

République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA



*Faculté de technologie*

*Département de mécanique*

*Mémoire de fin d'études*

*En vue de l'obtention du diplôme master*

*En conception mécanique*

Thème :

**Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur  
d'intensité de contrainte en mode III**

**Présenté par :**

**MEZOUANI**

**Yassine**

**Encadré par :**

**Mr FERDJANI Hicheme**

**2013/2014**

# REMERCIEMENTS

*Je remercie DIEU tout puissant qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Je veux adresser mes plus grands remerciements à mes parents qui ont tellement sacrifié pour moi pendant toutes ces longues années et qui ont fait des efforts inhumains pour me permettre d'être là aujourd'hui. Un grand merci à vous et à ma famille.*

*Je voudrai aussi témoigner toute ma gratitude envers Monsieur Ferdjani, mon promoteur, pour sa très grande disponibilité et son grand intérêt pour mon travail. Ses connaissances, sa rigueur scientifique et son expérience ont été exemplaire et m'ont permises de faire mon travail dans d'excellentes conditions.*

*J'aimerais aussi remercier tous les enseignants du département mécanique (USDB), et spécialement ceux de ma spécialité pour les efforts colossaux qu'ils ont fournis afin de nous instruire au mieux.*

## **Résumé :**

Nous avons appliqué la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte d'un cylindre fissuré en mode III.

Nous avons comparé les résultats obtenus avec et sans la méthode des moindres carrés. Nous avons également étudié l'influence du choix de la répartition des points de collocation sur le résultat final.

## Nomenclatures :

Z: nombre complexe

$r, \theta$ : composants du repère polaire

$K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  : Facteurs d'intensité de contrainte respectivement en mode 1, 2 et 3

$\sigma_{ij}$  : Champ de contrainte

G: taux de restitution d'énergie

W : l'énergie potentielle totale

$W_{ext}$ : Travail des forces extérieures

$W_e$  : Énergie de déformation élastique

E : module d'élasticité

$\mu$  : Module de cisaillement

$\nu$  : Coefficient de poisson

$G_c$  : Densité d'énergie de surface

$K_c$  : Ténacité

x, y : composants du repère cartésien

i : nombre imaginaire

Re : partie réelle

Im : partie imaginaire

$U_i$  : Champ de déplacement

$\varepsilon_{ij}$  : Champ déformation

$t_z$  : Composante du vecteur contrainte dans la direction z

n : vecteur normale

$C_n$  : Coefficient complexe

$A_n, B_n$  : Coefficient réels

m : nombre de points de collocation

## Sommaire :

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Rappels théoriques.....</b>	<b>3</b>
<b>I-1 Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture.....</b>	<b>4</b>
I-1-1 Mode d'ouverture d'une fissure.....	4
I-1-2 Le facteur d'intensité de contrainte $K$ .....	5
I-1-3 Le taux de restitution d'énergie.....	7
I-1-4 Critère d'énergie $G_c$ et critère de contrainte $K_c$ .....	7
I-1-4-1 Critère d'énergie (Griffith) .....	7
I-1-4-2 Critère de rupture en mode I (Irwin).....	8
<b>I-2 Rappels sur les nombre complexes .....</b>	<b>8</b>
I-2-1 représentation graphique .....	8
I-2-2 fonctions d'une variable complexe .....	9
I-2-2-1 Définition.....	9
I-2-2-2 Dérivée d'une fonction d'une variable complexe.....	9
I-2-2-3 Fonctions holomorphes (ou analytiques).....	9
I-2-2-4 Conditions de Cauchy-Riemann.....	9
<b>I-3 Rappels d'élasticité anti-plane.....</b>	<b>10</b>
<b>I-4 Formulation du cisailent anti plan par des variables complexes.....</b>	<b>11</b>
<b>I-5 Présentation de la méthode de collocation de frontière.....</b>	<b>12</b>
<b>I-6 la méthode des moindres carrés.....</b>	<b>15</b>
I-6-1 Forme standard.....	15
I-6-2 Solution analytique.....	16
<b>I-7 Résolution des systèmes linéaires.....</b>	<b>17</b>
<b>Chapitre II: Exemple traité – Résolution avec et sans la méthode des moindres carrés.....</b>	<b>19</b>
<b>II-1 Problème traité.....</b>	<b>20</b>
II-1-1 Résultats d'A.T. Zehnder.....	20
<b>II-2 Résolution du problème.....</b>	<b>21</b>
II-2-1 Solution par la méthode des moindres carrés.....	22
II-2-2 Solution par résolution directe (sans la méthode des moindres carrés).....	24

<b>Chapitre III : étude de l'influence de la répartition des points de collocation sur le résultat final.....</b>	<b>26</b>
<b>III-1 <math>\frac{1}{4}</math> cercle.....</b>	<b>27</b>
<b>III-2 <math>\frac{1}{2}</math> cercle.....</b>	<b>30</b>
<b>III-3 <math>\frac{3}{4}</math> cercle.....</b>	<b>32</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>35</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>36</b>
<b>Annexes.....</b>	<b>37</b>
Annexe 1.....	38
Annexe 2.....	50
Annexe 3.....	53
Annexe 4.....	56
Annexe 5.....	63

## Table des figures

I-1	les 3 modes de rupture.....	5
I-2	champ de contrainte aux abords du front de fissure.....	6
I-3	le plan complexe.....	8
I-4	Exemple de points de collocation, $q = 1, m$ points ( $m=9$ ).....	14
II-1	Problème étudié par A.T. Zehnder.....	20
II-2	$K_{III}$ en fonction du nombre de points de collocation $m$ (A.T. Zehnder [7]).....	21
II-3	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p = 20$ ).....	24
II-4	$K_{III}$ en fonction de $m$ (sans les moindres carrés).....	25
III-1	$K_{III}$ en fonction de $m$ pour $p=5$ (1/4 de cercle) avec moindres carrés.....	28
III-2	$K_{III}$ en fonction de $m$ pour $p=6$ (1/4 de cercle) avec moindres carrés.....	29
III-3	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p=2$ , 1/2 cercle) avec moindres carrés.....	32
III-4	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p=4$ , 3/4 de cercle) avec moindres carrés.....	34

## Liste des tableaux

II-1	$K_{III}$ en fonction de $p$ avec les moindres carrés.....	23
II-2	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p = 20$ ).....	23
II-3	$K_{III}$ en fonction de $p$ (sans les moindres carrés).....	24
III-1	$K_{III}$ en fonction de $p$ (1/4 de cercle) sans moindres carrés.....	27
III-2	$K_{III}$ en fonction de $m$ pour $p=5$ (1/4 de cercle) avec moindres carrés.....	28
III-3	$K_{III}$ en fonction de $m$ pour $p=6$ (1/4 de cercle) avec moindres carrés.....	29
III-4	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p=2$ , 1/2 cercle) avec moindres carrés.....	30
III-5	$K_{III}$ en fonction de $p$ (1/2 cercle) avec moindres carrés.....	31
III-6	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p=2$ , 1/2 cercle) avec moindres carrés.....	31
III-7	$K_{III}$ en fonction de $p$ (3/4 de cercle) sans moindres carrés.....	32
III-8	$K_{III}$ en fonction de $p$ (3/4 de cercle) avec moindres carrés.....	33
III-9	$K_{III}$ en fonction de $m$ ( $p=4$ , 3/4 de cercle) avec moindres carrés.....	34



## **Introduction :**

Jusqu'à un passé récent les ingénieurs mécaniciens se préoccupaient uniquement de prévenir l'apparition des fissures et n'étudient pas la propagation. Cependant la multiplication des procédures de détection de fissures entraîne la détection de ces défauts (fissures) dans un très grand nombre de structures. Comme il est matériellement impossible de réparer toutes ces fissures, on cherche maintenant à les « justifier », c'est-à-dire à montrer qu'elles ne présentent pas de danger.

La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure. La mécanique de la rupture permet de prévoir la condition de la rupture des matériaux et des structures, lorsqu'ils contiennent une fissure.

La mécanique de la rupture étudie des fissure macroscopiques, elle permet de déterminer les champs de contrainte et de déformation et d'exprimer les conditions de propagation de fissures, elle propose des relations entre les contraintes et la longueur des fissures macroscopique en fonction des caractéristiques des matériaux [1].

Les contraintes sont singulières en front de fissure dans la mécanique de la rupture fragile, cette singularité est caractérisée par le facteur d'intensité de contrainte (FIC). La détermination du FIC est très importante car il est utilisé ensuite dans les critères de propagation.

Il existe plusieurs méthodes théoriques, numériques et expérimentales de calcul du FIC. Dans notre travail nous nous intéressons à une méthode numérique particulière qui est la méthode de collocation de frontière.

Nous l'appliquons dans ce travail à la détermination du FIC pour un cylindre fissuré sollicité en mode III. Ce problème a déjà été étudié par A.T. Zhender [7]. La méthode consiste en l'identification du vecteur contrainte, exprimé par une série tronquée de fonctions puissance de la variable complexe, avec ses valeurs en un certain nombre de points sur la frontière du domaine, appelés points de collocation. Le coefficient correspondant à la fonction puissance  $z^{-1/2}$  correspond au FIC recherché ( $K_{III}$ ). Pour la résolution numérique, il existe deux possibilités :

- On prend autant de points de collocation que de coefficients inconnus dans la série. Le système est résolu par les méthodes classiques.
- On prend plus de points de collocation que de coefficients inconnus. Le système surdéterminé est résolu par la méthode des moindres carrés.

Nous avons testé les deux méthodes afin de dégager les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

Nous avons également testé l'influence du choix de la répartition des points de collocation sur le résultat final. Plusieurs calculs ont été effectués avec différentes répartitions. Les résultats obtenus ont été comparés.

Pour présenter notre travail, notre mémoire a été divisé en 3 chapitres :

Un premier chapitre présente les bases théoriques du travail : les principaux concepts de la mécanique de la rupture fragile, les nombres complexes, l'élasticité anti-plane, la méthode des moindres carrés et la résolution des systèmes linéaires. Nous présentons également la méthode de collocation de frontière.

Dans le deuxième chapitre nous calculons le FIC  $K_{III}$  pour un cylindre fissuré sollicité en mode III. Nous résolvons le système en utilisant les deux possibilités citées précédemment (avec ou sans la méthode des moindres carrés). Nous comparons également nos résultats avec ceux d'A.T. ZHENDER [7].

Dans le dernier chapitre nous étudions l'influence du choix de la répartition des points de collocation sur le résultat final. Pour cela, nous reprenons l'exemple précédent en utilisant plusieurs choix de répartition des points de collocation. Nous comparons les résultats obtenus pour chaque choix.

Et nous terminons par la conclusion générale.

**Chapitre I : Rappels  
théoriques - Méthode  
de collocation de  
frontière**

Dans ce chapitre, nous présentons les bases théoriques de notre travail. Ils se divisent en cinq volets :

- dans le premier nous visitons quelques notions de la mécanique de la rupture.
- Le second volet va traiter le sujet des nombres complexes.
- Le troisième volet quant à lui présente les équations de l'élasticité anti-plane.
- Le quatrième volet est consacré à la présentation de la méthode de collocation de frontière.
- Le dernier volet présente la méthode des moindres carrés ainsi que la méthode de résolution des systèmes linéaires.

### **I-1 Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture [2] :**

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de ruptures :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture) ;
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la mécanique de rupture fragile. Nous en rappelons quelques notions.

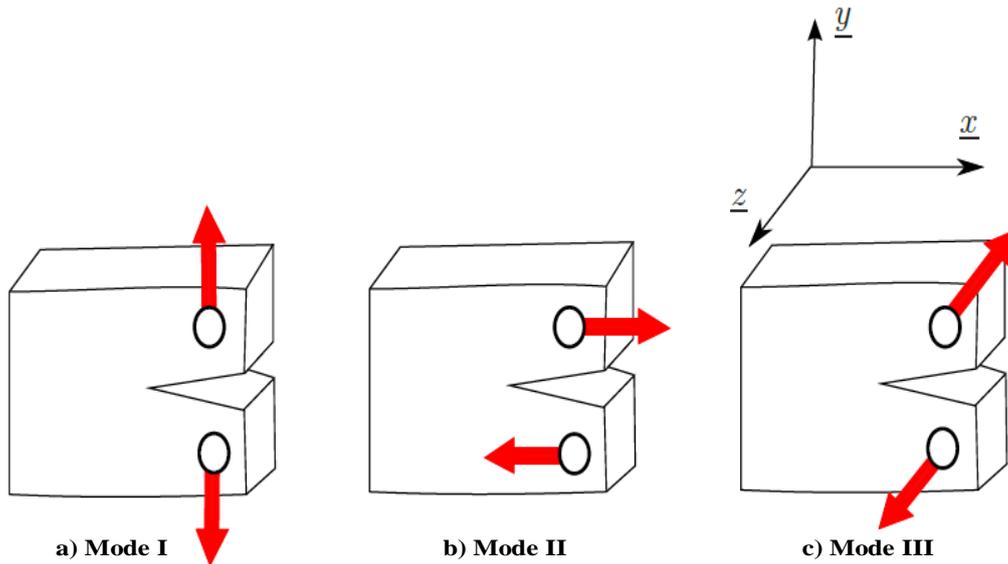
#### **I-1-1 Mode d'ouverture d'une fissure [3] :**

Toute ouverture de fissure peut être ramenée à la superposition de trois modes élémentaires (cf. **Fig.I-1**):

- **le mode I (ou mode d'ouverture)** : où les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration,
- **le mode II (ou mode de cisaillement dans le plan)** : où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction perpendiculaire au front de fissure,
- **le mode III (ou mode de cisaillement hors plan)** : où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

**Remarque :**

Notons que dans le cas des modes II et III, les lèvres de la fissure restent en contact et entraînent donc des frottements qui diminuent l'énergie disponible pour la propagation de fissure. Ces deux modes sont ainsi généralement moins dangereux que le mode I.



**Figure I-1: les 3 modes de rupture**

**I-1-2 Le facteur d'intensité de contrainte K [4] :**

Dans la zone singulière, le champ de contraintes présente une singularité en  $r^{-1/2}$  à la pointe de fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  pour chacun des modes élémentaires. A l'aide de la théorie de l'élasticité, Irwin a montré que les contraintes  $\sigma_{ij}$  dans cette zone singulière peuvent être exprimées en fonction des facteurs d'intensité de contraintes :

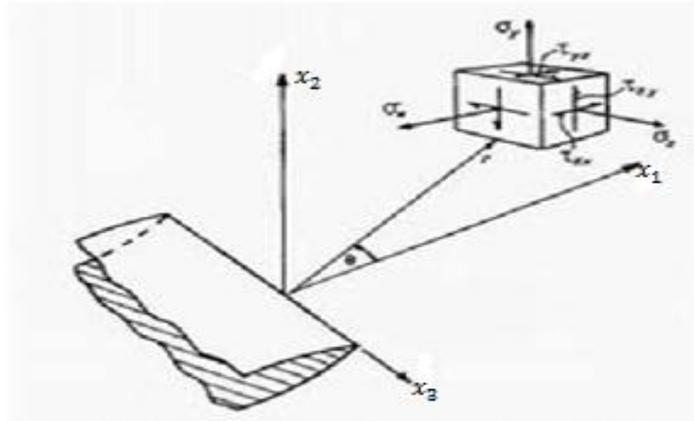


Figure I-2: champ de contrainte aux abords du front de fissure

Nous donnons ci-dessous la forme asymptotique des contraintes au voisinage du front de fissure pour chaque mode :

**Mode I :**

$$(I-1) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{12} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

**Mode II :**

$$(I-2) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = -K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{12} = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases}$$

**Mode III:**

$$(I-3) \quad \begin{cases} \tau_{13} = -K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ \tau_{23} = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

Où  $r$  et  $\theta$  sont respectivement le rayon et l'angle en coordonnées polaires

Dans les formules précédentes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$  sont les composants du tenseur des contraintes.

Les coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont appelés facteurs d'intensité de contraintes et s'expriment en  $\text{MPa}\sqrt{m}$ . Ils sont indépendants de  $r$  et de  $\theta$  et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs sur un solide donné, de sa géométrie et de la longueur de la fissure.

### I-1-3 Le taux de restitution d'énergie :

Griffith est le premier à aborder le problème des corps fissurés d'un point de vue énergétique. Par l'analyse du bilan énergétique, le taux de restitution d'énergie, noté  $G$ , a été introduit. C'est l'énergie nécessaire pour faire progresser une longueur unitaire de la fissure.

Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale  $W$  du milieu fissuré pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$ , à une autre où la fissure se

trouve augmentée d'une unité de longueur  $da$  :

$$\begin{cases} G = \frac{\partial W}{\partial a} \\ W = W_e - W_{ext} \end{cases} \quad \text{I-4}$$

Avec

$W_{ext}$ : Travail des forces extérieures

$W_e$  : Énergie de déformation élastique

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, on peut relier  $G$  aux facteurs d'intensité de contraintes par :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \text{I-5}$$

Avec  $E' = E$  en contrainte plane

$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  en déformation plane

### I-1-4 Critère d'énergie $G_c$ et critère de contrainte $K_c$

#### I-1-4-1 Critère d'énergie (Griffith) :

Il y a rupture lorsque le taux de restitution d'énergie ( $G$ ) atteint une valeur critique appelé densité d'énergie de surface ( $G_c$ ) qui s'exprime en ( $\text{J}/\text{m}^2$ ) .

