

Ministère Délégué aux Universités

UNIVERSITE DE BLIDA  
Institut National d'Enseignement Supérieur de Mécanique

**THESE  
DE  
MAGISTER**

PRESENTEE PAR :  
HAMLATI ABDENNEBI

Spécialité : Construction Mécanique

SUJET DE LA THESE

**Elaboration d'un Modèle Analytique  
d'analyse Cinématique et Dynamique  
des Mecanismes Plans à Leviers**

SOUTENUE LE 20 MARS 1990 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

MESSIEURS : RECHAK SAID (MC - ENPA)

PRESIDENT

GOUSSEINOV R. (M.C - U. BAKOU)

RAPPORTEUR

HERING J. (M.C. U. BLIDA)

EXAMINATEURS

KERR (D.P.G. U. SALFORD G.B)

DAMOU (D.R.S. M D N)

YOUSNADJ A. (Docteur - ENITA) INVITE

## SYMBOLES ET NOTATIONS

- $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ : charges appliquées sur les chaînons
- A, B, D, E, F, I, J, K, O, T, X: couples cinématiques de rotation
- C, G, S, U, Y, Z: couples cinématiques de translation
- W: degré de mobilité d'un mécanisme
- $\varphi = \varphi_i$ : angle de rotation du chaînon initial
- $\omega$ : vitesse angulaire du chaînon initial
- $\epsilon$ : accélération angulaire du chaînon initial
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ : angles de positions des chaînons des groupes structuraux dans la chaîne cinématique
- $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$ : rayons vecteurs de positions des chaînons des groupes structuraux
- $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ : angles de rotation des chaînons des groupes structuraux
- $l_1, l_2, l_3, l_4$ : longueurs des chaînons
- $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ : longueurs des bras des coulisseaux
- $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ : espaces parcourus par les coulisseaux
- L: point quelconque du chaînon II du groupe R.R.P
- $x$ : produit scalaire de deux vecteurs et produit d'un vecteur par un scalaire
- $V_x(t)$ : composante horizontale d'un vecteur vitesse
- $V_y(t)$ : composante verticale d'un vecteur vitesse
- $a_x(t)$ : composante horizontale d'un vecteur accélération
- $a_y(t)$ : composante verticale d'un vecteur accélération
- $a^n(t)$ : accélération normale
- $a^t(t)$ : accélération tangentielle
- $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$ : centres de gravité des chaînons
- $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}$ : masses des chaînons
- $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ : moments d'inertie des chaînons
- $f$ : force d'inertie résultante
- $M$ : moment résultant des forces d'inertie
- $L_1, L_2, M_1, M_2$ : points de liaisons cinématiques

- $M^i$ : moment des forces de frottement dans les couples de rotation
- $P_{01}, P_{02}, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ : charges appliquées sur les chainons
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$ : angles d'application des charges précédentes
- $R^i$ : réaction normale au chaînon dans un couple de rotation et réaction normale sur la coulisse dans un couple de translation
- $R^t$ : réaction tangentielle au chaînon dans un couple de rotation et force de frottement dans un couple de translation
- $\Delta$ : produit de deux vecteurs
- $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ : longueurs déterminant les points d'application des réactions dans les couples de translation
- $f$ : coefficient de frottement dans les couples cinématiques
- $R$ : rayon de la partie cylindrique dans le couple de rotation
- $P_m$ : force équilibrante sur le chaînon initial
- $R_{0H}, R_{0V}$ : composantes horizontale et verticale de la pression dynamique sur l'axe de rotation du chaînon initial
- $h_1, h_2, h_3, h_4$ : longueurs des bras de leviers

J'exprime toute ma reconnaissance aux responsables de l'Institut de mécanique: ##### M. SAUNDERS, M. BROWN, qui, par leur engagement et leur disponibilité, ont permis à ce post-graduate d'effectuer et d'apporter ces résultats.

Je ne saurais terminer sans remercier tous les enseignants et collègues de l'Institut.

## REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements vont à :

- Mr. RECHEK S. pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant de présider le jury.
- Mr. GOUSSEINOV R. qui m'a témoigné toute sa confiance et qui a bien voulu diriger la réalisation de ce travail.
- Mr. HERING J. qui a bien voulu juger ce travail et donner son appréciation.
- Mr. DAMOU qui a pris le temps sur ses activités pour avoir accepté de nous honorer de sa présence et de participer au jury.
- Mr. KERR qui s'est intéressé à ce travail et qui a bien voulu me présenter un rapport de critique.

### III- GÉNÉRALITES.

J'exprime toute ma reconnaissance aux responsables de l'institut de mécanique; Mr. BENBOUZID , Mr. NADER S., Mr. NEDJMI G., qui, par leur engagement et leur dévouement, ont permis à la post-graduation d'exister et d'apporter ses résultats.

Je ne saurais terminer sans remercier tous les enseignants et collègues de l'institut.

#####

cinématiques. **TABLE DES MATIERES**

	Page
IV- EQUATIONS DE L'ANALYSE CINEMATIQUE.....	31
§ 12- Equations vectorielles des chaînes cinématiques.....	31
I- INTRODUCTION.....	2
§ 1- Actualité du problème.....	2
§ 2- Objet du problème.....	4
10-2- Groupe à 2 entraineurs de 3777 espace.....	30
II- CARACTERISTIQUES GENERALES DU SUJET.....	6
§ 3- Relation structurale de base.....	6
§ 4- Innovation du travail.....	7
§ 5- But du sujet.....	7
§ 6- Utilité pratique.....	7
§ 7- Appréciation des résultats obtenus.....	8
14-2- Forces d'inertie des chaînes des mécanismes.....	30
III- GENERALITES.....	9
§ 8- Notions principales.....	9
§ 9- Analyse structurale.....	11
§ 10- Analyse cinématique.....	21
10-1- Objet et problèmes de l'analyse cinématique.....	21
10-2- Methodes de l'analyse cinématique.....	22
10-3- Cinématique des chaînons initiaux.....	22
10-4- Vitesses et accélérations analogues.....	24
§ 11- Analyse cinétoctatique.....	27
11-1- Problèmes inhérents au calcul des forces.....	27

11-2-	Condition de détermination statique des chaînes cinématiques.....	28
12-6-	Calcul cinéostatique de l'élément menant.....	30
IV-	EQUATIONS DE L'ANALYSE CINEMATIQUE.....	31
§ 12-	Equations vectorielles des chaînes cinématiques....	31
§ 13-	Equations de la cinématique.....	32
13-1-	Groupe à 2 entraîneurs de 1 <sup>ère</sup> espèce.....	32
13-2-	Groupe à 2 entraîneurs de 2 <sup>ème</sup> espèce.....	39
13-3-	Groupe à 2 entraîneurs de 3 <sup>ème</sup> espèce.....	45
13-4-	Groupe à 2 entraîneurs de 4 <sup>ème</sup> espèce.....	51
13-5-	Groupe à 2 entraîneurs de 5 <sup>ème</sup> espèce.....	58
V-	EQUATIONS DE L'ANALYSE DES FORCES.....	64
§ 14-	Etude des forces.....	64
14-1-	Forces appliquées aux mécanismes plans.....	64
14-2-	Forces d'inertie des chaînons des mécanismes plans.....	65
§ 15-	Calcul des forces.....	66
15-1-	Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.R.R.....	66
15-2-	Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.R.T.....	75
15-3-	Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.T.R.....	81
15-4-	Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe T.R.T.....	87

15-5- Détermination des réactions dans les couples	
cinématiques du groupe R.T.T.....	92
15-6- Calcul cinéto-statique de l'élément menant.....	96
VI- ORDINOGRAMME ET LOGICIEL DE CALCUL.....	101
§ 16- Algorithme.....	101
§ 17- Programme MECANISM en BASIC.....	115
VII- ANALYSE DES RESULTATS.....	117
VIII- CONCLUSION.....	149
IX- BIBLIOGRAPHIE-REFERENCES.....	151

\*\*\*\*\*

## I- INTRODUCTION

### 1- Actualité du problème:

Le développement de l'industrie dépend dans une large mesure du progrès de la construction mécanique. Le progrès de la construction mécanique s'exprime à son tour par la création de nouvelles machines de hautes capacités et de haute fiabilité.

L'étude et la création de nouvelles machines est basée sur l'application des résultats de plusieurs disciplines scientifiques parmi lesquelles les plus importantes sont groupées dans la théorie des mécanismes et des machines. C'est une science qui étudie dans une première partie les méthodes les plus générales d'élaboration de projets de mécanismes devant produire des mouvements donnés et répondant à certaines exigences structurales, cinématiques et dynamiques (synthèse); et dans une deuxième partie de rechercher les propriétés et les caractéristiques structurales, cinématiques et dynamiques des mécanismes et des machines (analyse).

Actuellement, l'analyse des mécanismes est plus développée et prend une place très importante dans la théorie des mécanismes et des machines. Elle permet de rechercher les propriétés non seulement des mécanismes projetés, mais aussi des mécanismes existants déjà, afin d'estimer leurs paramètres essentiels tels



que capacité, fiabilité et rendement à certaines étapes de leur fonctionnement. Elle permettrait éventuellement dans des cas nécessaires de corriger ces paramètres, afin de perfectionner les mécanismes en service, d'augmenter leur capacité de travail en respectant les conditions de sécurité et d'améliorer le rendement d'une manière générale.

Il est connu que les problèmes de l'analyse des mécanismes nécessitent des calculs très fastidieux. Ces calculs deviennent encore très pénibles lorsque la chaîne cinématique devient complexe, ce qui est le cas de la plupart des mécanismes actuels.

Il existe des méthodes de calcul qui sont utilisées actuellement, telles les méthodes matricielles (algèbre linéaire) et les méthodes vectorielles [14,15,16], ou en utilisant les nombres complexes [17].

La contrainte actuelle réside dans le fait que ces calculs sont très pénibles et le plus souvent on rencontre des systèmes qui possèdent plus d'inconnues que d'équations.

Dans notre recherche bibliographique, nous avons rencontré des études d'analyse et de synthèse de mécanismes particuliers [16,18,19], chaque cas étant traité séparément et dans un cadre propre à lui.

Pour contribuer à l'étude des problèmes d'analyse des mécanismes plans qui sont très nombreux et très utilisés pour la transformation des mouvements, nous envisageons d'élaborer une méthode qui est basée sur un principe fondamental (voir plus loin) de composition de ces mécanismes. Aussi, en prenant

comme élément de départ le concept d'ASSOUR (voir en page 12) énoncé en 1914, il est possible, en utilisant les méthodes de calcul en vigueur, d'écrire un modèle qui serait applicable à tous ces mécanismes plans.

## 2- Objet du problème

L'objet de ce travail basé sur la deuxième partie de la théorie des mécanismes et des machines, est l'étude cinématique et dynamique d'une famille de mécanismes plans à leviers appelés de deuxième classe. Dans cette étude, on obtient les paramètres des positions, des vitesses et des accélérations des éléments des mécanismes et de leurs points caractéristiques. La connaissance de ces paramètres permet d'examiner le mouvement du point exécutif pour l'adapter au milieu du travail avec lequel il est en contact. Par exemple, dans le mécanisme d'entraînement de l'outil de coupe dans la raboteuse, la course retour doit être très rapide.

On détermine aussi les différentes forces qui apparaissent sur les divers éléments du mécanisme. La connaissance des forces est d'une grande importance pratique pour l'étude dynamique ainsi que pour le calcul de résistance des éléments.

Il sera possible de connaître les forces de réaction dans les couples cinématiques qui sont dues non seulement à l'action des forces externes appliquées au mécanisme, mais également celles provoquées par le mouvement accéléré des masses, parce que les

forces d'inertie provoquent sur les éléments des contraintes supplémentaires. Ces forces de réaction en tenant compte des forces d'inertie sont nécessaires pour le calcul de résistance des pièces. On peut choisir les dimensions optimales des éléments, leur forme, le matériau.

On détermine les forces de frottement au niveau des couples cinématiques pour évaluer la puissance moyenne dissipée par frottement et faire une analyse comparative des mécanismes sur la base du rendement en améliorant les conditions de lubrification. On peut déterminer le mouvement réel de l'élément menant et par suite calculer le volant d'inertie par la connaissance du moment des forces d'inertie. De même que la mise en évidence des forces d'inertie permet d'aborder les problèmes d'équilibrage des masses dans les mécanismes.

Les mécanismes sont constitués par l'adjonction à l'élément menant, des chaînes cinématiques appelées groupes structuraux. C'est le principe fondamental de la conception des mécanismes. Avec, en variant l'ordre d'adjonction de ces groupes, leur disposition réciproque et ainsi que certaines caractéristiques géométriques, on peut obtenir une large gamme de mécanismes différents par leur schéma, par leur destination, par leur manière d'exploitation, par leur technologie de fabrication. L'analyse structurale a permis que le nombre de variantes de ces groupes ait été évalué à 1000. Certains sont le mécanisme et quelques sont les variantes.

## 11- CARACTERISTIQUES GENERALES DU SUJET

### 3- Relation structurale de base

Malgré la différence qui existe entre les fonctions et les schémas de divers mécanismes, leurs structures cinématiques et dynamiques présentent beaucoup de traits communs.

Par exemple, le mécanisme du moteur à combustion interne, le mécanisme d'entraînement de l'outil de coupe de la raboteuse et de la mortaiseuse, le mécanisme de marteau pilon de forgeage et le mécanisme du train d'atterrissage d'avion utilisent le même principe du mécanisme à coulisse. Le mécanisme de la faneuse et du pétrin mélangeur utilisent le principe du mécanisme articulé de Tchebychév ou quadrilatère articulé.

Ces mécanismes sont constitués par l'adjonction à l'élément menant, des chaînes cinématiques appelées groupes structuraux. C'est le principe fondamental de formation de ces mécanismes plans à leviers.

Aussi, en variant l'ordre d'adjonction de ces groupes, leur disposition réciproque et ainsi que certaines caractéristiques géométriques, on peut obtenir une large gamme de mécanismes différents par leur schéma, par leur destination, par leur condition d'exploitation, par leur technologie de fabrication. L'analyse structurale a montré que le nombre de variantes de ces groupes est égal à cinq, quelque soit le mécanisme et quelque soit sa destination.

#### 4- Innovation du travail

Autant que ces mécanismes ne sont constitués que de ces cinq groupes structuraux, nous avons eu l'idée d'approcher l'analyse de ces mécanismes en partant de cette propriété. Dans ce cas, il serait possible de faire une généralisation, autrement dit d'établir une méthode de calcul applicable à tous ces mécanismes plans. Aussi, cette idée a été exploitée et mise en évidence.

#### 5- But du sujet

Dans une première étape, en réalisant des schémas de calcul pour chaque groupe structural après avoir fait une étude statistique sur un grand nombre de mécanismes, on élabore notre modèle général de calcul permettant de déterminer tous les paramètres cinématiques ainsi que les différentes forces. Dans une deuxième étape, sur la base de cette généralisation, on réalise un logiciel de calcul utilisable sur micro-ordinateurs.

#### 6- Utilité pratique

Le modèle et le programme élaborés peuvent rendre énormément de service aux bureaux d'études des équipements techniques, de fabrication et d'exploitation.

Le programme étant un bon instrument de résolution et de recherche, il permettrait d'augmenter l'efficacité de travail des ingénieurs constructeurs.

Le travail en question est aussi utile pour les programmes d'enseignement et les laboratoires de la théorie des mécanismes dans les instituts de mécanique. Il apporterait également une aide très conséquente pour les étudiants qui préparent des mémoires de fin d'étude dans la conception de machines telles que moteur à combustion, compresseur volumétrique, presse, transporteur oscillant, pompe de fond, machine à tarauder les écrous, raboteuse et divers autres mécanismes et machines.

#### 7- Appréciation des résultats obtenus

Pour apprécier le modèle d'analyse élaboré et pour s'assurer du bon fonctionnement du logiciel, nous avons effectué le calcul de certains mécanismes dont les caractéristiques sont déjà connues.

Comme résultat, nous ne pouvons qu'affirmer que les courbes obtenues vérifient bien les courbes statistiques déjà connues.

De ce fait, le modèle en question est apte à fonctionner et nous le recommandons pour son application pratique.

#####

### III- GENERALITES

Pour que tout soit entièrement clair à nos lecteurs, nous avons décidé d'inclure certaines notions principales utilisées dans le texte de la thèse en question.

#### 8- Notions principales [3,7]

On entend par **mécanisme**, un système de corps liés entre eux et destinés à transformer le mouvement quelconque d'un ou de plusieurs corps en des mouvements déterminés d'autres corps. Dans notre étude nous considérons exclusivement les mécanismes des machines ne comportant que des corps solides.

Un mécanisme se compose de plusieurs éléments solides appelés **chainons**. Si quelques chainons du mécanisme sont liés entre eux rigidement, c'est-à-dire sans mouvement relatif entre eux, ils sont considérés comme un seul chaînon.

Chaque mécanisme possède un **chaînon fixe (support)** et un ou plusieurs éléments mobiles. Parmi les chainons mobiles, on distingue les **chainons d'entrée** auxquelles sont communiqués les mouvements devant être transformés et les **chainons de sortie** ou **chainons exécutifs** qui effectuent le mouvement pour lequel est destiné le mécanisme lui-même.

L'assemblage mobile de deux chainons en contact permanent est appelé **couple cinématique**. Dans un couple cinématique, le

contact peut avoir lieu suivant un point ou une ligne (ce couple cinématique est dit supérieur), ou suivant une surface (couple cinématique inférieur).

Chaque mécanisme contient au moins une **chaîne cinématique** qui est un ensemble de chaînons liés entre eux par les couples cinématiques. Les chaînes cinématiques peuvent être fermées ou ouvertes. Les mécanismes considérés dans notre étude sont les mécanismes à chaînes cinématiques fermées où tous les chaînons forment chacun au moins deux couples cinématiques.

La position d'un corps se mouvant librement dans l'espace est définie entièrement par six coordonnées indépendantes ou coordonnées généralisées, qui peuvent être les trois coordonnées d'un pôle du corps considéré et les trois angles d'Euler déterminant la disposition du système d'axes liés au corps et d'origine le pôle, par rapport au système de référence.

Par analogie, on appelle les coordonnées généralisées du mécanisme, les coordonnées indépendantes entre elles (linéaires ou angulaires), définissant la position de tous les chaînons du mécanisme par rapport au support. Comme coordonnées généralisées, on peut prendre n'importe quelle coordonnée de ses chaînons ; le chaînon pour lequel est donnée la coordonnée généralisée est le **chaînon initial**. La détermination des positions de tous les chaînons du mécanisme est faite à partir de la détermination des positions de ce chaînon.

Le nombre total des coordonnées déterminant la position de  $N$  chaînons mobiles sera égal à  $(6N)$ . Lorsqu'un chaînon constitue un couple cinématique avec un autre, la condition de permanence



de contact entre eux impose certaines restrictions à leur liberté (mouvement).

Le nombre de degrés de liberté varie dans ces conditions entre 1 et 5, car avec le nombre de liberté zéro, la liaison devient rigide et avec le nombre six, il n'y aura plus de contact et le couple cinématique cesse d'exister.

Ainsi, un couple cinématique unimobile impose cinq équations de liaison, un couple bimobile impose quatre équations, un couple trimobile impose trois équations, un couple quadrimobile impose deux équations et un couple quinquamobile impose une équation. Si les chaînons du mécanisme considéré forment  $p_1$  couples unimobiles,  $p_2$  couples bimobiles,  $p_3$  couples trimobiles,  $p_4$  couples quadrimobiles et  $p_5$  couples quinquamobiles, le nombre de degrés de liberté de ce mécanisme est:

$$W=6N-5p_1-4p_2-3p_3-2p_4-p_5$$

Pour un mécanisme plan, cette formule devient  $W=3N-2p_1-p_2$  et par conséquent les couples cinématiques ne peuvent être que unimobiles et bimobiles.

### 09- Analyse structurale[3]

L'analyse structurale des mécanismes a pour but de déterminer le degré de liberté (ou mobilité) du mécanisme et sa classe. Autant que l'objet de nos recherches sont les mécanismes plans, par la suite en disant mécanisme, nous allons avoir en vue toujours un mécanisme plan.

Un mécanisme plan est un mécanisme dont les points des chaînons décrivent des trajectoires situées dans des plans parallèles à un plan fixe commun.

Comme il a été mentionné précédemment, le degré de liberté de ce type des mécanismes se définit par la relation suivante:

$$W=3N-2p_1-p_2.$$

Pour déterminer la classe du mécanisme, on utilise le principe fondamental de formation des mécanismes, proposé pour la première fois en 1914 par le savant russe L. Assour. D'après ce principe, la formation d'un mécanisme peut se faire par l'adjonction successive aux chaînons initiaux (chaïnons d'entrée) et au bâti, des chaînes cinématiques possédant des propriétés structurales déterminées; il s'agit des "groupes structuraux" ou "groupes d'Assour". Par groupe d'Assour, on entend une chaîne cinématique qui a le degré de mobilité nul par rapport aux éléments qui forment des couples cinématiques avec les parties libres de ses éléments, et qui ne peut être décomposée en des chaînes plus élémentaires possédant aussi un degré de mobilité nul.

D'après cette définition, pour un groupe structural on a:

$$W=3N-2p_1-p_2=0.$$

En supposant que dans le mécanisme tous les couples cinématiques bimobiles sont remplacés par ceux unimobiles (ce qui est toujours possible), on obtient:  $W=3N-2p_1=0$  ou  $3N=2p_1$ . Les combinaisons de valeurs de  $p_1$  et  $N$  vérifiant cette équation sont  $(p_1=3; N=2)$ ,  $(p_1=6; N=4)$ ,  $(p_1=9; N=6)$  etc. Comme règle, les chaînes ayant plus que 6 chaînons et 9 couples se décomposent

en groupe plus simple et par conséquent ne peuvent pas être considérées comme un groupe structural.

Les groupes structuraux de première combinaison  $p_1=3$  et  $N=2$  appartiennent à la classe II. Les groupes d'autres combinaisons peuvent être de classe III, IV etc. La classe d'un mécanisme se définit par la classe du groupe la plus élevée qui appartient au mécanisme. L'objet de nos recherches étant les mécanismes de II<sup>e</sup> classe (c'est-à-dire ne contenant que des groupes de classe II), nous nous limitons par la considération des groupes de ce type.

Ces groupes comprennent deux chaînons et trois couples cinématiques unimobiles, ils sont appelés groupes de classe II de second ordre, ou groupes à deux entraîneurs; ils sont au nombre de cinq:

Groupe à deux entraîneurs de première espèce (voir figure n°1)

Ce groupe comprend deux chaînons et trois couples cinématiques de rotation.

Une telle combinaison est appelée groupe structural R.R.R.

Groupe à deux entraîneurs de deuxième espèce (voir figure n°2)

Ce groupe comprend deux couples de rotation et un couple de translation extrême. Il est appelé groupe structural R.R.T.

Groupe à deux entraîneurs de troisième espèce (voir figure n°3)

Ce groupe comprend deux couples de rotation extrêmes et un couple de translation médian. Il est appelé groupe structural R.T.R.

Groupe à deux entraîneurs de quatrième espèce (voir figure n°4)

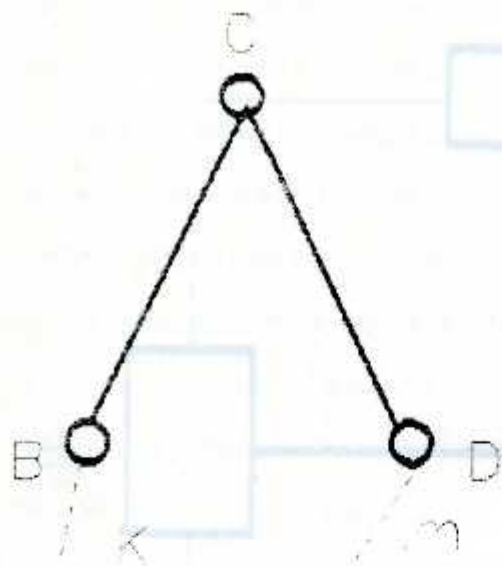


Figure n 1

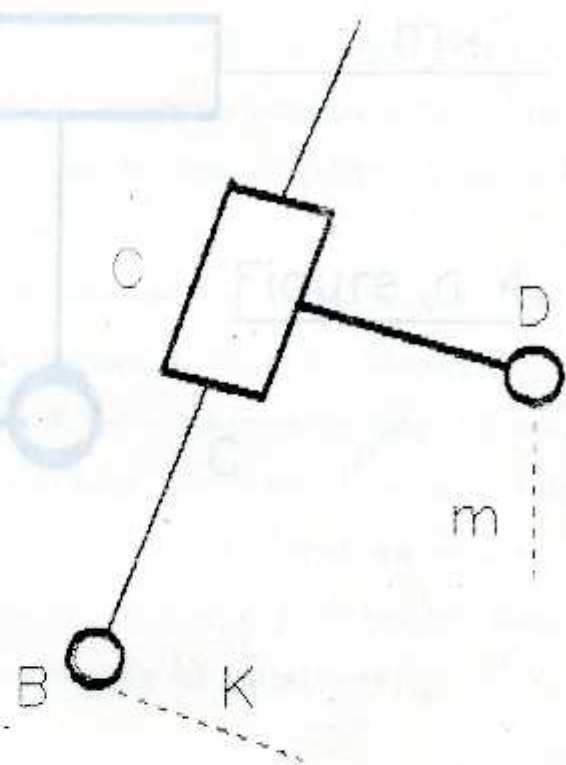


Figure n 3

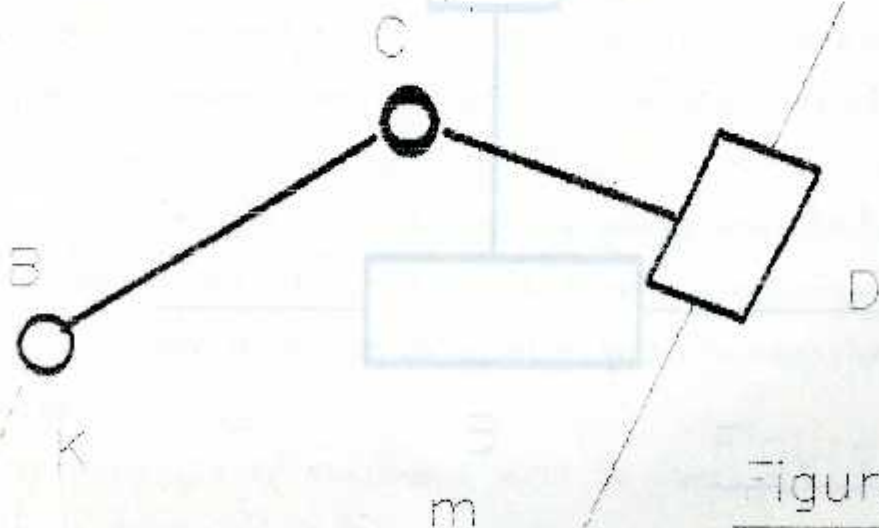


Figure n 2

Ce groupe comprend deux couples D translation extrême et un couple de rotation extrême. Il est appelé groupe  $m_1$ .  
 Groupe A deux liaisons... (voir figure n°5)  
 Ce groupe comprend deux couples de translation et un couple de rotation extrême. Il est appelé groupe T.T.E.  
 Tous ces groupes structureaux servent à...  
 Le degré de mobilité sera déterminé par le nombre de mécanismes de classe I ou chaînes initiales auxquels les groupes sont joints. Ainsi un mécanisme formé en ajoutant plusieurs groupes A un mécanisme de classe I possède un seul degré de liberté ou une seule coordonnée généralisée.

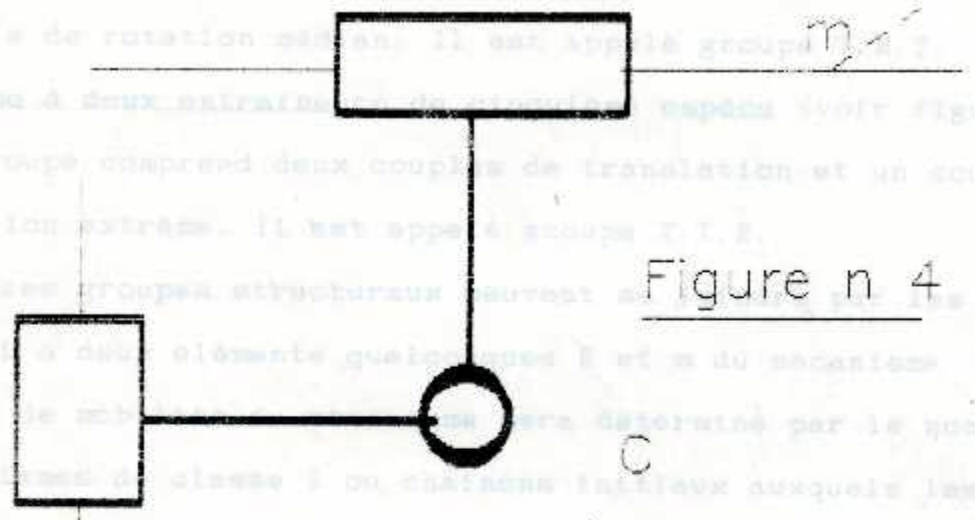


Figure n 4

Etude de l'analyse structural de quelques mécanismes.  
 Mécanisme d'un moteur... (voir figure n°6)  
 Ce mécanisme est constitué de sept chaînes mobiles et de dix couples cinématiques unilatérales. Le degré de mobilité sera donc  $V=10-7=3$ .  
 Pour déterminer la classe de ce mécanisme, décomposons le en groupes structureaux. Il est à noter qu'on commence à décomposer le mécanisme à partir du groupe le plus éloigné du chariot initial.

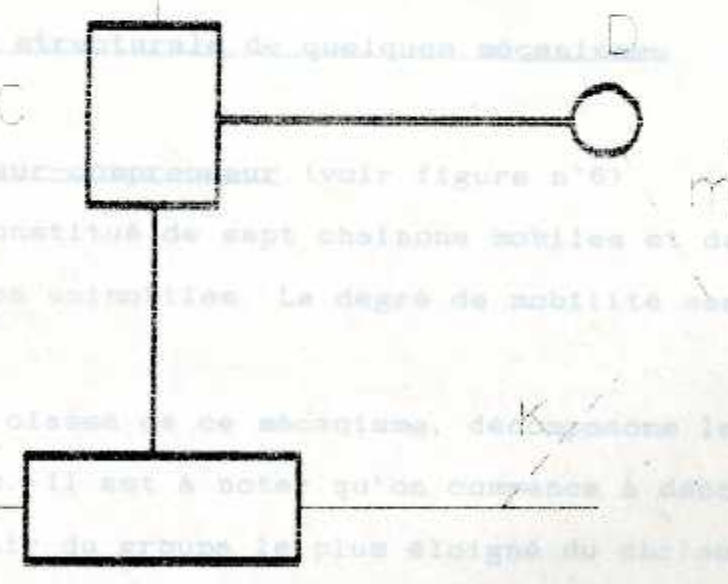


Figure n 5

Ce groupe comprend deux couples de translation extrêmes et un couple de rotation médian. Il est appelé groupe T.R.T.

Groupe à deux entraîneurs de cinquième espèce (voir figure n°5)

Ce groupe comprend deux couples de translation et un couple de rotation extrême. Il est appelé groupe T.T.R.

Tous ces groupes structuraux peuvent se joindre par les couples B et D à deux éléments quelconques K et m du mécanisme. Le degré de mobilité du mécanisme sera déterminé par le nombre de mécanismes de classe I ou chaînons initiaux auxquels les groupes sont joints. Ainsi un mécanisme formé en ajoutant plusieurs groupes à un mécanisme de classe I possède un seul degré de mobilité ou une seule coordonnée généralisée.

### Etude de l'analyse structurale de quelques mécanismes

Mécanisme d'un moteur-compresseur (voir figure n°6)

Ce mécanisme est constitué de sept chaînons mobiles et de dix couples cinématiques unimobiles. Le degré de mobilité sera donc  $W=3 \times 7 - 2 \times 10 = 1$ .

Pour déterminer la classe de ce mécanisme, décomposons le en groupes structuraux. Il est à noter qu'on commence à décomposer le mécanisme à partir du groupe le plus éloigné du chaînon initial.

Supposons que le chaînon 1 soit le chaînon initial (figure n°6a); Il forme avec le support un couple cinématique unimobile et le degré de liberté de ce système est  $W=3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$ . On a convenu d'appeler un tel système mécanisme de classe I.

