

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE MECANIQUE

**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté par: Rachid TIBERKAK**

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
**MAGISTER EN GENIE MECANIQUE**  
Option : **CONSTRUCTION**

Thème

**EFFETS DE LA LONGUEUR DE DELAMINAGE ET  
DE SA POSITION SUR LA CHARGE CRITIQUE DES  
PLAQUES COMPOSITES A BASE DE FIBRES DANS  
UNE MATRICE CERAMIQUE**

Soutenu devant le jury:

Président :	Dr. M. OUALI	Maître de conférences	U.S.T.Blida
Examineurs :	Dr. M. ABED	Maître de conférences	U.S.T.Blida
	Dr. M. RAHMANI	Maître de conférences	C.U.Laghouat
Rapporteur :	Dr. B. ATTAF	Maître de conférences	U.S.T.Blida
Invité:	Mr. M. TEMMAR	Chargé de cours	U.S.T.Blida

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
 MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
 SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE MECANIQUE



**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté par: Rachid TIBERKAK**

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
**MAGISTER EN GENIE MECANIQUE**  
 Option : **CONSTRUCTION**

Thème

**EFFETS DE LA LONGUEUR DE DELAMINAGE ET  
 DE SA POSITION SUR LA CHARGE CRITIQUE DES  
 PLAQUES COMPOSITES A BASE DE FIBRES DANS  
 UNE MATRICE CERAMIQUE**

Soutenue devant le jury:

Président :	Dr. M. OUALI	Maître de conférences	U.S.T.Blida
Examineurs :	Dr. M. ABED	Maître de conférences	U.S.T.Blida
	Dr. M. RAHMANI	Maître de conférences	C.U.Laghouat
Rapporteur :	Dr. B. ATTAF	Maître de conférences	U.S.T.Blida
Invité:	Mr. M. TEMMAR	Chargé de cours	U.S.T.Blida

## RESUME

*Un modèle simple unidirectionnel d'un délaminage dans une plaque composite sous l'action d'une charge de compression axiale est exploité en vue de prédire la charge critique associée à cette plaque. Une étude détaillée sur l'effet de couplage flexion-membrane à été complètement examinée.*

*Le présent travail se partage en deux parties essentielles: la première concerne le cas où les deux surfaces délimitant le délaminage ne sont soumises à aucune rigidité, par contre la deuxième partie concerne le cas où les deux surfaces sont supposées connectées entre elles par des ressorts de rigidité constante.*

*Un programme informatique basé sur des solutions analytiques a été développé dans le but de calculer les charges critiques des plaques stratifiées en fonction de la longueur et de la position de délaminage.*

## ABSTRACT

*A one-dimensional model of a delaminated composite structural plate under uniaxial loading is exploited in view of predicting the delaminated buckling loads associated to this plate. A detailed survey on the effect of bending-stretching coupling was fully examined.*

*The present work is divided into two essential parts: the first concerns the case where the two surfaces delimiting the delamination are subjected to no rigidity, on the other hand, the second part concerns the case where the two surfaces are supposed connected by continuous springs of constant stiffness.*

*A computer program based on some analytic solutions was developed in order to calculate the critical loads versus the delamination length and position of laminated composite plates.*

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: cotes et orientation conventionnelles des plis.....	7
Figure 2-1: Plaque stratifiée délaminée.....	17
Figure 2-2: Equilibre statique des forces et moments.....	24
Figure 3.1 : Organigramme de calcul de la charge critique des plaques stratifiées.....	46
Figure 4.1: Etude comparative de la longueur de délaminage $\bar{a}$ sur la charge critique $\bar{p}$ d'une plaque composite $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ , encastrée sur les deux côtés opposés.....	47
Figure 4.2: Influence des conditions aux limites sur la charge critique des plaques stratifiées: (a) plaque en appuis simples, (b): plaque encastrée.....	48
Figure 4.3: Effet de l'épaisseur ( $\bar{h}$ ) de la région 3 sur la charge critique d'une plaque encastrée $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ .....	50
Figure 4.4: Effet de l'épaisseur ( $\bar{h}$ ) de la région 3 sur la charge critique d'une plaque en appuis simples de séquences d'empilement $[0^0/90^0_2/0^0]_{10T}$ .....	51
Figure 4.5: Différentes orientations des plis des stratifiés pourvu et dépourvu de la symétrie miroir.....	54
Figure 4.6: Effet de la symétrie miroir sur la charge critique des plaques encastrées des séquences d'empilement différentes.....	55
Figure 4.7: Orientation des plis délimitant le délaminage.....	57
Figure 4.8: Influence de l'empilement des plis de part et d'autre de délaminage sur la charge critique des stratifiés encastrés.....	58
Figure 4.9: Effet des modules du rapport $E_1/E_2$ sur la charge critique d'une plaque $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ encastrée.....	60
Figure 4.10: Influence de l'orientation des plis délimitant le délaminage sur la charge critique des stratifiés.....	61
Figure 4.11: Influence de la valeur de rigidité des ressorts sur la charge critique	

du stratifié encasté  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ .....63

Figure 4.12: Influence de la position horizontale de délaminage sur la charge critique.....64

Figure B.1 : Représentation des résultantes de contraintes

Figure B.2: Représentation des résultantes de contraintes

Figure B.3: Représentation et sens conventionnel des axes

- $[B]$  matrice de couplage membrane-flexion
- $\cos$  cosinus de l'angle que fait l'orientation des fibres avec l'axe  $x$  de référence
- $[D]$  matrice de rigidité du stratifié en flexion
- $E_L$  module d'élasticité longitudinale
- $E_T$  module d'élasticité transversale
- $G$  module de cisaillement
- $a$  distance entre le délaminage et la face supérieure du stratifié (épaisseur de la région 3)
- $\xi$  variable adimensionnelle ( $\xi = h/L$ )
- $b$  distance entre le délaminage et la face inférieure du stratifié (épaisseur de la région 2)
- $k$  rigidité des ressorts délimitant le délaminage
- $[k^{(i)}]$  constante ( $= N_2/\Delta$ )
- $c$  distance entre le délaminage et l'extrémité gauche du stratifié
- $\eta$  variable adimensionnelle ( $\eta = l/L$ )
- $L$  longueur totale du stratifié (suivant la direction  $x$ )
- $\{M\}$  vecteur des moments
- $N_i$  efforts interne dans chaque région ( $i=1,2,3,4$ )
- $\{v\}$  vecteur des forces en membrane
- $P$  charge de compression appliquée
- $P_{crit}$  charge critique sans délaminage
- $q(x,y)$  distribution des charges transversales
- $[k_i]$  matrice de rigidité de chaque pli dans les axes principaux
- $[D_i]$  matrice de rigidité de chaque pli dans les axes du stratifié

## NOMENCLATURE

$a$	longueur de délaminage
$\bar{a}$	variable adimensionnelle ( $=a/L$ )
$[A]$	matrice de rigidité du stratifié en membrane
$[B]$	matrice de couplage membrane-flexion
$c$	cosinus de l'angle que fait l'orientation des fibres avec l'axe $x$ de référence
$[D]$	matrice de rigidité du stratifié en flexion
$E_1$	module d'élasticité longitudinale
$E_2$	module d'élasticité transverse
$G_{12}$	module de cisaillement
$h$	distance entre le délaminage et la face supérieure du stratifié (épaisseur de la région 3)
$\bar{h}$	variable adimensionnelle ( $=h/L$ )
$H$	distance entre le délaminage et la face inférieure du stratifié (épaisseur de la région 2)
$K$	rigidité des ressorts délimitant le délaminage
$[K^{(i)}]$	constante ( $=-N_0^{(i)}/\Delta$ )
$l$	distance entre le délaminage et l'extrémité gauche du stratifié
$\bar{l}$	variable adimensionnelle ( $=l/L$ )
$L$	longueur totale du stratifié (suivant la direction $x$ )
$\{M\}$	vecteur des moments
$N_0^{(i)}$	efforts interne dans chaque région ( $i=1,2,3,4$ )
$\{N\}$	vecteur des forces en membrane
$P$	charge de compression appliquée
$P_{perf}$	charge critique sans délaminage
$q_z(x,y)$	distribution des charges transversales
$[Q]$	matrice de rigidité de chaque pli dans les axes principaux
$[\bar{Q}]$	matrice de rigidité de chaque pli dans les axes du stratifié

s	sinus de l'angle que fait l'orientation des fibres avec l'axe x de référence	
$[T]$	matrice de passage de contraintes du repère global au repère local	
$[T']$	matrice de passage de déformations du repère global au repère local	
u	déplacement longitudinal suivant l'axe x	
v	déplacement longitudinal suivant l'axe y	
w	déplacement transversal	
$\{V\}$	vecteur des forces de cisaillement transverse	
(x,y)	axes liés au stratifié	6
(1,2)	axes principaux liés au pli	6
$\theta$	orientation des axes (1,2) par rapport aux axes (x,y)	6
$\theta'$	variable $(= \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{b'/2}{2\sqrt{-pp^3}} \right))$	7
$\gamma$	déformation angulaire	10
$\varepsilon$	déformation linéaire	10
$\sigma$	contrainte normale	12
$\tau$	contrainte de cisaillement	12
$\nu_{12}$	coefficient de Poisson	14

## Chapitre 2: délamination par flambement des plaques stratifiées à base de fibres

2.1. Introduction	16
2.2. Modèles analytiques	16
2.3. Hypothèses fondamentales	17
2.4. Equations fondamentales	18
2.4.1. Plaque avec des extrémités libres	18
2.4.2. Plaque avec des extrémités fixes	19
2.5. Technique de perturbation	20
2.5.1. Equation d'équilibre	20
2.5.1. Conditions aux limites	22
2.5.2. Conditions auxiliaires	23

## TABLE DES MATIERES

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre1: Comportement macroscopique des plaques stratifiées</b>	
1.1. Introduction.....	6
1.2. Analyse macroscopique des stratifiés.....	6
1.2.1. Hypothèses fondamentales.....	6
1.2.2. Champ de déplacements.....	7
1.2.3. Champ de déformations.....	8
1.2.4. Champ de contraintes.....	9
1.2.5. Résultantes des forces et moments.....	10
1.2.5.1. Résultantes en membrane.....	10
1.2.5.3. Moments de flexion et de torsion.....	12
1.3. Equation constitutive d'un stratifié.....	12
1.3.1. Cas particuliers.....	14
1.3.2. Matrice de rigidité.....	15
<b>Chapitre 2: délaminage par flambement des plaques stratifiées a base de fibres</b>	
2.1. Introduction.....	16
2.2. Modèle analytique.....	16
2.3. Hypothèses fondamentales.....	17
2.4. Equations fondamentales.....	18
2.4.1. Plaque avec des extrémités libres.....	18
2.4.2. Plaque avec des extrémités fixes.....	19
2.5. Technique de perturbation.....	20
2.5.1. Equation d'équilibres.....	20
2.5.1. Conditions aux limites.....	22
2.5.2. Conditions auxiliaires.....	23

2.6. Analyse sans distribution élastique.....	25
2.6.1. Etat de préflambement.....	25
2.6.1.1. Conditions aux limites.....	26
2.6.1.2. Conditions auxiliaires.....	27
2.6.1.3. Procédure de solution.....	28
2.6.2. Etat de flambement.....	29
2.6.2.1. Procédure de solution.....	30
2.7. Analyse avec distribution élastique.....	33
2.7.1. Etat de préflambement.....	33
2.7.2. Etat de flambement.....	33
2.7.3. Procédure de solution.....	34

### **Chapitre 3: Approche numérique**

3.1. Introduction.....	40
3.2. Méthodes de calcul des charges critiques des plaques stratifiées.....	40
3.2.1. Introduction.....	40
3.2.2 Détermination de la charge critique des plaques stratifiées délaminées .....	41
3.3. Organigramme de calcul.....	42

### **chapitre 4: Applications et discussions**

4.1. Introduction.....	46
4.2. Validation des résultats.....	48
4.3. Influence des conditions aux limites sur la charge critique des plaques stratifiées.....	49
4.4. Influence de l'épaisseur de la région 3 sur la charge critique.....	51
4.4.1. Plaque encadrée.....	51
4.4.2. Plaque en appuis simple.....	52
4.5. Influence de la symétrie miroir sur la charge critique des plaques Délaminées.....	54
4.6. Influence de l'orientation des fibres de la région délimitant le délaminage.....	57
4.7. Influence du rapport $E_1/E_2$ sur la charge critique.....	60

4.8. Influence de l'orientation des plis délimitant le délaminage.....	62
4.9. Influence de la rigidité de délaminage sur la charge critique.....	63
4.10. Influence de la position horizontale de délaminage sur la charge critique.....	64
<b>Conclusion.....</b>	<b>66</b>

## Références bibliographiques

### Annexe A

### Annexe B

### Annexe C

### Annexe D

Les matériaux composites comme tout bon l'amiante, sont composés de deux ou de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités des produits désirés, spécialement leurs propriétés mécaniques. Dans ce cadre, des structures composites, en particulier des plaques composites, sont utilisées dans différents secteurs industriels.

Comme tout autres matériaux usuels, les matériaux composites ne peuvent échapper aux différentes causes de dégradation.

Parmi les modes de dégradation les plus rencontrés dans les matériaux composites on cite (i) les craquellements dans la matrice et (ii) les décohésions aux interfaces fibres-matrice. Ces modes de dégradation se propagent pour donner naissance à quatre principaux types de fractures:

- Fissuration transversale de la matrice
- Fissuration longitudinale de la matrice
- Rupture des fibres
- Délaminage

Ces modes entraînent la dégradation de la structure jusqu'à la rupture. Cette dégradation doit être étudiée d'une manière globale sur la structure (étude micromécanique) et non pas seulement une dégradation locale des plis (étude micromécanique).

Le mauvais écoulement de l'adhésif entre les plis et/ou la répartition aléatoire des constituants qui composent le matériau peuvent causer un problème de délaminage.

## INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux occupent une place considérable dans la vie quotidienne et jouent un rôle très important dans le développement de véritables nouveaux matériaux conçus dans le but de répondre à des besoins industriels de plus en plus exigeants.

Les matériaux composites comme leur nom l'indique, sont composés de deux ou de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités des produits désirés, spécialement leurs propriétés mécaniques. Dans ce cadre, des structures composites, en particulier des plaques composites sont utilisées dans différents secteurs industriels.

Comme tout autres matériaux usuels, les matériaux composites ne peuvent s'échapper aux différentes causes de dégradation.

Parmi les modes de dégradation les plus rencontrés dans les matériaux composites; on cite (i) les craquements dans la matrice et (ii) les décohésions aux interfaces fibres-matrices. Ces modes de dégradation se propagent pour donner naissance à quatre principaux types de fractures:

- Fissuration transverse de la matrice.
- Fissuration longitudinale de la matrice.
- Rupture des fibres.
- Délaminage.

Ces modes entraînent la dégradation de la structure jusqu'à la rupture. Cette dégradation doit être étudiée d'une manière globale sur la structure (étude macromécanique) et non pas par une dégradation locale des plis (étude micromécanique).

Le mauvais étalement de l'adhésif entre les plis et/ou la répartition aléatoire des constituants qui composent le matériau peuvent causer un problème de délaminage; ce

dernier résulte d'une séparation des plis et dépend de plusieurs paramètres qui peuvent être classés en deux catégories:

- Paramètres intrinsèques qui dépendent du matériaux lui-même.
- Paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions d'essais ou de fonctionnement des structures.

Le problème de délaminage a été traité par un grand nombre d'auteurs; soit au travers d'études ayant pour base une formulation analytique tel que **Simites** et ses collaborateurs [1-5] qui ont travaillé sur le problème de délaminage par flambement et de sa croissance dans les structures composites, en particulier les plaques et les coques. Dans leurs études un modèle simple unidirectionnel a été développé pour prédire la charge critique d'un stratifié pourvu et/ou dépourvu de la symétrie miroir avec des conditions aux limites fixes (encastrées ou simplement appuyées). Deux cas ont été examinés [3]; dans le premier cas, aucune résistance n'est supposée entre les deux surfaces de délaminage. Par contre, dans le deuxième cas, les deux surfaces sont supposées connectées par des ressorts de rigidité constante.

Un modèle mathématique simple a été développé par **Simites** et ses collaborateurs [4] dans le but de traiter le phénomène de délaminage par flambement dans les structures cylindriques soumises à une pression extérieure uniforme. Deux types des structures ont été examinés: Structures en appuis simples et structures encastrées.

Les recherches de **Barsoun** et **Freese** [6]; **Bar-Yoseph** [7]; **Wary** et **Chai** [8]; **Wauy** et **Cross** [9] ont été basées sur la résolution du problème de délaminage en fonction de la charge que peut supporter une plaque stratifiée.

Le phénomène de délaminage par flambement en utilisant des méthodes numériques, appliquées sur un modèle simple, a été développé par **Whitcomb** [10]; **Kapania** et **Wolf** [11]. La méthode des éléments finis a été choisie afin de prédire la charge critique et l'énergie dégagée par les structures (plaques et poutres) soumises à des charges axiales.

**Sheiman** et ses collaborateurs [12, 13] ont basé leurs études sur un modèle de délaminage unidirectionnel dans une poutre dépourvue de la symétrie miroir et soumise à

des forces axiales et transversales. L'effet de délaminage sur la stabilité des stratifiés a été l'objectif principal de leurs études. La résolution des équations différentielles non-linéaires a été traitée par la méthode de Newton en utilisant un modèle de différences finis.

De nombreuses approches traitent le phénomène de délaminage dans les structures composites à travers des concepts de la mécanique de la rupture, en étudiant une fissure unique. La démarche de ces études consiste à ne pas regarder ce qui se passe au niveau de l'interface entre les plis et les couches, mais de rester dans une échelle plus macroscopique.

Dans ce cas, la dégradation provoquée par la présence et la croissance de délaminage dans les structures composites doit être étudiée d'une manière globale sur ces structures et non pas par une dégradation locale des plis.

Dans ce cadre et dans l'étude développée par **Thionet, Lesne et Renard [14]**, deux approches distinctes ont été mises en œuvre. La première qui est basée sur la mécanique de l'endommagement, utilise les concepts de la thermodynamique des milieux continus et permet de déterminer un seuil critique d'amorçage de délaminage et un modèle de dégradation globale des propriétés de la structure. Les résultats sont comparés avec ceux de la deuxième approche. Cette dernière est basée sur les concepts de la mécanique de la rupture, où une méthode de pénalisation est utilisée afin de calculer un taux d'énergie restituée qui est comparé au seuil critique d'amorçage.

Vu la complexité du comportement mécanique des pièces composites, les outils informatiques jouent un rôle très important dans l'analyse de ce type de matériaux et de structures. Dans ce cadre, plusieurs programmes de calcul, basés sur la théorie classique des stratifiés, ont été développés pour le traitement microscopique et macroscopique de ces derniers.

Les programmes informatiques UNI, LAM et CLASS, développés par **Kibler [15]**, sont utilisés respectivement pour calculer: (i) les constantes élastiques et les coefficients de dilatation thermiques des plis unidirectionnels, (ii) la rigidité en membrane et en flexion des stratifiés équilibrés et symétriques et (iii) les contraintes dans les stratifiés.

Le programme GENLAM (GENeral purpose LAMinate program) développé par Tsai [16] dans le but de faire une analyse micro et macromécanique des structures symétriques et non symétriques possédant plusieurs plis de différents types.

Quatre programmes de calcul informatique ont été développés à l'université de Delaware, le programme COMPCAL (COMposite CALculations) [17], fait l'analyse micro et macromécanique des structures symétriques. Par contre, les structures non symétriques sont analysées par le programme CMAP (Composite Materials Analysis of Plates) [18]. Le troisième programme SMC [19] estime les propriétés des plis avec des modèles micromécaniques. Finalement, les cylindres en composites faisant l'objet du quatrième programme CYLAN (CYLinder Analysis) [20].

Le problème de délaminage a été traité par un certain nombre de programme; citons par exemple les programmes, (i) ESDU (Engineering Sciences Data Unit) [21, 22], (ii) un sous programme (delamination fracture mechanics analysis) du programme de calcul CEMCAL (Composite Experimental Mechanics CALculations) [23] est utilisé pour le calcul de l'énergie dégagée par l'utilisation des données expérimentales, (iii) ICAN (Integrated Composites Analyzer) [24] est un programme développé par la NASA (National Aeronautics and Space Administration) pour l'analyse des stratifiés délaminés sans négliger l'effet de cisaillement transverse.

Le présent travail traite le problème de délaminage par flambement et sa croissance. Pour cela un modèle simple unidirectionnel a été choisi afin de prédire la charge critique d'une plaque stratifiée avec des extrémités fixes (encastrés ou simplement appuyées). Cette étude se partage en deux parties essentielles:

(i) La première partie est basée sur l'étude où les deux surfaces délimitant le délaminage ne sont soumises à aucune rigidité. (ii) Par contre, dans la deuxième partie, ces deux surfaces sont connectées entre elles par l'intermédiaire des ressorts de rigidité constante (distribution élastique).