### I-1-4-2 Critère de rupture en mode I (Irwin) :

Il y a rupture lorsque le facteur d'intensité de contrainte ( $K_I$ ) atteint une valeur critique la ténacité ( $K_{IC}$ ).

## I-2 Rappels sur les nombre complexes [5] :

### I-2-1 représentation graphique :

#### Notion de base :

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = x + iy$  **I-6**

Partie réelle de  $z = x = \text{Re}(z)$ .

Partie imaginaire de  $z = y = \text{Im}(z)$ .

Argument de  $z = \theta = \arg(z)$

On définit le module de  $z$  comme  $|z|=r = \sqrt{x^2 + y^2}$  **I-7**

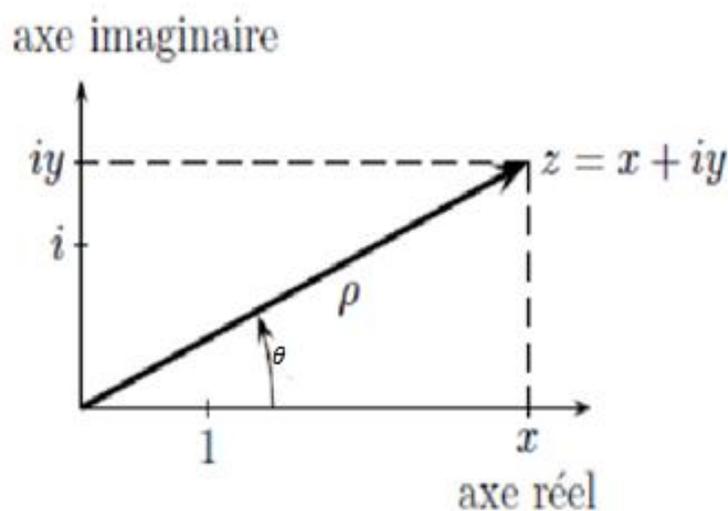


Figure I-3: le plan complexe

Ecriture polaire de  $z$  :

$$x = r \cos \theta \quad \text{I-8}$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{I-9}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad \text{I-10}$$

$$\text{Avec } \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{I-11}$$

## **I-2-2 Fonctions d'une variable complexe :**

### **I-2-2-1 Définition :**

Soit  $U$  une partie de  $\mathbb{C}$ . On appelle fonction d'une variable complexe une application :  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\text{On a } \mathbf{f(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)} \quad \mathbf{I-12}$$

Où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions réelles de deux variables réelles  $(x, y)$ .

### **I-2-2-2 Dérivée d'une fonction d'une variable complexe :**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition contient un voisinage du point  $z_0$ . La dérivée de  $f$  en  $z_0$ , notée  $f'(z_0)$ , est définie par la formule :

$$\mathbf{f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \quad \mathbf{I-13}$$

À la condition que la limite existe. La fonction  $f$  est dite différentiable en  $z_0$  quand sa dérivée au point  $z_0$  existe.

### **I-2-2-3 Fonctions holomorphes (ou analytiques) :**

Une fonction  $w = f(z)$  est dite holomorphe en un point donné  $z$  d'un domaine  $D$  si elle est dérivable aussi bien au point  $z$  lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit que la fonction  $w = f(z)$  est holomorphe dans le domaine  $D$  si elle est dérivable en chaque point de ce domaine. Le terme analytique (plus employé par les physiciens que le terme holomorphe) est un synonyme du terme holomorphe.

Une fonction entière est une fonction qui est analytique en chaque point à distance finie du plan complexe. Puisque la dérivée d'un polynôme existe partout, tout polynôme est une fonction entière.

### **I-2-2-4 Conditions de Cauchy-Riemann :**

La définition de la dérivée au point  $z$  peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}} \quad \mathbf{I-14}$$

La limite de ce rapport doit être indépendante de la façon dont la quantité complexe  $h = s + it$  tend vers zéro. Si on prend  $h = s$  réel, alors la partie imaginaire  $t$  de  $h$  reste nulle, et la dérivée devient une dérivée partielle par rapport à  $x$ . Donc, on a :

$$\mathbf{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}} \quad \mathbf{I-15}$$

De même, si  $h = it$  est imaginaire pur, on a :

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{I-16}$$

Si  $f'(z)$  existe,  $f(z)$  doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{I-17}$$

Qui équivaut aux deux équations aux dérivées partielles réelles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{I-18}$$

Les équations (I-18) sont les équations aux dérivées partielles de Cauchy-Riemann, qui doivent être satisfaites par les parties réelle et imaginaire de toute fonction holomorphe. Ce sont des conditions nécessaires pour l'existence de la dérivée d'une fonction  $f$  en un point. Elles peuvent donc être utilisées pour localiser les points où  $f$  ne possède pas de dérivée.

A partir de (I-18) on peut montrer que :  $\Delta u = \Delta v = 0$  (où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel). Cela veut que les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique sont harmoniques.

### **I-3 Rappels d'élasticité anti-plane [6] :**

L'élasticité est la capacité d'un corps à reprendre sa forme initiale après déformation. Les déformations sont très petites.

Le problème qui sera traité dans les chapitres précédents est un problème de fissure en mode III. Le mode III existe dans le cadre de l'élasticité anti-plane. Nous présentons donc les équations de l'élasticité anti-plane.

$$\text{Vecteur de déplacement} \begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{I-19}$$

$$\text{Les déformations} \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{I-20}$$

$$\text{Les contraintes } \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}, \sigma_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{I-21}$$

L'application des équations de l'équilibre local donne (en négligeant les forces volumiques selon  $x_3$ ) :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{I-22}$$

Cela veut dire que  $w(x_1, x_2)$  est une fonction harmonique.

#### **I-4 Formulation du cisailent anti-plan par des variables complexes [7] :**

Pour simplifier la notation, notons  $\tau_\alpha = \sigma_{3\alpha}$ ,  $\varepsilon_\alpha = 2\varepsilon_{3\alpha}$ . Soit  $\phi$  une fonction contrainte telle que :

$$\tau_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \text{ et } \tau_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \text{I-23}$$

De la relation déformation-déplacement on a :  $\varepsilon_\alpha = w_{,\alpha}$ , ainsi  $\varepsilon_{1,2} = w_{,12}$  et  $\varepsilon_{2,1} = w_{,21}$ . Par conséquent on a l'équation de compatibilité :

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,1} \quad \text{I-24}$$

Utilisant la relation contrainte-déformation  $\tau_\alpha = \mu \varepsilon_\alpha$ , et la fonction contrainte  $\phi$ , on obtient :  $\mu \varepsilon_{1,2} = -\phi_{,22}$ , et  $\mu \varepsilon_{2,1} = -\phi_{,11}$ . En substituant dans l'équation de compatibilité, on obtient :  $-\phi_{,22} = \phi_{,11}$  ou bien

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{I-25}$$

Où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel.

On définit une nouvelle fonction complexe  $h(z)$  qui a  $\phi$  comme partie réelle et  $w$  comme partie imaginaire :

$$h(z) = \phi + i\mu w \quad \text{I-26}$$

où  $z = x_1 + ix_2$ . On peut facilement vérifier que  $\phi$  et  $w$  satisfont les équations de Cauchy-Riemann. De plus,  $\phi$  et  $w$  sont harmoniques,  $\Delta \phi = 0$  et  $\Delta w = 0$ , ainsi  $h$  est une fonction analytique. Rappelons que la dérivée d'une fonction analytique  $f = u + iv$  est donnée par  $f' = u_{,1} + iv_{,1} = v_{,2} - iu_{,2}$ . En appliquant cette règle à  $h$ , on obtient  $h' = \phi_{,1} + i\mu u_{,1}$ . En

utilisant la définition de la fonction de contrainte et la loi contrainte-déformation, nous voyons que  $h'$  peut s'écrire comme suit :

$$h'(z) = \tau_2(z) + i\tau_1(z) \equiv \tau \quad \text{I-27}$$

ou  $\tau$  est appelée contrainte complexe ( $\tau$  est aussi une fonction analytique).

Un vecteur normal complexe peut aussi être défini par  $n \equiv n_1 + in_2$ . Le produit de  $\tau$  par  $n$  est

$\tau n = \tau_2 n_1 - \tau_1 n_2 + i(\tau_1 n_1 + \tau_2 n_2)$ . On observe que la partie imaginaire de cette dernière expression n'est autre que la composante du vecteur contrainte selon  $z$  notée  $t(z)$  :

$$\text{Im}[\tau(z)n(z)] = t(z) \quad \text{I-28}$$

### I-5 Présentation de la méthode de collocation de frontière [7] :

La méthode de collocation de frontière est une méthode de calcul du facteur d'intensité de contrainte basée sur le développement des contraintes en série infinie.

L'idée générale est qu'étant donné les conditions aux limites en contraintes pour un problème, on exprime les contraintes en un nombre fini de positions, appelée points de collocation, à l'aide du développement des contraintes avec des coefficients inconnus.

Pour chaque point de collocation, on obtient une équation pour les coefficients inconnus. Il suffit d'utiliser autant de points de collocation que d'inconnues dans le développement. On peut résoudre le système d'équations pour les coefficients du développement. Pour une meilleure précision, plus de points de collocation que d'inconnues peuvent être utilisés. Dans ce dernier cas, le système est résolu par la méthode des moindres carrés.

La valeur du coefficient correspondant au terme  $r^{-\frac{1}{2}}$  de l'expansion du champ de contraintes est le facteur d'intensité de contrainte ( $r$  est la distance à la pointe de fissure).

Bien que cette méthode puisse être appliquée en mode I, II ou III, ici nous nous intéresserons aux problèmes en mode III.

Rappelons que la formulation en variables complexes pour l'élasticité anti-plane s'écrit :

$$(I-29) \quad \begin{cases} \tau = \tau_{23} + i\tau_{13} \\ n = n_1 + in_2 \\ t = t_3 = \text{Im}(\tau n) \end{cases}$$

Ou  $t$  est une abréviation pour  $t_z$ , la composante selon  $z$  du vecteur contrainte,  $n$  et le vecteur normal extérieure unitaire (Figure I-3), et  $n_x$  et  $n_y$  ses composantes selon  $x$  et  $y$ .

La contrainte complexe  $\tau$  qui est une fonction analytique, peut être exprimée par une série infinie de fonctions puissance :

$$\text{I-30} \quad \tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n Z^{\lambda_n}$$

Avec

$$C_n = A_n + iB_n \quad (A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{I-31}$$

Pour satisfaire les condition de bord libre sur les lèvres de la fissure :  $\text{Re}(\tau)=0=(\tau_{23})$

Sur  $\theta = \pm\pi$  :

$$\text{Re}(\tau) = \sum r^{\lambda_n} (A_n \cos \lambda_n \theta - B_n \sin \lambda_n \theta) = 0 \quad \text{I-32}$$

$$\text{si } \theta = \pi \quad A_n \cos \lambda_n \pi - B_n \sin \lambda_n \pi = 0 \quad \text{II-33}$$

$$\text{si } \theta = -\pi \quad A_n \cos \lambda_n \pi + B_n \sin \lambda_n \pi = 0 \quad \text{II-34}$$

Nous faisons la somme et la soustraction entre les deux équations I-33 et I-34.

$$\begin{cases} A_n \cos \lambda_n \pi = 0 \\ B_n \sin \lambda_n \pi = 0 \end{cases} \quad \text{I-35}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = n \Rightarrow A_n = 0 & B_n \forall que \\ \lambda_n = n - \frac{1}{2} \Rightarrow B_n = 0 & A_n \forall que \end{cases} \quad \text{I-36}$$

Pour éviter un déplacement infini en pointe de fissure, nous devons éliminer tous les exposants  $\lambda_n < -1/2$  ( $n \geq 0$ ). On obtient:

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)} \left[ \cos \left( -\frac{1}{2} + n \right) \theta + i \sin \left( -\frac{1}{2} + n \right) \theta \right] + i B_n r^n [\cos n \theta + i \sin n \theta] \quad \text{I-37}$$

$$\begin{aligned} \tau = \sum_{n=0}^{\infty} [ & (A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)} \cos \left( -\frac{1}{2} + n \right) \theta - B_n r^n \sin n \theta) \\ & + i (A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)} \sin \left( -\frac{1}{2} + n \right) \theta + B_n r^n \cos n \theta) ] \end{aligned} \quad \text{I-38}$$

À partir de là on peut faire :

$$\tau = A_0 r^{-\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + i \left( -A_0 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + B_0 r^0 \right) + \dots = \tau_{23} + i \tau_{13}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, de part et d'autre de l'équation, on obtient :

$$\begin{cases} \tau_{23} = A_0 r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots\dots \\ \tau_{13} = -A_0 r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2} + B_0 r^0 + \dots\dots \end{cases} \quad \text{I-39}$$

D'autre part, nous savons que le développement asymptotique des contraintes en mode III s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tau_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \\ \tau_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{I-40}$$

Par identification  $K_{III} = A_0 \sqrt{2\pi}$  I-41

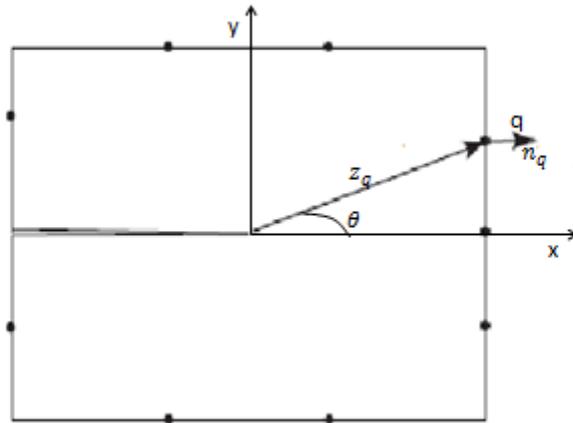


Figure I-4: Exemple de points de collocation, q = 1, m points (m=9)

Supposons que nous avons m points de collocation et que la contrainte  $t_q$ , la position  $z_q$  et la normale  $n_q$  sont connus en chaque point de collocation (figure I-4).

En chacun des m points de collocation on met en égalité la contrainte  $t_q$  donnée et la contrainte calculée avec (I-29) le développement (I-30) tronqué à (2p+2) termes

(avec  $2p+2 \leq m$ )

Pour q=1, m

$$t_q = \text{lm}(\sum_{n=0}^p C_n Z_q^{\lambda_n} n_q) \quad \text{I-42}$$

Nous obtenons un système  $m$  équations à  $2p+2$  inconnues,  $A_0, B_0, \dots, A_p, B_p$ . La valeur du premier terme  $A_0$  correspond au facteur d'intensité de contrainte,  $K_{III} = A_0\sqrt{2\pi}$ . Pour plus de précision, on prend plus de points de collocation que d'inconnues ( $m \geq 2p+2$ ). Le système sera résolu par la méthode des moindres carrés.

### **I-6 la méthode des moindres carrés [8] :**

La méthode des moindres carrés est l'outil de la théorie des erreurs ou de l'estimation, utilisés tous les jours dans toutes les sciences d'observation.

La théorie des erreurs a été développée pour résoudre trois problèmes :

- Combiner les erreurs pour choisir une valeur "juste milieu"
- Trouver la loi de densité de probabilité des erreurs.
- Choisir une démarche pour déterminer des quantités dans un système d'équations surdéterminé.

La méthode des moindres carrés est une méthode statistique courante utilisée pour la recherche de la valeur la plus probable d'une quantité observée par diverses mesures. Elle donne le résultat suivant : la valeur la plus probable est telle que la somme des carrés des différences entre les observations et cette valeur est minimum.

La première publication de la méthode des moindres carrés (destinée à déterminer des quantités dans un système d'équations surdéterminé) est due à Legendre en 1805 et Gauss en 1809.

Nous nous intéresserons ici au cas où le nombre d'observations est supérieur au nombre de paramètres. Ceci nous conduira à résoudre, suivant le choix du modèle, des systèmes linéaires surdéterminés.

La "meilleure solution" d'un système surdéterminé peut être définie de plusieurs façons. Étant donné les observations, les variables indépendantes  $A$  et  $x$  le vecteur de paramètres, la solution retenue correspond à la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|^2 \quad \mathbf{I-43}$$

#### **I-6-1 Forme standard :**

**Définition :** On appelle forme standard d'un problème de moindres carrés la donnée de :

- La matrice  $A = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & \dots & V_{1,n} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & \dots & V_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m,1} & V_{m,2} & \dots & V_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$  appelée matrice des données

- La vectrice réponse ou des observations  $y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

- le vecteur de paramètres  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Il faut trouver le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que l'erreur  $\|Ax - y\|^2$  soit minimale.