Il est évident que le degré de mobilité du système séparé du chariot initial et du support sera égal à zéro (car le degré de

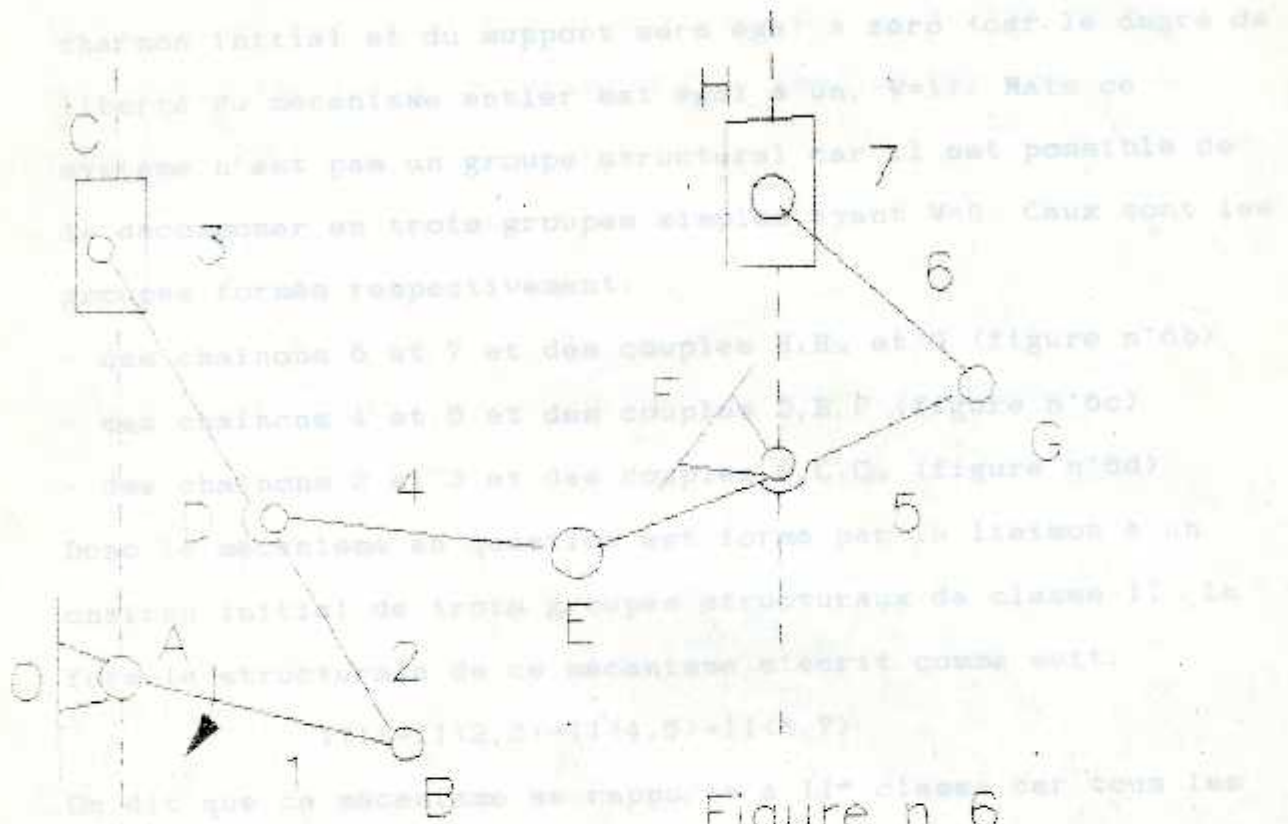


Figure n 6

Mécanisme de presse à tirer (voir figure n°7)

Le mécanisme est constitué de 7 chaînes. Ce mécanisme est constitué d'un groupe R.F.T. formé par les chaînes 2 et 3, et d'un groupe R.F.T. formé par les chaînes 4 et 5.



Figure 6a

Figure 6b

Figure 6c

Figure 6d

Il est évident que le degré de mobilité du système séparé du chaînon initial et du support sera égal à zéro (car le degré de liberté du mécanisme entier est égal à un,  $W=1$ ). Mais ce système n'est pas un groupe structural car il est possible de le décomposer en trois groupes simples ayant  $W=0$ . Ceux sont les groupes formés respectivement:

- des chaînons 6 et 7 et des couples  $H_1, H_2$  et  $G$  (figure n°6b)
- des chaînons 4 et 5 et des couples  $D, E, F$  (figure n°6c)
- des chaînons 2 et 3 et des couples  $B, C_1, C_2$  (figure n°6d)

Donc le mécanisme en question est formé par la liaison à un chaînon initial de trois groupes structuraux de classe II. La formule structurale de ce mécanisme s'écrit comme suit:

$$I(1) \rightarrow II(2, 3) \rightarrow II(4, 5) \rightarrow II(6, 7)$$

On dit que ce mécanisme se rapporte à II\* classe car tous les groupes qui le composent sont de classe II.

#### Mécanisme de presse à étirer (voir figure n°7)

Le degré de mobilité est  $W=1$ . Ce mécanisme est constitué d'un groupe R.R.R formé par les chaînons 2 et 3, et d'un groupe R.R.T. formé par les chaînons 4 et 5.

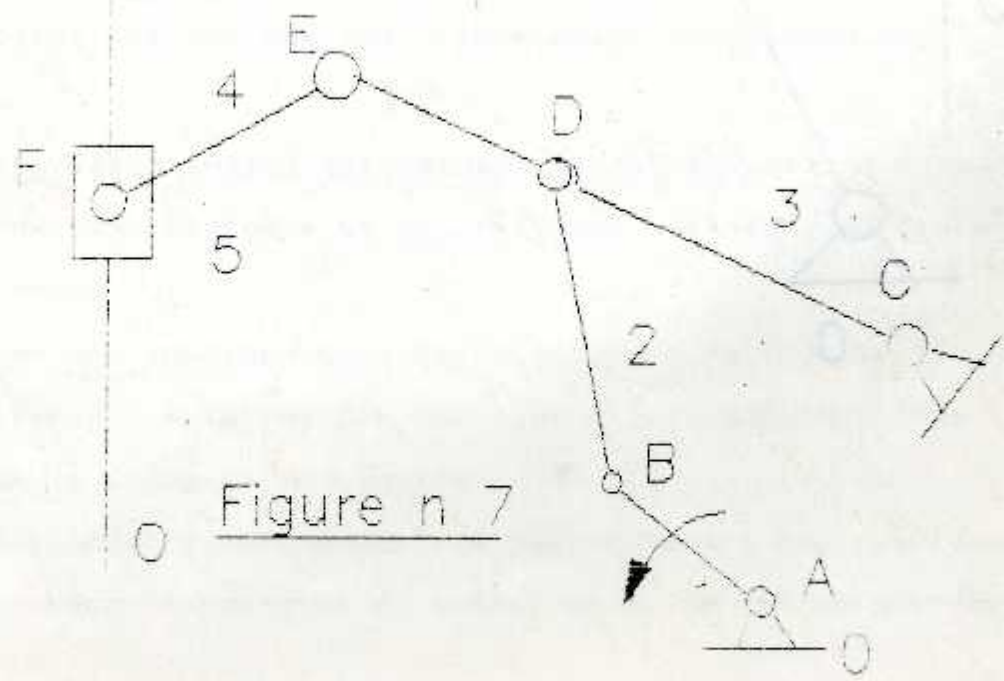
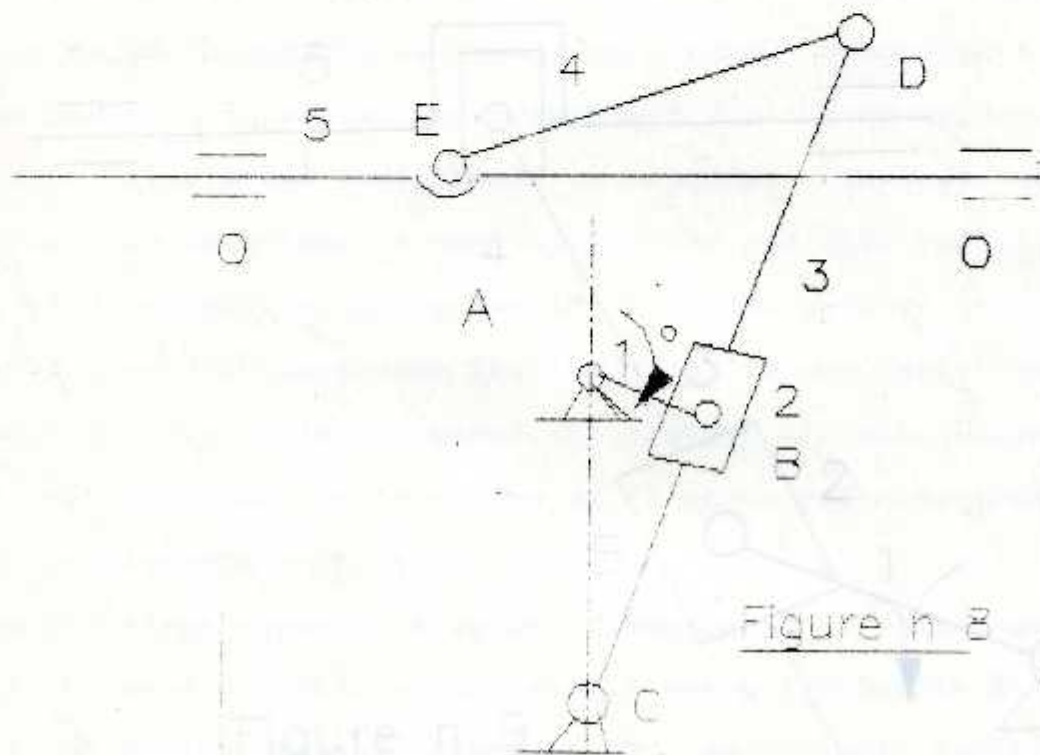
#### Mécanisme d'une raboteuse transversale (voir figure n°8)

Ce mécanisme est constitué d'un groupe R.T.R réalisé par les chaînons 2 et 3 et d'un groupe R.R.T réalisé par les chaînons 4 et 5.



**Mécanisme d'un étau linaire** (voir figure n°9)

Ce mécanisme est constitué d'un groupe R.T.R réalisé par les chaînons 2 et 3 et d'un groupe R.T.T. réalisé par les chaînons 4 et 5.



## 10- Analyse cinématique (1.2.3)

### 10-1- Objet et problèmes de l'analyse cinématique.

L'objet de l'analyse cinématique des mécanismes, est l'étude de mouvement de chaque corps d'après le mouvement donné des chaînes initiales. On considère les corps solides formant le mécanisme comme étant d'une rigidité parfaite, et on suppose que les déplacements des corps par les déformations élastiques des corps sont faibles comparés aux déplacements subis par les corps eux-mêmes. En conséquence, on peut utiliser les relations de la cinématique rationnelle dans les problèmes d'analyse.

Les problèmes essentiels de la cinématique des mécanismes sont :

- Problème des positions des mécanismes qui consiste à déterminer les positions des chaînes par les chaînes initiales et les trajectoires suivies par les points caractéristiques des chaînes.

- Problème des vitesses qui consiste à déterminer les vitesses angulaires des chaînes et les vitesses linéaires de leurs points isolés.

- Problème des accélérations qui consiste à déterminer les accélérations angulaires des chaînes et les accélérations linéaires de leurs points isolés.

Les données initiales nécessaires pour résoudre ces problèmes sont le schéma cinématique du mécanisme et la I.M.C. correspondante.

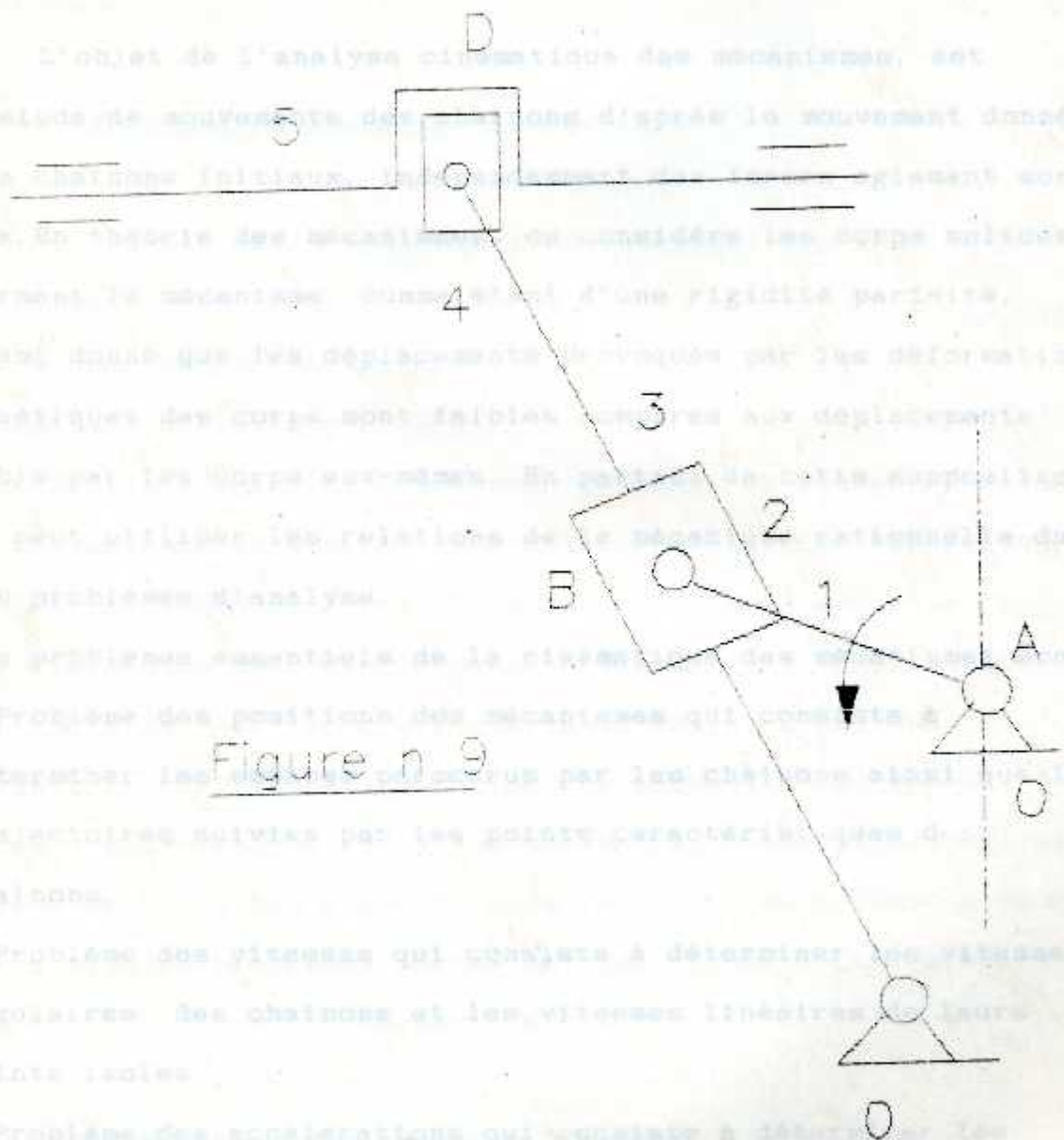


Figure n° 9

## 10- Analyse cinématique [1,2,3]

### 10-1- Objet et problèmes de l'analyse cinématique

L'objet de l'analyse cinématique des mécanismes, est l'étude de mouvements des chaînons d'après le mouvement donné des chaînons initiaux, indépendamment des forces agissant sur eux. En théorie des mécanismes, on considère les corps solides formant le mécanisme, comme étant d'une rigidité parfaite, étant donné que les déplacements provoqués par les déformations élastiques des corps sont faibles comparés aux déplacements subis par les corps eux-mêmes. En partant de cette supposition, on peut utiliser les relations de la mécanique rationnelle dans les problèmes d'analyse.

Les problèmes essentiels de la cinématique des mécanismes sont:

- Problème des positions des mécanismes qui consiste à déterminer les espaces parcourus par les chaînons ainsi que les trajectoires suivies par les points caractéristiques des chaînons.
- Problème des vitesses qui consiste à déterminer les vitesses angulaires des chaînons et les vitesses linéaires de leurs points isolés.
- Problème des accélérations qui consiste à déterminer les accélérations angulaires des chaînons et les accélérations linéaires de leurs points isolés.

Les données initiales nécessaires pour résoudre ces problèmes sont le schéma cinématique du mécanisme et la loi du mouvement

des chaînons initiaux. Habituellement, on analyse un cycle complet du mouvement du mécanisme pendant lequel ses chaînons prennent successivement toutes les positions possibles dans l'espace.

### 10-2- Méthodes de l'analyse cinématique

Il existe trois méthodes classiques qui sont les suivantes:

- Méthode graphique
- Méthode grapho-analytique
- Méthode analytique

On choisit l'une ou l'autre méthode selon le schéma structural du mécanisme, et d'après la précision exigée des résultats. Il est à noter que pour l'analyse des mécanismes modernes, la précision des deux premières méthodes devient insuffisante. De ce point de vue, la dernière méthode est plus convenable. Aussi, les relations analytiques permettent de mettre en évidence la liaison entre les paramètres cinématiques et les dimensions des éléments. Ces relations se prêtant aisément à la mise en programme, cette méthode est favorisée grâce à l'utilisation de l'informatique.

### 10-3- Cinématique des chaînons initiaux

Les lois de mouvements des chaînons initiaux sont définies par des lois ou fonctions des déplacements.

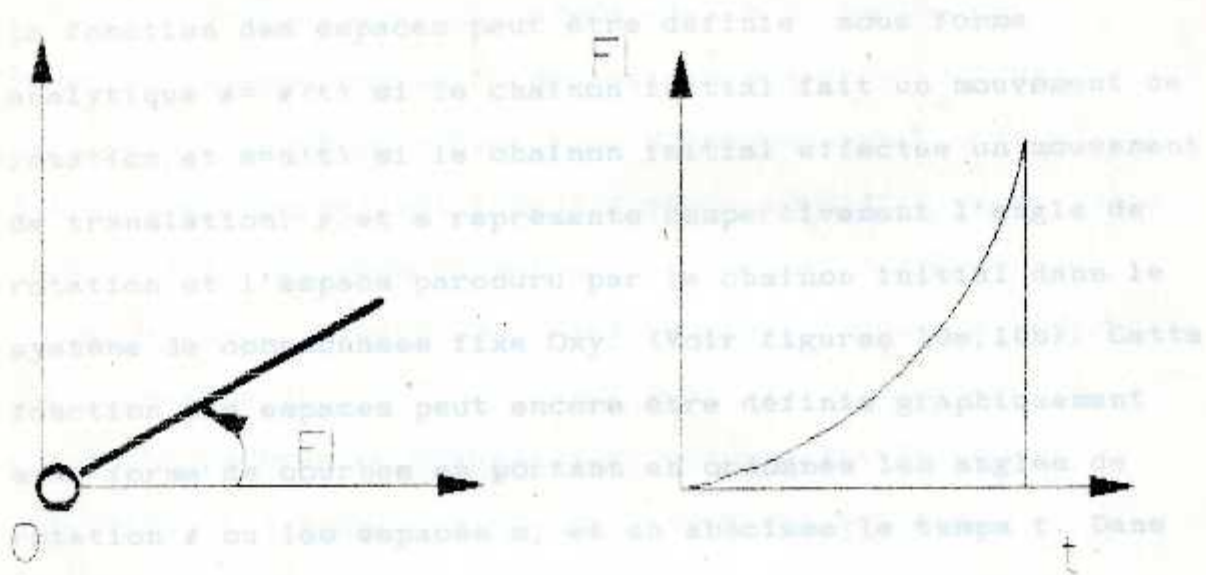


Figure 10a

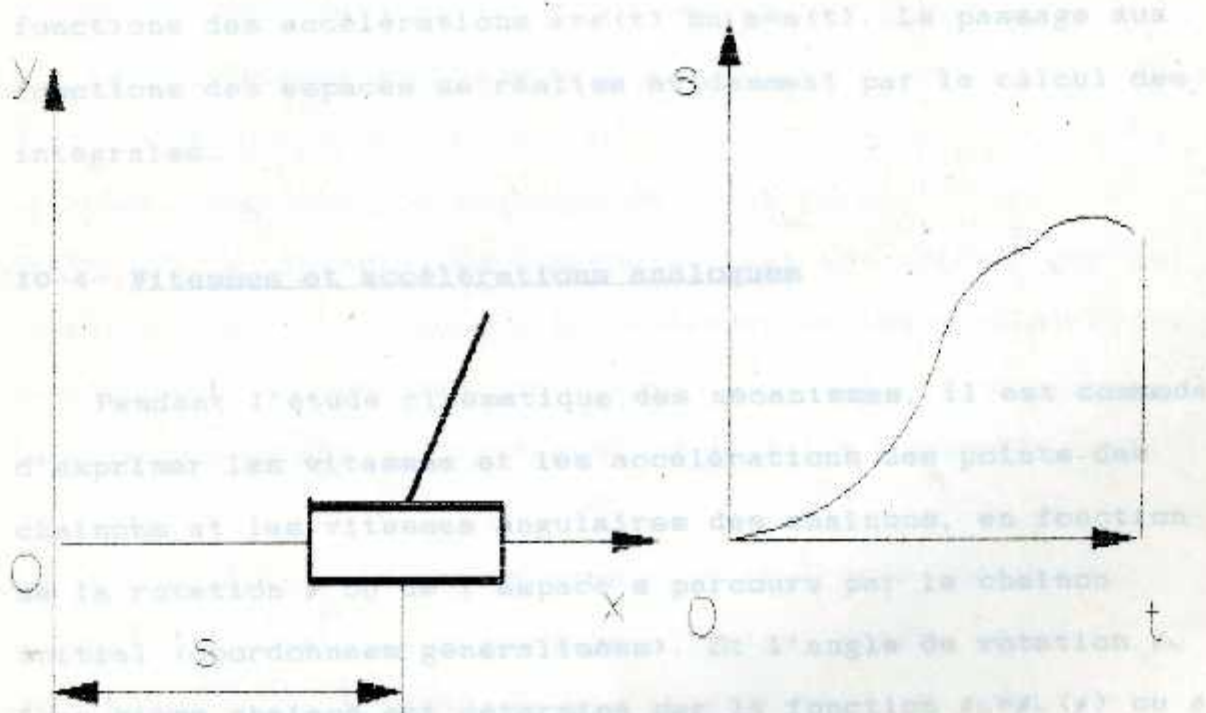


Figure 10b

La fonction des espaces peut être définie sous forme analytique  $\varphi = \varphi(t)$  si le chaînon initial fait un mouvement de rotation et  $s = s(t)$  si le chaînon initial effectue un mouvement de translation;  $\varphi$  et  $s$  représente respectivement l'angle de rotation et l'espace parcouru par le chaînon initial dans le système de coordonnées fixe Oxy. (Voir figures 10a, 10b). Cette fonction des espaces peut encore être définie graphiquement sous forme de courbes en portant en ordonnée les angles de rotation  $\varphi$  ou les espaces  $s$ , et en abscisse le temps  $t$ . Dans certains problèmes de construction, la loi du mouvement du chaînon initial peut être définie sous la forme de fonctions des vitesses  $\omega = \omega(t)$  ou  $v = v(t)$  ou encore sous la forme de fonctions des accélérations  $\dot{\omega} = \dot{\omega}(t)$  ou  $a = a(t)$ . Le passage aux fonctions des espaces se réalise évidemment par le calcul des intégrales.

#### 10-4- Vitesses et accélérations analogues

Pendant l'étude cinématique des mécanismes, il est commode d'exprimer les vitesses et les accélérations des points des chaînons et les vitesses angulaires des chaînons, en fonction de la rotation  $\varphi$  ou de l'espace  $s$  parcouru par le chaînon initial (coordonnées généralisées). Si l'angle de rotation  $\varphi_k$  d'un k-ième chaînon est déterminé par la fonction  $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$  ou  $\varphi$  est l'angle de rotation du chaînon initial (coordonnée généralisée), la vitesse angulaire  $\omega_k$  de ce chaînon peut être exprimée comme suit:

$\omega_k = d\phi_k / dt = (d\phi_k / d\phi) (d\phi / dt) = \phi_k' \cdot \omega$

$\omega$  est la vitesse angulaire du chaînon menant et  $\phi_k' = d\phi_k / d\phi$  est la vitesse angulaire analogue du k-ème chaînon.

Par analogie on obtient l'accélération angulaire  $\epsilon_k$  du k-ème chaînon par l'expression suivante:

$$\epsilon_k = d\omega_k / dt = d/dt(\omega \cdot \phi_k') = \phi_k' \cdot d\omega/dt + \omega \cdot (d\phi_k' / d\phi) \cdot (d\phi / dt)$$

$$\epsilon_k = \epsilon \cdot \phi_k' + \omega^2 \cdot \phi_k''$$

$\epsilon$  est l'accélération angulaire du chaînon initial et  $\phi_k''$  l'accélération angulaire analogue du k-ème chaînon.

On détermine de la même façon la vitesse et l'accélération linéaires d'un point quelconque m du k-ème élément dont la position est définie par le rayon vecteur  $r_m$ .

$$v_m = dr_m / dt = (dr_m / d\phi) (d\phi / dt) = \omega \cdot r_m'$$

$r_m'$  est la vitesse analogue du point m.

De même  $a_m = dv_m / dt = \omega^2 \cdot r_m'' + r_m' \cdot \epsilon$

$r_m''$  est l'accélération analogue du point m.

Si la loi du mouvement du chaînon initial est définie par la fonction  $s = s(t)$ , on cherche les vitesses et les accélérations analogues de la même manière.

Dans le cas général, l'accélération du point m possède trois composantes:

- une accélération d'entraînement qui peut être décomposée suivant une accélération normale orientée le long du rayon vecteur vers son origine, et une accélération tangentielle perpendiculaire au rayon vecteur,
- une accélération relative orientée suivant le rayon vecteur,

une accélération complémentaire (accélération de Coriolis) perpendiculaire au rayon vecteur.

Si le chaînon initial tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  constante, son accélération angulaire  $\epsilon$  est nulle, ce mouvement est appelé mouvement uniforme (permanent) du mécanisme. Les vitesses et accélérations du k<sup>i</sup>ème élément et de son point m deviennent:

$$\omega_k^P = \omega, \dot{\phi}_k^P; \quad \epsilon_k^P = \omega^2, \phi_k^P; \quad v_m^P = \omega, r_m^P; \quad a_m^P = \omega^2, r_m^P$$

Par ailleurs, si la vitesse angulaire  $\omega$  du chaînon initial est prise nulle, ce mouvement est appelé conventionnellement mouvement initial, la vitesse angulaire  $\omega_k$  et la vitesse linéaire  $v_m$  s'annulent, de même pour les accélérations normales, relatives et complémentaires; il reste:

$$\epsilon_k^P = \epsilon, \phi_k^P; \quad a_m^P = \epsilon, r_m^P$$

De cette façon, on peut considérer le mouvement réel de tout mécanisme, comme étant composé d'un mouvement uniforme

(permanent) et d'un mouvement initial. (D'après N. Joukowski).

Suivant cette méthode, en procédant à l'étude cinématique du mécanisme, on peut toujours séparer ces deux mouvements et écrire les expressions correspondantes.

-----



## 11- Analyse cinéto-statique

### 11-1- Problèmes inhérents au calcul des forces

Lorsque l'on résout les problèmes de calcul des forces, la  
L'étude dynamique a pour but d'examiner l'effet des forces  
sollicitant les différents éléments du mécanisme ou de la  
machine. On détermine les forces de frottement et les réactions  
des liaisons dans les couples cinématiques, les forces de  
résistance du milieu, les forces de l'inertie des éléments et  
les autres forces qui apparaissent.

L'importance pratique qui réside dans la connaissance des  
forces a déjà été montrée au début du polycopié dans le  
paragraphe 2.

Pour l'analyse des forces dans les mécanismes, on utilise le  
plus souvent pour le calcul, les équations d'équilibre des  
corps solides mises sous la forme de d'Alembert [3,12].

$$\sum F_{ext} + \sum F_i = 0$$

$$\sum M(F_{ext}) + \sum M(F_i) = 0$$

L'application du principe de d'Alembert au calcul des forces  
des mécanismes consiste à considérer non seulement les sollici-  
tations extérieures de chaque élément du mécanisme, mais aussi  
les forces d'inertie; cette méthode est souvent appelée calcul  
cinéto-statique des mécanismes [3].

## 11-2- Condition de détermination statique des chaînes cinématiques

Lorsque l'on résout les problèmes de calcul des forces, la loi de mouvement du chaînon initial est supposée connue, de même que les masses et les moments d'inertie des éléments. On peut donc toujours définir les forces d'inertie nécessaires au calcul des différentes forces lorsque l'on applique la méthode des équations d'équilibre.

Nous avons déjà examiné que les mécanismes plans ne peuvent comporter que des couples cinématiques inférieurs unimobiles de rotation ou de translation, et des couples cinématiques supérieurs bimobiles. Dans ces conditions, la formule de structure se présentait comme suit:

$$W=3N-2p_1-p_2$$

Dans un couple unimobile de rotation, la force de réaction résultante  $R$  passe par le centre de l'articulation en négligeant les forces de frottement qui y apparaissent. (Voir figure n°11).

L'intensité et la direction de cette réaction sont inconnues pour chaque position des éléments du mécanisme, le point d'application étant connu.

Dans un couple unimobile de translation, la réaction  $R$  est perpendiculaire à la direction du mouvement rectiligne (si les frottements sont négligés), mais son intensité et son point d'application sont inconnus. (Voir figure n°12).

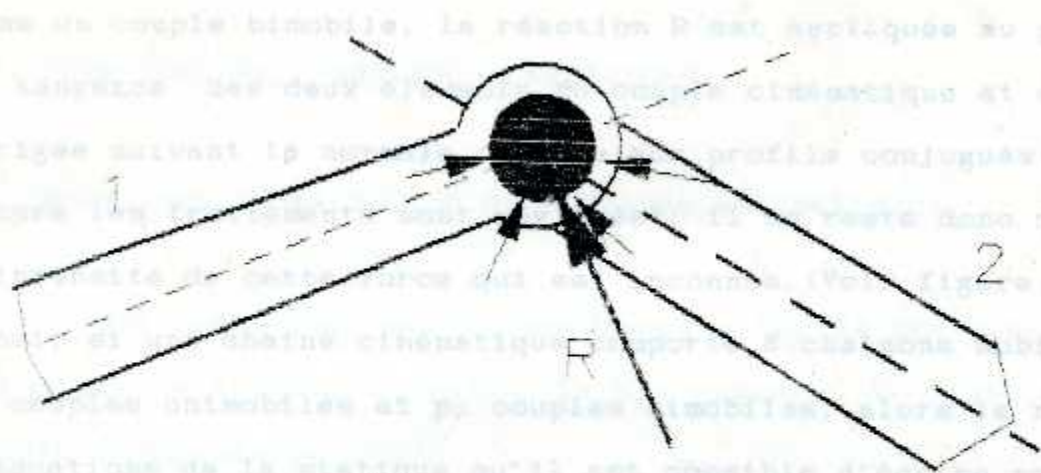


Figure n 11

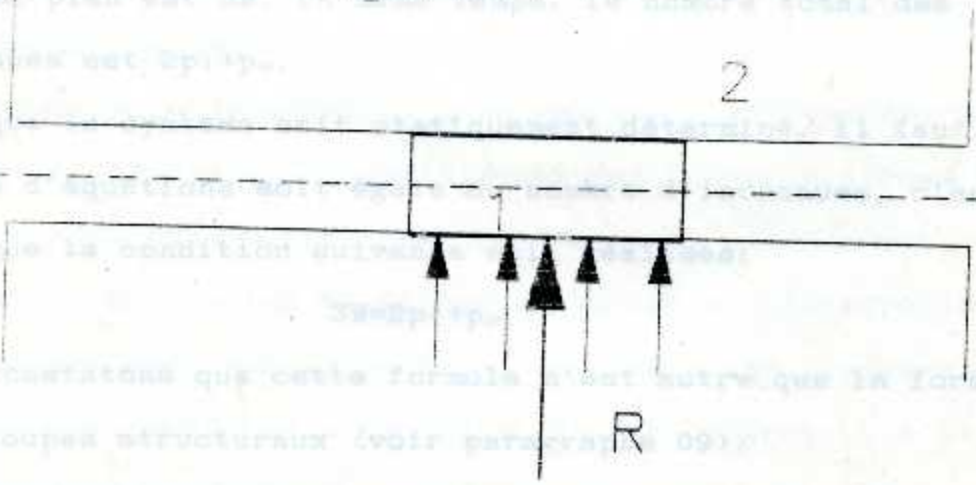


Figure n 12

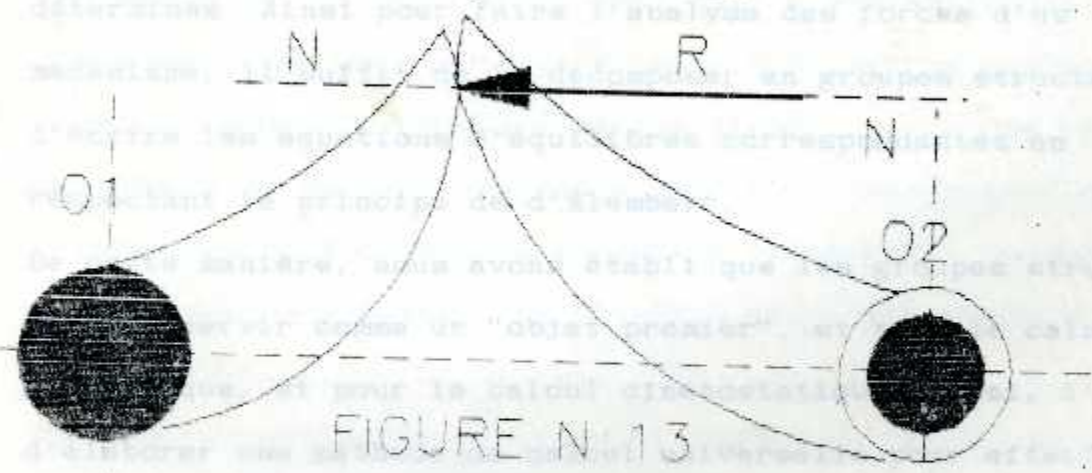


FIGURE N 13

Dans un couple bimobile, la réaction R est appliquée au point de tangence des deux éléments du couple cinématique et est dirigée suivant la normale commune aux profils conjugués (si encore les frottements sont négligés); il ne reste donc que l'intensité de cette force qui est inconnue. (Voir figure n°13). Ainsi, si une chaîne cinématique comporte N chaînons mobiles,  $p_1$  couples unimobiles et  $p_2$  couples bimobiles, alors le nombre d'équations de la statique qu'il est possible d'écrire pour un système plan est  $3N$ . En même temps, le nombre total des inconnues est  $2p_1 + p_2$ .