Le mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier traite la détermination du champ de déplacements, de déformations et des contraintes, ainsi que la matrice de rigidité et l'équation constitutive décrivant le comportement mécanique du stratifié considéré avec l'absence de l'effet de cisaillement transverse. Le phénomène de délaminage par

flambement dans les plaques composites a été étudié dans le chapitre deux, dans but de déterminer les équations différentielles gouvernant ce phénomène en prenant en considération la distribution élastique. Le troisième chapitre a été consacré au développement d'un algorithme et d'un programme de calcul permettant de calculer la charge critique du stratifié étudié.

L'étude est accomplie par une exploitation des résultats présentés dans le chapitre quatre.

Les charges critiques en fonction de la longueur de délaminage et de sa position ont été présentées sous forme de courbes dans le but d'arriver à un meilleur choix d'un stratifié délaminé capable de résister à des charges compressives élevées.

## 1.1 INTRODUCTION

Dans la conception des pièces en matériaux composites, on utilise généralement la technique de stratification qui consiste à fabriquer les pièces par superposition des plis ou des couches. L'objectif d'une telle technique est de réaliser une structure résistante et légère couplée avec un poids minimum (résistance spécifique et rigidité spécifique élevées). L'optimisation de la résistance et de la rigidité peut être obtenue par le contrôle de l'orientation des fibres et l'ordre d'empilement de ces dernières [25-27].

## 1.2 ANALYSE MACROSCOPIQUE DES STRATIFIES

### 1.2.1 Hypothèses Fondamentales

On considère un stratifié possédant  $n$  plis d'orientations différentes (voir Fig 1.1). L'étude du comportement global d'un tel stratifié a pour but de déterminer le champ des (i) déplacements, (ii) déformations en tout point de la structure et (iii) contraintes.

Les hypothèses de base (simplificatrices) utilisées dans le présent chapitre sont:

## Chapitre 1

# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES

## 1.1 INTRODUCTION

Dans la conception des pièces en matériaux composites, on utilise généralement la technique de stratification qui consiste à élaborer ces pièces par superposition des plis ou des couches. L'objectif d'une telle technique est de réaliser une structure résistante et rigide couplée avec un poids minimum (résistance spécifique et rigidité spécifique élevées). L'optimisation de la résistance et de la rigidité peut être obtenue par le contrôle de l'orientation des fibres et l'ordre d'empilement de ces dernières [25-27].

## 1.2 ANALYSE MACROSCOPIQUE DES STRATIFIES

### 1.2.1 Hypothèses Fondamentales

On considère un stratifié possédant  $n$  plis d'orientations différentes (voir Fig.1.1). L'étude du comportement globale d'un tel stratifié a pour but de déterminer le champ des: (i) déplacements, (ii) déformations en tout point de la structure et (iii) contraintes.

Les hypothèses de base (simplificatrices) utilisées dans le présent chapitre sont:

- 1- Le schéma de déplacement utilisé est celui de Kirchhoff [25] (schéma du premier degré).
- 2- L'effet de cisaillement transverse est négligé ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ).
- 3- Les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables devant les autres composantes de contraintes; donc la théorie des stratifiés exige que  $\sigma_{zz} = 0$ .
- 4- Toute déformation suivant l'axe  $z$  est considérée nulle ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).

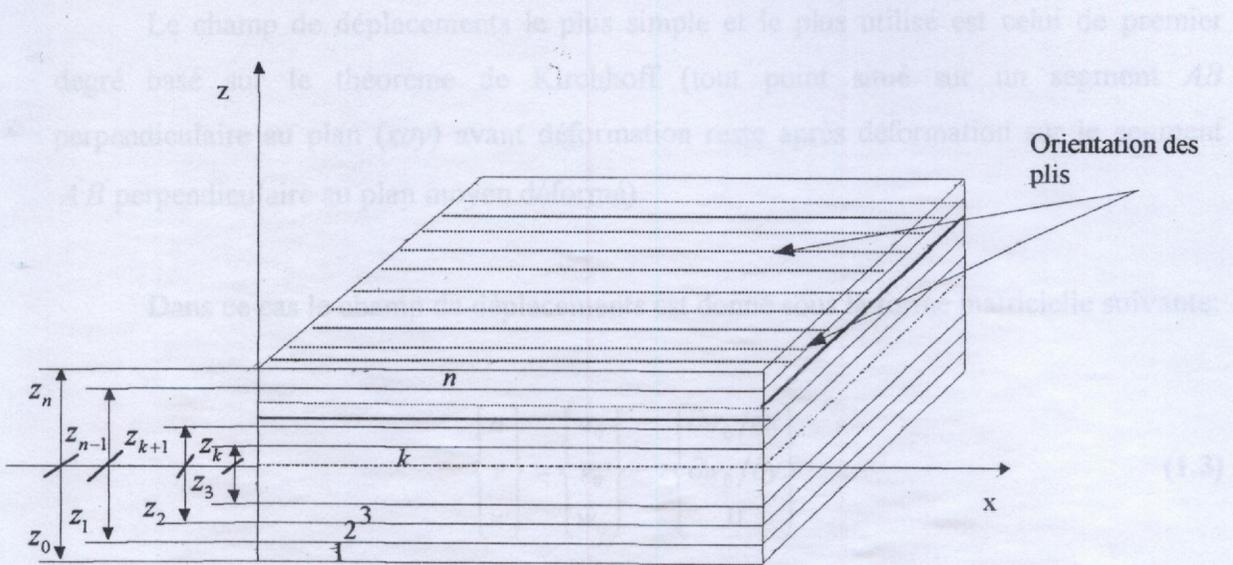


Figure 1.1: Cotes et orientations conventionnelles des plis.

### 1.2.2 Champ de déplacements

Le champ de déplacements d'un point ( $M$ ) de coordonnées  $(x, y, z)$  d'un milieu continu est donné sous forme des polynômes en  $z$ , généralement de degré 3. Ce champ peut être écrit sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \\ \varphi_z(x, y) \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \\ \psi_z(x, y) \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \phi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Généralement, on désigne par  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  les déplacements d'un point du plan  $(oxy)$ ; telles que:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y) \\ v_0 &= v_0(x, y) \\ w_0 &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Le champ de déplacements le plus simple et le plus utilisé est celui de premier degré basé sur le théorème de Kirchhoff (tout point situé sur un segment  $AB$  perpendiculaire au plan  $(xoy)$  avant déformation reste après déformation sur le segment  $A'B'$  perpendiculaire au plan moyen déformé).

Dans ce cas le champ de déplacements est donné sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

La relation (1.3) représente un schéma de déplacements du premier degré sans cisaillement transverse connu sous le nom "schéma du premier degré de Kirchhoff" [25]

Donc;

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varphi_z(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Champ de déformations

Le champ de déformations déduit du champ de déplacements peut être obtenu en dérivant le champ de déplacement une fois par rapport aux variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Il est donné sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

D'après l'hypothèse 4, et tenant compte des relations (1.3) et (1.5), le champ de déformations est donné par:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.6a)$$

L'équation (1.6a) peut être aussi écrite sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.6b)$$

### 1.2.4 Champ de contraintes

Le champ de contraintes d'un pli ( $k$ ) du stratifié dans les axes principaux (1,2) s'écrit sous la forme suivante [25,28]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (1.7a)$$

ou sous forme contractée;

$$\{\sigma_{12}\}_k = [Q]_k \{\varepsilon_{12}\}_k \quad (1.7b)$$

avec;

$[Q]$  est la matrice de rigidité d'un pli dans le repère (1,2) (voir Annexe A).

En prémultipliant la relation (1.7) par la matrice  $[T]^{-1}$  et en remplaçant les déformations du pli ( $k$ ) par leurs valeurs, exprimées par la relation (B.16) (voir Annexe B), on aura:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (1.8a)$$

ou sous forme contractée;

$$\{\sigma_{xy}\}_k = [\bar{Q}]_k \{\epsilon_{xy}\}_k \quad (1.8b)$$

avec;

$[\bar{Q}]_k = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k'$  est la matrice de rigidité d'un pli dans le repère (x,y) (voir Annexe A).

Où  $[T]^{-1}$  et  $[T]'$  sont des matrices de passage du repère (1,2) au repère (x,y) (voir Annexe B).

## 1.2.5 RESULTANTES DES FORCES ET MOMENTS

### 1.2.5.1 Résultantes en membrane

Le champ des résultantes  $n_k(x,y)$  en membrane dans le pli ( $k$ ), est défini par:

$$n_k(x,y) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_k dz \quad (1.9a)$$

Ou  $\sigma_k$  est la résultante des contraintes en membrane dans le pli ( $k$ ).

La relation (1.9a) peut être écrite sous la forme suivante:

$$n_k(x, y) = \begin{Bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \end{Bmatrix}_k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.9b)$$

La discontinuité des contraintes d'un pli à l'autre conduit à écrire le champ des résultantes en membrane  $N(x, y)$  par unité de longueur (dans la direction  $y$ ) sous la forme [25]:

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n n_k(x, y) = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.10)$$

En remplaçant les contraintes du pli ( $k$ ) par leurs valeurs, exprimées par la relation (1.8a), on aboutit à:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{0xy} \\ \epsilon_{0xy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}_k + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix}_k \right) dz \quad (1.11)$$

avec  $[\bar{Q}_{ij}]_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k$  la matrice de rigidité réduite de pli ( $k$ ) dans le repère du stratifié ( $x, y, z$ ).

L'équation (1.11) peut aussi s'écrire:

Où  $\sigma_k$  est la résultante des contraintes en membrane dans le pli ( $k$ ).

La relation (1.9a) peut être écrite sous la forme suivante:

$$n_k(x, y) = \begin{Bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \end{Bmatrix}_k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.9b)$$

La discontinuité des contraintes d'un pli à l'autre conduit à écrire le champ des résultantes en membrane  $N(x, y)$  par unité de longueur (dans la direction  $y$ ) sous la forme [25]:

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n n_k(x, y) = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.10)$$

En remplaçant les contraintes du pli ( $k$ ) par leurs valeurs, exprimées par la relation (1.8a), on aboutit à:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,xy} \\ \varepsilon_{0,xy} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix}_k + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ K_{xy} \end{Bmatrix}_k \right) dz \quad (1.11)$$

avec  $[\bar{Q}_{ij}]_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k$  la matrice de rigidité réduite de pli ( $k$ ) dans le repère du stratifié ( $x, y, z$ ).

L'équation (1.11) peut aussi s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{0xx} \\ \epsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}_k dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (1.12)$$

Les relations (1.15) et (1.16) peuvent être écrites sous forme matricielle condensée :

### 1.2.5.2 Moments de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion sont donnés par [25]:

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (1.13)$$

En procédant de la même manière que 1.2.5.1, on aboutit à :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{0xx} \\ \epsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}_k z dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k z^2 dz \quad (1.14)$$

## 1.3 EQUATION CONSTITUTIVE D'UN STRATIFIE

Après intégration des équations (1.12) et (1.14) et réarrangement, on aboutit aux relations suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0xx} \\ \epsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

et;

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Les relations (1.15) et (1.16) peuvent être écrites sous forme matricielle condensée:

$$\{N\}_{xy} = [A_{ij}] \{\varepsilon_0\}_{xy} + [B_{ij}] \{\kappa\}_{xy} \quad (1.17)$$

$$\{M\}_{xy} = [B_{ij}] \{\varepsilon_0\}_{xy} + [D_{ij}] \{\kappa\}_{xy} \quad (1.18)$$

avec:

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}] dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k - z_{k-1}) \\ [B_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}] z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Regroupant les relation (1.17) et (1.18); l'équation constitutive du stratifié peut être écrite sous la forme simplifiée suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \dots \\ \kappa \end{Bmatrix}_{xy} \quad (1.20)$$

ou sous forme matricielle détaillée;

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,xx} \\ \varepsilon_{0,yy} \\ \gamma_{0,xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) représente l'équation constitutive décrivant le comportement mécanique d'un stratifié avec l'absence de l'effet de cisaillement transverse.

La matrice  $\begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix}$  est la matrice de rigidité du stratifié. (1.25)

$[A]$ : Matrice de rigidité en membrane.

$[D]$ : Matrice de rigidité en flexion.

$[B]$ : Matrice de couplage entre membrane-flexion-torsion.

### 1.3.2 Matrice de rigidité

#### 1.3.1 Cas particuliers

##### A/ Stratifié doté de la symétrie miroir

Cette condition est caractérisée par :

$$B_{ij} = 0 \Rightarrow [B] = 0 \quad \text{pas de couplage}$$

Les relations (1.13) et (1.15) deviennent :

$$\{N\}_{xy} = [A]\{\varepsilon_0\}_{xy} \quad (1.22)$$

$$\{M\}_{xy} = [D]\{\kappa\}_{xy} \quad (1.23)$$

**B/ Stratifié équilibré**

Dans ce cas  $A_{16} = A_{26} = 0$  (1.24)

**C/ Stratifié équilibré symétrique**

Dans ce cas l'équation constitutive se réduit à:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0xx} \\ \epsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

**1.3.2 Matrice de rigidité**

La détermination de la matrice de rigidité nécessite le passage par les étapes suivantes:

- **Etape1:** Calcul des constantes élastiques d'une composite unidirectionnelle (pli) dans le repère (1, 2).
- **Etape2:** Calcul de la matrice de rigidité  $[Q_{ij}]_k$  d'un pli dans le repère (1, 2).
- **Etape3:** Calcul de la matrice de rigidité  $[\bar{Q}_{ij}]_k$  d'un pli dans le repère du stratifié en utilisant les matrices de passage. (voir Annexe A)
- **Etape4 :** Calcul des cotes  $z_k$  et  $z_{k-1}$  de chaque pli dans le repère du stratifié

- **Etape5:** Calcul de la matrice de rigidité  $\begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix}$  du stratifié dans le repère (x,y,z).

## Chapitre 2

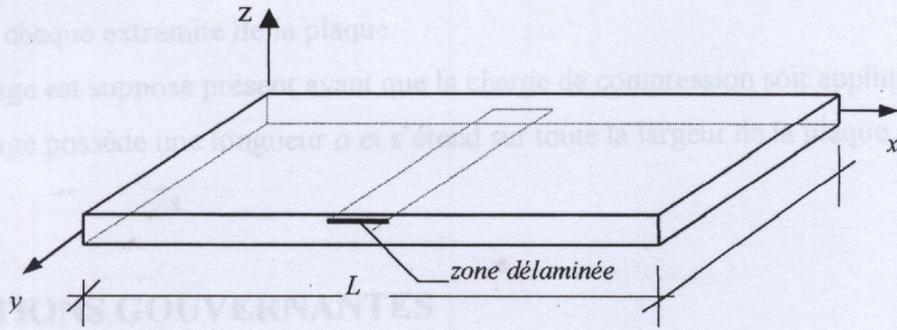
# DELAMINAGE PAR FLAMBEMENT DES PLAQUES COMPOSITES A BASE DE FIBRES

## 2.1 INTRODUCTION

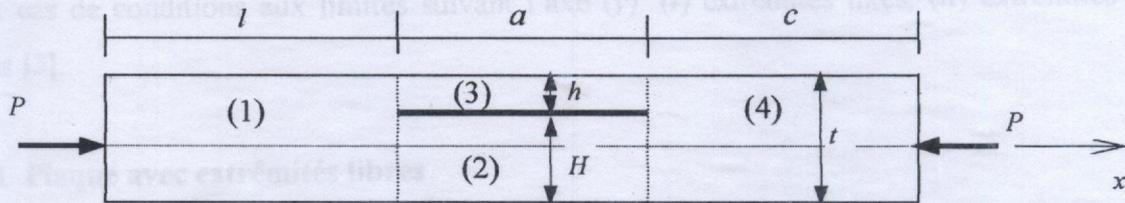
La présence du phénomène de délaminage dans une structure composite stratifiée résulte d'une séparation des plis et cause un flambement local. Par conséquent, la rigidité totale de la structure peut être réduite, ce qui entraîne la dégradation de la charge critique, d'où l'apparition des micro-fissures dans le système et ensuite la naissance d'une rupture prématurée. La dégradation de la charge critique en fonction des caractéristiques géométriques de délaminage a été étudiée afin de limiter la propagation des défauts au stade d'utilisation.

## 2.2 MODELE ANALYTIQUE

Dans le présent travail, un modèle simple unidirectionnel est utilisé [1]. Le délaminage est supposé présent, avant l'application de la charge de compression, le long d'un plan parallèle au plan de référence (*Fig. 2-1a*). D'après cette figure, on constate que le délaminage occupe la longueur totale du stratifié et la sépare en quatre régions distinctes. Ces quatre régions sont montrées sur la *Figure 2-1b*; où la structure est soumise à une charge de compression ( $p$ ) le long de ses extrémités fixes. La coordonnée  $x$  est mesurée à partir de l'extrémité gauche du stratifié.



(a) position et orientation de délaminage par rapport aux dimensions de la plaque



(b) régions et caractéristiques géométriques de délaminage

Figure 2-1: Plaque stratifiée délaminée

## 2.3 HYPOTHESES FONDAMENTALES

Les hypothèses simplificatrices utilisées dans la présente étude sont:

- 1- Le plan moyen de chaque région est considéré confondu avec le plan  $(x,y)$ .
- 2- Le déplacement latéral ( $w$ ) est supposé petite par rapport aux dimensions de la plaque considérée.
- 3- Les déplacements  $u^{(i)}$  et  $w^{(i)}$  ( $i=1,2,3,4$ ) représente respectivement le  $i$ -ème déplacement axial (dans le plan de la plaque) et le  $i$ -ème déplacement transversal d'un point quelconque du matériau dans chaque région (flexion cylindrique).

- 4- Les charges de compression sont uniformément réparties sur une longueur unité et appliquées sur chaque extrémité de la plaque.
- 5- Le délaminage est supposé présent avant que la charge de compression soit appliquée.
- 6- Le délaminage possède une longueur  $a$  et s'étend sur toute la largeur de la plaque.

## 2.4 EQUATIONS GOUVERNANTES

Dans ce qui suit on a besoin de déterminer la rigidité de traction, de flexion et de couplage de chaque région; l'équation constitutive peut être simplifiée par considération de deux cas de conditions aux limites suivant l'axe ( $y$ ): (i) extrémités fixes, (ii) extrémités libres [3].

### 2.4.1 Plaque avec extrémités libres

Cette condition est caractérisée par:

$$N_y = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad M_y = 0 \quad \text{et} \quad M_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

Tenant compte de (2.1), la relation (1.21) peut être mise sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ M_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0,xx} \\ \epsilon_{0,yy} \\ \gamma_{0,xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Si on considère uniquement les efforts  $N_x$  et les moments  $M_x$ , la relation (2.2) se réduit alors à:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

tel que:

$$\Lambda_1 = A_{11} + b_1 A_{12} + a_1 B_{12},$$

$$\Lambda_2 = B_{11} + b_2 A_{12} + a_2 B_{12}$$

$$K_1 = B_{11} + b_1 B_{12} + a_1 D_{12},$$

$$K_2 = D_{11} + b_2 B_{12} + a_2 D_{12}$$

avec,

$$a_1 = \frac{B_{22} A_{12} - B_{12} A_{22}}{\Delta},$$

$$a_2 = \frac{B_{12} B_{22} - D_{12} A_{22}}{\Delta}$$

$$b_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{B_{22} (B_{12} A_{22} - B_{22} A_{12})}{A_{22}} - \frac{A_{12}}{A_{22}},$$

$$b_2 = \frac{1}{\Delta} \frac{B_{22} (D_{12} A_{22} - B_{12} B_{22})}{A_{22}} - \frac{B_{12}}{A_{22}}$$

Où,  $\Delta = D_{22} A_{22} - B_{22}^2$

#### 2.4.2 Plaque avec extrémités fixes

La condition d'extrémités fixes est caractérisée par:

$$\varepsilon_{0y} = 0, \quad \varepsilon_{0xy} = 0, \quad \kappa_y = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_{xy} = 0 \quad (2.4)$$

Dans ces conditions, le système d'équations exprimé par la relation (1.21), devient:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

tel que:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A_{11} + b_1 A_{12} + a_1 B_{12}, & \Lambda_2 &= B_{11} + b_2 A_{12} + a_2 B_{12} \\ K_1 &= B_{11} + b_1 B_{12} + a_1 D_{12}, & K_2 &= D_{11} + b_2 B_{12} + a_2 D_{12} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{B_{22} A_{12} - B_{12} A_{22}}{\Delta}, & a_2 &= \frac{B_{12} B_{22} - D_{12} A_{22}}{\Delta} \\ b_1 &= \frac{1}{\Delta} \frac{B_{22} (B_{12} A_{22} - B_{22} A_{12})}{A_{22}} - \frac{A_{12}}{A_{22}}, & b_2 &= \frac{1}{\Delta} \frac{B_{22} (D_{12} A_{22} - B_{12} B_{22})}{A_{22}} - \frac{B_{12}}{A_{22}} \end{aligned}$$

Où,  $\Delta = D_{22} A_{22} - B_{22}^2$

#### 2.4.2 Plaque avec extrémités fixes

La condition d'extrémités fixes est caractérisée par:

$$\varepsilon_{0y} = 0, \quad \varepsilon_{0xy} = 0, \quad \kappa_y = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_{xy} = 0 \quad (2.4)$$

Dans ces conditions, le système d'équations exprimé par la relation (1.21), devient:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

En ne considérant que les efforts  $N_x$  et les moments  $M_x$ , la relation (2.5) se réduit à:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.5 TECHNIQUE DE PERTURBATION

### 2.5.1 Equations d'équilibres

La théorie des plaques peut ramener le problème considéré à une analyse unidimensionnel. Ce type d'analyse concerne les plaques ayant un rapport longueur sur largeur assez élevé (déformation soit plane), un tel comportement est appelé flexion cylindrique.

$$u=u(x), \quad v=0 \quad \text{et} \quad w=w(x) \quad (2.7)$$

Tenant compte des hypothèses 1 et 2, les équations d'équilibres (voir Annexe C) dans le cas statique peuvent être exprimées en fonction des résultantes des forces et des moments par:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q_z(x, y) \quad (2.9)$$

où,  $q_z(x, y)$  est la distribution des charges transversales.