### I-6-2 Solution analytique :

Soit  $E(x) = \|Ax - y\|^2$  la fonction erreur. On sait que  $E(x)$  est minimale  $\Rightarrow E'(x) = 0$ .

Si  $E$  est strictement convexe, alors :

$$E(x) \text{ minimale} \Leftrightarrow E'(x) = 0$$

On cherche donc  $x \in \mathbb{R}^n$  tel  $E'(x) = 0$ . Donc, les dérivées partielles par rapport à tous les paramètres du vecteur  $x$  doivent être nulles :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{I-44}$$

Ou on peut faire autrement :

Prendre le système surdéterminé  $Ax=y$ , et effectuer le produit à gauche par la matrice transposée de  $A$  :



En notation matricielle ce système s'écrit

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \mathbf{I-52}$$

On rappelle qu'il existe une solution unique si et seulement si  $\det(A) \neq 0$

La solution du système linéaire s'obtient par

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{I-53}$$

Ce qui suggère que l'on a besoin de l'inverse de la matrice A pour calculer x.

**Chapitre II: Exemple traité – Résolution  
avec et sans la méthode des moindres  
carrés**

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode de collocation de frontière au calcul du FIC d'un cylindre fissuré en mode III. Nous effectuons les calculs avec et sans la méthode des moindres carrés en comparant les résultats obtenus dans les deux cas. Nous comparons également avec les résultats d'A.T. Zehnder [7].

### II-1 Problème traité :

Le problème traité est une fissure dans un cylindre de rayon  $R=1$  (figure II-1). La surface latérale du cylindre est chargée par des efforts dans la direction  $z$ , on prend  $t = \sin\theta$ .

#### Remarque

Le travail étant purement théorique et numérique, les calculs ont été effectués sans dimensions. Les résultats obtenus sont adimensionnels.

#### II-1-1 Résultats d'A.T. Zehnder [7] :

A.T. Zehnder a calculé le FIC  $K_{III}$  pour ce problème. Il a utilisé des points de collocation équidistants sur le pourtour du cylindre. Les résultats présentés sur (la Figure II-2) montrent qu'à partir d'un nombre de points de collocation  $m \approx 20$  la valeur de  $K_{III}$  a pratiquement convergée vers 2,13 (approximativement).

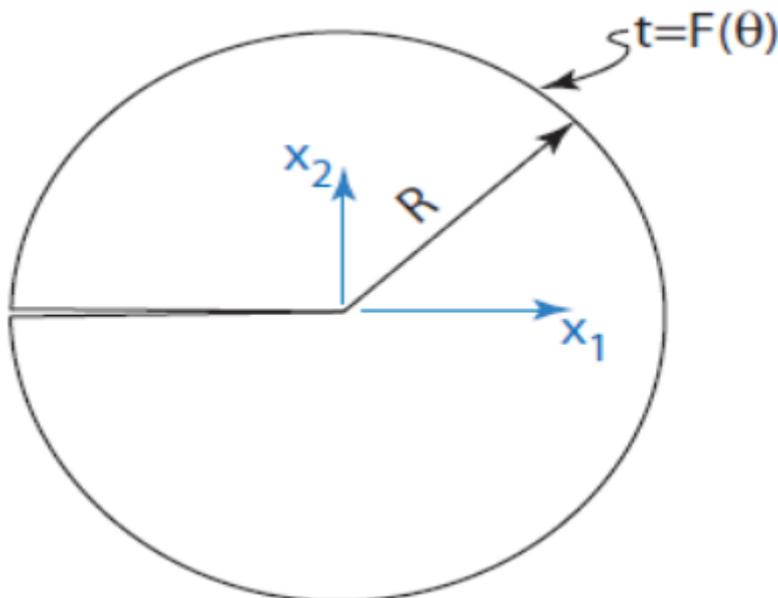


Figure II-1: Problème étudié par A.T. Zehnder

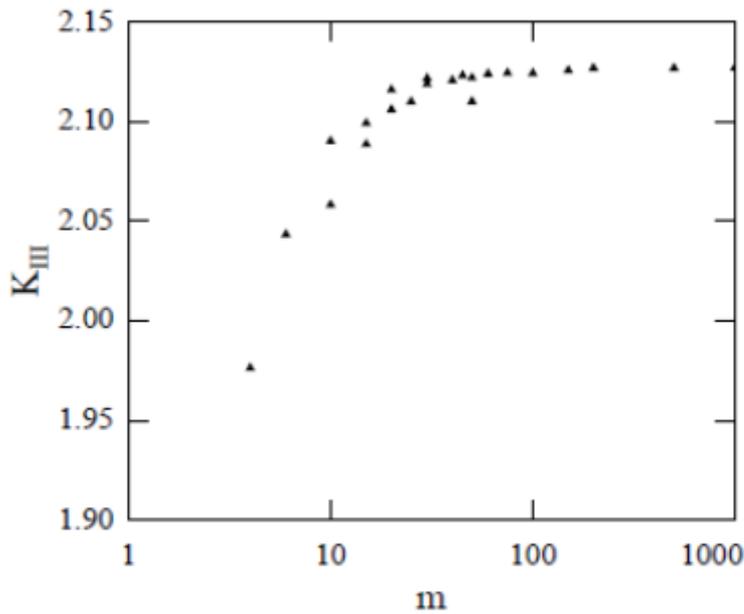


Figure II-2:  $K_{III}$  en fonction du nombre de points de collocation  $m$  (A.T. Zehnder [7])

### Remarque

Le nombre d'inconnues utilisé dans le calcul n'est pas précisé.

### II-2 Résolution du problème :

On reprend l'équation (I-42)

$$t_q = \text{Im}(\sum_{n=0}^p C_n Z_q^{\lambda_n} n_q)$$

Pour le cercle on a :  $n_q = e^{i\theta_q} = \cos\theta_q + i\sin\theta_q$

En reportant dans (I-42), on obtient :

$$t_q = \text{Im}(\tau n_q)$$

$$= \text{Im}\left(\sum_{n=0}^p [(A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)}) \cos\left(-\frac{1}{2} + n\right) \theta_q - B_n r^n \sin n\theta_q] + i(A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)}) \sin\left(-\frac{1}{2} + n\right) \theta_q + B_n r^n \cos n\theta_q\right) (\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{II-1}$$

$$= \sum_{n=0}^p (A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)}) \cos\left(-\frac{1}{2} + n\right) \theta_q - B_n r^n \sin(n\theta_q) \sin\theta_q + (A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)}) \sin\left(-\frac{1}{2} + n\right) \theta_q + B_n r^n \cos(n\theta_q) \cos\theta_q \quad \text{II-2}$$

Finalement I-42 devient :

$$t_q = \sum_{n=0}^p (A_n r^{(-\frac{1}{2}+n)}) \sin\left(\frac{1}{2} + n\right) \theta_q + B_n r^n \cos(n+1)\theta_q \quad \text{II-3}$$

Pour des commodités de programmation numérique, on fait le changement de variable suivant:

$$N=n+1$$

II-3 devient :

$$t_q = \sin\theta_q = \sum_{n=1}^p (A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)}) \sin\left(-\frac{1}{2} + N\right) \theta_q + B_N r^{N-1} \cos N\theta_q \quad \text{II-4}$$

$$q = 1 \dots m \quad m \geq 2p$$

Avec cette notation, c'est le coefficient  $A_1$  qui donne le  $K_{III}$  :

$$K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi} \quad \text{II-5}$$

On choisit  $m$  points de collocations équidistants donnés par :

$$\theta_q = \frac{2\pi q}{m+1} - \pi, \quad q = 1..m, \quad \theta \in ] - \pi, \pi[ \quad \text{II-6}$$

### Remarque

Les points  $\theta = \pm\pi$  sont à éviter car ce sont des points anguleux, où la normale n'est pas définie.

### **II-2-1 Solution par la méthode des moindres carrés :**

On prend  $m > 2p$  dans (II-4). Nous avons effectué plusieurs calculs en faisant varier  $p$ . Pour chaque  $p$ , nous augmentons  $m$  à partir de  $2p+1$ . Pour chaque valeur de  $m$ , nous calculons le  $K_{III}$ . Nous nous arrêtons lorsque la valeur du  $K_{III}$  se stabilise (convergence). Nous incrémentons le  $p$  et répétons l'opération. Nous observons que la valeur du  $K_{III}$  dépend de  $p$  et se stabilise à partir de  $p = 20$ . Nous présentons dans le tableau II-1 les valeurs du  $K_{III}$  pour chaque  $p$ . Notons enfin que la valeur finale du  $K_{III}$  (2.1278) est la même que celle trouvée par A. T. Zehnder ( $\approx 2.13$ ).

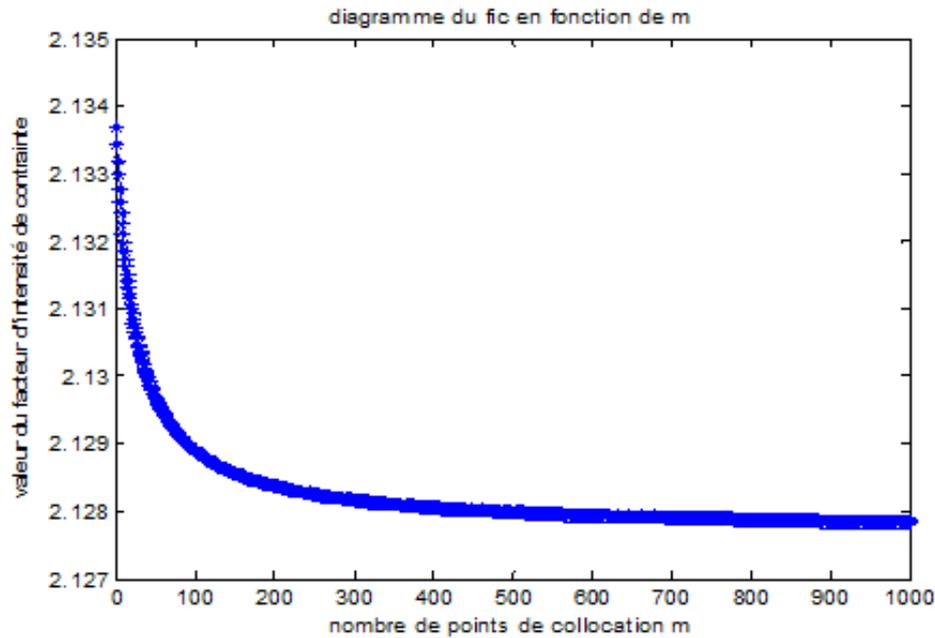
p	Fic	p	Fic
1	2.1319	12	2.1280
2	2.1294	13	2.1279
3	2.1288	14	2.1279
4	2.1285	15	2.1279
5	2.1283	16	2.1279
6	2.1282	17	2.1279
7	2.1281	18	2.1279
8	2.1281	19	2.1279
9	2.1280	20	2.1278
10	2.1280	35	2.1278
11	2.1280	50	2.1278

**Tableau II-1:  $K_{III}$  en fonction de p avec les moindres carrés**

Nous présentons, à titre d'exemple, les détails des calculs pour p=20 (Tableau II-2 et Figure II-3). Nous observons sur le Tableau II-2 que la convergence est réalisée à partir de m=626. Les détails des calculs pour les autres valeurs de p sont donnés en Annexe 1.

m	Fic	m	Fic	m	Fic	m	Fic
41	2.1337	194	2.1285	440	2.1281	680	2.1279
56	2.1313	219	2.1284	453	2.1280	728	2.1279
72	2.1303	250	2.1283	504	2.1280	776	2.1279
88	2.1297	294	2.1282	536	2.1280	840	2.1279
104	2.1294	344	2.1282	584	2.1280	904	2.1279
135	2.1290	356	2.1281	616	2.1280	979	2.1278
184	2.1286	419	2.1281	626	2.1279	1040	2.1278

**Tableaux II-2: calcul de fic en fonction de points de collocation m par la méthode de moindre carre**



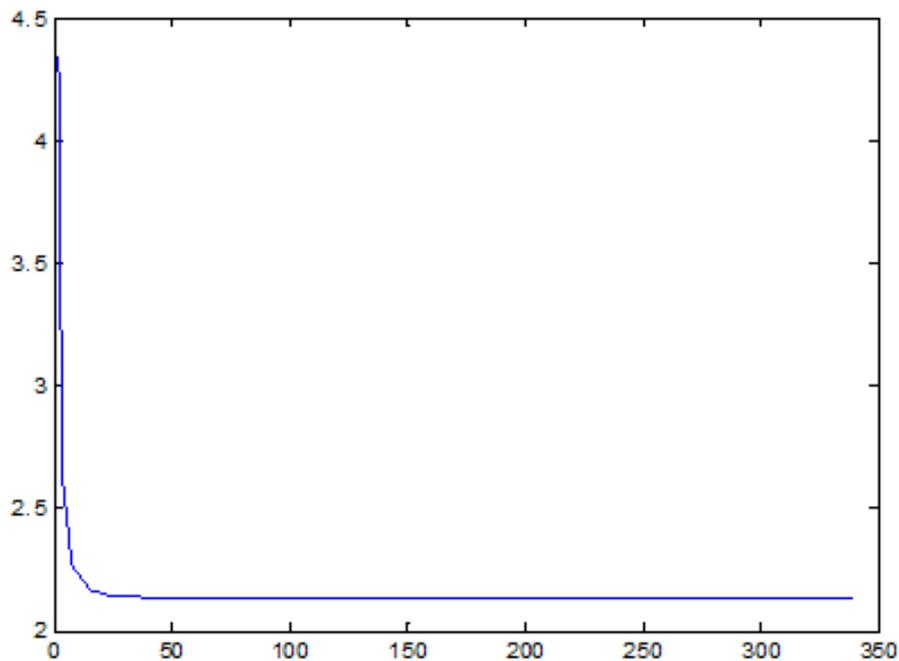
**Figure II-3 :  $K_{III}$  en fonction de m ( $p = 20$ )**

### II-2-2 Solution par résolution directe (sans la méthode des moindres carrés)

On prend  $m=2p$  dans (II-4). Le nombre de points de collocation est donc être égal au nombre d'inconnues. Nous procédons de la manière suivante : nous augmentons le  $p$  à partir de 1 et nous calculons à chaque fois le FIC correspondant. Nous nous arrêtons lorsque la valeur du FIC se stabilise (convergence). Nous présentons les résultats obtenus dans le Tableau II-3.

<b>p</b>	<b>m</b>	<b>FIC</b>	<b>p</b>	<b>m</b>	<b>FIC</b>
1	2	4.3416	80	160	2.1281
2	4	2.6356	90	180	2.1280
4	8	2.2647	100	200	2.1280
8	16	2.1646	110	220	2.1279
12	24	2.1446	120	240	2.1279
20	40	2.1340	129	285	2.1278
30	60	2.1305	130	260	2.1278
40	80	2.1293	140	280	2.1278
50	100	2.1287	150	300	2.1278
60	120	2.1284	160	320	2.1278
70	140	2.1282	170	340	2.1278

**Tableau II-3:  $K_{III}$  en fonction de p (sans les moindres carrés)**



**Figure II-4:  $K_{III}$  en fonction de  $m$  (sans les moindres carrés)**

Nous constatons pour un nombre d'inconnues de 129 le facteur d'intensité de contrainte se stabilise à la valeur de 2.1278 qui est la même que celle du paragraphe précédent et que la valeur obtenue par AT. Zehnder.

La programmation des calculs numériques, par les deux méthodes, a été effectuée avec le langage de programmation MATLAB (voir Annexe 2).

### **Conclusion :**

Nous constatons que le résultat final est le même avec les deux méthodes. En comparant les deux méthodes, nous remarquons que chacune présente des avantages et des inconvénients :

- La méthode avec moindres carrés, présente l'inconvénient de présenter plusieurs convergences du  $K_{III}$  (une pour chaque valeur de  $p$ ). Il faut donc effectuer plusieurs calculs pour déterminer la valeur minimale de  $p$  ( $p=20$  dans notre cas). L'avantage est qu'il suffit après de résoudre un système de  $40 \times 40$  pour obtenir le résultat. Ce qui représente un coût de calcul minime.
- La méthode sans moindres carrés présente l'avantage de présenter une seule convergence du  $K_{III}$ . L'inconvénient est qu'il faut résoudre un système de  $258 \times 258$  (correspondant à  $p=129$ ) pour obtenir le résultat final. Ce qui représente un coût de calcul plus important.

**Chapitre III : Etude de l'influence de la répartition des points de collocation sur le résultat final**

Dans ce chapitre nous allons étudier l'influence du choix de la répartition des points de collocation sur le résultat. En effet dans les calculs du chapitre précédent, les points de collocation ont été répartis sur le cercle complet. Dans cette partie nous effectuons trois calculs avec trois répartitions différentes (1/4 de cercle, 1/2 cercle et 3/4 de cercle). Nous comparons ensuite les résultats obtenus.