Pour que le système soit statiquement déterminé, il faut que le nombre d'équations soit égale au nombre d'inconnues, c'est-à-dire que la condition suivante soit réalisée:

$$3N = 2p_1 + p_2$$

Nous constatons que cette formule n'est autre que la formule des groupes structuraux (voir paragraphe 09).

Les groupes structuraux sont donc des systèmes statiquement déterminés. Ainsi pour faire l'analyse des forces d'un mécanisme, il suffit de le décomposer en groupes structuraux et d'écrire les équations d'équilibres correspondantes en respectant le principe de d'Alembert.

De cette manière, nous avons établi que les groupes structuraux peuvent servir comme un "objet premier", et pour le calcul cinématique, et pour le calcul cinétostatique. Ainsi, l'idée d'élaborer une méthode de calcul universelle pour effectuer l'analyse des mécanismes plans, en partant de leurs groupes structuraux est encore favorisée.

#### IV- EQUATIONS DE L'ANALYSE CINEMATIQUE

##### 12- Equations vectorielles des chaines cinématiques

Il est connu que dans le mouvement plan, la position d'un corps peut être déterminée par la connaissance de trois paramètres indépendants.

Dans l'étude cinématique par la méthode analytique, on utilise la méthode des contours vectoriels [1,2,3].

On recherche la solution du problème des positions des éléments du groupe structural en définissant des contours fermés dans un plan de référence défini par deux axes de coordonnées orthogonaux et on écrit les équations vectorielles correspondantes.

Les groupes structuraux sont des chaînes cinématiques ouvertes, aussi en joignant les points B et D (voir figures 1 à 5) à l'origine des axes dans chacun des cas, nous obtenons alors un contour fermé pour lequel on peut toujours établir des équations vectorielles. Ces équations ne sont autres que les relations entre les modules et les directions de ces vecteurs. Les fonctions de position des éléments des mécanismes seront déterminées en fonction du paramètre cinématique (coordonnée généralisée) qui définit la position de ou des chaînons initiaux.

Pour la recherche des vitesses et des accélérations des éléments des mécanismes, on calcule les vitesses et les accélérations analogues. Ces paramètres s'obtiennent par dérivation

une première fois et une deuxième fois par rapport à la coordonnée généralisée. des équations vectorielles traduisant le caractère du contour fermé .

### 13- Equations de la cinématique

#### 13-1-Groupe à deux entraîneurs de première espèce R.R.R.

Ce groupe structural comprend deux éléments 1 et 2 et trois couples cinématiques de rotation I, J et K.

On peut le joindre par les couples I et J à deux éléments  $m_1$  et  $K_2$  quelconques dans la chaîne cinématique du mécanisme principal (voir figure n°14).

Dans le plan de coordonnées, la position du couple I est définie par l'angle caractéristique  $F_1$  et le rayon vecteur  $r_1$ . La position du couple K est définie par l'angle caractéristique  $F_2$  et le rayon vecteur  $r_2$ . Les positions des points I et K sont donc connues; le problème se réduit donc à situer le point J. En regardant la construction de la figure n°15, on constate que le point J admet comme lieu géométrique de ses positions possibles, les deux points J' et J". Aussi, nous obtenons deux solutions possibles respectivement pour l'angle  $A_1$  et l'angle  $A_2$ . Cette possibilité d'obtenir deux mécanismes distincts avec les mêmes dimensions des éléments dépend des conditions de montage. Ces deux mécanismes obtenus ont des propriétés cinématiques différentes.

Y ↑

GROUPE R.R.P.

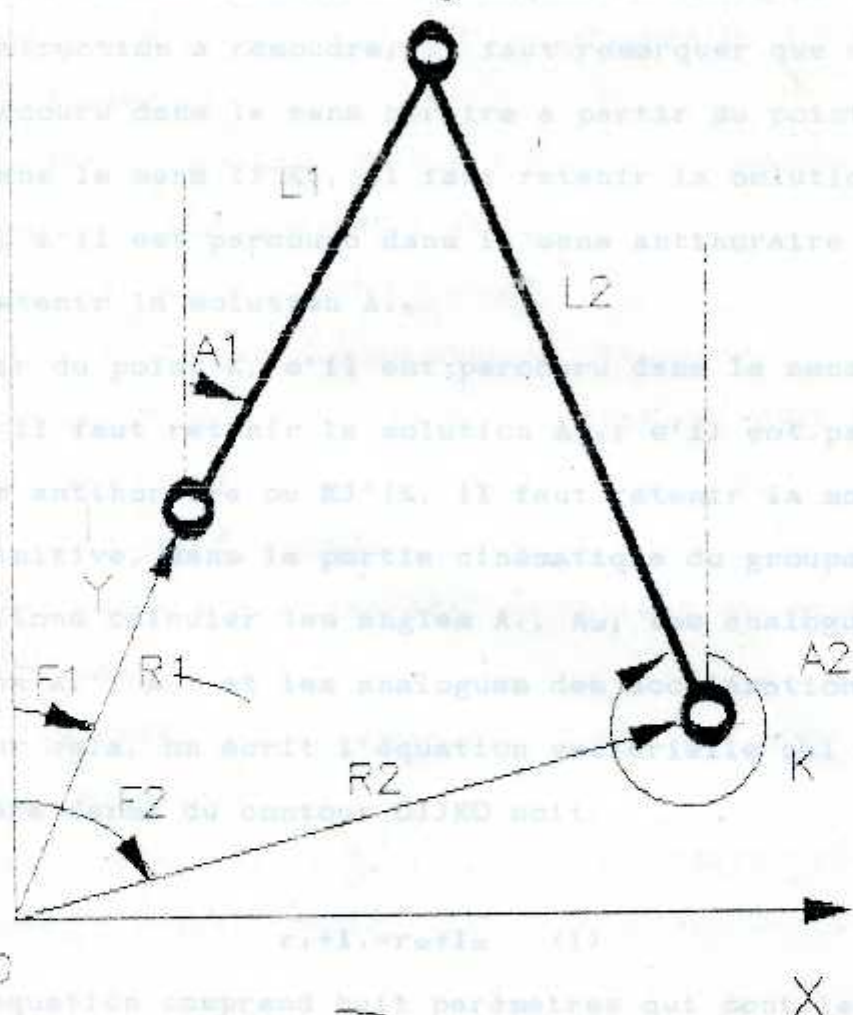


Figure n 14

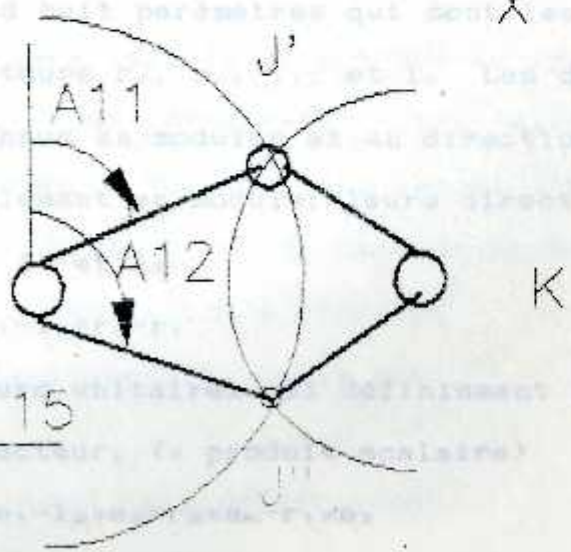


Figure n 15

Pour faire le choix de la position réelle et retenir une configuration déterminée du mécanisme en fonction du problème de construction à résoudre; il faut remarquer que si le groupe est parcouru dans le sens horaire à partir du point I, c'est-à-dire dans le sens IJ'KI, il faut retenir la solution  $A_{11}$ . Par contre, s'il est parcouru dans le sens antihoraire ou IJ''KI, il faut retenir la solution  $A_{12}$ .

A partir du point K, s'il est parcouru dans le sens horaire ou KJ''IK, il faut retenir la solution  $A_{21}$ ; s'il est parcouru dans le sens antihoraire ou KJ'IK, il faut retenir la solution  $A_{22}$ . En définitive, dans la partie cinématique du groupe R.R.R., nous allons calculer les angles  $A_1, A_2$ ; les analogues des vitesses  $A_1', A_2'$  et les analogues des accélérations  $A_1'', A_2''$ . Pour cela, on écrit l'équation vectorielle qui exprime le caractère fermé du contour OIJKO soit:

$$r_1 + l_1 = r_2 + l_2 \quad (1)$$

Cette équation comprend huit paramètres qui sont les modules et les directions des vecteurs  $r_1, r_2, l_1, l_2$ . Les deux premiers vecteurs sont connus en modules et en directions, les autres sont connus seulement en module; leurs directions seront connues par les angles  $A_1$  et  $A_2$ .

$$l_1 - l_2 = r_2 - r_1$$

On introduit des vecteurs unitaires qui définissent les directions de chaque vecteur; ( $\times$  produit scalaire)

$$l_1 \times e_1 - l_2 \times e_2 = r_2 \times e_k - r_1 \times e_1 \quad (2)$$

On élève au carré l'équation (2):



$$l_1^2 + l_2^2 - 2 \times l_1 \times l_2 \times \cos(A_1 - A_2) = r_2^2 + r_1^2 - 2 \times r_2 \times r_1 \times \cos(F_2 - F_1)$$

On pose:

$$T_1 = \cos(A_1 - A_2) = (l_1^2 + l_2^2 - r_2^2 - r_1^2 + 2 \times r_2 \times r_1 \times \cos(F_2 - F_1)) / (2 \times l_1 \times l_2)$$

soit  $A_1 - A_2 = \text{Arcos} T_1$

On projette l'équation (2) sur les axes de coordonnées X et Y:

$$l_1 \times \sin A_1 - l_2 \times \sin A_2 = r_2 \times \sin F_2 - r_1 \times \sin F_1$$

$$l_1 \times \cos A_1 - l_2 \times \cos A_2 = r_2 \times \cos F_2 - r_1 \times \cos F_1$$

On multiplie (2) par  $e_1$ , on obtient l'équation (3)

$$\cos A_1 \times (r_2 \times \cos F_2 - r_1 \times \cos F_1) + \sin A_1 \times (r_2 \times \sin F_2 - r_1 \times \sin F_1) = l_1 - l_2 \times T_1$$

On pose  $T_2 = l_1 - l_2 \times T_1$  ;  $T_3 = r_2 \times \cos F_2 - r_1 \times \cos F_1$  ;

$$T_4 = r_2 \times \sin F_2 - r_1 \times \sin F_1$$

En transformant l'équation (3), on obtient une équation du second degré

$(T_3^2 + T_4^2) \times \cos^2 A_1 - 2 \times T_3 \times T_4 \times \cos A_1 + T_3^2 - T_4^2 = 0$  qui admet les deux solutions suivantes:

$$\cos A_1' = [2 \times T_3 \times T_4 + (4 \times T_4^2 \times (T_3^2 - T_2^2 + T_4^2))^{1/2}] / 2 \times (T_3^2 + T_4^2)$$

$$\cos A_1'' = [2 \times T_3 \times T_4 - (4 \times T_4^2 \times (T_3^2 - T_2^2 + T_4^2))^{1/2}] / 2 \times (T_3^2 + T_4^2)$$

On obtient respectivement:

La solution à retenir sera définie en suivant la règle expliquée précédemment. Pour interpréter cette définition, on peut délimiter un intervalle  $(Q_1, Q_2)$  dans lequel l'angle  $A_1$  doit être compris. Les angles  $Q_1$  et  $Q_2$  dépendront des conditions de montage du mécanisme à étudier.

On calcule la valeur de l'angle  $A_2$  telle que:

$$A_2 = \text{arccos}((l_1 \times \cos A_1 - r_2 \times \cos F_2 + r_1 \times \cos F_1) / l_2)$$

Il est possible d'obtenir les trajectoires d'un point I, quelconque appartenant à l'élément 1 et d'un point K, quelconque appartenant à l'élément 2 dans le plan de coordonnées X, Y.

$$X(I_1) = r_1 \times \sin F_1 + l_1 \times \sin A_1 ; \quad Y(I_1) = r_1 \times \cos F_1 + l_1 \times \cos A_1$$

$$X(K_1) = r_2 \times \sin F_2 + l_2 \times \sin A_2 ; \quad Y(K_1) = r_2 \times \cos F_2 + l_2 \times \cos A_2$$

Pour déterminer la trajectoire du point J, il suffit de positionner soit I, soit K, en J.

Pour calculer les analogues des vitesses, on dérive l'équation (2) par rapport à la coordonnée généralisée FI (en supposant que FI est angle de rotation du chaînon initial).

$$r_1 \times e_{11}' \times F_1' + l_1 \times e_{11}' \times A_1' = r_2 \times e_{21}' \times F_2' + l_2 \times e_{21}' \times A_2' \quad (4)$$

$$r_1 \times e_{11}' \times F_1' + l_1 \times e_{11}' \times A_1' = r_2 \times e_{21}' \times F_2' + l_2 \times e_{21}' \times A_2' \quad (4)$$

On multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $e_1$  et

$e_2$ , et sachant que:  $e_1' \times e_1 = \sin(A_1 - F_1)$  ;  $e_2' \times e_1 = \sin(A_1 - F_2)$  ;

$e_2' \times e_1 = \sin(A_1 - A_2)$  ;  $e_1' \times e_2 = -\sin(F_1 - A_2)$  ;  $e_1' \times e_2 = 0$  ;

$e_1' \times e_2 = -\sin(A_1 - A_2)$  ;  $e_2' \times e_2 = -\sin(F_2 - A_2)$  ;  $e_2' \times e_2 = 0$

On obtient respectivement:

Dérivons maintenant l'équation (4) par rapport à FI pour

$$A_2' = (r_1 \times F_1' \times \sin(A_1 - F_1) - r_2 \times F_2' \times \sin(A_1 - F_2)) / l_2 \times \sin(A_1 - A_2) ;$$

$$A_2' = dA_2 / dFI$$

$$r_1 \times e_{11}' \times F_1' + l_1 \times e_{11}' \times A_1' = r_2 \times e_{21}' \times F_2' + l_2 \times e_{21}' \times A_2'$$

$$A_1' = (r_2 \times F_2' \times \sin(A_2 - F_2) - r_1 \times F_1' \times \sin(A_2 - F_1)) / l_1 \times \sin(A_2 - A_1) ;$$

$$A_1' = dA_1 / dFI ; \quad F_1' = dF_1 / dFI ; \quad F_2' = dF_2 / dFI$$

Les vitesses angulaires des éléments 1 et 2 seront:

$$\omega_1 = dA_1 / dt = (dA_1 / dFI) \times (dFI / dt) = A_1' \times \omega$$

$$\omega_2 = dA_2 / dt = (dA_2 / dFI) \times (dFI / dt) = A_2' \times \omega$$

$\omega = d\Phi/dt$  représente la vitesse angulaire du chaînon initial.

Pour calculer les vitesses linéaires des points des éléments, on multiplie l'équation (4) par  $\omega$ , on obtient:

$V(J) = V(I) + V(J/I) = V(K) + V(J/K)$  dans laquelle on a:

$$V(I) = r_1 \times \omega_1 \times e_{1'} ; \quad V(J/I) = l_1 \times \omega_1 \times e_{1'} ; \quad V(K) = r_2 \times \omega_2 \times e_{2'} ;$$

$$V(J/K) = l_2 \times \omega_2 \times e_{2'}$$

On écrit les vitesses des points  $I_1$  et  $K_1$  en projection sur les axes de coordonnées X et Y, sachant que:

$$e_1 = Y \times \cos F_1 + X \times \sin F_1 ; \quad e_{1'} = -Y \times \sin F_1 + X \times \cos F_1$$

$$e_{2'} = Y \times \cos F_2 + X \times \sin F_2 ; \quad e_{2'} = -Y \times \sin F_2 + X \times \cos F_2$$

$$e_1 = Y \times \cos A_1 + X \times \sin A_1 ; \quad e_{1'} = -Y \times \sin A_1 + X \times \cos A_1$$

$$e_2 = Y \times \cos A_2 + X \times \sin A_2 ; \quad e_{2'} = -Y \times \sin A_2 + X \times \cos A_2$$

$$V_x(I_1) = r_1 \times \omega \times F_1' \times \cos F_1 + l_1 \times \omega_1 \times \cos A_1$$

$$V_y(I_1) = -(r_1 \times \omega \times F_1' \times \sin F_1 + l_1 \times \omega_1 \times \sin A_1)$$

$$V_x(K_1) = r_2 \times \omega \times F_2' \times \cos F_2 + l_2 \times \omega_2 \times \cos A_2$$

$$V_y(K_1) = -(r_2 \times \omega \times F_2' \times \sin F_2 + l_2 \times \omega_2 \times \sin A_2)$$

Pour déterminer la vitesse du point J, on positionne  $I_1$  ou  $K_1$  en J.

Dérivons maintenant l'équation (4) par rapport à  $\Phi$  pour calculer les analogues des accélérations.

Pour calculer les accélérations linéaires des points des

$$r_1 \times e_{1''} \times F_1'^2 + r_1 \times e_{1'} \times F_1'' + l_1 \times e_{1''} \times A_1'^2 + l_1 \times e_{1'} \times A_1'' = \dots$$

$$r_2 \times e_{2''} \times F_2'^2 + r_2 \times e_{2'} \times F_2'' + l_2 \times e_{2''} \times A_2'^2 + l_2 \times e_{2'} \times A_2'' \quad (5)$$

En multipliant scalairement par  $e_1$  et  $e_{2'}$ , avec:

$$e_{1''} \times e_1 = -\cos(F_1 - A_1) ; \quad e_{1'} \times e_1 = \sin(A_1 - F_1) ; \quad e_{1''} \times e_{1'} = -1 ;$$

$$e_{2''} \times e_1 = -\cos(F_2 - A_1) ; \quad e_{2'} \times e_1 = \sin(A_1 - F_2) ;$$

$$e_2'' \times e_1 = -\cos(A_2 - A_1) ; e_2' \times e_1 = \sin(A_1 - A_2) ;$$

$$e_1'' \times e_2 = -\cos(F_1 - A_2) ; e_1' \times e_2 = \sin(A_2 - F_1) ; \text{ et } F_1 \text{ en projection}$$

$$e_1'' \times e_2 = -\cos(A_1 - A_2) ; e_1' \times e_2 = \sin(A_2 - A_1) ; \text{ d'où :}$$

$$e_2'' \times e_2 = -\cos(F_2 - A_2) ; e_2' \times e_2 = \sin(A_2 - F_2) ; e_2'' \times e_2 = -1 ;$$

On obtient respectivement :

$$A_2'' = -\dot{\omega}^2 \cos A_1 - \omega^2 \sin A_1$$

$$A_2'' = (1/l_2 \times \sin(A_1 - A_2)) \times (-r_1 \times F_1' \times \cos(F_1 - A_1) + r_1 \times F_1'' \times \sin(A_1 - F_1) - \\ - l_1 \times A_1'' + r_2 \times F_2' \times \cos(F_2 - A_1) - r_2 \times F_2'' \times \sin(A_1 - F_2) + \\ + l_2 \times A_2' \times \cos(A_2 - A_1))$$

$$A_1'' = \dot{\omega}^2 \sin F_1 - \omega^2 \cos F_1 - \dot{\omega}^2 \sin F_2$$

$$A_1'' = (1/l_1 \times \sin(A_2 - A_1)) \times (-r_2 \times F_2' \times \cos(F_2 - A_2) + r_2 \times F_2'' \times \sin(A_2 - F_2) - \\ - l_2 \times A_2'' + r_1 \times F_1' \times \cos(F_1 - A_2) - r_1 \times F_1'' \times \sin(A_2 - F_1) + \\ + l_1 \times A_1' \times \cos(A_1 - A_2))$$

$$A_1'' = \dot{\omega}^2 \sin F_2 - \omega^2 \cos F_2 - \dot{\omega}^2 \sin F_1$$

$$A_1'' = d^2 A_1 / dF_1^2 ; A_2'' = d^2 A_2 / dF_1^2$$

$$F_1'' = d^2 F_1 / dF_1^2 ; F_2'' = d^2 F_2 / dF_1^2$$

Les accélérations angulaires des éléments 1 et 2 seront :

$$\epsilon_1 = d\omega_1 / dt = \epsilon \times A_1' + \omega^2 \times A_1''$$

$$\epsilon_2 = d\omega_2 / dt = \epsilon \times A_2' + \omega^2 \times A_2''$$

$\epsilon$  représente l'accélération angulaire du chaînon initial.

Pour calculer les accélérations linéaires des points des

éléments, on multiplie l'équation (5) par  $\omega^2$ , on obtient :

$$a(J) = a''(I) + a^t(I) + a''(J/I) + a^t(J/I), \text{ ou bien}$$

$$a(J) = a''(K) + a^t(K) + a''(J/K) + a^t(J/K)$$

$$\text{avec : } a''(I) = \omega^2 \times r_1 \times F_1' \times e_1'' ; a^t(I) = \omega^2 \times r_1 \times F_1'' \times e_1'$$

$$a''(K) = \omega^2 \times r_2 \times F_2' \times e_2'' ; a^t(K) = \omega^2 \times r_2 \times F_2'' \times e_2'$$

$$a''(J/I) = \omega^2 \times l_1 \times A_1' \times e_1'' ; a^t(J/I) = \omega^2 \times l_1 \times A_1'' \times e_1'$$

$$a^{(J/K)} = \omega^2 \times l_{12} \times A_2'^2 \times e_2'' ; a^{(J/K)} = \omega^2 \times l_{12} \times A_2'' \times e_2'$$

On écrit les accélérations des points I<sub>1</sub> et K<sub>1</sub> en projection sur les axes de coordonnées X et Y, sachant que:

$$e_1'' = -Y \times \cos F_1 - X \times \sin F_1$$

$$e_2'' = -Y \times \cos F_2 - X \times \sin F_2$$

$$e_1' = -Y \times \cos A_1 - X \times \sin A_1$$

$$e_2' = -Y \times \cos A_2 - X \times \sin A_2$$

$$a_x(I_1) = \omega^2 \times [r_{11} \times (-F_1'^2 \times \sin F_1 + F_1'' \times \cos F_1) + II_{11} \times (-A_1'^2 \times \sin A_1 + A_1'' \times \cos A_1)]$$

$$a_y(I_1) = \omega^2 \times [r_{11} \times (-F_1'^2 \times \cos F_1 - F_1'' \times \sin F_1) + II_{11} \times (-A_1'^2 \times \cos A_1 - A_1'' \times \sin A_1)]$$

$$a_x(K_1) = \omega^2 \times [r_{12} \times (-F_2'^2 \times \sin F_2 + F_2'' \times \cos F_2) + KK_{11} \times (-A_2'^2 \times \sin A_2 + A_2'' \times \cos A_2)]$$

$$a_y(K_1) = \omega^2 \times [r_{12} \times (-F_2'^2 \times \cos F_2 - F_2'' \times \sin F_2) + KK_{11} \times (-A_2'^2 \times \cos A_2 - A_2'' \times \sin A_2)]$$

Pour déterminer l'accélération du point J, on le positionne en I<sub>1</sub> ou K<sub>1</sub>.

### 13-2- Groupe à deux entraîneurs de deuxième espèce R.R.T.

Ce groupe structural comprend deux chainons 3 et 4; deux couples cinématiques de rotation E et F; un couple cinématique de translation G.

On peut le joindre par les couples G et E à deux éléments m<sub>3</sub> et K<sub>4</sub> quelconques dans la chaîne cinématique du mécanisme principal.

GRUPE R.R.T.

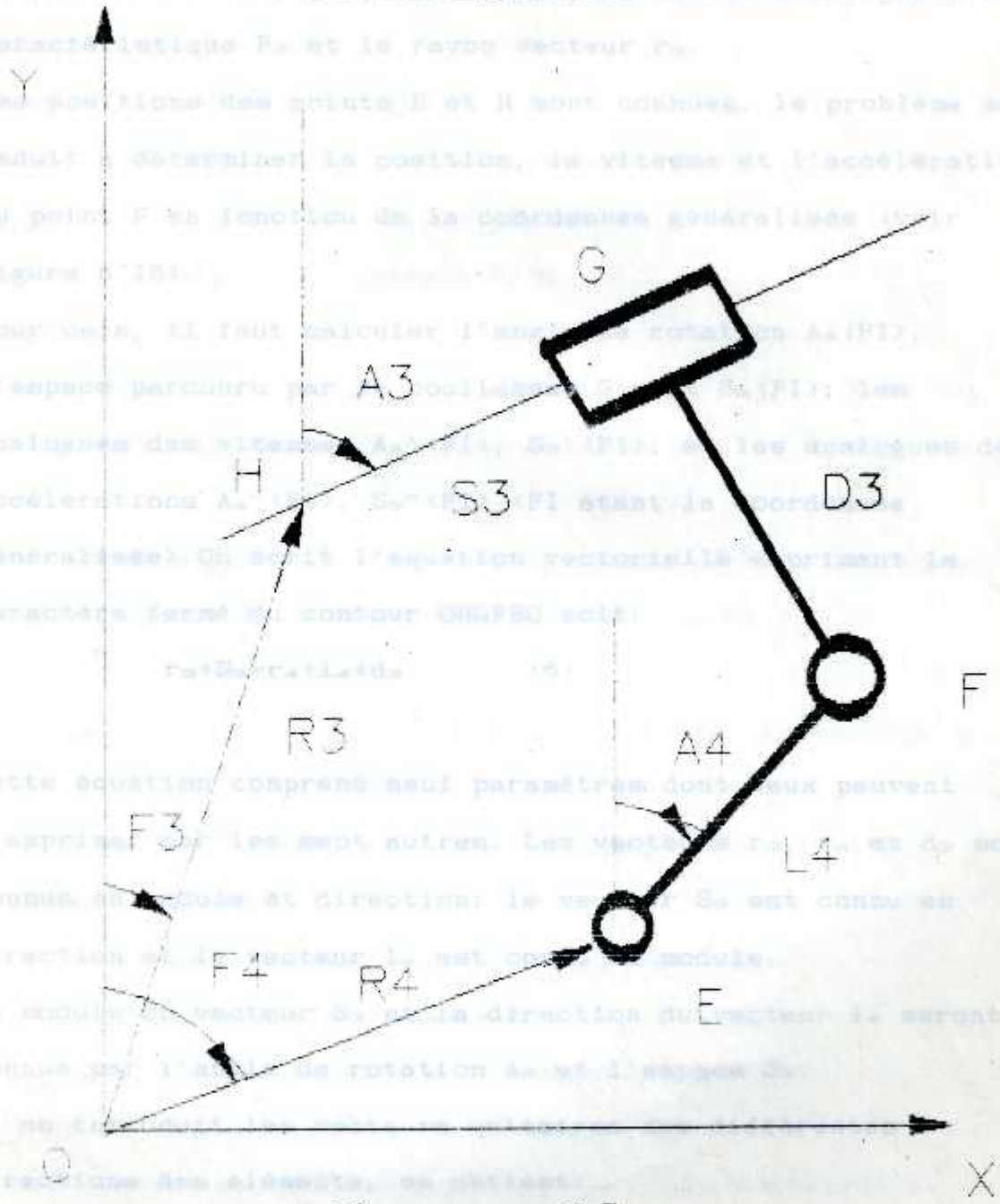


Figure n 16

Dans le plan de coordonnées, la position du couple E est définie par l'angle caractéristique  $F_4$  et le rayon vecteur  $r_4$ . La position d'un point H de la coulisse est définie par l'angle caractéristique  $F_3$  et le rayon vecteur  $r_3$ .

Les positions des points B et H sont connues, le problème se réduit à déterminer la position, la vitesse et l'accélération du point E en fonction de la coordonnée généralisée (voir figure n°16).

Pour cela, il faut calculer l'angle de rotation  $A_4(FI)$ , l'espace parcouru par le coulisseau G soit  $S_3(FI)$ ; les analogues des vitesses  $A_4'(FI)$ ,  $S_3'(FI)$ ; et les analogues des accélérations  $A_4''(FI)$ ,  $S_3''(FI)$  ( $FI$  étant la coordonnée généralisée). On écrit l'équation vectorielle exprimant le caractère fermé du contour OHGFEO soit:

$$r_3 + S_3 = r_4 + l_4 + d_3 \quad (6)$$

Cette équation comprend neuf paramètres dont deux peuvent s'exprimer par les sept autres. Les vecteurs  $r_3$ ,  $r_4$  et  $d_3$  sont connus en module et direction; le vecteur  $S_3$  est connu en direction et le vecteur  $l_4$  est connu en module.

Le module du vecteur  $S_3$  et la direction du vecteur  $l_4$  seront connus par l'angle de rotation  $A_4$  et l'espace  $S_3$ .

Si on introduit les vecteurs unitaires des différentes directions des éléments, on obtient:

$$r_3 x e_H + S_3 x e_S = r_4 x e_E + l_4 x e_L + d_3 x e_d \quad (7)$$

La direction du vecteur  $e_3$  est la direction du vecteur  $e_3'$  tournée de  $3\pi/2$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

En multipliant scalairement l'équation (7) par  $e_3'$  et  $e_3$ , on obtient respectivement:

$$r_3 \times \sin(F_3 - A_3) = r_4 \times \sin(F_4 - A_3) + l_4 \times \sin(A_4 - A_3) - d_3$$

$$r_3 \times \cos(F_3 - A_3) + S_3 = r_4 \times \cos(F_4 - A_3) + l_4 \times \cos(A_4 - A_3)$$

On obtient pour l'angle  $A_4$  en posant:

$$C_3 = 1/l_4 \times [r_3 \times \sin(F_3 - A_3) - r_4 \times \sin(F_4 - A_3) + d_3]$$

$$A_4 = \arcsin C_3 + A_3$$

et pour l'espace:

$$S_3 = r_4 \times \cos(F_4 - A_3) + l_4 \times \cos(A_4 - A_3) - r_3 \times \cos(F_3 - A_3)$$

Pour calculer les analogues des vitesses, on dérive l'équation (7) par rapport à la coordonnée généralisée FI.

$$r_3 \times F_3' \times e_{31}' + S_3' \times e_{32} + S_3 \times A_3' \times e_{33}' = r_4 \times F_4' \times e_{41}' + l_4 \times A_4' \times e_{42}' + d_3 \times A_3' \times e_{33}$$

$$Y(G/G_3) = r_3 \times F_3' \times e_{31}' ; Y(G_2/G) = S_3' \times e_{32} ; Y(G/G_3) = r_4 \times F_4' \times e_{41}' + l_4 \times A_4' \times e_{42}' + d_3 \times A_3' \times e_{33} \quad (8)$$

on a:  $e_{31} = e_{41}'$  ;  $F_3' = dF_3/dFI$  ;  $F_4' = dF_4/dFI$  ;  $A_3' = dA_3/dFI$  ;

$$A_4' = dA_4/dFI$$

$$e_{41} = Y \times \cos F_3 + X \times \sin F_3 ; e_{41}' = -Y \times \sin F_3 + X \times \cos F_3$$

$$e_{32} = Y \times \cos A_3 + X \times \sin A_3 ; e_{32}' = -Y \times \sin A_3 + X \times \cos A_3$$

$$e_{42} = Y \times \cos F_4 + X \times \sin F_4 ; e_{42}' = -Y \times \sin F_4 + X \times \cos F_4$$

$$e_{43} = Y \times \cos A_4 + X \times \sin A_4 ; e_{43}' = -Y \times \sin A_4 + X \times \cos A_4$$

En multipliant scalairement par les vecteurs unitaires  $e_3$  et  $e_3'$ , sachant que:  $e_{41}' \times e_{32} = \sin(A_3 - F_3)$  ;  $e_{32} \times e_{32} = 1$  ;  $e_{32}' \times e_{32} = 0$  ;

$$e_{42}' \times e_{32} = \sin(A_3 - F_4) ; e_{43}' \times e_{32} = \sin(A_3 - A_4) ; e_{41}' \times e_{33}' = \cos(F_3 - A_3) ;$$

$$e_{42}' \times e_{33}' = \cos(F_4 - A_3) ; e_{43}' \times e_{33}' = \cos(A_4 - A_3)$$



On obtient respectivement: vitesse du point G (coulisseau) et projection sur les axes de coordonnées X et Y:

$$A_4' = (r_{33} \times F_{33}' \times \cos(F_{33} - A_{33}) + S_{33} \times A_{33}' - r_{44} \times F_{44}' \times \cos(F_{44} - A_{44})) / l_{44} \times \cos(A_{44} - A_{33})$$

$$S_3' = r_{44} \times F_{44}' \times \sin(A_{33} - F_{44}) + l_{44} \times A_4' \times \sin(A_{33} - A_{44}) - r_{33} \times F_{33}' \times$$

On dérive maintenant l'équation (7) par rapport au temps:  $l_{33} \times \sin(A_{33} - F_{33}) + d_{33} \times A_{33}'$

La vitesse angulaire de l'élément 4 est:

$$\omega_4 = dA_4 / dt = (dA_4 / dF_1) \times (dF_1 / dt) = A_4' \times \omega$$

$\omega$  est la vitesse angulaire du chaînon initial.