Les équations de flambement sont obtenues par l'utilisation de la méthode de perturbation; les étapes à suivre sont récapitulées comme suit:

- Utilisant les (i) équations d'équilibres, (ii) conditions aux limites et (iii) conditions de continuités des forces et des moments.
- Perturbant les équations d'équilibres par un petit changement dans les fonctions de déplacement.
- Découplant les termes dénotés par les suffixes  $(\dots)_0$  et  $(\dots)_1$ , décrivant respectivement les équations différentielles relatives aux états de pré-flambement et de flambement.

$$N_x = N_{0x} + N_{1x} \quad (2.10)$$

$$M_x = M_{0x} + M_{1x} \quad (2.11)$$

$$u = u_0 + u_1 \quad (2.12)$$

$$w = w_0 + w_1 \quad (2.13)$$

Après substitution des équations (2.10)-(2.13) dans les équations (2.8) et (2.9), et après réarrangement des termes notés par les indices  $(\dots)_0$  et  $(\dots)_1$ , on obtient:

$$\frac{\partial N_{0x}}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 M_{0x}}{\partial x^2} + N_{0x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -q_z(x, y) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial N_{1x}}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 M_{1x}}{\partial x^2} + N_{0x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + N_{1x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (2.17)$$

Les deux équations (2.14) et (2.15) explicitent le phénomène de pré-flambement, Par contre, les équations (2.16) et (2.17) explicitent le phénomène de flambement.

### 2.5.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont imposées soit sur les déplacements, soit sur les forces et moments; c'est-à-dire:

#### Déplacements

#### Forces et moments

• Déplacement axial: ( $u$ ) ou • effort axial: ( $N_x$ ) (2.18)

• Déplacement transverse: ( $w$ ) ou • cisaillement transverse:  
 $(V = \frac{\partial M_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial w}{\partial x})$  (2.19)

• Déplacement angulaire:  $(\frac{\partial w}{\partial x})$  ou • moment de flexion: ( $M_x$ ) (2.20)

En substituant les équations (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) dans les équations (2.18), (2.19) et (2.20), les états des conditions aux limites de pré-flambement et de flambement peuvent être résumés comme suit:

#### • conditions aux limites de pré-flambement:

#### Déplacements

#### Forces et moments

$u_0 = 0$  ou  $N_{0x} = -P$  (2.21)

$w_0 = 0$  ou  $\frac{\partial M_{0x}}{\partial x} + N_{0x} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$  (2.22)

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad M_{0x} = 0 \quad (2.23)$$

• **conditions aux limites de flambement:**

Déplacements

Forces et moments

$$u_1 = 0 \quad \text{ou} \quad N_{1x} = 0 \quad (2.24)$$

$$w_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial M_{1x}}{\partial x} + N_{0x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_{1x} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad M_{1x} = 0 \quad (2.26)$$

### 2.5.3 Conditions auxiliaires

Ces conditions sont applicables aux états de pre-flambement et de flambement, les deux tronçons délimitant le délaminage sont bornés entre  $x=l$  et  $x=l+a$ ; donc les conditions de continuité des déplacements et des forces sont données par [1-3, 12]:

**(a) Déplacements :**

**Pour  $x=l$**

$$u^{(1)} - \frac{h}{2} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = u^{(2)} \quad (2.27)$$

$$u^{(1)} + \frac{H}{2} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = u^{(3)} \quad (2.28)$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} \tag{2.30}$$

Pour  $x=l+a$  :

$$u^{(4)} - \frac{h}{2} \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} = u^{(2)} \tag{2.31}$$

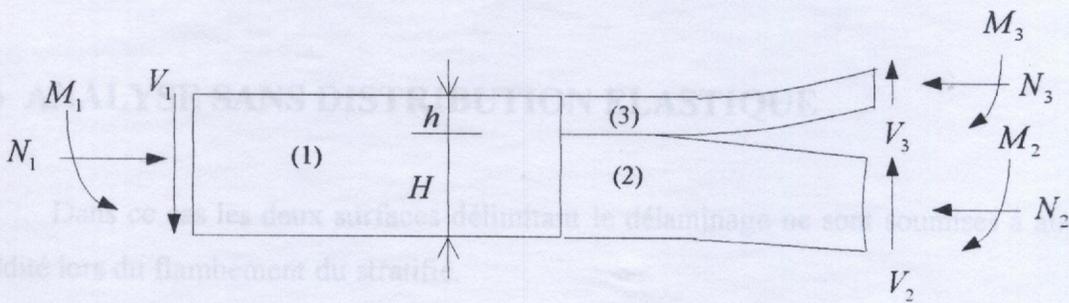
$$u^{(4)} + \frac{H}{2} \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} = u^{(3)} \tag{2.32}$$

$$w^{(2)} = w^{(3)} = w^{(4)} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} \tag{2.34}$$

**(b) Forces et moments:**

En appliquant les équations fondamentales de l'équilibre statique sur la structure représentée sur la figure (2.2), on aura:



**Figure 2-2:** Equilibre statique des forces et moments.

2.6.1 Etat de pré-flambement

Dans cet état, la plaque ne subit pas de flexion, donc le chargement transversal et les déplacements transversaux de chaque région sont nuls ( $q_z(x,y) = w_0^{(i)} = 0$ )

**Pour  $x=l$  :**

$$M_x^{(1)} - M_x^{(2)} - M_x^{(3)} + \frac{H}{2} N_x^{(3)} - \frac{h}{2} N_x^{(2)} = 0 \quad (2.35)$$

$$V^{(1)} - V^{(2)} - V^{(3)} = 0 \quad (2.36)$$

$$N_x^{(1)} - N_x^{(2)} - N_x^{(3)} = 0 \quad (2.37)$$

**Pour  $x=l+a$  :**

$$M_x^{(4)} - M_x^{(2)} - M_x^{(3)} + \frac{H}{2} N_x^{(3)} - \frac{h}{2} N_x^{(2)} = 0 \quad (2.38)$$

$$V^{(4)} - V^{(2)} - V^{(3)} = 0 \quad (2.39)$$

$$N_x^{(4)} - N_x^{(2)} - N_x^{(3)} = 0 \quad (2.40)$$

où,

$$V^{(i)} = \frac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x} + N_x^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} \quad (i=1,2,3,4) \quad (2.41)$$

## 2.6 ANALYSE SANS DISTRIBUTION ELASTIQUE

Dans ce cas les deux surfaces délimitant le délaminage ne sont soumises à aucune rigidité lors du flambement du stratifié.

### 2.6.1 Etat de pre-flambement

Dans cet état, la plaque ne subit pas de flexion, donc le chargement transversal et les déplacements transversaux de chaque région sont nuls ( $q_z(x, y) = w_0^{(i)} = 0$ ).

2.6.1 Après l'application des équations (2.14) et (2.15); les équations caractérisant cet état sont:

$$w_0^{(i)} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.43)$$

L'intégration de l'équation (2.43) deux fois par rapport à  $x$ , nous donne:

$$\frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial x} = A^{(i)} \quad (2.44)$$

et;

$$u_0^{(i)} = A^{(i)}x + B^{(i)} \quad (2.45)$$

où  $A^{(i)}$  et  $B^{(i)}$  ( $i=1,2,3,4$ ) sont des constantes arbitraires déterminées par l'utilisation des conditions aux limites.

### 2.6.1.1 Conditions aux limites

Pour le cas des extrémités fixes, les conditions suivantes doivent être satisfaites:

**Pour  $x=0$ :**

$$u_0^{(1)} = 0, \quad w_0^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.46)$$

**Pour  $x=L$ :**

$$N_0^{(4)} = -P, \quad w_0^{(4)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial x} = 0 \quad (2.47)$$

### 2.6.1.2 Conditions auxiliaires

Les conditions auxiliaires se résument comme suit:

#### (a) Déplacements:

##### Pour $x=l$ :

En se référant à la Section (2.5.2), l'état de pré-flambement montre que  $\frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} = 0$ ,

cette condition réduit l'écriture des déplacements axiaux (Eqs.2.27 et 2.28) à:

$$u_0^{(2)} = u_0^{(1)} \quad (2.48)$$

$$u_0^{(3)} = u_0^{(1)} \quad (2.49)$$

$$w_0^{(1)} = w_0^{(2)} = w_0^{(3)} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial x} \quad (2.51)$$

##### Pour $x=l+a$ :

Du fait que  $\frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial x} = 0$ , les équations.(2.31) et (2.32) se simplifient et deviennent:

$$u_0^{(4)} = u_0^{(2)} \quad (2.52)$$

$$u_0^{(4)} = u_0^{(3)} \quad (2.53)$$

$$w_0^{(2)} = w_0^{(3)} = w_0^{(4)} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial w_0^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{(4)}}{\partial x} \quad (2.55)$$

En procédant de la même manière que celle détaillée pour  $x=l$ , on aura

### (b) Forces:

#### Pour $x=l$ :

En tenant compte des équations (2.46) à (2.55), les résultantes des forces et moments, exprimés par la relation constitutive (2.5), deviennent respectivement:

$$N_0^{(i)} = A_{11}^{(i)} \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial x} \quad (2.56a)$$

$$M_0^{(i)} = B_{11}^{(i)} \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial x} \quad (2.56b)$$

### 2.6.1.3 Procédure de solution

En substituant (2.56) dans (2.35) à (2.40), on obtient:

$$B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} - B_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} - B_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} + A_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} \frac{H}{2} - A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \frac{h}{2} = 0 \quad (2.57a)$$

$$\frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.57b)$$

$$A_{11}^{(1)} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} - A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} - A_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} = 0 \quad (2.57c)$$

Les déplacements  $u_0^{(i)}$  ( $i=1,2,3,4$ ) sont obtenus en utilisant les équations (2.57), par conséquent en substituant les déplacements dans la relation (2.56a), on obtient les expressions des  $N_0^{(i)}$ ; comme suit:

Pour  $x=l+a$ :

En procédant de la même manière que celle détaillée pour  $x=l$ , on aura:

$$A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} - B_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} - B_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} + A_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} \frac{H}{2} - A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \frac{h}{2} = 0 \quad (2.58a)$$

$$\frac{\partial^2 u_0^{(2)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.58b)$$

$$A_{11}^{(4)} \frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial x} - A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} - A_{11}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} = 0 \quad (2.58c)$$

Finalement, les efforts  $N_0^{(i)}$  ( $i = 1,2,3,4$ ), sont donnés par les expressions suivantes:

$$N_0^{(1)} = N_0^{(4)} = -P \quad (2.59)$$

$$N_0^{(2)} = -P \frac{A_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)} + A_{11}^{(3)}} \quad (2.60)$$

$$N_0^{(3)} = N_0^{(2)} \frac{A_{11}^{(3)}}{A_{11}^{(2)}} \quad (2.61)$$

## 2.6.2 État de flambement

En utilisant les relations (2.16) et (2.17) et les expressions des résultantes des forces et des moments (2.5), les équations caractérisant l'état de flambement peuvent être exprimées par:

$$A_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial x^2} - B_{11}^{(i)} \frac{\partial^3 w_1^{(i)}}{\partial x^3} = 0 \quad (i=1,2,3,4) \quad (2.62)$$

$$\left[ \frac{[B_{11}^{(i)}]^2}{A_{11}^{(i)}} - D_{11}^{(i)} \right] \frac{\partial^4 w_1^{(i)}}{\partial x^4} + N_0^{(i)} \frac{\partial^2 w_1^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \quad (i=1,2,3,4) \quad (2.63)$$

### 2.6.2.1 Procédure de solution

L'équation (2.63) est appelée "équation de flambement statique"; elle caractérise l'état de flambement des structures ayant (i) une configuration géométrique simple, (ii) des conditions aux limites simples et (iii) des chargements déterminés. Sa résolution peut être abordée par des méthodes basées sur des formulations analytiques [1-5]. Pour les structures complexes, cette résolution nécessite l'application des méthodes numériques. Parmi ces méthodes on cite: la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDDF).

Pour résoudre l'équation (2.63), deux cas peuvent se présenter selon le signe de:

$$\left[ \frac{[B_{11}^{(i)}]^2}{A_{11}^{(i)}} - D_{11}^{(i)} \right] = \Delta$$

- Si  $\Delta < 0$ , la solution analytique [29] de l'équation (2.63) est obtenue sous la forme:

$$w_1^{(i)}(x) = E^{(i)} \sin k^{(i)}x + F^{(i)} \cos k^{(i)}x + G^{(i)}x + H^{(i)} \quad (2.64)$$

En substituant (2.64) dans (2.62), le déplacement axial sera exprimé par:

$$u_1^{(i)} = \frac{B_{11}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}} k^{(i)} [E^{(i)} \cos k^{(i)}x - F^{(i)} \sin k^{(i)}x] + C^{(i)}x + D^{(i)} \quad (2.65)$$

avec:  $[k^{(i)}]^2 = \frac{N_0^{(i)}}{\Delta} \quad (i=1,2,3,4)$

- Si  $\Delta > 0$ , la solution générale de l'équation (2.63) s'écrit sous la forme:

$$w_1^{(i)} = E^{(i)}e^{k^{(i)}x} + F^{(i)}e^{-k^{(i)}x} + G^{(i)}x + H^{(i)} \quad (2.66)$$

et

$$u_1^{(2)} = \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}}k^{(2)} \left[ E^{(2)}e^{k^{(2)}x} - F^{(2)}e^{-k^{(2)}x} \right] + C^{(2)}x + D^{(2)} \quad (2.67)$$

avec: 
$$[k^{(i)}]^2 = -\frac{N_0^{(i)}}{\Delta} \quad (i=1,2,3,4)$$

L'utilisation (i) des conditions aux limites, (ii) des conditions auxiliaires et (iii) des conditions de continuité des forces et des moments nous permettent de déterminer les constantes d'intégration  $C^{(i)}$ ,  $D^{(i)}$ ,  $E^{(i)}$ ,  $F^{(i)}$ ,  $G^{(i)}$  et  $H^{(i)}$  ( $i=1,2,3,4$ ).

Dans cette étude, deux cas de conditions aux limites ont été examinés:

(a) Plaque encastree

Dans ce cas, les conditions aux limites sont:

- pour  $x=0$ : 
$$u_1^{(1)} = 0 \quad w_1^{(1)} = 0 \quad \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.68)$$

- Pour  $x=L$ : 
$$\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial x} = 0 \quad w_1^{(4)} = 0 \quad \frac{\partial w_1^{(4)}}{\partial x} = 0 \quad (2.69)$$

Par contre, les conditions auxiliaires et de continuité des forces et des moments sont données respectivement par les relations (2.27)-(2.34) et (2.35)-(2.41).

(b) Plaque en appuis simples

Dans ce cas, les conditions aux limites sont:

- Pour  $x=0$ : 
$$u_1^{(1)} = 0 \quad w_1^{(1)} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_1^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.70)$$

- Pour  $x=L$ : 
$$\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial x} = 0 \quad w_1^{(4)} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_1^{(4)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.71)$$

Les déplacements axiaux  $u$  et transversaux  $w$  contiennent les constantes  $(E^{(i)}, F^{(i)}, G^{(i)}, D^{(i)}, C^{(i)}, H^{(i)})$ . Au total, il y a 24 équations à évaluer pour les quatre zones. Ces équations peuvent être écrites sous forme d'un système matricielle:

$$[M]\{U\}=\{0\} \quad (2.72)$$

Pour une solution non triviale (déterminant égal à zéro), l'équation caractéristique du système (2.72) nous permet de calculer les charges critiques.

Pour illustrer la procédure de calcul, il est convenable d'utiliser des valeurs adimensionnelles. On pose pour  $(i=1,2,3,4)$  les quantités suivantes:

$$\bar{H}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{t}, \quad \bar{F}^{(i)} = \frac{F^{(i)}}{t}, \quad \bar{E}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{t},$$

$$\bar{G}^{(i)} = \frac{G^{(i)}L}{t}, \quad \bar{D}^{(i)} = \frac{D^{(i)}}{t}, \quad \bar{C}^{(i)} = C^{(i)}$$

et;

$$\bar{l} = \frac{l}{L}, \quad \bar{a} = \frac{a}{L}, \quad \bar{h} = \frac{h}{t}, \quad \bar{H} = \frac{H}{t}$$

D'autre part, la charge critique adimensionnelle sera exprimée par:

$$\bar{P} = \frac{P}{P_{perf}}$$

où,

$$P_{perf} = \frac{4\pi^2 \left[ D_{11}^{(1)} - \frac{[B_{11}^{(1)}]^2}{A_{11}^{(1)}} \right]}{L^2}$$

Plaque avec des extrémités encastées.

$$P_{perf} = \frac{\pi^2 \left[ D_{11}^{(1)} - \frac{[B_{11}^{(1)}]^2}{A_{11}^{(1)}} \right]}{L^2}$$

Plaque avec des extrémités simplement appuyées.

Utilisant six équations simples parmi les 24 générées, on peut éliminer six constantes, le système d'équation (2.72) est alors réduit à un système de 18 équations algébriques, homogènes et linéaires dont les valeurs inconnues sont les suivantes :

Pour un stratifié avec des extrémités encastées;

$$\bar{C}^{(2)}, \bar{D}^{(2)}, \bar{D}^{(3)}, \bar{D}^{(4)}, \bar{E}^{(1)}, \bar{E}^{(2)}, \bar{E}^{(3)}, \bar{E}^{(4)}, \bar{F}^{(1)}, \bar{F}^{(2)}, \bar{F}^{(3)}, \bar{F}^{(4)}, \bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}, \bar{H}^{(4)},$$

$$\bar{G}^{(2)}, \bar{G}^{(3)}, \bar{G}^{(4)}$$

La plus petite valeur propre de l'équation caractéristique du système (2.72) est définie comme la valeur de la charge critique provoquant le déclenchement du phénomène de délaminage.

## 2.7 ANALYSE AVEC DISTRIBUTION ELASTIQUE

### 2.7.1 Etat de pré-flambement

L'analyse de l'état de pré-flambement avec prise en compte de la distribution élastique sera procédée de la même manière que pour l'analyse sans distribution élastique (section 2.6). Il est à noter que la solution pour trouver les résultantes de forces ( $N_0^{(i)}$ ) prend la même forme que celle donnée par les relations (2.59) à (2.61).

### 2.7.2 Etat de flambement

Dans cet état, les deux surfaces délimitant le délaminage sont supposées connectées par des ressorts uniformément repartis le long de la longueur de délaminage. Les deux régions 2 et 3 sont liées par des forces de rappel  $q_z(x, y)$  engendrées par les ressorts. Dans la région 2, la force  $q_z(x, y)$  est exprimée par [3]:

$$q_z^{(2)} = -K(w_3(x) - w_2(x)) \quad (2.73)$$

Par contre, dans la région 3, cette force est exprimée par:

$$q_z^{(3)} = -q_z^{(2)} \quad (2.74)$$

D'après la technique de perturbation (section 2.5), les équations gouvernant les régions 2 et 3 s'écrivent:

$$\frac{\partial N_1^{(i)}}{\partial x} = 0 \quad (2.75)$$

$$\left[ \frac{[B_{11}^{(i)}]^2}{A_{11}^{(i)}} - D_{11}^{(i)} \right] \frac{\partial^4 w_1^{(i)}}{\partial x^4} + N_0^{(i)} \frac{\partial^2 w_1^{(i)}}{\partial x^2} = q_i(x, y) \quad (2.76)$$

( $i=2,3$ )

Les équations gouvernant les régions 1 et 4 prennent les mêmes expressions que celles décrites par l'état où la distribution élastique n'est pas prise en considération (section 2.6).