### III-1 1/4 cercle :

Nous commençons d'abord avec la méthode « sans moindres carrés ». Nous calculons le FIC pour différentes valeurs de p. Les résultats obtenus sont affichés sur le tableau III-1. Les positions des points de collocation sont calculées avec la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{\pi(q-1)}{2(m-1)} \quad q=1..m \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{III-1}$$

p	m	Fic
1	2	3.5449
2	4	2.6809
3	6	2.4767
4	8	2.3999
5	10	2.3870
6	12	2.4639
7	14	2.7761
8	16	3.8412
9	19	7.4876

Tableau III-1:  $K_{III}$  en fonction de p (1/4 de cercle) sans moindres carrés

Nous constatons une variation instable du  $K_{III}$  en fonction de p, et par conséquent une absence de convergence. Ce phénomène est due à une instabilité numérique (la matrice se rapproche de la singularité lorsque p augmente).

A partir de p=5 (début de l'instabilité) nous avons effectué une autre série de calculs avec la méthode des moindres carrés. Nous avons constaté une absence de convergence à partir de p=6. Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus pour p=5 et p=6.

m	Fic	m	Fic	m	Fic
11	2.3845	135	2.3777	298	2.3779
26	2.3775	146	2.3778	362	2.3779
42	2.3773	160	2.3778	458	2.3780
58	2.3774	170	2.3778	506	2.3780
74	2.3775	186	2.3778	666	2.3781
106	2.3777	218	2.3779	746	2.3781
122	2.3777	250	2.3780	1010	2.3781

Tableau III-2:  $K_{III}$  en fonction de m pour  $p=5$  (1/4 de cercle) avec moindres carrés

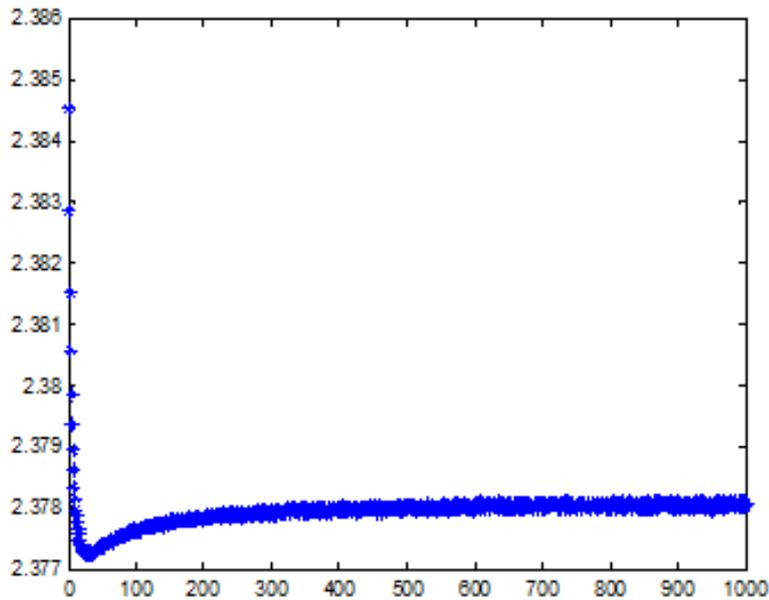


Figure III-1:  $K_{III}$  en fonction de m pour  $p=5$  (1/4 de cercle) avec moindres carrés

Nous constatons, pour  $p=5$ , une convergence du  $K_{III}$  vers la valeur de 2.3781 à partir de  $m=666$ .

m	Fic	m	Fic
13	2.1520	513	2.3655
113	2.4084	613	2.3073
213	2.3882	713	2.5088
313	2.3723	813	2.3112
413	2.5940	1012	2.4133

Tableau III-3:  $K_{III}$  en fonction de  $m$  pour  $p=6$  (1/4 de cercle) avec moindres carrés

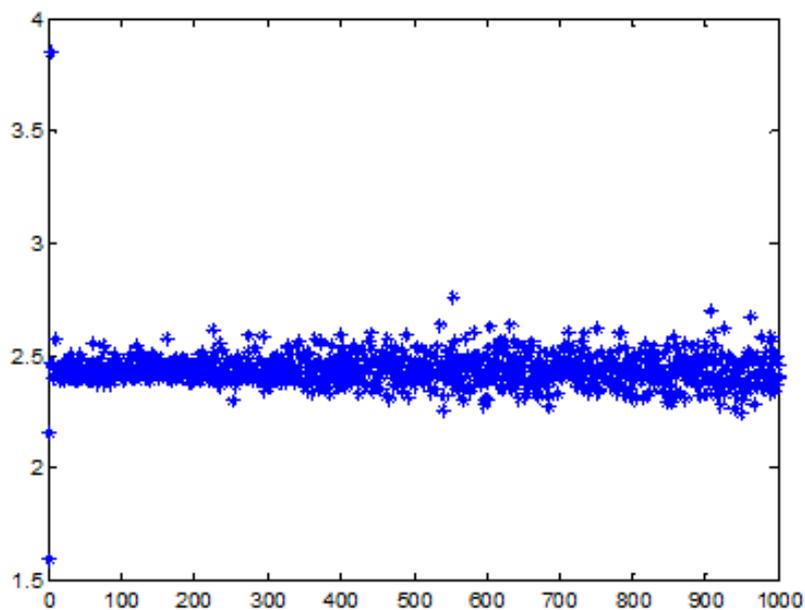


Figure III-2:  $K_{III}$  en fonction de  $m$  pour  $p=6$  (1/4 de cercle) avec moindres carrés

Nous constatons pour  $p=6$ , une instabilité et une absence de convergence du  $K_{III}$ .  
La programmation des calculs numériques, par les deux méthodes, a été effectuée avec le langage de programmation MATLAB (voir Annexe 3).

### III-2 1/2 cercle :

Nous commençons d'abord avec la méthode « sans moindres carrés ». Nous calculons le FIC pour différentes valeurs de p. Les résultats obtenus sont affichés sur le tableau III-4. Les positions des points de collocation sont calculées avec la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{\pi q}{m+1} \quad q=1..m, \quad \theta \in [0, \pi[ \quad \text{III-2}$$

P	m	Fic
1	2	3.1783
2	4	2.9105
3	6	7.9540
4	8	108.6241
5	10	2.8709e+03
6	12	9.8381e+04
7	14	3.9922e+06
8	16	1.8357e+08
9	18	9.2288e+09

**Tableau III-4:  $K_{III}$  en fonction de m (p=2, 1/2 cercle) avec moindres carrés**

Nous constatons une variation instable du  $K_{III}$  en fonction de p, et par conséquent une absence de convergence. Ce phénomène est due à une instabilité numérique (la matrice se rapproche de la singularité lorsque p augmente).

A partir de p=2 (début de l'instabilité) nous avons effectué une autre série de calculs avec la méthode des moindres carrés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

<b>p</b>	<b>Fic</b>
<b>2</b>	<b>2.5173</b>
<b>3</b>	<b>4.0561</b>
<b>4</b>	<b>20.0766</b>
<b>5</b>	<b>0.2270 e+03</b>
<b>6</b>	<b>0.3382 e+04</b>

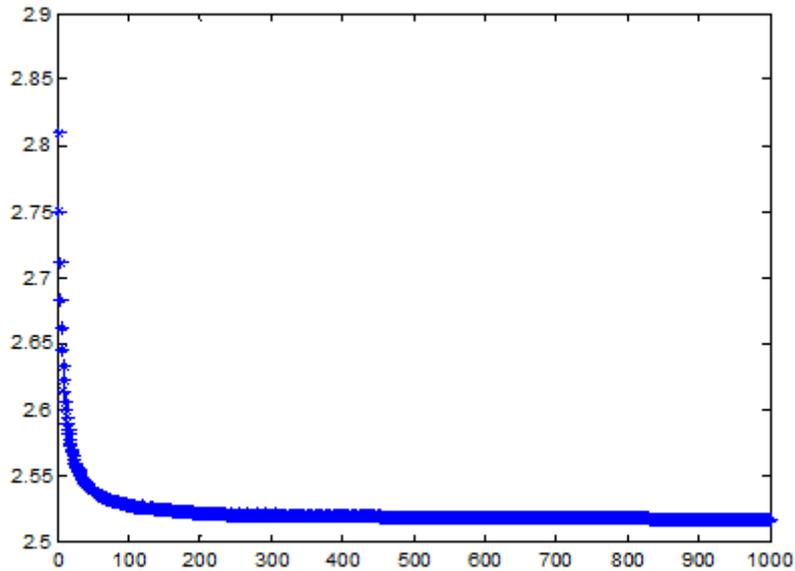
**Tableaux III-5:  $K_{III}$  en fonction de p (1/2 cercle) avec moindres carrés**

Nous nous sommes arrêtés dans les calculs à la valeur  $p=6$  car nous avons constaté qu'il n'y a pas de convergence au-delà de cette valeur (la matrice se rapproche de la singularité).

A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous les détails des résultats pour  $p=2$ . Les détails pour les autres valeurs de  $p$  sont présentés dans l'Annexe 4.

<b>m</b>	<b>Fic</b>	<b>m</b>	<b>Fic</b>	<b>m</b>	<b>Fic</b>
<b>5</b>	<b>2.8093</b>	<b>308</b>	<b>2.5200</b>	<b>685</b>	<b>2.5179</b>
<b>20</b>	<b>2.5778</b>	<b>340</b>	<b>2.5196</b>	<b>775</b>	<b>2.5177</b>
<b>52</b>	<b>2.5391</b>	<b>404</b>	<b>2.5190</b>	<b>830</b>	<b>2.5176</b>
<b>100</b>	<b>2.5280</b>	<b>452</b>	<b>2.5187</b>	<b>893</b>	<b>2.5175</b>
<b>132</b>	<b>2.5251</b>	<b>516</b>	<b>2.5184</b>	<b>962</b>	<b>2.5174</b>
<b>212</b>	<b>2.5217</b>	<b>548</b>	<b>2.5183</b>	<b>980</b>	<b>2.5173</b>
<b>244</b>	<b>2.5210</b>	<b>613</b>	<b>2.5181</b>	<b>1004</b>	<b>2.5173</b>

**Tableau III-6:  $K_{III}$  en fonction de m ( $p=2$ , 1/2 cercle) avec moindres carrés**



**Figure III-3:  $K_{III}$  en fonction de  $m$  ( $p=2$ , 1/2 cercle) avec moindres carrés**

Les programmes MATLAB sont également en (annexe 4).

### III-3 3/4 cercle :

Nous commençons d'abord avec la méthode « sans moindres carrés ». Nous calculons le FIC pour différentes valeurs de  $p$ . Les résultats obtenus sont affichés sur le tableau III-7. Les positions des points de collocation sont calculées avec la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{3\pi q}{2(m+1)} - \frac{\pi}{2}, \quad q=1..m, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \text{III-3}$$

p	m	Fic	p	m	Fic
1	2	3.5449	10	20	411.7235
2	4	2.4402	11	22	2.983e+03
3	6	2.2782	12	24	2.1823 e+04
4	8	2.2331	13	26	1.7029 e+05
5	10	2.2611	14	28	1.3777 e+06
6	12	2.5072	15	30	1.1501 e+07
7	14	3.8792	16	32	9.8084 e+07
8	16	11.9474	17	34	8.6413 e+08
9	18	63.159			

**Tableau III-7:  $K_{III}$  en fonction de  $p$  (3/4 de cercle) sans moindres carrés**

Nous constatons une variation instable du  $K_{III}$  en fonction de  $p$ , et par conséquent une absence de convergence. Ce phénomène est due à une instabilité numérique (la matrice se rapproche de la singularité lorsque  $p$  augmente).

A partir de  $p=4$  (début de l'instabilité) nous avons effectué une autre série de calculs avec la méthode des moindres carrés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

<b>p</b>	<b>Fic</b>
<b>4</b>	<b>2.1405</b>
<b>5</b>	<b>2.1474</b>
<b>6</b>	<b>2.1690</b>
<b>7</b>	<b>2.2309</b>
<b>8</b>	<b>2.4153</b>
<b>9</b>	<b>2.9898</b>
<b>10</b>	<b>4.8649</b>
<b>11</b>	<b>0.0111e+03</b>

**Tableaux III-8:  $K_{III}$  en fonction de  $p$  (3/4 de cercle) avec moindres carrés**

Nous nous sommes arrêtés dans les calculs à la valeur  $p=11$  car nous avons constaté qu'il n'y a pas de convergence au-delà de cette valeur (la matrice se rapproche de la singularité).

A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous les détails des résultats pour  $p=4$ . Les détails pour les autres valeurs de  $p$  sont présentés dans l'Annexe 5.

Les programmes MATLAB sont également en (annexe 5).

m	Fic	m	Fic	m	Fic
9	2.2184	200	2.1428	502	2.1411
24	2.1651	232	2.1424	552	2.1410
40	2.1547	264	2.1421	616	2.1409
56	2.1504	296	2.1419	696	2.1408
72	2.1481	344	2.1416	784	2.1407
104	2.1455	392	2.1414	896	2.1406
152	2.1438	456	2.1412	1008	2.1405

Tableau III-9:  $K_{III}$  en fonction de m ( $p=4$ ,  $\frac{3}{4}$  de cercle) avec moindres carrés

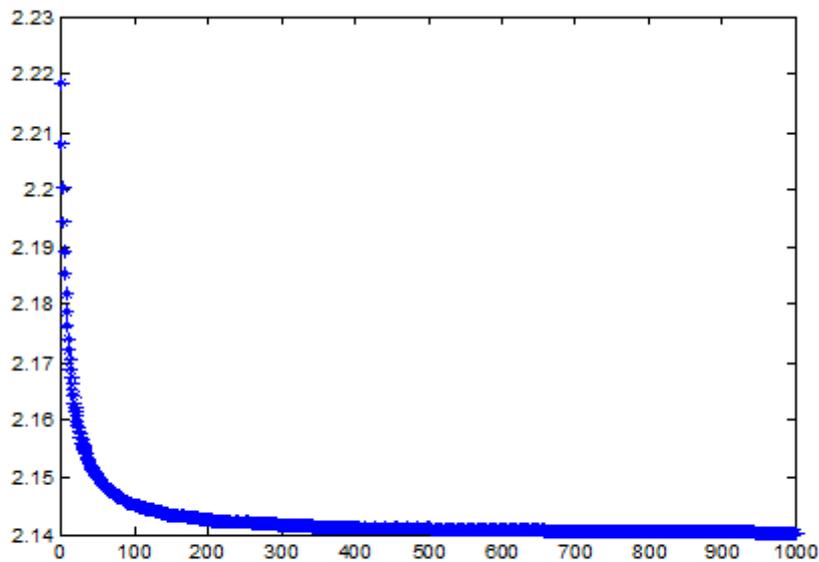


Figure III-4:  $K_{III}$  en fonction de m ( $p=4$ ,  $\frac{3}{4}$  de cercle) avec moindres carrés

### Conclusion :

Nous constatons que lorsque les points de collocation sont pris sur une partie de la frontière, les résultats numériques présentent des instabilités, et le  $K_{III}$  ne converge pas. La raison de cette instabilité numérique nous est inconnue pour l'instant. Nous concluons que pour éviter ce problème, il faut choisir les points de collocation sur toute la frontière du domaine.

## **Conclusion générale :**

Ce travail a pour but l'application de la méthode de la méthode de collocation de frontière pour le calcul du FIC dans le cas de l'élasticité anti-plane. Notre point de départ est un exemple traité par **A.T.ZEHNDER [7]**.

Nous avons calculé le FIC avec et sans les moindres carrés en choisissant des points de collocation uniformément répartis sur toute la frontière du domaine. Nous avons mis en évidence les avantages et les inconvénients des deux méthodes. Nous avons finalement constaté que les deux méthodes convergent vers le même résultat que celui obtenu par A.T. Zehnder [7].

Nous avons également étudié l'influence du choix de la répartition des points de collocation. Nous avons fait une comparaison entre les résultats obtenus en utilisant des points répartis sur toute la frontière du domaine, et les résultats obtenus en utilisant des parties différentes de la frontière. Les résultats ont montré une forte instabilité numérique dans le cas où les points de collocation ne sont pas répartis sur toute la frontière du domaine. Pour éviter ce problème, il est donc nécessaire d'utiliser toute la frontière du domaine.

Les perspectives que nous pouvons dégager pour la poursuite de ce travail sont les suivantes :

- Traiter d'autres problèmes en mode III.
- Reprendre le même exemple en modes I et II.

