 2.1.1 Introduction

La première étude théorique de la force exercée sur une sphère par un écoulement fluide a été effectuée par Stokes[4] en 1851. Il a supposé que le nombre de Reynolds était très petit devant 1, de façon à pouvoir négliger les termes non linéaires de convection dans les équations de Navier-Stokes. Cependant, comme il sera vu au paragraphe 2.1.2, cette solution, bien que permettant de déterminer l'expression de la force, conduit aux paradoxes dits de Stokes et de Whitehead. Oseen [22] en 1911, a trouvé que ces derniers étaient dus à la non prise en compte des termes de convection. Il propose alors une linéarisation de ces termes, permettant de déterminer une nouvelle solution. La découverte des développements asymptotiques raccordés permet à Proudman et Pearson [6] en 1957, ainsi qu'à Chester et Breach [17] en 1969, de proposer des expressions du coefficient de traînée incluant des développements en  $Re$  à des ordres supérieurs.

Ces lois sont cependant limitées aux nombres de Reynolds très inférieurs à 1. C'est pourquoi certains auteurs, dont Schiller et Nauman [16] en 1933, ont cherché des expressions semi-empiriques, de structures voisines aux lois ci-dessus, valables pour les nombres de Reynolds supérieurs à 1. Toutefois, ces expressions ne conviendront qu'aux écoulements incompressibles et ne tiennent pas compte de l'instationnarité de l'écoulement.



On considère dans un repère lié à la particule (en mouvement uniforme), un écoulement stationnaire et incompressible. On utilise les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} &= -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{U} \\ \text{div } \vec{U} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} R = a &\Rightarrow \vec{U} = 0 \\ R \rightarrow \infty &\Rightarrow \vec{U} \rightarrow \vec{U}_0, P \rightarrow P_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

On rend les équations sans dimension en effectuant les changements de variables :  $u = \frac{U}{U_0}$ ,  $p = \frac{P}{\rho U_0^2}$  où :  $Re = \frac{\rho U_0 a}{\mu}$ , les longueurs étant divisées par  $a$  :

$$\begin{aligned} Re(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= -\vec{\nabla} p + \Delta \vec{u} \\ \text{div } \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} r = 1 &\Rightarrow \vec{u} = 0 \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow \vec{u} \rightarrow \vec{u}_0, p \rightarrow p_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Expression de STOKES

Stokes [4] suppose que  $Re \ll 1$ , donc que le membre de gauche des équations de Navier-Stokes (2.3) est négligeable. Ceci revient à négliger le terme de convection  $\rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$  par rapport au terme visqueux  $\mu \Delta \vec{U}$ . On a alors les équations de Stokes :

$$\begin{aligned} -\text{grad } p + \Delta \vec{u} &= 0 \\ \text{div } \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec les conditions aux limites (2.4).

Pour une sphère, on obtient d'après Van Dyke [2], la fonction de courant suivante :

$$\psi \approx \frac{1}{4} \left( 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (2.6)$$

Or, le rapport en ordre de grandeur de la force due au terme de convection sur la force due à la viscosité est  $r \text{ Re}$ . Même en restant dans le cas  $\text{Re} \ll 1$  l'hypothèse de Stokes est justifiée au voisinage de la sphère  $\left( r > \frac{1}{\text{Re}} \right)$ , par contre elle ne l'est plus à partir d'une

certaine distance  $\left( r > \frac{1}{\text{Re}} \right)$ .

Néanmoins dans le cas d'une sphère (3D), les conditions aux limites sur la paroi et à l'infini sont tout de même satisfaites, et on peut déterminer la force exercée par l'écoulement sur une sphère :

$$\vec{F} = 6 \pi \mu a \vec{U}_0 \quad (2.7)$$

Par contre pour un cylindre (2D), seules les conditions à la surface sont satisfaites et le modèle prévoit des vitesses non bornées à l'infini. D'après Van Dyke [2], ceci est dû au fait que les perturbations de l'écoulement sont plus faibles en (3D) qu'en (2D). Ce paradoxe est généralement appelé paradoxe de Stokes.

La solution de Stokes constitue une première approximation. Pour avoir une seconde approximation, Feuillebois [2] pose :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_s + \text{Re} \vec{u}_1 \\ p &= p_s + \text{Re} p_1 \end{aligned} \quad (\text{l'indice } s \text{ désignant la solution de Stokes})$$

On obtient les équations :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s &= -\vec{\nabla} p_1 + \Delta \vec{u}_1 \\ \text{div} \vec{u}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} r = 1 &\Rightarrow \vec{u}_1 = 0 \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow \vec{u}_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En négligeant les termes en  $\text{Re}$  supérieurs à l'ordre 1 et en tenant compte du fait que la solution de Stokes obéit à l'équation de Stokes (2.5). Whitehead [6] en 1889, a déterminé la solution de (2.8). Il a constaté que la condition aux limites à l'infini ne pouvait pas être respectée, de la même façon que dans le cas de la première approximation pour un cylindre (Van Dyke). Ceci est connu sous le nom de paradoxe de Whitehead.

### 2.1.3 Expression d'OSEEN

Oseen [22] a montré que ces difficultés étaient dues à la non prise en compte des termes de convection. Pour déterminer l'écoulement, il propose de remplacer ces termes dans les équations de Navier-Stokes par leur forme linéarisée  $(\bar{u}_0 \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}$ . Cette approximation sera valable loin du corps, mais pas près de la paroi. Cependant, dans ce dernier cas, la force visqueuse sera beaucoup plus importante, comme dans l'équation de Stokes [4], et la convection ne jouera aucun rôle. Il obtient de nouvelles équations :

$$\begin{aligned} \text{Re} (\bar{u}_0 \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} &= - \text{grad } p + \Delta \bar{u} \\ \text{div } \bar{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} r = 1 &\Rightarrow \bar{u} = 0 \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow \bar{u} \rightarrow \bar{u}_0, p \rightarrow p_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

plus facilement intégrables que les équations de Navier-Stokes (non linéaires). Les conditions aux limites pourront ici être respectées.

La fonction de courant pour une sphère est ( Van Dyke ) :

$$\psi \approx \frac{1}{4} \left[ 2r^2 + \frac{1}{r} \right] \sin^2 \theta - \frac{3}{2 \text{Re}} (1 + \cos \theta) \left[ 1 - e^{-\frac{\text{Re}}{2} r(1 - \cos \theta)} \right] \quad (2.12)$$

Près de la paroi ( $r \text{Re} \ll 1$ ), on a :

$$\psi \approx \frac{1}{4} \left[ 2r^2 - 3r + \frac{1}{r} \right] \sin^2 \theta$$

qui coïncide avec la solution de Stokes (2.6).

L'expression de la force exercée sur la sphère par l'écoulement sera :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= 6 \pi \mu a \bar{U}_0 \left[ 1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right] & \text{pour } \text{Re} &= \frac{\rho \bar{U}_0 a}{\mu} \\ \text{ou } \bar{F} &= 6 \pi \mu a \bar{U}_0 \left[ 1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right] & \text{pour } \text{Re} &= \frac{\rho \bar{U}_0 d}{\mu} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.2.4 Expressions déterminées grâce aux développements asymptotiques raccordés.

Van Dyke [2] a montré qu'en utilisant la méthode des développements asymptotiques accordés à partir de la solution des équations d'Oseen (2.11) au second ordre (loin de la paroi) et de la solution des équations de Stokes (2.5) (près de la paroi), on retrouve la solution (2.13) déterminée par Oseen [22]. Proudman et Pearson [6], ont continué l'analyse pour des approximations d'ordres supérieurs et donnent :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln \frac{Re}{2} + o(Re^2) \right] \quad \text{pour } Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu} \quad (2.14)$$

Cette expression présente une singularité en  $Re = 0$ . Chester et Breach [17], ont également poussé le développement à l'ordre supérieur. Goldstein [18] avait déterminé l'expression suivante (avant la découverte des développements asymptotiques raccordés) à partir de l'équation d'Oseen.

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \frac{71}{20408} Re^3 - \frac{30179}{34406400} Re^4 + \frac{1221519}{550502400} Re^5 \right] \quad (2.15)$$

Néanmoins les expressions de Goldstein [18], Proudman et Pearson [6] ainsi que Chester et Breach [17], bien que déterminées de façon plus exacte que celles de Stokes [4] et d'Oseen [22] donnent des résultats moins corrects. D'après Feuillebois [1] et Dadi [2], elles divergent plus rapidement de la courbe du coefficient de traînée standard (relevé expérimentalement) que les lois de Stokes et d'Oseen .

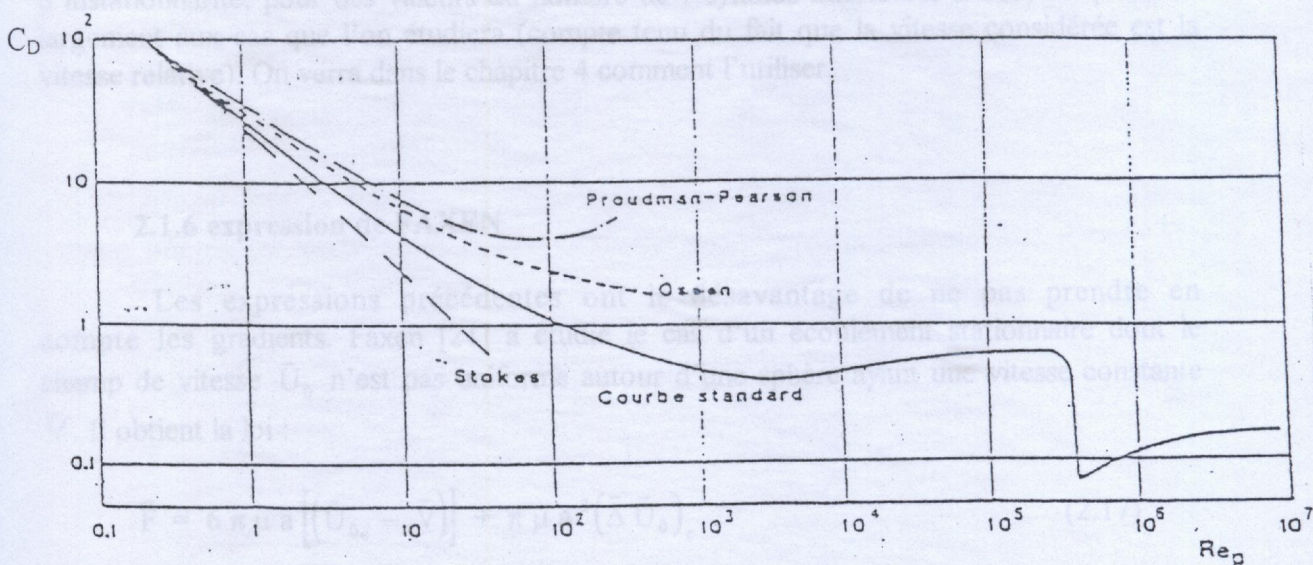
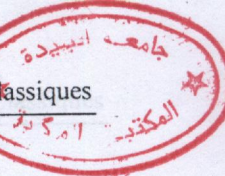


Figure :2.1 Coefficient de traînée théoriques et courbe standard en fonction du nombre de Reynolds, [1,2]

**Remarque :**

Brooke Benjamin [6], en partant du fait que les formules précédentes ont été conçues pour des valeurs de la vitesse positives, préconise l'emploi de la valeur absolue du nombre de Reynolds dans les expressions entre parenthèses. Par exemple, la loi d'Oseen deviendra :

$$\bar{F} = 6 \pi \mu a \bar{U}_0 \left[ 1 + \frac{3}{16} |\text{Re}| \right].$$

**2.1.5 Expressions semi-empiriques**

Schiller et Nauman [16] en 1993, ont corrigé la loi de Stokes grâce à un coefficient dépendant de Re, afin de l'étendre aux nombres de Reynolds supérieurs à 1. Ils obtiennent ainsi l'expression du coefficient de traînée pour une sphère :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + \alpha \text{Re}^\beta) \quad \text{où : } \alpha = 0.15 ; \beta = 0.687 ; \text{Re} = \frac{\rho U_0 d}{\mu} \quad (2.16)$$

Cette loi a souvent été attribuée à Torobin et Gauvin [1]. Or de nombreux auteurs n'ont retenu que ce dernier article, en oubliant celui de Schiller et Nauman [16].

Cette modification a également été effectuée par d'autres auteurs les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pouvant parfois avoir des valeurs proches mais différentes, notamment pour Rudinger [10], où  $(\alpha = \frac{1}{6} \text{ et } \beta = \frac{2}{3})$ .

L'expression (2.6) sera utilisée pour les lois valables en régime continu sans terme d'instationnarité, pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 200, ce qui suffit largement aux cas que l'on étudiera (compte tenu du fait que la vitesse considérée est la vitesse relative). On verra dans le chapitre 4 comment l'utiliser.

**2.1.6 expression de FAXEN**

Les expressions précédentes ont le désavantage de ne pas prendre en compte les gradients. Faxen [21] a étudié le cas d'un écoulement stationnaire dont le champ de vitesse  $\bar{U}_0$  n'est pas uniforme autour d'une sphère ayant une vitesse constante  $\bar{V}$ . Il obtient la loi :

$$\bar{F} = 6 \pi \mu a \left[ (\bar{U}_{0c} - \bar{V}) \right] + \pi \mu a^3 (\bar{\Delta} \bar{U}_0)_c \quad (2.17)$$

L'indice  $c$ , indique que les caractéristiques sont évaluées au centre de la sphère, pour l'écoulement libre non perturbé par cette dernière.

Cette expression est soumise aux mêmes restrictions en ce qui concerne son utilisation, que la loi de Stokes, mais elle prend en compte la non uniformité de l'écoulement. On verra au chapitre 5 qu'en fait la non uniformité influe très peu sur le mouvement d'une particule à la traversée d'une onde de choc.

**2.2 Lois valables en régime continu avec terme d'instationnarité.**

**2.2.1 Introduction.**

Parmi les difficultés posées par la spécificité de l'onde de choc se trouve le problème de l'instationnarité. En effet, la particule se trouvant amont du choc, va être soumise brutalement à une contrainte engendrée par une différence de vitesse très importante. Il conviendra de déterminer dans quelle mesure le mouvement de la particule va être influencé par cette instationnarité (ceci sera étudié dans le chapitre 3). Les expressions du présent paragraphe permettront de calculer l'importance relative des termes instationnaires. Boussinesq [19] et Basset [20] ont trouvé l'expression de la force exercée sur une sphère en mouvement non uniforme dans un fluide au repos. Elle a été généralisée intuitivement par Tchen [11] au cas d'un écoulement instationnaire. Feuillebois [2], Gatignol, Maxey et Riley [23] ont déterminé plus rigoureusement les solutions du problème dans le cas du mouvement non uniforme d'une sphère dans un écoulement instationnaire non uniforme. Ces lois seront valables en régime d'écoulement continu, pour des nombres de Reynolds et de Mach très inférieurs à 1.

**2.2.2 Expressions de GATIGNOL, MAXEY et RILEY.**

Gatignol, Maxey et Riley [23], ont étudié le mouvement non uniforme d'une sphère dans un écoulement incompressible, instationnaire et non uniforme. Les équations utilisées seront celles de Navier-Stokes, linéarisées grâce à l'hypothèse de Stokes ( $Re \ll 1$ ). Le champ d'écoulement  $(\bar{U}_0, P_0)$  non perturbé par la sphère, et une perturbation de champ  $(\bar{U}_1, P_1)$ .

Grâce à la linéarité du tenseur des contraintes  $\sigma(\bar{U}, P)$ , la force  $\bar{F}$  exercée sur la particule sera la somme des forces  $\bar{F}_0$  et  $\bar{F}_1$  correspondant aux champs précédents :

$$\bar{F} = \int_s \sigma(\bar{U}, P) \bar{n} dS = \int_s \sigma(\bar{U}_0, P_0) \bar{n} dS + \int_s \sigma(\bar{U}_1, P_1) \bar{n} dS$$

avec :  $\bar{F}_0 = \int_s \sigma(\bar{U}_0, P_0) \bar{n} dS$  et  $\bar{F}_1 = \int_s \sigma(\bar{U}_1, P_1) \bar{n} dS$

On obtient :  $\bar{F}_0 = \int_s \rho \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial t} dV$

L'expression de  $\bar{F}_1$  est déterminée en appliquant un théorème de réciprocité permettant d'évaluer la résultante des efforts de contrainte d'un écoulement sur une sphère, à condition de connaître la solution d'un autre écoulement avec des conditions de vitesses différentes sur la frontière. Pour le calcul, Gatignol utilise des transformées de Fourier et Maxey et Riley des transformées de Laplace.

Gatignol [23] obtient :

$$\bar{F} = -6\pi\mu a (\bar{V} - \bar{U}^{(s)}) - \frac{2\pi a^3}{3} \rho \frac{d}{dt} (\bar{V} - \bar{U}^{(v)}) - 6a^2 \sqrt{\pi\mu\rho} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (\bar{V} - \bar{U}^{(s)}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{4\pi a^3}{3} \rho \frac{d\bar{U}^{(v)}}{dt} \quad (2.18)$$

$$\text{avec : } \bar{U}^{(s)} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_s \bar{U}_0(x_i, t) dS \quad \bar{U}^{(v)} = \frac{1}{4\pi a^3} \int_s \bar{U}_0(x_i, t) dV$$

où  $\bar{U}_0$  est la vitesse du fluide non perturbé.

Maxey et Riley [23] obtiennent :

$$\bar{F} = -6\pi\mu a \left( \bar{V} - \bar{U}_0 - \frac{1}{6} a^2 \Delta \bar{U}_0 \right) - \frac{2\pi a^3}{3} \rho \frac{d}{dt} \left( \bar{V} - \bar{U}_0 - \frac{1}{10} a^2 \Delta \bar{U}_0 \right) - 6a^2 \sqrt{\pi\mu\rho} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} \left( \bar{V} - \bar{U}_0 - \frac{1}{6} a^2 \Delta \bar{U}_0 \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{4\pi a^3}{3} \rho \frac{d\bar{U}_0}{dt} \quad (2.19)$$

Ici, la vitesse du fluide non perturbé  $\bar{U}_0$  et ses dérivées sont évaluées au centre de la sphère. Cette forme, identique à (2.8) a également été donnée par Gatignol.

Le premier terme de ces expressions est semblable à la force de Stokes (2.7). Il est dû à la différence de vitesse entre la particule et l'écoulement. Le deuxième terme correspond à la force créée par le gradient de pression (provoqué par la différence de vitesse). Il est généralement dit de masse ajoutée. En effet, considérons un fluide de vitesse nulle  $\bar{U}_0 = 0$ . Si on fait passer ce terme dans le membre de gauche de l'équation du mouvement  $m_p \bar{\Gamma} = \bar{F}$  ( $m_p = \frac{4\pi a^3}{3} \rho'$  étant la masse de la sphère), tout se passe comme si on ajoutait à la sphère la moitié de la masse de fluide déplacé. Le terme le plus intéressant ici sera le troisième, souvent appelé terme de Basset, ou terme d'histoire du mouvement. Il fait intervenir les accélérations relatives successives de la sphère et de l'écoulement, mais de telle sorte que les plus anciennes aient une influence s'évanouissant. En effet, les accélérations sont divisées par le terme  $\sqrt{t-\tau}$  où  $\tau$  tend négativement vers l'infini pour les événements les plus anciens. Physiquement, cela correspond au fait que l'écoulement (donc la pression et la vitesse) au temps  $t$  est déterminé par la condition de non uniformité à laquelle il est soumis à l'infini (ou plutôt à une distance « suffisamment grande » de la sphère) et par la présence de la sphère, mais garde également la trace des perturbations et

mouvements antérieurs. Ce phénomène se traduit par ce terme supplémentaire dans l'expression de la force exercée sur la sphère. L'effet sur le fluide des mouvements antérieurs ayant tendance à s'amortir avec le temps, il en sera de même avec celui sur la particule. Le quatrième terme correspond à la force nécessaire pour modifier la vitesse de l'écoulement autour de la particule et ainsi entraîner le fluide.

### 2.2.3 Expressions de TCHEN et de BOUSSINESQ et BASSET

Dans le cas où on considère un écoulement non perturbé uniforme (mais toujours instationnaire), on a :

$$\bar{U}^{(s)} = \bar{U}^{(v)} = \bar{U}_0 \quad \text{et} \quad \Delta \bar{U}_0 = 0$$

Les expressions (2.18) et (2.19) se simplifient et on obtient l'expression proposée par Tchen [11] qui sera, en supposant  $\bar{U}_0$  et  $\bar{V}$  parallèles au même axe :

$$F = -6 \pi \mu a (V - U_0) - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{d}{dt} (V - U_0) - 6 \sqrt{\pi \rho \mu a^2} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (V - U_0) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{4 \pi a^3}{3} \rho \frac{dU_0}{dt} \quad (2.20)$$

Dans le cas où la vitesse de l'écoulement est nulle, c-à-d que l'on considère le mouvement non uniforme d'une sphère dans un fluide incompressible au repos, on trouve l'expression déterminée par Boussinesq [19] et Basset [20]:

$$F = -6 \pi \mu a V - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{dV}{dt} - 6 \sqrt{\pi \rho \mu a^2} \int_{-\infty}^t \frac{dV}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \quad (2.21)$$

### 2.3 Lois valables en régime d'écoulement raréfié.

Les lois valables en écoulements raréfié seront exposée plus en détail dans le chapitre 4. On verra alors quels sont les différents régimes d'écoulements possibles, quelles lois y utiliser.

Pour mémoire on peut citer les lois valables en régime de glissement ( raréfaction légère ). La plus célèbre est celle formulée par Cunningham [15] en corrigeant la loi de Stokes [4] grâce à un coefficient prenant en compte le glissement de la particule :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \frac{1}{1 + A \frac{\lambda}{a}} \quad \text{où } \lambda \text{ désigne le libre parcours moléculaire moyen} \quad (2.22)$$



Millikan [7] a effectué une correction empirique du coefficient de Cunningham en fonction des expériences qu'il avait réalisées :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{a} \left( A + B e^{-C \frac{a}{\lambda}} \right)} \quad \text{où } A = 0.864, \quad B = 0.29, \quad C = 1.25^3 \quad (2.23)$$

(Les coefficients donnés ici proviennent de Carlson et Høglund [18]). Il essaye ainsi d'étendre la loi de Cunningham au Régime Moléculaire Libre (raréfaction extrême). Mais, lorsque le rapport  $\frac{\lambda}{a}$  devient petit devant 1 (c'est-à-dire quand on est en régime de glissement), cette expression ne tend pas vers celle de Cunningham, les coefficients A étant différents.

Ces deux lois correspondant à la théorie linéarisée de Stokes en auront les mêmes contraintes, mais ne seront pas limités au régime d'écoulement continu.

L'expression de la traînée d'une sphère en Régime Moléculaire Libre a été calculée par Patterson [14] :

$$C_D = \frac{2 - \sigma' + \sigma}{S^3} \left[ \frac{4 S^4 + 4 S^2 - 1}{4 S} \text{erf}(S) + \frac{e^{-S^2}}{\sqrt{\pi}} \left[ S^2 + \frac{1}{2} \right] \right] + \frac{2 \sqrt{\pi \sigma'}}{3 S} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \quad (2.24)$$

$$\text{avec : } \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{\left[ S^2 + \frac{7}{2} \right] e^{-S^2} + \left[ S^3 + 4S + \frac{5}{4S} \right] \sqrt{\pi} \text{erf}(S)}{3 e^{-S^2} + 3 \left[ S + \frac{1}{2S} \right] \sqrt{\pi} \text{erf}(S)}$$

**erf** désignant la fonction d'erreur

$$S = \frac{U}{\sqrt{2 r T}}$$

( la signification des différents termes est exposée en détail dans le chapitre 4 )

Cette expression assez complexe a entraîné de nombreuses erreurs typographiques, notamment de la part de Schaaf et Chambré [13] et Crowe, Babcock et Willoughby [26] qui

ont remplacé  $\frac{e^{-S^2}}{S^3 \sqrt{\pi}}$  par  $\frac{e^{\frac{S^2}{2}}}{S^3 \sqrt{\pi}}$ , ainsi que de Walsh qui a remplacé la même expression par  $e^{-\frac{S^2}{2 S^3 \sqrt{\pi}}}$ .

### 2.4.3 Expressions de CROWE et de HENDERSON

Crowe [26], propose une expression du coefficient de traînée basée sur une interpolation. Celle-ci s'effectue entre, d'une part, un coefficient traînée  $C_{Dinc}$  correspondant à un écoulement incompressible, et d'autre part, un coefficient pour le Régime Moléculaire Libre. Mais ce dernier sera basé également sur une interpolation, cette fois entre les cas limites. Ceci donne :

$$C_D = (C_{Dinc} - 2)e^{-3.07\sqrt{\gamma} \frac{M}{Re} g(\sqrt{Re})} + \frac{h(M)}{\sqrt{\gamma} M} e^{-\frac{Re}{2M}} + 2 \quad (2.26)$$

$$g(Re) = 10^{1.25[1 + \text{th}(0.77 \log Re - 1.92)]}$$

$$\text{où : } h(M) = 2.3 + 1.7 \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} - 2.3 \text{th}(1.17 \log M)$$

$C_{Dinc}$  n'est pas précisé

Babcock et Willoughby [6], proposent une autre interpolation. Elle sera effectuée entre un coefficient  $C_{Dml}$ , correspondant au Régime Moléculaire Libre, dont ils donneront une expression comportant une erreur typographique (voir plus haut), et un coefficient  $C_{di}$  correspondant à un écoulement non visqueux. Ils obtiennent :

$$C_D = K (C_{Dml} - C_{di}) + C_{di}$$

$$\text{où : } C_{Di} = 0.66 + 0.26 \text{th}(2 \ln M) + 0.17 e^{-2.5 \left[ \frac{M}{1.4} \right]^2} \quad (2.27)$$

$$K = \frac{Kn^{0.4} e^{1.2\sqrt{Kn}}}{Kn^{0.4} e^{1.2\sqrt{Kn}} + 1} \left[ 1 + e^{-\frac{Re}{8}(C_{D0} - 0.4)Kn^{0.6} e^{Kn}} \right]$$

$C_{D0}$  représente le coefficient de traînée standard (voir figure 2.1).  $C_{Dml}$  est donné par la relation (2.24).

Cette expression ne nous conviendra pas pour plusieurs raisons. La plus importante est que lorsque le nombre de Knudsen tend vers 0 (régime continu),  $C_D$  tend vers  $C_{di}$  expression valable pour un écoulement non visqueux, ce qui n'est pas notre cas. De plus, cette interpolation couvre un domaine très large entre le régime continu et le Régime Moléculaire Libre, On verra au chapitre 4 que, la loi de suivi en régime de glissement étant connue, on peut réaliser directement une interpolation entre celui-ci et le Régime Moléculaire Libre.