### 2.7.3 Procédure de solution

On remarque que pour ( $i=2,3$ ), les équations (2.76) sont couplées. Éliminant  $w_3$  pour obtenir une équation en  $w_2$ .

$$a \frac{\partial^8 w_2^{(1)}}{\partial x^8} + b \frac{\partial^6 w_2^{(1)}}{\partial x^6} + c \frac{\partial^4 w_2^{(1)}}{\partial x^4} + d \frac{\partial^2 w_2^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.77)$$

avec:

$$\begin{aligned}
 a &= - \left[ \frac{[B_{11}^{(3)}]^2}{A_{11}^{(3)}} - D_{11}^{(3)} \right] \left[ \frac{[B_{11}^{(2)}]^2}{A_{11}^{(2)}} - D_{11}^{(2)} \right] / K \\
 b &= - \frac{N_0^{(2)}}{k} \left[ \frac{[B_{11}^{(3)}]^2}{A_{11}^{(3)}} - D_{11}^{(3)} \right] - \frac{N_0^{(3)}}{k} \left[ \frac{[B_{11}^{(2)}]^2}{A_{11}^{(2)}} - D_{11}^{(2)} \right] \\
 c &= \left[ \frac{[B_{11}^{(3)}]^2}{A_{11}^{(3)}} - D_{11}^{(3)} \right] - \frac{N_0^{(2)} N_0^{(3)}}{k} + \left[ \frac{[B_{11}^{(2)}]^2}{A_{11}^{(2)}} - D_{11}^{(2)} \right] \\
 d &= N_0^{(2)} + N_0^{(3)}
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Pour obtenir l'équation caractéristique, on pose  $w_2 = e^{rx}$ ; l'équation (2.77) devient:

$$r^2(ar^6 + br^4 + cr^2 + d) = 0 \tag{2.79}$$

La résolution de l'équation (2.79) nécessite l'utilisation de deux changements de variables, telles que:

$$r^2 = \lambda \quad \text{et} \quad \lambda = \dot{x} - \frac{p_1}{3} \tag{2.80}$$

Soit;

$$x^3 + a'x + b' = 0 \tag{2.81}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 a' &= (3q - p_1^2)/3 \\
 b' &= (2p^3 - 9pq + 27r')/27 \\
 q &= c/a \\
 p_1 &= b/a \\
 r' &= d/a
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

L'équation (2.81) admet trois solutions. Selon le signe de  $(b'^2/4 + a^3/27) = \Omega$ , deux cas peuvent se présenter [3, 30]:

- Si  $\Omega > 0$ , l'équation (2.81) admet une solution réelle  $x_1$  et deux autres solutions complexes  $x_2$  et  $x_3$ ; ces trois solutions sont données par:

$$x_1 = A + B \quad (2.83)$$

$$x_2 = -\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right) \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad (2.84)$$

$$x_3 = -\left(\frac{A+B}{2}\right) - \left(\frac{A-B}{2}\right) \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad (2.85)$$

avec:

$$A = \left[ -\frac{b'}{2} + \left( \frac{b'^2}{4} + \frac{a^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}$$

$$B = -\left[ \frac{b'}{2} + \left( \frac{b'^2}{4} + \frac{a^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}$$

Après l'utilisation du deuxième changement de variable (relation 2.80), les  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) peuvent être exprimés par:

$$\lambda_1 = A + B - \frac{p_1}{3} \quad (2.86)$$

$$\lambda_2 = -\left(\frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.87)$$

$$\lambda_3 = -\left(\frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3}\right) - \left(\frac{A-B}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.88)$$

Finalement, l'expression du déplacement transversal  $w_1^{(2)}$  de la région 2 prend la forme suivante:

$$w_1^{(2)} = c_1 \cos(-w_1)^{1/2} x + c_2 \sin(-w_1)^{1/2} x + (c_3 \cos(\alpha x) + c_4 \sin(\beta x)) e^{\beta x} + (c_5 \cos(\alpha x) + c_6 \sin(\beta x)) e^{-\beta x} + c_7 x + c_8 \quad (2.89)$$

avec:

$$\alpha = \left( \left[ \frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3} \right]^2 + \left[ \frac{A-B\sqrt{3}}{2} \right]^2 \right)^{1/4} \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3}}{\frac{A-B\sqrt{3}}{2}} \right) \right)$$

$$\beta = \left( \left[ \frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3} \right]^2 + \left[ \frac{A-B\sqrt{3}}{2} \right]^2 \right)^{1/4} \sin \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{p_1}{3}}{\frac{A-B\sqrt{3}}{2}} \right) \right)$$

A partir des équations (2.73) et (2.76), l'expression du déplacement transversal  $w_1^{(3)}$  en fonction de  $w_1^{(2)}$  sera donnée par:

$$w_1^{(3)} = w_1^{(2)} - \frac{N_0^{(2)}}{k} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial x^2} - \left[ \frac{[B_{11}^{(2)}]^P}{A_{11}^{(2)}} - D_{11}^{(2)} \right] / k \frac{\partial^4 w_1^{(2)}}{\partial x^4} \quad (2.90)$$

Par conséquent,  $w_1^{(3)}$  peut être obtenue en remplaçant  $w_1^{(2)}$  (et ses dérivés) par l'expression donnée par la relation (2.89).

En utilisant la relation (2.75), les expressions des déplacements axiaux  $u_1^{(2)}$  et  $u_1^{(3)}$  peuvent être obtenues en fonction de  $w_1^{(2)}$  et  $w_1^{(3)}$ ; soit:

$$u_1^{(2)} = c_{11} x + c_{12} + \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial x} \quad (2.91)$$

$$u_1^{(3)} = c_9 x + c_{10} + \frac{B_{11}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} \frac{\partial w_1^{(3)}}{\partial x} \quad (2.92)$$

• Si  $\Omega < 0$ , l'équation (2.81) admet trois solutions réelles  $x_1, x_2$  et  $x_3$  qui sont données par [3, 29]:

$$x_1 = -2\sqrt{-pp} \cos(\theta') \quad (2.93)$$

$$x_2 = -2\sqrt{-pp} \cos(\theta'+120^\circ) \quad (2.94)$$

$$x_3 = -2\sqrt{-pp} \cos(\theta'+240^\circ) \quad (2.95)$$

avec:  $pp = \frac{a'}{3}$ ,  $\theta' = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{b'/2}{2\sqrt{-pp^3}} \right)$

A partir des expressions (2.93-2.95) et après l'utilisation du deuxième changement de variable (relation 2.80), les  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) peuvent être écrites sous les formes suivantes:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{pp} \cos(\theta') - \frac{P_1}{3} \quad (2.96)$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{pp} \cos(\theta'+120^\circ) - \frac{P_1}{3} \quad (2.97)$$

$$\lambda_3 = -2\sqrt{pp} \cos(\theta'+240^\circ) - \frac{P_1}{3} \quad (2.98)$$

En procédant d'une manière analogue que celle correspondant à  $\Omega > 0$ , les expressions des déplacements transversaux et axiaux des régions 2 et 3 peuvent être présentées sous les formes suivantes [3]:

$$w_1^{(2)} = c_1 \cos(-w_1)^{1/2} x + c_2 \sin(-w_1)^{1/2} x + c_3 \cos(-w_2)^{1/2} x + c_4 \sin(-w_2)^{1/2} x + c_5 \cos(-w_3)^{1/2} x + c_6 \sin(-w_3)^{1/2} x + c_7 x + c_8 \quad (2.99)$$

Les expressions de  $w_1^{(3)}$  et  $u_1^{(2)}$  peuvent être données en fonction de  $w_1^{(2)}$  par [3]:

$$w_1^{(3)} = w_1^{(2)} - \frac{N_0^{(2)}}{k} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial x^2} - \left[ \frac{[B_{11}^{(2)}]}{A_{11}^{(2)}} - D_{11}^{(2)} \right] / k \frac{\partial^4 w_1^{(2)}}{\partial x^4} \quad (2.100)$$

$$u_1^{(2)} = c_{11}x + c_{12} + \frac{B_{11}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial x} \quad (2.101)$$

Finalement, l'expression du déplacement axial  $u_1^{(3)}$  est donnée par [3]:

$$u_1^{(3)} = c_9x + c_{10} + \frac{B_{11}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} \frac{\partial w_1^{(3)}}{\partial x} \quad (2.102)$$

D'une part, l'utilisation (i) des conditions aux limites, (ii) des conditions auxiliaires et (iii) des conditions de continuité des forces et des moments, et d'autre part, l'utilisation des expressions des déplacements axiaux et transversaux nous permettent de générer le système matriciel suivant:

$$[M]\{U\}=\{0\} \quad (2.103)$$

Le système d'équations (2.103) contient 24 équations à évaluer pour les quatre zones.

Deux cas des conditions aux limites ont été examinés:

- (a) plaque encastree;
- (b) plaque en appuis simples.

Après élimination de six constantes (conditions aux limites), le système (2.103) peut être réduit à un système de 18 équations à 18 inconnus.

Pour une solution non triviale (déterminant égal à zéro), l'équation caractéristique du système (2.103) nous permet de calculer en fonction de la longueur et la position de délaminage les charges critiques du stratifié considéré.

- La méthode de Jacobi
- La méthode des itérations inverses
- La méthode des sous-espaces

### Chapitre 3

Les valeurs propres des systèmes symétriques définis positifs sont très sensibles à un petit changement dans la matrice; les erreurs d'exécution sont très importantes. Dans ces conditions, avant d'utiliser l'une des méthodes Householder-QR et Hessenberg-QR, pour la détermination de calculer les valeurs propres, il est préférable d'utiliser des programmes susceptibles de calculer les valeurs propres.

## PRESENTATION DU PROGRAMME

### 3.2.2 Détermination des charges critiques des plaques stratifiées délaminiées

#### 3.1 INTRODUCTION

Les charges critiques d'un stratifié soumis à des chargements de compression sont déterminées par le déclenchement du mécanisme de délaminage par flambement (Fig. 1.1). La plus petite charge critique correspond à la plus petite valeur propre d'un système d'équations différentielles. Ce modèle peut être traité: (i) soit par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDDF), (ii) soit par des méthodes analytiques basées sur des formulations mathématiques. La deuxième méthode fait l'objet du présent travail.

#### 3.2 METHODE DE CALCUL DES CHARGES CRITIQUES DES PLAQUES DELAMINEES

##### 3.2.1 Introduction

La détermination des valeurs propres des systèmes symétriques définis positifs d'ordre supérieur à 4 nécessite l'utilisation des méthodes itératives, à titre d'exemple on cite [31]:

- La méthode de Jacobi.
- La méthode des itérations inverses.
- La méthode des sous espaces.

Les valeurs propres des systèmes quelconques sont très sensibles à un petit changement dans la matrice; les erreurs d'exécution sont très importantes. Dans ces conditions, avant d'utiliser l'une des méthodes Housholder-QR et Hessemberg-QR permettant de calculer les valeurs propres, il est préférable d'utiliser des programmes susceptibles de réduire les erreurs d'exécution tels que BALANC et ELMHES.

### 3.2.2 Détermination des charges critiques des plaques stratifiées délaminées

Les charges critiques d'un stratifié soumis à des chargements de compression sont les charges qui provoquent le déclenchement du phénomène de délaminage par flambement (instabilité). La plus petite charge critique correspond à la plus petite valeur propre de la matrice générée. Cette charge sera calculée en fonction de la charge appliquée, les caractéristiques géométriques et les constantes élastiques de chaque région de la plaque.

Pour déterminer la charge critique des stratifiés considérés, nous avons élaboré un programme de calcul écrit en fortran et qui peut être appliqué à toute structure composite à base de fibres. Celui-ci contient un programme principal se composant de plusieurs sous programmes de calcul, qui nous permet de déterminer [25, 26, 32]:

- La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans les axes principaux  $[Q]$  qui prend les mêmes éléments pour tous les plis du stratifié.
- La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans les axes du stratifié  $[\bar{Q}]$ .
- Les cotes des plis de chaque région.
- Les constantes élastiques  $[A_{ij}]$ ,  $[B_{ij}]$  et  $[D_{ij}]$  du stratifié.
- Les efforts internes dans les régions 1 et 4 dans le cas de pré-flambement.

Quelques sous programmes développés sont utilisés pour calculer les matrices  $[Q]$ ,  $[\bar{Q}]$ , les cotes des plis et les constantes élastiques  $[A_{ij}]$ ,  $[B_{ij}]$  et  $[D_{ij}]$  des régions 2 et

Après avoir utilisé les solutions mathématiques exactes, les conditions aux limites, les conditions auxiliaires et les conditions de continuité des forces et des moments, le système suivant :

$$[M]\{U\} = 0 \quad (3.1)$$

Peut être généré.

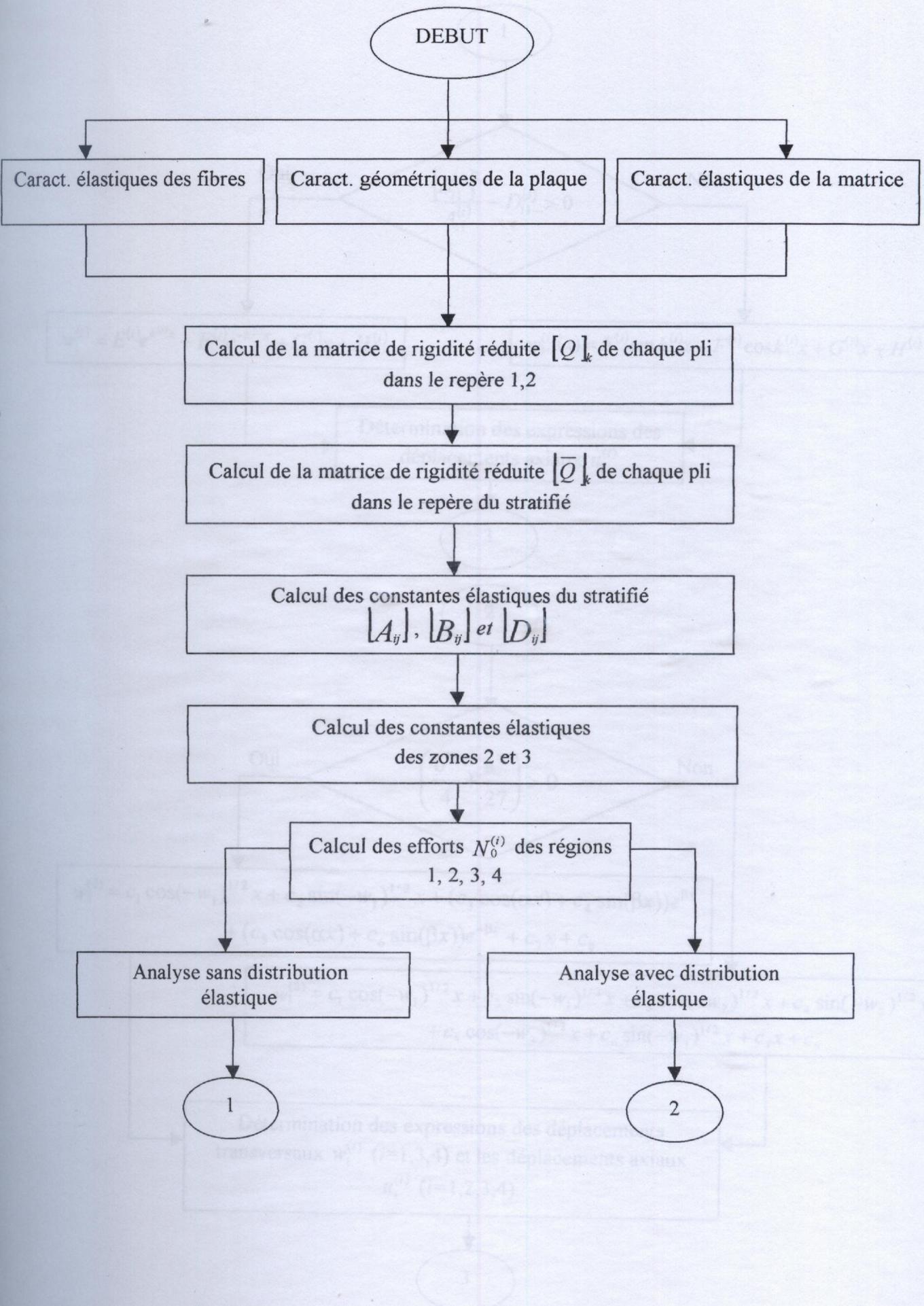
La matrice du système (3.1) est une matrice carrée de dimension  $24 \times 24$ . Elle peut être réduite après élimination de six constantes à une matrice de dimensions  $18 \times 18$ , qui contient : les efforts internes, les constantes élastiques, la charge appliquée et les caractéristiques mécaniques et géométriques du stratifié considéré.

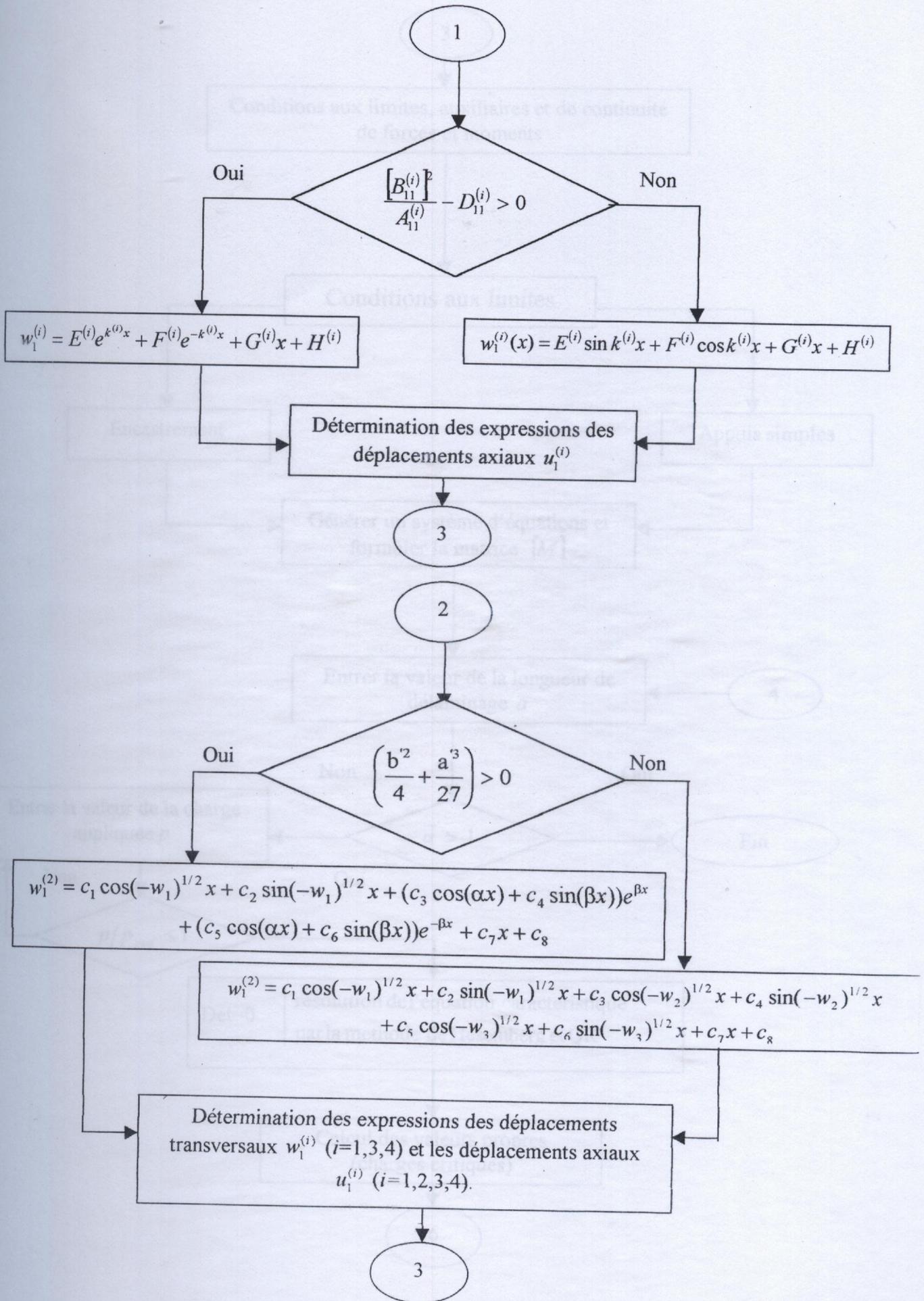
Les programmes BALANC et ELMHES sont utilisés dans le but de conditionner et équilibrer la matrice formulée.

La méthode de Hesenberg-QR a été choisie afin de calculer les valeurs propres du système généré. Finalement un sous programme a été développé afin d'initialiser ces valeurs propres et par conséquent la détermination de la charge critique de la plaque considérée.

### 3.3 ORGANIGRAMME DE CALCUL

L'organigramme suivant englobe les différentes étapes permettant d'aboutir au calcul de la charge critique de la plaque composite supposée initialement délaminée.