**Bibliographie :**

- [1] Ba DANH LE- thèse pour obtenir le grade de docteur de l'université de Strasbourg-  
MODELISATIO DISCRETE EN MECANIQUE DE LA RUPTURE DES MATERIAUX  
FRAGILES INSA (2013)
- [2] Pierre-Olivier Bouchard thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Ecole Nationale  
Supérieure des Mines de Paris Spécialité « Sciences et Génie des Matériaux »-  
CONTRIBUTION A LA MODELISATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DE LA  
RUPTURE ET STRUCTURES MULTIMATERIAUX (2000)
- [3] Hoai Nam LE thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Ecole Nationale Supérieure DE  
MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE- ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE  
FISSURE SOUS CHARGEMENT THERMIQUE CYCLIQUE INDUISANT UN  
GRADIENT DE TEMPERATUR DANS L'EPAISSEUR (2006)
- [4] Shixiang MA- thèse pour obtenir le grade de docteur de l'université BLAISE PASCAL –  
Clermont II – PROPAGATION DE FISSURE EN MODE MIXTE DANS UN MILIEU  
ELASTO-PLASTIQUE AVEC PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES RESIDUELLES  
(2005)
- [5] Elie Raphaël- Méthodes Mathématiques E.S.P.C.I (2012-2013)
- [6] cours Mr H.Ferdjani-mécanique de la rupture- USDB (2013)
- [7] Alan T.Zehnde,PH.D “Lecture Notes on Fracture Mechanics” Departement of Theoretical  
and Applied Mechanics Cornell univesity, Ithaca, NY 14853, (2007)
- [8] ESIAL - Mathématiques Numériques 2007 - 2008 - Tony Bourdier
- [9] METHODES NUMERIQUES- Manfred GILLI- D'département d'économétrie  
Université de Genève Version : 25 mars 2006

# Annexes

# **Annexe 1**

Les tableaux et figures jusqu'à la stabilisation du FIC

m	Fic	m	Fic	m	Fic
3	3.5449	338	2.1403	754	2.1333
18	2.3617	402	2.1383	786	2.1331
34	2.2521	450	2.1371	834	2.1328
50	2.2124	498	2.1362	882	2.1325
82	2.1794	530	2.1357	914	2.1323
130	2.1604	594	2.1349	962	2.1321
194	2.1496	642	2.1343	978	2.1320
274	2.1432	706	2.1337	1000	2.1319