Pour calculer les vitesses linéaires des points des chaînons, il suffit de dériver l'équation (7) par rapport au temps ou de multiplier l'équation (8) par  $\omega$ ; ce qui donne:

$$V(H) + V(G_3/H) + V(G/G_3) = V(E) + V(F/E) + V(G/F)$$

$G_3$  est un point géométrique de la coulisse qui coïncide à chaque instant avec le point G du coulisseau;  $V(G/G_3)$  est la vitesse relative du coulisseau par rapport à la coulisse.

$$V(H) = \omega \times r_{33} \times F_{33}' \times e_{H1}' ; V(G_3/H) = \omega \times S_{33} \times A_{33}' \times e_{33}' ; V(G/G_3) = \omega \times S_3' \times e_{33}'$$

Lorsqu'on procède à l'analyse cinématique des groupes de classe II comportant des couples cinématiques de translation, il est commode de transformer les schémas de ces groupes de telle façon que les axes de translation passent par le centre de rotation. Dans le groupe structural R.R.T., il est possible de déplacer l'axe de glissement de l'élément 3 parallèlement à lui-même de façon à le faire passer par le centre du couple de rotation F; cette transformation ne change pas les propriétés cinématiques.

On peut donc écrire la vitesse du point G (coulisseau) en projection sur les axes de coordonnées X et Y:

$$V_x(G) = \omega \times [r_{33} \times F_3' \times \cos F_3 + S_3' \times \sin A_3 + S_3 \times A_3' \times \cos A_3 + d_3 \times A_3']$$

$$V_y(G) = \omega \times [-r_{33} \times F_3' \times \sin F_3 + S_3' \times \cos A_3 - S_3 \times A_3' \times \sin A_3]$$

On dérive maintenant l'équation (7) par rapport à FI pour calculer les analogues des accélérations.

On multiplie l'équation (9) par  $e_3''$

$$r_{33} \times F_3' \times e_{31}'' + r_{33} \times F_3'' \times e_{31}' + S_3'' \times e_{32} + 2 \times S_3' \times A_3' \times e_{32}' + S_3 \times A_3'' \times e_{32}' + S_3 \times A_3' \times e_{32}'' + r_{44} \times F_4' \times e_{41}'' + r_{44} \times F_4'' \times e_{41}' + l_4 \times A_4' \times e_{42}'' + l_4 \times A_4'' \times e_{42}' + d_3 \times A_3' \times e_{32}' + d_3 \times A_3'' \times e_{32} \quad (9)$$

$$e_{31}'' = -Y \times \cos F_3 - X \times \sin F_3 ; e_{32}'' = -Y \times \cos F_4 - X \times \sin F_4 ;$$

$$e_{31}' = -Y \times \cos A_3 - X \times \sin A_3 ; e_{32}' = -Y \times \cos A_4 - X \times \sin A_4 ;$$

On multiplie scalairement cette équation par  $e_{31}$  et  $e_{31}'$ :

$$e_{31}'' \times e_{31} = -\cos(A_3 - F_3) ; e_{31}' \times e_{31} = \sin(A_3 - F_3) ; e_{32}'' \times e_{32} = -1 ; e_{32}' \times e_{32} = 0 ;$$

$$e_{31}'' \times e_{32} = -\cos(F_4 - A_3) ; e_{31}' \times e_{32} = \sin(A_3 - F_4) ; e_{32}'' \times e_{32} = -\cos(A_4 - A_3) ;$$

$$e_{32}' \times e_{32} = \sin(A_3 - A_4)$$

$$e_{31}'' \times e_{32}' = \sin(A_3 - F_3) ; e_{31}' \times e_{32}' = \cos(F_3 - A_3) ; e_{32}'' \times e_{32}' = \sin(A_3 - F_4) ;$$

$$e_{32}' \times e_{32}' = \cos(F_4 - A_3) ; e_{32}'' \times e_{32}' = \sin(A_3 - A_4) ; e_{32}' \times e_{32}' = \cos(A_4 - A_3) ;$$

On calcule respectivement: c'est l'accélération de Coriolis

perpendiculaire à la direction de la coulisse.

$$A_4'' = [1/l_4 \times \cos(A_4 - A_3)] \times [r_{33} \times F_3' \times \sin(A_3 - F_3) + r_{33} \times F_3'' \times \cos(F_3 - A_3) + 2 \times S_3' \times A_3' + S_3 \times A_3'' - r_{44} \times F_4' \times \sin(A_3 - F_4) - r_{44} \times F_4'' \times \cos(F_4 - A_3) - l_4 \times A_4' \times \sin(A_3 - A_4) - d_3 \times A_3' \times e_{32}']$$

Accélération linéaire du point G de coulisseau en projection sur les axes de coordonnées X et Y:

$$S_3'' = r_{32} \times F_3' \times \cos(A_3 - F_3) - r_{32} \times F_3'' \times \sin(A_3 - F_3) + S_3 \times A_3' \times \omega^2 - r_{42} \times F_4' \times \omega^2 \times \cos(F_4 - A_3) + r_{42} \times F_4'' \times \sin(A_3 - F_4) - l_4 \times A_4' \times \omega^2 \times \cos(A_4 - A_3) + l_4 \times A_4'' \times \sin(A_3 - A_4) + d_3 \times A_3''$$

$$A_4'' = d^2 A_4 / dF_1^2 ; S_3'' = d^2 S_3 / dF_1^2 ; F_3'' = d^2 F_3 / dF_1^2 ; F_4'' = d^2 F_4 / dF_1^2 ; A_3'' = d^2 A_3 / dF_1^2$$

L'accélération angulaire du chaînon 4 est:  $\epsilon_4 = \epsilon \times A_4' + \omega^2 \times A_4''$

Pour calculer les accélérations linéaires des points des chaînons, on multiplie l'équation (9) par  $\omega^2$ .

Ce groupe structural comprend les chaînons 5 et 6; deux

$$a(G) = a(H) + a''(G_3/H) + a^*(G_3/H) + a^r(G/G_3) + a^c(G/G_3) =$$

$$a(E) + a''(F/E) + a^*(F/E) + a^r(G/F) + a^c(G/F)$$

de translation

On peut le résoudre par les couples 5 et 6 à deux éléments et  $a(H) = \omega^2 \times r_{32} \times (F_3' \times e_{32}'' + F_3'' \times e_{32}')$ ; l'accélération du point H est la composition d'une accélération normale et d'une accélération tangentielle au rayon vecteur position  $r_{32}$ .

$a(G_3/H) = a''(G_3/H) + a^*(G_3/H) = \omega^2 \times S_3 \times (A_3' \times e_{33}'' + A_3'' \times e_{33}')$ ;  $G_3$  est un point géométrique de la coulisse qui coïncide à chaque instant avec le point G du coulisseau.

$a^r(G/G_3) = \omega^2 \times S_3'' \times e_{33}$ ; c'est l'accélération relative du point G/ $G_3$  dans la direction de la coulisse (axe de translation).

$a^c(G/G_3) = 2 \times \omega^2 \times S_3' \times A_3' \times e_{33}'$ ; c'est l'accélération de Coriolis perpendiculaire à la direction de la coulisse.

Accélération angulaire de l'élément 4:  
 $\epsilon_4 = d\omega_4 / dt = \epsilon \times A_4' + \omega^2 \times A_4''$ ;  $\epsilon$  est l'accélération angulaire du chaînon initial.

Accélération linéaire du point G du coulisseau en projection sur les axes de coordonnées X et Y:

$$a_x(G) = \omega^2 \times [r_{CB} \times (-F_B' \times \sin F_B + F_B'' \times \cos F_B) + S_B'' \times \sin A_B + 2 \times S_B' \times A_B' \times \cos A_B + S_B \times (-A_B' \times \sin A_B + A_B'' \times \cos A_B)]$$

$$a_y(G) = \omega^2 \times [r_{CB} \times (-F_B' \times \cos F_B - F_B'' \times \sin F_B) + S_B'' \times \cos A_B - 2 \times S_B' \times A_B' \times \sin A_B + S_B \times (-A_B' \times \cos A_B - A_B'' \times \sin A_B)]$$

### 13-3- Groupe à deux entraîneurs de troisième espèce R. I. R.

Ce groupe structural comprend deux chainons 5 et 6; deux couples cinématiques de rotation B et D; un couple cinématique de translation C.

On peut le joindre par les couples B et D à deux éléments  $m_5$  et  $K_6$  quelconques dans la chaîne cinématique du mécanisme principal. Dans le plan de coordonnées, la position du couple B est définie par l'angle caractéristique  $F_B$  et le rayon vecteur  $r_B$ . La position du couple D est définie par l'angle caractéristique  $F_D$  et le rayon vecteur  $r_D$ . Ces paramètres étant connus, le problème se réduit à la détermination de la position, de la vitesse et de l'accélération du point C du coulisseau. (Voir figure n°17).

Si on fait passer l'axe de translation (coulisse) par le centre du couple de rotation B, cette transformation ne change pas les propriétés cinématiques du groupe structural. Aussi, le problème sera de déterminer l'angle de rotation  $A_B(FI)$ , l'espace parcouru par le coulisseau C soit  $S_B(FI)$ ; les analogues des vitesses  $A_B'(FI)$ ,  $S_B'(FI)$  et les analogues des accélérations  $A_B''(FI)$ ,  $S_B''(FI)$ .

GROUPE R.T.R.

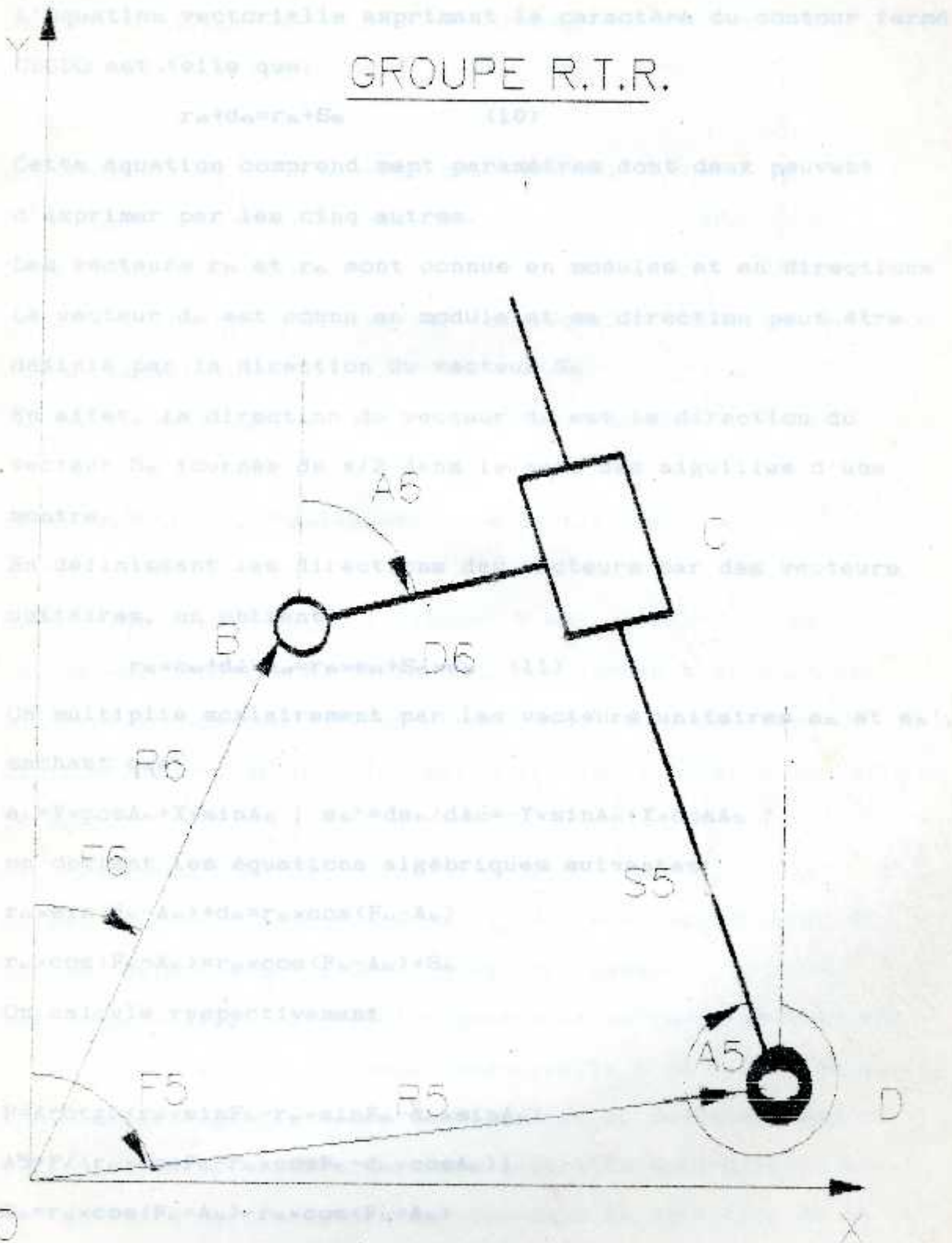


Figure n 17

L'équation vectorielle exprimant le caractère du contour fermé OBCDO est telle que:

$$r_e + d_e = r_s + S_e \quad (10)$$

Cette équation comprend sept paramètres dont deux peuvent s'exprimer par les cinq autres.

Les vecteurs  $r_s$  et  $r_e$  sont connus en modules et en directions. Le vecteur  $d_e$  est connu en module et sa direction peut être définie par la direction du vecteur  $S_e$ .

En effet, la direction du vecteur  $d_e$  est la direction du vecteur  $S_e$  tournée de  $\pi/2$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

En définissant les directions des vecteurs par des vecteurs unitaires, on obtient:

$$r_e \times e_e + d_e \times e_d = r_s \times e_s + S_e \times e_s \quad (11)$$

On multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $e_s$  et  $e_s'$ , sachant que:

$$e_s = Y \times \cos A_e + X \times \sin A_e ; e_s' = de_s / dA_e = -Y \times \sin A_e + X \times \cos A_e ;$$

on obtient les équations algébriques suivantes:

$$r_e \times \sin(F_e - A_e) + d_e = r_s \times \cos(F_s - A_e)$$

$$r_e \times \cos(F_e - A_e) = r_s \times \cos(F_s - A_e) + S_e$$

On calcule respectivement :

$$P = \text{Arctg}[(r_e \times \sin F_e - r_s \times \sin F_s - d_e \times \sin A_e)]$$

$$A_5 = P / (r_e \times \cos F_e - r_s \times \cos F_s - d_e \times \cos A_e)$$

$$S_e = r_e \times \cos(F_e - A_e) - r_s \times \cos(F_s - A_e)$$

Pour calculer les analogues des vitesses, on dérive l'équation (11) par rapport à la coordonnée généralisée  $F_1$ ; on obtient:

$$r_B \times F_B' \times e_B' + d_B \times A_B' \times e_D' = r_B \times F_B' \times e_D' + S_B \times A_B' \times e_B' + S_B' \times e_B' \quad (12)$$

$$e_B' = dF_B / dF_I ; F_B' = dF_B / dF_I ; A_B' = dA_B / dF_I$$

$$A_B = A_B + 3\pi/2 \Rightarrow A_B' = A_B' - dA_B' / dF_I$$

$$e_B = Y \times \cos F_B + X \times \sin F_B ; e_B' = de_B / dF_B = -Y \times \sin F_B + X \times \cos F_B$$

$$e_D = Y \times \cos F_B + X \times \sin F_B ; e_D' = de_D / dF_B = -Y \times \sin F_B + X \times \cos F_B$$

$$e_D = e_B' \Rightarrow e_D' = de_D / dA_B = -e_B$$

La multiplication scalaire par les vecteurs unitaires  $e_B$  et  $e_B'$  donne respectivement:

$$S_B' = r_B \times F_B' \times \sin(A_B - F_B) - d_B \times A_B' - r_B \times F_B' \times \sin(A_B - F_B) \quad (13)$$

$$A_B' = [r_B \times F_B' \times \cos(F_B - A_B) - r_B \times F_B' \times \cos(F_B - A_B)] / S_B ; S_B' = dS_B / dF_I$$

La vitesse angulaire de l'élément 5 est  $\omega_B = dA_B / dt = \omega \times A_B'$ .

La vitesse linéaire du point C du coulisseau s'obtient en dérivant l'équation (11) par rapport au temps ou bien en multipliant l'équation (12) par  $\omega$  vitesse angulaire du chaînon initial. Multiplie scalairement l'équation (13) par  $e_B$  et  $e_B'$  on

$$V(C) = V(B) + V(C/B) = V(D) + V(C_D/D) + V(C/C_D)$$

$C_D$  est un point géométrique de la coulisse qui coïncide à chaque instant avec le point G du coulisseau.

$$V(B) = \omega \times F_B' \times r_B \times e_B' , \text{ vitesse tangentielle au rayon vecteur } r_B ;$$

$$V(C/B) = -\omega \times d_B \times A_B' \times e_B , \text{ vitesse tangentielle à la direction } e_B ;$$

$$V(D) = \omega \times r_B \times F_B' \times e_D' , \text{ vitesse tangentielle au rayon vecteur } r_B ;$$

$$V(C_D/D) = \omega \times S_B \times A_B' \times e_B' , \text{ vitesse tangentielle à la direction } e_B ;$$

$$V(C/C_D) = \omega \times S_B' \times e_B ; \text{ vitesse relative dans la direction de la}$$

coulisse.

La vitesse du point C en projection sur les axes de coordonnées X et Y est telle que:

$$V_x(C) = \omega [r_E \times F_E' \times \cos F_E - d_E \times A_E' \times \sin A_E]$$

$$V_y(C) = \omega [-r_E \times F_E' \times \sin F_E - d_E \times A_E' \times \cos A_E]$$

Pour obtenir les analogues des accélérations, on dérive

l'équation (12) par rapport à la coordonnée généralisée FI. par

rapport à B

$$r_E \times F_E'' \times e_{E'} + r_E \times F_E' \times e_{E''} - d_E \times A_E'' \times e_{E'} - d_E \times A_E' \times e_{E''} = r_E \times F_E'' \times e_{O'} + r_E \times F_E' \times e_{O''} + 2 \times S_E' \times A_E' \times e_{E'} + S_E \times A_E'' \times e_{E'} + S_E \times A_E' \times e_{E''} + S_E'' \times e_{E'} \quad (13)$$

par rapport à B

$$F_E'' = d^2 F_E / dFI^2 ; F_E''' = d^3 F_E / dFI^3 ; A_E'' = d^2 A_E / dFI^2 ; S_E'' = d^2 S_E / dFI^2$$

$$e_{O''} = de_{O'} / dA_E = -e_{E'}$$

$$A_E'' = A_E'' \quad \text{Accélération de Coriolis perpendiculaire}$$

$$e_{E''} = de_{E'} / dF_E = -Y \times \cos F_E - X \times \sin F_E$$

$$e_{O''} = de_{O'} / dF_E = -Y \times \cos F_E - X \times \sin F_E$$

$$e_{E''} = de_{E'} / dA_E = -Y \times \cos A_E - X \times \sin A_E$$

Si on multiplie scalairement l'équation (13) par  $e_E$  et  $e_{E'}$ , on obtient respectivement:

$$S_E'' = -r_E \times F_E' \times \cos(F_E - A_E) + r_E \times F_E'' \times \sin(A_E - F_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E' \times \cos(F_E - A_E) + S_E \times A_E''$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$

$$A_E'' = [r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) + r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - d_E \times A_E'' - r_E \times F_E'' \times \cos(F_E - A_E) - r_E \times F_E' \times \sin(A_E - F_E) - 2 \times S_E' \times A_E' ] / S_E$$



L'accélération linéaire du point C du coulisseau est calculée en multipliant l'équation (13) par  $\omega^2$ :

$$a(C) = a(B) + a^r(C/B) + a^t(C/B) = a(D) + a^r(C_5/D) + a^t(C_5/D) + a^r(C/C_5) + a^t(C/C_5)$$

$a(B) = \omega^2 \times r_{Bx} \times (F_{E1}'' \times e_{B1}'' + F_{E1}' \times e_{B1}')$ ; accélération totale de B  
 $a(C/B) = \omega^2 \times d_{Cx} \times (-A_{E1}'' \times e_{E1}'' - A_{E1}' \times e_{E1}')$ ; accélération relative de C par rapport à B  
 $a(D) = \omega^2 \times r_{Dx} \times (F_{E2}'' \times e_{D2}'' + F_{E2}' \times e_{D2}')$ ; accélération totale de D  
 $a(C_5/D) = \omega^2 \times S_{E5} \times (A_{E5}'' \times e_{E5}'' + A_{E5}' \times e_{E5}')$ ; accélération relative de  $C_5$  par rapport à D  
 $a^r(C/C_5) = \omega^2 \times S_{E5}'' \times e_{E5}$ ; accélération relative dans la direction de la coulisse

$a^t(C/C_5) = 2 \times \omega^2 \times S_{E5}' \times A_{E5}' \times e_{E5}'$ ; accélération de Coriolis perpendiculaire à la direction de la coulisse

L'accélération linéaire du point C en projection sur les axes de coordonnées sera:

$$a_x(C) = \omega^2 \times r_{Cx} \times (-F_{E1}'' \times \sin F_{E1} + F_{E1}' \times \cos F_{E1}) + \omega^2 \times d_{Cx} \times (-A_{E1}'' \times \cos A_{E1} - A_{E1}' \times \sin A_{E1})$$

$$a_y(C) = \omega^2 \times r_{Cy} \times (-F_{E1}'' \times \cos F_{E1} - F_{E1}' \times \sin F_{E1}) + \omega^2 \times d_{Cy} \times (A_{E1}'' \times \sin A_{E1} - A_{E1}' \times \cos A_{E1})$$

Les vecteurs  $r_{Cx}$ ,  $r_{Cy}$  sont connus ainsi que les vecteurs  $d_{Cx}$  et  $d_{Cy}$ .

Les directions des axes de translation des coulisses sont :

**13-4- Groupe à deux entraîneurs de quatrième espèce T.R.T**

Ce groupe structural comprend deux chainons 7 et 8; deux couples cinématiques de translation S et U; un couple cinématique de rotation T.

On peut le joindre par les couples S et U à deux éléments quelconques  $m_7$  et  $K_8$  dans la chaîne cinématique du mécanisme principal. Dans le plan de coordonnées, la position d'un point R de l'axe de translation de la coulisse de l'élément 7 est définie par l'angle caractéristique  $F_7$  et le rayon vecteur  $r_7$ . La position d'un point V de l'axe de translation de la coulisse de l'élément 8 est définie par l'angle caractéristique  $F_8$  et le rayon vecteur  $r_8$ .

Les positions des points R et V sont connues, il s'agit dans ce groupe structural de déterminer la position, la vitesse et l'accélération des points U et S des coulisseaux. (Voir figure n°18).

Pour cela, il faut calculer les espaces parcourus par les coulisseaux soient  $S_7(FI)$ ,  $S_8(FI)$ ; les analogues des vitesses  $S_7'(FI)$ ,  $S_8'(FI)$  et les analogues des accélérations  $S_7''(FI)$ ,  $S_8''(FI)$ .

L'équation vectorielle qui exprime le caractère du contour fermé ORSTUVO est telle que:

$$r_7 + S_7 + d_7 = r_8 + S_8 + d_8 \quad (14)$$

Les vecteurs  $r_7$ ,  $r_8$  sont connus en modules et en direction, ainsi que les vecteurs  $d_7$  et  $d_8$ .

Les directions des axes de translation des coulisses sont connues et définissent également les directions des vecteurs  $d_7$  et  $d_8$ .

En définitive, cette équation vectorielle comprend dix paramètres dont huit sont déterminés.

# GROUPE T.R.T

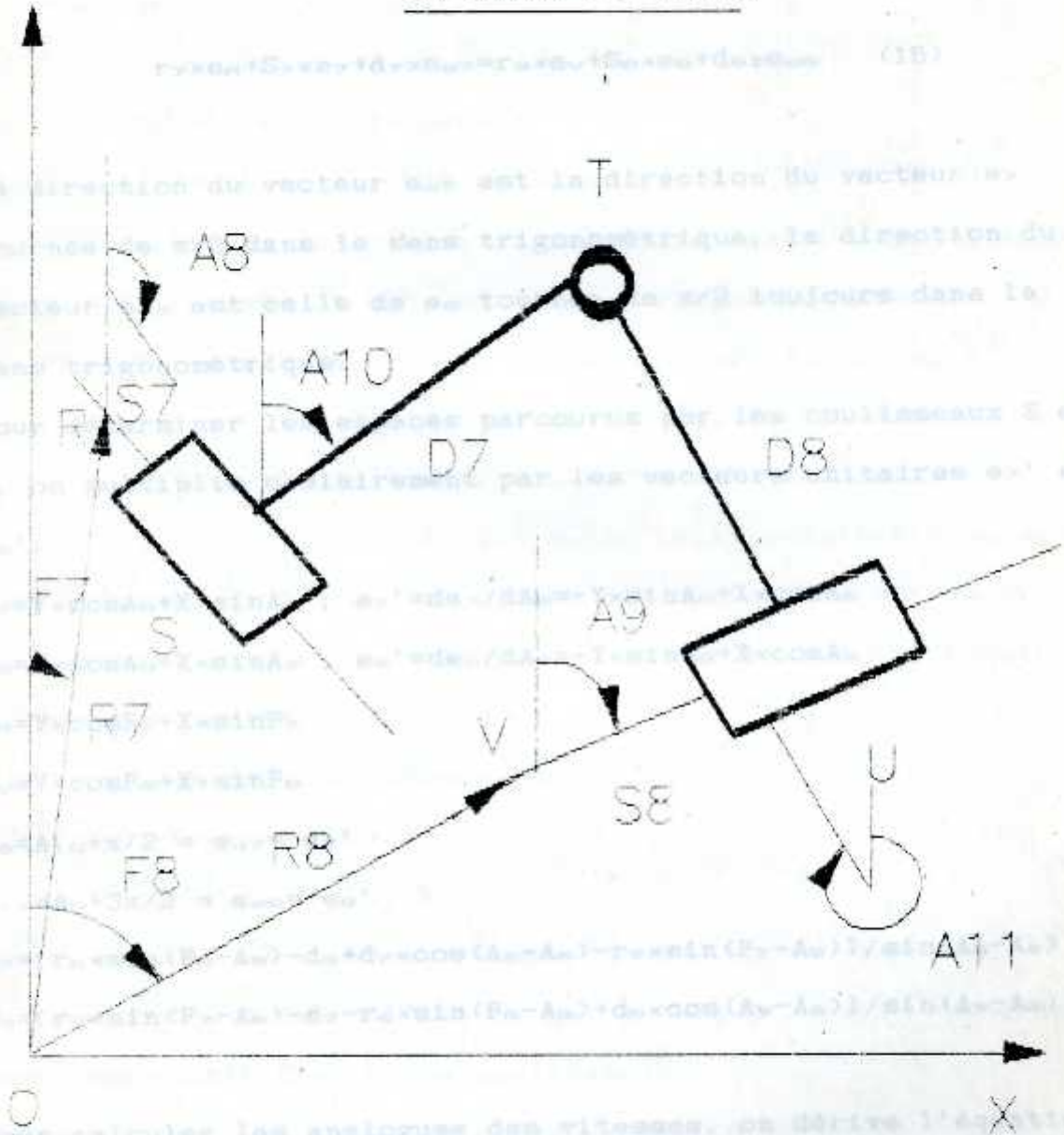


Figure n° 18

Si on définit les différentes directions par des vecteurs unitaires, l'équation (14) devient:

$$r_{\gamma} \times e_{R\gamma} + S_{\gamma} \times e_{\gamma} + d_{\gamma} \times e_{d\gamma} = r_{\theta} \times e_{U\theta} + S_{\theta} \times e_{\theta} + d_{\theta} \times e_{d\theta} \quad (15)$$

La direction du vecteur  $e_{d\gamma}$  est la direction du vecteur  $e_{\gamma}$  tournée de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique; la direction du vecteur  $e_{d\theta}$  est celle de  $e_{\theta}$  tournée de  $\pi/2$  toujours dans le sens trigonométrique.

Pour déterminer les espaces parcourus par les coulisseaux S et U, on multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $e_{\gamma}'$  et  $e_{\theta}'$ :

$$e_{\gamma} = Y \times \cos A_{\theta} + X \times \sin A_{\theta}; \quad e_{\gamma}' = de_{\gamma} / dA_{\theta} = -Y \times \sin A_{\theta} + X \times \cos A_{\theta}$$

$$e_{\theta} = Y \times \cos A_{\gamma} + X \times \sin A_{\gamma}; \quad e_{\theta}' = de_{\theta} / dA_{\gamma} = -Y \times \sin A_{\gamma} + X \times \cos A_{\gamma}$$

$$e_{R\gamma} = Y \times \cos F_{\gamma} + X \times \sin F_{\gamma}$$

$$e_{U\theta} = Y \times \cos F_{\theta} + X \times \sin F_{\theta}$$

$$A_{\theta} = A_{10} + \pi/2 \Rightarrow e_{d\gamma} = -e_{\gamma}'$$

$$A_{11} = A_{\theta} + 3\pi/2 \Rightarrow e_{d\theta} = -e_{\theta}'$$

$$S_{\gamma} = [r_{\theta} \times \sin(F_{\theta} - A_{\theta}) - d_{\theta} + d_{\gamma} \times \cos(A_{\theta} - A_{\theta}) - r_{\gamma} \times \sin(F_{\gamma} - A_{\theta})] / \sin(A_{\theta} - A_{\theta})$$

$$S_{\theta} = [r_{\gamma} \times \sin(F_{\gamma} - A_{\theta}) - d_{\gamma} - r_{\theta} \times \sin(F_{\theta} - A_{\theta}) + d_{\theta} \times \cos(A_{\theta} - A_{\theta})] / \sin(A_{\theta} - A_{\theta})$$

Pour calculer les analogues des vitesses, on dérive l'équation (15) par rapport à la coordonnée généralisée  $\Pi_1$ :

$$r_{\gamma} \times F_{\gamma}' \times e_{R\gamma}' + S_{\gamma}' \times e_{\gamma} + S_{\gamma} \times A_{\theta}' \times e_{\gamma}' + d_{\gamma} \times A_{\theta}' \times e_{d\gamma}' = \dot{\Pi}_1 \times S \text{ (coulisseaux) par rapport à } r_{\theta} \times F_{\theta}' \times e_{U\theta}' + S_{\theta}' \times e_{\theta} + S_{\theta} \times A_{\gamma}' \times e_{\theta}' + d_{\theta} \times A_{\gamma}' \times e_{d\theta}' \quad (16)$$

$$F_7' = dF_7/dFI ; F_8' = dF_8/dFI ; A_7' = dA_7/dFI ; A_8' = dA_8/dFI ;$$

$$S_7' = dS_7/dFI ; S_8' = dS_8/dFI$$

$$e_{7x}' = de_{7x}/dF_7 = -Y \times \sin F_7 + X \times \cos F_7$$

$$e_{7y}' = de_{7y}/dF_7 = -Y \times \cos F_7 - X \times \sin F_7$$

$$e_{8x}' = de_{8x}/dA_8 = e_7 ; e_{8y}' = de_{8y}/dA_8 = e_8$$

Pour obtenir les analogues, on multiplie scalairement l'équation (16) par  $e_8'$  et  $e_7'$ , on obtient respectivement:

$$S_7' = [r_{8x} \times F_8' \times \cos(F_8 - A_8) + S_8 \times A_8' + d_7 \times A_8' \times \sin(A_8 - A_7) - S_7 \times A_8' \times \cos(A_8 - A_7) - r_{7x} \times F_7' \times \cos(F_7 - A_7)] / \sin(A_8 - A_7)$$

$$S_8' = [r_{7x} \times F_7' \times \cos(F_7 - A_7) + S_7 \times A_7' - r_{8x} \times F_8' \times \cos(F_8 - A_8) - S_8 \times A_7' \times \cos(A_8 - A_7) - d_8 \times A_7' \times \sin(A_8 - A_7)] / \sin(A_8 - A_7)$$

Les vitesses linéaires des points des chaînons s'obtiennent en multipliant l'équation (16) par  $\omega$  qui est la vitesse angulaire du chaînon initial.