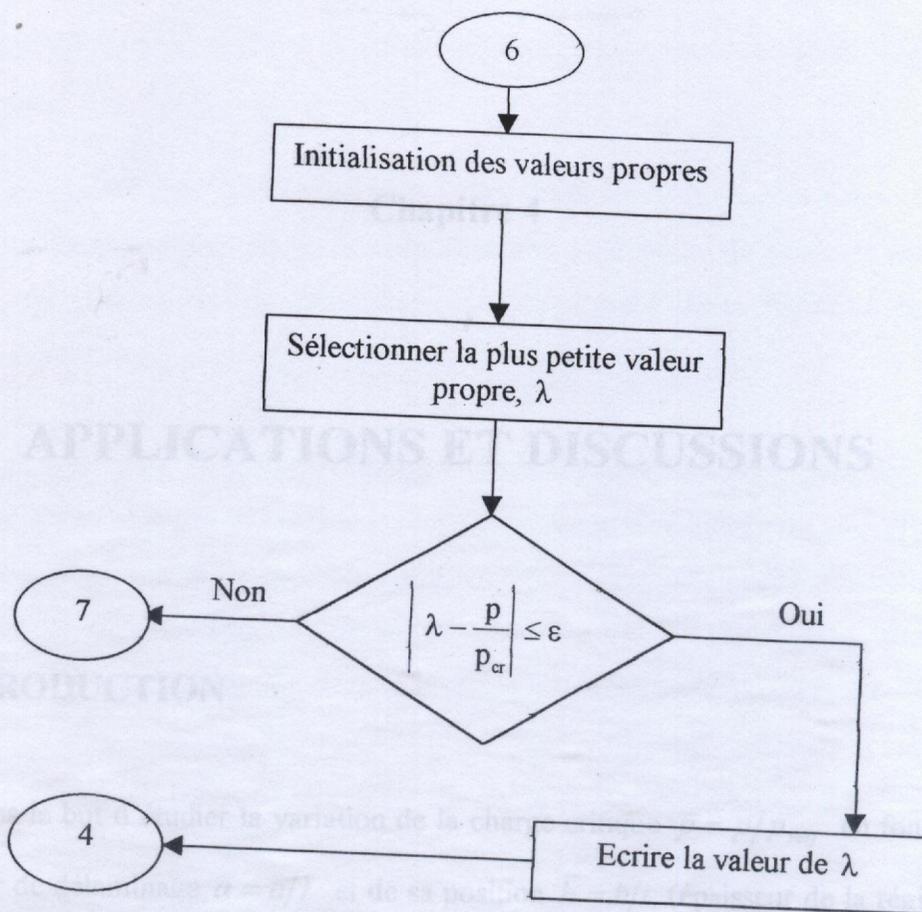


Figure 3.1: Organigramme de calcul de la charge critique des plaques stratifiées

## Chapitre 4

# APPLICATIONS ET DISCUSSIONS

## 4.1 INTRODUCTION

Dans le but d'étudier la variation de la charge critique  $\bar{p} = p/p_{perf}$  en fonction de la longueur de délaminage  $\bar{a} = a/L$  et de sa position  $\bar{h} = h/t$  (épaisseur de la région 3 du stratifié), nous avons établi un programme informatique nommé "DELAM" écrit en Fortran qui permet de calculer  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  et  $\bar{h}$  de toute structure composite à base de fibres unidirectionnelles de différentes caractéristiques mécaniques et diverses séquences d'empilement. Il est à noter que les quantités adimensionnelles  $\bar{p}$ ,  $\bar{a}$  et  $\bar{h}$  sont supposées linéairement couplées. Cependant, la fixation de l'une de ces quantités permet de décrire l'évolution d'une variable par rapport à l'autre.

Dans le présent travail, les plaques étudiées sont des composites (carbone/époxyde) constituées de plusieurs plis de mêmes caractéristiques élastiques et géométriques, mais d'orientations des fibres différentes par rapport aux axes de référence de la plaque considérée. L'épaisseur de cette dernière est prise égale à 6mm dans toutes les applications considérées. Les caractéristiques mécaniques sont déterminées en appliquant la théorie d'élasticité plane. Ces caractéristiques sont notées par  $E_1$  (module d'élasticité longitudinale ( $N/mm^2$ )),  $E_2$  (module d'élasticité transverse ( $N/mm^2$ )),  $G_{12}$  (module de

cisaillement ( $N/mm^2$ ) et  $\nu_{12}$  (coefficient de Poisson major). Elles sont fixées ultérieurement.

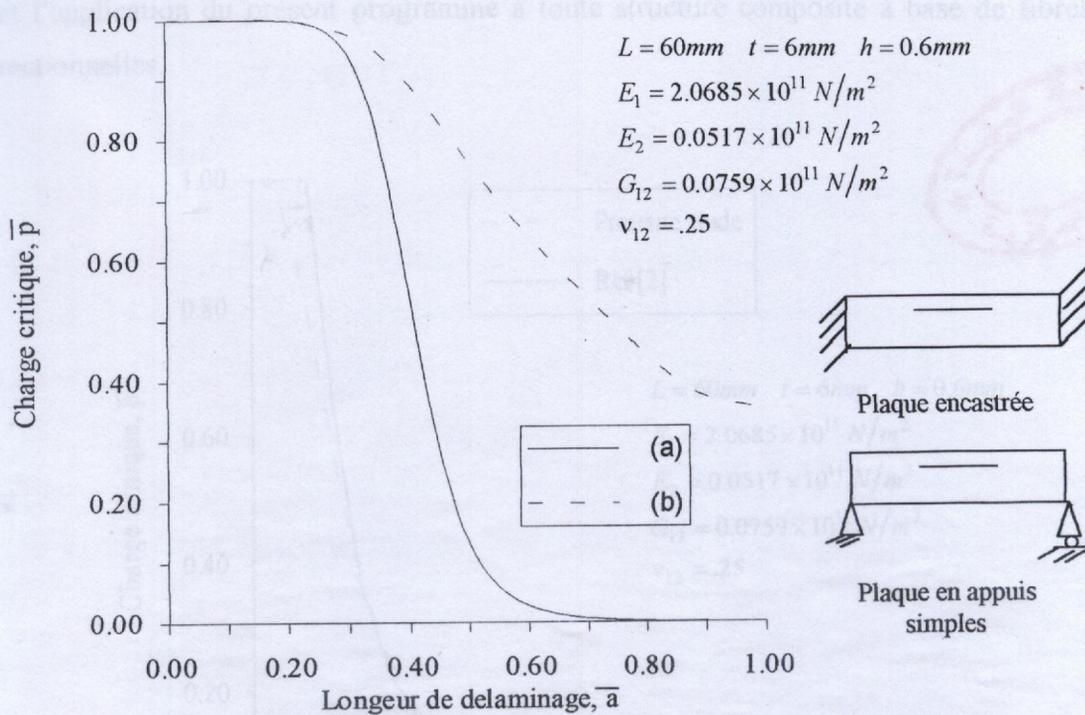
La charge critique associée à ces plaques, supposées initialement delaminées, sera calculée sous l'action d'une charge de compression  $p$  en fonction de plusieurs paramètres, telles que: (i) la longueur de délaminage, (ii) l'épaisseur de la région 3 et (iii) les conditions aux limites.

Le programme "DELAM" établi peut être appliqué sur deux types des stratifiés delaminés cités au chapitre 2. Dans le premier type, où le délaminage est pris symétrique, nous avons négligé toutes les rigidités entre les deux surfaces des deux plis délimitant le délaminage, ces rigidités sont prises en considération en deuxième partie où les deux surfaces délimitant le délaminage sont supposées connectées par des ressorts de rigidité constante.

## 4.2 VALIDATION DES RESULTATS

Pour valider les résultats obtenus par le programme DELAM, il est indispensable d'entreprendre une étude comparative afin de vérifier le degré d'exactitude des présents résultats par rapport à d'autres recherches publiées ailleurs [2, 11]. Aucune étude comparative entre les présents résultats numériques et expérimentaux n'a été faite vu la non disponibilité de ces dernières dans la littérature. Cependant, l'étude comparative sera basée uniquement sur des résultats numériques. Pour cela, on a choisit une plaque stratifiée  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ , de dimensions  $1000mm \times 60mm \times 6mm$  et de caractéristiques mécaniques  $E_1 = 2.0685 \cdot 10^{11} N/m^2$ ,  $E_2 = 0.0517 \cdot 10^{11} N/m^2$ ,  $G_{12} = 0.0759 \cdot 10^{11} N/m^2$  et  $\nu_{12} = 0.25$ .

La figure (4.1) illustre l'évolution de  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  pour une valeur de  $\bar{h} = 0.1$ . Nous constatons que pour une valeur de  $\bar{a} > 0.15$ , les deux courbes sont presque confondues. Par contre, pour des valeurs de  $0 \leq \bar{a} \leq 0.15$ , la courbe de la présente étude se trouve au-dessous de celle de la réf.[2] avec une légère variation. Cependant, il est certain de conclure que les résultats obtenus par le programme DELAM sont acceptables, ce qui

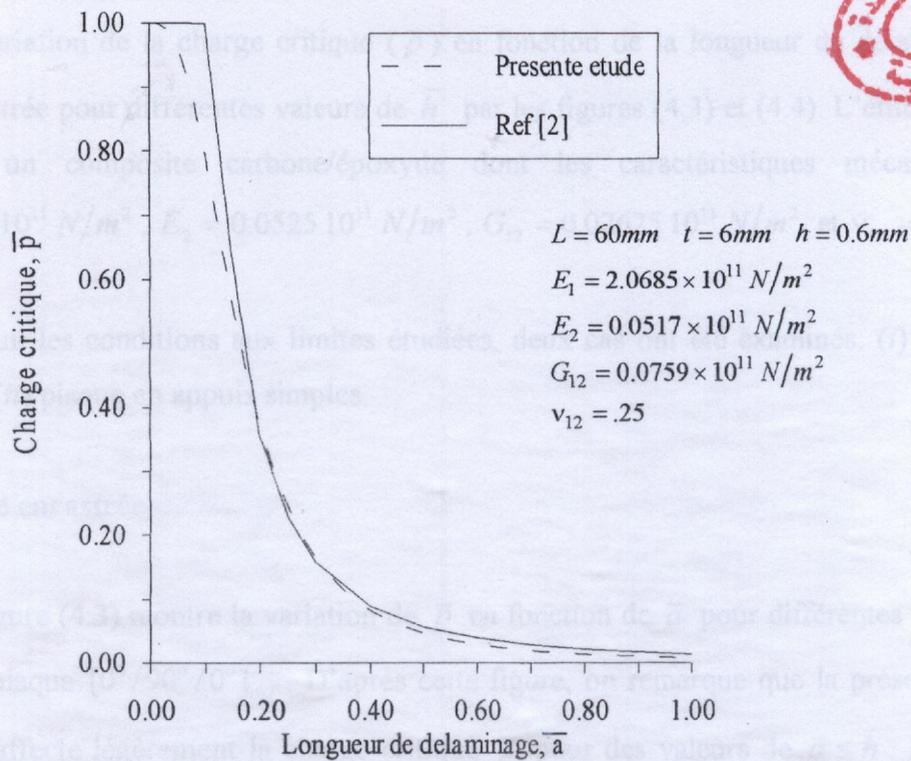


**Figure 4.2:** Influence des conditions aux limites sur la charge critique des plaques stratifiées: (a) plaque en appuis simples, (b): plaque encastree

On remarque d'après la figure (4.2) que la charge critique pour une valeur de  $\bar{h} = 0.1$  correspondant aux appuis simples subie, pour des valeurs de  $\bar{a} \geq 0.2$ , une chute rapide d'une valeur maximale à une valeur minimale (approximativement nulle). Par contre, pour les mêmes valeurs de  $\bar{a}$  et  $\bar{h}$ , cette charge décroît lentement lorsque la plaque est encastree. Pour les deux conditions aux limites, la charge critique n'est pas affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{a}$  variant entre 0.0 et 0.2.

D'après l'évolution de  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  (Fig.4.2), on peut conclure que la charge critique est proportionnelle au nombre de degré de fixation représentant les conditions aux limites. Si le choix des conditions aux limites n'influe pas sur l'idée originale de conception, il est alors conseillé d'opter pour des extrémités encastrees au lieu des extrémités simplement appuyées.

permet l'application du présent programme à toute structure composite à base de fibres unidirectionnelles.



**Figure 4.1:** Etude comparative de la longueur de délaminage  $\bar{a}$  sur la charge critique  $\bar{p}$  d'une plaque composite  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ , encastree sur les deux cotes opposes.

### 4.3 INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA CHARGE CRITIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES.

Dans le but d'étudier l'influence des conditions aux limites sur la charge critique, nous avons considéré deux plaques stratifiées de mêmes caractéristiques géométriques:  $1000mm \times 60mm \times 6mm$ , de mêmes caractéristiques mécaniques:  $E_1 = 2.0685 \times 10^{11} N/m^2$ ,  $E_2 = 0.0517 \times 10^{11} N/m^2$ ,  $G_{12} = 0.0759 \times 10^{11} N/m^2$  et  $\nu_{12} = 0.25$ , et de séquences d'empilement  $[0^0/90^0_2/0^0]_{10T}$ , mais avec deux conditions aux limites différentes (encastrement et appui simple).

## 4.4 INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA RÉGION 3 SUR LA CHARGE CRITIQUE

La variation de la charge critique ( $\bar{p}$ ) en fonction de la longueur de délaminage ( $\bar{a}$ ) est illustrée pour différentes valeurs de  $\bar{h}$  par les figures (4.3) et (4.4). L'étude a été faite pour un composite carbone/époxyde dont les caractéristiques mécaniques:  $E_1 = 2.1030 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 0.0525 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $G_{12} = 0.02625 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  et  $\nu_{12} = 0.25$ .

Suivant les conditions aux limites étudiées, deux cas ont été examinés: (i) plaque encadrée et (ii) plaque en appuis simples.

### 4.4.1 Plaque encadrée

La figure (4.3) montre la variation de  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  pour différentes valeurs de  $\bar{h}$  d'une plaque  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$ . D'après cette figure, on remarque que la présence de délaminage affecte légèrement la charge critique  $\bar{p}$  pour des valeurs de  $\bar{a} \leq \bar{h}$ . Pour la courbe relative à  $\bar{h}=0.1$ , la charge critique  $\bar{p}$  est très affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $0.1 < \bar{a} < 0.6$ . Au delà de cette valeur ( $\bar{a} \geq 0.6$ ), la valeur de la charge critique peut être négligée devant la valeur de la charge appliquée.

En ce qui concerne, la courbe relative à  $\bar{h} = 0.2$ , la charge critique est très affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $0.2 \leq \bar{a} \leq 1$ . Cette observation se manifeste aussi pour la courbe correspondant à  $\bar{h} = 0.4$  pour des valeurs de  $0.4 \leq \bar{a} \leq 1$ .

**Zone 2:** Elle est caractérisée par une chute brusque de  $\bar{p}$  pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à  $[0.3 \quad 0.65[$ . Cette condition explique que la présence de délaminage a une très grande influence sur la charge critique.

**Zone 3:** Elle est caractérisée par une variation lente de  $\bar{p}$  pour des valeurs de  $\bar{a} > 0.65$ . Cette condition explique que la présence de délaminage affecte légèrement la charge critique.

## 4.5 INFLUENCE DE LA SYMETRIE MIROIR SUR LA CHARGE CRITIQUE DES PLAQUES DELAMINEES

Dans cette section, les caractéristiques mécaniques des trois stratifiés considérés sont:  $E_1 = 1.3357 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 0.0928 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $G_{12} = 0.05765 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  et  $\nu_{12} = 0.342$ . Les séquences d'empilement ont les configurations suivantes:

(a):  $[0^0_8, [[45^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_4, 0^0_8]$ , (b):  $[0^0_{24}, [[45^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_2, 0^0_8]$

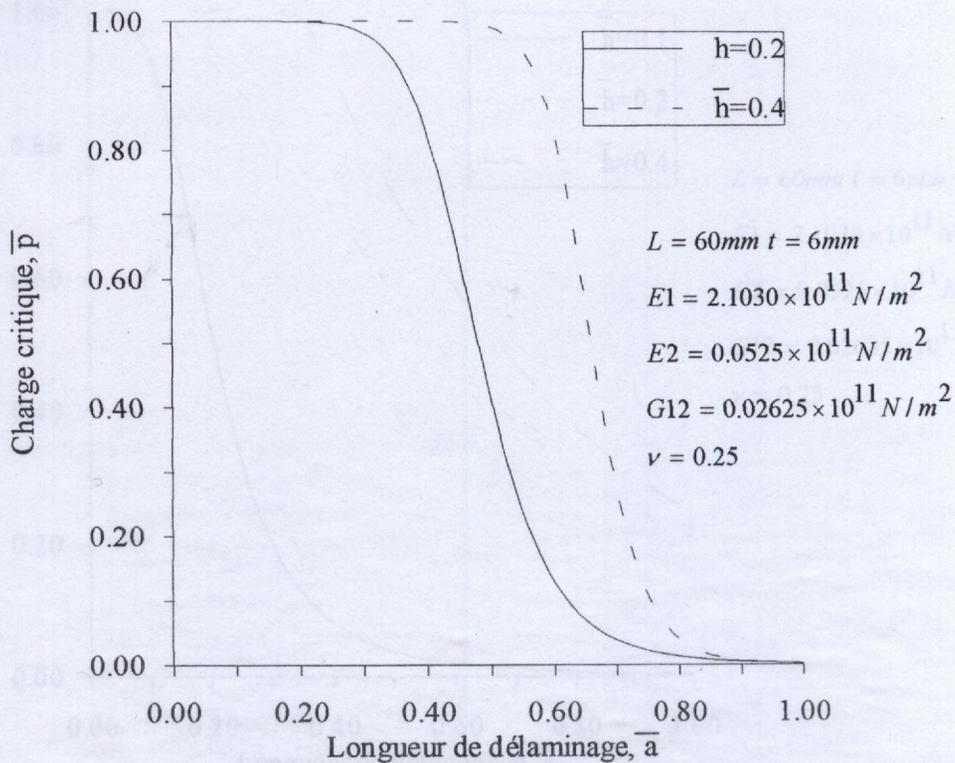
(c):  $[0^0_8, [[45^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_4, 30^0_8]$ .

Pour les cas (a) et (c), les plis délimitant le délaminage sont orientés respectivement de bas en haut à  $45^0$  et  $0^0$  par rapport à l'axe  $x$  de référence du stratifié. Par contre, pour le cas (b), ces plis sont orientés à  $0^0$  de part et d'autre du délaminage. La figure (4.5) montre l'orientation des plis délimitant le délaminage.

La figure (4.6) montre l'influence de la symétrie miroir sur la variation de la charge critique ( $\bar{p}$ ) en fonction de la longueur de délaminage ( $\bar{a}$ ).

Un stratifié est pourvu de la symétrie miroir lorsque ces plis de part et d'autre du plan moyen ont:

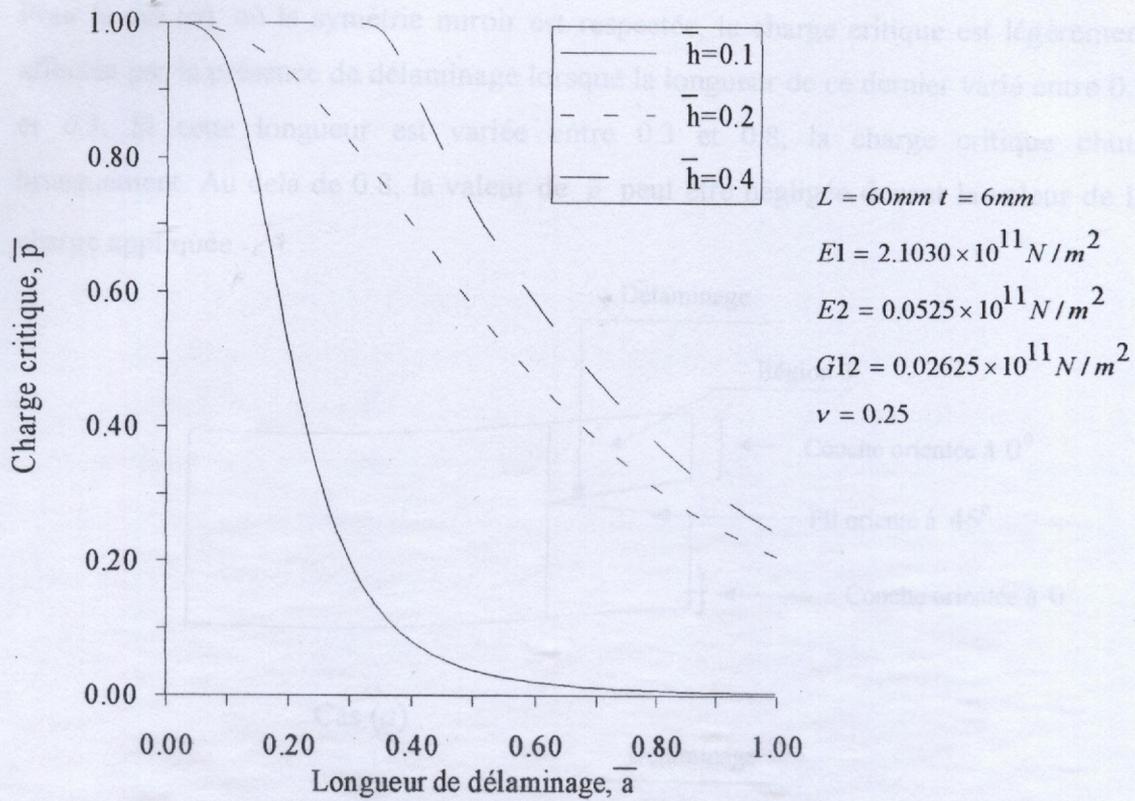
- Les mêmes orientations,
- les mêmes épaisseurs,
- mais de cotes  $z_k$  et  $z_{k-1}$  opposés.