Tableau: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=1

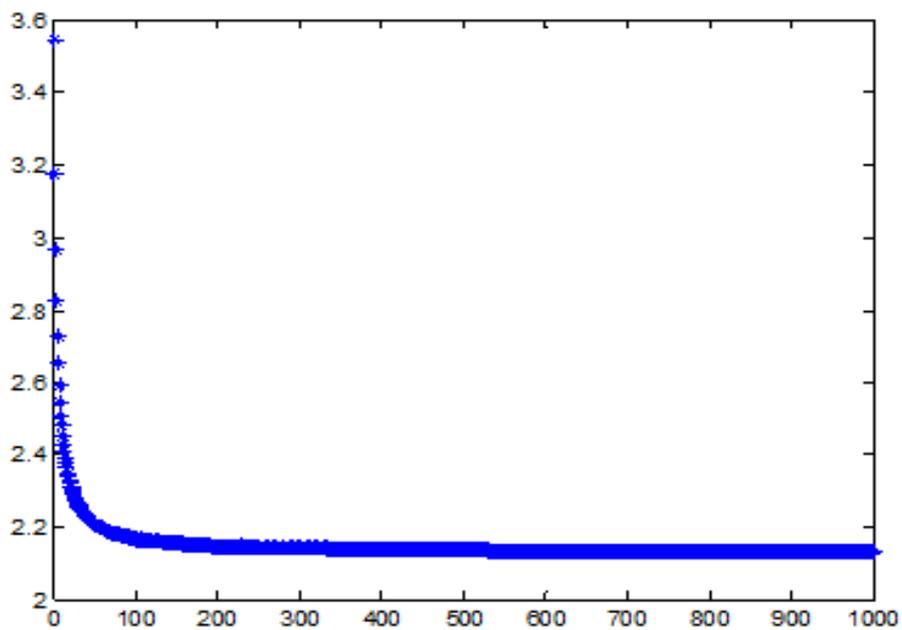


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=1

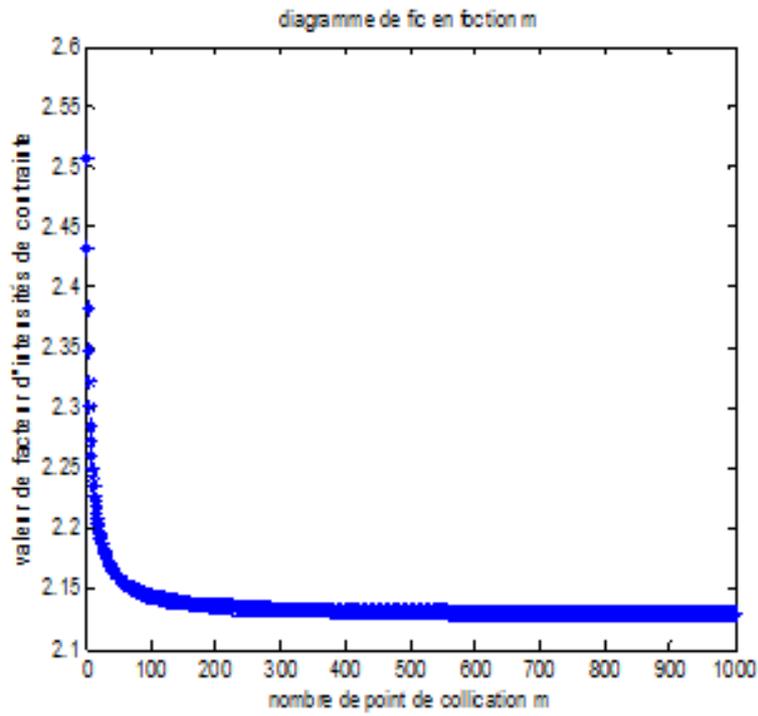


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=2

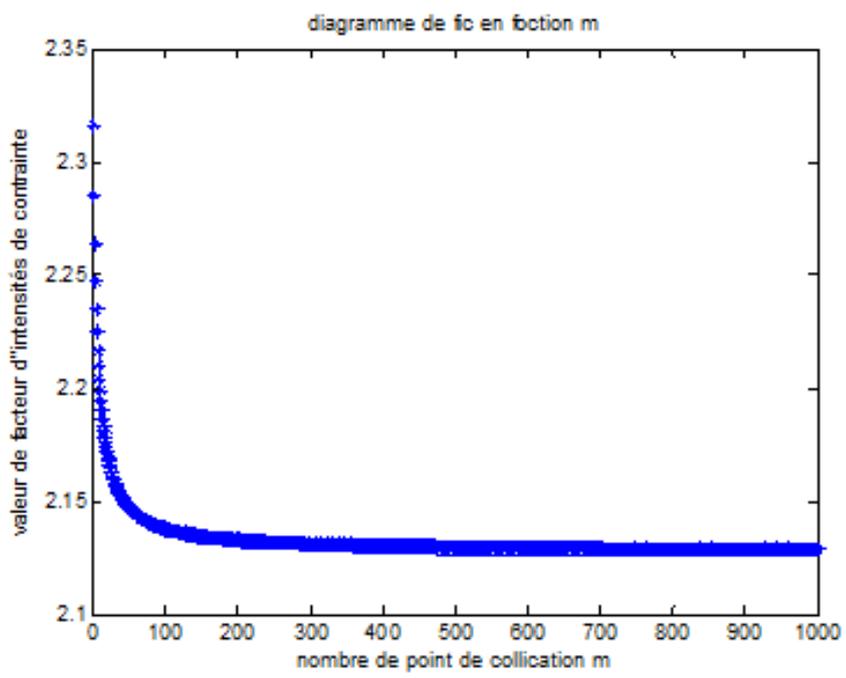


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=3

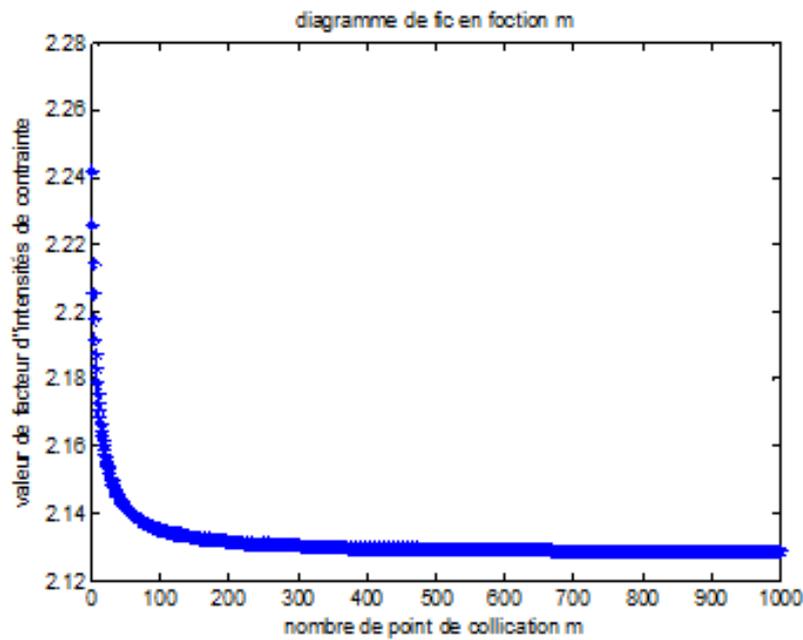


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=4$

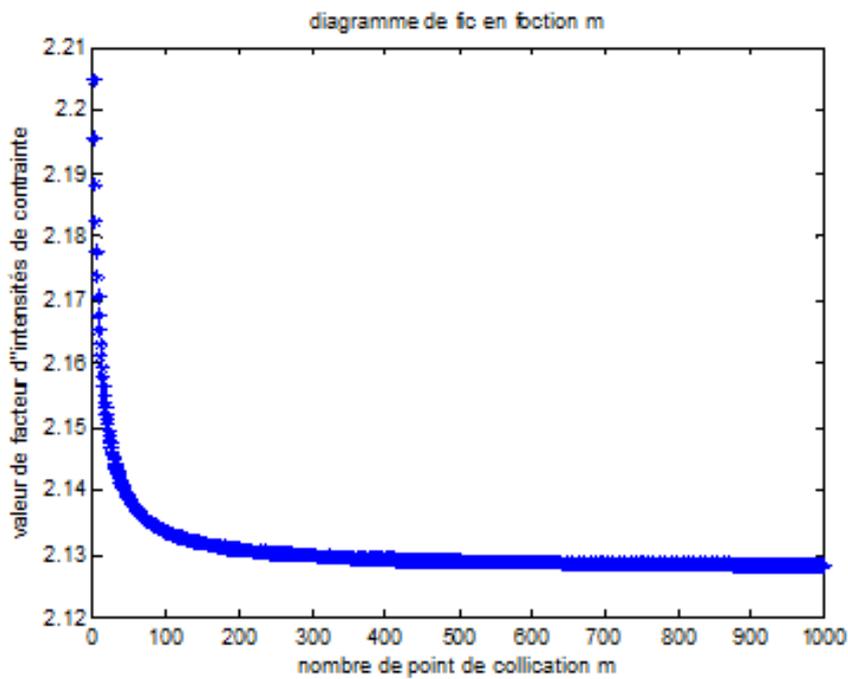


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=5$

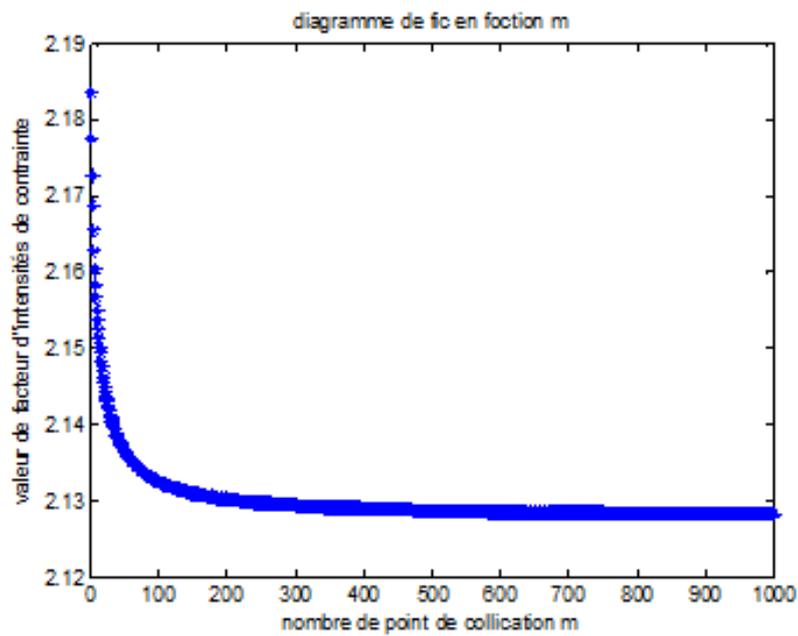


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=6$

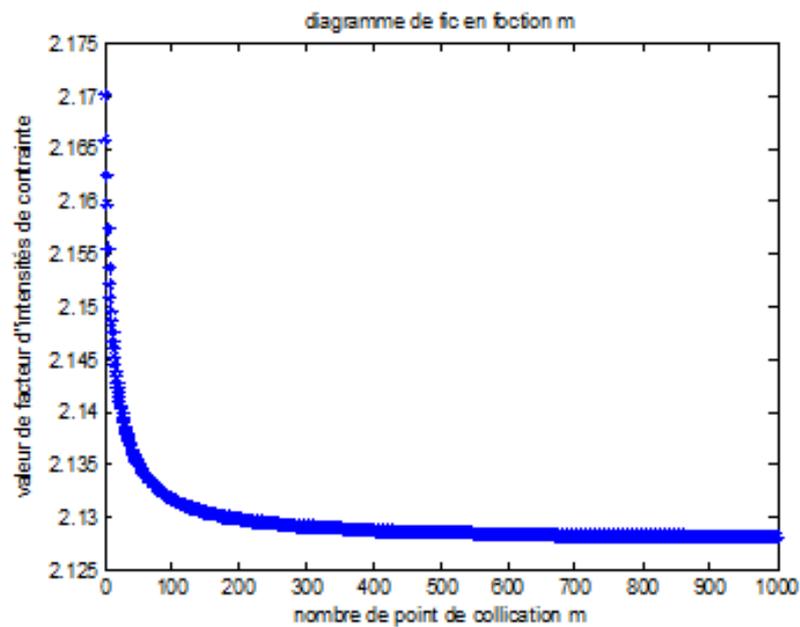


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=7$

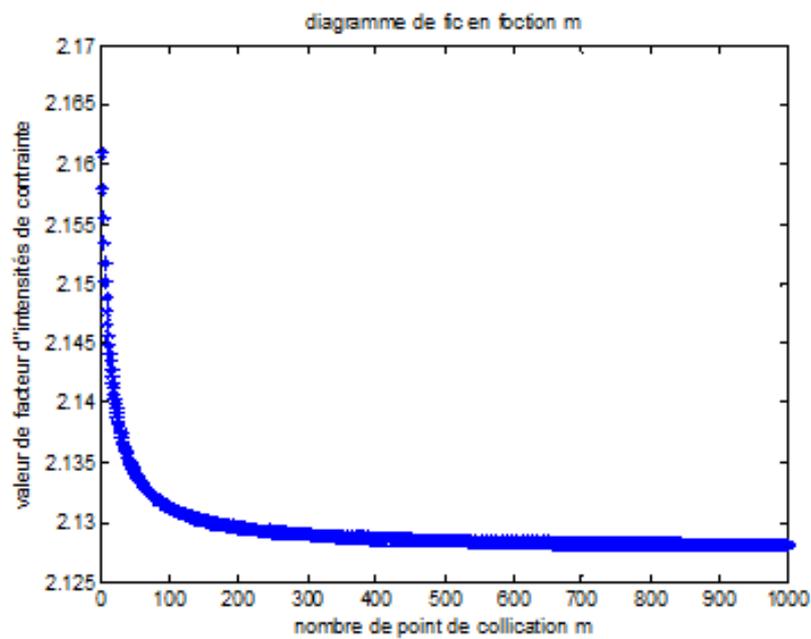


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=8$

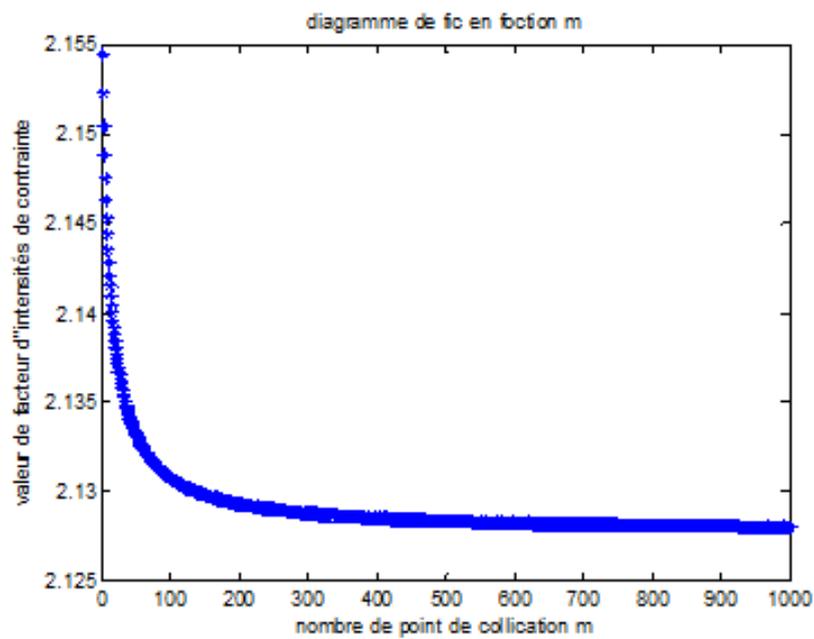


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=9$

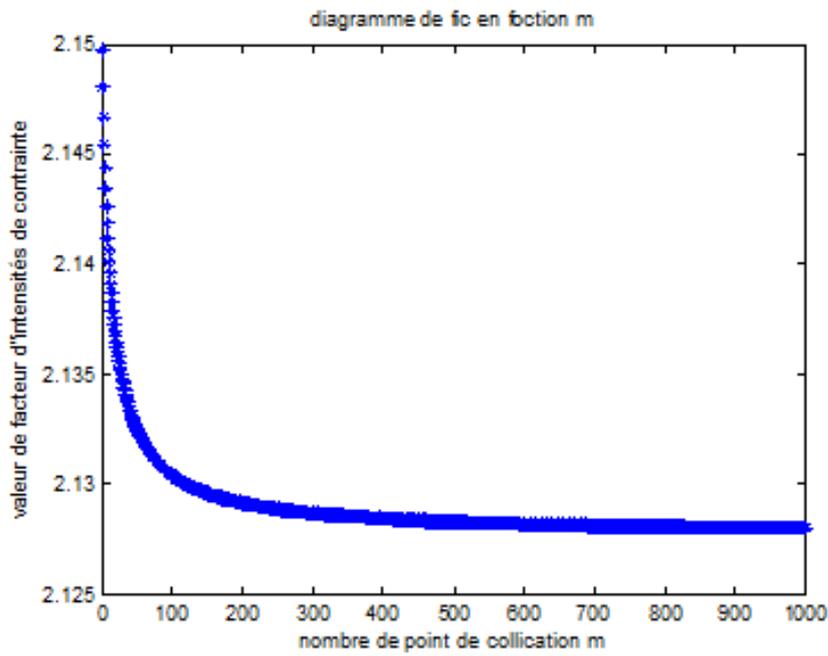


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=10$

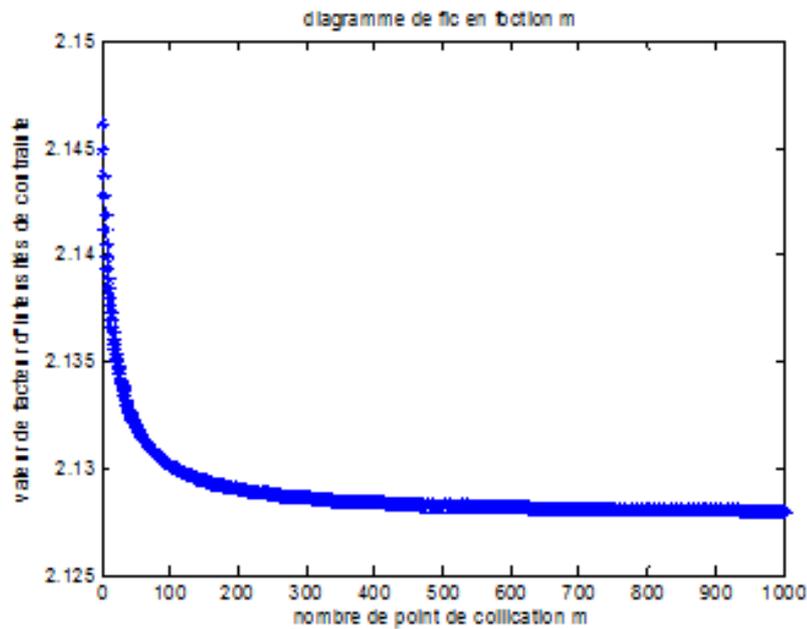


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=11$

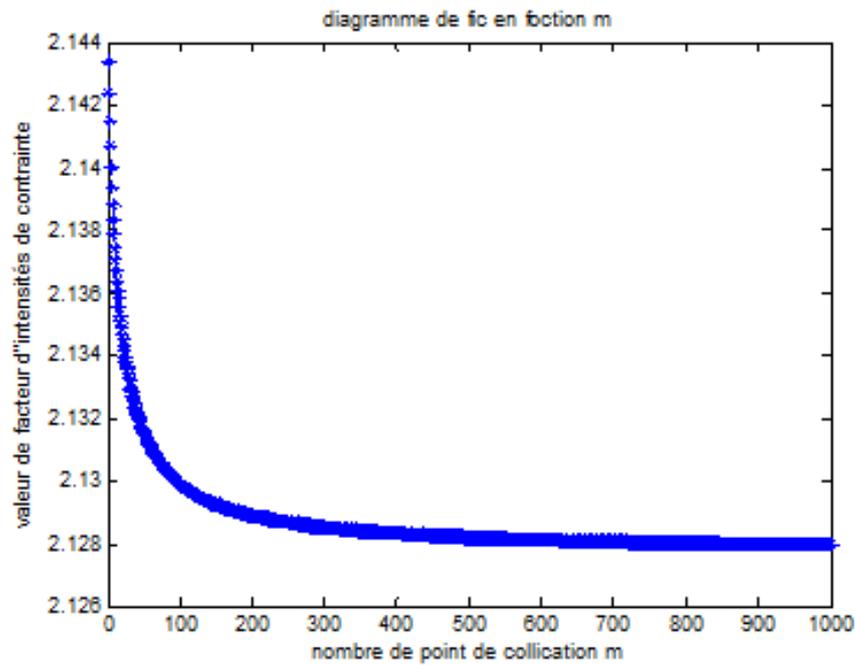


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour  $p=12$

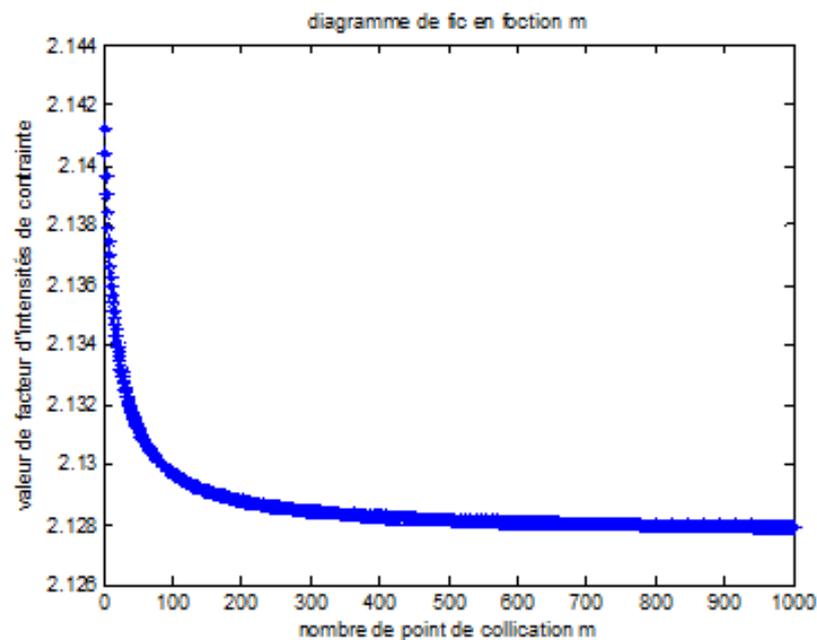


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour  $p=13$

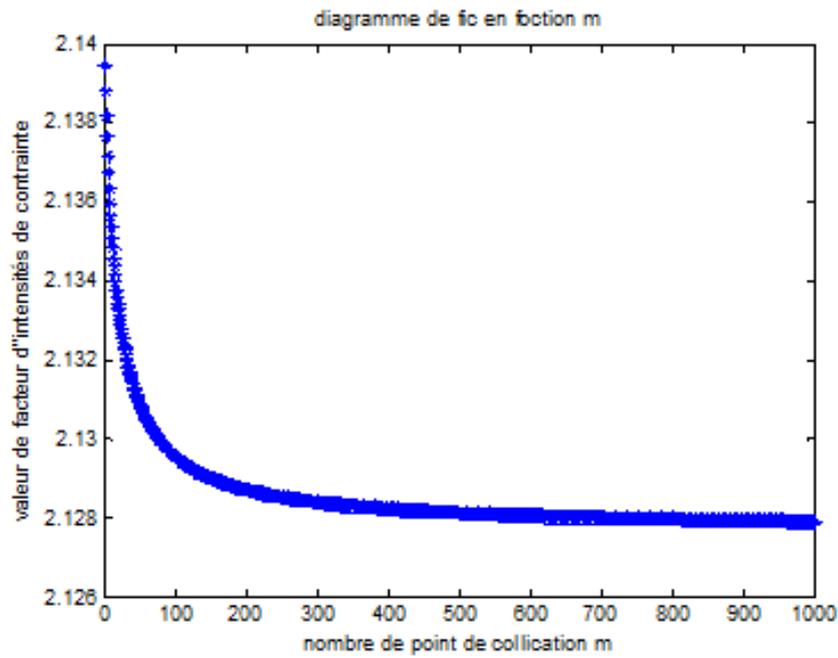


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=14$

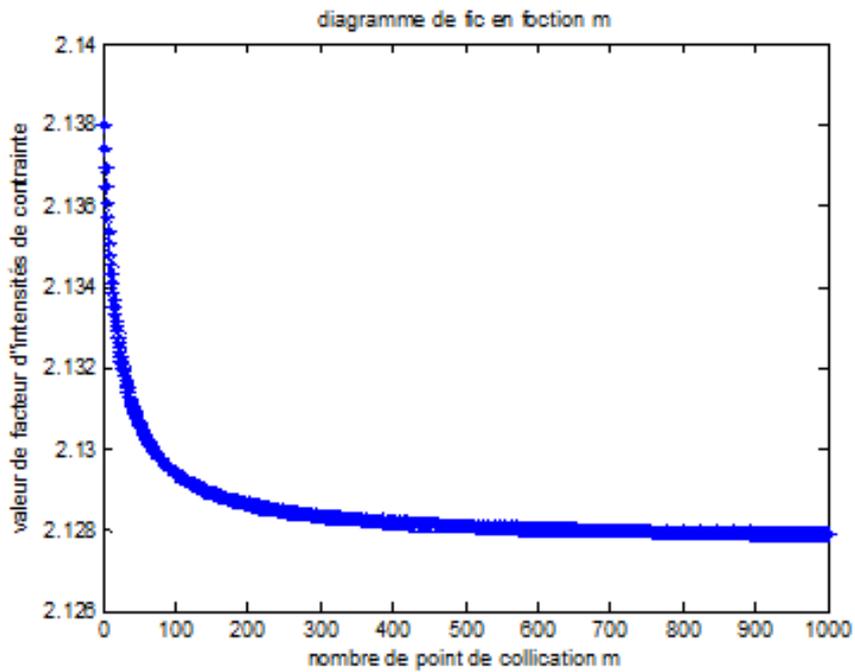


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de  $m$  de cercle pour  $p=15$

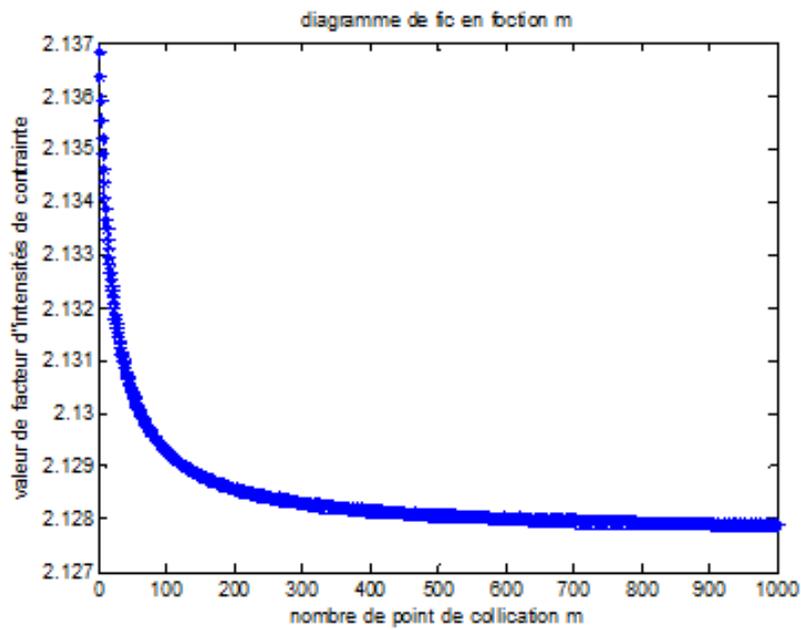


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour  $p=16$

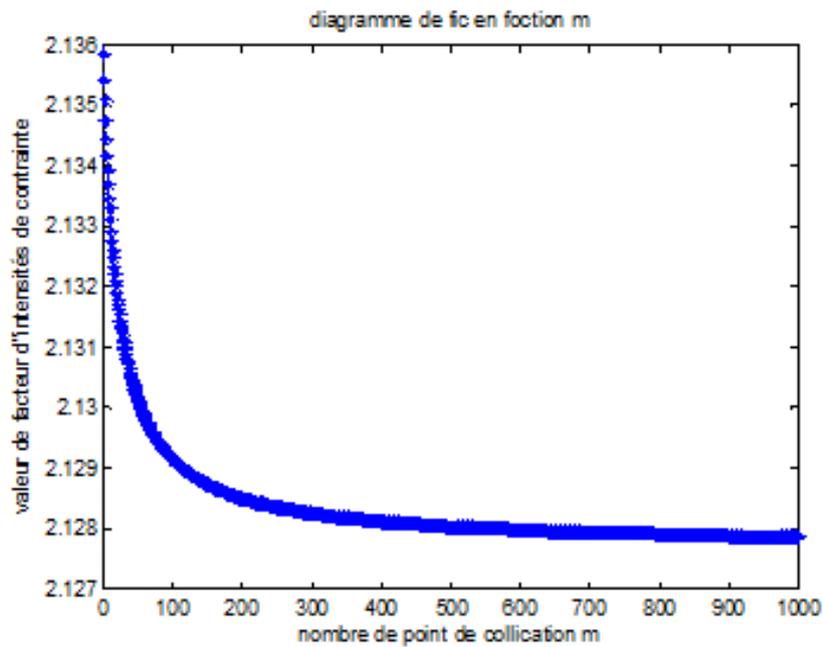
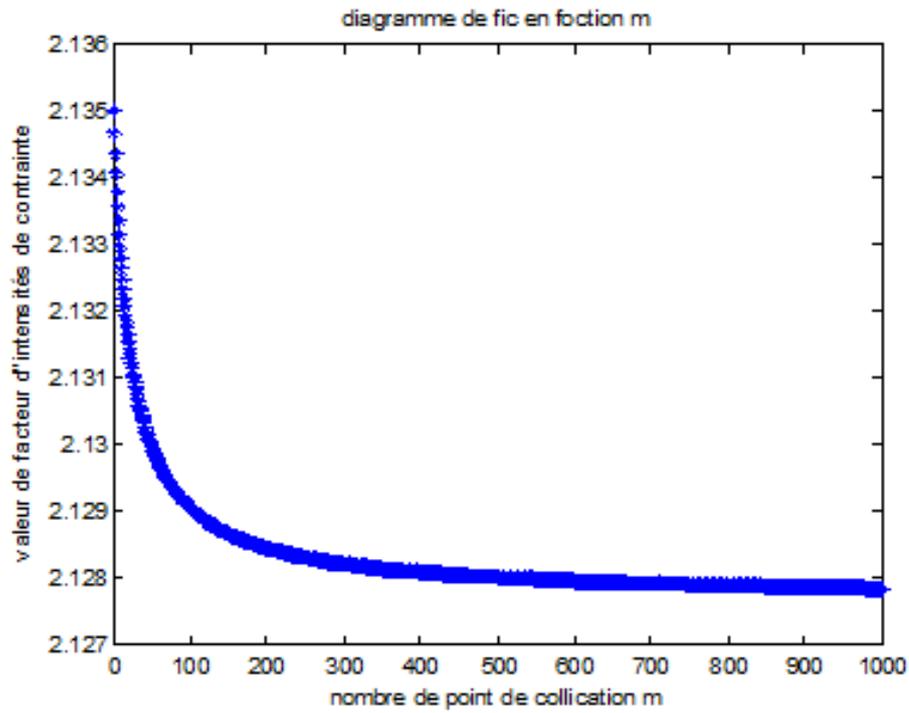
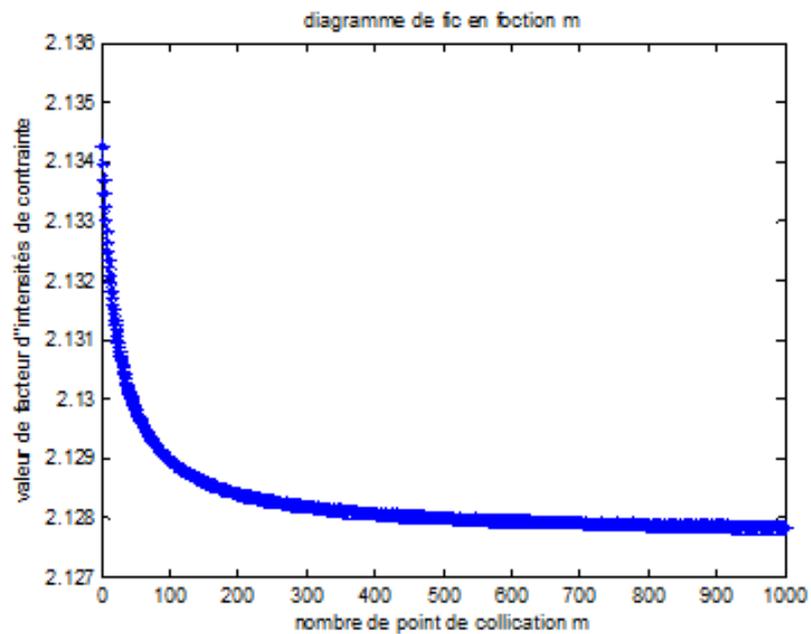