### 2.4.4 Expressions de WALSH et de HENDERSON

Walsh [17], utilise l'interpolation suivante :

$$C_D = C_{Dc} + (C_{Dml} - C_{Dc}) e^{-A Re^N} \tag{2.28}$$

où :  $C_{Dc}$ , est le coefficient de traînée en régime continu (non précisé)

A et N sont des paramètres empiriques dépendant du nombre de Mach ( le tableau indiquant leurs valeurs est dans la référence ).

Henderson [3] se sert de deux expressions empiriques, une pour un écoulement subsonique :

$$C_{Dsub} = \frac{24}{Re + S \left[ 4.33 + \frac{3.65 - 1.53 \frac{T_w}{T_\infty}}{1 + 0.353 \frac{T_w}{T_\infty}} e^{-0.247 \frac{Re}{S}} \right]} + e^{-\frac{0.5M}{\sqrt{Re}}} \left[ \frac{4.5 + 0.38 (0.03 Re + 0.48 \sqrt{Re})}{1 + 0.03 Re + 0.48 \sqrt{Re}} + 0.1 M^2 + 0.2 M^8 \right] + \left[ 1 - e^{-\frac{M}{Re}} \right] 0.6 S \tag{2.29}$$

et une pour  $M \geq 1.75$

$$C_{Dsup} = \frac{0.9 + \frac{0.34}{M^2} + 1.86 \sqrt{\frac{M}{Re}} \left[ 2 + \frac{2}{S^2} + \frac{1.058}{S} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} - \frac{1}{S^4} \right]}{1 + 1.86 \sqrt{\frac{M}{Re}}} \tag{2.30}$$

Pour les nombres de Mach compris entre 1 et 1.75, il utilise cette interpolation :

$$C_D(M, Re) = C_{Dsub}(1, Re) + \frac{4}{3} (M - 1) \left[ C_{Dsup}(1.75, Re) - C_{Dsub}(1, Re) \right]$$

Or, Walsh [17], explique en effectuant des comparaisons avec des résultats expérimentaux de Bailey et Hiatt et de Zarin [24], que l'expression d'Henderson est valable pour des nombres de Mach voisins de 2, mais pas pour des nombres de Mach voisins de 0.5 (cas nous intéressant). Par contre, une comparaison avec la relation (2.28) qu'il avait donnée précédemment montre que celle-ci suit parfaitement les points expérimentaux.

Toutefois, il propose une correction tenant compte de la transition entre le régime continu et le Régime Moléculaire Libre :

- Pour  $M \geq 0.1$  :  $C_{Dv} = C_{D1}$  (2.28)
- Pour  $M < M_{\max} < 0.1$  (continu) :  $C_D = C_{D2}$  (2.16)
- Pour  $M_{\max} < M < 0.1$  (raréfié) :  $C_D = \frac{C_{D1} - C_{D2}}{0.1 - M_{\max}} (M - M_{\max}) + C_{D2}$

avec :

$$M_{\max} = 0.01 \sqrt{Re} \quad \text{si } Re > 1$$

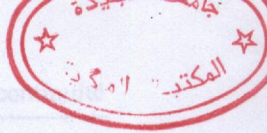
$$M_{\max} = 0.01 Re \quad \text{si } Re < 1$$

Mais la même année Henderson sans contester les conclusions de Walsh, estime quand même que cette comparaison était trop restrictive. En effet, d'après lui, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 200, les deux lois sont équivalentes. Il remarque que, bien que juste pour des nombres de Mach élevés, la loi de Walsh n'est pas valable pour les faibles valeurs ( $M < 0.1$ ), malgré la correction apportée. De plus, il considère que les calculs effectués par Walsh ne donnent pas de bons résultats à cause d'une erreur dans l'expression de la loi de traînée employée en Régime Moléculaire Libre (voir § 2.4).

#### 2.4.5 Conclusion.

On vient de voir qu'aucune loi n'avait l'air d'être capable de décrire correctement le suivi d'une micro-particule dans un écoulement supersonique. Les lois de Walsh et Henderson ne sont apparemment pas suffisamment exactes pour les faibles nombres de Mach. Toutefois, l'expression d'Henderson est fréquemment utilisée pour l'étude du comportement de particules en écoulement supersonique. La loi de Carlson et Hoglund devient fautive en Régime Moléculaire Libre. Celles de Crowe paraissent intéressantes, mais les interpolations proposées sont perfectibles.

Il conviendra donc d'essayer de trouver une expression, décrivant le comportement de particules dans un écoulement à grandes vitesses mieux adaptée, au cas rencontrés en vélocimétrie Laser. Pour cela, elle devra couvrir tous les régimes d'écoulement (du continu au moléculaire libre), ainsi que des gammes de nombres de Reynolds relatifs voisines de 1, et de nombres de Mach variant environ de 0 à 1.



Dans le cas d'un écoulement supersonique, le terme de Basset [20] (traduisant les effets instationnaires) est généralement négligé dans l'équation du mouvement d'une particule. Il est en effet peu commode d'emploi, et nécessite, dans le cas d'un calcul numérique, la sauvegarde des vitesses et accélérations successives du fluide et de la particule, depuis un instant où le mouvement est en repos. Dans une précédente étude effectuée en 1989 par Teileschi [6], il a été établi numériquement que ce terme était négligeable à la traversée d'une discontinuité, ce qui fut confirmé par Amram et Thomas [12], en 1991. Néanmoins, l'équation du mouvement n'a jamais été résolue analytiquement dans ce cas, alors que le mouvement fortement instationnaire de la particule risque de donner une grande importance au terme de Basset. Ceci sera fait dans ce chapitre, et on va déterminer dans quelles conditions on peut le négliger sans risque.

### Chapitre : 3

On étudiera le problème d'une particule sphérique, de masse volumique très supérieure à celle du fluide ( $\rho' \gg \rho$ ), traversant une discontinuité de vitesse unidimensionnelle. L'ensemencement étant effectué avant le choc, la particule suit bien l'écoulement en amont. On veut déterminer sa vitesse en aval.

## Résolution analytique de l'équation de Tchen à travers une discontinuité

Afin d'intégrer analytiquement l'équation de Tchen [11], on suppose que la vitesse relative du fluide et de la particule est suffisamment faible. Ainsi l'écoulement autour de la sphère est considéré comme laminaire (écoulement de Stokes). Ceci correspond à la nécessité d'utiliser de faibles nombres de Reynolds et de Mach relatifs ( $Re_r$  et  $M_r$ ).

### 3.1 Résolution analytique de l'équation de Tchen dans le cas d'un choc unidimensionnel

#### 3.1.1 Présentation des conditions de Cauchy et d'une analyse limite associée au problème du choc

Relativement au repère, l'équation utilisée est celle de Tchen [11], obtenue grâce à l'expression (2.20) :

$$\dot{v} = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho' \dot{v}'(t) - 6 \pi \mu a (v' - v)(t) - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho (v' - v)(t) - \rho \sqrt{\pi} \mu a^2 \int_0^t \frac{(v' - v)(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \frac{4 \pi a^3}{3} \rho v'(t)$$

tel  $a$  et  $\rho$  sont des fonctions du temps

$$\text{On a : } v'(t) - \beta v(t) - \alpha (v' - v)(t) + b \int_0^t \frac{(v' - v)(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = 0 \tag{3.1}$$

$$\text{où } \alpha = \frac{3v' - 3\rho}{a^3 2\rho' + \rho}, \beta = \frac{3\rho}{2\rho' + \rho}, b = \sqrt{\frac{3\alpha\beta}{\pi}}$$

Relativement à un repère lié à l'écoulement, on notera :  $u = u' - U_1$  et  $v = v' - U_2$

Dans le cas d'un écoulement supersonique, le terme de Basset [20] (traduisant les effets instationnaires) est généralement négligé dans l'équation du mouvement d'une particule. Il est en effet peu commode d'emploi, et nécessite, dans le cas d'un calcul numérique, la sauvegarde des vitesses et accélérations successives du fluide et de la particule, depuis un instant où le mouvement est en repos. Dans une précédente étude effectuée en 1989 par Tedeschi [6], il a été établi numériquement que ce terme était négligeable à la traversée d'une discontinuité, ce qui fut confirmé par Amram et Thomas [12], en 1991. Néanmoins, l'équation du mouvement n'a jamais été résolue analytiquement dans ce cas, alors que le mouvement fortement instationnaire de la particule risque de donner une grande importance au terme de Basset. Ceci sera fait dans ce chapitre, et on va déterminer dans quelles conditions on pourra effectivement le négliger sans risque d'erreur.

On étudiera le problème d'une particule sphérique, de masse volumique très supérieure à celle du fluide ( $\rho' \gg \rho$ ), traversant une discontinuité de vitesse unidimensionnelle. L'ensemencement étant effectué avant le choc, la particule suit bien l'écoulement en amont. On veut déterminer sa vitesse en aval.

Afin d'intégrer analytiquement l'équation de Tchen [11], on suppose que la vitesse relative du fluide et de la particule est suffisamment faible. Ainsi, l'écoulement autour de la sphère est considéré comme incompressible, et les termes non linéaires sont négligés (hypothèses de Stokes). Ceci correspond à la nécessité d'utiliser de faibles nombres de Reynolds et de Mach relatifs ( $Re_r$  et  $M_r$ ).

### 3.1 Résolution analytique de l'équation de Tchen dans le cas d'un choc unidimensionnel.

#### 3.1.1 Présentation des conditions de Cauchy et d'une analyse limite associée au problème du choc

Relativement au repère, l'équation utilisée est celle de Tchen[11], obtenue grâce à l'expression (2.20) :

$$F = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho' \dot{v}'(t) = -6 \pi \mu a (v' - u')(t) - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho (\dot{v}' - \dot{u}')(t) - 6 \sqrt{\pi \rho \mu a^2} \int_{-\infty}^t \frac{(\dot{v}' - \dot{u}')(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \frac{4 \pi a^3}{3} \rho \dot{u}'(t)$$

Ici,  $\mu$  et  $\rho$  sont des fonctions du temps.

$$D'où : \dot{v}'(t) - \beta \dot{u}'(t) + \alpha (v' - u')(t) + b \int_{-\infty}^t \frac{(\dot{v}' - \dot{u}')(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = 0 \quad (3.1)$$

$$où \quad \alpha = \frac{3v}{a^2} \frac{3\rho}{2\rho' + \rho}, \quad \beta = \frac{3\rho}{2\rho' + \rho}, \quad b = \sqrt{\frac{3\alpha\beta}{\pi}}$$

Relativement à un repère lié à l'écoulement, on notera :  $u = u' - U_1$  et  $v = v' - U_2$

$U_1$  et  $U_2$  représentent respectivement la vitesse du fluide à l'infini amont et à l'infini aval.

Si à l'instant  $t = 0$ , le fluide et la particule subissent le choc, pour  $t < 0$  leur vitesse sera constante et égale à  $U_1$  ( $u = 0$  et  $v' = 0$ ). Pour  $t > 0$  la vitesse du fluide sera constante et égale à  $U_2$ , et  $u = U_2 - U_1$ . Le problème se ramène alors à la détermination de la vitesse de la particule, c'est-à-dire  $v$ .

On note  $w = v - u$  la vitesse relative de la particule par rapport à l'écoulement. En différenciant l'équation (3.1), on obtient (voir annexe 1.1) :

$$\ddot{w}(t) + 2k \dot{w}(t) + (k^2 + \omega^2)w(t) = \dot{\phi}(t) + \alpha \phi(t) - b \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\phi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (3.2)$$

$$\text{où } k = \alpha \left[ 1 - \frac{3\beta}{2} \right], \quad \omega^2 = \alpha^2 - k^2 = 3\alpha^2 \beta \left[ 1 - \frac{3\beta}{4} \right] \quad \text{et} \quad \phi = -(1-\beta)\dot{u}$$

Dans l'onde de choc, il y a une discontinuité de vitesse, il n'est pas possible donc, d'intégrer analytiquement l'équation (3.2). On déterminera la solution  $w(t)$  quand  $u(t)$  tend vers une fonction de Heaviside, grâce à une méthode d'analyse limite. Elle permettra de déterminer la solution du problème, bien qu'on ne connaisse pas la forme de  $u(t)$ , mais seulement « allure ». L'emploi de distribution auraient nécessité la connaissance des fonctions de distribution à la surface de l'onde de choc.

La solution étant connue pour  $t < 0$ , il reste à la déterminer pour  $t > 0$ . On cherche alors la limite du second membre de (3.2) quand  $t > 0$  et lorsque  $u(t)$  tend simplement vers  $(U_2 - U_1) Y(t)$ , où  $Y$  est la fonction de Heaviside. A cette fin nous considérons une suite de fonction  $u_n$  réelles de classe  $C^2$  vérifiant les propriétés suivantes :

a)  $u_n$  est une fonction décroissante sur  $\mathbf{R}$

b)  $\forall t, t \in \left] -\infty, \frac{1}{n} \right[ , u_n(t) = 0$  (voir annexe 1.2)

c)  $\forall t, t \in \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ , u_n(t) \in [0, U_2 - U_1]$

d)  $\forall t, t \in \left] \frac{1}{n}, +\infty \right[ , u_n(t) \in U_2 - U_1$ .

Cette classe de fonctions représente un raccordement analytique entre la vitesse aval et la vitesse amont du fluide.

Les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de la vitesse  $u$  du fluide et de la masse volumique  $\rho$ .  $\rho$  est différent en amont et en aval du choc donc  $\alpha$  et  $\beta$  également. Ces fonctions sont discontinues comme la vitesse  $u$  et on introduira une régularisation sous forme de suites de

fonctions  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  associées à  $u_n(t)$ . Hors de l'intervalle  $\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$   $\alpha_n$  et  $\beta_n$  seront constantes, et sur  $\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$  elles sont supposées de classe  $C^2$ .

Cette hypothèse correspond à une viscosité gardent dans le choc des valeurs intermédiaires à celles des écoulements amont et aval. Cette condition est conforme au modèle faiblement dissipatif et à une estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité effectuée au chapitre 5.

$$\text{Posons } \varphi_n = - (1 - \beta_n) \dot{u}_n$$

$$\forall t, t \in \mathbf{R}^+, \exists n, n \in \mathbf{IN}, t > \frac{1}{n} \Rightarrow \dot{u}_n(t) = 0 \Rightarrow \varphi_n(t) = 0$$

$$\text{On en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \varphi_n(t) = 0$$

$$\forall t, t \in \mathbf{R}^+, \exists n, n \in \mathbf{IN}, t > \frac{1}{n} \Rightarrow \ddot{u}_n(t) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_n(t) = 0$$

$$\text{On en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\varphi}_n = 0$$

En annexe 1.3, on montrera que la condition  $\rho' \gg \rho$  implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\varphi}_n(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\frac{\Delta U}{2t^{3/2}} \quad \text{avec } \Delta U = U_1 - U_2 \quad (3.3)$$

Pour une onde de choc (traversée par la particule à l'instant  $t = 0$ ), la vitesse relativement au fluide d'une particule sphérique vérifie pour  $t > 0$  l'équation :

$$\ddot{w}(t) + 2k \dot{w}(t) + (k^2 + \omega^2) w(t) = \frac{b \Delta U}{2t^{3/2}} \quad (3.4)$$

L'équation du second ordre (3.4) est une conséquence de l'équation de Tchen (du premier ordre). On détermine la solution de (3.4) (une autre analyse limite permettra de la réinjecter dans l'équation du premier ordre afin de déterminer complètement la solution du problème, ce qui sera fait plus loin).

En ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière (annexe 1.4), on obtient la solution générale de (3.4) :

$$w(t) = \frac{b \Delta U}{2\omega} e^{-kt} \left[ \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du - \cos(\omega t) \int_{t_0}^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du \right]$$

où  $t_1$  et  $t_0$  sont deux constantes à déterminer.



### 3.1.2 Détermination de la constante $t_0$

On suppose que la vitesse de la particule est discontinue en  $t=0$ . La valeur du saut est égale à  $\Delta V = v(0^-) - v(0^+)$  où  $v(0^-) = 0$ .

Notons  $w(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} w(t)$

$w(0^+) = v(0^+) - u(0^+) = -\Delta V - (U_2 - U_1) = \Delta W$ . Pour  $t < t_1$ .

$$\left| e^{-kt} \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du \right| \leq \left| \sin(\omega t) \right| \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du$$

$$\leq e^{kt_1} \left[ -\frac{1}{2\sqrt{u}} \right]_{t_1}^t \left| \sin(\omega t) \right| = e^{kt_1} \left[ \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t_1}} \right] \left| \sin(\omega t) \right| \tag{3.5}$$

Pour  $t_1$  fixé, et  $t \in ]0, t_1[$ ,  $e^{kt_1} \left[ \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t_1}} \right] \left| \sin(\omega t) \right|$  a pour limite 0 quand  $t$  tend vers 0.

On en déduit  $w(0^+) = -\frac{b \Delta U}{2 \omega} \int_{t_0}^0 \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du$ .

La borne  $t_0$  vérifie la relation :  $\int_0^{t_0} \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du = \frac{2 \omega}{b \Delta U} \Delta W$

D'où

$$w(t) = \frac{b \Delta U}{2 \omega} e^{-kt} \left[ \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du - \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du \right] + \Delta W e^{-kt} \cos(\omega t) \tag{3.6}$$

L'expression précédente nous permet de vérifier les limites suivantes :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$  ( la différence de vitesse devient nulle à l'infini aval )

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{w}(t) = -\infty$  ( l'accélération est infinie au moment du choc )

( les calculs sont explicités à l'annexe 1.5 ).

### 3.1.3 Détermination des constantes $t_1$ et $\Delta W$

L'équation (3.4) est une conséquence de l'équation de Tchen pour déterminer complètement la solution, c'est-à-dire les constantes d'intégration  $t_1$  et  $\Delta W$ , il est nécessaire de reporter la solution (3.6) dans l'équation (3.1).

Pour un mouvement de classe  $C^2$  et pour  $t > 0$ , l'équation (3.1) s'écrit :

$$\dot{w}(t) + \alpha w(t) + b \int_{-\infty}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \varphi(t) \quad (3.7)$$

$$\text{où } \varphi(t) = - [1 - \beta(t)] \dot{u}(t)$$

Dans le cas du choc, pour les fonctions  $u_n$  et  $\beta_n$  précédentes, pour tout  $t$  positif  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = 0$  ( au sens de la convergence simple ).

On démontre en annexe 1.6 la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^t \frac{\dot{w}(t)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx + \frac{\Delta W}{\sqrt{t}}$$

En aval du choc, l'équation (3.7) du mouvement de la particule s'écrit :

$$\dot{w}(t) + \alpha w(t) + b \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx + b \frac{\Delta W}{\sqrt{t}} = 0 \quad (3.8)$$

En dérivant (3.6),

$$\dot{w}(t) = -k w(t) + e^{-kt} \left\{ \begin{array}{l} \frac{b \Delta U}{2} \left[ \cos(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} + \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du \right] \\ - \Delta W \omega \sin(\omega t) \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

En multipliant (3.8) par  $\sqrt{t}$ , et en remarquant que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \dot{w}(t) = -b \Delta U$ ,

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} w(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = 0$  (voir annexe 1.7), on obtient

$\lim_{t \rightarrow 0^+} b(\Delta W - \Delta U) = 0$ , d'ou  $\Delta W = \Delta U$ . La vitesse de la particule ne sera pas discontinue en  $t = 0$ .

L'équation (3.8) s'écrit alors :

$$\dot{w}(t) + \alpha w(t) + b \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx + b \frac{\Delta U}{\sqrt{t}} \quad (3.10)$$

Un calcul donné en annexe 1.8 exprime la condition que doit vérifier la borne  $t_1$  :

$$\int_0^{t_1} \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du = \frac{2}{\sqrt{t_1}} - b \pi \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Conséquences

La solution du problème est donnée par :

$$w(t) = \Delta U \left[ \frac{b}{2\omega} e^{-kt} \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du - \frac{b}{2\omega} e^{-kt} \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du + e^{-kt} \cos(\omega t) \right]$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du &= \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du + \int_{t_1}^t \frac{1}{u^{3/2}} du \\ &= \int_{t_1}^0 \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du + \int_0^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du - 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{t_1}^t \\ &= \int_0^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du - \frac{2}{\sqrt{t}} + b \pi \end{aligned}$$

On obtient :

$$w(t) = \Delta U e^{-kt} \left\{ \frac{b}{2\omega} \sin(\omega t) \left[ \int_0^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du - \frac{2}{\sqrt{t}} + b \pi \right] - \frac{b}{2\omega} \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du + \cos(\omega t) \right\} \quad (3.12)$$

**Remarque :**

Lorsqu'on résout analytiquement l'équation du mouvement de la particule  $F = m_p \Gamma$ , en aval du choc, en prenant pour  $F$  l'expression de Stokes  $F = -6 \pi \mu a w$ , on a classiquement :

$$w(t) = \Delta U e^{-\frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2 \rho'} t} \quad (t > 0)$$

Le coefficient  $\eta = \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2 \rho'}$ , est généralement appelé temps de relaxation. Si on le compare au coefficient  $k$  de l'équation (3.1.2), on a, dans le cas où  $\frac{\rho}{\rho'} \ll 1$ :

$$k \approx \alpha = \frac{3 v}{a^2} \frac{3 \rho}{2 \rho' + \rho} \approx \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2 \rho'}$$

Les deux coefficients seront sensiblement égaux.

**3.2 Analyse dimensionnelle du problème**

L'équation de Tchen (3.1) est invariante par la transformation :

$$(t, u, v) \rightarrow (\lambda_1 t, \lambda_2 u, \lambda_2 v) \quad \text{où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont deux réels positifs.}$$

Cette propriété nous conduit à choisir comme unité de temps l'inverse de  $k$ , et comme unité de vitesse  $\Delta U$ . Ce sont des caractéristiques du mouvement de la particule à travers le choc. Dans ces unités on obtient :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3 \beta (4 - 3 \beta)}}{2 - 3 \beta}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{3 \beta}{2 - 3 \beta}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2 \pi}} \sqrt{\frac{2 - 3 \beta}{4 - 3 \beta}}$$

représentant respectivement  $\omega$ ,  $b$  et  $\frac{b}{2 \omega}$  et où  $\beta = \frac{3 \rho}{2 \rho' + \rho}$

L'expression (3.1.2) devient :

$$\bar{w}(t) = \bar{w}_1(t) + \bar{w}_2(t) \tag{3.13}$$

avec  $\bar{w}_1(t) = e^{-i} \cos(\omega_1 \bar{t})$

$$\bar{w}_2(t) = e^{-i} \left\{ \gamma_1 \sin(\omega_1 \bar{t}) \left[ \int_0^i \frac{e^u \cos(\omega_1 u) - 1}{u^{3/2}} du - \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} + b_1 \pi \right] - \gamma_1 \cos(\omega_1 \bar{t}) \int_0^i \frac{e^u \sin(\omega_1 u)}{u^{3/2}} du \right\}$$

où  $\bar{w}_2(t)$  représente la contribution du terme de Basset. Nous allons étudier l'importance relative de ces deux termes.

Dans ces unités, le graphe associé à la relation (3.13) ne dépend que de  $\beta$ , donc de  $\frac{\rho}{\rho'}$ .

Pour  $\frac{\rho}{\rho'}$  et  $\alpha$  donnés, (3.13) représente l'allure générale de la courbe et les paramètres de l'écoulement fixent les unités des axes. Pour un écoulement donné (i.e.  $v$ ,  $\rho$ ,  $\Delta U$ ) et pour des particules de densité  $\rho'$ , l'unité de longueur caractéristique du mouvement de la particule à travers le choc ne dépend que du carré de son rayon (la distance de « rattrapage » ou de relaxation est proportionnelle au carré du rayon). La contribution relative du terme de Basset à la solution (3.13) ne dépend que de  $\frac{\rho}{\rho'}$  et ceci quelque soit l'écoulement.

### 3.3 Résultats et discussion

#### 3.3.1 Calcul numérique

La singularité en 0 présente à l'intérieur des intégrales est levée grâce à une intégration analytique du développement limité des fonctions sous le signe intégrale autour de 0. On a ainsi :

$$\int_0^t \frac{e^u \cos(\omega_1 u) - 1}{u^{3/2}} du = 2\sqrt{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^t \frac{e^u \cos(\omega_1 u) - 1}{u^{3/2}} du$$

$$\int_0^t \frac{e^u \cos(\omega_1 u) - 1}{u^{3/2}} du = 2\omega_1 \sqrt{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^t \frac{e^u \cos(\omega_1 u)}{u^{3/2}} du$$

Pour connaître la vitesse de la particule, il suffira d'écrire  $v(t) = \Delta U \bar{w}(t) + U_2$ , l'intégration numériques s'effectuant simplement grâce à la méthode de Simpson. On a ainsi la vitesse pour un rapport  $\frac{\rho}{\rho'}$  constant. On calcule ensuite aisément la distance au choc  $x(t)$  en intégrant cette vitesse. On obtient le rattrapage pour différentes tailles de particules en la divisant par le coefficient  $k$  (dépendant du rayon  $a$ ).

Les résultats numériques, relatifs à l'équation (3.13) sont présentés, notamment dans les conditions correspondant à l'écoulement obtenu dans la soufflerie supersonique S8 de l'I.M.S.T ( Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence ) lors d'expériences :

<b>Grandeurs réservoirs :</b>	$P_0 = 0.5 \text{ atm.}$
	$T_0 = 295 \text{ °K}$
	$M_1 = 2.3$
	$U_1 = 552 \text{ m/s}$
<b>Grandeurs en amont du choc :</b>	$U_{1,n} = 281 \text{ m/s}$
	$\rho_1 = 0.099 \text{ Kg/m}^3$
	$T_1 = 143 \text{ °K}$
	$P_1 = 4068 \text{ Pa}$
	$\mu_1 = 1.168 \cdot 10^{-5} \text{ (S.I)}$
	$M_2 = 2.07$
	$U_2 = 522.5 \text{ m/s}$
<b>Grandeurs en aval du choc :</b>	$U_{2,n} = 217.5 \text{ m/s}$
	$\rho_2 = 0.127 \text{ Kg/m}^3$
	$T_2 = 160 \text{ °K}$
	$P_2 = 5028 \text{ Pa}$
	$\mu_2 = 1.168 \cdot 10^{-5} \text{ (S.I)}$
<b>Angle de réflexion</b>	$\theta = 6^\circ$
<b>Angle de l'onde de choc</b>	$\beta = 30.6^\circ$

### 3.3.2 Importance du terme de Basset

L'un des buts de cette étude est d'évaluer l'importance du terme de Basset dans le mouvement d'une particule à travers une onde de choc. Généralement ce terme est négligé. D'après la forme sans dimension (3.13) de (3.12), sa valeur relative ne dépend que du rapport

$\frac{\rho}{\rho'}$ , et non de la taille de la particule. Des calculs ont été effectués pour un rayon de  $0.5 \mu\text{m}$  et

pour plusieurs rapports  $\frac{\rho}{\rho'}$ . Pour des valeurs de  $\rho'$  très supérieures à  $\rho$ , aucune différence

n'est observable entre les résultats numériques de l'intégration avec et sans le terme de Basset et les courbes sont confondues. Par contre, à partir de  $\frac{\rho}{\rho'}$  d'ordre de  $10^{-2}$  (figure 3.1) une

différence apparaît. Dans les écoulements supersoniques, les rapports  $\frac{\rho}{\rho'}$  sont typiquement de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  [6], et l'hypothèse qui consiste à négliger le terme de Basset est alors tout à fait justifiée.