Les vitesses des coulisseaux sont:

$$V(S) = V(R) + V(S_7/R) + V(S/S_7)$$

$$V(U) = V(V) + V(U_8/V) + V(U/U_8)$$

$S_7$  et  $U_8$  sont deux points géométriques respectivement des coulisses des éléments 7 et 8, qui à chaque instant coïncident avec les points S et U des coulisseaux.

$V(R) = \omega \times r_{7x} \times F_7' \times e_{7x}'$ ; vitesse perpendiculaire au rayon vecteur OR.

$V(S_7/R) = \omega \times S_7 \times A_8' \times e_{7y}'$ ; vitesse perpendiculaire à la direction de la coulisse (axe de translation) de l'élément 7.

$V(S/S_7) = \omega \times S_7' \times e_{7x}'$ ; vitesse relative du point S (coulisseau) par rapport au point  $S_7$  de la coulisse, dans la direction de l'axe de translation.

$V(V) = \omega \times r_{e_0} \times F_{e_0}' \times e_{v_0}'$ ; vitesse perpendiculaire au rayon vecteur OV.

$V(U_{e_0}/V) = \omega \times S_{e_0} \times A_{e_0}' \times e_{e_0}'$ ; vitesse perpendiculaire à l'axe de translation de la coulisse de l'élément S.

$V(U/U_{e_0}) = \omega \times S_{e_0}' \times e_{e_0}$ ; vitesse relative du point U par rapport au point  $U_{e_0}$  dans la direction de l'axe de translation.

La vitesse du coulisseau S en projection sur les axes de coordonnées est:

$$V_x(S) = \omega \times (r_{e_0} \times F_{e_0}' \times \cos F_{e_0} + S_{e_0}' \times \sin A_{e_0} + S_{e_0} \times A_{e_0}' \times \cos A_{e_0})$$

$$V_y(S) = \omega \times (-r_{e_0} \times F_{e_0}' \times \sin F_{e_0} + S_{e_0}' \times \cos A_{e_0} - S_{e_0} \times A_{e_0}' \times \sin A_{e_0})$$

La vitesse du coulisseau U en projection sur les axes de coordonnées est:

$$V_x(U) = \omega \times (r_{e_0} \times F_{e_0}' \times \cos F_{e_0} + S_{e_0}' \times \sin A_{e_0} + S_{e_0} \times A_{e_0}' \times \cos A_{e_0})$$

$$V_y(U) = \omega \times (-r_{e_0} \times F_{e_0}' \times \sin F_{e_0} + S_{e_0}' \times \cos A_{e_0} - S_{e_0} \times A_{e_0}' \times \sin A_{e_0})$$

Pour calculer les analogues des accélérations, on dérive l'équation (16) par rapport à la coordonnée généralisée FI:

chaque. Il faut multiplier l'équation (17) par  $\omega^2$ .

$$\begin{aligned} & r_{e_0} \times (F_{e_0}'' \times e_{e_0} + F_{e_0}'^2 \times e_{e_0}) + S_{e_0}'' \times e_{e_0} + 2 \times S_{e_0}' \times A_{e_0}' \times e_{e_0}' + S_{e_0} \times \\ & \times (A_{e_0}'' \times e_{e_0}' + A_{e_0}'^2 \times e_{e_0}') + d_{e_0} \times (A_{e_0}'' \times e_{d_{e_0}} + A_{e_0}'^2 \times e_{d_{e_0}}) = r_{e_0} \times (F_{e_0}'' \times e_{v_0}' + F_{e_0}'^2 \times \\ & \times e_{v_0}') + S_{e_0}'' \times e_{e_0} + 2 \times S_{e_0}' \times A_{e_0}' \times e_{e_0}' + S_{e_0} \times (A_{e_0}'' \times e_{e_0}' + A_{e_0}'^2 \times e_{e_0}') + \\ & + d_{e_0} \times (A_{e_0}'' \times e_{d_{e_0}} + A_{e_0}'^2 \times e_{d_{e_0}}) \quad (17) \end{aligned}$$

$$F_{e_0}'' = d^2 F_{e_0} / dFI^2 ; F_{e_0}' = d F_{e_0} / dFI ; A_{e_0}'' = d^2 A_{e_0} / dFI^2 ; A_{e_0}' = d A_{e_0} / dFI$$

$$S_{e_0}'' = d^2 S_{e_0} / dFI^2 ; S_{e_0}' = d S_{e_0} / dFI$$

$$e_{e_0}'' = de_{e_0} / dF_{e_0} = -Y \times \cos F_{e_0} - X \times \sin F_{e_0}$$

$$e_{v_0}'' = de_{v_0}' / dF_{e_0} = -Y \times \cos F_{e_0} - X \times \sin F_{e_0}$$

$$e_{e_0}' = de_{e_0}' / dA_{e_0} = -Y \times \cos A_{e_0} - X \times \sin A_{e_0}$$

$e_{e''} = de_{e'}/dA_{e''} = -Y \times \cos A_{e''} - X \times \sin A_{e''}$  en projection sur les axes de  
 $e_{e_7}'' = de_{e_7'}/dA_{e''} = e_{e_7'}$  ;  $e_{e_8}'' = de_{e_8'}/dA_{e''} = e_{e_8'}$  ;  $A_{10}'' = A_{e_8}''$  ;  $A_{11}'' = A_{e_7}''$

En multipliant l'équation (17) par  $e_{e_8'}$  et  $e_{e_7'}$ , on obtient respectivement:

$$\begin{aligned}
 S_7'' = & [r_{e_8} \times F_{e_8}'' \times \cos(F_{e_7} - A_{e_8}) + r_{e_8} \times F_{e_8}'^2 \times \sin(A_{e_8} - F_{e_8}) + 2 \times S_{e_8}' \times A_{e_8}' + S_{e_8} \times A_{e_8}'' + \\
 & + d_{e_8} \times A_{e_8}'^2 - r_{e_7} \times F_{e_7}'' \times \cos(F_{e_7} - A_{e_8}) - r_{e_7} \times F_{e_7}'^2 \times \sin(A_{e_8} - F_{e_7}) - 2 \times S_{e_7}' \times A_{e_8}' \times \\
 & \times \cos(A_{e_8} - A_{e_7}) - S_{e_7} \times A_{e_8}'' \times \cos(A_{e_8} - A_{e_7}) - S_{e_7} \times A_{e_8}'^2 \times \sin(A_{e_8} - A_{e_7}) + d_{e_7} \times A_{e_8}'' \times \\
 & \times \sin(A_{e_8} - A_{e_7}) - d_{e_7} \times A_{e_8}'^2 \times \cos(A_{e_8} - A_{e_7})] / \sin(A_{e_8} - A_{e_7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_8'' = & [r_{e_7} \times F_{e_7}'' \times \cos(F_{e_7} - A_{e_8}) + r_{e_7} \times F_{e_7}'^2 \times \sin(A_{e_8} - F_{e_7}) + 2 \times S_{e_7}' \times A_{e_8}' + S_{e_7} \times A_{e_8}'' + \\
 & + d_{e_7} \times A_{e_8}'^2 - r_{e_8} \times F_{e_8}'' \times \cos(F_{e_8} - A_{e_8}) - r_{e_8} \times F_{e_8}'^2 \times \sin(A_{e_8} - F_{e_8}) - 2 \times S_{e_8}' \times A_{e_8}' \times \\
 & \times \cos(A_{e_8} - A_{e_8}) - S_{e_8} \times A_{e_8}'' \times \cos(A_{e_8} - A_{e_8}) - S_{e_8} \times A_{e_8}'^2 \times \sin(A_{e_8} - A_{e_8}) - d_{e_8} \times A_{e_8}'' \times \\
 & \times \sin(A_{e_8} - A_{e_8}) - d_{e_8} \times A_{e_8}'^2 \times \cos(A_{e_8} - A_{e_8})] / \sin(A_{e_8} - A_{e_8})
 \end{aligned}$$

Pour calculer les accélérations linéaires des points des chaînons, il faut multiplier l'équation (17) par  $\omega^2$ .

Les vitesses des coulisseaux S et U seront:

$$a(S) = a(R) + a(S_7/R) + a(S/S_7)$$

$$a(R) = \omega^2 \times r_{e_7} \times (F_{e_7}'' \times e_{e_7} + F_{e_7}'^2 \times e_{e_7}'')$$

$$a(S_7/R) = a''(S_7/R) + a^t(S_7/R) = \omega^2 \times S_{e_7} \times (A_{e_8}'^2 \times e_{e_7}'' + A_{e_8}'' \times e_{e_7}')^2$$

$$a(S/S_7) = a^r(S/S_7) + a^c(S/S_7) = \omega^2 \times (S_{e_7}'' \times e_{e_7} + 2 \times S_{e_7}' \times A_{e_8}' \times e_{e_7}')^2$$

$$a(U) = a(V) + a(U_8/V) + a(U/U_8)$$

$$a(V) = \omega^2 \times r_{e_8} \times (F_{e_8}'' \times e_{e_8} + F_{e_8}'^2 \times e_{e_8}'')$$

$$a(U_8/V) = a''(U_8/V) + a^t(U_8/V) = \omega^2 \times S_{e_8} \times (A_{e_7}'^2 \times e_{e_8}'' + A_{e_7}'' \times e_{e_8}')^2$$

$$a(U/U_8) = a^r(U/U_8) + a^c(U/U_8) = \omega^2 \times (S_{e_8}'' \times e_{e_8} + 2 \times S_{e_8}' \times A_{e_7}' \times e_{e_8}')^2$$

Les vitesses des coulisseaux en projection sur les axes de coordonnées seront:

$$a_x(S) = \omega^2 \times [r_{\gamma} \times (F_{\gamma}'' \times \cos F_{\gamma} - F_{\gamma}'^2 \times \sin F_{\gamma}) + S_{\gamma}'' \times \sin A_{\theta} + 2 \times S_{\gamma}' \times A_{\theta}' \times \cos A_{\theta} + S_{\gamma} \times (A_{\theta}'' \times \cos A_{\theta} - A_{\theta}'^2 \times \sin A_{\theta})]$$

$$a_y(S) = \omega^2 \times [r_{\gamma} \times (-F_{\gamma}'' \times \sin F_{\gamma} - F_{\gamma}'^2 \times \cos F_{\gamma}) + S_{\gamma}'' \times \cos A_{\theta} - 2 \times S_{\gamma}' \times A_{\theta}' \times \sin A_{\theta} + S_{\gamma} \times (-A_{\theta}'' \times \sin A_{\theta} - A_{\theta}'^2 \times \cos A_{\theta})]$$

$$a_x(U) = \omega^2 \times [r_{\theta} \times (F_{\theta}'' \times \cos F_{\theta} - F_{\theta}'^2 \times \sin F_{\theta}) + S_{\theta}'' \times \sin A_{\omega} + 2 \times S_{\theta}' \times A_{\omega}' \times \cos A_{\omega} + S_{\theta} \times (A_{\omega}'' \times \cos A_{\omega} - A_{\omega}'^2 \times \sin A_{\omega})]$$

$$a_y(U) = \omega^2 \times [r_{\theta} \times (-F_{\theta}'' \times \sin F_{\theta} - F_{\theta}'^2 \times \cos F_{\theta}) + S_{\theta}'' \times \cos A_{\omega} - 2 \times S_{\theta}' \times A_{\omega}' \times \sin A_{\omega} + S_{\theta} \times (-A_{\omega}'' \times \sin A_{\omega} - A_{\omega}'^2 \times \cos A_{\omega})]$$

### 13-5- Groupe à deux entraîneurs de cinquième espèce T.T.R.

Ce groupe structural comprend deux chainons 9 et 10; deux couples cinématiques de translation Y et Z; un couple cinématique de rotation X.

On peut le joindre par le couple X et la coulisse à deux éléments  $m_{10}$  et  $K_{10}$  quelconques dans la chaîne cinématique du mécanisme principal.

Dans le plan de coordonnées, la position du couple X est repérée par l'angle caractéristique  $F_{\omega}$  et le rayon vecteur  $r_{\omega}$ . La position d'un point  $Z_1$  de la coulisse est repérée par l'angle caractéristique  $F_{10}$  et le rayon vecteur  $r_{10}$ .



Les positions des points X et Z, sont connues, le problème se réduit à la détermination des positions des points (coulisseaux) Y et Z. (Voir figure n°19). Pour cela, il faut calculer les espaces parcourus par les coulisseaux Y et Z,  $S_9(FI)$ ,  $S_{10}(FI)$ ; les analogues des vitesses  $S_9'(FI)$ ,  $S_{10}'(FI)$ ; les analogues des accélérations  $S_9''(FI)$ ,  $S_{10}''(FI)$ .

L'équation vectorielle du contour fermé OXYZZ,O est la suivante:

$$r_9 + d_9 = r_{10} + S_{10} + S_9 \quad (18)$$

Les vecteurs  $r_9$ ,  $r_{10}$  et  $d_9$  sont connus en modules et en directions. Les vecteurs  $S_9$  et  $S_{10}$  sont connus seulement en directions, il s'agit de déterminer leurs modules.

On introduit les vecteurs unitaires définissant le sens et la direction de chaque vecteur:

$$r_9 \times e_x + d_9 \times e_{d9} = r_{10} \times e_{z1} + S_{10} \times e_{10} + S_9 \times e_9 \quad (19)$$

La direction du vecteur  $e_{d9}$  correspond à celle du vecteur  $e_{10}$ ; la direction du vecteur  $e_{10}$  correspond à celle du vecteur  $e_9$  tournée de  $\pi/2$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

En multipliant l'équation (19) par  $e_{10}'$  et  $e_9'$ , on obtient respectivement:

$$S_9 = -r_9 \times \sin(F_9 - A_{12}) + r_{10} \times \sin(F_{10} - A_{12})$$

$$S_{10} = r_9 \times \cos(A_{12} - F_9) - r_{10} \times \cos(A_{12} - F_{10})$$

$$e_{10} = Y \times \cos A_{12} + X \times \sin A_{12} ; e_{10}' = de_{10}/dA_{12} = -Y \times \sin A_{12} + X \times \cos A_{12}$$

$$e_9 = -e_{10}' ; e_9' = e_{10} ; e_{d9} = e_{10}$$

Pour calculer les analogues des vitesses, on dérive l'équation (19) par rapport à la coordonnée généralisée FI.

$$r_9 \times F_9' \times e_x' + d_9 \times A_{12}' \times e_{10}' = r_{10} \times F_{10}' \times e_{z1}' + S_{10}' \times e_{10}' + S_{10} \times A_{12}' \times e_{10}' + S_9' \times e_9 + S_9 \times A_{12}' \times e_9' \quad (20)$$

$$F_9' = dF_9/dF1 ; F_{10}' = dF_{10}/dF1$$

$$A_{12}' = dA_{12}/dF1 ; A_{13} = A_{12} + 3\pi/2 \Rightarrow A_{13}' = -A_{12}'$$

$$S_9' = dS_9/dF1 ; S_{10}' = dS_{10}/dF1$$

$$e_x = Y \times \cos F_9 + X \times \sin F_9 ; e_x' = de_x/dF_9 = -Y \times \sin F_9 + X \times \cos F_9$$

$$e_{z1}' = Y \times \cos F_{10} + X \times \sin F_{10} ; e_{z1}' = de_{z1}/dF_{10} = -Y \times \sin F_{10} + X \times \cos F_{10}$$

En multipliant scalairement l'équation (20) par les vecteurs unitaires  $e_{10}'$  et  $e_9'$ , on obtient respectivement:

$$S_9' = -r_9 \times F_9' \times \cos(F_9 - A_{12}) - d_9 \times A_{12}' + r_{10} \times F_{10}' \times \cos(F_{10} - A_{12}) + S_{10} \times A_{12}' \quad (21)$$

$$S_{10}' = r_9 \times F_9' \times \sin(A_{12} - F_9) - r_{10} \times F_{10}' \times \sin(A_{12} - F_{10}) - S_9 \times A_{12}'$$

Les vitesses linéaires des points des chaînons s'obtiennent en multipliant l'équation (20) par  $\omega$ , vitesse angulaire du chaînon initial.

$$V(X) + V(Y/X) = V(Z_1) + V(Z_{10}/Z_1) + V(Z/Z_{10}) + V(Y_9/Z) + V(Y/Y_9)$$

$Z_{10}$  et  $Y_9$  sont deux points géométriques des coulisses qui coïncident à chaque instant respectivement avec les points (coulisseaux) Z et Y.

$$V(X) = \omega \times r_9 \times F_9' \times e_x' = \omega \times r_9 \times F_9' \times (-Y \times \sin F_9 + X \times \cos F_9)$$

$$V(Y/X) = \omega \times d_9 \times A_{12}' \times e_{10}' = \omega \times d_9 \times A_{12}' \times (-Y \times \sin F_{10} + X \times \cos F_{10})$$

$$V(Z_1) = \omega \times r_{10} \times F_{10}' \times e_{z1}' = \omega \times r_{10} \times F_{10}' \times (-Y \times \sin F_{10} + X \times \cos F_{10})$$

$$V(Z_{10}/Z_1) = \omega \times S_{10} \times A_{12}' \times e_{10}' = \omega \times S_{10} \times A_{12}' \times (-Y \times \sin F_{10} + X \times \cos F_{10})$$

$$V(Z/Z_{10}) = \omega \times S_{10}' \times e_{10}' = \omega \times S_{10}' \times (-Y \times \sin F_{10} + X \times \cos F_{10})$$

$$V(Y_9/Z) = \omega \times S_9 \times A_{12}' \times e_9' = \omega \times S_9 \times A_{12}' \times (-Y \times \sin F_9 + X \times \cos F_9)$$

$$V(Y/Y_9) = \omega \times S_9' \times e_9 = \omega \times S_9' \times (-Y \times \sin F_9 + X \times \cos F_9)$$

La vitesse du coulisseau Z en projection sur les axes de coordonnées sera: d'après l'équation (20) par  $\omega^2$ .

$$V_x(Z) = \omega \times [r_{10} \times F_{10}' \times \cos F_{10} + S_{10}' \sin A_{12} + S_{10} \times A_{12}' \times \cos A_{12}]$$

$$V_y(Z) = \omega \times [-r_{10} \times F_{10}' \times \sin F_{10} + S_{10}' \times \cos A_{12} - S_{10} \times A_{12}' \times \sin A_{12}]$$

Pour calculer les analogues des accélérations, il faut dériver l'équation (20) par rapport à la coordonnée généralisée FI.

$$\begin{aligned} r_9 \times (F_9'' \times e_x' + F_9'{}^2 \times e_x'') + d_9 \times (A_{12}'' \times e_{10}' + A_{12}'{}^2 \times e_{10}'') = \\ r_{21} \times (F_{10}'' \times e_{z1}' + F_{10}'{}^2 \times e_{z1}'') + S_{10}'' \times e_{10} + 2 \times S_{10}' \times A_{12}' \times e_{10}' + \\ + S_{10} \times (A_{12}'' \times e_{10}' + A_{12}'{}^2 \times e_{10}'') + S_9'' \times e_9 + 2 \times S_9' \times A_{12}' \times e_9' + \\ + S_9 \times (A_{12}'' \times e_9' + A_{12}'{}^2 \times e_9'') \quad (21) \end{aligned}$$

$$F_9'' = d^2 F_9 / dF_1^2 ; F_{10}'' = d^2 F_{10} / dF_1^2 ;$$

$$A_{12}'' = d^2 A_{12} / dF_1^2 ; S_9'' = d^2 S_9 / dF_1^2 ; S_{10}'' = d^2 S_{10} / dF_1^2 ;$$

$$e_x'' = de_x' / dF_9 = -Y \times \cos F_9 - X \times \sin F_9$$

$$e_{z1}'' = de_{z1}' / dF_{10} = -Y \times \cos F_{10} - X \times \sin F_{10}$$

$$e_{10}'' = de_{10}' / dA_{12} = -Y \times \cos A_{12} - X \times \sin A_{12}$$

$$e_9'' = de_9' / dA_{12} = e_{10}'$$

La multiplication scalaire de l'équation (21) par les vecteurs unitaires  $e_{10}'$  et  $e_9'$  donne respectivement:

$$\begin{aligned} S_9'' = -r_9 \times F_9'' \times \cos (F_9 - A_{12}) - r_9 \times F_9'{}^2 \times \sin (A_{12} - A_9) - d_9 \times A_{12}'' + r_{10} \times F_{10}'' \times \\ \times \cos (F_{10} - A_{12}) + r_{10} \times F_{10}'{}^2 \times \sin (A_{12} - F_{10}) + 2 \times S_{10}' \times A_{12}' + \\ + S_{10} \times A_{12}'' + S_9 \times A_{12}'{}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{10}'' = r_9 \times F_9'' \times \sin (A_{12} - F_9) - r_9 \times F_9'{}^2 \times \cos (A_{12} - F_9) - d_9 \times A_{12}'{}^2 - r_{10} \times F_{10}'' \times \\ \sin (A_{12} - F_{10}) + r_{10} \times F_{10}'{}^2 \times \cos (A_{12} - F_{10}) + S_{10} \times A_{12}'{}^2 - 2 \times S_9'{}^2 \times A_{12}' - \\ - S_9 \times A_{12}'' \end{aligned}$$

Pour calculer les accélérations linéaires des points des chainons, on multiplie l'équation (21) par  $\omega^2$ .

$$a(X) + a(Y/X) = a(Z_1) + a(Z_{10}/Z_1) + a(Z/Z_{10}) + a(Y_0/Z) + a(Y/Y_0)$$

$$a(X) = \omega^2 \times r_{0x} \times (F_0'' \times e_x'' + F_0' \times e_x')$$

$$a(Y/X) = \omega^2 \times d_0 \times (A_{12}'' \times e_{10}' + A_{12}' \times e_{10}'')$$

$$a(Z_1) = \omega^2 \times r_{10} \times (F_{10}'' \times e_{z1}' + F_{10}' \times e_{z1}'')$$

$$a(Z_{10}/Z_1) = a''(Z_{10}/Z_1) + a'(Z_{10}/Z_1) = \omega^2 \times S_{10} \times (A_{12}'' \times e_{10}' + A_{12}' \times e_{10}'')$$

$$a(Z/Z_{10}) = a''(Z/Z_{10}) + a'(Z/Z_{10}) = \omega^2 \times (S_{10}'' \times e_{10}' + 2 \times S_{10}' \times A_{12}' \times e_{10}'')$$

$$a(Y_0/Z) = a''(Y_0/Z) + a'(Y_0/Z) = \omega^2 \times S_0 \times (A_{12}'' \times e_0' + A_{12}' \times e_0'')$$

$$a(Y/Y_0) = a''(Y/Y_0) + a'(Y/Y_0) = \omega^2 \times (S_0'' \times e_0' + 2 \times S_0' \times A_{12}' \times e_0'')$$

L'accélération du coulisseau Z en projection sur les axes de coordonnées sera:

$$a_x(Z) = \omega^2 \times [r_{10} \times (F_{10}'' \times \cos F_{10} - F_{10}' \times \sin F_{10}) + S_{10}'' \times \sin A_{12} + 2 \times S_{10}' \times A_{12}' \times \cos A_{12} + S_{10} \times (A_{12}'' \times \cos A_{12} - A_{12}' \times \sin A_{12})]$$

$$a_y(Z) = \omega^2 \times [r_{10} \times (-F_{10}'' \times \sin F_{10} - F_{10}' \times \cos F_{10}) + S_{10}'' \times \cos A_{12} - 2 \times S_{10}' \times A_{12}' \times \sin A_{12} + S_{10} \times (-A_{12}'' \times \sin A_{12} - A_{12}' \times \cos A_{12})]$$

#####

## V- EQUATIONS DE L'ANALYSE DES FORCES

### 14- Etude des forces

#### 14-1- Forces appliquées aux mécanismes

Les chaînons des mécanismes sont sollicités à des forces motrices, des forces résistantes, des forces de pesanteur, des forces de liaisons dans les couples cinématiques qui font naître des forces de frottement.

Les réactions dans les couples de liaisons sont dues d'une part, à l'action des forces externes directement appliquées, et d'autre part au mouvement accéléré des masses (forces d'inertie) qui engendre ce que l'on appelle des pressions dynamiques supplémentaires dans les couples cinématiques.

Le calcul des pressions dynamiques dans les couples de liaisons peut être abordé comme il a déjà été mentionné, par le principe de d'Alembert.

D'après ce principe, si l'on ajoute à toutes les sollicitations extérieures les forces d'inertie, le chaînon soumis à toutes ces sollicitations peut être considéré conventionnellement comme étant en équilibre. A cet effet, pour traduire cette méthode, on calcule les forces d'inertie qui sont les produits des masses des chaînons par l'accélération du centre de gravité, et l'on fera appel aux équations d'équilibre dynamique du corps solide.

Les forces motrices agissant dans le mécanisme sont les forces qui, appliquées aux chaînons du mécanisme produisent

un travail positif; ces forces tendent à accélérer le mouvement de l'élément menant.

Les forces résistantes sont les forces, qui appliquées aux chaînons du mécanisme produisent un travail négatif; elles tendent à ralentir le mouvement de l'élément menant. Parmi ces forces résistantes, on distingue les forces utiles et celles inutiles.

Les forces résistantes utiles sont celles dont le travail est nécessaire à l'exécution du processus technologique demandé. Les forces résistantes inutiles sont celles qui pour être surmontées, demandent du travail supplémentaire.

Dans l'analyse des mécanismes, les forces motrices et les forces résistantes utiles sont connues et définies sous forme analytique ou graphique. Elles peuvent être fonctions de paramètres cinématiques tels que déplacements, vitesses, accélérations, temps. On dispose donc de fonctions analytiques ou de diagrammes de forces ou de moments soient  $P=P(s)$  par exemple ou  $M=M(\varphi)$ ; ou bien de diagrammes des travaux ou de puissances consommées par le processus technologique qu'on appelle les courbes de performance des machines.

#### 14-2- Forces d'inertie des chaînons des mécanismes plans

On considère un chaînon d'un mécanisme plan, de masse  $M$ , de centre de masse  $S$ , d'accélération du centre de masse  $a_s$ , de moment d'inertie  $I_s$  par rapport à l'axe traversant le

centre de masse  $S$  et perpendiculaire au plan de mouvement, d'accélération angulaire  $\epsilon$  autour de l'axe de rotation. Chaque point matériel isolé du chaînon possède une accélération linéaire propre; en multipliant la masse de ce point par l'opposée de son accélération, on obtient un système de forces d'inertie qu'il est toujours possible de remplacer par ses éléments de réduction au centre de masse  $S$  [3,4]:

$P_i = -M \times a_{cm}$  : force d'inertie réduite appliquée au centre de masse du chaînon (vecteur principal des forces d'inertie).

$M_i = -I_S \times \epsilon$  : couple de forces d'inertie réduit au centre de masse (vecteur principal de moments de forces d'inerties).

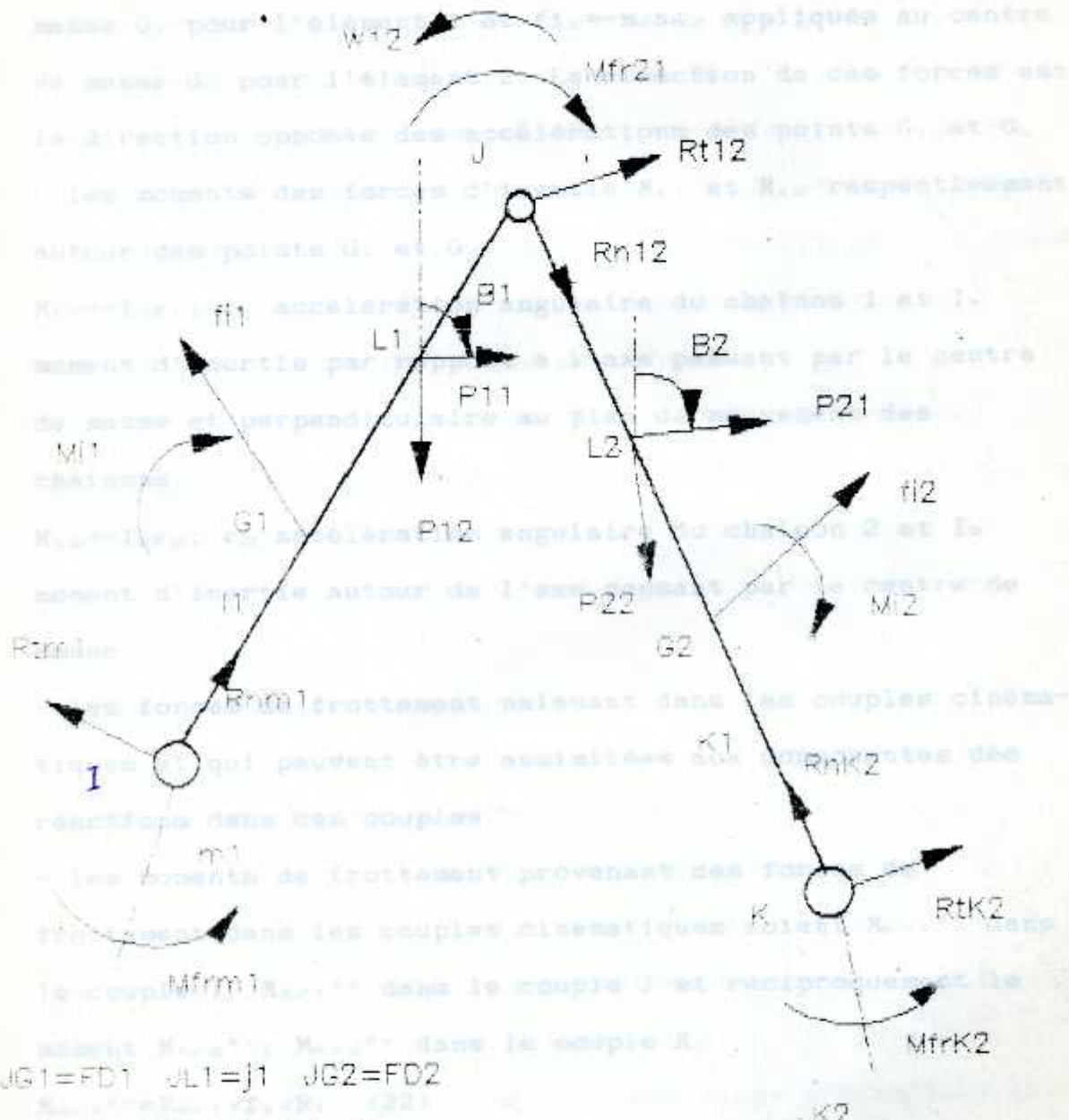
## 15- Calcul des forces

### 15-1- Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.R.R. (Voir figure n°20)

Ce groupe est sollicité par:

- les forces appliquées  $P_1$  et  $P_2$  respectivement de point d'application  $L_1$  et  $L_2$  sur les éléments 1 et 2. Pour des commodités de calcul, ces forces sont représentées par leurs composantes  $P_{1x}$  et  $P_{1z}$  pour la charge  $P_1$ ;  $P_{2x}$  et  $P_{2z}$  pour la charge  $P_2$  de telle manière que  $P_{1x}$  et  $P_{2x}$  fassent respectivement les angles  $B_1$  et  $B_2$  par rapport à la verticale ascendante.
- les forces de pesanteur  $m_1 g$  et  $m_2 g$ .
- les réactions dans les couples cinématiques I, J et K. Ces réactions seront prises par leurs composantes.

# GROUPE R.R.R.



$$JG_1 = FD_1 \quad JL_1 = j_1 \quad JG_2 = FD_2$$

$$JL_2 = j_2 \quad KL_2 = j_3 \quad IL_1 = j_4$$

Figure n° 20

$K_1, K_2, K_3$  sont les coefficients de frottement dans les couples de rotations;  $R_1, R_2, R_3$  sont les rayons des parties cylindriques de ces couples.



- les forces d'inertie  $f_{11} = -m_1 a_{G_1}$  appliquée au centre de masse  $G_1$  pour l'élément 1 et  $f_{12} = -m_2 a_{G_2}$  appliquée au centre de masse  $G_2$  pour l'élément 2. La direction de ces forces est la direction opposée des accélérations des points  $G_1$  et  $G_2$ .
  - les moments des forces d'inertie  $M_{11}$  et  $M_{12}$  respectivement autour des points  $G_1$  et  $G_2$ .  
 $M_{11} = -I_{1G_1} \epsilon_1$   $\epsilon_1$  accélération angulaire du chaînon 1 et  $I_{1G_1}$  moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de masse et perpendiculaire au plan de mouvement des chaînons.  
 $M_{12} = -I_{2G_2} \epsilon_2$   $\epsilon_2$  accélération angulaire du chaînon 2 et  $I_{2G_2}$  moment d'inertie autour de l'axe passant par le centre de masse.
  - les forces de frottement naissant dans les couples cinématiques et qui peuvent être assimilées aux composantes des réactions dans ces couples.
  - les moments de frottement provenant des forces de frottement dans les couples cinématiques soient  $M_{121}$  dans le couple I;  $M_{221}$  dans le couple J et réciproquement le moment  $M_{122}$ ;  $M_{222}$  dans le couple K.
- $M_{121} = R_{121} \times f_{11} \times R_1$  (22)  
 $M_{122} = -M_{221} = R_{122} \times f_{12} \times R_2$  (23)  
 $M_{222} = R_{222} \times f_{22} \times R_2$  (24)
- $R_{121}$ ;  $R_{122}$ ;  $R_{222}$  sont les réactions dans les couples I, J, K;  $f_{11}$ ,  $f_{12}$ ,  $f_{22}$  sont les coefficients de frottement dans les couples de rotations;  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  sont les rayons des parties cylindriques de ces couples.