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour  $p=17$



**Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=18**



**Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=19**

m	Fic	m	Fic	m	Fic
101	2.1287	204	2.1280	596	2.1278
104	2.1286	272	2.1279	676	2.1278
111	2.1285	373	2.1279	740	2.1278
119	2.1284	405	2.1279	800	2.1278
130	2.1283	425	2.1279	898	2.1278
146	2.1282	426	2.1278	948	2.1278
169	2.1281	484	2.1278	1100	2.1278

Tableau: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=50

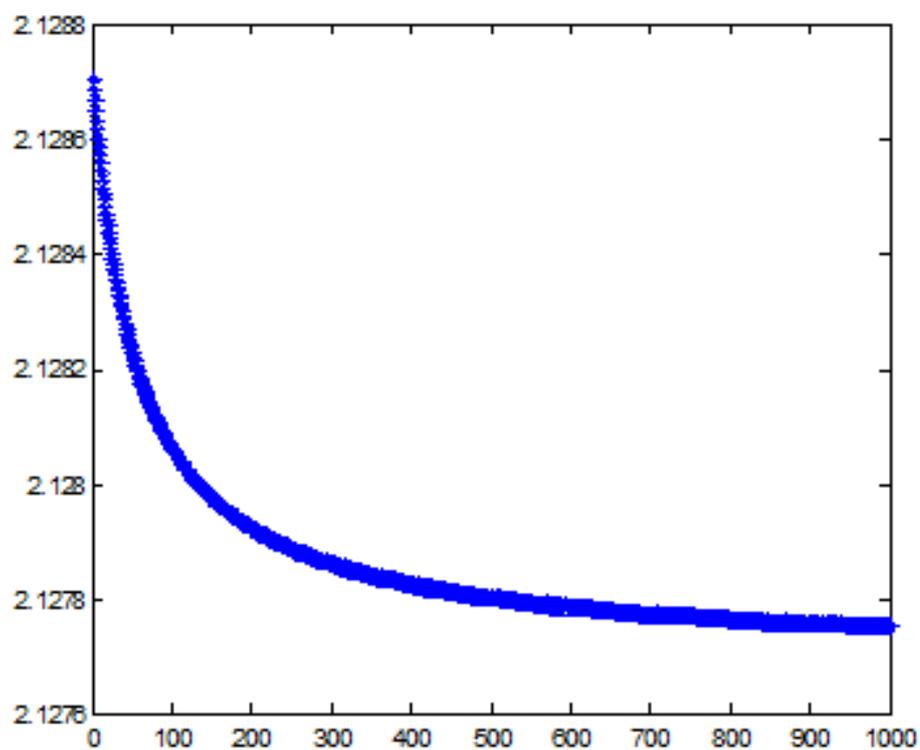


Figure: de valeur de convergence du fic en fonction de m de cercle pour p=50

# **Annexe 2**

**%programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le cercle en utilisant la methode des moindres carrés**

**clc**

**clear**

**syms H a**

**%cnstuire systeme d'equation lineaire**

**p=20**

**m=2\*p+a;**

**r=1**

**for a=1:1000**

**for q=1:2\*p+a**

**teta(q)=q\*2\*pi/(2\*p+a+1)-pi;**

**T(q)=sin(teta(q));**

**for N=1:p**

**u(q,N)=r^(-3/2+N)\*sin((-1/2+N)\*teta(q));**

**e(q,N)=r^(N-1)\*cos(N\*teta(q));**

**H=[u,e];**

**end**

**end**

**%algorithme moindre carre**

**G=H'\*H;**

**Z=H'\*T';**

**%resolution systeme lineare par la methode directe**

**c=inv(G)\*Z;**

**%calcul le FIC**

**fic(a)=c(1)\*sqrt(2\*pi)**

**end**

**a=1:1000;**

**plot(a, fic(a), 'b\*')**

**xlabel('nombre de point de collocation m')**

**ylabel('valeur de facteur d'intensités de contrainte')**

**title('diagramme de fic en foction m')**

```

%programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le cercle sans la methode
de moindre carre
clc
clear
syms H
%cnstuire systeme d'equation lineaire
p=129
m=2*p
r=1
for q=1:m
    teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi;
    T(q)=sin(teta(q));
    for N=1:p
        u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
        e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
        H=[u,e];
    end
end
%resolution systeme lineaire par la methode directe
C=inv(H)*T';
%calcul le FIC
fic=C(1)*sqrt(2*pi)

```

# **Annexe 3**

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{1}{4}$  cercle sans la méthode des moindres carrés :**

```
clc
clear
syms H
p=5
m=2*p
r=1
for q=1:m
    teta(q)=((q-1)*pi)/(2*(m-1));
    T(q)=sin(teta(q));
    for N=1:p
        u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
        e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
        H=[u,e];
    end
end
C=inv(H)*T';
fic=C(1)*sqrt(2*pi)
```

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{1}{4}$  cercle par la méthode des moindres carrés :**

```
clc
clear
syms H a
p=5
m=2*p+a;
r=1
for a=1:1000
for q=1:2*p+a
teta(q)=((q-1)*pi)/(2*(2*p+a-1));
T(q)=sin(teta(q));
for N=1:p
u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
H=[u,e];
end
end
G=H'*H;
Z=H'*T';
c=inv(G)*Z;
fic(a)=c(1)*sqrt(2*pi)
end
a=1:1000;
plot(a,fic(a),'b*')
```

# **Annexe 4**

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{1}{2}$  cercle sans la méthode des moindres carrés :**

```
clc
clear
syms H
p=2
m=2*p
r=1
for q=1:m
    teta(q)=q*pi/(m+1);
    T(q)=sin(teta(q));
    for N=1:p
        u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
        e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
        H=[u,e];
    end
end
C=inv(H)*T';
fic=C(1)*sqrt(2*pi)
```

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{1}{2}$  cercle par la méthode des moindres carrés :**

```
clc
clear
syms H a
p=2
m=2*p+a;
r=1
for a=1:1000
for q=1:2*p+a
    teta(q)=q*pi/(2*p+a+1);
    T(q)=sin(teta(q));
    for N=1:p
        u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
        e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
        H=[u,e];
    end
end
G=H'*H;
Z=H'*T';
c=inv(G)*Z;
fic(a)=c(1)*sqrt(2*pi)
end
a=1:1000;
plot(a,fic(a),'b*')
```

m	Fic	m	Fic
7	6.6418	507	4.0611
57	4.1576	557	4.0602
107	4.1027	607	4.0594
157	4.0851	657	4.0588
207	4.0763	707	4.0582
257	4.0712	757	4.0577
307	4.0678	807	4.0573
357	4.0654	857	4.0569
407	4.0636	907	4.0566
457	4.0622	1007	4.0561

Tableau : calcul de FIC en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=3

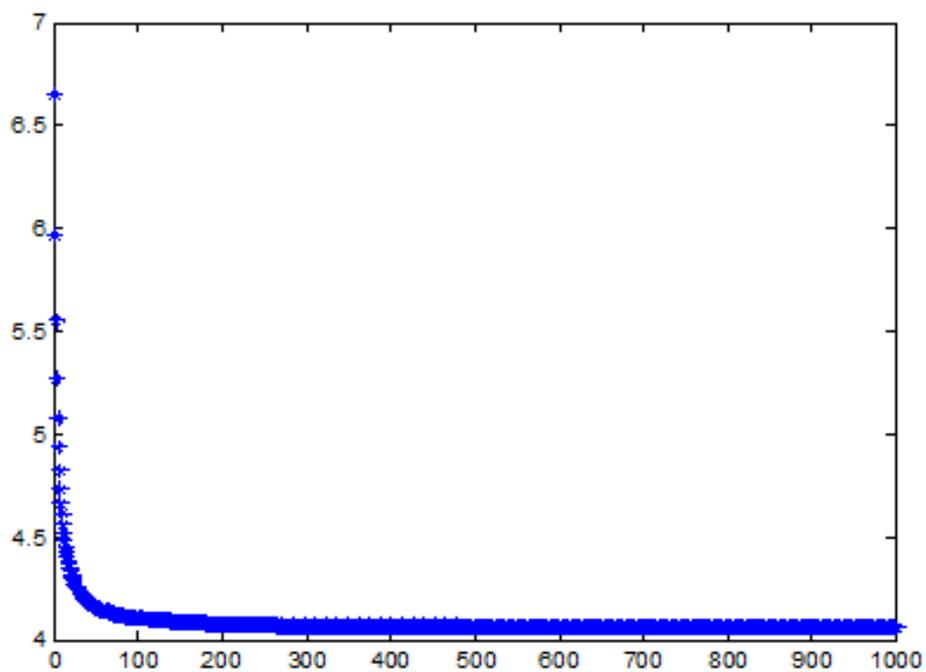
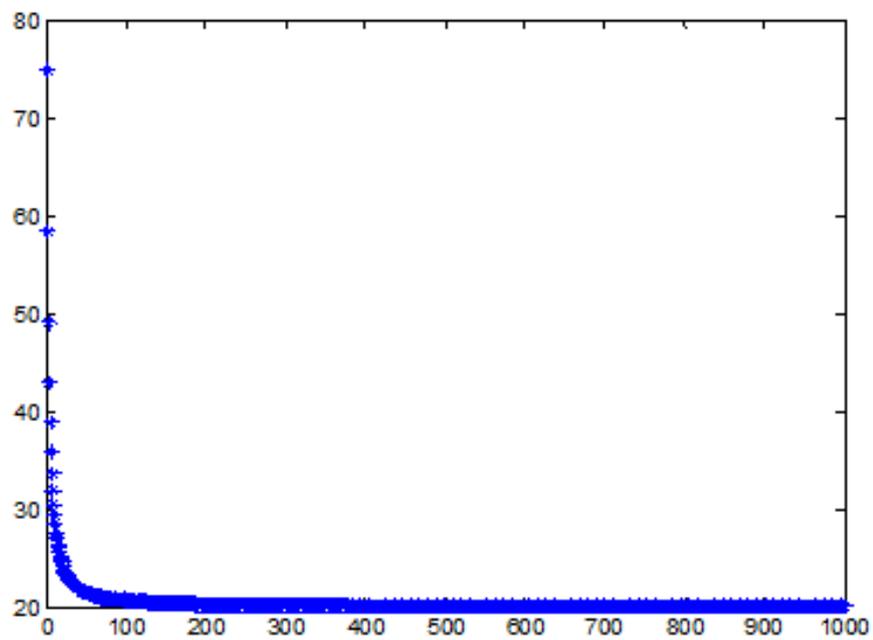


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=3

m	Fic	m	Fic
9	74.8271	509	20.1361
109	20.6791	609	20.1161
209	20.3268	709	20.1019
309	20.2188	909	20.0831
409	20.1667	1009	20.0766

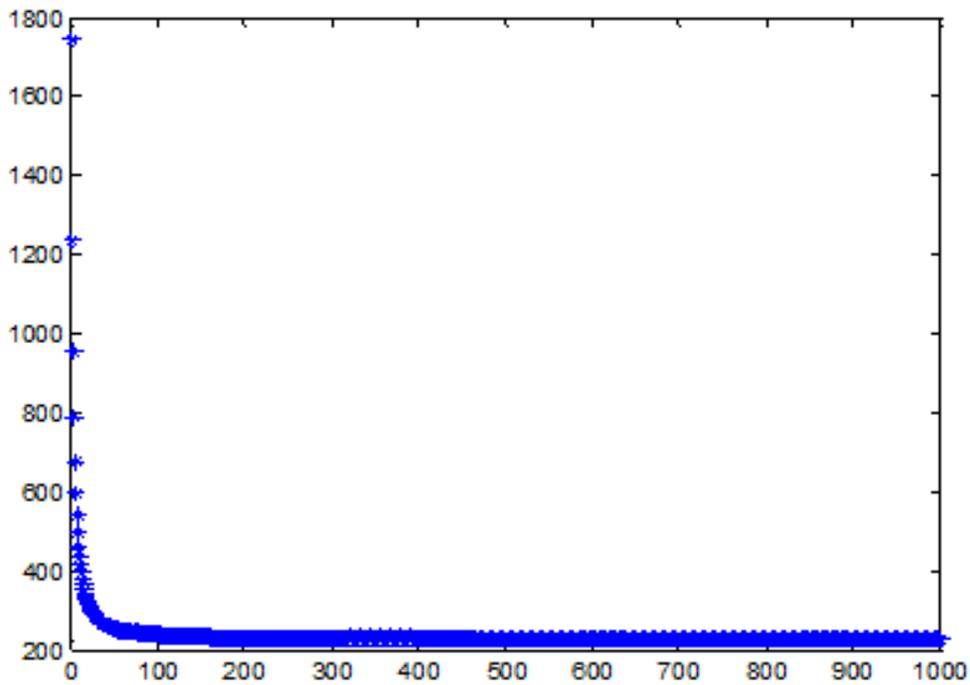
**Tableau : calcul de FIC en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=4**



**Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=4**

m	Fic	m	Fic
11	1.7447e+03	511	0.2279 e+03
111	0.2377 e+03	611	0.2276 e+03
211	0.2312 e+03	711	0.2274 e+03
311	0.2293 e+03	811	0.2272 e+03
411	0.2284 e+03	1011	0.2270 e+03

**Tableau : calcul de FIC en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=5**



**Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=5**

m	Fic	m	Fic
13	2.5995e+04	513	0.3403 e+04
113	0.3607 e+04	613	0.3396 e+04
213	0.3467 e+04	713	0.3391 e+04
313	0.3434 e+04	813	0.3386 e+04
413	0.3407 e+04	1013	0.3382 e+04

Tableau : calcul de FIC en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=6

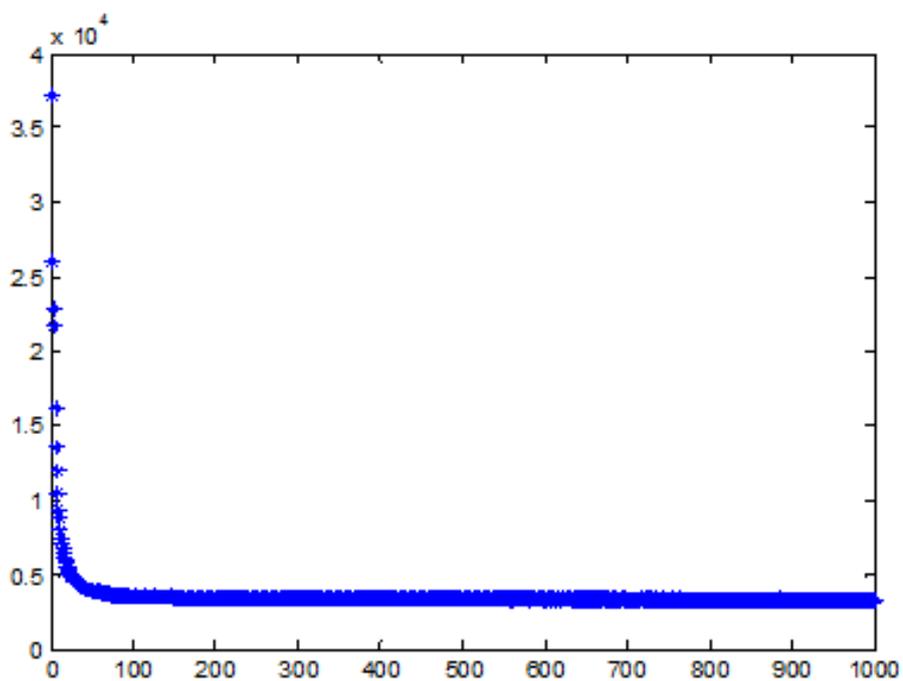


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{1}{2}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=6

# **Annexe 5**

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{3}{4}$  cercle sans la méthode des moindres carrés :**