### 3.3.3 Influence du rayon et de la masse volumique sur la solution de l'équation de Tchen

Les figures 3.2 et 3.3 présentent les vitesses des particules en aval du choc dans le cas, d'une part, de rayons  $a$  différents pour  $\frac{\rho}{\rho'}$  fixé, et d'autre part, de différents rapport  $\frac{\rho}{\rho'}$ , le rayon  $a$  étant fixé. Les calculs ont été effectués dans les conditions d'écoulements précitées. On observe que, comme attendu, les distances au bout desquelles la vitesse de la particule est sensiblement égale à celle de l'écoulement sont fonction de ces deux paramètres. Pour des conditions classiques dans les écoulements supersoniques étudiés ( $a = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $\frac{\rho}{\rho'} = 10^{-4}$ ), l'équation de Tchen donne une distance de l'ordre de 1 cm. Ceci est en accord avec les résultats numériques obtenus précédemment.

La figure 3.4 présente une comparaison entre des résultats de calcul obtenus à l'aide de la relation (3.13) et ceux présentés par Haertig [6], pour des conditions d'écoulement correspondant à cette référence :

$P_0 = 3.3 \text{ bar}$  ;  $T_0 = 275 \text{ °K}$  ;  $M_1 = 2.06$  ;  $U_1 = 502.3 \text{ m/s}$  ;  $M_2 = 1.498$  ;  $U_{2,x} = 398.5 \text{ m/s}$  ;  
 $\theta = 15^\circ$  ( où  $U_{2,x}$  représente la composante longitudinale de la vitesse du fluide après l'onde de choc oblique ) pour une particule de masse volumique  $\rho' = 3000 \text{ Kg / m}^3$ .

La figure 3.5 présente une comparaison entre les résultats théoriques associés à la relation (3.13) et des résultats expérimentaux obtenus à l'I.M.S.T. Dans les conditions précitées, pour des particules de latex de rayon  $0.15 \mu\text{m}$  et  $1 \mu\text{m}$  et de masse volumique  $\rho' = 1050 \text{ Kg/m}^3$ . Toutefois ces résultats expérimentaux sont sujets à caution. Il est probable que l'indépendance du comportement des particules vis-à-vis de leur taille, relevée sur la figure, ne soit en fait due qu'à la prise en compte des seules gouttelettes d'alcool ( utilisé comme solvant ) par le photomultiplicateur et non des particules.

### 3.3.4 Conclusion

Une nouvelle résolution analytique de l'équation de Tchen à travers un choc, associée à une écriture linéaire de la traînée, a montré que dans des conditions expérimentales usuelles des écoulements supersoniques, le terme de Basset pouvait être effectivement négligé. Les conditions de validité de cette approximation ont été précisées.

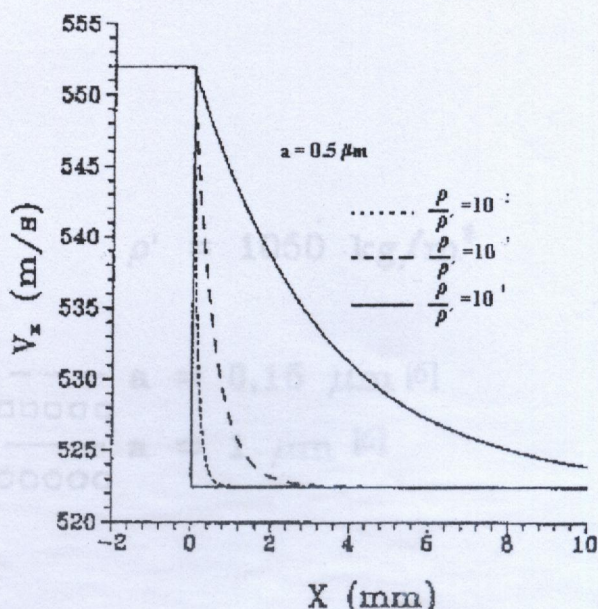
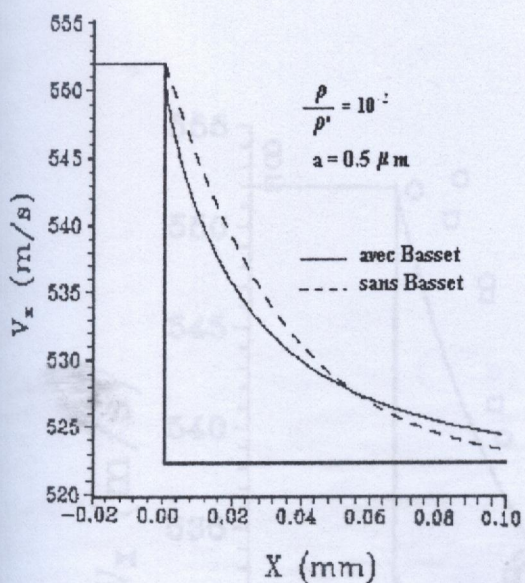


Figure 3.1 : Evolution de la vitesse des particules en fonction de la distance au choc avec et sans le terme de Basset.

Figure 3.3 : Evolution de la vitesse des particules en fonction de la distance au choc pour plusieurs rapports  $\frac{\rho}{\rho'}$ .

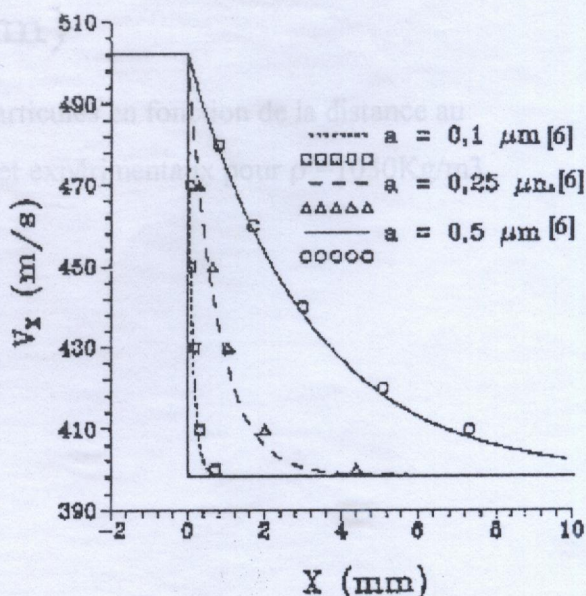
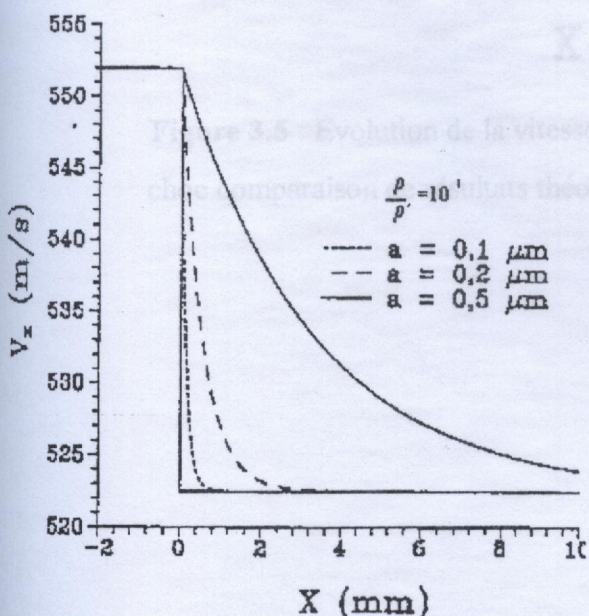


Figure 3.2 : Evolution de la vitesse des particules en fonction de la distance au choc pour plusieurs rayons.

Figure 3.2 : Evolution de la vitesse des particules en fonction de la distance au choc pour plusieurs rayons.



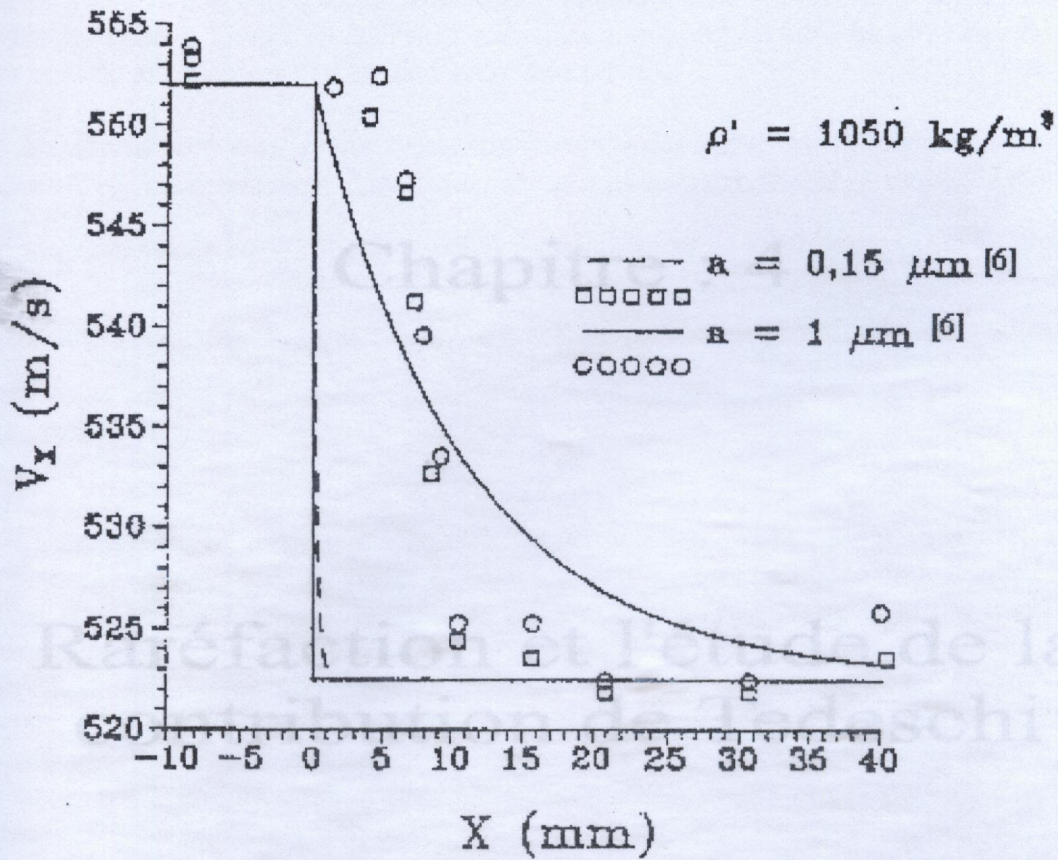
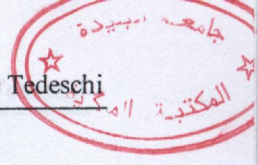


Figure 3.5 : Evolution de la vitesse des particules en fonction de la distance au choc comparaison de résultats théoriques et expérimentaux pour  $\rho'=1050\text{Kg/m}^3$ .



## 4.1 Introduction

L'emploi de vitesses élevées va modifier profondément les conditions d'écoulement autour des particules. D'une part, les densités de fluide dans les écoulements supersoniques sont plus faibles que celles d'un écoulement subsonique incompressible. D'autre part, afin de réduire les effets d'inertie, les tailles de particules employées lors des mesures en vélocimétrie laser vont devoir être très petites (de l'ordre du micron).

Les conditions sont ainsi réunies pour avoir autour des particules un régime d'écoulement raréfié. C'est un écoulement dans lequel le libre parcours moléculaire moyen  $\lambda$  ( défini par  $\lambda = \frac{\mu}{\rho \sqrt{\frac{\pi}{2rT}}}$  ) est de l'ordre d'une longueur  $L$  significative de l'écoulement ( ici le diamètre de la particule ). Lorsque le nombre de Knudsen  $Kn = \frac{\lambda}{L}$  n'est plus suffisamment petit devant 1, le gaz ne se conduit plus comme un fluide continu et on voit apparaître des phénomènes liés à la rarefaction.

Le but de ce chapitre est de classifier les différents régimes d'écoulement, d'étudier les phénomènes physiques auxquels ils correspondent, et les conditions pour lesquelles on les obtient. On analysera ensuite le suivi de particules. L'expression de la loi de traînée d'une sphère en Régime Moléculaire Libre est calculée (§ 4.3), valable tout aussi bien en écoulement subsonique que supersonique. De même, on explicitera la loi de Cunningham (§ 4.4), dérivée de celle de Stokes, applicable à une sphère placée dans un écoulement subsonique ( $Re \ll 1$ ), mais pour le régime de glissement. Une nouvelle loi est ensuite proposée, qui prend en compte tous les régimes d'écoulement et des domaines de vitesses suffisant pour les applications de la vélocimétrie laser.

## 4.2 Les Différents Régimes

### 4.2.1 Critère de Classification des Régimes

Le paramètre permettant de classifier les différents régimes d'un écoulement est le nombre de Knudsen. Il est parfois plus commode de l'exprimer en fonction du nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$  et du nombre de Mach  $M = \frac{U}{\sqrt{\gamma rT}}$ , ce qui donne  $Kn = \frac{M}{Re} \sqrt{\frac{\gamma \pi}{2}}$ . Schaaf et Chambré [13], utilisent le rapport  $\frac{M}{Re}$  pour différencier les régimes :

Régime	continu	$\frac{M}{Re} < 0.01$
	glissement	$0.01 < \frac{M}{Re} < 0.1$ ( voir figure 4.1 )
	transition	$0.1 < \frac{M}{Re} < 3$
	moléculaire libre	$3 < \frac{M}{Re}$

Dans le cas où  $Re \gg 1$ , il faudra utiliser  $\frac{M}{\sqrt{Re}}$  au lieu de  $\frac{M}{Re}$ . En effet, dans ce cas là, la dimension caractéristique de l'écoulement importante pour déterminer les effets visqueux sera l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite, au lieu d'une dimension typique  $L$  du corps. On aura l'ordre de grandeur du rapport  $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$ .

Si on compare cette classification aux conditions expérimentales généralement obtenues dans les souffleries supersoniques ( nombre de Mach nominal égal à 2.3, pression génératrice égale à 0.5 atm. ), on peut déterminer les différents régimes obtenus en fonction du diamètre des particules :

Régime	continu	$d > 37\mu\text{m}$
	glissement	$37\mu\text{m} > d > 3.7\mu\text{m}$
	transition	$3.7\mu\text{m} > d > 0.12\mu\text{m}$
	moléculaire libre	$0.12\mu\text{m} > d$

Vu la taille des particules employées (autour d' $1\mu\text{m}$ ), on peut remarquer que l'on se situe essentiellement dans le régime de transition, très éloigné du régime continu et donc du domaine d'application des lois plus classiques (Stokes, Schiller et Nauman, Basset, Tchen, ...)

#### 4.2.2 Régime Moléculaire Libre ( R.M.L. )

Le régime d'écoulement moléculaire libre est le régime de la rarefaction extrême. Le libre parcours moléculaire moyen est par définition plusieurs fois la dimension caractéristique du corps. Les molécules qui heurtent la surface et sont alors réfléchies, voyageront en moyenne assez loin avant d'entrer en collision avec d'autres molécules. On peut ainsi négliger l'effet des molécules réfléchies sur l'écoulement incident. Celui-ci est donc supposé ne pas être du tout perturbé par la présence du corps. C'est l'hypothèse de base de la théorie de l'écoulement moléculaire libre. En conséquence, aucune couche limite ou onde de choc, n'est prévue au voisinage de l'objet.

Les calculs théoriques du transfert de chaleur externe, et des caractéristiques aérodynamiques de corps plongés dans un champ d'écoulement moléculaire libre, peuvent être effectués en traitant séparément les écoulements des molécules incidentes et réfléchies. On suppose que le gaz incident est en équilibre Maxwellien local, ses différents composants étant à une même température  $T_\infty$  et la vitesse microscopique de ses molécules ne dépendant pas de la direction.

### 4.2.3 Régime de Glissement

Dans le régime de glissement (raréfaction légère), le champ de vitesse de l'écoulement est perturbé par la présence du corps (de la même manière qu'en régime continu). Il y aura une couche limite qui se développera. Mais au lieu d'avoir une vitesse relative nulle à la paroi, on aura une vitesse tangentielle finie 'vitesse de glissement'. Le libre parcours moléculaire moyen  $\lambda$  sera de l'ordre de 1 à 10% de la dimension caractéristique  $L$ .

Bien que le problème de la formulation exacte des équations différentielles et les conditions aux limites pour décrire les écoulements de glissement ne soit pas résolu de façon exacte, on considère que quelques modifications des conditions aux limites à l'aide d'une vitesse de glissement peuvent être raisonnablement employées avec les équations de Navier-Stokes.

### 4.2.4 Régime de Transition

Dans la transition entre le régime de glissement et le régime moléculaire libre le libre parcours moléculaire moyen est du même ordre que la dimension typique du corps. Les collision avec la surface et les collisions intermoléculaires de l'écoulement libre sont plus ou moins d'égale importance, et l'analyse devient extrêmement compliquée. Cela correspond physiquement à la région dans laquelle les effets de quelques collisions intermoléculaires commencent à déformer la distribution de vitesse de l'écoulement libre.

A noter connaissance aucune étude théorique n'a pu décrire correctement les phénomènes s'y déroulant. Le seul moyen d'accéder à ce régime est de faire une interpolation entre le régime moléculaire libre et le régime de glissement, et d'effectuer des calculs numériques exacts très lourds et très coûteux, afin de recalculer quelques points de l'interpolation.

## 4.3 Traînée d'une particule en Régime Moléculaire Libre

### 4.3.1 Introduction

Le principe du suivi d'une particule en régime moléculaire libre, repose simplement sur l'interaction entre les molécules de l'écoulement gazeux et la particule sphérique considérée. On suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les molécules incidentes et les molécules réfléchies, ceci étant plus vrai que l'on considère une surface convexe. Les molécules en approche sont en équilibre Maxwellien local. On verra ce qu'il en est pour les molécules réfléchies.

Le coefficient de traînée d'une sphère placée dans un écoulement moléculaire libre a été calculé par Schaaf et Chambré [13], ainsi que Patterson [14]. Cette expression est valable pour de grandes vitesses ( sauf lorsqu'on a des phénomènes d'arrachement ou de combustion de la particule, ce qui ne sera pas envisagé ici ), mais elle est lourde à utiliser. On la simplifiera donc pour les basses vitesses.

### 4.3.2 Les différents types de réflexion

Le premier type de réflexion est appelé «spéculaire». Si la surface est considérée comme lisse la composante tangentielle de la vitesse est conservée et la composante normale subit seulement une inversion de sens. Ainsi, la fonction de distribution des molécules réfléchies est la même que celles des molécules incidentes de l'écoulement à l'infini :

$$f_r = f_i = f_\infty = \frac{n_\infty}{(\sqrt{\pi} c_{m_\infty})^3} e^{-c^2} \quad \text{où} \quad C^2 = \frac{\sum_{j=1}^3 c_j c_j}{c_m^2} \quad (C_\infty \text{ est basé sur } c_{m_\infty})$$

$$c_m = \sqrt{2RT} \quad (c_{m_\infty} \text{ est basé sur } T_\infty)$$

Ici, il n'y a aucune accommodation de l'état des molécules à celui de la surface.

Le deuxième type de réflexion est appelé «diffus». Si la surface est très rugueuse on peut supposer que le gaz reste en contact avec elle suffisamment longtemps pour atteindre sa température et perdre tout son mouvement macroscopique. Ainsi, la direction de réflexion n'aura plus aucun rapport avec la direction incidente. On dit alors qu'il y a accommodation complète. La fonction de distribution des molécules réfléchies correspond alors à celle de molécules provenant d'un gaz Maxwellien fictif à la température  $T_w$  de la particule :

$$f_r = f_w = \frac{\beta}{(\sqrt{\pi} c_{m_w})^3} e^{-c^2} \quad \text{où} \quad C_w \text{ est basé sur } c_{m_w} \quad (\text{voir ci-dessus})$$

$$c_{m_w} \text{ est basé sur } T_w$$

Ici la quantité inconnue  $\beta$  remplace la densité  $n$ . On peut la déterminer en utilisant la condition que le nombre de molécules incidentes  $N_i$  percutant l'élément de surface  $dA$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est identique à celui des molécules réfléchies  $N_r$ .

$$N_i = \int \xi'_1 f_i d\xi' dA dt \quad \text{où} \quad \xi'_1 \text{ est dirigé suivant la normale à } dA \text{ et } d\xi' \text{ représente } d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3$$

$$f_i \text{ est la fonction de distribution des molécules incidentes ( voir ci-dessus )}$$

( le système d'axes est indiqué en annexe 2.1 )

$$= \frac{n_{\infty} c_{m_{\infty}}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} dA dt \quad (4.1)$$

( d'après Patterson [14] )

en notant  $S = \frac{U}{\sqrt{2rT}} = M \sqrt{\frac{\gamma}{2}}$

$$N_r = \frac{\beta c_{m_w}}{2\sqrt{\pi}} dA dt \quad (4.2)$$

( d'après Patterson [14] )

où  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  est la fonction d'erreur

$$d'où : \beta = \frac{n_{\infty} c_{m_{\infty}}}{c_{m_w}} \left\{ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} \quad (4.3)$$

### 4.3.3 Coefficients d'accommodation

Dans la réalité physique les molécules interagissent de façon intermédiaire avec la surface. Les deux types de réflexion ci-dessus représentent des cas extrêmes. On suppose théoriquement qu'une fraction  $\kappa$  des molécules se réfléchit de manière diffuse et que l'autre fraction  $1 - \kappa$  se réfléchit de manière spéculaire. La fonction de distribution des molécules réfléchies sera ainsi :

$$f_r = (1 - \kappa) f_{\infty} + \kappa f_w \quad (4.4)$$

On a alors le nombre de molécules réfléchies par unité de surface et par unité de temps :

$$N_r = (1 - \kappa) \int \xi' f_{\infty} d\xi'_1 + \kappa \int c'_1 f_w dc' = (1 - \kappa) N_{\infty} + \kappa N_w \quad (4.5)$$

( les molécules réfléchies de manière spéculaire gardent leur vitesse macroscopique  $U$  et auront pour vitesse  $\xi = c + U$ , alors que les molécules réfléchies de manière diffuse ont perdu leur vitesse macroscopique et auront pour vitesse  $c$  ).