La direction de ces moments est déterminée par celle des vitesses angulaires correspondantes du mouvement relatif des chainons du groupe. Ainsi, le moment  $M_{m/1}^{fr}$  en cas d'équilibre, sera de sens opposé à la vitesse angulaire  $\omega_{1/m_1}$  du chainon 1 par rapport au chainon  $m_1$ ;  $M_{1/2}^{fr}$  de sens opposé à la vitesse angulaire  $\omega_{2/1}$ ;  $M_{k/2}^{fr}$  de sens opposé à la vitesse angulaire  $\omega_{2/k_2}$ .  $M_{2/1}^{fr}$  a la direction inverse de  $M_{1/2}^{fr}$  en cas d'équilibre parce que  $\omega_{1/2} = -\omega_{2/1}$ .

Pour calculer les composantes  $R_{m/1}^*$  et  $R_{k/2}^*$ , on isole séparément les chainons 1 et 2 et on écrit les équations des moments de toutes les forces sollicitant le chainon par rapport au point J (condition d'équilibre des chainons).

Le triangle (1, J, 2) soit direct.

$$M_J(R_{m/1}^*) + M_J(f_{11}) + M_J(m_1 g) + M_J(P_{1/1}) + M_J(P_{1/2}) + M_{11} + M_{m/1}^{fr} + M_{2/1}^{fr} = 0 \quad (25)$$

$$M_J(R_{k/2}^*) + M_J(f_{12}) + M_J(m_2 g) + M_J(P_{2/1}) + M_J(P_{2/2}) + M_{12} + M_{k/2}^{fr} + M_{1/2}^{fr} = 0 \quad (26)$$

Si on écrit les deux autres équations vectorielles d'équilibre des forces pour les éléments 1 et 2, on aura à résoudre en tout six équations algébriques d'équilibre qui demandent des calculs fort encombrants, étant donné que dans les expressions des moments de frottement figurent encore les forces de réaction que l'on se propose justement de rechercher. Pour relever cette contrainte, on préfère utiliser une méthode de calcul par approximations successives donnée dans [3].

D'après cette méthode, on considère en première approximation que les moments des forces de frottement sont nuls, soient:

$$M_{m>1}''=0 ; M_{m>2}''=0 ; M_{1<2}''=-M_{2<1}''=0$$

Le problème se réduit dans une première mesure à la détermination des forces dans les couples sans tenir compte des forces de frottement; on obtient à l'aide des équations (25) et (26) sachant que:

$$M_{11}=[-I_1 \times \alpha'' (J/I) / l_{11} \times k = -I_1 \times \omega'' \times A_1'' \times k$$

$$M_{12}=[-I_2 \times \alpha'' (J/K) / l_{21} \times k = -I_2 \times \omega'' \times A_2'' \times k ; k \text{ est un vecteur}$$

unitaire perpendiculaire au plan du mécanisme tel que le trièdre (i,j,k) soit direct.

Ces moments des forces d'inertie sont de sens contraire aux analogues des accélérations  $A_1''$  et  $A_2''$ .

$$f_{11} = -m_1 a_{G1} = -m_1 \times \omega'' \times [r_{11} \times (F_{11}'' \times e_{11}'' + F_{11}'' \times e_{11}'') + (1_1 - f_{11}) \times (A_1'' \times e_{11}'' + A_1'' \times e_{11}'')] ]$$

$$f_{12} = -m_2 a_{G2} = -m_2 \times \omega'' \times [r_{21} \times (F_{21}'' \times e_{21}'' + F_{21}'' \times e_{21}'') + (1_2 - f_{12}) \times (A_2'' \times e_{21}'' + A_2'' \times e_{21}'')] ]$$

$m_1 g = -m_1 g j ; m_2 g = -m_2 g j ; j$  est un vecteur unitaire de la direction verticale du plan (X,Y).

$$R_{m>1} = R_{m>1}'' \times e_{11}'' - R_{m>1}'' \times e_{11}'$$

$$R_{1<2} = R_{1<2}'' \times e_{21}'' + R_{1<2}'' \times e_{21}'$$

$$P_1 = P_{1<1}'' \times e_{11}'' + P_{1<1}'' \times e_{11}'$$

$$P_2 = P_{2<1}'' \times e_{21}'' + P_{2<1}'' \times e_{21}'$$

$$M_1(f_{11}) = -f_{11} \times e_{11} \Delta f_{11} \quad (\Delta \text{ produit vectoriel})$$

$$M_2(f_{12}) = -f_{12} \times e_{21} \Delta f_{12}$$

$M_1(m, g) = -f_1 \times e_1 \Delta - m_1 g j$

$M_2(m, g) = -f_2 \times e_2 \Delta - m_2 g j$

$M_1(P_1) = -j_1 \times e_1 \Delta P_1$

$M_2(P_2) = -j_2 \times e_2 \Delta P_2$

$M_1(R_{1/2}) = -l_1 \times e_1 \Delta R_{1/2}$

$M_2(R_{2/1}) = -l_2 \times e_2 \Delta R_{2/1}$

$e_1 \Delta e_1'' = \sin(F_1 - A_1) ; e_1 \Delta e_2' = -\cos(F_1 - A_1) ; e_1 \Delta e_3'' = 0$

$e_1 \Delta e_1' = -1 ; e_1 \Delta j = \sin A_1$

$e_1 \Delta e_{11}'' = \sin(A_1 - B_1) ; e_1 \Delta e_{11}' = -\cos(B_1 - A_1)$

$e_2 \Delta e_2'' = -1 ; e_2 \Delta j = \sin A_2 ; e_2 \Delta e_{21}'' = \sin(F_2 - A_2)$

$e_2 \Delta e_3' = -\cos(F_2 - A_2) ; e_2 \Delta e_3'' = 0$

$e_2 \Delta e_{22}'' = \sin(A_2 - B_2) ; e_2 \Delta e_{22}' = -\cos(B_2 - A_2)$

$R_{1/2}^* = [m_1 \times \omega^2 \times f_1 \times (r_1 \times F_1' \times \sin(F_1 - A_1) - r_1 \times F_1'' \times \cos(F_1 - A_1) - (l_1 - f_1) \times A_1'' + m_1 \times g \times f_1 \times \sin A_1 - C_1 \times j_1 \times P_{1/2} \times \sin(A_1 - B_1) + C_1 \times j_1 \times P_{1/2} \times \cos(B_1 - A_1) + M_{12}] / l_1$

$R_{2/1}^* = E_1 / l_1$

$C_1$  est un coefficient qui vaut -1 si le point  $L_1$  se trouve à l'extérieur de l'élément  $IJ$  du côté de  $J$ .

$R_{2/1}^* = [-m_2 \times g \times f_2 \times \sin A_2 - m_2 \times \omega^2 \times f_2 \times (r_2 \times F_2' \times \sin(F_2 - A_2) - r_2 \times F_2'' \times \cos(F_2 - A_2) - (l_2 - f_2) \times A_2'' + C_2 \times j_2 \times P_{2/1} \times \sin(A_2 - B_2) - C_2 \times j_2 \times P_{2/1} \times \cos(B_2 - A_2) - M_{12}] / l_2$

$R_{2/2}^* = E_2 / l_2$

$C_2$  est un coefficient qui vaut -1 si le point  $L_2$  se trouve à l'extérieur de l'élément  $KJ$  du côté de  $J$ .

Pour calculer la composante  $R_{1/z}^1$ , on peut écrire l'équation d'équilibre des moments au point K pour le chaînon 2, on obtient:

$$R_{1/z}^2 = [-m_2 \times \omega^2 \times (l_2 - f_2) \times (r_2 \times F_2' \times \sin(F_2 - A_2) - r_2 \times F_2'' \times \cos(F_2 - A_2)) - (l_2 - f_2) \times A_2'' - m_2 \times g \times (l_2 - f_2) \times \sin A_2 + P_{2/1} \times j_3 \times C_3 \times \sin(A_2 - B_2) - P_{2/2} \times j_3 \times C_3 \times \cos(B_2 - A_2) + M_{12}] / l_2$$

$$R_{1/z}^2 = E_2 / l_2$$

$C_3 = -1$  si le point  $L_2$  se trouve à l'extérieur de l'élément KJ du côté de K.

On calcule la composante  $R_{1/z}^1$  en écrivant l'équation d'équilibre des moments au point I pour le chaînon 1.

$$R_{1/z}^1 = [-R_{1/z}^2 \times l_1 \times \cos(A_2 - A_1) + m_1 \times g \times (l_1 - f_1) \times \sin A_1 + m_1 \times \omega^2 \times (l_1 - f_1) \times (r_1 \times F_1' \times \sin(F_1 - A_1) - r_1 \times F_1'' \times \cos(F_1 - A_1)) - (l_1 - f_1) \times A_1'' - C_4 \times j_4 \times P_{1/1} \times \sin(A_1 - B_1) + C_4 \times j_4 \times P_{1/2} \times \cos(B_1 - A_1) - M_{11}] / l_1 \times \sin(A_1 - A_2)$$

$$R_{1/z}^1 = E_1 / l_1 \times \sin(A_1 - A_2)$$

$C_4 = -1$  si le point  $L_1$  se trouve à l'extérieur de l'élément 1 du côté de I.

On écrit les équations vectorielles d'équilibre des forces respectivement pour les chaînons 2 et 1, on obtient les expressions des composantes  $R_{x/z}^2$  et  $R_{y/z}^2$  en multipliant scalairement les deux équations respectivement par les vecteurs unitaires  $e_x$  et  $e_y$ .

$$R_{m/2}'' = m_2 \times g \times \cos A_2 + m_2 \times \omega^2 \times (-r_{22} \times F_{22}'^2 \times \cos(F_{22} - A_2) - r_{22} \times F_{22}'' \times \sin(F_{22} - A_2) - (l_2 - f_2) \times A_2' \times A_2'^2) - P_{2/1} \times \cos(B_2 - A_2) + P_{2/2} \times \sin(B_2 - A_2) + R_{1/2}'' = E_2 + R_{1/2}''$$

$$R_{m/1}'' = m_1 \times g \times \cos A_1 + m_1 \times \omega^2 \times (-r_{11} \times F_{11}'^2 \times \cos(F_{11} - A_1) - r_{11} \times F_{11}'' \times \sin(F_{11} - A_1) - (l_1 - f_1) \times A_1' \times A_1'^2) - P_{1/1} \times \cos(B_1 - A_1) + P_{1/2} \times \sin(B_1 - A_1) - R_{1/2}'' \times \sin(A_2 - A_1) - R_{1/2}'' \times \cos(A_2 - A_1)$$

$$R_{m/1}'' = E_1 - R_{1/2}'' \times \sin(A_2 - A_1) - R_{1/2}'' \times \cos(A_2 - A_1)$$

Les réactions des couples I, J, et K seront respectivement:

$$R_{m/1} = [(R_{m/1}')^2 + (R_{m/1}'')^2]^{1/2} \quad (27)$$

$$R_{1/2} = [(R_{1/2}')^2 + (R_{1/2}'')^2]^{1/2} \quad (28)$$

$$R_{K/2} = [(R_{K/2}')^2 + (R_{K/2}'')^2]^{1/2} \quad (29)$$

Avec les valeurs de ces réactions, on calcule les moments de frottement dans les couples de rotation avec les équations (22), (23) et (24).

Le moment  $M_{1/2}''$  est de signe négatif si  $\omega_{1/2} = \omega \times (A_1' - A_2')$  est positif; sinon il prendra le signe positif.

Le moment  $M_{m/1}''$  est de signe négatif si  $(\omega_1 - \omega_{m1})$  est positif; sinon il prendra le signe positif.

Le moment  $M_{K/2}''$  est de signe négatif si  $(\omega_2 - \omega_{K2})$  est positif; sinon il prendra le signe positif.

En portant ces valeurs des moments de frottement dans les équations (25) et (26), on reçoit de nouvelles valeurs (2<sup>e</sup> itération) des composantes  $R_{m/1}''$  et  $R_{K/2}''$ . Les nouvelles valeurs des composantes seront différentes de celles obtenues précédemment lorsque les frottements étaient inexistantes.

$$R_{6/1}^* = (E_1 + M_{2/1}^{*'} + M_{6/1}^{*'}) / l_1$$

$$R_{6/2}^* = (E_2 + M_{1/2}^{*'} - M_{6/2}^{*'}) / l_2$$

Les nouvelles valeurs des autres composantes seront:

$$R_{1/2}^* = (E_3 - M_{1/2}^{*'} + M_{6/2}^{*'}) / l_2 = E_7$$

$$R_{1/2}^{**} = (E_4 - M_{1/2}^{*'} - M_{6/1}^{*'}) / l_1 \times \sin(A_1 - A_2) = E_8$$

$$R_{6/2}^{**} = E_5 + E_8$$

$$R_{6/1}^{**} = E_6 - E_7 \times \sin(A_2 - A_1) - E_8 \times \cos(A_2 - A_1)$$

Avec ces composantes on peut calculer les nouvelles valeurs des réactions dans les couples avec les équations (27), (28) et (29).

Pour une précision encore meilleure dans la connaissance des valeurs des réactions dans les couples, on peut réitérer les calculs précédents en calculant les moments de frottement dans les couples avec les nouvelles valeurs des réactions et en les portant de nouveau dans les équations (25) et (26); on obtiendra de nouvelles valeurs pour les composantes et par suite de nouvelles valeurs plus précises pour les réactions.

Cette méthode est convergente si bien qu'à chaque nouvelle approximation, on reçoit une variation moins grande de la valeur de la réaction.

En pratique, on peut toujours se borner à la deuxième et même à la première approximation étant donné que les frottements ne sont pas très importants dans les liaisons des mécanismes en comparaison des forces extérieures.

15-2 Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.R.T. (Voir figure n°21)

Ce groupe est sollicité par les facteurs de forces suivants:

- les forces de pesanteur  $m_1g$  et  $m_2g$  appliquées respectivement aux centres de masse  $G_1$  et  $G_2$ .

$$m_1g = -m_1gj ; m_2g = -m_2gj$$

- la charge  $P_0$  directement appliquée sur le coulisseau avec un de levier  $h_0$ . Sa direction fait un angle  $B_0$  avec la direction de la verticale ascendante.

$$P_0 = P_0 \times e_{00}$$

- la force appliquée  $P_4$  sur le chaînon 4 de point d'application  $M_4$ . Cette force est prise par ses composantes  $P_{4/1}$  et  $P_{4/2}$  de telle manière que la composante  $P_{4/1}$  fasse un angle  $B_4$  avec la direction de la verticale ascendante.

$$P_4 = P_{4/1} \times e_{04} + P_{4/2} \times e_{04}'$$

- les forces de réaction dans les couples de rotation E et F soient  $R_{3/4}$  et  $R_{2/3} = -R_{4/3}$  prises par leurs composantes respectives; ainsi que la force de réaction dans le couple de translation  $R_{m/3}$ .

$$R_{3/4} = R_{3/4}^n \times e_{34} + R_{3/4}^t \times e_{34}'$$

$$R_{2/3} = -R_{3/4}^n \times e_{34} + R_{3/4}^t \times e_{34}'$$

$$R_{m/3} = -R_{m/3}^t \times e_{33} + R_{m/3}^n \times e_{33}'$$

La force de réaction sur la coulisse est appliquée au point  $M_3$  distant de  $n_3$  du point F.



# GRUPE R.R.T.

FG4=FD4

FM4=j5

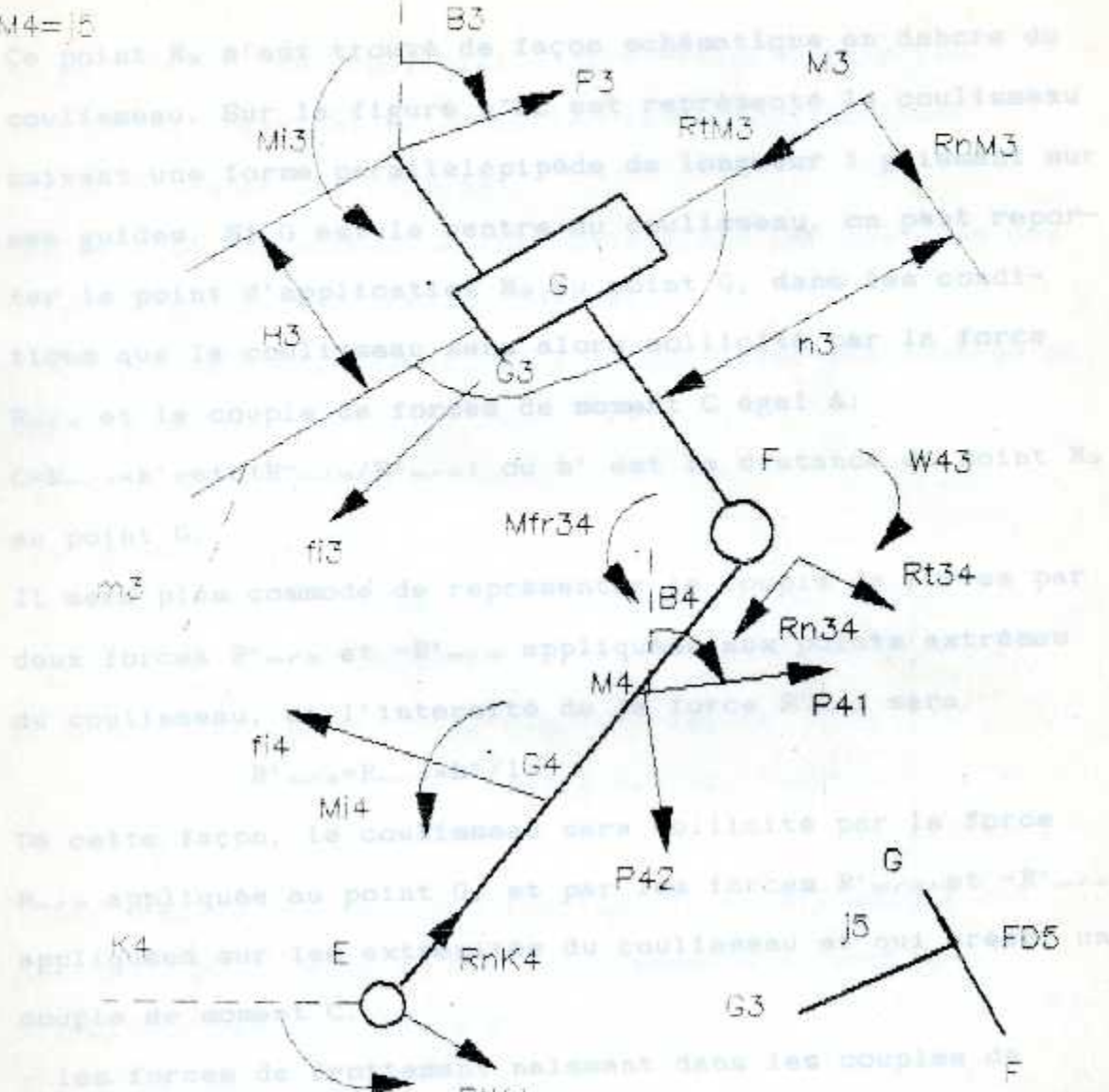


Figure n 21

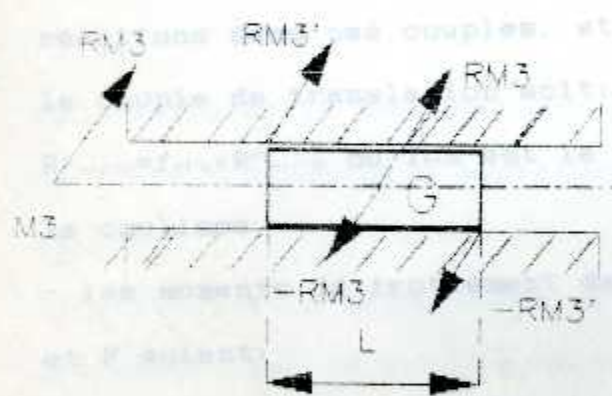


Figure n 22

Ce point  $M_0$  s'est trouvé de façon schématique en dehors du coulisseau. Sur la figure n°22 est représenté le coulisseau suivant une forme parallélépipède de longueur  $l$  glissant sur ses guides. Si  $G$  est le centre du coulisseau, on peut reporter le point d'application  $M_0$  au point  $G$ , dans les conditions que le coulisseau sera alors sollicité par la force  $R_{m/3}$  et le couple de forces de moment  $C$  égal à:

$C = R_{m/3} \times h' \times \sin(R_{m/3}^t / R_{m/3}^n)$  où  $h'$  est la distance du point  $M_0$  au point  $G$ .

Il sera plus commode de représenter le couple de forces par deux forces  $R'_{m/3}$  et  $-R'_{m/3}$  appliquées aux points extrêmes du coulisseau; et l'intensité de la force  $R'_{m/3}$  sera:

$$R'_{m/3} = R_{m/3} \times h' / l$$

De cette façon, le coulisseau sera sollicité par la force  $R_{m/3}$  appliquée au point  $G$ , et par les forces  $R'_{m/3}$  et  $-R'_{m/3}$  appliquées sur les extrémités du coulisseau et qui créent un couple de moment  $C$ .

- les forces de frottement naissant dans les couples de rotation qui peuvent assimilées aux composantes des réactions dans ces couples, et la force de frottement dans le couple de translation soit:

$R_{m/3}^t = f_{m/3} \times R_{m/3}^n$  où  $f_{m/3}$  est le coefficient de frottement sur la coulisse.

- les moments de frottement dans les couples de rotation  $E$  et  $F$  soient:

$$M_{k/4}^{f'} = R_{k/4} \times f_E \times R_E \quad \text{de direction } k \quad (30)$$

$$M_{k/4}^{f''} = -M_{k/2}^{f''} = R_{k/4} \times f_F \times R_E \quad (31)$$

$f_F$  et  $f_E$  sont les coefficients de frottement dans les couples de rotation;  $R_F$  et  $R_E$  les rayons des parties cylindriques de ces couples.

Les sens de ces moments seront déterminés par les sens des vitesses angulaires correspondantes.

- les forces d'inertie  $f_{1,3}$  et  $f_{1,4}$  appliquées aux centres de masse  $G_3$  et  $G_4$ .

$$f_{1,3} = -m_3 \times a_{G_3} = -m_3 \times \omega^2 \times [r_{13} \times (F_3' \times e_{13}'' + F_3'' \times e_{13}') + S_3'' \times e_{13} + 2 \times S_3' \times A_3' \times e_{13}' + S_3 \times (A_3' \times e_{13}'' + A_3'' \times e_{13}')] ]$$

$$f_{1,4} = -m_4 \times a_{G_4} = -m_4 \times \omega^2 \times [r_{14} \times (F_4' \times e_{14}'' + F_4'' \times e_{14}') + (1_4 - f_4) \times (A_4' \times e_{14}'' + A_4'' \times e_{14}')] ]$$

- les moments des forces d'inertie  $M_{1,3}$  et  $M_{1,4}$  autour des points  $G_3$  et  $G_4$  avec  $I_3$  et  $I_4$  les moments d'inertie respectifs des chaînons 3 et 4.

$$M_{1,3} = -I_3 \times e_{13} \times k = -I_3 \times A_3'' \times \omega^2 \times k$$

$$M_{1,4} = -I_4 \times e_{14} \times k = -I_4 \times A_4'' \times \omega^2 \times k$$

Pour calculer la composante  $R_{1,4}$ , on isole le chaînon 4 et on écrit l'équation d'équilibre des moments sollicitants ce chaînon.

On utilisera la méthode des approximations successives présentée dans le paragraphe précédent. A cet effet, dans une première étape, on négligera les moments de frottement dans les couples E et F.

$$R_{m/4}^t = [-m_4 \times f_4 \times \omega^2 \times (r_4 \times F_4' \times \sin(F_4 - A_4) - r_4 \times F_4'' \times \cos(F_4 - A_4)) - (1_4 - f_4) \times A_4''] - m_4 \times g \times f_4 \times \sin A_4 - M_{44} + j_6 \times P_{4/1} \times \sin(A_4 - B_4) + j_6 \times P_{4/2} \times \cos(B_4 - A_4)] = C_7 / 1_4$$

Pour calculer les composantes  $R_{m/3}^n$  et  $R_{m/4}^n$ , on écrit l'équation vectorielle traduisant l'équilibre des forces qui sollicitent le groupe, et on multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $e_4'$  et  $e_4$ . On écrit l'équation

$$R_{m/3}^n = [-m_3 \times g \times \sin A_4 + m_3 \times \omega^2 \times (r_3 \times F_3' \times \sin(A_4 - F_3) + r_3 \times F_3'' \times \cos(A_4 - F_3)) + S_3'' \times \sin(A_3 - A_4) + 2 \times S_3' \times A_3' \times \cos(A_3 - A_4) + S_3 \times A_3' \times \sin(A_4 - A_3) + S_3 \times A_3'' \times \cos(A_3 - A_4) - m_4 \times g \times \sin A_4 + m_4 \times \omega^2 \times (r_4 \times F_4' \times \sin(A_4 - F_4) + r_4 \times F_4'' \times \cos(F_4 - A_4)) + (1_4 - f_4) \times A_4''] - R_{m/4}^t + P_3 \times \sin(A_4 - B_3) + P_{3/1} \times \sin(A_4 - B_4) - P_{3/2} \times \cos(A_4 - B_4)] / (C_8 \times f_{m3} \times \sin(A_4 - A_3))$$

$$R_{m/3}^n = C_{10} / C_{11} = R_{m/4}^n / C_{11} \quad (32)$$

et si le centre de masse  $G_3$  est un coefficient qui vaut -1 si  $S_3'$  est négatif; sinon il prendra la valeur +1. On multiplie scalairement par  $e_3$  et  $e_3'$ , on obtient respectivement:

$$R_{m/3}^t = C_9 \times f_{m3} \times R_{m/3}^n$$

L'expression de la réaction dans le couple de translation sera:

$$R_{m/3}^t = [-m_3 \times g \times \sin A_4 + m_3 \times \omega^2 \times (r_3 \times F_3' \times \sin(A_4 - F_3) + r_3 \times F_3'' \times \cos(F_3 - A_4)) + (1_3 - f_3) \times A_3''] + P_{3/1} \times \sin(A_4 - B_4) - P_{3/2} \times \cos(A_4 - B_4) = R_{m/4}^t + C_{12} \quad (35)$$

$$R_{m/3}^t = [(R_{m/3}^n)^2 \times (1 + (f_{m3})^2)]^{1/2} \quad (33)$$

$$R_{m/3}^t = [-m_3 \times g \times \sin A_4 + m_3 \times \omega^2 \times (r_3 \times F_3' \times \sin(A_4 - F_3) + r_3 \times F_3'' \times \cos(F_3 - A_4)) + (1_3 - f_3) \times A_3''] + P_{3/1} \times \sin(A_4 - B_4) - P_{3/2} \times \cos(A_4 - B_4) = R_{m/4}^t + C_{12} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
R_{m/3}^n &= m_3 \times g \times \cos A_3 + m_3 \times \omega^2 \times (-r_{30} \times F_3'^2 \times \cos(F_3 - A_3) - r_{30} \times F_3'' \times \\
&\quad \times \sin(F_3 - A_3) + S_3'' \times \cos(A_3 - A_4) + 2 \times S_3' \times A_3' \times \sin(A_4 - A_3) - S_3 \times A_3'^2 \times \\
&\quad \times \cos(A_3 - A_4) + S_3 \times A_3'' \times \sin(A_4 - A_3)) - R_{m/3}^n \times (\sin(A_4 - A_3) - C_3 \times f_{m/3} \times \\
&\quad \times \cos(A_4 - A_3)) - P_3 \times \cos(A_4 - B_3) + m_4 \times g \times \cos A_4 + m_4 \times \omega^2 \times (-r_{40} \times F_4'^2 \times \\
&\quad \times \sin(A_4 - F_4) + r_{40} \times F_4'' \times \cos(A_4 - F_4) - (1_4 - f_4) \times A_4'^2) - P_{4/1} \times \\
&\quad \times \cos(B_4 - A_4) + P_{4/2} \times \sin(B_4 - A_4) = C_{13} - R_{m/3}^n \times C_{13} \quad (34)
\end{aligned}$$

Pour calculer la distance  $n_3$ , on écrit l'équation d'équilibre des moments pour le chaînon 3, on obtient:

$$\begin{aligned}
n_3 &= -(h_3 + d_3) \times P_3 \times \cos(A_3 - B_3) + m_3 \times g \times f_3 \times \cos A_3 + C_{14} \times m_3 \times g \times j_3 \times \\
&\quad \times \sin A_3 + m_3 \times f_3 \times \omega^2 \times (-r_{30} \times F_3'^2 \times \cos(F_3 - A_3) + r_{30} \times F_3'' \times \sin(A_3 - F_3) + S_3'' - \\
&\quad - S_3 \times A_3'^2) + C_{14} \times m_3 \times j_3 \times \omega^2 \times (r_{30} \times F_3'^2 \times \sin(F_3 - A_3) - r_{30} \times F_3'' \times \\
&\quad \times \cos(F_3 - A_3) - 2 \times S_3' \times A_3' - S_3 \times A_3'') + M_{13} + d_3 \times R_{m/3}^n \times C_3 \times f_{m/3} / R_{m/3}^n \\
n_3 &= C_{13} / R_{m/3}^n + d_3 \times R_{m/3}^n \times C_3 \times f_{m/3}
\end{aligned}$$

$C_{14}$  est un coefficient qui vaut -1 si le centre de masse  $G_3$  se trouve à droite du point G.

On écrit l'équilibre du chaînon 4 et on multiplie scalairement par  $e_4$  et  $e_4'$ ; on obtient respectivement:

$$\begin{aligned}
R_{K/4}^n &= R_{m/4}^n - m_4 \times g \times \cos A_4 - m_4 \times \omega^2 \times (-r_{40} \times F_4'^2 \times \cos(F_4 - A_4) + r_{40} \times F_4'' \times \\
&\quad \times \sin(A_4 - F_4) - (1_4 - f_4) \times A_4'^2) + P_{4/1} \times \cos(B_4 - A_4) - P_{4/2} \times \\
&\quad \times \sin(B_4 - A_4) = R_{K/4}^n + C_{17} \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{S/4}^n &= -R_{m/4}^n - m_4 \times g \times \sin A_4 + m_4 \times \omega^2 \times (r_{40} \times F_4'^2 \times \sin(A_4 - F_4) + r_{40} \times F_4'' \times \\
&\quad \times \cos(F_4 - A_4) + (1_4 - f_4) \times A_4'') + P_{4/1} \times \sin(A_4 - B_4) - P_{4/2} \times \\
&\quad \times \cos(A_4 - B_4) = -R_{K/4}^n + C_{18} \quad (36)
\end{aligned}$$

\* les forces de réaction dans les couples de rotation et de translation;

La réaction dans le couple F sera:

$$R_{F/a} = l (R_{F/a}^x)^2 + (R_{F/a}^y)^2)^{1/2} \quad (37)$$

\* les forces de frottement dans les couples cinématiques;

La réaction dans le couple E sera:

$$R_{E/a} = l (R_{E/a}^x)^2 + (R_{E/a}^y)^2)^{1/2} \quad (38)$$

On calcule les moments de frottement avec les équations (30) et (31):

Le moment  $M_{E/a}^{(r)}$  sera négatif si  $(\omega \times A_d' - \omega_{K_d})$  est positif; sinon il est positif.

Le moment  $M_{F/a}^{(r)}$  sera négatif si  $(A_d' - A_{B'})$  est positif; sinon il est positif.

Les nouvelles valeurs des composantes, des réactions et du point d'application  $M_{E/a}$ , obtenues par la deuxième itération seront:

Comme dans le paragraphe précédent, le coulisseau sera sollicité par la force  $R_{E/a}$  appliquée au point E, et par les forces  $R_{F/a}^x$  et  $R_{F/a}^y$  appliquées sur les extrémités du coulisseau de longueur  $l$  et qui créent un couple de moment  $M_{F/a}^{(r)}$ ; où  $b'$  est la distance qui sépare le point d'application schématisé de  $R_{F/a}$  du point C centre du coulisseau.