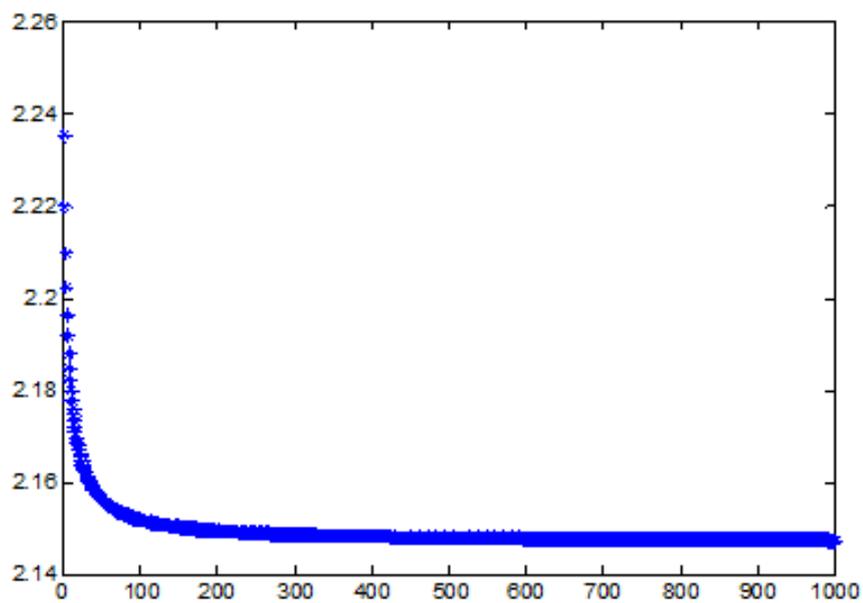
```
clc
clear
syms H
p=4
m=2*p
r=1
for q=1:m
    teta(q)=(q*3*pi)/(2*(m+1))-pi/2;
    T(q)=sin(teta(q));
    for N=1:p
        u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
        e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
        H=[u,e];
    end
end
C=inv(H)*T';
fic=C(1)*sqrt(2*pi)
```

**Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le  $\frac{3}{4}$  cercle par la méthode des moindres carrés :**

```
clc
clear
syms H a
p=4
m=2*p+a;
r=1
for a=1:1000
for q=1:2*p+a
teta(q)=(q*3*pi)/(2*(2*p+a+1))-pi/2;
T(q)=sin(teta(q));
for N=1:p
u(q,N)=r^(-3/2+N)*sin((-1/2+N)*teta(q));
e(q,N)=r^(N-1)*cos(N*teta(q));
H=[u,e];
end
end
G=H'*H;
Z=H'*T';
c=inv(G)*Z;
fic(a)=c(1)*sqrt(2*pi)
end
a=1:1000;
plot(a,fic(a),'b*')
```

m	Fic	m	Fic
11	2.2353	511	2.1479
111	2.1518	611	2.1477
211	2.1494	711	2.1476
311	2.1486	811	2.1475
411	2.1481	1011	2.1474

**Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=5**



**Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=5**

m	Fic	m	Fic
13	2.3929	513	2.1696
113	2.1745	613	2.1694
213	2.1714	713	2.1692
313	2.1704	813	2.1691
413	2.1699	1013	2.1690

Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=6

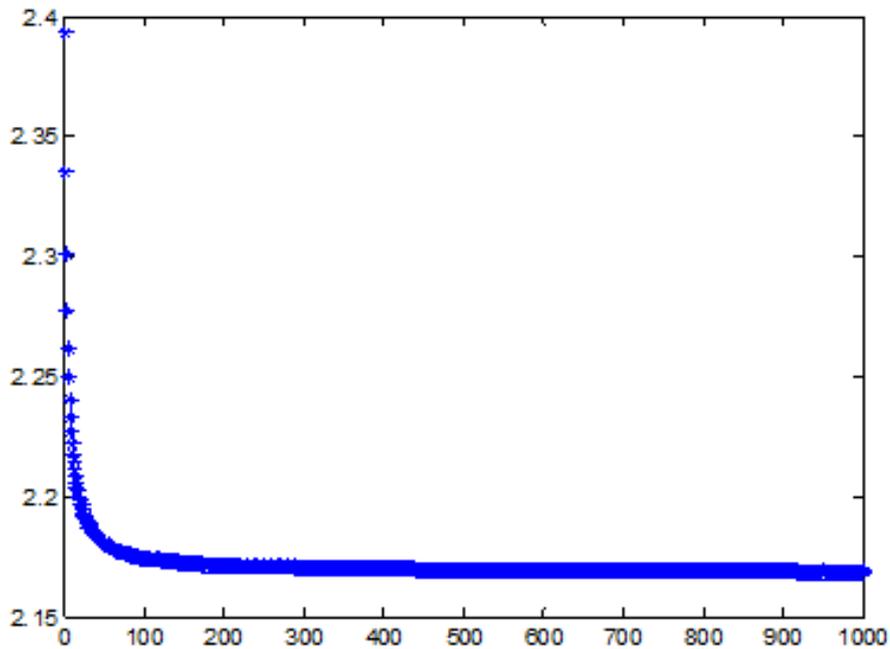


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=6

m	Fic	m	Fic
15	3.2109	515	2.2320
115	2.2420	615	2.2317
215	2.2356	715	2.2314
315	2.2336	815	2.2312
415	2.2326	1015	2.2309

Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés  $p=7$

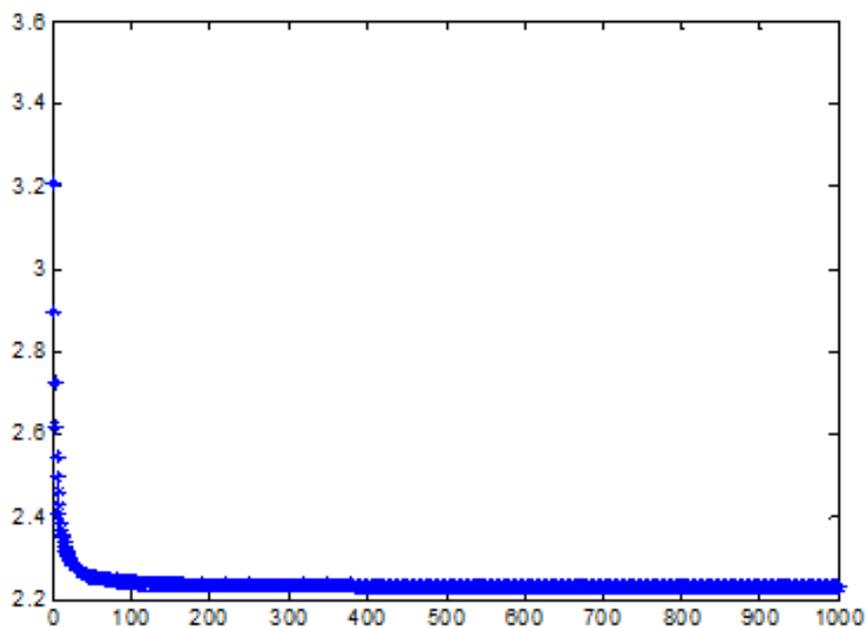
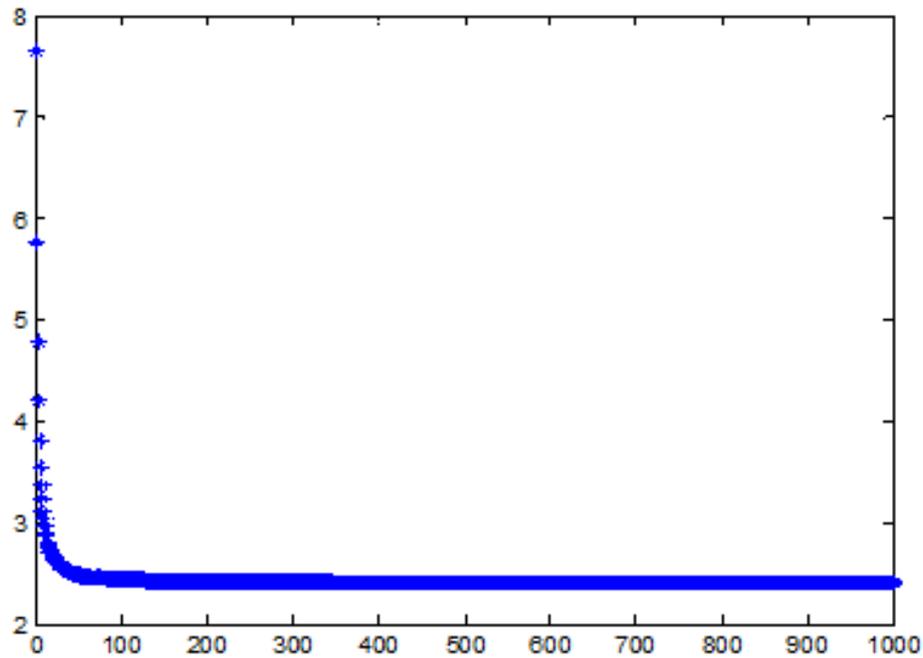


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés  $p=7$

m	Fic	m	Fic
17	7.6459	517	2.4183
117	2.4477	617	2.4173
217	2.4282	717	2.4166
317	2.4225	817	2.4161
417	2.4198	1017	2.4153

**Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=8**



**Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=8**

m	Fic	m	Fic
19	33.7034	519	2.9994
119	3.1053	619	2.9961
219	3.0336	719	2.9938
319	3.0137	819	2.9921
419	3.0046	1019	2.9898

Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=9

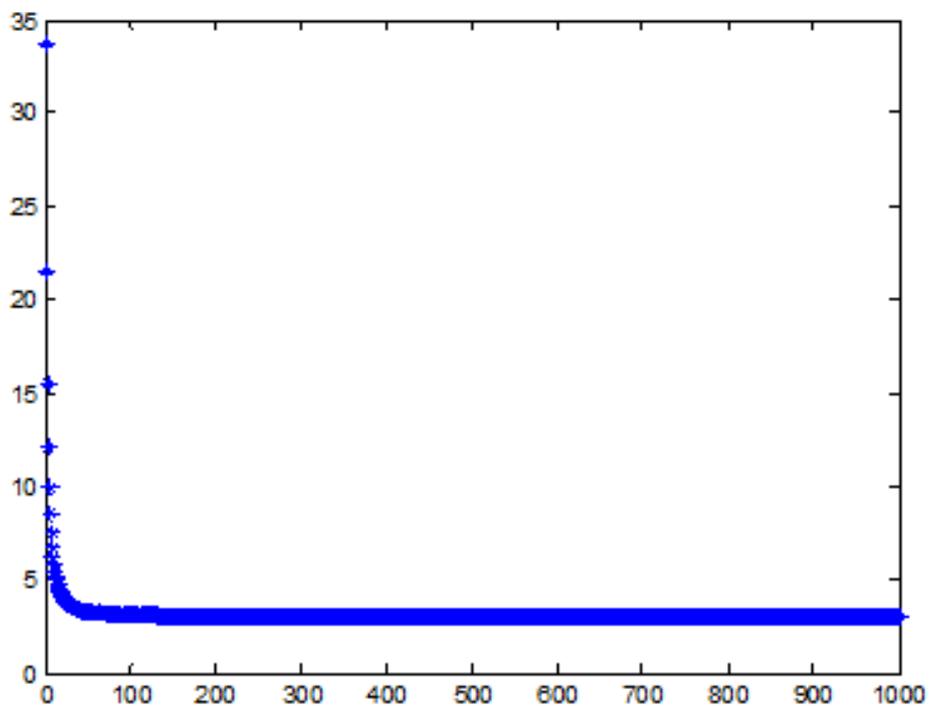


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=9

m	Fic	m	Fic
21	198.9292	521	4.8913
121	5.3047	621	4.8793
221	5.0206	721	4.8709
321	4.9444	821	4.8649
421	4.9104	1021	4.8649

Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=10

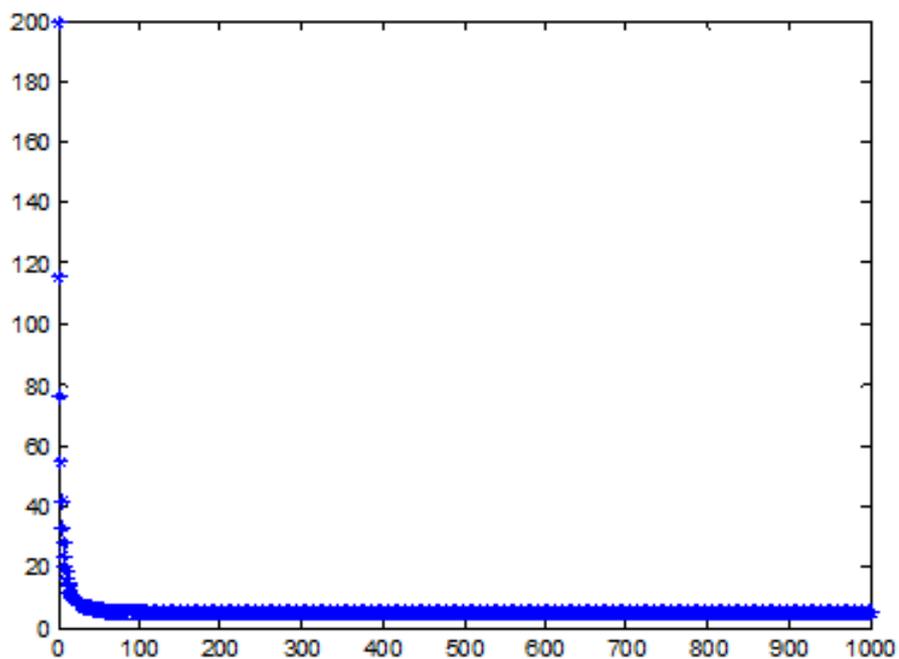


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=10

m	Fic	m	Fic
23	1.3579e+03	523	0.0113e+03
123	0.0130e+03	623	0.0112e+03
223	0.0118e+03	723	0.0112e+03
323	0.0115e+03	823	0.0112e+03
423	0.0114e+03	1023	0.0111e+03

Tableau : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=11

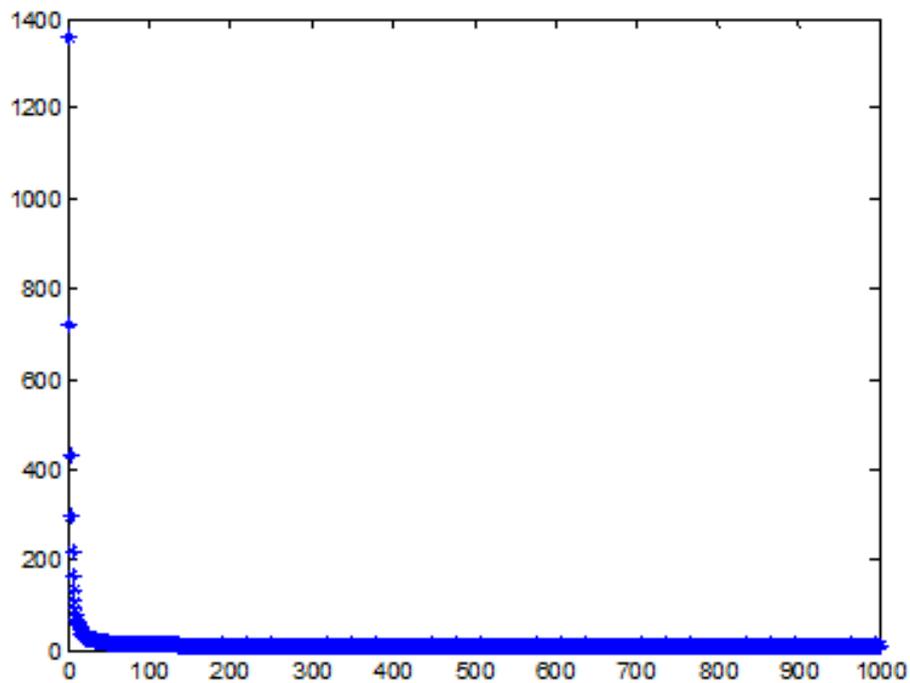


Figure : calcul de fic en fonction de m de  $\frac{3}{4}$  de cercle avec la méthode des moindres carrés p=11

### **NOTICE EXPLICATIVE DE LA PROGRAMMATION:**

Notre programmation est faite à l'aide du langage matlab et elle se divise en deux parties :

1<sup>ère</sup> partie :

Notre programme est composé de points de collocation (m), nous injectons dans ce dernier une valeur de p ensuite le programme calcule pour les différentes valeurs du point (m) les angles et les efforts appliqués ce qui nous permet d'obtenir un système d'équations surdéterminé.

2<sup>ème</sup> partie :

Nous allons résoudre le système d'équation surdéterminé par la méthode des moindres carrés ce qui nous donne ensuite un système d'équations linéaire que nous pouvons résoudre par la méthode directe, aussi le K<sub>III</sub> est calculé par la formule suivante :

$$K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi}$$