De la même façon on peut écrire la force normale exercée par unité de surface et de temps :

$$P_r = (1 - \kappa) m \int \xi'^2_1 f_{\infty} d\xi'_1 + \kappa m \int c'^2_1 f_w dc' = (1 - \kappa) P_{\infty} + \kappa P_w \quad (4.6)$$

que l'on peut noter :  $\kappa = \frac{P_{\infty} - P_r}{P_{\infty} - P_w}$

## 4.3.4 Contraintes aérodynamiques sur la particule

On a également la force tangentielle par unité de surface et de temps ( portée par la direction  $x'_2$  ) :

$$\begin{aligned} \tau_r &= (1 - \kappa) m \int \xi'_1 \xi'_2 f_\infty d\xi' + \kappa m \int c'_1 c'_2 f_w dc' \\ &= (1 - \kappa) \tau_\infty + \kappa \tau_w = (1 - \kappa) \tau_\infty \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ici  $\tau_w = 0$  car un gaz ayant une vitesse macroscopique nulle, à la température de la particule, exercera une contrainte normal ( pression ), mais pas de contrainte tangentielle.

$$\text{On écrit : } \kappa = \frac{\tau_\infty - \tau_r}{\tau_\infty}$$

ainsi que l'énergie cinétique transférée par unité de surface et de temps :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{2} (1 - \kappa) m \int \xi'^2 \xi'_1 f_\infty d\xi' + \frac{1}{2} \kappa m \int c'^2 c'_1 f_w dc' \\ &= (1 - \kappa) E_\infty + \kappa E_w \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{que l'on peut noter : } \kappa = \frac{E_\infty - E_r}{E_\infty - E_w}$$

D'après cette théorie assez simplifiée les trois coefficients  $\kappa$  devraient être égaux. En effet, Elena [29] a constaté expérimentalement qu'ils sont proches mais différents. C'est pourquoi on définit les trois coefficients d'accommodation suivants :

$$\sigma = \frac{\tau_\infty - \tau_r}{\tau_\infty} \quad \alpha = \frac{E_\infty - E_r}{E_\infty - E_w} \quad \sigma' = \frac{P_\infty - P_r}{P_\infty - P_w} \quad (4.9)$$

Pour une réflexion entièrement spéculaire on aura  $\sigma = \alpha = \sigma' = 0$ , et pour une réflexion entièrement diffuse on aura  $\sigma = \alpha = \sigma' = 1$ . La réflexion réelle ( expérimentalement proche de la réflexion diffuse ) sera donc basée sur une interpolation linéaire entre ces deux cas limites :

$$P_r = (1 - \sigma') P_\infty + \sigma' P_w \quad (4.10)$$

$$\tau_r = (1 - \sigma) \tau_\infty$$

$$E_r = (1 - \alpha) E_\infty + \alpha E_w$$

### 4.3.4 Contraintes aérodynamiques sur la particule

#### I. Pression résultante :

$$P = P_i + P_r = (2 - \sigma') P_\infty + \sigma' P_w \quad (4.11)$$

$$P_\infty = m \int \xi_1'^2 f_\infty d\xi' = m \int_0^{+\infty} d\xi_1' \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2' \int \xi_1'^2 f_\infty d\xi_3'$$

où

$$= \frac{1}{2} \rho_\infty c_{m_\infty}^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} S \cos \theta e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{2} (1 + 2 S^2 \cos^2 \theta) [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} \quad (4.12)$$

$$\text{avec } S = \frac{U}{\sqrt{2 r T_\infty}}$$

$$P_w = m \int c_1'^2 f_w dc' = m \int_{-\infty}^0 dc_1' \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2' \int_{-\infty}^{+\infty} c_1'^2 f_w dc_3'$$

$$= \frac{m \beta c_{m_w}^2}{4} \quad (4.13)$$

$$P = \frac{1}{2} \rho_\infty c_{m_\infty}^2 \left\{ (2 - \sigma') \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} S \cos \theta e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{2} (1 + 2 S^2 \cos^2 \theta) [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma'}{2} \frac{c_{m_w}}{c_{m_\infty}} \left[ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right] \right\}$$

$$P = \frac{\rho_\infty U^2}{2 S^2} \left\{ (2 - \sigma') \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} S \cos \theta e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{2} (1 + 2 S^2 \cos^2 \theta) [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma'}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \left[ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right] \right\} \quad (4.14)$$

#### II. Cisaillement résultant ( porté par la direction $x'_2$ )

$$\tau = \tau_i - \tau_r = \sigma \tau_\infty \quad (4.15)$$

$$\tau_\infty = m \int \xi_1' \xi_2' f_\infty d\xi' = m \int_0^{+\infty} d\xi_1' \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2' \int \xi_1' \xi_2' f_\infty d\xi_3'$$

$$= \frac{\rho_\infty c_{m_\infty}^2}{2\sqrt{\pi}} S \sin \theta \left\{ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} \quad (4.16)$$

$$\text{Donc : } \tau = \sigma \frac{\rho_\infty U^2}{2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi} S} \left\{ e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} S \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} \quad (4.17)$$



### III. Bilan d'énergie cinétique

Si l'on considère qu'il n'y a ni absorption de la particule, qu'il n'y a pas d'énergie radiative ou de source de chaleur interne à la particule, et que sa température  $T_w$  est uniforme, l'énergie cinétique incidente  $E_i = E_\infty$  sera égale à l'énergie cinétique réfléchie

$$E_r = (1 - \alpha) E_\infty + \alpha E_w.$$

où :

$$E_\infty = \frac{1}{2} m \int \xi'_1 \xi'^2 f_\infty d\xi' = \frac{1}{2} m \int_0^{+\infty} d\xi'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi'_1 \xi'^2 f_\infty d\xi'_3 \quad (4.18)$$

$$= \frac{\rho_\infty c_{m_\infty}^3}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} S^2\right) e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} S \cos \theta \left(\frac{5}{2} + S^2\right) [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\}$$

$$E_w = \frac{1}{2} m \int c'_1 c'^2 f_w dc' = \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^0 dc'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} c'_1 c'^2 f_w dc'_3 = \frac{m \beta c_{m_w}^3}{2\sqrt{\pi}} \quad (4.19)$$

IV. La force exercée sur deux éléments de surface diamétralement opposée est :

$$F = \frac{\rho_\infty U^2}{2} dA \left\{ \frac{2 e^{-S^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\pi} S} [(2 - \sigma') \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] + \frac{\sqrt{\pi} \sigma'}{S} \cos^2 \theta \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \right. \quad (4.20)$$

$$\left. + 2 \operatorname{erf}(S \cos \theta) \cos \theta \left[ (2 - \sigma') \left[ \cos^2 \theta + \frac{1}{2S^2} \right] + \sigma \sin^2 \theta \right] \right\} \sin \theta d\theta$$

V. Coefficient de Traînée :

$$C_D = \frac{2 + \sigma' + \sigma}{S^3} \left[ \frac{4S^4 + 4S^2 - 1}{4S} \operatorname{erf}(S) + \frac{e^{-S^2}}{\sqrt{\pi}} \left[ S^2 + \frac{1}{2} \right] \right] + \frac{2\sqrt{\pi} \sigma'}{3S} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \quad (4.21)$$

En intégrant les énergies cinétiques incidente et réfléchie sur la sphère et en égalant les deux expressions, on obtient :

$$\int_{\sigma} E_i d\sigma = \int_{\sigma} E_r d\sigma \Rightarrow \int_{\sigma} E_\infty d\sigma = (1 - \alpha) \int_{\sigma} E_\infty d\sigma + \alpha \int_{\sigma} E_w d\sigma \quad (\sigma \text{ représentant ici la surface})$$

L'équation devient indépendante de  $\alpha$ :  $\int_{\sigma} E_\infty d\sigma = \int_{\sigma} E_w d\sigma$

Grâce à ( 4.18 ) et ( 4.19 ), on a :

$$E_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} c_{m_{\infty}}^3}{2\sqrt{\pi}} \int_{\sigma} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} S^2 \right) e^{-S^2 \cos^2 \theta} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} S \cos \theta \left( \frac{5}{2} + S^2 \right) [1 + \operatorname{erf}(S \cos \theta)] \right\} d\sigma$$

$$= \frac{m c_{m_{\infty}}^3}{2\sqrt{\pi}} \int_{\sigma} \beta d\sigma$$

En remplaçant  $\beta$  par sa valeur tirée de ( 4.3 ) :

$$\frac{T_w}{T_{\infty}} = \frac{\left[ S^2 + \frac{7}{2} \right] e^{-S} + \left[ S^3 + 4S + \frac{5}{4S} \right] \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(S)}{3 e^{-S} + 3 \left[ S + \frac{1}{2S} \right] \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(S)} \quad (4.22)$$

On obtient la force exercée sur la sphère en Régime Moléculaire Libre grâce aux expressions ( 4.21 ) et ( 4.22 ) :

$$F_m = -C_D S^2 \rho_{\infty} R T_{\infty} \pi a^2.$$

### Remarques :

1. On peut remarquer que l'accélération de la particule ne dépendra plus que de l'inverse du rayon, au lieu de l'inverse du carré du rayon pour les lois classiques en régime continu. En effet, pour Stokes :

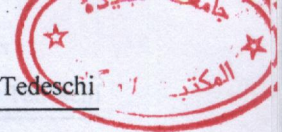
$$\Gamma_s = \frac{F_s}{m'} = -\frac{6 \pi \mu a V}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho'} \Rightarrow \Gamma_s = -\frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2 \rho'} V$$

et en Régime Moléculaire Libre :

$$\Gamma_m = \frac{F_m}{m'} = -\frac{C_D S^2 \rho_{\infty} R T_{\infty} \pi a^2}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho'} \Rightarrow \Gamma_m = -\frac{3}{4} C_D \frac{\rho_{\infty} R T_{\infty}}{a \rho'} S^2$$

2. Les coefficients d'accommodation dépendent de la nature de la particule et sont seulement connus empiriquement. Ils sont en général voisins de 0.9.

3. Cette expression du coefficient de traînée ne dépend pas du nombre de Reynolds.



### 4.3.5 Simplification pour les petites vitesses ( $S \ll 1$ )

On va simplifier l'expression du coefficient de traînée ci-dessus en effectuant un développement limité en  $S$  autour de 0. Le développement sera arrêté à l'ordre 3. On a ainsi :

$$e^{-S^2} = 1 - S^2 + 0(S^4)$$

$$\operatorname{erf}(S) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ S - \frac{S^3}{3} \right] + 0(S^4)$$

On obtient :

$$\frac{T_w}{T_\infty} = \frac{3 + \frac{7}{3}S^2 + 0(S^4)}{3 + S^2 + 0(S^4)}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{3 + S^2 + 0(S^4)} = \frac{1}{3} - \frac{S^2}{9} + 0(S^4)$$

$$\text{d'où } \frac{T_w}{T_\infty} = 1 + \frac{4}{9}S^2 + 0(S^4) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} = 1 + \frac{2}{9}S^2 + 0(S^4)$$

On a le coefficient de traînée :

$$C_D = \frac{2 - \sigma' + \sigma}{3\sqrt{\pi}S} (8 - 5S^2) + \frac{2\pi\sigma'}{3S} \left[ 1 + \frac{2}{9}S^2 \right]$$

que l'on pourra écrire :

$$C_D = \frac{1}{S} (\varphi + \eta S^2) \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{16 + 8\sigma + 2(\pi - 4)\sigma'}{3\sqrt{\pi}} \quad (4.23)$$

$$\eta = \frac{-10 - 5\sigma + \left[ \frac{4\pi}{9} + 5 \right] \sigma'}{3\sqrt{\pi}}$$

$$\text{D'où la force simplifiée : } F_s = -\frac{\pi^2 \mu^2 S}{8 \operatorname{Kn}^2 \rho} (\varphi + \eta S^2)$$

Si l'on compare la loi complète et la loi simplifiée pour  $\sigma = \sigma' = 0.9$ , on constate que cette dernière est valable (à 2.5 % près) pour  $0 < S < 0.2$ .

#### 4.4 Traînée d'une Particule en Régime de Glissement

##### 4.4.1 Introduction

la loi de traînée d'une particule en régime de glissement a été étudiée à l'origine par Cunningham [15]. Elle est essentiellement basée sur la notion de vitesse de glissement. En effet, en régime continu, il faut exercer une force sur la particule égale à  $6 \pi \mu a V$  (d'après Stokes[4]), pour maintenir la particule et le fluide environnant à une vitesse  $V$  dans un écoulement au repos. Or, comme on va le voir, en régime de glissement il suffira de maintenir le fluide environnant à une vitesse  $k V$ ,  $(1-k)V$  constituant alors la vitesse de glissement, et donc la détermination du coefficient du Cunningham  $k$ , obligatoirement compris entre 0 et 1.

Cette loi, dérivée de celle de Stokes [4], ne sera valable que pour les faibles nombres de Reynolds et de Mach (écoulement subsoniques).

L'étude de la force exercée sur une sphère en régime de glissement a été poursuivie sur le plan théorique par Milikan [7]. Il a corrigé la loi de Cunningham [15] au moyen d'une expression déterminée grâce à des résultats expérimentaux.

##### 4.4.2 Loi de Traînée en Régime de Glissement d'après Cunningham

Cunningham [15], considère les particules de masse  $m_p$ , comme un nuage doté d'une vitesse moyenne  $\bar{V}_0$ . Il cherche la valeur de la force à appliquer à une particule pour la maintenir à cette vitesse. Il détermine d'abord l'impulsion communiquée à la particule par une molécule de masse  $m$  (c'est-à-dire l'augmentation de quantité de mouvement), puis en déduit la force exercée par les molécules (dont le nombre est  $n$  par unité de volume) du gaz en fonction de l'état de ce dernier et la vitesse moyenne de la particule.

La vitesse d'une molécule sera  $\bar{u}(\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_\phi)$  et celle de la particule  $\bar{v}(\bar{v}_r, \bar{v}_\theta, \bar{v}_\phi) + \bar{V}_0$ .  $\bar{V}_0$  sera situé sur l'axe du repère sphérique,  $\mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{v}_r$  seront les composantes normales (à la paroi de la particule) de la vitesse (annexe 2.2).

On admettra que les collisions sont de type impulsion, entre sphères élastiques non rugueuses et qu'elles interviennent lorsque la distance entre le centre de la particule et le centre de la molécule est égale au rayon  $a$  de la particule. Ceci est dû au fait que le diamètre de la molécule est négligeable devant celui de la particule.

On aura donc une collision lorsque le centre de la molécule se situera à l'intérieur de la sphère d'élément de surface  $d\omega = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Pour qu'une particule puisse entrer en contact avec la particule pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , il faut qu'elle soit dans le volume cylindrique ayant  $(v_r + V_0 \cos \theta - u_r) \delta t$  pour côté et la surface d'élément  $d\omega$  pour base, avec  $v_r + V_0$

$\cos \theta - u_r > 0$  ( annexe 2.2 ). En se plaçant dans un repère lié à la particule, la vitesse normale de la molécule avant le choc est  $v_r + V_0 \cos \theta - u_r$  (la vitesse de la particule est alors nulle) et la vitesse de la particule après le choc sera  $\frac{2m}{m' + m} (v_r + V_0 \cos \theta - u_r)$  (en considérant un choc unidimensionnel). L'impulsion communiquée à la particule (ou la quantité de mouvement gagnée) sera :

$$J = \frac{2m' m}{m' + m} (v_r + V_0 \cos \theta - u_r)$$

la force exercée sur la particule par la différence de vitesse macroscopique moyenne  $V_0$  entre la particule et l'écoulement sera :

$$F = -\frac{8}{3} a^2 V_0 n \sqrt{\frac{\pi m' m}{h(m' + m)}}$$

le gaz et la particule étant à la même température, la constante  $h$  sera identique.

Et si  $m' \gg m$  ( ce qui est notre cas ) , on a

$$F = -\frac{8}{3} a^2 V_0 n \sqrt{\frac{\pi m}{h}}$$

Puisque  $h = \frac{1}{2 m r T_\infty}$  et  $\rho_\infty = n m$ , on obtient :

$$F = -\frac{8}{3} a^2 V_0 \rho_\infty \sqrt{2 \pi r T_\infty}$$

Dans le cas où la particule est petite par rapport au libre parcours moléculaire moyen  $\lambda = \frac{\mu}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2 r T_\infty}}$  (Régime Moléculaire Libre), on retrouve exactement la même expression de la force que celle obtenue grâce à ( 4.23 ), pour  $\sigma = \sigma' = 0$  (le terme en  $S^2$  étant négligeable ).

Dans le cas du régime de glissement, Cunningham considère que si la particule se déplace à la vitesse  $V$ , le gaz à la paroi de la particule sera entraîné à la vitesse  $k V$ . Il faudra alors utiliser pour  $V_0$  la différence de vitesse entre la particule et la molécules  $V - kV$  ( vitesse de glissement ). La force exercée sur la particule sera donc :

$$F = \frac{8}{3} a^2 (V - kV) \rho_\infty \sqrt{2\pi r T_\infty}$$

D'autre part, si l'on utilise la formule de Stokes pour déterminer la force à appliquer à la paroi pour maintenir le fluide à la paroi à la vitesse  $kV$ , on trouve :

$$F = -6\pi\mu a kV$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$F = -6\pi\mu a kV \quad \text{avec} \quad k = \left[1 + \frac{9\lambda}{4a}\right]^{-1} \quad (4.24)$$

$$\lambda = \frac{\mu}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2RT_\infty}}$$

### Remarques :

1. Cette expression a souvent été utilisée mais pas toujours avec le bon coefficient. Cette imprécision peut s'expliquer par la difficulté de donner une définition quantitative du libre parcours moléculaire moyen.
2. Lorsque le rayon  $a$  de la particule devient petit, on aura une accélération de la particule qui dépendra de l'inverse du rayon (comme en Régime Moléculaire Libre) au lieu de l'inverse du carré du rayon.
3. Cette expression ne convient que pour les faibles vitesses. En effet, la formule de Stokes ne peut s'appliquer que pour de très faibles nombres de Reynolds ( $Re \ll 1$ ), et l'erreur de l'intégration n'est faible que pour des valeurs de vitesses peu élevées.

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + \alpha Re^\beta)$$

$$\text{avec } \alpha = 0.15 \text{ et } \beta = 0.687$$

qui a l'avantage, par rapport à celle d'Oseen [22], de ne pas diverger quand le nombre de Reynolds devient grand car  $\beta < 1$ .

On va appliquer le même raisonnement que Cunningham, c'est-à-dire que l'on va supposer que la force appliquée à la particule pourra être exprimée de deux manières différentes. La première expression vient de la loi en continu utilisée avec la vitesse  $kV$ .

$$F = -6\pi\mu a kV (1 + \alpha Re^\beta) \quad ; \quad \text{ou} \quad Re = \frac{2\rho_\infty kVa}{\mu}$$

## 4.5 Loi de traînée pour les écoulement supersoniques et hypersoniques.

### 4.5.1 Introduction

Les difficultés liées au calcul de la traînée d'une particule en écoulement supersonique ou hypersonique vont être essentiellement au nombre de deux. Premièrement, les vitesses considérées, mêmes si elles sont relatives, pourront être ponctuellement assez élevées. Deuxièmement, les nombres de Knudsen relatifs à la particule risquent d'être voisins à 1.

Un problème supplémentaire va résider dans le fait que ces deux difficultés seront ici présentes en mêmes temps, et qu'un modèle de traînée devra donc prendre en compte la totalité des domaines de vitesses et de régimes d'écoulement.

On va dans un premier temps, modifier la loi de traînée pour le régime de glissement, en l'étendant à des vitesses plus élevées. On verra que, quand le nombre de Knudsen augmente, elle devient alors voisine de la loi de traînée en Régime Moléculaire Libre. On la modifiera ensuite une seconde fois, grâce à une interpolation, pour qu'elle devient valable quelque soit le régime d'écoulement.

### 4.5.2 Extension aux vitesses élevées de la loi de traînée en régime de glissement.

L'idée de départ est de reprendre la méthode de Cunningham [15], pour obtenir une loi utilisable aux vitesses. Il va falloir tenir compte de deux problèmes différents. Tout d'abord la loi en régime continu devra accepter de grands nombres de Reynolds, ce qui n'était pas le cas pour la loi de Stokes[6], utilisée par Cunningham. Ensuite il faudra intégrer au calcul la correction apportée précédemment.

On va partir de la formulation proposée par Schiller et Nauman [16], pour le coefficient de traînée, utilisée pour le suivi de particules dans les écoulements supersoniques par Walsh [17], et Carlson et Hoglund [18].

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + \alpha Re^\beta) \quad \text{avec } \alpha = 0.15 \quad \text{et} \quad \beta = 0.687$$

qui a l'avantage, par rapport à celle d'Oseen [22], de ne pas diverger quand le nombre de Reynolds devient grand car  $\beta < 1$ .

On va appliquer le même raisonnement que Cunningham, c'est-à-dire que l'on va supposer que la force appliquée à la particule pourra être exprimée de deux manières différentes. La première expression vient de la loi en continu utilisée avec la vitesse  $kV$  :

$$F = -6\pi\mu a kV (1 + \alpha Re^\beta) \quad ; \quad \text{où:} \quad Re = \frac{2\rho_\infty kVa}{\mu}$$

La deuxième, vient de la loi (4.24) prenant en compte la différence de vitesse  $V - kV$  entre la particule et le fluide à la paroi. On multipliera à cette expression le coefficient correcteur  $\varepsilon'(S')$ , où  $S' = (1-k)S$  est basé sur cette différence. Ceci donne :

$$F = -\frac{8}{3} a^2 \rho_\infty \sqrt{2 \pi R T_\infty} (V - kV) \varepsilon'(S')$$

Si on exprime ces relations en fonction du nombre de Knudsen

$$Kn = \frac{\lambda}{2a} = \frac{\mu}{2\rho_\infty a} \sqrt{\frac{\pi}{2RT_\infty}} \quad \text{et de } S = \frac{V}{\sqrt{2RT_\infty}}, \text{ on obtient en les égalant :} \quad (4.27)$$

$$k = 1 - \frac{9}{2} k Kn \left[ 1 + \alpha \left[ S \sqrt{\pi} \frac{k}{Kn} \right]^\beta \right] \frac{1}{\varepsilon'(S')} = f(k, Kn) \quad (4.25)$$

Pour que ce coefficient existe, on doit avoir :

$$\lim_{Kn \rightarrow 0} k = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{S \rightarrow 0} k = \left[ 1 + \frac{9}{2} Kn \right]^{-1} \quad (\text{coefficient de Cunningham [15]}).$$

le coefficient  $k$  doit être solution de l'équation :

$$g(k) = a_1 k^{\beta+1} + a_2 k - 1 = 0 \quad (4.26)$$

$$\text{avec } a_1(k) = \frac{9}{2} \alpha \frac{Kn}{\varepsilon'(S')} \left[ \frac{S \sqrt{\pi}}{Kn} \right]^\beta = \frac{9}{2} \alpha \frac{M}{\varepsilon'(S')} Re^{\beta-1}$$

$$a_2(k) = 1 + \frac{9}{2} \frac{Kn}{\varepsilon'(S')} = 1 + \frac{9}{2 \varepsilon'(S')} + \frac{M}{Re} \sqrt{\frac{\gamma \pi}{2}}$$

$$\varepsilon'(S') = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{S'} (1 + S'^2) \operatorname{erf}(S') + \frac{e^{-S'^2}}{4}$$

$$S' = (1-k) M \sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

Cette équation se résout numériquement ( par exemple par la méthode de dichotomie ) de façon très simple. En effet , il n'existe qu'une racine entre 0 et 1 ( limites de  $k$  ) car  $g'(k) > 0$  et  $g(0) = -1 < 0$ ,  $g(1) = a_1 + a_2 - 1 > 0$ . Ce coefficient, contrairement à celui de Cunningham, dépend de la vitesse de l'écoulement.



On peut voir l'évolution de  $k$  ( par rapport au coefficient  $k_c$  de Cunningham ) en fonction du nombre de Knudsen pour plusieurs valeurs de  $S$  dans la figure 4.2, on constate que lorsque la vitesse est faible les deux coefficients sont égaux. Par contre, pour les vitesses élevées, le glissement se fera sentir plus loin dans le régime continu.

On aura alors une force appliquée à la particule en régime de glissement, valable pour des vitesses d'écoulement élevées. Sa valeur est :

$$F_g = -3\pi^{3/2} S \frac{k\mu^2}{\rho_\infty Kn} \left[ 1 + \alpha \left[ S\sqrt{\pi} \frac{k}{Kn} \right]^\beta \right] \quad (4.27)$$

$$\text{où } F_g = -6\pi\mu a k V \left[ 1 + \alpha (k Re)^\beta \right] \quad \text{où } Re = \frac{2\rho_\infty a V}{\mu}$$

Cette expression correspond au suivi d'une particule en régime de glissement. On va essayer de l'entendre au Régime Moléculaire Libre et par interpolation au régime de transition.

#### 4.5.3 Extension au Régime Moléculaire Libre.

Lorsque le nombre de Knudsen tend vers l'infini, on voit que le coefficient  $k$  tend vers  $\frac{2}{9} \frac{\varepsilon'(S')}{Kn}$ . Si  $S$ , donc  $S'$  est faible,  $\varepsilon'(S') \sim 1$ . On aura alors une force de glissement :

$$F_g \approx -\frac{2}{3} \pi^{3/2} \left[ \frac{\mu}{Kn} \right]^2 \frac{S}{\rho_\infty} \quad (4.28)$$

Or, on a vu que quand  $S$  tendait vers 0 l'expression de la force exercée sur la particule en Régime Moléculaire Libre se simplifiait notablement :

$$F_m \approx -\frac{\pi^2}{8} \varphi \left[ \frac{\mu}{Kn} \right]^2 \frac{S}{\rho_\infty} \quad (4.29)$$

On s'aperçoit alors que quand  $Kn$  est élevé et  $S$  est faible les deux forces dépendent linéairement l'une de l'autre :  $F_m \approx \zeta F_g$  où  $\zeta = \frac{3\varphi}{16} \sqrt{\pi}$ . On va donc effectuer une modification de la loi de suivi en régime de glissement en la multipliant par une fonction du nombre de Knudsen  $\zeta(Kn)$ . On devra avoir selon Tedeschi [6] :

$$\lim_{Kn \rightarrow 0} \zeta(Kn) = 1$$

$$\lim_{Kn \rightarrow +\infty} \zeta(Kn) = \zeta$$

Pour faire cette interpolation, nous choisisons  $\xi(Kn) = \mu_1 + \mu_2 \text{th} [ f(Kn) ]$ , ( la tangente hyperbolique permet le respect des limites inférieures et supérieures ),  $\mu_1$  et  $\mu_2$  étant déterminés grâce aux conditions aux limites ci-dessus. La fonction  $f(Kn)$  doit permettre une bonne prise en compte du paramètre  $Kn$ . En effet, la transition entre les différents régimes ne dépend pas linéairement de  $Kn$  mais plutôt de son logarithme népérien :

Régime	Glissement et continu	$0 < Kn < 0.15$	$-\infty < \ln(Kn) < -1.9$
	Transition	$0.15 < Kn < 4.5$	$-1.9 < \ln(Kn) < 1.5$
	Moléculaire Libre	$4.5 < Kn < +\infty$	$1.5 < \ln(Kn) < +\infty$

C'est pourquoi on écrit  $f(Kn) = \lambda_1 \ln(\lambda_2 Kn)$ . Ceci nous donne :

$$\text{th}[\lambda_1 \ln(\lambda_2 Kn)] = \frac{(\lambda_2 Kn)^{2\lambda_1} - 1}{(\lambda_2 Kn)^{2\lambda_1} + 1}$$

on aura donc : 
$$\xi(Kn) = \frac{\zeta + 1}{2} + \frac{\zeta - 1}{2} \frac{(\lambda_2 Kn)^{2\lambda_1} - 1}{(\lambda_2 Kn)^{2\lambda_1} + 1} \quad (4.30)$$

Les valeurs numériques telles qu'en limite de Régime Moléculaire Libre  $\xi(Kn) = \zeta = 1.353$  ( pour  $\sigma = \sigma' = 0.9$  ) et en limite de régime de glissement  $\xi(Kn) = 1$  à 2 % près donnent :

$$\xi(Kn) = 1.177 + 0.177 \frac{3.66 Kn^{2.16} - 1}{3.66 Kn^{2.16} + 1} = 1.177 + 0.177 \frac{8.58 \left[ \frac{M}{Re} \right]^{2.16} - 1}{8.58 \left[ \frac{M}{Re} \right]^{2.16} + 1}$$

On obtient ainsi grâce à (4.27) et (4.30) la loi de suivi d'une particule dans un écoulement supersonique, prenant en compte tout les régimes d'écoulement et valable pour  $Re < 200$  environ. Son expression est :

$$F = \xi(Kn) F_g(S,Kn) \quad (4.31)$$

Les figures 4.3, 4.4 , 4.5 , montrent l'évolution de plusieurs expressions de forces ( divisées par la force de Stokes  $F = -6 \pi \mu a V$  ) en fonction du nombre de Knudsen, pour plusieurs valeurs de  $S$ . Pour pouvoir les commenter, il convient de se rappeler que  $Kn \sim \frac{M}{Re}$  et  $S \sim M$ . C'est-à-dire qu'à  $S$  constant, quand  $Kn$  tend vers 0,  $Re$  tend vers l'infini.

Ces figures nous montrent, les limites des autres lois. Celle en Régime Moléculaire Libre diverge rapidement en régime continu. Celle de Cunningham a tendance a sous-estimer la force exercée sur la particule en Régime Moléculaire Libre ainsi que lorsque  $Re$  augmente. Celle de Schiller-Nauman diverge quand le nombre de Knudsen augmente. Par contre l'expression d'Henderson (2.62) réalise une bonne interpolation. Elle est proche de l'expression de Tedeschi pour  $S$  faible, excepté aux alentours de  $Kn = 0.2$  où elle donne une force un peu plus élevée. Le mouvement de la particule se faisant à  $Kn$  fixé en aval du choc, cette différence peut engendrer une certaine modification du comportement. Pour  $S$  grand, la loi de Henderson donne une force nettement supérieure à celle obtenues grâce à Schiller et Nauman où Tedeschi en régime continu et à la force en Régime Moléculaire Libre.