### 15-3- Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.T.R. (Voir figure n°23)

Ce groupe est sollicité par les facteurs de forces suivants:

\* les forces de pesanteur  $m_2g$  et  $m_3g$ ;

\* les forces de réaction dans les couples de rotation et de translation;

\* les forces de frottement dans les couples cinématiques;

\* la charge  $P_B$  de composantes  $P_{B/x}$  et  $P_{B/z}$  appliquée au point  $N_B$ ;

\* les forces d'inertie  $f_{1B}$  et  $f_{1C}$ ;

\* les moments des forces d'inertie  $M_{1B}$  et  $M_{1C}$ ;

\* les moments de frottement dans les couples de rotation;

$$P_B = P_{B/x} \times e_{Bx} + P_{B/z} \times e_{Bz}$$

$$R_{B/z} = R_{B/z}'' \times e_{Bz}' - R_{B/x}'' \times e_{Bx}$$

$R_{B/x} = -R_{B/z} = -R_{B/x}'' \times e_{Bx} + R_{B/z}'' \times e_{Bz}'$ ; cette force sur la coulisse est considérée appliquée en un point distant de  $n_B$  du point B.

Comme dans le paragraphe précédent, le coulisseau sera sollicité par la force  $R_{B/z}$  appliquée au point C, et par les forces  $R_{B/z}' = R_{B/z} \times h' / l$  et  $-R_{B/z}'$  appliquées sur les extrémités du coulisseau de longueur  $l$  et qui créent un couple de moment  $C = R_{B/z} \times h' \times \sin(R_{B/z}'' / R_{B/x}'')$ ; où  $h'$  est la distance qui sépare le point d'application schématisé de  $R_{B/z}$  du point C centre du coulisseau.

$$\bar{R}_{B/z} = R_{B/z}'' \times e_{Bz} + R_{B/x}'' \times e_{Bx}'$$

$$f_{1B} = -m_B \times a_{GB} = -m_B \times \omega^2 \times [r_{GB} \times (F_{B/z}'' \times e_{Bz}'' + F_{B/x}'' \times e_{Bx}') + f_{B/z} \times (A_{B/z}' \times e_{Bz}'' + A_{B/x}'' \times e_{Bx}')] ]$$

$$f_{1C} = -m_C \times a_{GC} = -m_C \times \omega^2 \times [r_{GC} \times (F_{B/z}'' \times e_{Bz}'' + F_{B/x}'' \times e_{Bx}') + f_{B/z} \times (-A_{B/z}' \times e_{Bz}' - A_{B/x}'' \times e_{Bx}')] ]$$

$$M_{1B} = -I_B \times \epsilon_B = -I_B \times \omega^2 \times A_{B/z}''$$

$$M_{1C} = -I_C \times \epsilon_C = -I_C \times \omega^2 \times A_{B/z}''$$

# GRUPE R.T.R.

$M_{51} = F_{51} \cdot r_{51} = f_{51} \cdot R_1$   
 $M_{52} = F_{52} \cdot r_{52} = f_{52} \cdot R_2$  (39)

$f_{51}$  et  $f_{52}$  sont les coefficients de frottement dans les couples de rotation;  $R_1$  et  $R_2$  les rayons des pignons cylindriques dans les couples de rotation.

On isole le chaînon 5 et on écrit l'équation d'équilibre des moments relativement au point C:

Dans une première approximation, on néglige le frottement dans le couple D, on obtient l'expression de la composante  $R_{nK5}$  de la réaction dans le couple D:

$DG_5 = FD_6 \cdot DN_5 = L_5$   
 $EG_6 = FD_7$

La réaction dans le couple de translation sera:

$F_{51} \cdot R_1 + F_{52} \cdot R_2 + \dots = 0$  (44)

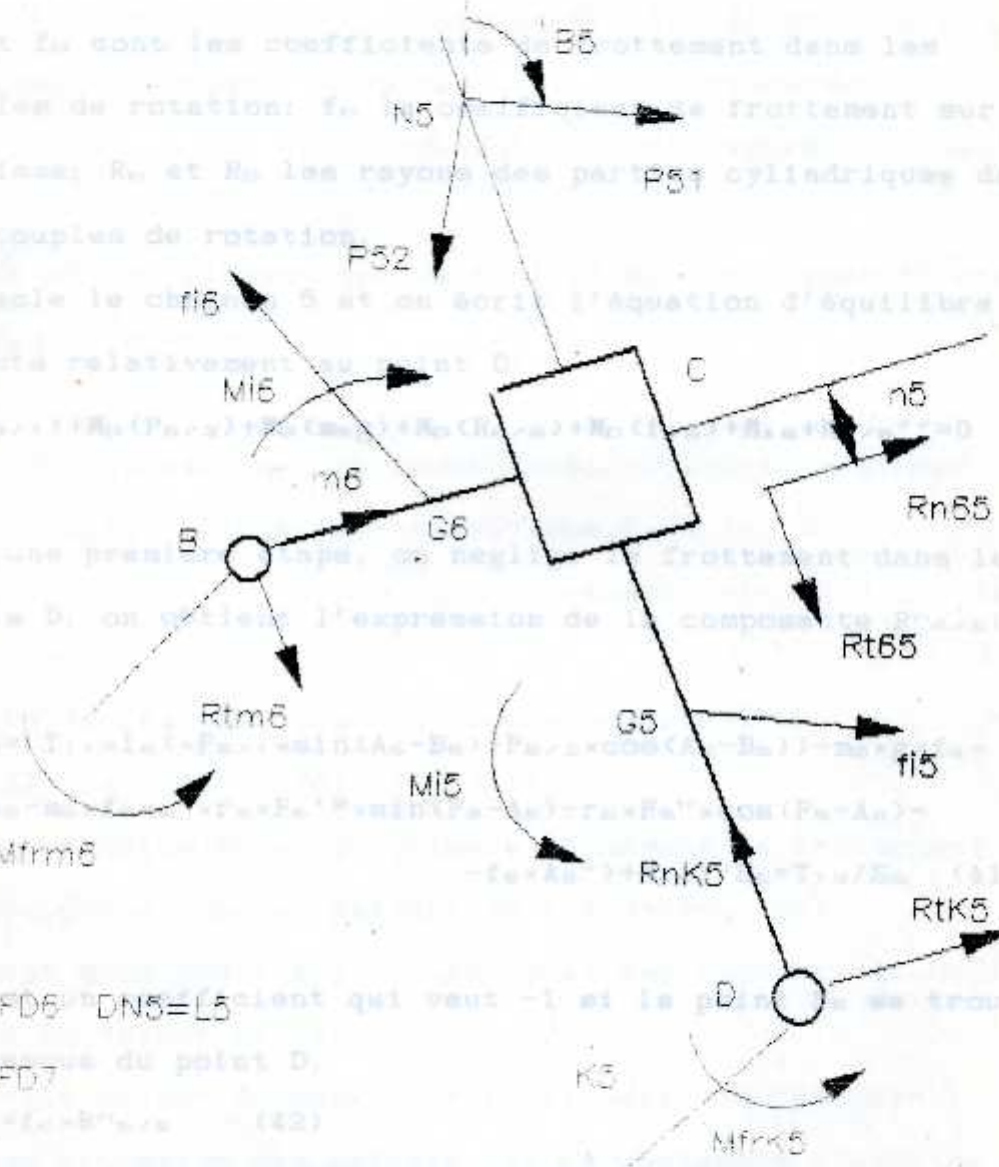


Figure n 23



$$M_{K/5}^* = R_{K/5} \times f_{15} \times R_5 \quad (38)$$

$$M_{K/5}^* = R_{K/5} \times f_0 \times R_0 \quad (39)$$

$$R_{K/5}^* = f_c \times R_{K/5}$$

$f_0$  et  $f_1$  sont les coefficients de frottement dans les couples de rotation;  $f_c$  le coefficient de frottement sur la coulisse;  $R_0$  et  $R_5$  les rayons des parties cylindriques dans les couples de rotation.

On isole le chaînon 5 et on écrit l'équation d'équilibre des moments relativement au point D:

$$M_D(P_{5/1}) + M_D(P_{5/2}) + M_D(m_5g) + M_D(R_{5/6}) + M_D(f_{15}) + M_{15} + M_{K/5}^* = 0 \quad (40)$$

Dans une première étape, on néglige le frottement dans le couple D, on obtient l'expression de la composante  $R_{5/6}^*$ :

$$R_{5/6}^* = [T_{11} \times l_5 \times (P_{5/1} \times \sin(A_5 - B_5) - P_{5/2} \times \cos(A_5 - B_5)) - m_5 \times g \times f_c \times \sin A_5 - m_5 \times f_c \times \omega^2 \times r_5 \times P_{5/1} \times \sin(P_{5/1} - A_5) - r_5 \times P_{5/2} \times \cos(P_{5/2} - A_5) - f_c \times A_{5/6}] / S_{5/6} = T_{11} / S_{5/6} \quad (41)$$

$T_{11}$  est un coefficient qui vaut -1 si le point  $M_5$  se trouve en-dessous du point D.

$$R_{K/5}^* = f_c \times R_{K/5} \quad (42)$$

La réaction dans le couple de translation sera:

$$R_{5/6} = [(R_{5/6}^*)^2 + (R_{K/5}^*)^2]^{1/2} \quad (43)$$

On écrit l'équation vectorielle d'équilibre des forces qui sollicitent le chaînon 5:

$$P_5 + R_{5/6}^* + m_5g + f_{15} + R_{K/5}^* + R_{K/5} = 0 \quad (44)$$

En multipliant l'équation (44) scalairement par les vecteurs unitaires  $e_5$  et  $e_5'$ , on obtient successivement:

$$R_{5/5}^{1/2} = -P_{5/1} \times \cos(B_5 - A_5) - P_{5/2} \times \sin(A_5 - B_5) + T_{12} \times f_c \times R_{5/5}^{0/5} + m_5 \times g \times \cos A_5 + m_5 \times \omega^2 \times (-r_{5c} \times F_{5c}' \times \cos(F_{5c} - A_5) + r_{5c} \times F_{5c}'' \times \sin(A_5 - F_{5c}) - f_{5c} \times A_5' \times \sin(F_{5c} - A_5)) = T_{12} + T_{12} \times f_c \times R_{5/5}^{0/5} \quad (45)$$

$T_{12}$  est un coefficient qui vaut -1 si  $S_{5c}'$  est négatif; sinon il prendra la valeur +1.

$$R_{5/5}^{0/5} = -P_{5/1} \times \sin(B_5 - A_5) - P_{5/2} \times \cos(B_5 - A_5) - R_{5/5}^{1/2} - m_5 \times g \times \sin A_5 + m_5 \times \omega^2 \times (r_{5c} \times F_{5c}' \times \sin(A_5 - F_{5c}) + r_{5c} \times F_{5c}'' \times \cos(F_{5c} - A_5) + f_{5c} \times A_5' \times \cos(F_{5c} - A_5)) = T_{12} - R_{5/5}^{1/2} \quad (46)$$

La force de réaction dans le couple D sera:

$$R_{5/5} = [(R_{5/5}^{1/2})^2 + (R_{5/5}^{0/5})^2]^{1/2} \quad (47)$$

Avec la réaction  $R_{5/5}$ , on calcule le moment de frottement dans le couple D en se servant de l'équation (39).

Ce moment sera positif si  $(\omega \times A_5' - \omega_{5c})$  est négatif; sinon il prendra la valeur négative.

Avec cette valeur du moment de frottement, on fait une deuxième itération des calculs, et on obtient à l'aide de l'équation (40), la nouvelle valeur de la composante  $R_{5/5}^{0/5}$ :

$$R_{5/5}^{0/5} = (T_{12} + M_{5/5} \times \omega^2) / S_5$$

Les nouvelles valeurs des composantes  $R_{5/5}^{1/2}$ ,  $R_{5/5}^{0/5}$ ,  $R_{5/5}^{0/5}$  et des réactions  $R_{5/5}$ ,  $R_{5/5}$ , seront calculées successivement à l'aide des équations (42), (45), (46) et (43), (47).

On isole le chaînon 6 et on écrit l'équation vectorielle qui traduit l'équilibre des forces:

$$R_{m/z}^* + R_{m/z}^{**} + m_6 g + f_{12} + R_{e/z}^{**} + R_{e/z}^* = 0$$

On sait que  $R_{e/z}^* = -R_{e/z}^{**}$

En multipliant scalairement par les vecteurs unitaires  $e_6$  et  $e_6'$ , on reçoit les expressions des composantes suivantes:

$$R_{m/z}^* = -m_6 g \cos A_6 + T_{12} f_c + R_{e/z}^{**} - m_6 \omega^2 \times (-r_6 \times F_e' \cos(F_e - A_6) - r_6 \times F_e'' \sin(F_e - A_6) - f_7 \times A_6')$$

à la force d'inertie:

$$R_{m/z}^* = -m_6 g \sin A_6 + R_{e/z}^{**} + m_6 \omega^2 \times (r_6 \times F_e' \sin(A_6 - F_e) + r_6 \times F_e'' \times \cos(F_e - A_6) - f_7 \times A_6')$$

La réaction dans le couple de rotation B sera:

$$R_{e/z}^* = [(R_{m/z}^*)^2 + (R_{e/z}^{**})^2]^{1/2}$$

On calcule le moment de frottement dans le couple B à l'aide de l'équation (38).

Ce moment est positif si  $(\omega \times A_6' - \omega_{ms})$  est négatif; sinon il prendra la valeur négative.

Le point d'application schématisé de la force  $R_{e/z}^*$  est situé à la distance:

$$n_6 = [M_{12} + M_{m/z}^* (-m_6 \times f_7 \times \omega^2 \times (-r_6 \times F_e' \cos(F_e - A_6) + r_6 \times F_e'' \times \sin(A_6 - F_e) - f_7 \times A_6') - m_6 \times g \times f_7 \times \cos A_6 + d_6 \times T_{12} \times f_c \times R_{e/z}^*) / R_{e/z}^*]$$

Il s'agit le coefficient de frottement dans le couple de rotation et  $R$ , le rayon de la partie cylindrique.

GROUPE T.R.T

15-4- Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe T.R.T. (Voir figure n°24)

Ce groupe est sollicité par les facteurs de forces suivants:

- \* les forces de pesanteur  $m_7g$  et  $m_8g$ ;
- \* les charges  $P_7$  sur le chaînon 7 et  $P_8$  sur le chaînon 8;
- \* les forces de réactions dans les couples de translation et rotation;
- \* les forces d'inertie;
- \* les moments des forces d'inertie  $M_{17}$  et  $M_{18}$ ;
- \* le moment de frottement dans le couple de rotation;
- \* les forces de frottement sur les coulisses;

$$P_7 = P_7 \times e_{07} ; P_8 = P_8 \times e_{08}$$

$$R_{077} = -R_{077}^t \times e_{07} - R_{077}^r \times e_{07}' ; R_{088}^t = f_t \times R_{088}^r$$

$$R_{778} = R_{778}^t \times e_{08} + R_{778}^r \times e_{08}' ;$$

$$R_{887} = -R_{887}^t \times e_{07} - R_{887}^r \times e_{07}' ; R_{887}^r = f_r \times R_{887}^t$$

$f_t$  et  $f_r$  sont les coefficients de frottement dans les couples de translation.

$$f_{17} = -m_7 \times a_{07} = -m_7 \times \omega^2 \times [r_7 \times (F_7^t \times e_{07} + F_7^r \times e_{07}') + S_7 \times (A_7^t \times e_{07} + A_7^r \times e_{07}') + S_7' \times A_7^t \times e_{07}']$$

$$f_{18} = -m_8 \times a_{08} = -m_8 \times \omega^2 \times [r_8 \times (F_8^t \times e_{08} + F_8^r \times e_{08}') + S_8 \times (A_8^t \times e_{08} + A_8^r \times e_{08}') + S_8' \times A_8^t \times e_{08}']$$

$$M_{778}^r = -M_{887}^r = R_{778} \times f_r \times R_r$$

$f_r$  étant le coefficient de frottement dans le couple de rotation et  $R_r$  le rayon de la partie cylindrique.

$$M_{18} = -I_8 \times \omega^2 \times A_8^r ; M_{17} = -I_7 \times \omega^2 \times A_7^r$$

# GRUPE T.R.T.

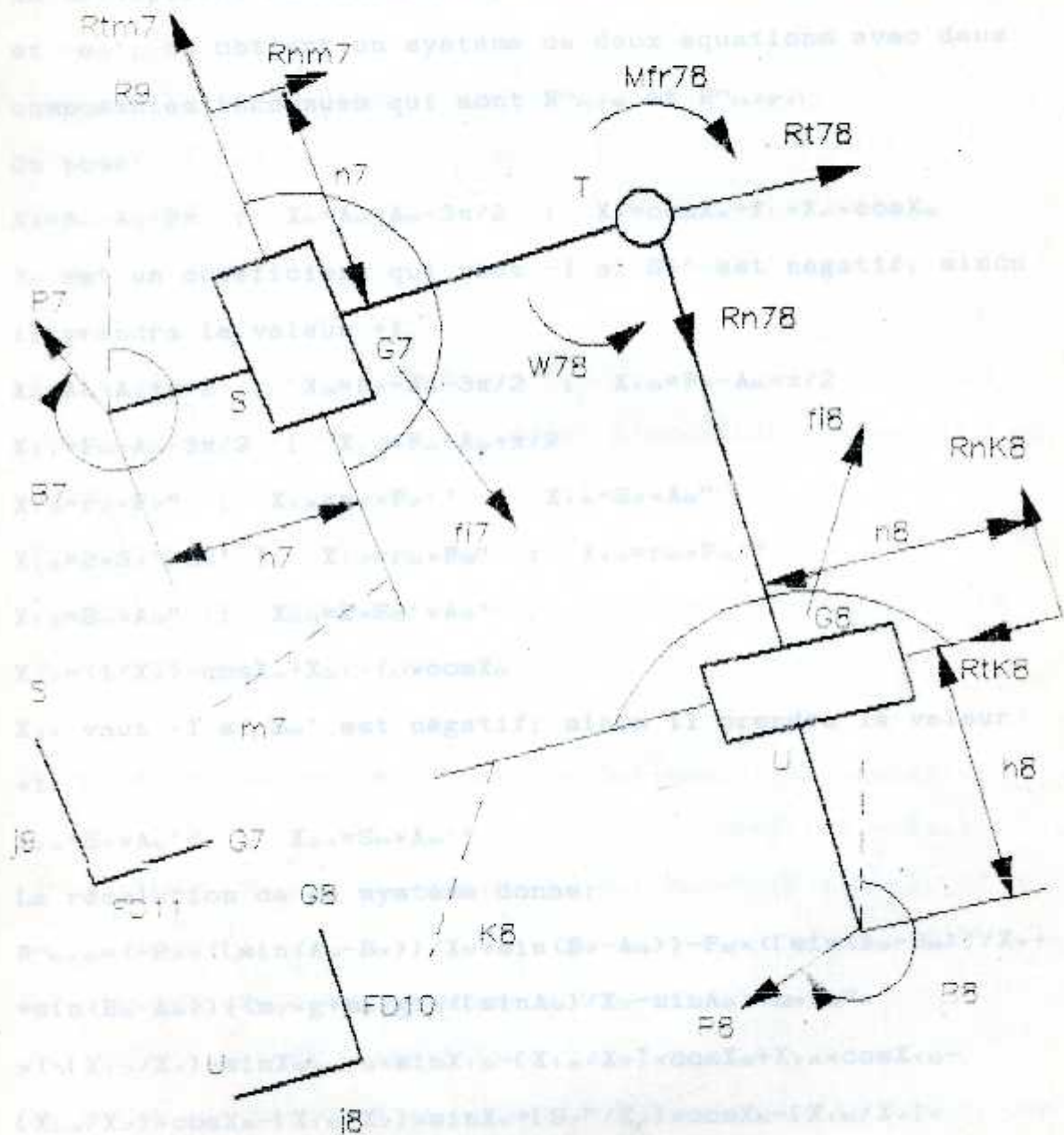


Figure n° 24

On écrit l'équation d'équilibre des forces qui sollicitent le groupe:

$$P_z + P_e + m_z g + m_e g + R_{m/z} + R_{k/e} + f_{1z} + f_{1e} = 0 \quad (48)$$

En multipliant scalairement par les vecteurs unitaires  $-e_z'$  et  $-e_e'$ , on obtient un système de deux équations avec deux composantes inconnues qui sont  $R_{m/z}$  et  $R_{k/e}$ .

On pose:

$$X_4 = A_e - A_z - 2\pi \quad ; \quad X_5 = A_e - A_z - 3\pi/2 \quad ; \quad X_7 = \cos X_4 - f_e \times X_6 \times \cos X_5$$

$X_6$  est un coefficient qui vaut  $-1$  si  $S_z'$  est négatif; sinon il prendra la valeur  $+1$ .

$$X_8 = A_e - A_z + \pi/2 \quad ; \quad X_9 = F_z - A_e - 3\pi/2 \quad ; \quad X_{10} = F_z - A_e + \pi/2$$

$$X_{11} = F_e - A_z - 3\pi/2 \quad ; \quad X_{12} = F_e - A_z + \pi/2$$

$$X_{13} = r_z \times P_z \quad ; \quad X_{14} = r_z \times P_z' \quad ; \quad X_{15} = S_z \times A_e''$$

$$X_{16} = 2 \times S_z' \times A_e' \quad ; \quad X_{17} = r_e \times F_e'' \quad ; \quad X_{18} = r_e \times F_e'$$

$$X_{19} = S_e \times A_z'' \quad ; \quad X_{20} = 2 \times S_e' \times A_z'$$

$$X_{21} = (1/X_7) - \cos X_4 + X_{22} - f_e \times \cos X_5$$

$X_{22}$  vaut  $-1$  si  $S_e'$  est négatif; sinon il prendra la valeur  $+1$ .

$$X_{23} = S_z \times A_e' \quad ; \quad X_{24} = S_e \times A_z'$$

La résolution de ce système donne:

$$R_{m/z} = (-P_z \times (\sin(A_e - B_z)) / X_7 + \sin(B_z - A_e)) - P_e \times (\sin(A_e - B_e)) / X_7 + \sin(B_e - A_e) + (m_z \times g + m_e \times g) \times (\sin A_e / X_7 - \sin A_e) + m_z \times \omega^2 \times (-[X_{13} / X_7] \times \sin X_8 + X_{19} \times \sin X_{10} - [X_{14} / X_7] \times \cos X_9 + X_{14} \times \cos X_{10} - [X_{23} / X_7] \times \cos X_5 - [X_{15} / X_7] \times \sin X_5 + (S_z'' / X_7) \times \cos X_6 - [X_{16} / X_7] \times \sin X_6 + X_{17} + X_{18}) + m_e \times \omega^2 \times (-[X_{17} / X_7] \times \sin X_{11} + X_{17} \times \sin X_{12} - [X_{19} / X_7] \times \cos X_{11} + X_{19} \times \cos X_{12} - X_{10} / X_7 - X_{20} / X_7 + X_{24} \times \cos X_e + X_{15} \times \sin X_4 - S_z'' \times \cos X_6 + X_{20} \times \sin X_6) / X_{21}$$

$$R_{m/z/e}^n = R_{k/z/e}^n \times (\cos X_4 - X_{21} \times f_0 \times \cos X_0) + P_z \times \sin(B_z - A_0) + P_0 \times \sin(B_0 - A_0) + m_z \times g \times \cos A_{10} + m_0 \times g \times \cos A_{10} + m_0 \times \omega^2 \times (-X_{10} \times \sin X_{10} - X_{14} \times \cos X_{10} - X_{15} - X_{16}) + m_0 \times \omega^2 \times (-X_{17} \times \sin X_{12} - X_{10} \times \cos X_{12} - X_{24} \times \cos X_0 - X_{10} \times \sin X_0 + S_0'' \times \cos X_0 - X_{20} \times \sin X_0)$$

Les forces de frottement seront:

$$R_{k/z/e}^f = f_0 \times R_{k/z/e}^n$$

$$R_{m/z/e}^f = f_0 \times R_{m/z/e}^n$$

Les réactions dans les couples de translation seront:

$$R_{k/z/e} = [(R_{k/z/e}^f)^2 + (R_{k/z/e}^n)^2]^{1/2}$$

$$R_{m/z/e} = [(R_{m/z/e}^f)^2 + (R_{m/z/e}^n)^2]^{1/2}$$

On isole le chaînon 8 et on écrit l'équation vectorielle de l'équilibre des forces:

$$R_{z/z/e}^n + R_{z/z/e}^f + R_{k/z/e}^n + R_{k/z/e}^f + m_0 g + P_0 + f_{10} = 0$$

On multiplie scalairement cette équation par les vecteurs unitaires  $-e_0'$  et  $e_0$ , on obtient:

$$R_{z/z/e}^n = R_{k/z/e}^n - m_0 \times g \times \sin A_0 - P_0 \times \sin(A_0 - B_0) - m_0 \times \omega^2 \times (-X_{17} \times \sin X_{11} - X_{10} \times \cos X_{11} - X_{13} - X_{20})$$

$$R_{z/z/e}^f = R_{k/z/e}^f + m_0 \times g \times \cos A_0 - P_0 \times \cos(A_0 - B_0) + m_0 \times \omega^2 \times (X_{17} \times \cos X_{11} - X_{10} \times \sin X_{11} - X_{24} + S_0'')$$

La réaction dans le couple de rotation sera:

$$R_{z/z/e} = [(R_{z/z/e}^f)^2 + (R_{z/z/e}^n)^2]^{1/2}$$

On isole le chaînon 8 et on écrit l'équation d'équilibre des moments au point U:

$$M_U(R_{z/z/e}) + M_U(R_{k/z/e}) + M_U(f_{10}) + M_U(P_0) + M_U(f_{10}) + M_{10} + m_0(m_0 g) = 0$$

On calcule le moment de frottement dans le couple de rotation. Ce moment sera négatif si  $(A_9' - A_9)$  est positif; sinon il prendra la valeur positive.

Le point d'application de la réaction  $R_{K/e}$  est tel que:

$$n_e = [d_9 \times R_{7/e} - h_9 \times P_9 \times \cos(A_9 - B_9) + X_{27} \times m_9 \times g \times j_9 \times \sin A_9 - m_9 \times g \times f_{10} \times \cos A_9 + X_{27} \times m_9 \times \omega^2 \times j_9 \times (-X_{17} \times \cos(F_9 - A_9) + X_{18} \times \sin(F_9 - A_9) - X_{19} - X_{20}) + m_9 \times \omega^2 \times f_{10} \times (-X_{17} \times \cos X_{11} + X_{18} \times \sin X_{11} + X_{24} - S_9'') - X_{25}] / R_{K/e}$$

+ les forces de frottement;

+ la charge directement appliquée  $P_9$ ;

$X_{27} = -1$  si le centre de masse  $G_9$  se trouve à gauche du point U.

+ les moments des forces d'inertie;

On isole le chaînon 7 et on écrit l'équation d'équilibre des moments au point S.

$$M_S(R_{K/7}) + M_S(R_{m/7}) + M_S(f_{17}) + M_S(P_7) + M_S(f_{11}) + M_{17} + M_S(m_7 g) = 0$$

Le point d'application de la réaction  $R_{m/7}$  est tel que:

$$n_7 = [d_7 \times R_{7/e} \times \cos X_{14} + R_{7/e} \times d_7 \times \sin X_{14} + h_7 \times P_7 \times \cos(B_7 - A_9) - X_{29} \times m_7 \times g \times j_9 \times \sin A_9 + m_7 \times g \times f_{11} \times \cos A_9 + X_{29} - X_{26} - m_7 \times \omega^2 \times X_{29} \times j_9 \times (-X_{13} \times \cos(F_7 - A_9) + X_{14} \times \sin(F_7 - A_9) - X_{15} - X_{16}) - m_7 \times \omega^2 \times f_{11} \times (-X_{13} \times \cos X_{10} + X_{14} \times \sin X_{10} + X_{23} - S_7'')] / R_{m/7}$$

$X_{29} = -1$  si le centre de masse  $G_7$  se trouve à gauche du point S.



15-5- Détermination des réactions dans les couples cinématiques du groupe R.T.T. (Voir figure n°25)

Les facteurs de forces qui sollicitent ce groupe sont les suivants:

- \* les forces de pesanteur;
- \* les forces de réaction dans le couple de rotation et les couples de translation;
- \* les forces de frottement;
- \* la charge directement appliquée  $P_{10}$ ;
- \* les forces d'inertie;
- \* les moments des forces d'inertie;
- \* le moment de frottement dans le couple de rotation.

$$R_{m/z} = R_{m/z}^0 \times e_{10} + R_{m/z}^1 \times e_9$$

$$R_{e/z/0} = R_{e/z/0}^0 \times e_{10} - R_{e/z/0}^1 \times e_9$$

$$R_{e/z/1} = R_{e/z/1}^0 \times e_9 - R_{e/z/1}^1 \times e_{10}$$

On note que:  $e_{10} = e_9'$  ;  $e_{10}' = -e_9$

$$R_{e/z/0}^1 = f_v \times R_{e/z/0}^0$$

$R_{e/z/1}^1 = f_s \times R_{e/z/1}^0$  ;  $f_v$  et  $f_s$  sont les coefficients de frottement respectivement sur les coulisseaux des chaînons 9 et 10.

$$P_{10} = P_{10} \times e_{10}$$

$$f_{10} = -m_{10} \times a_{10} = -m_{10} \times \omega^2 \times [r_{10} \times (F_{10}^1 \times e_{x1}'' + F_{10}'' \times e_{x1}') + f_{e/z/1} \times A_{12}' \times e_{10}'' + A_{12}'' \times e_{10}']$$

$$f_{11} = -m_{11} \times a_{11} = -m_{11} \times \omega^2 \times [r_{11} \times (F_{11}^1 \times e_{z1}'' + F_{11}'' \times e_{z1}') + S_{10}'' \times e_{10} + S_{10}' \times (A_{12}' \times e_{10}'' + A_{12}'' \times e_{10}') + 2 \times S_{10}' \times A_{12}' \times e_{10}']$$

# GRUPE R.T.T.

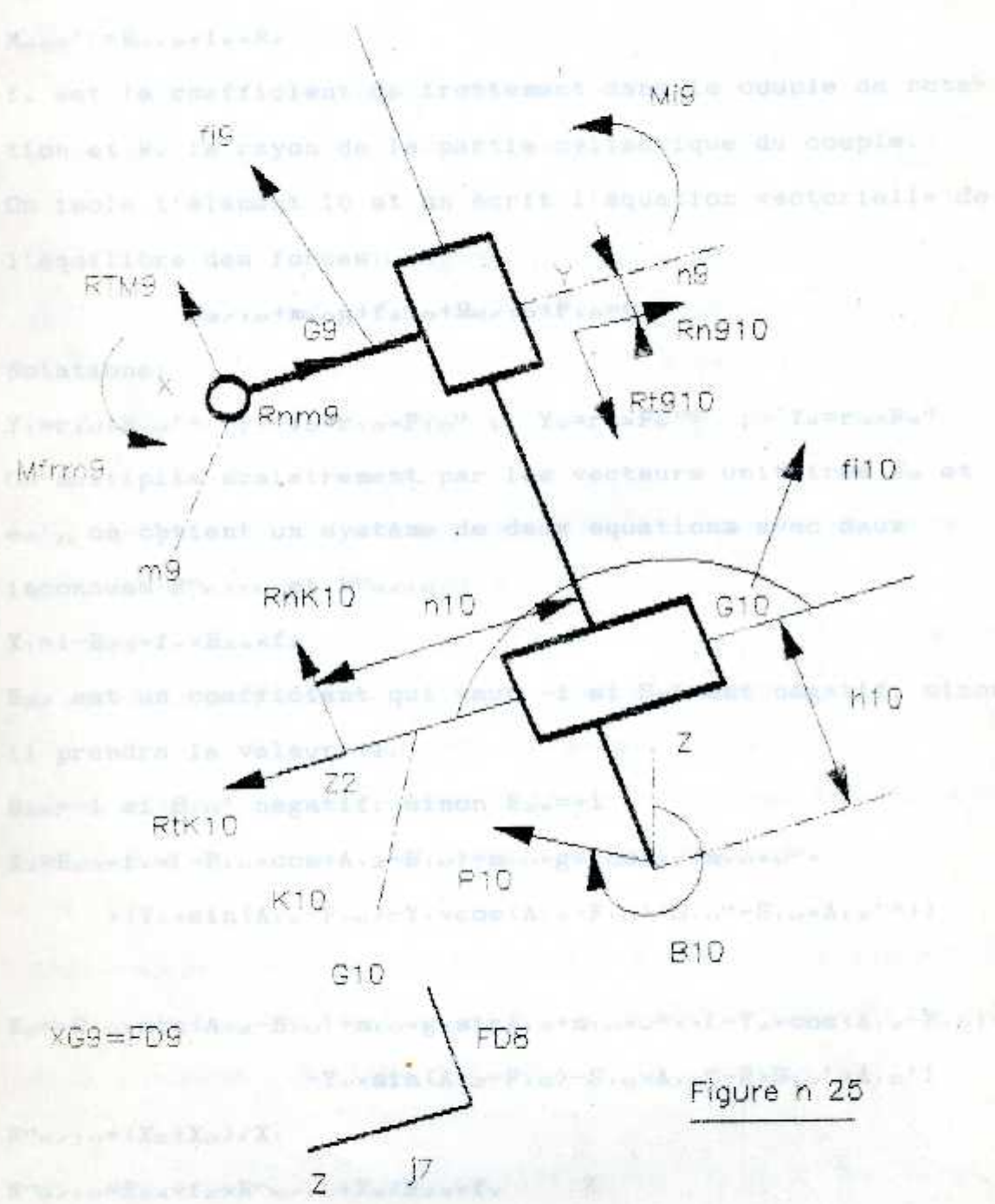


Figure n 25

$$M_{10} = -I_0 \times \omega^2 \times A_{12}''$$

$M_{10} = -I_{10} \times \omega^2 \times A_{12}''$  avec 10 et on écrit l'équation d'équilibre

$$M_{10} = R_{kz/10} \times f_x \times R_x \quad (1)$$

$f_x$  est le coefficient de frottement dans le couple de rotation et  $R_x$  le rayon de la partie cylindrique du couple.