**Figure 4.4:** Effet de l'épaisseur ( $\bar{h}$ ) de la région 3 sur la charge critique d'une plaque en appuis simples de séquence  $[0^0/90_2^0/0^0]_{10T}$ .

D'après les deux figures (4.3) et (4.4), on constate que la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage pour différentes valeurs de l'épaisseur de la région 3 du stratifié augmente et diminue respectivement avec l'augmentation de  $\bar{h}$  et  $\bar{a}$ . Généralement, cette variation passe par trois zones différentes. En se basant sur la courbe relative à  $\bar{h}=0.2$  de la figure (4.4), nous remarquons que cette courbe passe par trois zones différentes:

**Zone 1:** Elle est caractérisée par une variation constante de  $\bar{p}$  (pente=0.0%) pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à  $[0.0 \quad 0.3[$ . Cette condition explique que la présence de délaminage n'influe pas sur la charge critique.



**Figure 4.3:** Effet de l'épaisseur ( $\bar{h}$ ) de la région 3 sur la charge critique d'une plaque encastree  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$ .

#### 4.4.2 Plaque en appuis simples.

Dans le cas présent, les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que celles de la section (4.4.1) mais avec une séquence d'empilement  $[0^\circ/90_2^\circ/0^\circ]_{10T}$ .

La figure (4.4) montre la variation de  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  pour deux valeurs de  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = 0.2; 0.4$ ). On constate d'après cette figure que la charge critique relative à  $\bar{h} = 0.2$  n'est pas affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{a} \leq 0.3$ . Cette observation se manifeste aussi pour la courbe correspondant à  $\bar{h} = 0.4$  pour des valeurs de  $\bar{a} \leq 0.5$ . Au delà de ces deux valeurs de  $\bar{a}$ , la charge critique est très affectée par la présence de délaminage.

Figure 4.5 Différentes orientations des plis des stratifiés pourvu et dépourvu de la symétrie miroir

- Pour le cas (a), où la symétrie miroir est respectée, la charge critique est légèrement affectée par la présence de délaminage lorsque la longueur de ce dernier varié entre 0.0 et 0.3. Si cette longueur est variée entre 0.3 et 0.8, la charge critique chute brusquement. Au delà de 0.8, la valeur de  $\bar{p}$  peut être négligée devant la valeur de la charge appliquée.

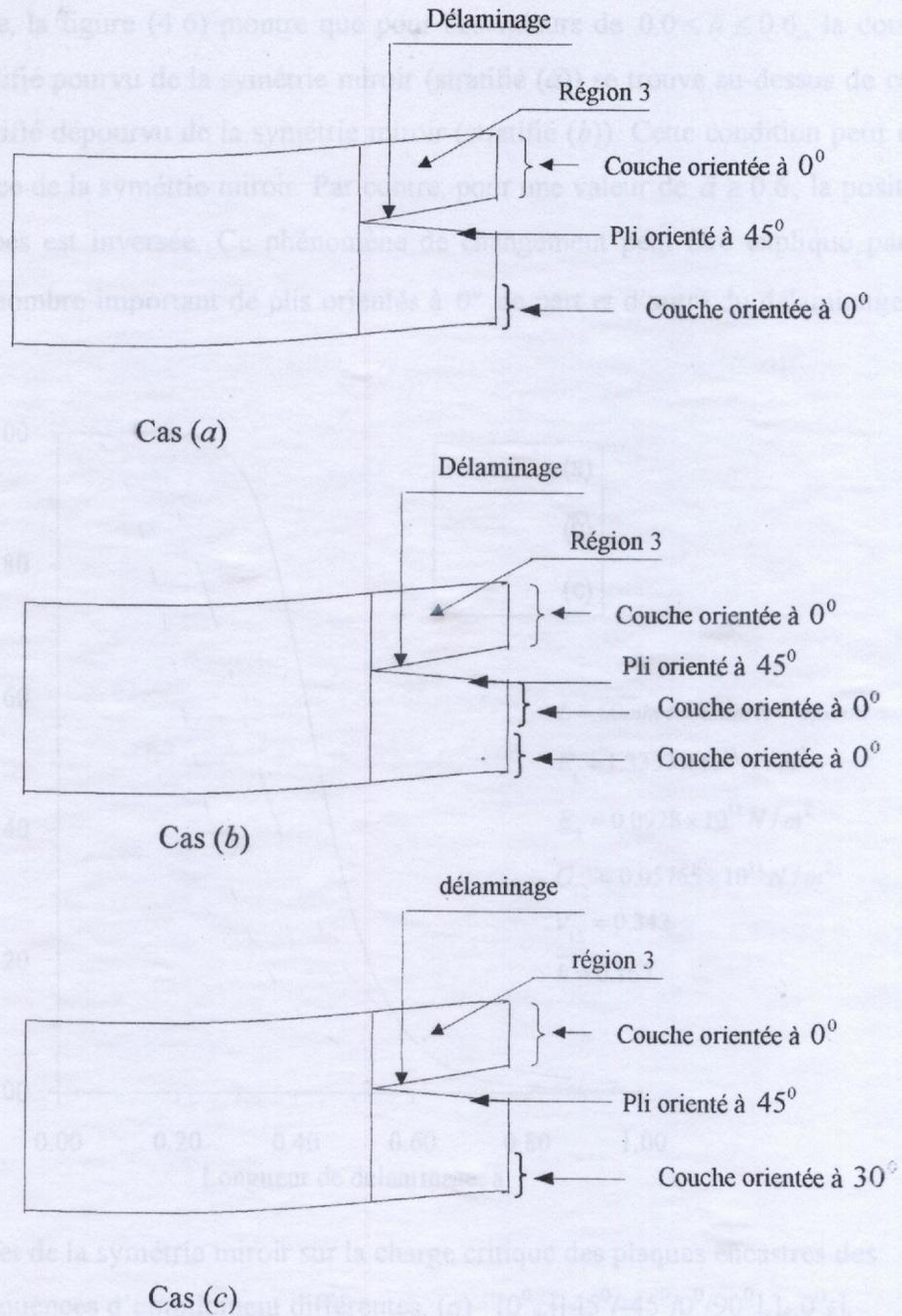
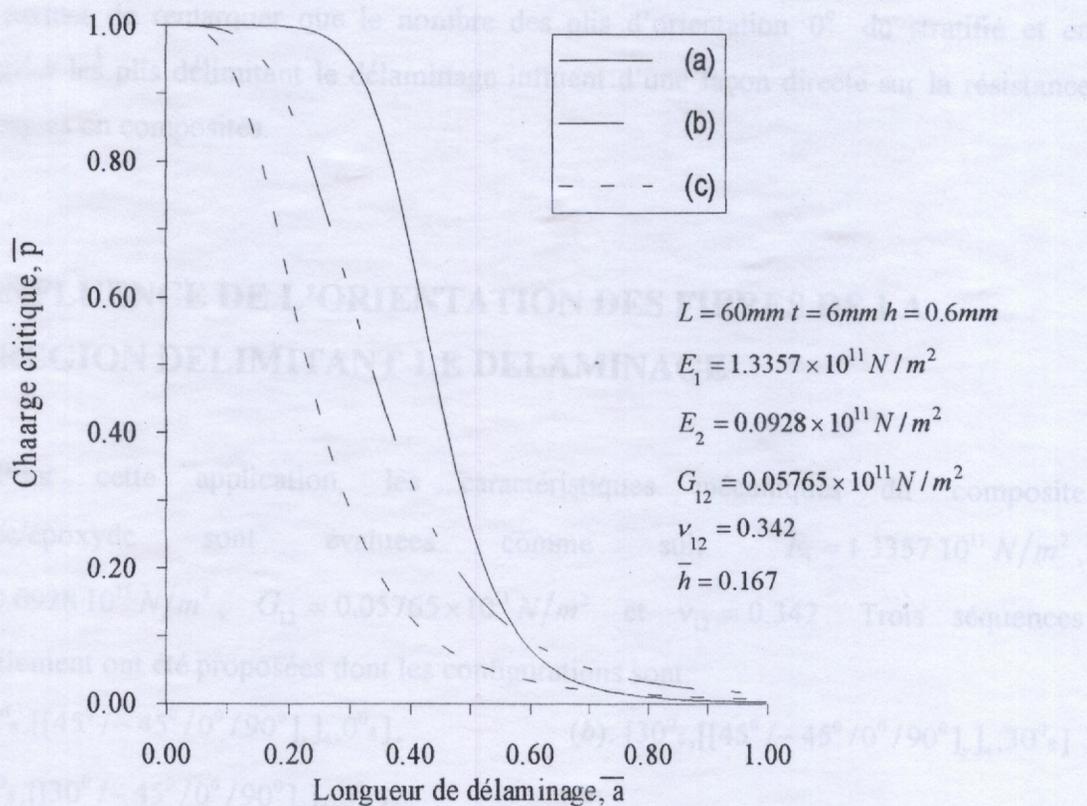


Figure 4.5: Différentes orientations des plis des stratifiés pourvu et dépourvu de la symétrie miroir.

- Pour le cas (b), où la symétrie miroir n'est pas respectée, la variation de la longueur de délaminage de 0.0 à 0.1 n'affecte pas la charge critique. Pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à l'intervalle [0.1 0.6], la charge critique diminue avec l'augmentation de la longueur de délaminage. Au delà de 0.6, la charge critique décroît lentement.

En outre, la figure (4.6) montre que pour des valeurs de  $0.0 \leq \bar{a} \leq 0.6$ , la courbe relative au stratifié pourvu de la symétrie miroir (stratifié (a)) se trouve au-dessus de celle relative au stratifié dépourvu de la symétrie miroir (stratifié (b)). Cette condition peut être liée à la présence de la symétrie miroir. Par contre, pour une valeur de  $\bar{a} \geq 0.6$ , la position des deux courbes est inversée. Ce phénomène de changement peut être expliqué par la présence d'un nombre important de plis orientés à  $0^\circ$  de part et d'autre du délaminage de stratifié (b).



**Figure 4.6:** Effet de la symétrie miroir sur la charge critique des plaques encastres des séquences d'empilement différentes. (a) :  $[0^0_8, [[45^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_4, 0^0_8]$ , (b) :  $[0^0_{24}, [[45^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_2, 0^0_8]$ , (c) :  $[0^0_8, [[45^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_4, 30^0_8]$

D'autre part, la figure (4.6) nous permet d'affirmer que la symétrie miroir joue un rôle très important concernant la variation de la charge critique des plaques ayant les mêmes orientations des plis délimitant le délaminage. Cependant, la présence de la symétrie miroir influe d'une manière positive sur la rigidité de la plaque et par conséquent sur la charge critique de cette dernière car les fibres orientés suivant la même direction que la charge appliquée vont supporter une proportion importante de cette charge et agir comme des raidisseurs. Finalement, on peut écrire:  $\bar{p} = \bar{p}_s(1-d)$ , où  $\bar{p}_s$  est la charge critique dans le cas d'un stratifié pourvu de la symétrie miroir, et  $d$  est une constante positive dépendant de la condition de symétrie des stratifiés (si le stratifié est pourvu de symétrie miroir  $\Rightarrow d=0$ ; si le stratifié est dépourvu de la symétrie miroir  $\Rightarrow d \neq 0$ ).

La présence de l'asymétrie (la non symétrie) miroir des plaques (stratifiés (b) et (c)) nous permet de remarquer que le nombre des plis d'orientation  $0^\circ$  du stratifié et en particulier les plis délimitant le délaminage influent d'une façon directe sur la résistance des plaques en composites.

#### 4.6 INFLUENCE DE L'ORIENTATION DES FIBRES DE LA REGION DELIMITANT LE DELAMINAGE

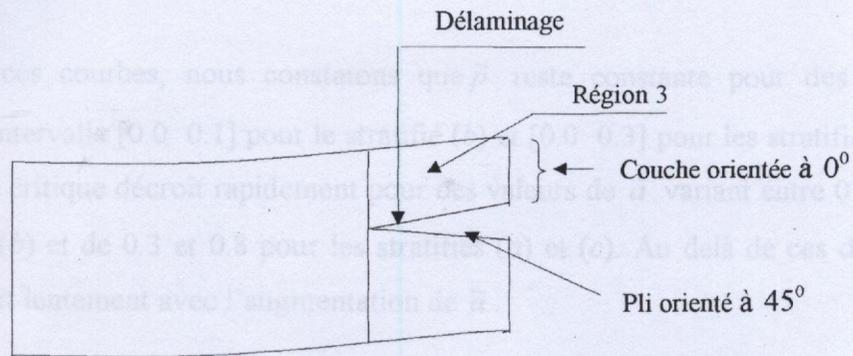
Pour cette application, les caractéristiques mécaniques du composite carbone/époxyde sont évaluées comme suit:  $E_1 = 1.3357 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 0.0928 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $G_{12} = 0.05765 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  et  $\nu_{12} = 0.342$ . Trois séquences d'empilement ont été proposées dont les configurations sont:

(a):  $[0^0_8, [[45^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_4, 0^0_8]$ ,      (b):  $[30^0_8, [[45^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_4, 30^0_8]$

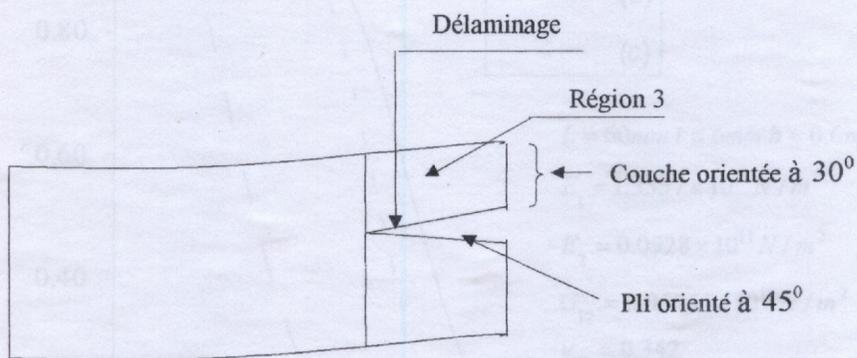
(c):  $[0^0_8, [[30^0 / -45^0 / 0^0 / 90^0]_s]_4, 0^0_8]$ .

Il à noter que pour les trois stratifiés, les couches de la région 3 sont orientées à  $30^\circ$  pour le stratifié (b) et  $0^\circ$  pour les stratifiés (a) et (c). Par contre, le premier pli au-dessous de délaminage (face supérieure de la région 2) sont orientées à  $45^\circ$  pour les configurations

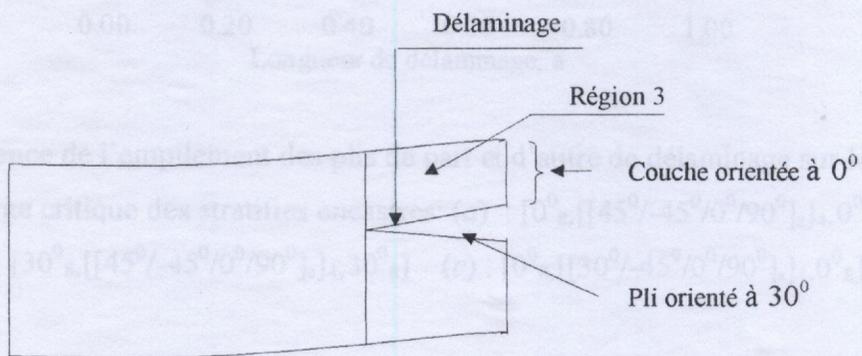
(a) et (b), et  $30^\circ$  pour la configuration (c). Ces configurations sont représentées sur la figure (4.7).



Cas (a)



Cas (b)

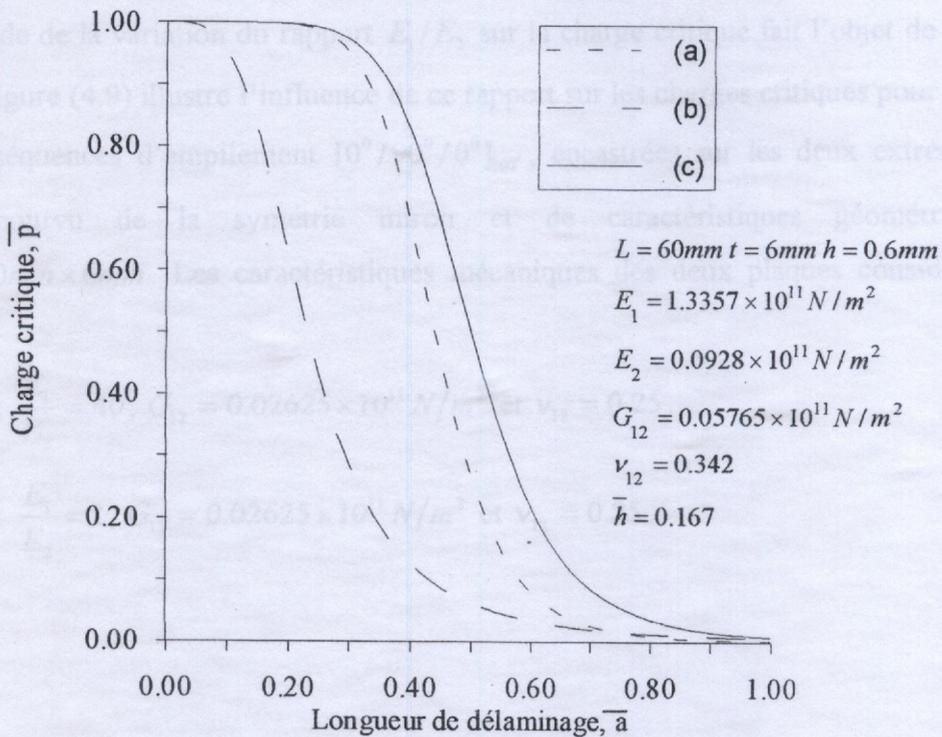


Cas (c)

**Figure 4.7:** Orientations des plis délimitant le délaminage.

Les courbes représentées sur la figure (4.8) montrent la variation de  $\bar{p}$  en fonction de  $\bar{a}$  lorsque l'orientation des fibres de part et d'autre du délaminage est différente.

D'après ces courbes, nous constatons que  $\bar{p}$  reste constante pour des valeurs appartenant à l'intervalle  $[0.0 \ 0.1]$  pour le stratifié (b) et  $[0.0 \ 0.3]$  pour les stratifiés (a) et (c). Cette charge critique décroît rapidement pour des valeurs de  $\bar{a}$  variant entre 0.1 et 0.5 pour le stratifié (b) et de 0.3 et 0.8 pour les stratifiés (a) et (c). Au delà de ces dernières valeurs  $\bar{p}$  décroît lentement avec l'augmentation de  $\bar{a}$ .



**Figure 4.8:** Influence de l'empilement des plis de part et d'autre de délaminage sur la charge critique des stratifiés encastres: (a) :  $[0^0_8, [[45^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_4, 0^0_8]$   
 (b) :  $[30^0_8, [[45^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_4, 30^0_8]$  (c) :  $[0^0_8, [[30^0/-45^0/0^0/90^0]_s]_4, 0^0_8]$

Le décalage entre la courbe relative au stratifié (a) et celle relative au stratifié (c) pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à l'intervalle  $[0.3 \ 1]$  peut être expliqué par la différence d'orientation des plis délimitant le délaminage par la face inférieure des deux stratifiés. Par contre les courbes relatives aux stratifiés (a) et (b) montrent l'influence de l'orientation des plis de la région 3 sur  $\bar{p}$ , tel que les plis de la région 3 du stratifié (a)

prennent la même direction avec la charge de compression appliquée, et qui jouent le rôle des raidisseurs qui supportent la charge que les plis orientés à  $30^\circ$  relatifs au stratifié (b).

L'analyse de ces résultats nous montre l'intérêt de l'orientation des fibres de la région 3 et des plis délimitant le délaminage par la face inférieure.