On peut constater que l'expression de Tedeschi rejoint très bien la loi en Régime Moléculaire Libre quand  $Kn$  devient grand. En régime continu l'expression de Tedeschi tend vers l'expression de Schiller et Nauman, mais elle sous-estimera la force quand  $S$  devient grand (  $S$  de l'ordre de 1 ). Ceci provient du fait que l'inertie est prise en compte par Schiller et Nauman ( au moyen du Nombre de Reynolds ), mais la compressibilité ne l'est pas. Or bien qu'en Régime Moléculaire Libre celle-ci ne joue aucun rôle, ce n'est pas le cas en régime continu.

Le phénomène le plus important ici est celui lié au nombre de Knudsen, la gamme entière de régime pouvant être couverte suivant la taille des particules et les conditions d'écoulement. Les effets dus à la compressibilité et à l'inertie joueront un rôle moindre car, d'une part, les vitesses relatives induisent des nombres de Mach et de Reynolds pas trop élevés et , d'autre part, ceux-ci diminueront assez rapidement en aval du choc.

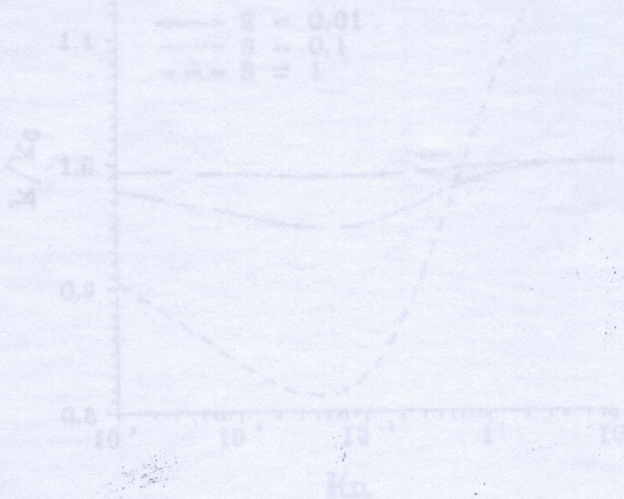


Figure 4.3 : Comparaison des coefficients  $k$  pour plusieurs valeurs de  $S$

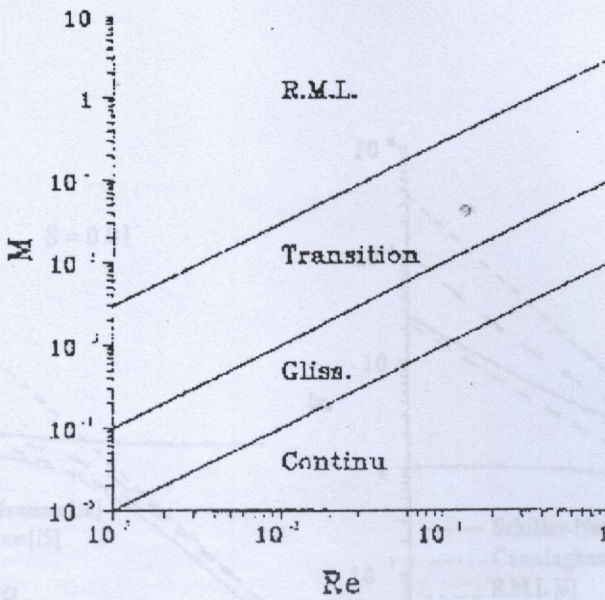
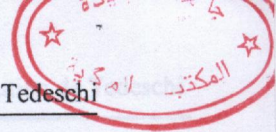


Figure 4.1 : Classification des régimes d'écoulement en fonction du  $Re$  et  $M$  ( relatifs )

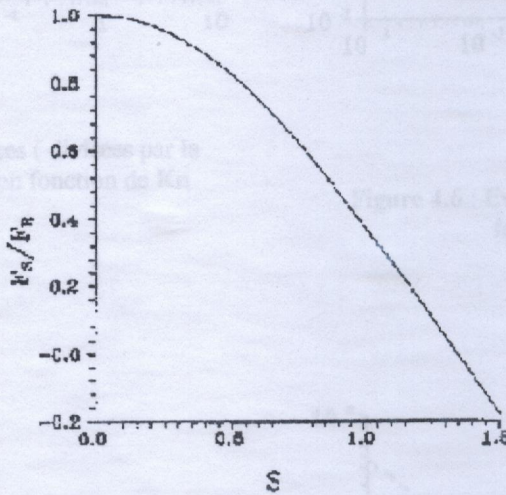


Figure 4.2 : Comparaison entre la loi en R.M.L et la loi simplifiée

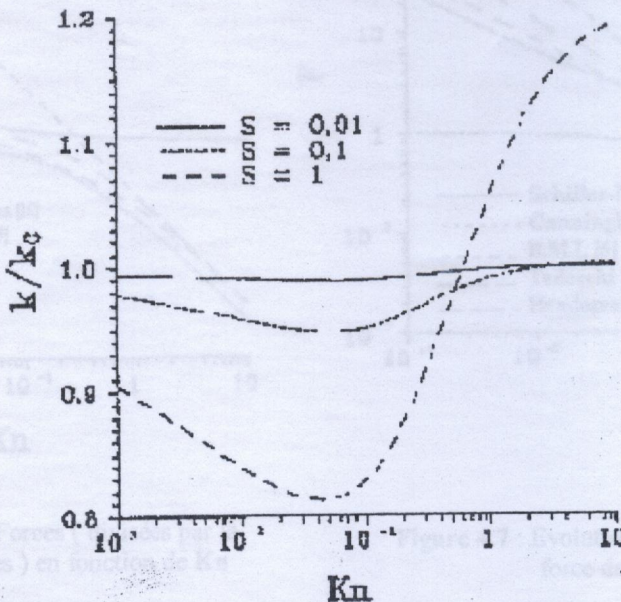


Figure 4.3 : Comparaison des coefficients  $k$  pour plusieurs valeurs de  $S$

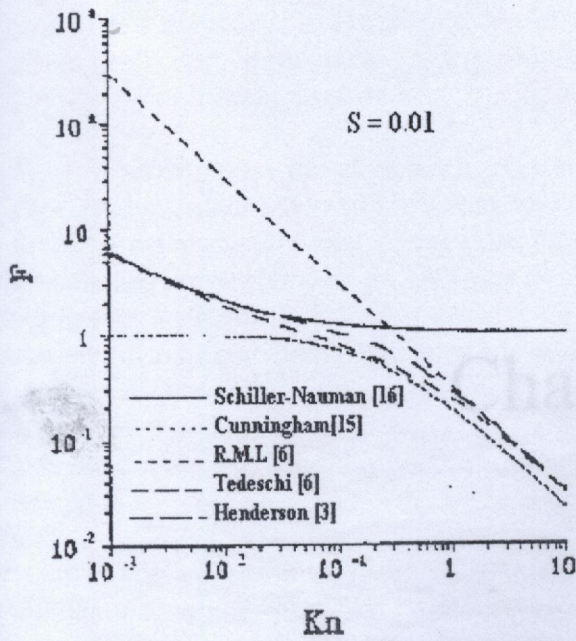


Figure 4.4 : Evolution des Forces ( divisées par la force de Stokes ) en fonction de Kn

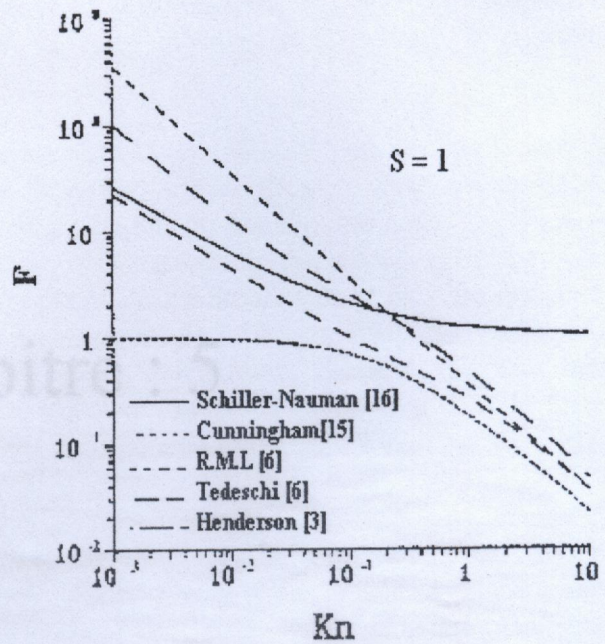


Figure 4.6 : Evolution des Forces ( divisées par la force de Stokes ) en fonction de Kn

Méthode de calcul et discussions

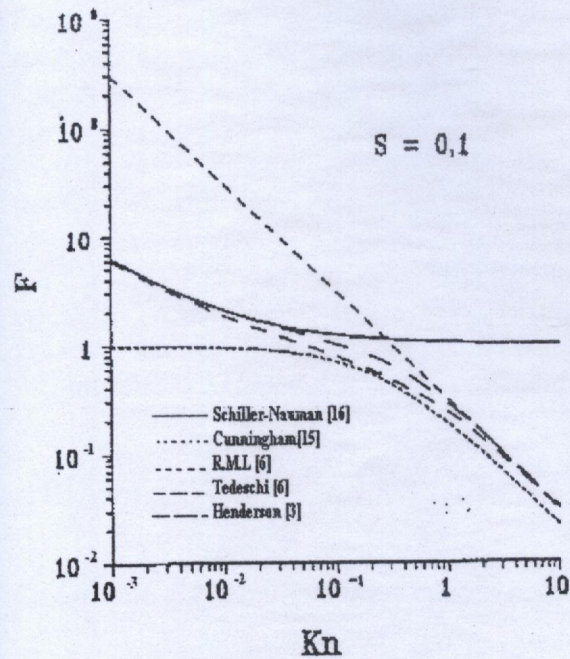


Figure 4.5 : Evolution des Forces ( divisées par la force de Stokes ) en fonction de Kn

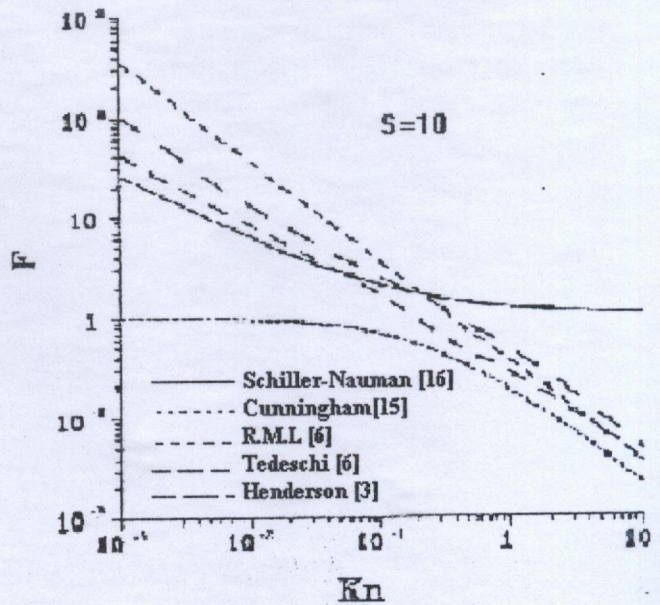


Figure 4.7 : Evolution des Forces ( divisées par la force de Stokes ) en fonction de Kn

### 5.1 Introduction.

On a vu dans le chapitre 4, quelle était la loi à utiliser pour le calcul du mouvement d'une particule en écoulement supersonique. Il reste maintenant à préciser le contexte physique d'utilisation de cette loi.

Tout d'abord, avant de chercher à connaître les vitesses des particules en aval de l'onde de choc et dans quelle mesure elles sont voisines de celles de l'écoulement, il est nécessaire de savoir si ces particules sont correctement entraînées en amont. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si elles présentent déjà un décalage de vitesse, cela provoquera des erreurs de mesure non négligeables. Ensuite, il faudra prendre en compte la spécificité de l'onde de choc qui n'est pas une discontinuité mais une zone dans laquelle existent de forts gradients de différentes caractéristiques physiques (pression, température, vitesse et viscosité dans le cas d'un gaz). Elle dépend de la température, la viscosité jouant un grand rôle dans la force exercée sur une sphère, on essaiera de déterminer son ordre de grandeur à l'intérieur de l'onde de choc.

Dans le cas où elle y engendrerait des valeurs très importantes, cela risquerait de modifier le mouvement d'une particule à la traversée du choc. On présentera une évolution des caractéristiques physiques de l'écoulement à l'intérieur de l'onde. Une fois celles-ci connues, on les utilisera pour calculer la vitesse d'une particule à la traversée d'une onde de choc non discontinue, et comparer les vitesses obtenues en aval du choc avec celles obtenues en ne considérant qu'une simple discontinuité. On déterminera la force due au gradient de masse volumique dans la zone à forts gradients, on pourra alors proposer une analogie avec le milieu fluide à ce gradient. Si la force due aux gradients de pression et de viscosité, on pourra ainsi conclure sur le bien-fondé de l'hypothèse consistant à négliger l'épaisseur de la zone à forts gradients. Pour finir, on montrera comment ramener le problème de la traversée d'une onde de choc bidimensionnelle à un problème unidimensionnel. Pour cela, on utilisera les composantes normales des vitesses.

## Méthode de calcul et discussions

### 5.2 Calcul numérique.

Les calculs sont effectués sur un compatible PC, le langage de programmation étant le Turbo-Pascal version 7.1. Le programme de calcul de la vitesse des particules ne présente aucune difficulté majeure. L'équation ( 4.26 ) est résolue grâce à la méthode de dichotomie, la fonction d'erreur est calculée par la méthode de Simpson :

$$\int f(t) dt = \frac{\Delta t}{3} \left[ f(t_0) + f(t_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(t_{2i-1}) \right] + O(\Delta t)^4 \quad (n \text{ pair})$$

La formule d'Adams sera utilisée pour résoudre l'équation différentielle  $\frac{df(t)}{dt} = g(t)$ .

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + \frac{\Delta t}{12} \left[ 23g(t_i) - 16g(t_{i-1}) + 5g(t_{i-2}) \right] + O(\Delta t)^4$$

avec la condition initiale ; quand  $t=0$ ,  $v(t) = U_1$  (la valeur de la vitesse en amont du choc)

## 5.1 Introduction.

On a vu dans le chapitre 4, quelle était la loi à utiliser pour le calcul du mouvement d'une particule en écoulement supersonique. Il reste maintenant à préciser le contexte physique d'utilisation de cette loi.

Tout d'abord, avant de chercher à connaître les vitesses des particules en aval de l'onde de choc et dans quelle mesure elles sont voisines de celles de l'écoulement, il est nécessaire de savoir si ces particules sont correctement entraînées en amont. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si elles présentent déjà un décalage de vitesse, cela provoquera des erreurs de mesure non négligeables. Ensuite, il faudra prendre en compte la spécificité de l'onde de choc qui n'est pas une discontinuité mais une zone mince où apparaissent de forts gradients de différentes caractéristiques physiques ( pression, masse volumique, température, vitesse et viscosité dans le cas où elle dépend de la température ). La viscosité jouant un grand rôle dans la force exercée sur une sphère, on essaiera de déterminer son ordre de grandeur à l'intérieur de l'onde de choc.

Dans le cas où elle y atteindrait des valeurs très importantes, cela risquerait de modifier le mouvement d'une particule à la traversée du choc. On présentera une évolution des caractéristiques physiques de l'écoulement à l'intérieur de l'onde. Une fois celles-ci connues, on les utilisera pour calculer la vitesse d'une particule à la traversée d'une onde de choc non discontinue, et comparer les vitesses obtenues en aval du choc avec celles obtenues en ne considérant qu'une simple discontinuité. On déterminera la force due au gradient de masse volumique de l'écoulement à l'intérieur du choc, en proposant une analogie avec le milieu fluide. Ceci nous permettra de juger l'importance relative de la force exercée sur la sphère due à ce gradient et de la force donnée par l'expression de Tedeshi. On fera de même avec la force due aux gradients de pression et de vitesse. on pourra ainsi conclure sur le bien-fondé de l'hypothèse consistant à négliger l'épaisseur de la zone à forts gradients. Pour finir, on montrera comment ramener le problème de la traversée d'une onde de choc bidimensionnelle à un problème unidimensionnel. Pour cela, on utilisera les composantes normales des vitesses.

## 5.2 Calcul numérique.

Les calculs sont effectués sur un compatible PC le langage de programmation étant le Turbo-Pascal version 7.1. Le programme de calcul de la vitesse des particules ne présente aucune difficulté majeure. L'équation ( 4.26 ) est résolue grâce à la méthode de dichotomie, la fonction d'erreur est calculée par la méthode de Simpson :

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t) dt = \frac{\Delta t}{3} \left[ f(t_0) + f(t_n) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(t_i) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \right] + O(\Delta t)^4 \quad (n \text{ pair})$$

La formule d'Adams sera utilisée pour résoudre l'équation différentielle  $\frac{df(t)}{dt} = g(t)$  :

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + \frac{\Delta t}{12} [23g(t_i) - 16g(t_{i-1}) + 5g(t_{i-2})] + O(\Delta t)^4.$$

avec la condition initiale : quand  $t = 0$  ;  $v(t) = U_1$ . ( la valeur de la vitesse en amont du choc )

Où :  $f(t)$  et  $g(t)$  seront respectivement soit la vitesse de la particule  $v(t)$  et son accélération  $\gamma(t) = \frac{F(t)}{m'}$ , soit la position de la particule  $x(t)$  et sa vitesse  $v(t)$ . les valeurs  $F(t_i)$ ,  $F(t_{i-1})$ ,  $F(t_{i-2})$  nécessaires au calcul de  $v(t_{i+1})$  seront respectivement déterminées grâce aux caractéristique physique de l'écoulement aux positions  $x(t_i)$ ,  $x(t_{i-1})$ ,  $x(t_{i-2})$ .

Ce calcul va permettre de valider l'hypothèse de concordance des vitesses de la particule et de l'écoulement en amont de l'onde de choc. On considère que la particule est envoyée dans l'écoulement à la même vitesse que celui-ci, le mouvement est supposé unidimensionnel. Grâce aux relations d'isentropie, on a :

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

$$U = M \sqrt{\gamma R T}$$

et la loi de Sutherland donne :

$$\mu = \mu_r \sqrt{\frac{T}{T_r} \frac{1 + \frac{C}{T_r}}{1 + \frac{C}{T}}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \mu_r &= 1,708 \cdot 10^{-5} \text{ (M.K.S.A)} \\ C &= 120. \\ T_r &= 273^\circ \text{ K.} \end{aligned}$$

### Remarque :

D'après Tedeschi [6], l'élévation de température due à la dissipation visqueuse est trop faible pour être réellement mesurable. Il a supposé que la viscosité à l'intérieur de l'onde de choc garde des valeurs intermédiaires à celles de l'écoulement amont et aval. Ceci est en accord avec le modèle faiblement dissipatif. De plus, il a utilisé une fonction en tangente hyperbolique pour décrire l'évolution de la vitesse dans l'onde de choc.

### 5.3 Modélisation de l'évolution des caractéristiques physiques à l'intérieur de l'onde de choc.

On va considérer ici un écoulement unidimensionnel. Pour pouvoir utiliser convenablement les grandeurs vectorielles on effectuera un changement de repère, à savoir le passage du repère classique (horizontal et vertical) au repère lié à l'onde de choc (normal et tangentiel). Ceci est notamment justifié par le fait que la vitesse tangentielle est conservée à travers le choc, et donc la force et l'accélération tangentielles seront nulles. Ainsi le profil de la vitesse modélisé sera celui de la vitesse normale.



Cette modélisation sera basée sur un profil de vitesse en tangente hyperbolique, fixé par les valeurs amont et aval, ainsi que par l'épaisseur de l'onde de choc. Ceci nous donne :

$$U = b_1 \operatorname{th}(k x) + b_2.$$

Avec :  $b_1 = \frac{U_2 - U_1}{2}$ ,  $b_2 = \frac{U_2 + U_1}{2}$ ,  $k$  paramétrant l'épaisseur du choc.

Si l'on n'a aucun problème au point de vue des valeurs limites de la vitesse, il n'en va pas de même pour l'épaisseur de l'onde de choc. L'estimation  $\delta = \lambda \frac{\sqrt{2rT}}{\Delta U_n}$ , ce qui donne dans des conditions de l'écoulement obtenu expérimentalement une valeur de  $3\mu\text{m}$ . Mais dans une modélisation en tangente hyperbolique les valeurs extrêmes ne seront atteintes qu'à l'infini. C'est pourquoi, en prenant une définition analogue à celle de la couche limite, on considérera qu'en sortie d'onde de choc la différence entre la vitesse modélisée et la vitesse aval sera égale à un centième de la valeur du saut de vitesse :

$$U\left(\frac{\delta}{2}\right) - U_2 = \frac{\Delta U}{100} \quad \text{où } \Delta U = U_1 - U_2.$$

$$b_1 \operatorname{th}\left(k \frac{\delta}{2}\right) + b_2 = 0.01 U_1 + 0.99 U_2$$

On aura :

$$\text{d'où : } k = \frac{2}{\delta} \operatorname{Arg th}\left(\frac{0.01 U_1 + 0.99 U_2 - b_2}{b_1}\right)$$

Cette expression est indépendante des valeurs  $U_1$  et  $U_2$  et donne :  $k = \frac{4.6}{\delta}$ .

L'évolution de la masse volumique sera obtenue aisément grâce à l'équation de continuité  $\operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0$ , qui s'écrit en unidimensionnel  $\rho U = \text{Cst} = \rho_1 U_1$ . On obtient ainsi :

$$\rho = \frac{d}{\operatorname{th}(k x) + c}, \quad \text{avec } c = \frac{b_2}{b_1}, \quad d = \frac{2 \rho_1 U_1}{U_2 - U_1}.$$

En ce qui concerne l'évolution de la pression de l'écoulement, on va utiliser l'équation du mouvement :

$$\rho \operatorname{grad} \frac{U^2}{2} + \operatorname{rot} \vec{U} \wedge \vec{U} = - \operatorname{grad} P + \operatorname{div}(\sigma_v) \quad \text{où } \sigma_v = -\frac{2}{3} \mu \operatorname{tr}(D) I + 2 \mu D.$$

Ce qui donne dans le cas unidimensionnel :

$$\rho_1 U_1 \frac{dU}{dx} = - \frac{dP}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left( \mu \frac{dU}{dx} \right) \quad \text{où : } U \text{ représente la vitesse normale}$$

$x$  représente l'abscisse normale.

On peut intégrer l'équation (5.10), en considérant qu'à l'infini amont  $U = U_1$  et  $P = P_1$  et que les dérivées en  $x$  sont nulles. On obtient l'expression de la pression :

$$P = -\rho_1 U_1 U + \frac{4}{3} \mu \frac{dU}{dx} + P_1 + \rho_1 U_1^2.$$

D'où en utilisant l'expression de la vitesse (5.7) :

$$P = \alpha \operatorname{th}^2(kx) + \beta \operatorname{th}(kx) + \varepsilon \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{2}{3} \mu k (U_2 - U_1).$$

$$\beta = -\rho_1 U_1 \frac{U_2 - U_1}{2}.$$

$$\varepsilon = -\rho_1 U_1 \frac{U_2 + U_1}{2} - \alpha + P_1 + \rho_1 U_1^2.$$

#### 5.4 Influence des gradients de pression, vitesse et masse volumique.

Les effets des gradients à l'intérieur du choc en utilisant les équations de Navier - Stokes pour un milieu continu, alors que le régime d'écoulement autour de la particule est assez raréfié, il aurait fallu effectuer une étude plus exacte, non plus basée sur les équations de Navier-Stokes mais sur la mécanique des gaz raréfiés. En fait Elena [29], a montré que les effets dus aux gradients sont négligeables par rapport à la force prévue par Tedeschi [6], due à la différence de vitesse.

##### 5.4.1 contraintes dues aux gradients de pression et de vitesse.

La force due aux gradients de pression et de vitesse est obtenue grâce à l'intégration sur la surface de la sphère de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses. Les caractéristiques physiques considérées sont celles de l'écoulement libre. L'intégrale sur la sphère de la pression est nulle dans le cas où elle est uniforme, et celle du tenseur des contraintes visqueuses l'est également si le gradient de vitesse est nul. L'expression de la force sur un élément de surface est donnée par :

$$d\vec{F}_{up} = -(P \mathbf{I} - \sigma_v) \vec{n}$$

où :  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identique.

$\vec{n}$  représente le vecteur normal à l'élément de surface, formant un angle  $\varphi$  avec l'axe des  $x$ .

$$\sigma_v = \lambda' \operatorname{tr}(D) \mathbf{I} + 2\mu D = 2\mu \frac{du}{dx} \left[ -\frac{1}{3} \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

On aura :

$$\sigma_v \bar{n} = 2\mu \frac{du}{dx} \left[ -\frac{1}{3} \bar{n} + \cos\varphi \bar{i} \right]$$

$$P \bar{i} \bar{n} = P \bar{n}$$

$\bar{n}$  étant la normale à l'élément de surface.

En projetant sur l'axe des x :

$$\left( d\bar{F}_{up} \right)_x = - \left( P - \frac{4}{3} \mu u' \right) \cos\varphi = - \left( P - \frac{4}{3} \mu u' \right) \frac{x}{a}$$

car  $x = a \cos\varphi$  (origine au centre de la sphère)

Ceci ne représente que la force exercée sur un élément de surface. Il va donc falloir l'intégrer sur la sphère. L'élément de surface est :

$$dS = a^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Or } dx = -a \sin\varphi \, d\varphi \Rightarrow dS = -a \, dx \, d\theta$$

La force exercée sur la particule due aux gradients de pression et de vitesse sera :

$$\left( \bar{F}_{up} \right)_x = F_{up} = -2 \int_{-a}^a \left( P - \frac{4}{3} \mu u' \right) x \, dx.$$

Si on utilise les expressions de la pression et de la vitesse définie précédemment, on obtient :

$$F_{up} = -2 \pi \left\{ \left[ \alpha + \frac{4}{3} \mu b_1 k \right] \int_{-a}^a x \, \text{th}^2(kX) \, dx + \beta \int_{-a}^a x \, \text{th}(kX) \, dx \right\}$$

où  $x$  représente l'abscisse ayant le centre de la sphère comme origine  $X = x + x_p$ ,  $x_p$  désignant la position du centre de la particule dans le repère lié à l'onde de choc.

## 5.5 Expression des vitesses dans les différents repères.

### 5.5.1 Introduction.

On va pouvoir exprimer la vitesse du fluide et la vitesse d'une particule dans différents repères. Si on considère une onde de choc bidimensionnelle, le repère "naturel" sera celui défini par les directions verticales et horizontales. En effet, la vitesse du fluide en amont du choc aura uniquement une composante suivant l'axe des x. De plus, d'après Tedeschi [6], les composantes de la vitesse généralement déterminées grâce à un vélocimétrie laser bidirectionnel en aval du choc seront les composantes verticales et horizontales. Cependant,

on sait que la vitesse tangentielle du fluide (et par conséquent de la particule) est conservée à travers l'onde de choc, et que seule la vitesse normale varie. On va donc pouvoir se ramener au cas d'un choc unidimensionnel, à condition d'utiliser un repère lié au choc, dont les axes seront déterminés par les directions normales et tangentielles.

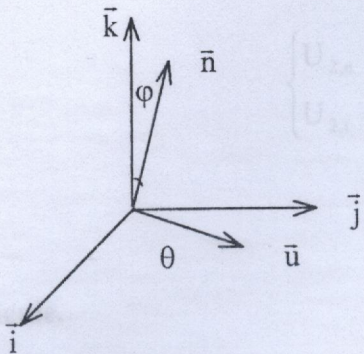
Amont :

aval :

$$\begin{cases} U_{1,x} = U_1 \\ U_{1,y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{2,x} = U_2 \cos \theta \\ U_{2,y} = U_2 \sin \theta \end{cases}$$

5.5.2 Système d'axe .



$$\begin{cases} U_{1,x} = U_1 \sin \beta \\ U_{1,y} = U_1 \cos \beta \end{cases}$$

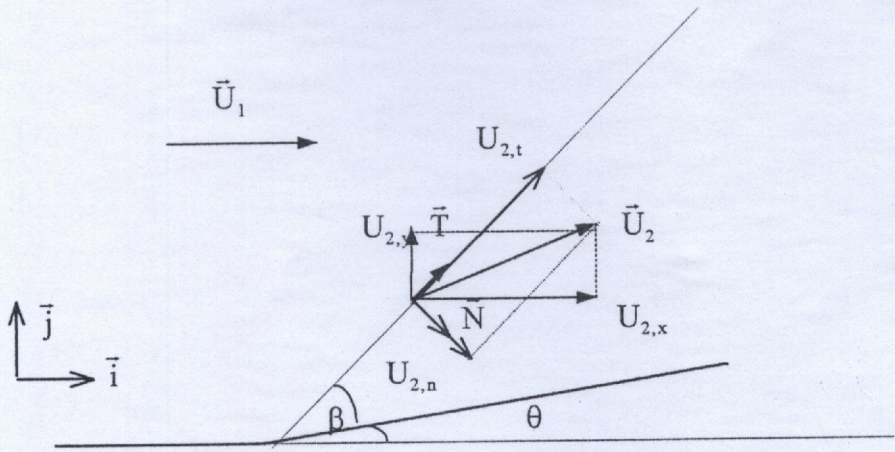
$$\begin{cases} U_{2,x} = U_2 \sin(\beta - \theta) \\ U_{2,y} = U_2 \cos(\beta - \theta) \end{cases}$$

5.5.4 Vitesse de la particule

On a :   
 avant du choc la vitesse de la particule sera identique à celle de l'écoulement.   
 C'est-à-dire que la vitesse tangentielle de la particule sera également conservée à travers l'onde de choc.   
 L'écoulement étant continu, la seule inconnue sera la vitesse normale aval du choc, qui sera déterminée grâce au calcul. On aura :

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sin \beta \vec{i} - \cos \beta \vec{j} \\ \vec{T} &= \cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j} \end{aligned}$$

5.5.3 Vitesse de l'écoulement.



$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= U_{1,x} \vec{i} = U_{1,n} \vec{N} + U_{1,t} \vec{T} \\ \vec{U}_2 &= U_{2,x} \vec{i} + U_{2,y} \vec{j} = U_{2,n} \vec{N} + U_{2,t} \vec{T} \end{aligned}$$

## 5.6 Relevés expérimentaux

Pour chaque résultat expérimental, la vitesse du fluide en amont du choc sera précisée de façon à pouvoir retrouver la vitesse réelle des particules ( grâce au rapport des vitesses ), ainsi que les conditions exactes d'écoulement. L'angle de déviation de l'écoulement est  $\theta = 8^\circ$ , l'angle de l'onde de choc avec la direction horizontale est  $\beta = 32.4^\circ$ . Les caractéristiques physiques de l'écoulement pour les conditions citées ci-dessus sont les suivantes :

### Conditions n° :1

#### Grandeurs réservoirs

$$P_0 = 0.5 \text{ atm.} = 50650 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 303 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_0 = 0.582 \text{ kg/m}^3$$

#### Grandeurs amont

$$P_1 = 4051 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 147 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_1 = 0.096 \text{ kg/m}^3$$

$$M_1 = 2.3$$

$$U_1 = 559.2 \text{ m/s}$$

$$U_{1,n} = 299.6 \text{ m/s}$$

#### Grandeurs aval

$$P_2 = 6512 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 170 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_2 = 0.134 \text{ kg/m}^3$$

$$M_2 = 2$$

$$U_2 = 518.4 \text{ m/s}$$

$$U_{2,n} = 214.2 \text{ m/s}$$

$$U_{2,x} = 513.4 \text{ m/s}$$

$$\mu_2 = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ (S.I.)}$$

### Conditions n° :2

#### Grandeurs réservoirs

$$P_0 = 0.15 \text{ atm.} = 15195 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 303 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_0 = 0.582 \text{ kg/m}^3$$

#### Grandeurs amont

$$P_1 = 1215 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 147 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_1 = 0.029 \text{ kg/m}^3$$

$$M_1 = 2.3$$

$$U_1 = 559.2 \text{ m/s}$$

$$U_{1,n} = 299.6 \text{ m/s}$$

#### Grandeurs aval

$$P_2 = 1954 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 170 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_2 = 0.04 \text{ kg/m}^3$$

$$M_2 = 2$$

$$U_2 = 518.4 \text{ m/s}$$

$$U_{2,n} = 214.2 \text{ m/s}$$

$$U_{2,x} = 513.4 \text{ m/s}$$

$$\mu_2 = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ (S.I.)}$$

### 5.7 Comparaison entre calculs et résultats expérimentaux.

Les figures montrent respectivement la comparaison entre les vitesses  $V_x$  et  $V_y$  et les vitesses calculés grâce à plusieurs lois. Si on utilise l'expression de Tedeschi, les vitesses sont en bon accord. Le terme dû à la compressibilité ne joue ici aucun rôle, le nombre de Mach relatif étant trop faible sur l'ensemble du mouvement. On peut constater par contre que la loi de Stokes n'est plus du tout valable. Si on effectue le calcul avec la loi de Schiller et Nauman (valable pour des nombres de Reynolds assez élevés), on voit que celui-ci coïncide avec celui réalisé avec l'expression de Stokes (valable pour les très petits nombres de Reynolds). Ainsi, la prise en compte des grands nombres de Reynolds (relatifs) n'a ici aucun effet sur le mouvement de la particule à la traversée du choc. La loi de Cunningham, comme celle de Stokes est limitée aux très faibles  $Re$ , mais le régime d'écoulement autour de la particule étant celui de transition ( $\frac{M}{Re} = 0.65$ ), la loi de Stokes valable en continu ne pourra pas s'appliquer, tandis que celle de Cunningham valable en régime de glissement sera plus adéquate. La différence entre les résultats obtenus à l'aide de ces deux lois montre que l'effet le plus important ici sur le mouvement de la particule est dû à la raréfaction. La loi de Henderson donne des résultats très voisins de ceux obtenus à l'aide de Tedeschi.

### 5.8 Interprétation d'un exemple expérimentale.

Des expériences ont été réalisées par Thomas (Allemagne). Il a notamment utilisé des particules de masse volumique voisine de  $4000 \text{ kg/m}^3$  et de diamètre  $d = 0.35 \text{ }\mu\text{m}$ , permettant d'effectuer une comparaison avec des calculs numériques. Les conditions expérimentales sont les suivantes :

**Grandeurs réservoirs      Angle de déviation de l'écoulement      Angle du Choc**

$$P_0 = 97700 \text{ Pa}$$

$$\theta = 14^\circ$$

$$\beta = 45.2^\circ$$

$$T_0 = 295 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_0 = 1.153 \text{ Kg / m}^3$$

**Grandeurs Amont**

**Grandeurs Aval**

$$P_1 = 13549 \text{ Pa}$$

$$P_2 = 27960 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 168 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$T_2 = 208 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_1 = 0.281 \text{ Kg / m}^3$$

$$\rho_2 = 0.467 \text{ Kg / m}^3$$

$$M_1 = 1.95$$

$$M_2 = 1.44$$

$$U_1 = 506 \text{ m / s.}$$

$$U_2 = 416.8 \text{ m / s.}$$

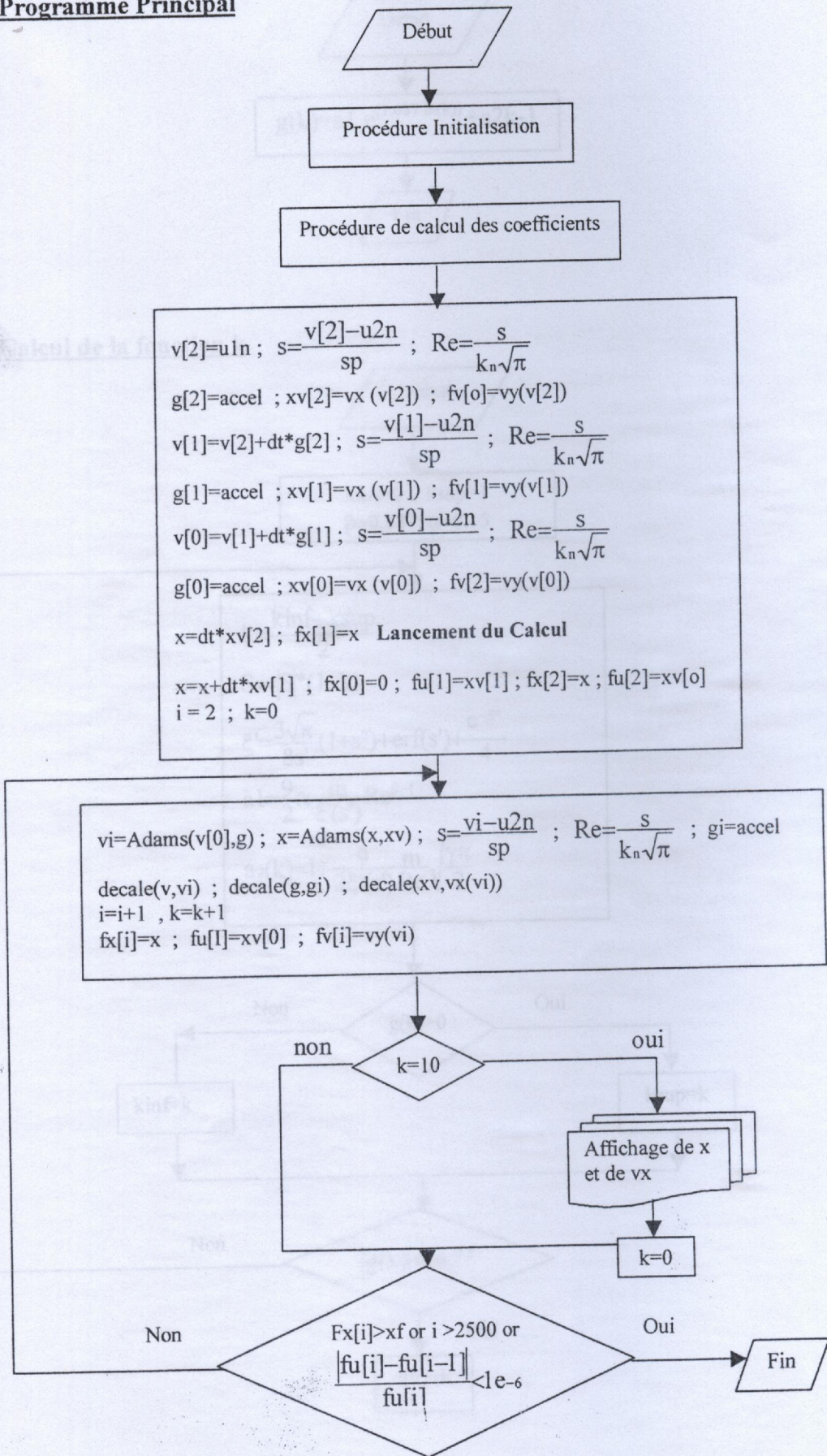
$$U_{2,x} = 404,6 \text{ m / s.}$$

## 5.9 Interprétations

1. Les figures 5.1 & 5.2 montrent les vitesses des particules en aval de l'onde de choc, respectivement  $V_x$  et  $V_y$ , bien que l'allure de ces vitesses sont semblables aux différentes méthodes, à savoir Cunningham, Tedeschi, en Régime Moléculaire Libre, Stokes, Schiller & Nauman et enfin Henderson, mais elles restent différentes (valeurs numériques des vitesses axiales et radiales en aval du choc, épaisseur de l'onde de choc, concavité).
2. Les figures 5.3 & 5.4 montrent une comparaison entre les différentes lois utilisées, bien qu'on ne peut pas, se prononcer sur une loi par rapport à une autre, en raison d'inexistence des relevés expérimentaux, et en prenant en considération les seules relevés donné par Tedeschi [6], son expression coïncide avec l'expérimentale, jusqu'à une distance d'environ 3mm, et au dessus de cette valeur, on ne dispose pas de données, mais néanmoins elle suit sensiblement la loi.
3. Comme précisément dit, les vitesses varient en fonction des diamètres de la particule, ainsi que de sa masse volumique, le diamètre de la particule, doit être compris entre  $0.15\mu\text{m}$  et  $0.5\mu\text{m}$ , alors que sa masse volumique doit être comprise entre  $3500$  et  $4000\text{ kg/m}^3$ . voir figure 5.5 & 5.6.
4. Les figures 5.7 & 7.8 montrent la comparaison entre ces résultats expérimentaux et des calculs numériques. On aura ici un régime de transition autour de la particule. Les vitesses obtenues grâce à l'expression de Tedeschi coïncident raisonnablement avec les points expérimentaux. Les lois de Stokes et Cunningham appellent les mêmes commentaires que précédemment. La loi d'Henderson, bien que proche de Tedeschi, diffère un peu plus que dans les calculs précédents.
5. Dans la plupart des conditions expérimentales, une divergence de la loi en régime moléculaire libre est constaté, elle nécessite par conséquence des conditions d'emploi assez strictes, voir figure 5.9 & 5.10.
6. L'épaisseur d'une onde de choc est généralement de l'ordre d'un 1cm, la figure 5.11 et 5.12 montre les deux cas extrêmes, puisque la loi de stokes donné une épaisseur de l'onde de choc minima de l'ordre de 0.6 cm, alors que la loi de Tedeschi donnée le maxima, environ 2.5 cm.
7. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques effectués grâce à Tedeschi montre un bon comportement de celui-ci, sauf pour les tailles de particules inférieures à 0.3 mm. Le model empirique développé par Henderson donné des résultats identiques. Il semble ainsi que le problème provienne d'une autre raison qu'une mauvaise prédiction théorique.

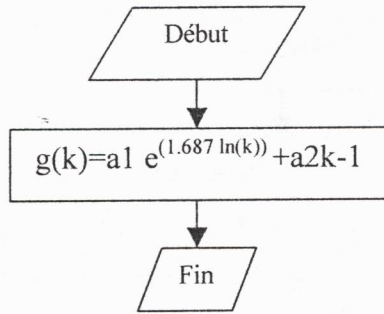
### 5.10 Organigramme

#### Programme Principal

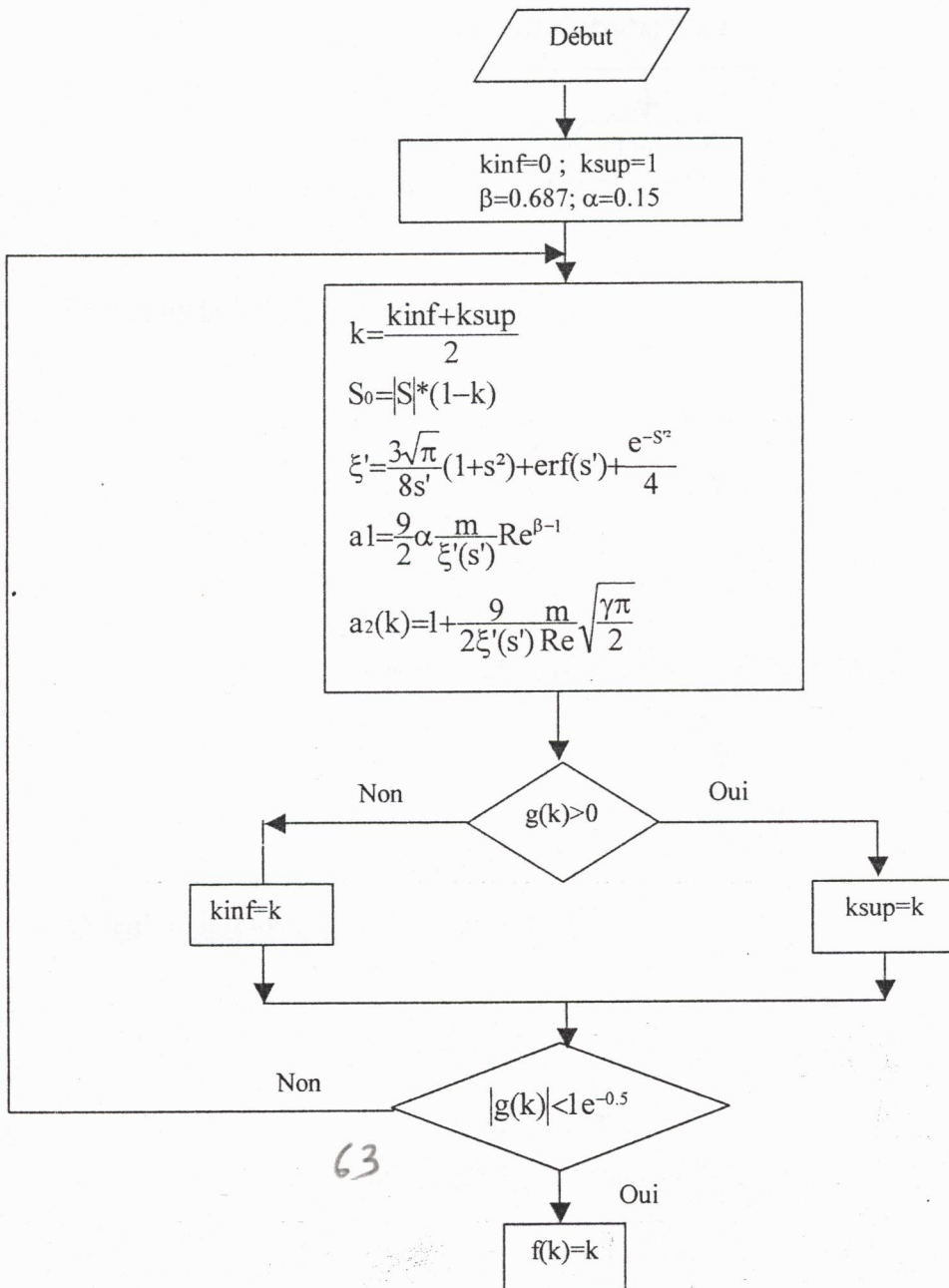




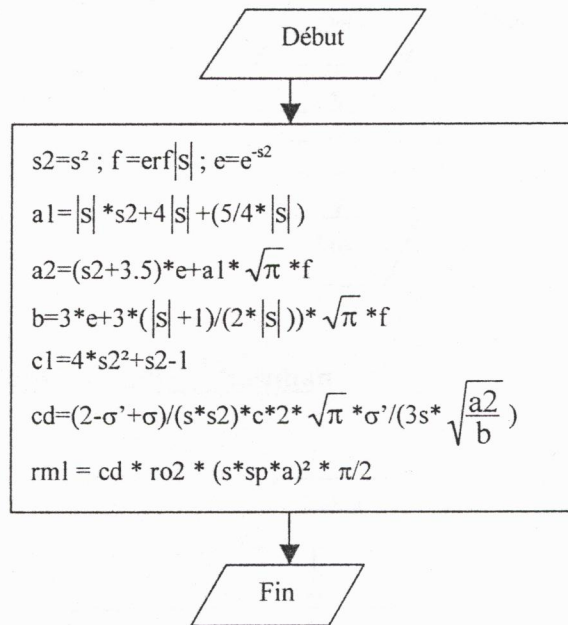
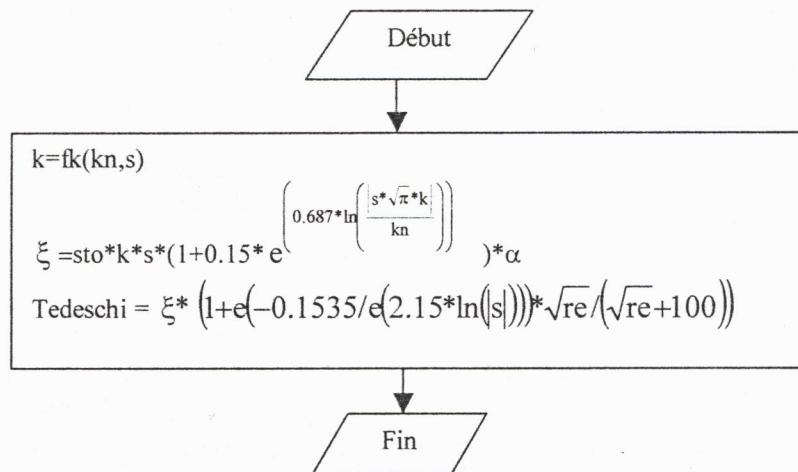
Calcul de la fonction g(k)



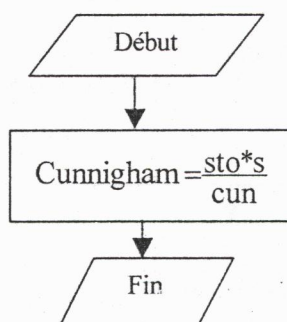
Calcul de la fonction k



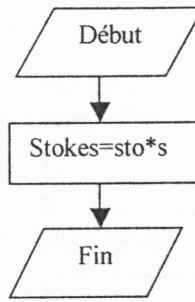
63

Calcul de la Force en RMLCalcul de la Force d'après TedeschiCalcul de la Force d'après Cunnigham