#### 4.7 INFLUENCE DU RAPPORT $E_1/E_2$ SUR LA CHARGE CRITIQUE

L'étude de la variation du rapport  $E_1/E_2$  sur la charge critique fait l'objet de cette section. La figure (4.9) illustre l'influence de ce rapport sur les charges critiques pour deux plaques de séquences d'empilement  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$ , encadrées sur les deux extrémités opposées, pourvu de la symétrie miroir et de caractéristiques géométriques  $1000\text{mm} \times 60\text{mm} \times 6\text{mm}$ . Les caractéristiques mécaniques des deux plaques considérées sont :

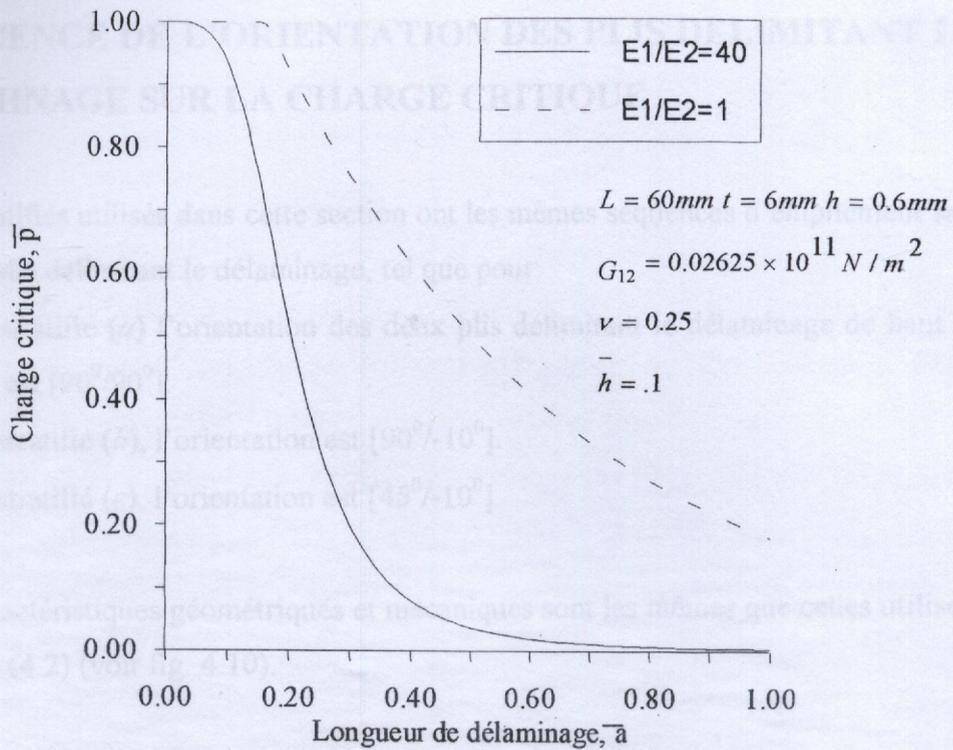
- Plaque 1:  $\frac{E_1}{E_2} = 40$ ,  $G_{12} = 0.02625 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  et  $\nu_{12} = 0.25$ .
- Plaque 2:  $\frac{E_1}{E_2} = 1$ ,  $G_{12} = 0.02625 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  et  $\nu_{12} = 0.25$ .

La figure (4.9) nous montre que pour un rapport  $E_1/E_2 = 40$  (plaque 1), la charge critique  $P_c$  est influencée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{\delta}$  appartenant à l'intervalle  $[0,0 - 0,075]$ . Au-delà de  $\bar{\delta} > 0,075$ ,  $P_c$  est très influencée par la présence de délaminage. Cette remarque peut être aussi confirmée pour la courbe relative au rapport  $E_1/E_2 = 1$  (plaque 2) pour des valeurs de  $\bar{\delta}$  appartenant à l'intervalle  $[0,0 - 0,25]$ .  $P_c$  pour la même courbe est influencée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{\delta} > 0,25$ .

Le décalage remarqué sur la figure (4.9) entre les deux courbes relatives aux deux rapports peut être expliqué par l'augmentation de la valeur de  $E_1$ .

Pour un rapport de  $E_1/E_2 = 40$  (plaque 1),  $E_1 = 0,0525 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Pour  $E_1/E_2 = 1$  (plaque 2),  $E_1 = E_2 = 2,1030 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .



**Figure 4.9:** Effet des modules du rapport  $E_1/E_2$  sur la charge critique d'une plaque  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$  encastree.

D'après la figure (4.6), nous constatons que, pour un rapport  $E_1/E_2 = 40$  (plaque 1),  $\bar{p}$  n'est pas influencée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à l'intervalle  $[0.0 \quad 0.075]$ . Au delà de  $\bar{a} > 0.075$ ,  $\bar{p}$  est très influencée par la présence de délaminage. Cette remarque peut être aussi confirmée pour la courbe relative au rapport  $E_1/E_2 = 1$  (plaque 2) pour des valeurs de  $\bar{a}$  appartenant à l'intervalle  $[0.0 \quad 0.25]$ .  $\bar{p}$  pour la même courbe est influencée par la présence de délaminage pour des valeurs de  $\bar{a} \geq 0.25$ .

Le décalage remarqué sur la figure (4.9) entre les deux courbes relatives aux deux rapports peut être expliqué par l'augmentation de la valeur de  $E_2$ .

Pour un rapport de  $E_1/E_2 = 40$  (plaque 1),  $E_2 = 0.0525 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Pour  $E_1/E_2 = 1$  (plaque 2),  $E_1 = E_2 = 2.1030 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

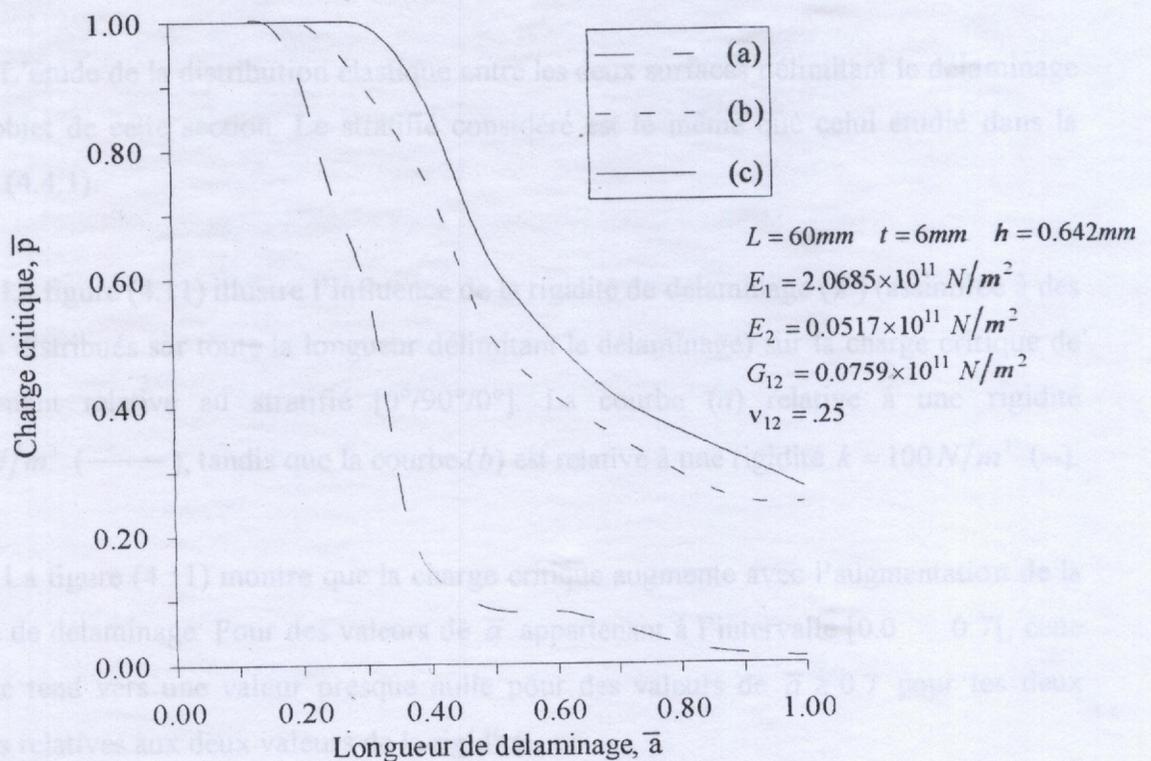
## 4.8 INFLUENCE DE L'ORIENTATION DES PLIS DELIMITANT LE DELAMINAGE SUR LA CHARGE CRITIQUE

Les stratifiés utilisés dans cette section ont les mêmes séquences d'empilement sauf pour les deux plis délimitant le délaminage, tel que pour:

- Le stratifié (a) l'orientation des deux plis délimitant le délaminage de haut en bas est  $[90^0/90^0]$ .
- Le stratifié (b), l'orientation est  $[90^0/-10^0]$ .
- Le stratifié (c), l'orientation est  $[45^0/-10^0]$ .

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les mêmes que celles utilisées dans la section (4.2) (voir fig. 4.10).

La figure (4.10) illustre la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage pour une valeur de  $\bar{h}$  (épaisseur de la région 3) égale à 0.642.



**Figure 4.10:** Influence de l'orientation des plis délimitant le délaminage sur la charge critique des stratifiés:

- (a):  $[[5^0/-5^0/90^0/90^0],[45^0/-45^0/30^0/-30^0/20^0/-20^0/15^0/-15^0/60^0/-60^0]_s,[-10^0/10^0/-5^0/5^0]]$   
 (b):  $[[5^0/-5^0/90^0/-10^0],[45^0/-45^0/30^0/-30^0/20^0/-20^0/15^0/-15^0/60^0/-60^0]_s,[-10^0/10^0/-5^0/5^0]]$   
 (c):  $[[5^0/-5^0/45^0/-10^0],[45^0/-45^0/30^0/-30^0/20^0/-20^0/15^0/-15^0/60^0/-60^0]_s,[-10^0/10^0/-5^0/5^0]]$

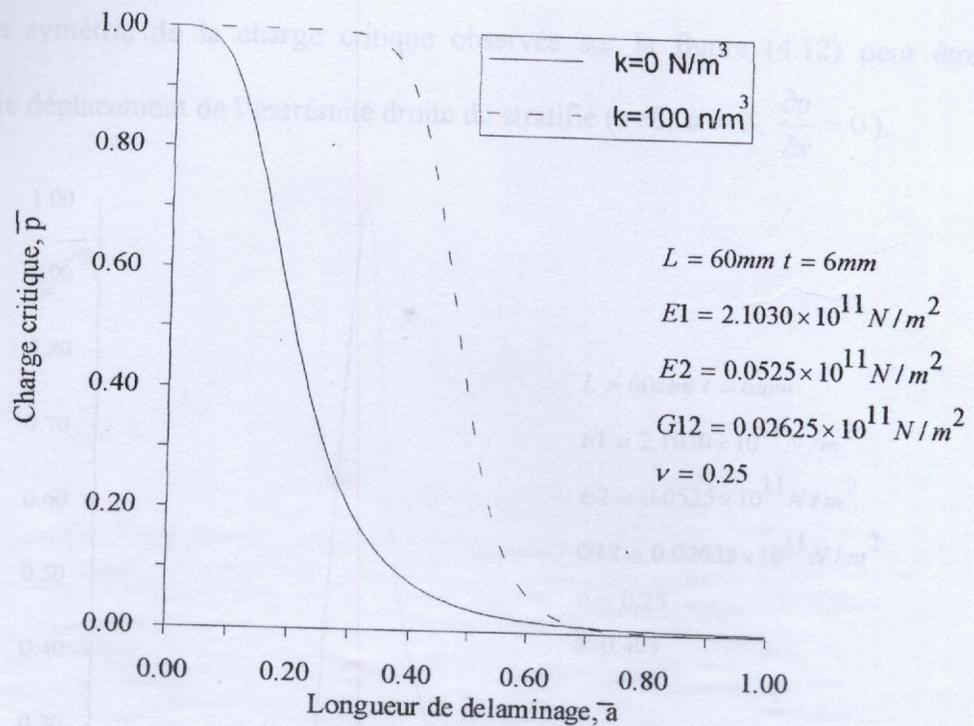
Le contrôle de l'orientation des plis délimitant le délaminage d'après les courbes relatives aux trois stratifiés considérés (figure 4.10) a pour but d'augmenter leurs rigidités et par conséquent leurs charges critiques de flambement. Nous constatons d'après la figure (4.10) que la charge critique diminue lorsque l'angle d'orientation des plis délimitant le délaminage augmente de  $0^0$  à  $90^0$ . Lorsque les fibres des plis délimitant le délaminage sont orientées vers un angle proche à  $0^0$ , nous constatons que la charge critique prend sa valeur maximale; car ces fibres jouent le rôle des raidisseurs supportant une grande fraction de la charge de compression appliquée.

#### 4.9 INFLUENCE DE LA RIGIDITE DE DELAMINAGE SUR LA CHARGE CRITIQUE

L'étude de la distribution élastique entre les deux surfaces délimitant le délaminage sera l'objet de cette section. Le stratifié considéré est le même que celui étudié dans la section (4.4.1).

La figure (4.11) illustre l'influence de la rigidité de délaminage ( $k$ ) (assimilée à des ressorts distribués sur toute la longueur délimitant le délaminage) sur la charge critique de flambement relative au stratifié  $[0^0/90^0/0^0]$ . La courbe (a) relative à une rigidité  $k = 0 \text{ N/m}^3$  (—), tandis que la courbe (b) est relative à une rigidité  $k = 100 \text{ N/m}^3$  (---).

La figure (4.11) montre que la charge critique augmente avec l'augmentation de la rigidité de délaminage. Pour des valeurs de  $\bar{\alpha}$  appartenant à l'intervalle  $[0.0 \quad 0.7[$ , cette dernière tend vers une valeur presque nulle pour des valeurs de  $\bar{\alpha} \geq 0.7$  pour les deux courbes relatives aux deux valeurs de la rigidité.



**Figure 4.11:** Influence de la valeur de rigidité des ressorts sur la charge critique du stratifié encastré  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$ .

#### 4.10 INFLUENCE DE LA POSITION HORIZONTALE DE DELAMINAGE SUR LA CHARGE CRITIQUE

Dans cette section l'influence de la position horizontale de délaminage sur la charge critique est étudiée sur le stratifié  $[0^0/90^0/0^0]_{10T}$  de même caractéristiques mécaniques et géométriques que celles du stratifié utilisé dans la section précédente. L'épaisseur de la région 3 est fixée à 0.1 tandis que la longueur de délaminage est fixée à 0.403, les valeurs de la distance ( $\bar{l}$ ) entre les deux extrémités gauches de délaminage et de la structure varient entre 0.025 et 0.58.

La figure (4.12) montre que la charge critique prend la valeur maximale lorsque le délaminage devient symétrique ( $\bar{l} = 0.3$ ), de part et d'autre de cette valeur la charge critique décroît rapidement.

La non symétrie de la charge critique observée sur la figure (4.12) peut être expliquée par le déplacement de l'extrémité droite du stratifié ( $x=L$ ,  $u \neq 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ).

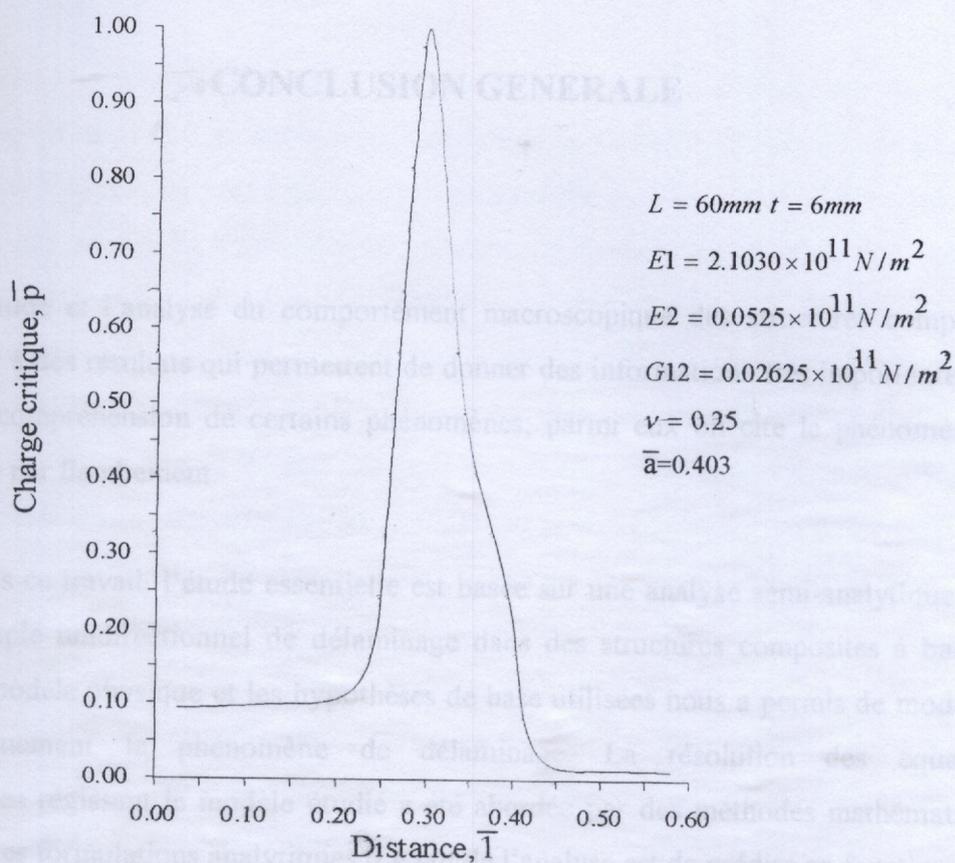


Figure 4.12: Influence de la position horizontale de délaminage sur la charge critique

## CONCLUSION GENERALE

L'étude et l'analyse du comportement macroscopique des structures composites aboutissent à des résultats qui permettent de donner des informations très importantes vis-à-vis à la compréhension de certains phénomènes; parmi eux on cite le phénomène de délaminage par flambement.

Dans ce travail, l'étude essentielle est basée sur une analyse semi-analytique d'un modèle simple unidirectionnel de délaminage dans des structures composites à base de fibres. Le modèle physique et les hypothèses de base utilisées nous a permis de modéliser mathématiquement le phénomène de délaminage. La résolution des équations différentielles régissant le modèle étudié a été abordée par des méthodes mathématiques basées sur des formulations analytiques. Le but de l'analyse est de prédire en fonction de la longueur et de la position de délaminage la charge critique des plaques stratifiées. Deux cas de conditions aux limites (encastrement et appuis simples) ont été examinés.

Un programme informatique de calcul nommé "DELAM" basé sur des solutions analytiques à été développé dans le cadre de faire une analyse macroscopique des stratifiés et par conséquent d'étudier l'influence de plusieurs paramètres sur la charge critique des plaques.

La complexité du phénomène de délaminage nous a permis d'utiliser des géométries simples, et des hypothèses de base dans le but de réduire les dimensions et la complexité du problème, ce qui limite l'applicabilité du programme développé.

Une étude sur la séquence d'empilement des stratifiés (symétriques et non symétriques) avec ou sans distribution élastique à été détaillée. Cette étude nous a montré

que l'effet de couplage membrane-flexion a diminué la charge critique des stratifiés. Par contre, l'effet de la distribution élastique (rigidité des ressorts délimitant le délaminage) a augmenté ces charges.

D'après les résultats obtenus et les courbes tracées, il est envisageable de conclure que la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage passe par trois zones différentes: la première zone est caractérisée par une variation constante de la charge critique ce qui explique que la présence de délaminage n'influe pas sur cette dernière; la deuxième zone est caractérisée par une chute brusque ce qui montre d'une manière évidente l'influence de la présence de délaminage sur la charge critique. Cette dernière est légèrement affectée par la présence de délaminage ce qui est caractérisé par la troisième zone. D'autre part, la variation de la charge critique en fonction de la position de délaminage suivant l'épaisseur du stratifié augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la région 3. Cette étude nous a montré aussi que la charge critique prend une valeur maximale lorsque le délaminage devient symétrique.

L'analyse du phénomène de délaminage par flambement des modèles bidimensionnels ainsi que l'analyse des structures de formes cylindriques soumises à des pressions radiales font l'objet d'une future étude.

Au-delà des résultats analytiques, il est certain que le comportement macroscopique des systèmes complexes ne doit pas dépendre uniquement d'une seule analyse. Il est alors conseillé pour un travail futur de mener plusieurs tests d'expérimentation, puis effectuer une corrélation calculs-essais afin de valider le modèle mathématique.