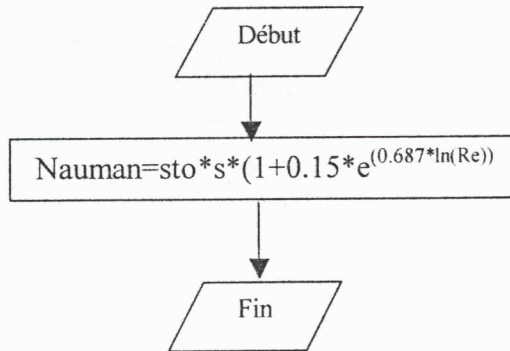
64



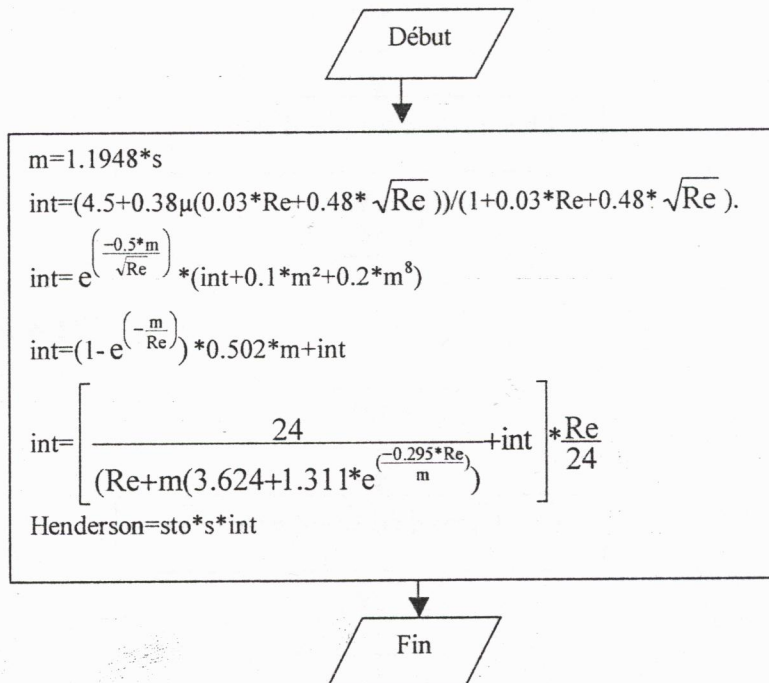
Calcul de la Force d'après Stokes



Calcul de la Forces d'après Schiller - Nauman

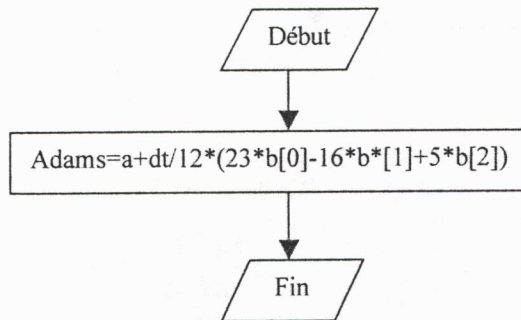


Calcul de la Forces d'après Henderson

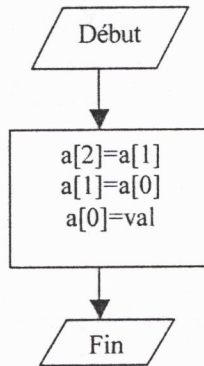


65

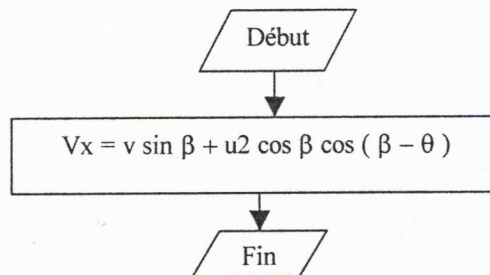
**Fonction Adams pour l'intégration**



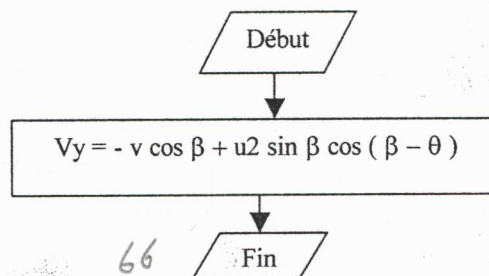
**Procédure Décale**



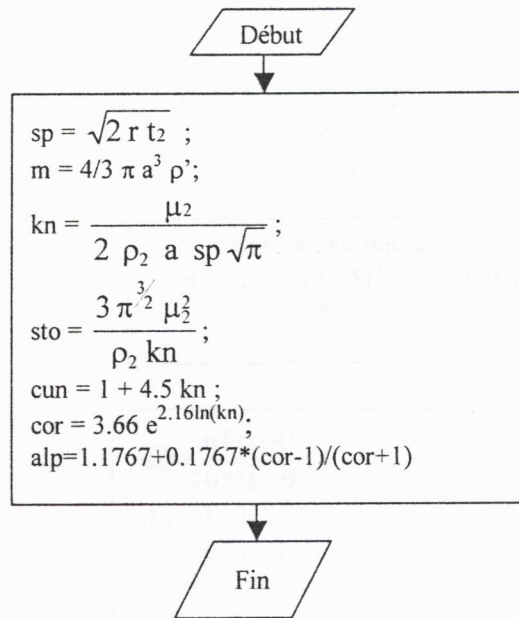
**Calcul de la Vitesse vx**



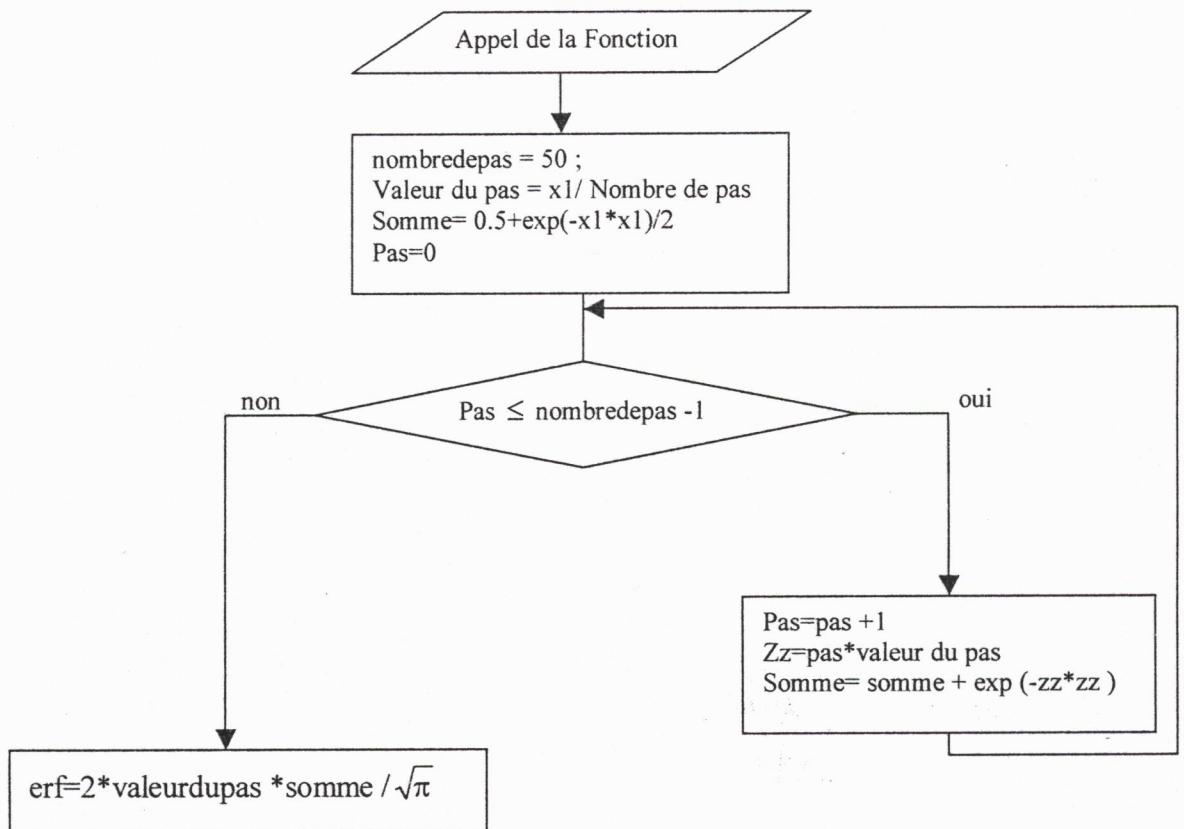
**Calcul de la Vitesse vy**



Procédure de calcul de coefficients

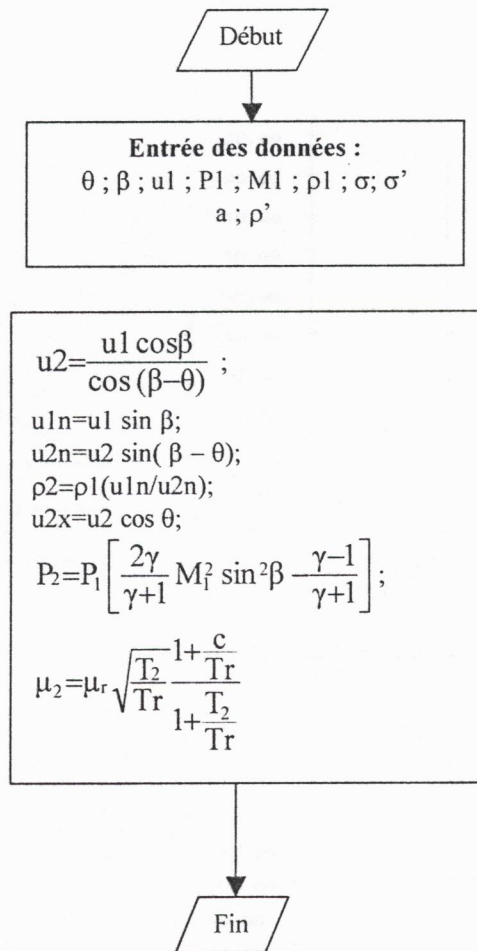


Calcul de la Fonction d'erreur erf





### Procédure Initialisation



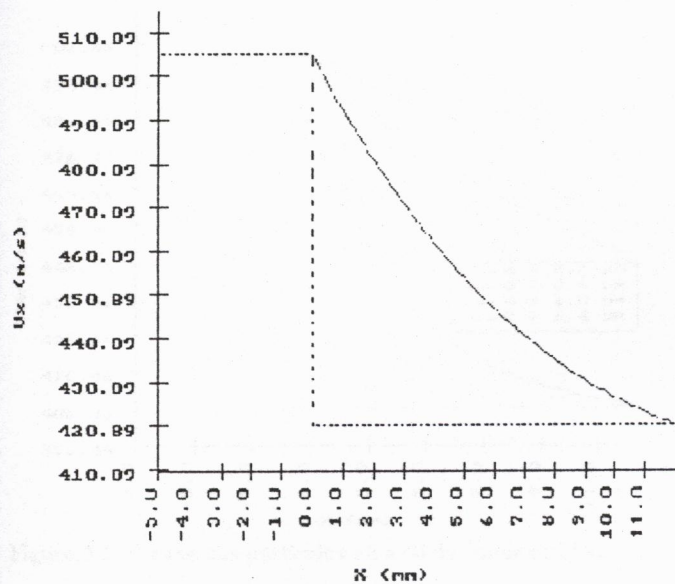


Figure:5.1 vitesse de la particule en aval de l'onde de choc

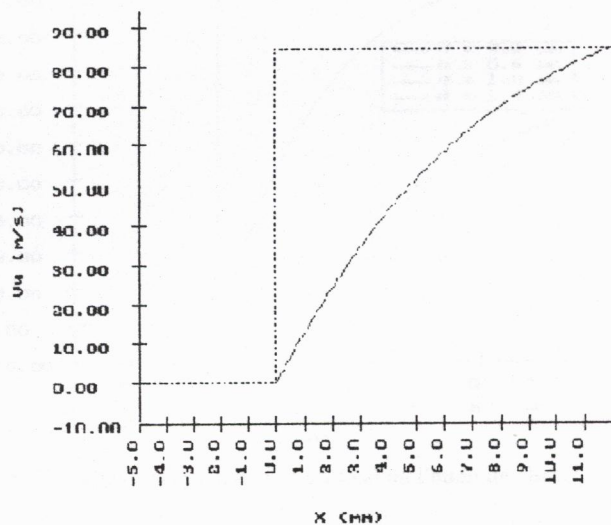


Figure:5.2 vitesse de la particule en aval de l'onde de choc

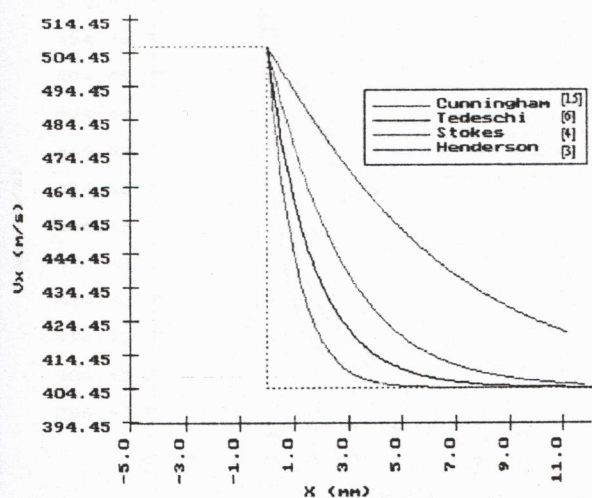


Figure: 5.3 Comparaison entre les différentes lois

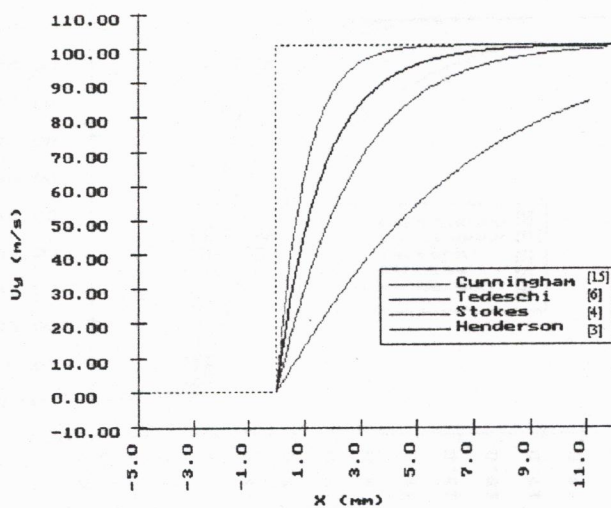


Figure:5.4 Comparaison entre les différentes lois .

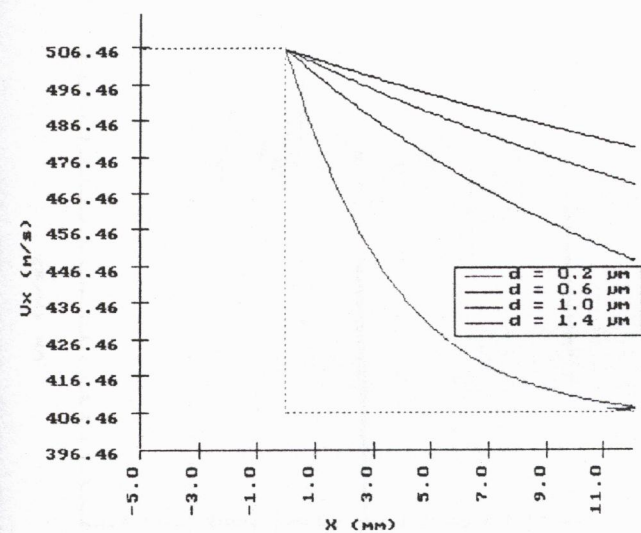


Figure:5.5 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc

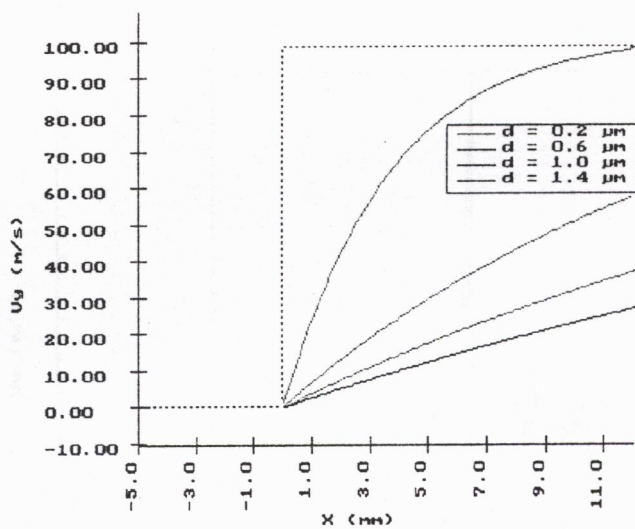


Figure:5.6 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc

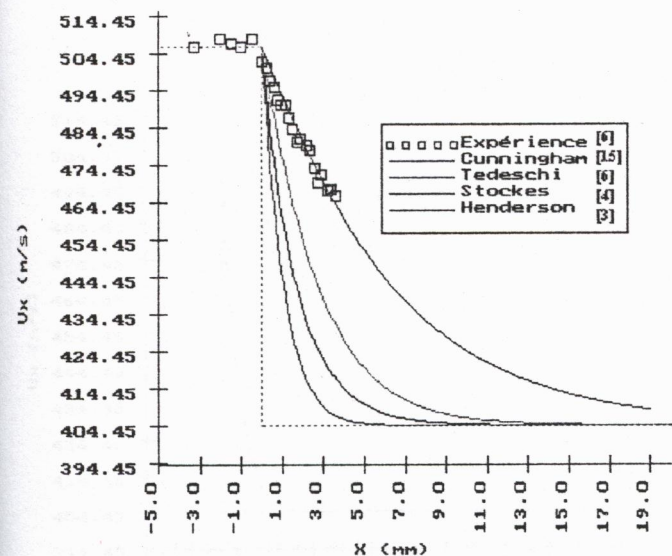


Figure:5.7 Comparaison entre les différentes lois

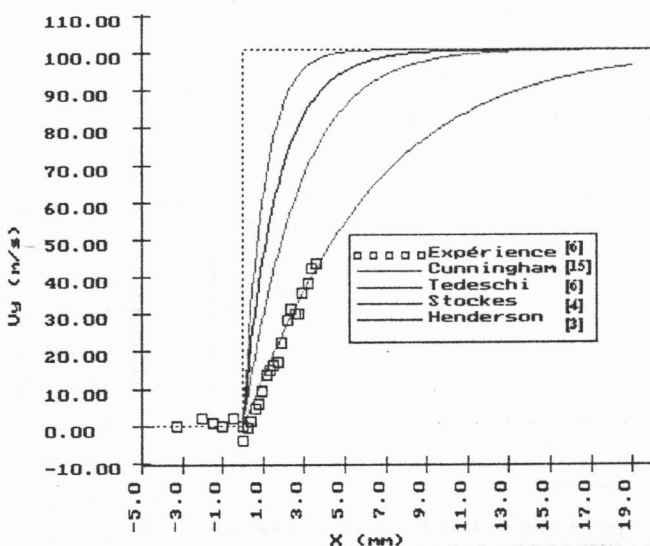


Figure:5.8 Comparaison entre les différentes lois

70



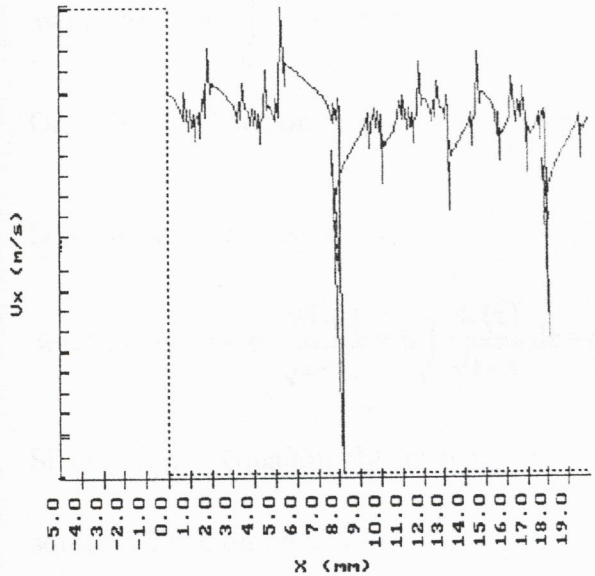


Figure 5.9 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc (divergence de la loi en R.M.L)

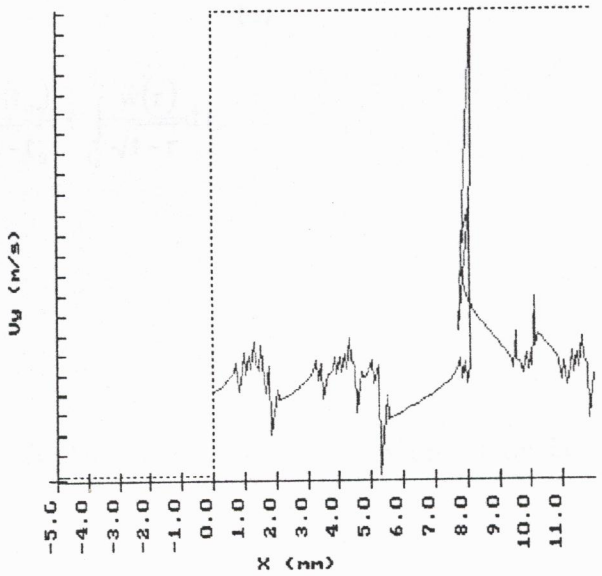


Figure 5.10 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc (divergence de la loi en R.M.L)

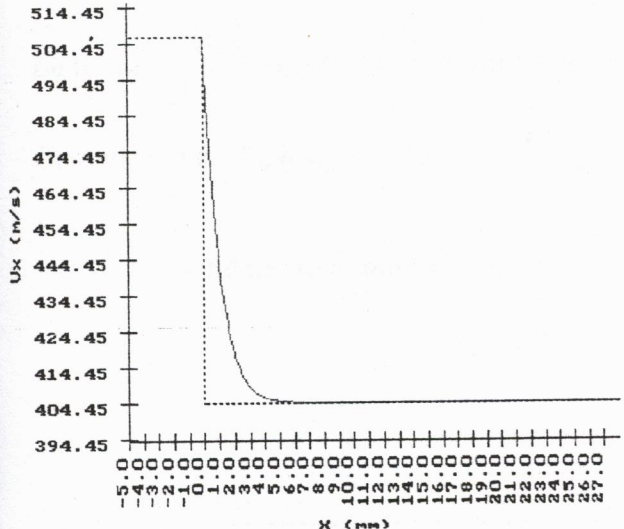


Figure 5.11 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc

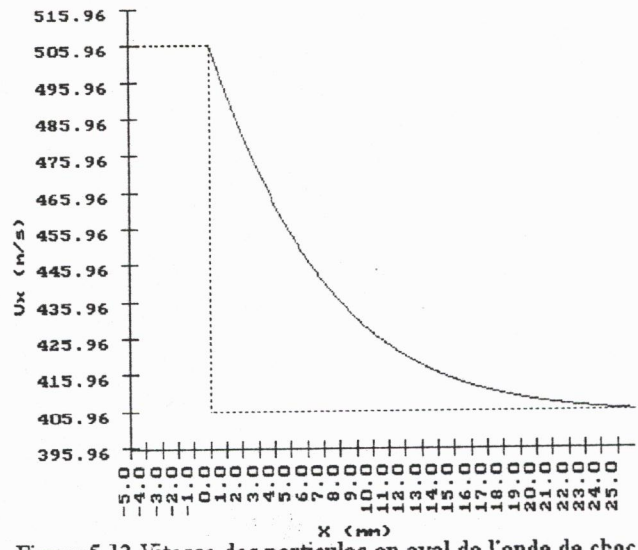


Figure 5.12 Vitesse des particules en aval de l'onde de choc

71

## Annexe :1

## 1.1 Démonstration de la relation (3.2)

En posant  $w = v - u$  et  $\varphi(t) = -(1 - \beta) \dot{u}(t)$ , l'équation (3.1) s'écrit :

$$\dot{w}(t) + \alpha w(t) + b \int_{t_0}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \varphi(t) \quad (a)$$

Or, Tchen [11] démontre que : 
$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{\dot{w}(t_0)}{\sqrt{t-t_0}} + \int_{t_0}^t \frac{\ddot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

D'où, en dérivant l'équation (a) :

$$\ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + b \frac{\dot{w}(t_0)}{\sqrt{t-t_0}} + b \int_{t_0}^t \frac{\ddot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \dot{\varphi}(t) \quad (b)$$

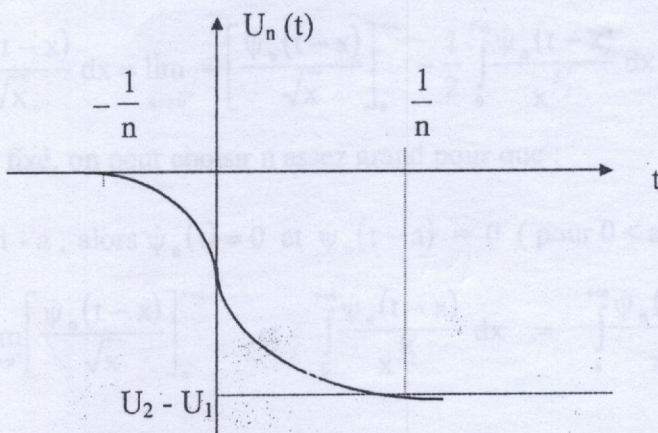
Si l'on écrit l'équation (b) au temps  $x$ , on la multiplie par  $b \frac{dx}{\sqrt{t-x}}$ , on l'intègre et on la soustrait à (b), on obtient :

$$\ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + b \frac{\dot{w}(t_0)}{\sqrt{t-t_0}} - \alpha b \int_{t_0}^t \frac{\dot{w}(x)}{\sqrt{t-x}} dx - \pi b^2 \dot{w}(t) = \dot{\varphi}(t) - b \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi}(x)}{\sqrt{t-x}} dx \quad (c)$$

Or, l'équation (a) donne : 
$$\alpha b \int_{t_0}^t \frac{\dot{w}(x)}{\sqrt{t-x}} dx = \alpha \varphi(t) - \alpha \dot{w}(x) - \alpha^2 w(t)$$

Le terme  $\frac{\dot{w}(t_0)}{\sqrt{t-t_0}}$  est éliminé dans (c) en prenant  $t_0 = -\infty$ .

On obtient ainsi l'équation (3.2).

1.2 Schéma de la fonction  $u_n(t)$ .

### 1.3 Etude de la limite de $\int_{-\infty}^t \frac{\phi_n(t)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ quand $n$ tend vers $+\infty$

Posons :  $\dot{\psi}_n(t) = [1 - \beta_n(t)] \dot{u}_n(t) = -\phi_n(t)$ , alors :  $\psi_n = \int_{-\infty}^t [1 - \beta_n(\tau)] \dot{u}_n(\tau) d\tau$  où

$\beta_n \in [\beta_1, \beta_2]$  (les valeurs limites amont et aval de  $\beta$  sont représentées par  $\beta_1$  et  $\beta_2$  vérifiant  $0 < \beta_1 < \beta_2$  et  $\beta_1, \beta_2 \ll 1$ )

$\psi_n(t)$  est donc une fonction décroissante de  $t$  car  $\dot{u}_n(t) \leq 0$

On aura ainsi :

$$(1 - \beta_1) \int_{-\infty}^t \dot{u}_n(\tau) d\tau \leq \psi_n(t) \leq (1 - \beta_2) \int_{-\infty}^t \dot{u}_n(\tau) d\tau \quad \text{pour } n \text{ assez grand :}$$

$$\forall t, \exists n \text{ tel que : } (1 - \beta_1)(U_2 - U_1) \leq \psi_n(t) \leq (1 - \beta_2)(U_2 - U_1)$$

Pour  $t \in \left] \frac{1}{n}, +\infty \right[$ ,  $\psi_n$  est une fonction constante et égale à  $\psi_n\left(\frac{1}{n}\right)$

$$D'où  $(1 - \beta_1)(U_2 - U_1) \leq \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq (1 - \beta_2)(U_2 - U_1)$$$

Si on suppose que  $\psi_n\left(\frac{1}{n}\right)$  a une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , cette limite appartient à

$$\left[ (1 - \beta_1)(U_2 - U_1) \leq \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq (1 - \beta_2)(U_2 - U_1) \right]. \text{ Si } \beta_1, \beta_2 \ll 1, \text{ elle est de l'ordre de}$$

$U_2 - U_1$ , et on la notera  $-\Delta U$ .

On effectue le changement de variable :  $x = t - \tau$

$$\int_{-\infty}^t \frac{\phi_n(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\dot{\phi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\ddot{\psi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} dx$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ddot{\psi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} - \left[ \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} \right]_a^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{x^{3/2}} dx$$

$t$  étant fixé, on peut choisir  $n$  assez grand pour que :

$$\frac{1}{n} < t - a, \text{ alors } \dot{\psi}_n(t) = 0 \text{ et } \dot{\psi}_n(t-a) = 0 \text{ (pour } 0 < a < t)$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} \right]_a^{+\infty} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \int_a^{+\infty} \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{x^{3/2}} dx$$

car pour  $a \in \left] 0, t - \frac{1}{n} \right[$ ,  $x \in [0, a]$ , si  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\dot{\psi}_n(t-x) = 0$

$$a \text{ étant fixé, } \int_a^{+\infty} \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx$$

$$\text{Or : } \frac{d}{dx} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \lim_{t'-t} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx \quad t' > t$$

Mais pour :

$$t-x < \frac{1}{n}, x > t + \frac{1}{n} \Rightarrow \psi_n(t-x) = 0$$

$$t-x > \frac{1}{n}, x > t - \frac{1}{n} \Rightarrow \psi_n(t-x) = \psi_n\left[\frac{1}{n}\right] \quad \text{de même pour } t'$$

donc sur les intervalles  $\left] -\infty, t - \frac{1}{n} \right[ \cup \left[ t' + \frac{1}{n}, +\infty \right]$  les deux applications sont égales

et on aura :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx$$

Or :

$\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)$  est négatif ou nul (car  $t' > t$  et  $\dot{\psi}_n \leq 0$ ), on suppose  $n$  assez grand pour que  $t - \frac{1}{n}$  soit positif,

$$\frac{1}{\left[ t - \frac{1}{n} \right]^{3/2}} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)] dx < \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx$$

$$< \frac{1}{\left[ t' + \frac{1}{n} \right]^{3/2}} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)] dx$$

$$\text{Or } \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)] dx = (t'-t) \psi_n\left[\frac{1}{n}\right]$$

(c'est l'aire algébrique comprise entre les deux courbes déduites par translation)

$$\frac{1}{t'-t} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx \in \left[ \frac{\psi_n\left[\frac{1}{n}\right]}{\left[t - \frac{1}{n}\right]^{3/2}}, \frac{\psi_n\left[\frac{1}{n}\right]}{\left[t + \frac{1}{n}\right]^{3/2}} \right]$$

$$\text{et } \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' > t > 0}} \frac{1}{t'-t} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t'-x) - \psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx \in \left[ \frac{\psi_n\left[\frac{1}{n}\right]}{\left[t - \frac{1}{n}\right]^{3/2}}, \frac{\psi_n\left[\frac{1}{n}\right]}{\left[t + \frac{1}{n}\right]^{3/2}} \right]$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \int_a^{+\infty} \frac{\psi_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi_n\left[\frac{1}{n}\right]}{t^{3/2}} = -\frac{\Delta U}{t^{3/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\dot{\psi}_n(t-x)}{x^{3/2}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ddot{\psi}_n(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\Delta U}{2t^{3/2}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\phi}_n(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\frac{\Delta U}{2t^{3/2}}$$

### 1.4 Solution de l'équation (3.4).

La solution générale de  $\ddot{w}(t) + 2k\dot{w}(t) + (k^2 + \omega^2)w(t) = 0$  est:

$$w(t) = e^{-kt} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

On utilise la méthode de variation des constantes, donc on suppose que :

$$w(t) = e^{-kt} [A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)]$$

On pose  $y_1 = e^{-kt} \cos(\omega t)$ ,  $y_2 = e^{-kt} \sin(\omega t)$  où  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions indépendantes de l'équation sans second membre.

$$\text{On a : } \begin{cases} w(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t) \\ \dot{w}(t) = \dot{A}(t)y_1(t) + A(t)\dot{y}_1(t) + \dot{B}(t)y_2(t) + B(t)\dot{y}_2(t) \end{cases}$$

On pose :  $\dot{A}(t)y_1(t) + \dot{B}(t)y_2(t) = 0$

On a le système : 
$$\begin{cases} A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t) = w(t) \\ A(t)\dot{y}_1(t) + B(t)\dot{y}_2(t) = \dot{w}(t) \end{cases}$$

qui admet une solution unique  $(A(t), B(t))$  car :  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} = w e^{-2kt} \neq 0$ .

En réécrivant l'équation (3.4), et en tenant compte du fait que  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de l'équation sans second membre, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{A}(t)\dot{y}_1(t) + \dot{B}(t)\dot{y}_2(t) = \frac{b\Delta U}{2t^{3/2}} & (a) \\ \dot{A}(t)y_1(t) + \dot{B}(t)y_2(t) = 0 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a)y_2(t) - (b)\dot{y}_2(t) \Rightarrow \dot{A}(t)(\dot{y}_1(t)y_2 - y_1\dot{y}_2(t)) = y_2(t) \frac{b\Delta U}{2t^{3/2}} \\ (a)y_1(t) - (b)\dot{y}_1(t) \Rightarrow \dot{B}(t)(\dot{y}_2(t)y_1 - y_2\dot{y}_1(t)) = y_1(t) \frac{b\Delta U}{2t^{3/2}} \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = e^{-kt}[-\omega \sin(\omega t) - k \cos(\omega t)] \\ \dot{y}_2(t) = e^{-kt}[\omega \cos(\omega t) - k \sin(\omega t)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) = \omega e^{-2kt}$$

Or :

$$\dot{A}(t) = -\frac{e^{kt}}{\omega} \sin(\omega t) \frac{b\Delta U}{2t^{3/2}}$$

D'où :

$$\dot{B}(t) = \frac{e^{kt}}{\omega} \cos(\omega t) \frac{b\Delta U}{2t^{3/2}}$$

$$A(t) = -\frac{b\Delta U}{2\omega} \int_{t_0}^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du$$

et :

$$B(t) = \frac{b\Delta U}{2\omega} \int_{t_0}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du$$

On a ainsi la solution générale de l'équation (3.4) :



$$w(t) = \frac{b \Delta U}{2\omega} e^{-kt} \left[ \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du - \cos(\omega t) \int_{t_0}^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{2/2}} du \right]$$

On effectue le changement de variable :  $x = t - \tau$ , d'où l'on a :

### 1.5 Limites de $w(t)$ et de $\dot{w}(t)$ .

\* Comportement de  $w(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} \Delta W \cos(\omega t) = 0$$

$$\text{On pose } z(t) = e^{-kt} \left[ \sin(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{2/2}} du - \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du \right]$$

Ces deux intégrales sont convergentes quand  $t \rightarrow +\infty$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ , et on aura :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$$

\* Comportement de  $\dot{w}(t)$  quand  $t \rightarrow 0^+$

$$\dot{w}(t) = \frac{b \Delta U}{2\omega} e^{-kt} \left[ \omega \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du + \omega \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du \right] - \Delta W e^{-kt} \omega \sin(\omega t) - k w(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \Delta W e^{-kt} \omega \sin(\omega t) = 0$$

Or :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} k w(t) \text{ reste finie, } \lim_{t \rightarrow 0^+} \omega \cos(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{w}(t) = -\infty.$$

### 1.6 Calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ .

On effectue le changement de variable :  $x = t - \tau$ , d'où l'on a :

$$\int_{-\infty}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx.$$

On pose :  $w = v_1 - u_1$ , où  $u_1$  est la limite de  $u_{1,n}$  quand  $n$  tend vers l'infini,  $u_1 = -\Delta WY$  et  $v_1$  sera continue.  $u_1$ ,  $v_1$  et  $u_{1,n}$  sont respectivement semblables à  $u$ ,  $v$  et  $u_n$ , mais à priori pas forcément égales.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\dot{v}_1 - \dot{u}_1)(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx$$

\* Calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx$ .

On a :  $\int_0^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^t \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx + \int_t^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx$

Or :  $\int_t^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \left[ -\frac{v_1(t-x)}{\sqrt{x}} \right]_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} \frac{v_1(t-x)}{x^{3/2}} dx$

$$\left[ -\frac{v_1(t-x)}{\sqrt{x}} \right]_t^{+\infty} = 0 \quad \text{car } v_1(0) = 0$$

$$\int_t^{+\infty} \frac{v_1(t-x)}{x^{3/2}} dx = 0 \quad \text{car } t-x \leq 0 \text{ et } v_1(t-x) = 0$$

Donc :  $\int_t^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^t \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx$

Pour tout  $x \in ]0, t[$   $\dot{v}_1(t-x) = \dot{w}(t-x)$  car  $u_1$  est constant

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\dot{v}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx$$



\* Calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}_1(t-x)}{\sqrt{x}} dx$ .

Pour une fonction de classe  $C^2$  :  $\int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{u_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx$

On cherche :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{u_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{u_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t'-t} \int_0^{+\infty} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx.$$

En appliquant le même raisonnement que l'annexe 1.3 ( $t > 0$ ,  $n$  assez grand) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-\frac{1}{n}}} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)] dx < \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx$$

$$< \frac{1}{\sqrt{t'+\frac{1}{n}}} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)] dx$$

Or :  $\int_{t-\frac{1}{n}}^{t'+\frac{1}{n}} [u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)] dx = -\Delta W(t'-t)$

(aire comprise entre les deux courbes déduites par translation)

Donc :  $\frac{1}{t'-t} \int_0^{+\infty} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx \in \left[ -\frac{\Delta W}{\sqrt{t-\frac{1}{n}}}, \frac{\Delta W}{\sqrt{t'+\frac{1}{n}}} \right]$

$$\text{et : } \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t > 0}} \frac{1}{t'-t} \int_0^{+\infty} \frac{[u_{1,n}(t'-x) - u_{1,n}(t-x)]}{\sqrt{x}} dx \in \left[ -\frac{\Delta W}{\sqrt{t - \frac{1}{n}}}, -\frac{\Delta W}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}} \right]$$

Quand

$$-\frac{\Delta W}{\sqrt{t - \frac{1}{n}}} \leq \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{u_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx \leq -\frac{\Delta W}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}}$$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty \quad \int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}_{1,n}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = -\frac{\Delta W}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Donc : } \int_{-\infty}^t \frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} dt = \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx + \frac{\Delta W}{\sqrt{t}}$$

### 1.7 Etude de limites quand t tend vers 0<sup>+</sup>

$$* \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} w(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} w(t) = w(0^+) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} w(t) = 0$$

$$* \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \dot{w}(t)$$

L'expression (3.9) donne :

$$\dot{w}(t) = -k w(t) + e^{-kt} \left\{ \begin{aligned} & \frac{b \Delta U}{2} \left[ \cos(\omega t) \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du + \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du \right] \\ & - \Delta W \omega \sin(\omega t) \end{aligned} \right\}$$

Quand  $u \rightarrow 0^+$ ,  $\frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} \approx \frac{\omega}{\sqrt{u}}$ , or  $\int_0^t \frac{\omega}{\sqrt{u}} du$ , est une intégrale convergente, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du = 0.$$

Quand

$$u \rightarrow 0^+, \quad \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} \approx \frac{\omega}{u^{3/2}} \quad \text{donc} \quad \int_{t_1}^t \frac{e^{ku} \cos(\omega u)}{u^{3/2}} du \approx -\frac{2}{\sqrt{t}} \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+$$

$$\text{On aura } \dot{w}(t) = -\frac{b \Delta U}{\sqrt{t}} \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \dot{w}(t) = -b \Delta U$$

$$* \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t -\frac{b \Delta U}{\sqrt{x(t-x)}} dx$$

$$\text{En posant } x = ty: \quad \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(t-x)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \pi$$

$$\text{Donc: } \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = -b \pi \Delta U$$

$$\text{et: } \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx = 0$$

### 1.8 Démonstration de la relation (3.11)

En portant l'expression (3.9) donnant  $\dot{w}$  dans l'expression (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} (\alpha - k) w(t) + \frac{b \Delta U}{2} \int_{t_1}^t \frac{e^{-kt} \cos(\omega t) e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du + \frac{b \Delta U}{\sqrt{t_1}} + b \int_0^t \frac{\dot{w}(t-x)}{\sqrt{x}} dx \\ + \frac{b \Delta U}{2} e^{-kt} \sin(\omega t) \int_0^t \frac{e^{ku} \sin(\omega u)}{u^{3/2}} du - e^{-k \dots t} \Delta U \omega \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient la relation :

$$(\alpha - k) \Delta U + \frac{b \Delta U}{2} \int_0^{t_1} \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du + \frac{b \Delta U}{\sqrt{t_1}} - b^2 \pi \Delta U = 0 \quad (w(0^+) = \Delta U),$$

$$\text{soit} \quad \int_0^{t_1} \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du = \frac{2}{\sqrt{t_1}} + 2 \left[ \frac{\alpha - k}{b} - b\pi \right]$$

$$\text{Or} \quad a - k = \frac{3\alpha\beta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3\alpha\beta}{2} = \pi b. \quad \text{D'où} \quad \int_0^{t_1} \frac{e^{ku} \cos(\omega u) - 1}{u^{3/2}} du = \frac{2}{\sqrt{t_1}} - b\pi.$$

La vitesse des molécules relativement à l'élément de surface  $dA$  est, dans le repère  $(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\xi_1 = c_1 + U$$

$$\xi_2 = c_2$$

$$\xi_3 = c_3$$

Si on considère un nouveau repère  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  en rotation d'un angle  $\theta$  ( $\theta$  étant l'angle formé par la normale à  $dA$  et la direction de la vitesse de  $dA$ ) on a :

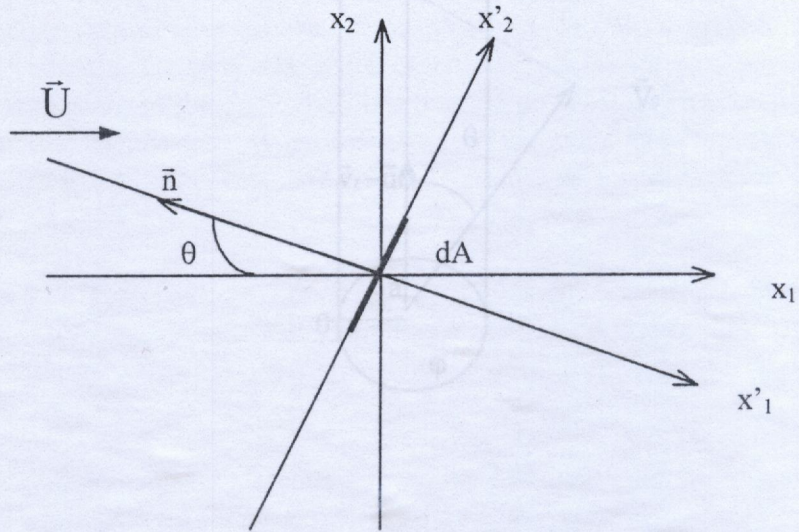
$$\xi'_1 = c_1 + U \cos \theta$$

$$\xi'_2 = c_2 + U \sin \theta$$

$$\xi'_3 = c_3$$

## Annexe :2

## 2.1 Système d'axes du paragraphe 4.3



La vitesse des molécules relativement à l'élément de surface  $dA$  est, dans le repère  $(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\xi_1 = c_1 + U$$

$$\xi_2 = c_2$$

$$\xi_3 = c_3$$

Si on considère un nouveau repère  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  en rotation d'un angle  $\theta$  ( $\theta$  étant l'angle formé par la normale à  $dA$  et la direction de la vitesse de  $dA$ ) on a :

$$\xi'_1 = c'_1 + U \cos \theta$$

$$\xi'_2 = c'_2 + U \sin \theta$$

$$\xi'_3 = c'_3$$

## 2.2 Conditions de contact entre molécules et particule

Dans cette étude, nous avons tenté d'analyser le comportement d'une particule à la traversée d'une onde de choc, l'expression de Tedeschi sera valable dans tous les régimes d'écoulement quelque soit le rapport du nombre de Mach sur le nombre de Reynolds, dans certains cas, on peut utiliser des expressions plus

Généralement, le régime d'écoulement est le même au cours du mouvement de la particule, il suffira alors de connaître la valeur maximale du nombre de Reynolds pour déterminer la loi qu'il faudra utiliser. Par contre, si ce n'est pas le cas, il vaudra mieux employer l'expression de Tedeschi. De plus, elle a été déterminée en faisant pas appel à la théorie que les expressions existant jusqu'alors. Bien que voisine de la loi de Henderson, elle est beaucoup moins empirique et elle permet de mieux saisir les phénomènes physiques (rarefaction, grands nombre de Reynolds, compressibilité) qui interviennent dans la force exercée sur la particule.

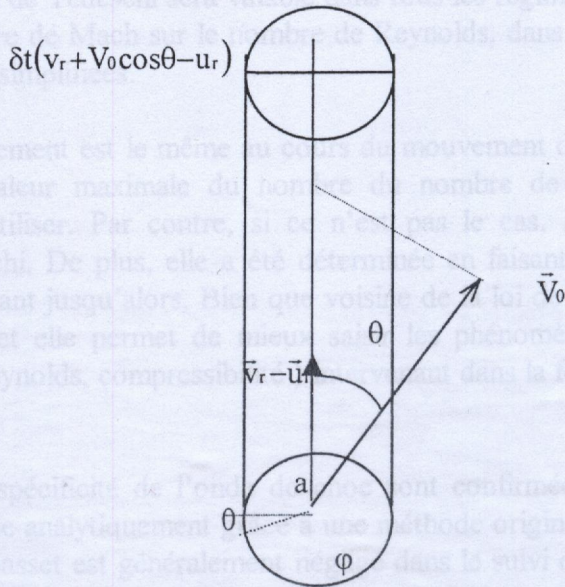
Certaines hypothèses liées à la spécificité de l'onde de choc ont été confirmées ou infirmées. L'équation de Tolén a été résolue analytiquement par une méthode originale de Tedeschi. Ceci a prouvé que le terme de Basset est généralement négligeable dans le suivi de particules en écoulement supersonique.

Il a été montré que le régime d'écoulement s'établissant autour de la particule, en écoulement supersonique est souvent le régime de transition correspondant à un écoulement assez rareté.

Les résultats numériques montrent que le suivi de particules en écoulement à grande vitesse est moins dépendant de leurs rayons, qu'en écoulement plus classique. Néanmoins, on constate que plus une particule est petite, meilleurs seront les résultats obtenus et que ces derniers deviennent rapidement moins corrects lorsque la taille augmente.

### Perspectives

Dans l'avenir, il semble nécessaire de mener une étude poussée de l'influence de la turbulence sur le comportement des particules, si dans les écoulements à faible vitesse ceci ne devrait pas être d'une grande importance, il n'en sera vraisemblablement pas de même pour les écoulements supersoniques et hypersoniques.



Dans cette étude, nous avons tenté d'analyser le comportement d'une particule à la traversée d'une onde de choc, l'expression de Tedeschi sera valable dans tous les régimes d'écoulement quelque soit le rapport du nombre de Mach sur le nombre de Reynolds, dans certains cas, on peut utiliser des expressions plus simplifiées.

Généralement, le régime d'écoulement est le même au cours du mouvement de la particule, il suffira alors de connaître la valeur maximale du nombre de Reynolds pour déterminer la loi qu'il faudra utiliser. Par contre, si ce n'est pas le cas, il vaudra mieux employer l'expression de Tedeschi. De plus, elle a été déterminée en faisant plus appel à la théorie, que les expressions existant jusqu'alors. Bien que voisine de la loi de Henderson, elle est beaucoup moins empirique et elle permet de mieux saisir les phénomènes physiques ( raréfaction, grands nombre de Reynolds, compressibilité ) intervenant dans la force exercée sur la particule.

Certaines hypothèses liées à la spécificité de l'onde de choc sont confirmées ou infirmées. L'équation de Tchen a été résolue analytiquement grâce à une méthode originale de Tedeschi. Ceci a prouvé que le terme de Basset est généralement négligé dans le suivi de particules en écoulement supersonique.

Il a été montré que le régime d'écoulement s'établissant autour de la particule, en écoulement supersonique est souvent le régime de transition, correspondant à un écoulement assez raréfié.

Les résultats numériques montrent que le suivi de particules en écoulement à grande vitesse est moins dépendant de leurs rayons, qu'en écoulement plus classique. Néanmoins, on constate que plus une particule est petite, meilleurs seront les résultats obtenus et que ces derniers deviennent rapidement moins corrects lorsque la taille augmente.

### Perspectives

Dans l'avenir, il semble nécessaire de mener une étude poussée de l'influence de la turbulence sur le comportement des particules, si dans les écoulements à faible vitesse ceci ne devrait pas être d'une grande importance, il n'en sera vraisemblablement pas de même pour les écoulements supersoniques et hypersoniques.

- [1] POUSSINESQ J. 'sur la résistance au mouvement d'une sphère solide', C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 100, pp.913-917, 1885
- [1] FEUILLEBOIS F. 'Certains problèmes d'écoulements mixtes fluides-particules solides'. Thèse es Sciences Mathématiques. Paris VI. 1980.
- [2] DADI M. 'Mouvement d'une micro-particule sphérique dans un écoulement' Institut de Mécanique des fluides de Lille, N°85/10, 1985.
- [3] HENDERSON C. B. 'Drag coefficient of spheres in continuum and rarefied flows', A.I.A.A. Journal, Vol. 14, N°6, p.707-708, 1976.
- [4] STOKES G.G. 'On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums', Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol 9, N°2, pp.8-27.1851.
- [5] V. V. Keldysh 'Optimal shape of lifting bodies in a flow with a plane shock' Fluid Dynamics, Vol. 31 N°4, 1996.
- [6] TEDESCHI G. 'Analyse théorique du comportement de particules relativement à la traversée d'une onde de choc' Rapport de stage D.E.A, Université d'Aix-Marseille II, juin 1989.
- [7] C. B. ALLEN 'The reduction of numerical entropy generated by unsteady shockwaves' The Aeronautical Journal, January 1997. pp. 8-17 .
- [8] A.N. PROKUNIN AND M.C. WILLIAMS 'Spherical particle sedimentation along an inclined plane at high Reynolds numbers' fluid Dynamics, Vol.13, N°4, 1996.
- [9] H. SUGIYAMA, T. ARAI and N. UNO 'LDV investigation of turbulence phenomenal in multiple shock wave / turbulent boundary layer interactions'. Departement of Mechanical Systems Engineering. Muroran Institute of Technology. Japan., pp.325-332, 1997.
- [10] D. RODRIGUE, DE KEF and C.F. CHAN MAN FONG. 'the slow motion of a spherical particle in a carreau fluid' Chem. Eng. Comm, Vol. 145, pp.203-205.,1996.
- [11] TCHEN C.M 'Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid' Ph. D. thesis, Technical University, delft, Chap.4, p.72-87., Netherlands, 1947.
- [12] M.S. IVANOV, G.N. Markelov, A.N.Kudryavtsev. ' Numerical investigation of shock wave / Boundary layer interaction in the near continuum hypersonic flow over concave bodies' Computational Fluid Dynamics, pp. 656-661. Published in 1996 by John Wiley & Sons Ltd.
- [13] SCHAAF S.A. and CHAMBRE P.L., ' Flow of rarefied gases' Princeton Aeronautical Paperbacks, Princeton University Press, 1961.
- [14] PATTERSON G.N., ' Mechanics of rarefied gases and plasmas', Institute of Aerophysics, University of Toronto, UTIA Review, N°18.1962.
- [15] CUNNINGHAM E., ' On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium', Proc. Of the Royal Soc. of London, Series A, Vol. LXXXIII, pp.357-365. 1910.
- [16] SCHILLER L. and NAUMAN A., Z. Ver. Deut. Ing. 77:318.1933.
- [17] WALSH M.J., 'Comment on Drag coefficient of spheres in continuum and rarefied flows', A.I.A.A. Journal.Vol.15, N°6, pp. 893-894. 1977.
- [18] CARLSON D.J. and HOGLUND R.F., 'Particle drag and heat transfer in rocket nozzles', A.J.A.A. Journal, Vol.2, N°11, pp.1980-1984.1964.



- [19] BOUSSINESQ J. 'sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini en repos au mouvement varié d'une sphère solide', C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 100, pp.935-937, 1885.
- [20] BASSET A. B. 'Treatise on hydrodynamics' Deighton Bell, Cambridge, vol. 2, ch.22, 1888.
- [21] FAXEN H. 'Der winderstand gegen die bewegung einer starren kugel in einer zähen flüssigkeit, die ewischen zwei parrellelen, ebener wanden eiggeschlossen ist. Arkiv Math. Astronom. Fys., Val. 18, N°29.1924.
- [22] OSEEN C. W. 'Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamic. Acad. Verlagsgesellschaft, Leipzig.1927.
- [23] GATIGNOL R., 'Dérivation de la formule de Faxen généralisée ', C. R. Acad. Sci. T.293, série II, pp.869-872, Novembre 1981.
- [24] J.F. BOURGAT. AERODYNAMIQUE., ' Mise en équations du problème et approximations' [www.universalais-edu.com/euol/labo/articles/A911001.htm](http://www.universalais-edu.com/euol/labo/articles/A911001.htm).
- [25] V. Malka, F. Amiranoff, C. Couland., ' Mesure des profils de densité d'atomes dans des jets de gaz à géométrie cylindrique'. UMR N°7605, C.N.R.S. – C.E.A.– X – Paris VI, 2000.
- [26] BADR O. 'The structure of normal shock waves in polytropic gase', Phys. Of Fluids. Vol.27. N°4. pp.881-885. Avril 1984.
- [27] BOUTIER A. , LEFEVRE J. , LABBE J., ' Etude expérimentale de la réponse d'un vélocimétrie laser à divers types d'aérosols', R.T. O.N.E.R.A. 27/1883. 1985.
- [28] Aurelien DELEVOYE 'Simulation numérique des interactions ondes de choc/couche limite sous l'effet d'une fluctuation de pression statique aval'. 34<sup>ème</sup> Colloque d'Aérodynamique Appliquée, AAAF , Marseille, 19/10/1998.
- [29] GOUIN H. et ELLENA M. ' Mouvement des particules à la traversée d'une onde de choc', 8<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Nantes. Sept 1987.
- [30] MEYERS H. ' Calculation of particle dynamics effects on laser velocimeter data', Wind Tunnel Seeding Systems for Laser Velocimeters. N.A.S.A. Conference Publication 2393, Mars 1991.



802

رقم الجرد :  
رقم الفاتورة :  
التاريخ : 05/11/2004  
الأصل : *minist d'arxa*

## Résumé

L'étude du mouvement des particules solides dans les écoulements fluides a été envisagée depuis de nombreuses années. Différents modèles ont été proposés. Ils sont tous de type intégral-différentiel. Moyennant quelques hypothèses simples, nous proposons une résolution analytique complète de l'équation de Tchen à travers une discontinuité du type choc pour un écoulement quasi-rectiligne. Cette résolution prend en compte le terme relatif à l'histoire du mouvement de la particule, connu sous le nom de terme de Basset. L'étude analytique montre qu'il est nettement plus justifié de négliger les termes d'histoire des particules que de choisir une hypothèse de viscosité linéaire, comme celle proposée par Stokes. Le régime d'écoulement autour de la particule, est souvent le régime de transition, correspondant à un écoulement assez raréfié. Les résultats numériques montrent que le suivi de particules en écoulement à grande vitesse est moins dépendant de leurs rayons.

## Abstract

The study of the motion of solid particles in fluid flows has been investigated for many years. Various models have been proposed, all in integral-differential form. By adopting a simple hypothesis, we propose a complete analytic resolution of Tchen's equation across a shock discontinuity for an almost one-dimensional flow. This solution uses Basset's particle motion history. Analysis shows that it is clearly more justified to neglect the history terms of the particle than to use Stokes' linear viscosity hypothesis. The flow regime around a particle is often transition flow, correspondent to a flow rarefied enough. Numerical results show that following it by particles in large flow speed is less dependent on their rays.

## الخلاصة

إن دراسة حركة الجزيئات الصلبة في سيلان مائع قد أخذت بعين الإعتبار منذ عدة سنوات، كما اقترحت أنواعا مختلفة كلها من نوع معادلات تفاضلية تفارقية، باستعمال بعض الفرضيات البسيطة و نقتراح تحليلا مفصلا و كاملا لمعادلة تشان على غرار المتقاطعة من نوع الصدمة للسيلان خطي كاملا، هذا الحل يأخذ بعين الإعتبار العبارة المتعلقة بتاريخ حركة الجزيئة المعروفة باسم باسي، الدراسة التحليلية تبين جليا أنه من المبرر عدم أخذ بعين الإعتبار عبارات تاريخية للجزيئات عكس ما تختار فرضية شدة السيلان الخطية كم هي مقترحة من طرف ستوكس، إن نظام السيلان حول الجزيئة في غالب الأحيان هو نظام انتقالي يطابق لسيلان نادر، النتائج الرقمية تبين أن إتباع الجزيئات في سيلان ذي السرعة الكبيرة تكون أقل استقلالية من أشعتها.

## Mots-Clefs

Vélocimétrie laser

Onde de choc

Coefficient de traînée

Particule

Gaz raréfié

Supersonique