- [11] **Kapania. R.K** and **Wolfe. D.R** “*Delamination Buckling and Growth in Axially Loaded Beam-Plates*”. Proceeding of AIAA/ASCE/AHS.28<sup>th</sup> SDM Conference, Monterey, CA, 19897, pp.766-775.
- [12] **Sheiman. I** and **Bass. M** “*Effect of Delamination on Stability of Delaminated Composite Strip-Composite Structures*”. Vol 6(1986), pp.261-270.
- [13] **Sheiman. I., Morechai. B** and **Ori. I.** “*Effect of Delamination on Stability of Laminated Composite Strip*”. Composite Structural, Vol.11 (1989), pp. 227-242.
- [14] **Thionnet. A, Lesne. P.M** et **Renard. J** ”*Pour une approche globale du délaminage dans les composites stratifiés*”. Composites, N3, pp.177-183, Mai-Juin 1990.
- [15] **Kibler. J.J** , Engineered Materials Handbook, Vol.1, Composites, pp.275, ASM International, Metals Park (1987).
- [16] **Tsai. S.W**, Composites Design, Think Composites, Dayton (1987).
- [17] “*Composite Calculations COMPCAL*”, Users Manual, Technomic Publishing Co, Lancaster (1987).
- [18] **Gillespie. J.W, Shuda. L.J, Waibel. B, Garrett. J.J** and **Snowden. J**, “*CMAP-Composite Materials Analysis of Plates*”, Report CCM 87-45, University of Delaware, Center for composite Materials, Newark (1987).
- [19] **Gillespie. J.W, Mccullough. R. L, Munson-Mcgee. S.H, Garrett. J.J** and **Waibel. B** “*SMC Mechromecanics Model for Composite Materials*” : Thermoelastic Properties Users Guide, Report CCM 87-29, University of Delaware, Center for composite Materials, Newark (1987).
- [20] “*Cylinder Analysis CYLAN*”, Users Manual, Technomic Publishing Co., Lancaster (1987).
- [21] Engineering Sciences Data Unit (ESDU), “*Delimitation and free edge stresses in laminated plates subjected to constant uniaxial strain (computer program)*”, Item No. 90021, S15 (1991).
- [22] Engineering Sciences Data Unit (ESDU), “*Delimitation of tapered composites*”, Item No. 91003, S15 (1991).
- [23] **Saarela, O** “*Composite Experimental Mechanics Calculations CEMCAL*”, Users Manuel, Technomic Publishing Co, Lancaster (1987).
- [24] **Murthy. P.L.N** and **Chamis. C.C**, J Comp. Technol. Res. 8, pp.8-17 (1986).
- [25] **Berthelot. J.M** “*Matériaux Composites*”. Comportement Mécanique et Analyse des Structures. Edition Masson (1992).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [26] Gay D, "Matériaux Composites", Edition Hermes 1989.
- [27] Jean-Jacques, B et Larosa, S. "Structures en matériaux Composites", Techniques de L'ingénieur B5080
- [28] Saada, O. "Computer programs for mechanical analysis and design of polymer composites", Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [29] Pagnon, P.J. "Exact Solution for Composite Laminates in Cylindrical Bending", Journal of Composite Materials, Vol.3(1969), pp.398-411.
- [30] Loussal, N, Belauri, N. Formulaire Scientifique et technique (le guide de l'étudiant)
- [1] **Simites. G.J** and **Sallam. S** "Delamination Buckling and Growth of Flat Composite Structural Element". AFOSR-TR (Report No.AD-A162 370), University of Georgia, Atlanta, USA (1985).
- [2] **Sallam. S** and **Simites. G.J** "Delamination Buckling and Growth of Flat, cross-ply Laminates". Composite Structures 17 (1985), pp.361-381.
- [3] **Anastasiadis. J.S** and **Simites. G.J** "Spring delamination of Axially-loaded Flat Laminates". Composites Structures 17 (1991), pp.67-85.
- [4] **Simites. G.J** "Buckling of Pressure loaded, Delaminated, Cylindrical Shells and Panels". Key Enginneering Materials Vol.121-122 (1996), pp.407-426.
- [5] **Simites. G.J**, **Sallam. S** and **Yin. W.L** "Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Plates". AIAA Journal. Vol.23, No 29 September 1985.
- [6] **Barsoum. R. S** and **Freese. C. E** "In Iterative Approach for the Evaluation of Delamination Stress in Laminated Composites". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.20 (1984), pp.1415-1431.
- [7] **Bar-Yoseph. P** "On the Accuracy of Interlaminated Stress Calculation in Laminates Plates". Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol.3 (1983), pp.309-329.
- [8] **Way. S.S** and **Choi. I** "Boundary Layer Effects in Composite Laminates": Part1 and 2. Journal of Applied Mechanics, Vol.49 (1982), pp.541-560.
- [9] **Way A.S.D** and **Crossman. P.W** "Some New Results on Edge Effect in Symmetry Composites Materials". Vol.11(1977), pp.92-106.
- [10] **Whitcomb. J.D** "Finite Analysis of Instability Related Delamination Growth". Journal of Composite Materials. Vol.15 (1981), pp.403-426.

- [26] **Gay. D.**, “*Matériaux Composites*”, Edition Hermes 1989.
- [27] **Jeam-Jacques. B et Larose. S.** “*Structures en matériaux Composites*”. Techniques de L’ingénieur. B5080.
- [28] **Saarela. O** “*Computer programs for mechanical analysis and design of polymer matrix composites*”, Prog. Polym. Sci., Vol.19, pp.171-201, (1994).
- [29] **Pagano. N.J** “*Exact Solution for Composite Laminates in Cylindrical Bending*”. Journal of Composite Materials. Vol.3(1969), pp.398-411.
- [30] **Lounas. N, Belamri. N** Formulaire Scientifique et technique (le guide de l’étudiant) OPU (1989).
- [31] **Wilkinson. J.H and Reinsch, C** “*Linear Algebra*”, Vol.11 of Handbook for automatic computation (New York, Springer, Venley), 1971.
- [32] **William. H, Brian. P, Saul. A, William. T** *Numerical Recipes*; 1986.

## BIBLIOGRAPHIE

- Bathe. J. and Wilson. E. L** “*Numerical Method in Finite Analysis*”, Printice. Hall 1976.
- LO. K.H, Christensen. R.M, and WU. E.M** “*A high-order Theory of Plate Deformation*”. Journal of Applied Mechanics.
- Sankar. B.V** “*A finite element for modeling delamination in composite beams*”. Computers and Structures, Vol.38 (1991), No 2, pp.239-246.
- Bathias. C et Bailon. J** “*La fatigue des matériaux et des structures*”. Maloine. S.A. Editeur Paris et les presses de l’université de Montréal Québec (1980).

## ANNEXE A

La matrice de rigidité réduite dans les axes principaux (repère local) (1,2) est donnée par :

## MATRICES DE RIGIDITE

La matrice de rigidité réduite dans les axes principaux (repère local) (1,2) est donnée par :

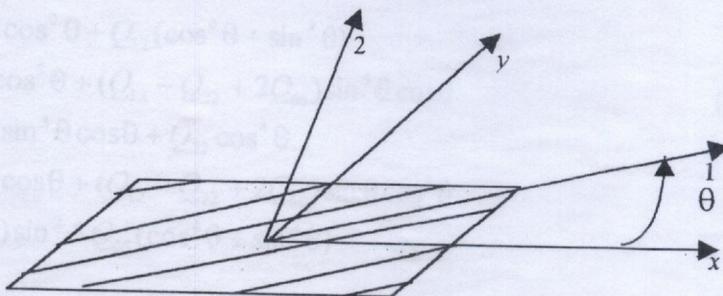


Figure A.1 : Représentation des systèmes d'axes

$\theta$  : Angle que font le repère (1,2) et le repère (x,y).

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ou;

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \\ Q_{12} &= \nu_{12} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

avec;

$E_1$  : module d'élasticité longitudinale

$E_2$  : module d'élasticité transverse

$\nu_{12}$  : coefficient de Poisson

$G_{12}$  : module de cisaillement

La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans le repère du stratifié  $(x,y)$  est donnée par :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{12} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{12} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{66} + Q_{12})) \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## ANNEXE B

# MATRICE DE PASSAGE

L'étude de comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientations différentes se fait en passant par une étude du comportement de chacun des plis qui le composent, et ce dans des directions autre que les directions d'orthotropies.

Pour un pli soumis à des sollicitations suivant les axes  $(x,y)$  formant un angle  $\theta$  avec les axes principaux  $(1,2)$  (Figure B1), le problème consiste à déterminer les contraintes exprimées dans les axes  $(1,2)$  connaissant les contraintes exprimées dans les axes  $(x,y)$  et cela par le biais d'une matrice de passage.

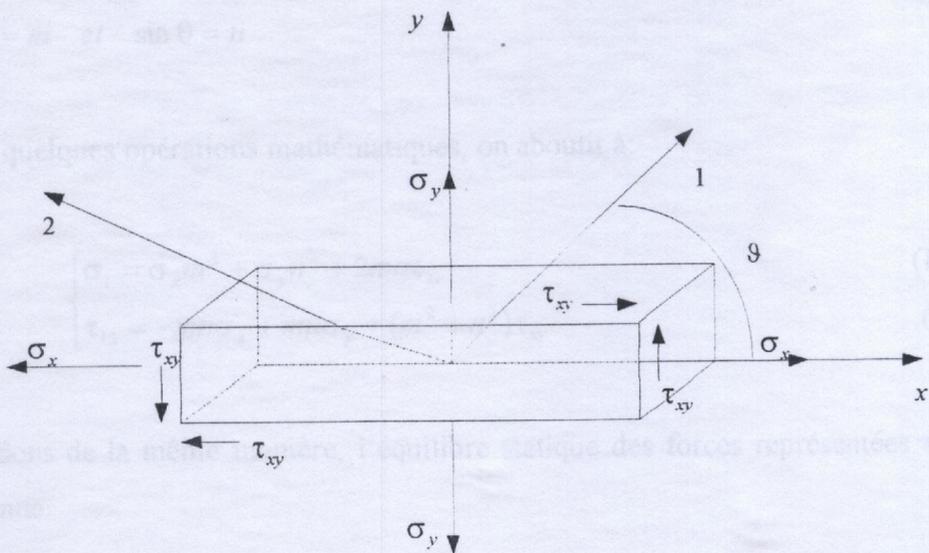


Figure B.1a

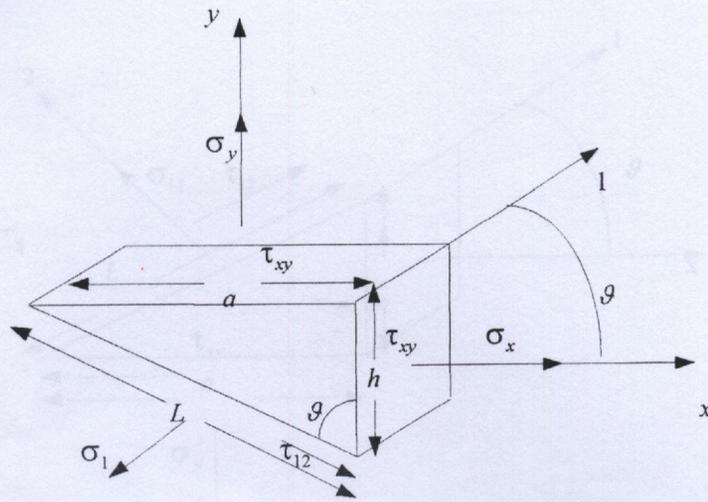


Figure B.1b

Figure B.1: Représentation des résultantes de contraintes

Étudions l'équilibre statique des forces représentées sur la figure B.1b, on aura:

$$\begin{cases} \sum F/x = 0 \\ \sum F/y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x h e + \tau_{xy} a e = \sigma_1 L e \cos \theta - \tau_{12} L e \sin \theta \\ \sigma_y a e + \tau_{xy} h e = \sigma_1 L e \sin \theta + \tau_{12} L e \cos \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} (B.1) \\ (B.2) \end{matrix}$$

posons:  $\cos \theta = m$  et  $\sin \theta = n$

Après quelques opérations mathématiques, on aboutit à:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 + 2mn\tau_{xy} \\ \tau_{12} = -mn\sigma_x + mn\sigma_y + (m^2 + n^2)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{matrix} (B.3) \\ (B.4) \end{matrix}$$

Procédons de la même manière, l'équilibre statique des forces représentées sur la figure B.2 donne:

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_x n^2 + \sigma_y m^2 + 2mn\tau_{xy} \\ \tau_{12} = mn\sigma_x + mn\sigma_y + (m^2 - n^2)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{matrix} (B.5) \\ (B.6) \end{matrix}$$

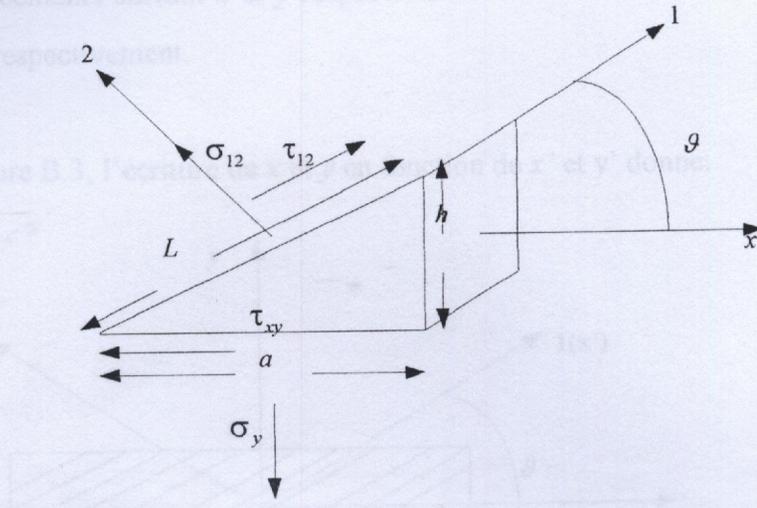


Figure B.2 : Représentation des résultantes de contraintes

Après regroupement des équations (B.3),(B.4),(B.5) et (B.6), on aura sous forme matricielle l'écriture suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (B.7)$$

$[T]$  est la matrice de passage du repère  $(x,y)$  au repère  $(1,2)$ , pour passer du repère  $(1,2)$  au repère  $(x,y)$  il faut pré-multiplier l'expression (B.7) par  $[T]^{-1}$ .

De la même façon que les contraintes on procède pour les déformations. Si les déformations sont exprimées par:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (B.9)$$

En utilisant les équations du système (B.12), on peut écrire:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_1 = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \varepsilon_{x'} &= \left(m \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial x}\right)m + \left(m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial y}\right)n \\ \varepsilon_{x'} &= m^2 \frac{\partial u}{\partial x} + nm \frac{\partial v}{\partial x} + nm \frac{\partial u}{\partial y} + n^2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{x'} &= m^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n^2 \frac{\partial v}{\partial y} + nm \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

En utilisant (B.9), on aboutit à :

$$\varepsilon_1 = m^2 \varepsilon_x + 2nm \varepsilon_{xy} + n^2 \varepsilon_y \quad (\text{B.13})$$

En procédant de la même manière, on peut écrire :

$$\varepsilon_2 = m^2 \varepsilon_y + 2nm \varepsilon_{xy} + n^2 \varepsilon_x \quad (\text{B.14})$$

et

$$\gamma_{12} = -mn \varepsilon_x + (m^2 - n^2) \varepsilon_{xy} + mn \varepsilon_y \quad (\text{B.15})$$

Tenant compte de la troisième relation (système B.9), les équations (B.13), (B.14) et (B.15) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ -mn & mn & \frac{(m^2 - n^2)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_x = 0 \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_y = 0 \quad (\text{C.2b})$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (\text{C.2c})$$

## ANNEXE C

### EQUATIONS D'EQUILIBRES

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément entourant un point quelconque d'un milieu continu s'écrit sous la forme suivante [24]:

$$f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i,j=x,y,z) \quad (\text{C.1})$$

avec:

$f_i$ : forces volumiques

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ : forces surfaciques

Pour un problème statique la relation fondamentale (C.1) devient:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{C.2})$$

L'équation (C.2) conduit aux trois autres équations fondamentales:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (\text{C.2b})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (\text{C.2c})$$

En intégrant l'équation (C.2a) suivant l'épaisseur du stratifié, on aura:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = 0 \quad (\text{C.3})$$

Sachant que:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \quad (\text{C.4})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (\text{C.5})$$

et

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2) \quad (\text{C.6})$$

Si, on tient compte des relations (C.4)-(C.7) et si on pose:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{C.7})$$

l'équation (C.3) devient:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0 \quad (\text{C.8})$$

En procédant de la même manière, l'intégration de l'équation (C.2b), conduit à:

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0 \quad (\text{C.9})$$

avec:

$\tau_{1x}$ ,  $\tau_{2x}$ ,  $\tau_{1y}$  et  $\tau_{2y}$  sont les contraintes de cisaillement exercées sur les faces du stratifié.

L'intégration de l'équation (C.2c) suivant l'épaisseur du stratifié donne:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = 0 \quad (\text{C.10})$$

avec:

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz \quad (\text{C.12})$$

$$q = q(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2) \quad (\text{C.13})$$

Finalement, on aboutit à:

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} + F_z + q(x, y) = 0 \quad (\text{C.14})$$

où,  $Q_{xx}$  et  $Q_{yy}$  sont les résultantes des forces de cisaillement transverse.

Multipliant les équations (C.2a) et (C.2b) par  $z$ , puis les intégrer suivant l'épaisseur, et en tenant compte de (1.13), on aboutit à deux autres équations:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + p_x - Q_x = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\partial Myy}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + p_y - Q_y = 0 \quad (\text{C.16})$$

avec:

$$p_x = \int_{h/2}^{h/2} z f_x dz \text{ et } p_y = \int_{h/2}^{h/2} z f_y dz \text{ sont les termes de rotations d'inertie.}$$

$$h/2(\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \quad (\text{C.17})$$

$$h/2(\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \quad (\text{C.18})$$

Finalement, on peut regrouper les relations (C.8), (C.9), (C.14), (C.15) et (C.16) comme suit:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} + F_z + q(x, y) = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + p_x - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial Myy}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + p_y - Q_y = 0$$

Les deux premières équations du système (C.19) s'appellent les équations fondamentales relatives aux résultantes de membrane, la troisième équation s'appelle équation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement. Par contre, les deux dernières équations sont les équations fondamentales relatives aux moments.

L'état de contraintes planes exige que,  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , donc les contraintes de cisaillement exercées sur les faces supérieures et inférieures sont négligeables. On néglige les forces volumiques  $(f_x, f_y, f_z)$ , les cisaillements transverse, et tenant compte de phénomène de flambement, le terme  $N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  peut être introduit dans la troisième équation du système (C.19).

Les équations d'équilibres peuvent être exprimées en fonction des résultantes de forces et de moments par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{C.20}$$

## ANNEXE D

### SOUS-PROGRAMMES DE CALCUL

```
C *****
C          SUBROUTINE CALCUL1
C *****
C  IMPLICIT REAL*8(A-Z)
C *****CONSTANTES ELASTIQUE POUR UN PLI*****
C  E1=(EL-EM)*VF+EM
C  E2=EM*(1/((1-VF)+(EM*VF)/ET))
C  G12=GM*(1/((1-VF)+(GM*VF)/GF))
C  NU12=(NUF-NUM)*VF+NUM
C  NU21=(E2/E1)*NU12
C  WRITE(*,*) 'E1=',E1 , 'E2=',E2 , 'G12=',G12,
C $      'NU12=',NU12 , 'NU21=',NU21

C *****DETERMINAION DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE CHAQUE PLI*****
C *****DANS LE REPPERE DU STRATIFIE*****
C  WRITE(*,*)'ENTRER LA VALEUR DE H'
C  READ(*,*)h
C  WRITE(*,*)'ENTRER LE NOMBRE DE PLIS DU STRATEFIE'
C  READ(*,*)n
C  e=h/n
C  WRITE(*,*) 'e=',e
C          S1(I,J)=0
C          S2(I,J)=0
C          S3(I,J)=0
C  DO 100 K=1,n
C  C=COS(TETA(K)*PI/180.)
C  S=SIN(TETA(K)*PI/180.)
C  QB(1,1)=QP(1,1)*(C**4)+QP(2,2)*(S**4)+2*(QP(1,2)+2*QP(3,3))
C $      *(S**2)*(C**2)
C  QB(1,2)=(QP(1,1)+QP(2,2)-4*QP(3,3))*(S**2)*(C**2)+QP(1,2)
C $      *((S**4)+(C**4))
C  QB(1,3)=(QP(1,1)-QP(1,2)-2*QP(3,3))*(S**1)*(C**3)+(QP(1,2)-QP(2,2)
C $      +2*QP(3,3))*(C**1)*(S**3)
C  QB(2,1)=QB(1,2)
C  QB(2,2)=QP(1,1)*(S**4)+2*(QP(1,2)+2*QP(3,3))*(S**2)*(C**2)
C $      +QP(2,2)*(C**4)
```

```

QB(2,3)=(QP(1,1)-QP(1,2)-2*QP(3,3))*(S**3)*(C**1)+(QP(1,2)-QP(2,2)
$   +2*QP(3,3))*(S**1)*(C**3)
QB(3,1)=QB(1,3)
QB(3,2)=QB(2,3)
QB(3,3)=(QP(1,1)+QP(2,2)-2*QP(1,2)-2*QP(3,3))*(S**2)*(C**2)
$   +QP(3,3)*((S**4)+(C**4))
C   WRITE(*,*)'-----'
C   WRITE(*,*)'  MATRICE DE RIGIDITE QB DANS LE REPERE(X,Y,Z) '
C   WRITE(*,*)'      LIE AU STRATEFIE          '
C   WRITE(*,*)'-----'
WRITE(*,*) ((QB(I,J),J=1,3),I=1,3)
C   *****CALCUL DES COTES DE CHAQUE PLIS*****
Z(K)=(K-n/2)*E
Z(K-1)=(K-1-n/2)*E
WRITE(*,*) 'Z(K)=' ,Z(K) , 'Z(K-1)=' ,Z(K-1)
C   *****
      CALCUL DES A(I,J),B(I,J) ET D(I,J)
C   *****
DO I=1,3
  DO J=1,3
    S1(I,J)=S1(I,J)+QB(I,J)*(ZO(K)-ZO(K-1))
    S2(I,J)=S2(I,J)+QB(I,J)*(ZO(K)**2-ZO(K-1)**2)
    S3(I,J)=S3(I,J)+QB(I,J)*(ZO(K)**3-ZO(K-1)**3)
C
      ENDDO
    ENDDO
  100 CONTINUE
  DO I=1,3
    DO J=1,3
      AS(I,J)=S1(I,J)
      BS(I,J)=S2(I,J)/2.
      DS(I,J)=S3(I,J)/3.
    ENDDO
  ENDDO
RETURN
END

```