On isole l'élément 10 et on écrit l'équation vectorielle de l'équilibre des forces:

$$R_{kz/10} + m_{10}g + f_{110} + R_{kz/10} + P_{10} = 0$$

Notations:

$$Y_1 = r_{10} \times F_{10}'' ; \quad Y_2 = r_{10} \times F_{10}'' ; \quad Y_3 = r_{10} \times F_{10}'' ; \quad Y_4 = r_{10} \times F_{10}''$$

On multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $e_3$  et  $e_3'$ , on obtient un système de deux équations avec deux inconnues  $R_{kz/10}$  et  $R_{e/10}$ .

$$X_1 = 1 - E_{23} \times f_x \times E_{24} \times f_x$$

$E_{23}$  est un coefficient qui vaut -1 si  $S_{10}'$  est négatif, sinon il prendra la valeur +1.

$E_{24} = -1$  si  $S_{10}'$  négatif; sinon  $E_{24} = +1$

$$X_2 = E_{23} \times f_x \times l - P_{10} \times \cos(A_{12} - B_{10}) + m_{10} \times g \times \cos A_{12} + m_{10} \times \omega^2 \times l \times (Y_2 \times \sin(A_{12} - F_{10}) - Y_1 \times \cos(A_{12} - F_{10}) + S_{10}'' - S_{10}' \times A_{12}'^2)$$

$$X_3 = -P_{10} \times \sin(A_{12} - B_{10}) + m_{10} \times g \times \sin A_{12} + m_{10} \times \omega^2 \times l \times (-Y_2 \times \cos(A_{12} - F_{10}) - Y_1 \times \sin(A_{12} - F_{10}) - S_{10}' \times A_{12}'' - 2 \times S_{10}' \times A_{12}'^2)$$

$$R_{kz/10} = (X_2 + X_3) / X_1$$

$$R_{e/10} = E_{24} \times f_x \times R_{kz/10} + X_2 / E_{23} \times f_x$$

$$R_{1x/10} = R_{kz/10} \times f_x$$

$$R_{1e/10} = R_{e/10} \times f_x$$

$$R_{k/10} = [(R_{1x/10})^2 + (R_{1e/10})^2]^{1/2}$$

$$R_{9/10} = [(R_{9x/10})^2 + (R_{9y/10})^2]^{1/2}$$

On isole le chaînon 10 et on écrit l'équation d'équilibre des moments au point Z:

$$M_z(R_{K/10}) + M_z(R_{9/10}) + M_z(m_{10}g) + M_z(P_{10}) + M_z(f_{110}) + M_{110} = 0$$

Le point d'application de la réaction  $R_{K/10}$  est tel que:

$$n_{10} = [-S_{9x}R_{9x/10} + M_{110} - m_{10} \times g \times (E_{25} \times j_z \times \sin A_{12} + f_{9x} \cos A_{12}) + \\ + h_{10} \times P_{10} \times \cos(A_{12} - B_{10}) - m_{10} \times \omega^2 \times E_{25} \times j_z \times (-Y_{2x} \cos(A_{12} - F_{10}) - \\ Y_{1x} \sin(A_{12} - F_{10}) - S_{10} \times A_{12}'' - 2 \times S_{10}' \times A_{12}') - m_{10} \times \omega^2 \times f_{9x} \times \\ \times (-Y_{2x} \sin(A_{12} - F_{10}) + Y_{1x} \cos(A_{12} - F_{10}) - S_{10}'' + S_{10} \times A_{12}'^2)] / R_{9x/10}$$

$E_{25}$  est un coefficient qui vaut -1 si le centre de masse  $G_{10}$  se trouve à gauche du point Z.

On écrit l'équation vectorielle qui traduit l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur le groupe:

$$R_{m/9} + m_9 g + f_{19} + R_{K/10} + m_{10} g + f_{110} + P_{10} = 0$$

En multipliant scalairement cette équation par les vecteurs unitaires  $e_{9x}$  et  $e_{9y}$ , on obtient successivement:

$$R_{m/9x} = m_9 \times g \times \cos A_{12} + m_9 \times \omega^2 \times (Y_{4x} \sin(A_{12} - F_{9x}) - Y_{3x} \cos(A_{12} - F_{9x}) - f_{9x} \times \\ \times A_{12}'^2) + m_{10} \times g \times \cos A_{12} - P_{10} \times \cos(A_{12} - B_{10}) + m_{10} \times \omega^2 \times (Y_{2x} \sin(A_{12} - \\ F_{10}) - Y_{1x} \cos(A_{12} - F_{10}) + S_{10}'' - S_{10} \times A_{12}'^2) + R_{K/10} \times E_{24} \times f_z$$

$$R_{m/9y} = m_9 \times g \times \sin A_{12} + m_{10} \times g \times \sin A_{12} - P_{10} \times \sin(A_{12} - B_{10}) - R_{K/10} + m_9 \times \\ \times \omega^2 \times (-Y_{4x} \cos(A_{12} - F_{9x}) - Y_{3x} \sin(A_{12} - F_{9x}) - f_{9x} \times A_{12}'') + m_{10} \times \omega^2 \times (-Y_{2x} \times \\ \times \cos(A_{12} - F_{10}) - Y_{1x} \sin(A_{12} - F_{10}) - S_{10} \times A_{12}'' - 2 \times S_{10}' \times A_{12}')$$

La réaction dans le couple de rotation sera

$$R_{x/z} = [(R^{x/mz})^2 + (R^{y/mz})^2]^{1/2}$$

On calcule le moment de frottement dans le couple de rotation et on écrit l'équation d'équilibre des moments pour le chaînon 9 au point X, on obtient le point d'application de la force de réaction  $R_{x/z}$ .

Exemple: le cas où le chaînon initial forme un couple de rotation (figure 15-6).  
$$M_x = [-m_x \times g \times f_x \times \sin A_{12} + d_x \times R^{x/mz} \times f_y \times E_{12} + m_x \times \omega^2 \times f_x \times (Y_{12} \times \cos(P_{12} - A_{12}) + Y_{12} \times \sin(P_{12} - A_{12}) - d_x \times A_{12})] + M_{x/z} + M_{x/d} / R^{x/mz}$$

#### 15-6- Calcul cinéto-statique du chaînon initial des mécanismes

Nous avons déjà examiné que le chaînon initial peut former soit un couple de rotation unimobile, soit un couple de translation unimobile avec le support fixe.

Nous avons vu que dans ces couples, pour la recherche de la réaction, on a à déterminer deux inconnues; le nombre d'équations de la statique qu'il est possible d'écrire est 3. En même temps, le nombre total des inconnues est 2; ce système sera donc à un degré de liberté.

Pour que la chaîne cinématique soit statiquement déterminée, il faut que l'égalité  $3N=2p$ , soit respectée; or justement on remarque que cette condition n'est pas réalisée ( $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$ ). Il découle que sous l'action des forces appliquées, y compris les forces d'inertie, ce système ne se trouve pas en

équilibre. Pour que cet équilibre soit réalisé, il faut faire intervenir une force ou un moment supplémentaire qui puissent réaliser l'équilibre avec l'ensemble des forces qui sont appliquées au chaînon initial. La force et le moment de cette nature s'appellent force équilibrante  $P_{eq}$  ou moment équilibrant  $M_{eq}$ .

Examinons le cas où le chaînon initial forme un couple de rotation avec le chaînon fixe. (Voir figure n°26)

Ce chaînon initial peut être joint par le couple A à un chaînon quelconque n dans la chaîne cinématique du mécanisme principal.

Le point A de cet élément est le point d'application de deux forces qui

sont la réaction  $P_A$  (de composantes  $P_{A1}$  et  $P_{A2}$ ) du chaînon n, et la force équilibrante ou force motrice dirigée perpendiculairement à l'axe de la manivelle. Le moment au point O de cette force sera le moment équilibrant  $M_{eq}$ .

La réaction  $P_A$  est déterminée à la suite du calcul des forces pour le groupe qui est adjoint au chaînon initial; la composante  $P_{A1}$  fait un angle B avec la verticale ascendante. La manivelle est sollicitée en plus par la force de pesanteur  $mg$ ; la force de réaction dans le couple de rotation O de composantes  $P_{O1}$  et  $P_{O2}$ ; la force d'inertie  $f$ , appliquée au centre de masse G; le moment des forces d'inertie  $M_i$  autour du centre de masse et les moments de frottement  $M_{of}$  et  $M_{af}$  dans les couples de rotation O et A.

## ELEMENT MENANT

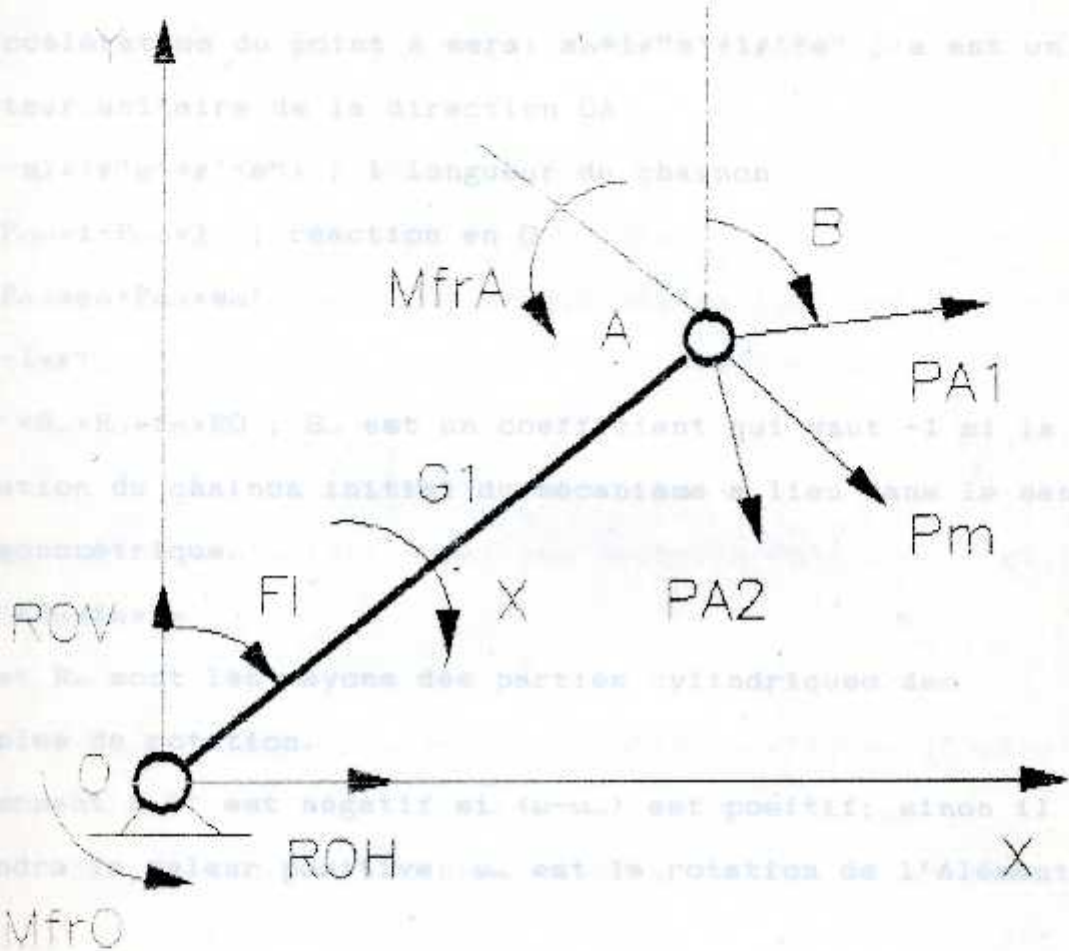


Figure n° 25

La position de la manivelle est déterminée par la coordonnée généralisée  $\varphi(t)$  qui est l'angle déterminé par la verticale ascendante avec la direction OA.

L'accélération du point A sera:  $a_A = l\ddot{\varphi}e' + l\dot{\varphi}'^2e''$  ; e est un vecteur unitaire de la direction OA.

$f_1 = -ml \times (\ddot{\varphi}e' + \dot{\varphi}'^2e'')$  ; l longueur du chaînon

$R_0 = P_0 \cos i + P_0 \sin j$  ; réaction en O

$P_A = P_A \cos e + P_A \sin e'$  ; réaction P. du couple cinématique O à partir de

$M_1 = -l \times \dot{\varphi}'^2$  en vectorielle de l'équilibre des forces.

$M_0'' = S_m \times R_0 \times f_0 \times R_0$  ;  $S_m$  est un coefficient qui vaut -1 si la rotation du chaînon initial du mécanisme a lieu dans le sens trigonométrique, autrement par les vecteurs unitaires i et j.

$M_0''' = P_A \times f_A \times R_A$

$R_0$  et  $R_A$  sont les rayons des parties cylindriques des couples de rotation.

Le moment  $M_0''$  est négatif si  $(\omega - \omega_m)$  est positif; sinon il prendra la valeur positive.  $\omega_m$  est la rotation de l'élément m.

Pour calculer le moment équilibrant, on écrit l'équation de l'équilibre des moments de toutes les forces par rapport au point O: le moment de frottement dans le couple O et de

$M_0(P_A) + M_0(mg) + M_0(P_{\leftarrow A}) + M_0(f_1) + M_1 + M_0'' + M_0''' = 0$  équilibrant, de la force équilibrante et de la réaction en O.

On néglige dans un premier temps le moment de frottement dans le couple O.

On obtient: ... se calculant par les mêmes formules



$$M_O^{(1)}(P_{\theta_0}) = -m \times g \times OG \times \sin \theta + P_{\theta_1} \times l \times \sin(\theta - B) - P_{\theta_2} \times l \times \cos(B - \theta) + \\ + m l^2 \times \theta'' + I \times \theta'' + M_O^{(1)}$$

(1): calcul de la 1<sup>ère</sup> itération.

L'intensité de la force équilibrante se calcule par la condition:

$$P_{\theta_0}^{(1)} = M_O^{(1)}(P_{\theta_0}) / l$$

On déduit la réaction  $P_O$  du couple cinématique  $O$  à partir de l'équation vectorielle de l'équilibre des forces:

$$P_{\theta_0} + P_O + mg + P_{\theta_1} + f_1 = 0$$

On multiplie scalairement par les vecteurs unitaires  $i$  et  $j$ , on obtient:

$$R_{OH}^{(1)} = -P_{\theta_0}^{(1)} \times \cos \theta - P_{\theta_1} \times \sin B - P_{\theta_2} \times \cos B + m \times l \times (\theta'' \times \cos \theta - \omega^2 \times \sin \theta)$$

$$R_{OV}^{(1)} = P_{\theta_0}^{(1)} \times \sin \theta - P_{\theta_1} \times \cos B + P_{\theta_2} \times \sin B - m \times l \times (\theta'' \times \sin \theta + \omega^2 \times \cos \theta) + \\ + mg$$

La réaction dans le couple  $O$  sera:

$$R_O^{(1)} = [(R_{OH}^{(1)})^2 + (R_{OV}^{(1)})^2]^{1/2}$$

On calcule le moment de frottement dans le couple  $O$  et on détermine les nouvelles valeurs du moment équilibrant, de la force équilibrante et de la réaction en  $O$ :

$$M_O^{(2)}(P_{\theta_0}) = M_O^{(1)}(P_{\theta_0}) + M_O^{(1)}$$

$$P_{\theta_0}^{(2)} = M_O^{(2)}(P_{\theta_0}) / l$$

$R_{OH}^{(2)}$  et  $R_{OV}^{(2)}$  se calculent par les mêmes formules.

#####

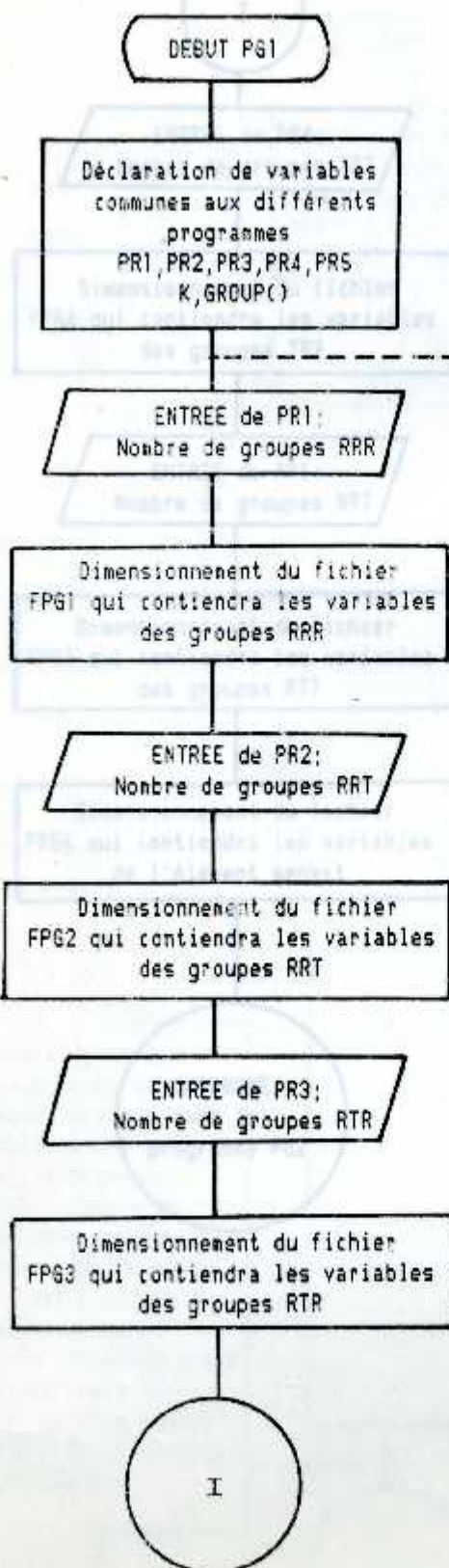
VI- ORDINOGRAMME ET LOGICIEL DE CALCUL



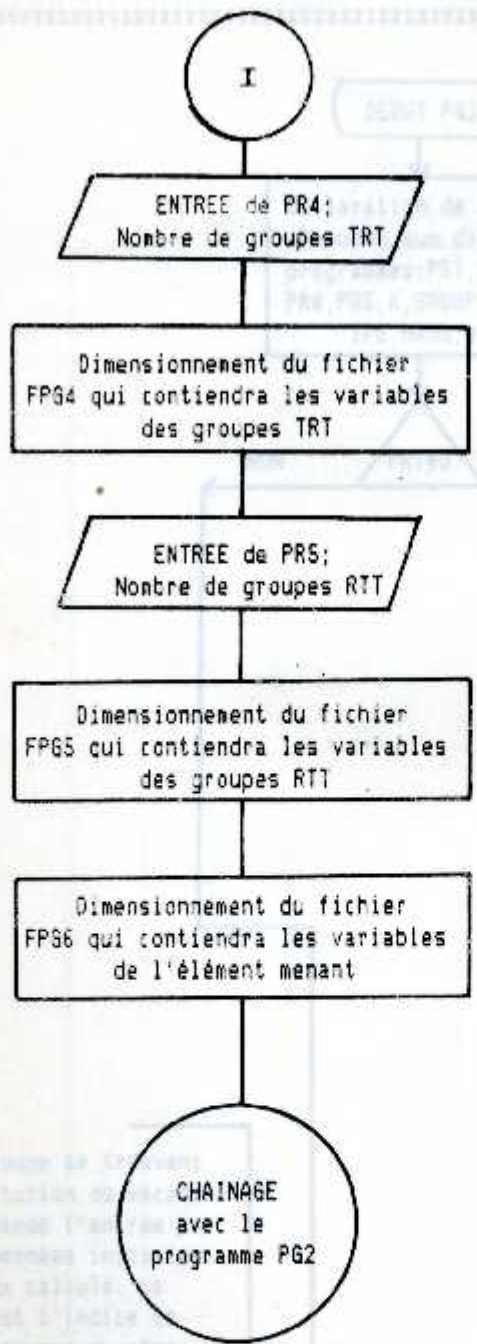
Les fichiers seront créés sur disque, ils seront initialisés à zéro. Chaque fichier contiendra l'ensemble des variables des groupes de même type qui composent le mécanisme objet de l'étude. K représente le nombre de groupes et GROUP() sera un vecteur de K éléments qui indique la position de chaque groupe vis à vis de leur séquençement.

16- Ordinoگرامme

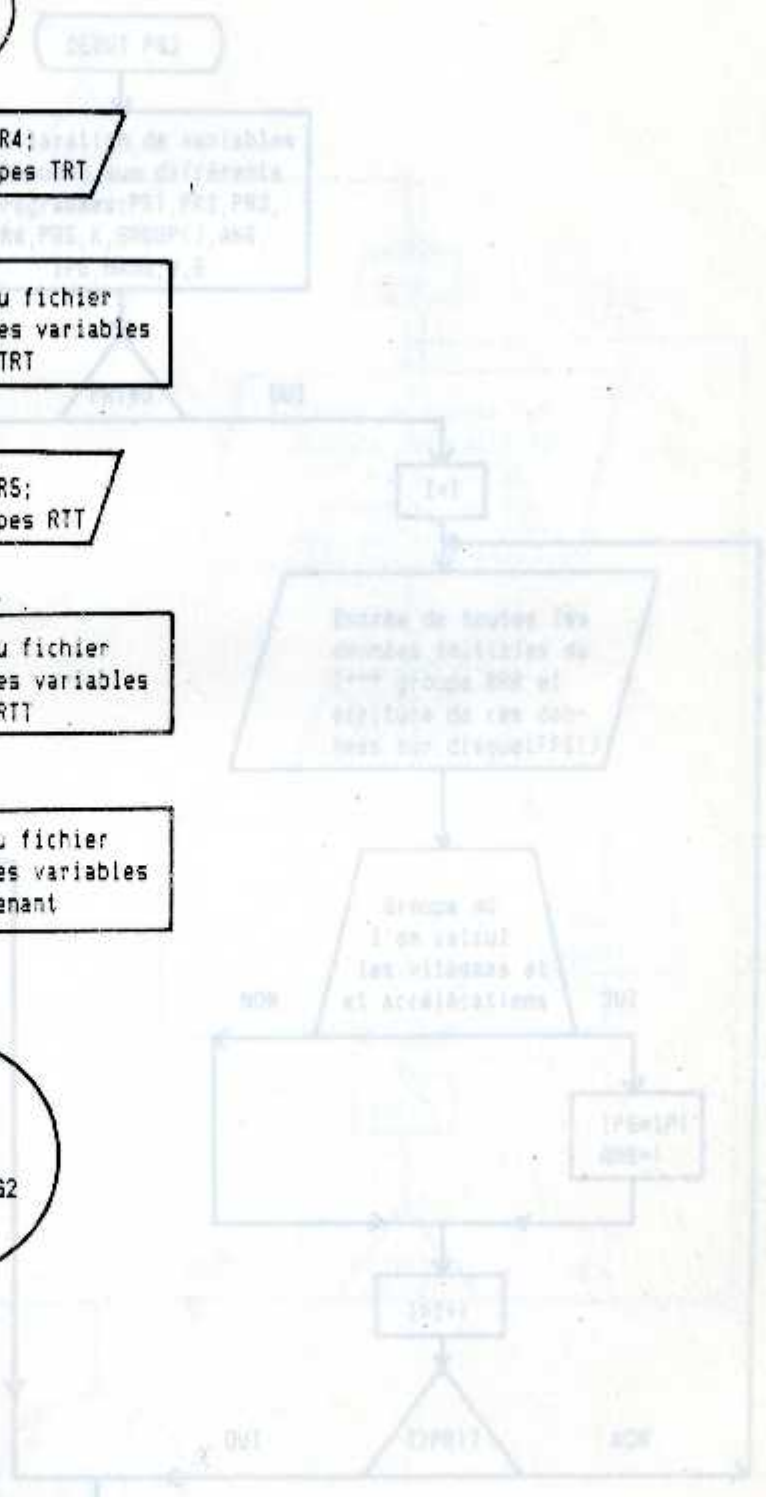
PROGRAMME DE DIMENSIONNEMENT DE FICHIERS  
\*\*\*\*\*



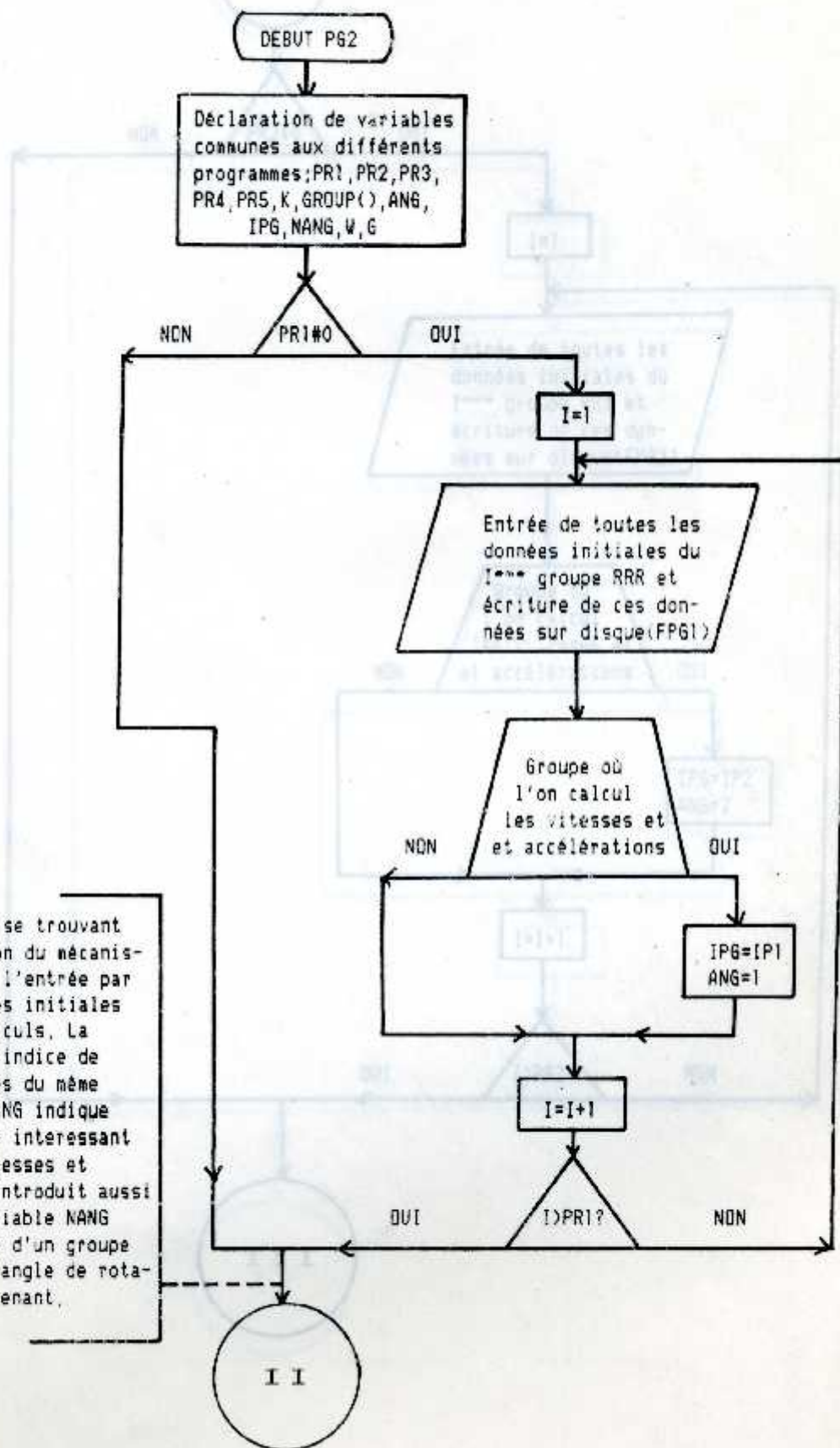
Les fichiers seront créés sur disque, ils seront initialisés à zéro. Chaque fichier contiendra l'ensemble des variables des groupes de même type qui composent le mécanisme objet de l'étude. K représente le nombre de groupes et GROUP() sera un vecteur de K éléments qui indique la position de chaque groupe (ie leur séquençement).



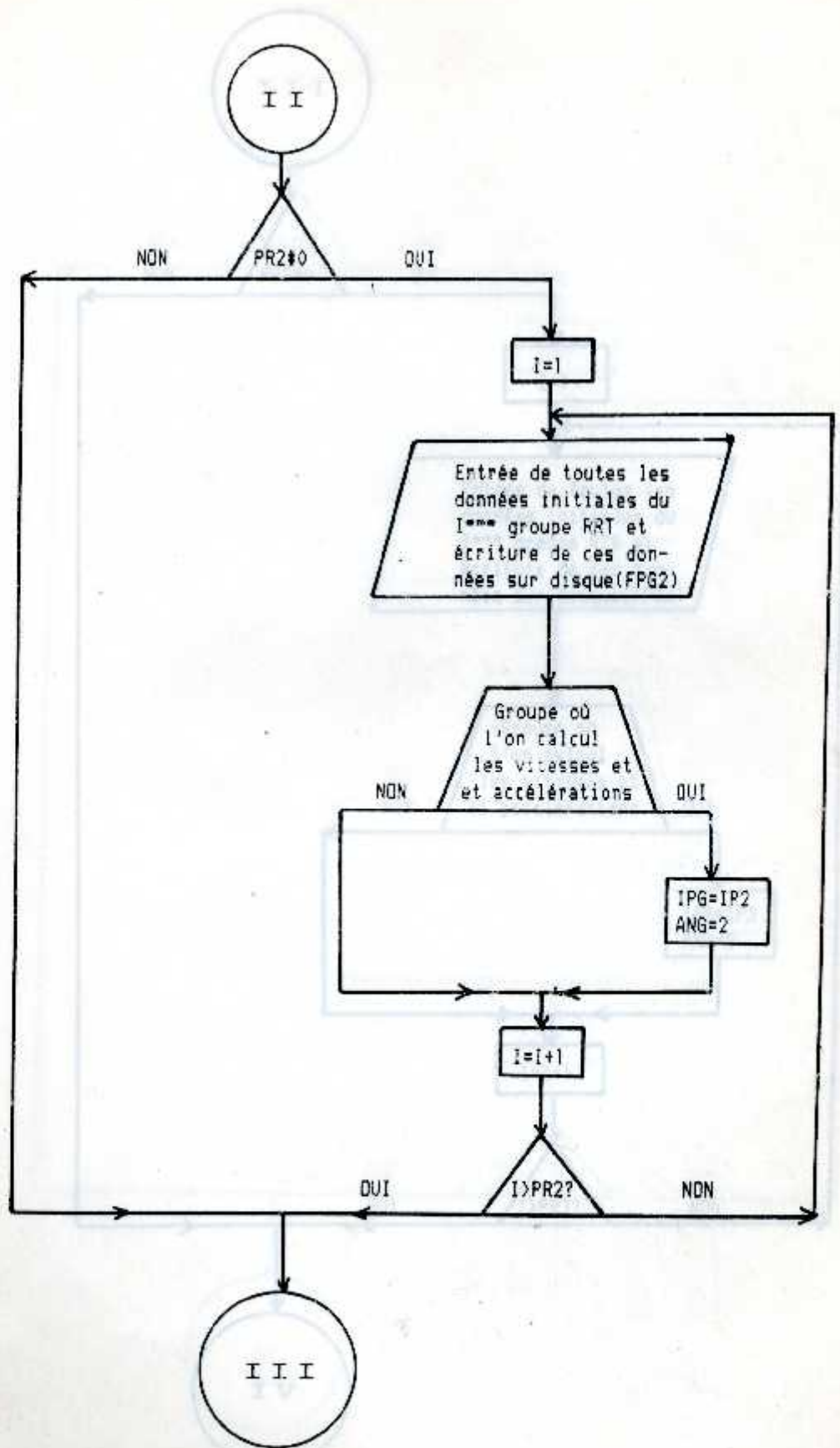
Pour chaque groupe de ...  
 dans la constitution de ...  
 ce, il sera demandé l'angle ...  
 Clavier des données ...  
 nécessaires aux calculs ...  
 variable IPB est l'indice ...  
 parcours des groupes de ...  
 lors, la variable ANG indique ...  
 le groupe où il est intéressant ...  
 de calculer les vitesses et ...  
 accélérations. On introduit aussi ...  
 la valeur de la variable ANG ...  
 au système d'angle d'un groupe ...  
 au contraire à l'angle de rotation ...  
 de l'élément menant.

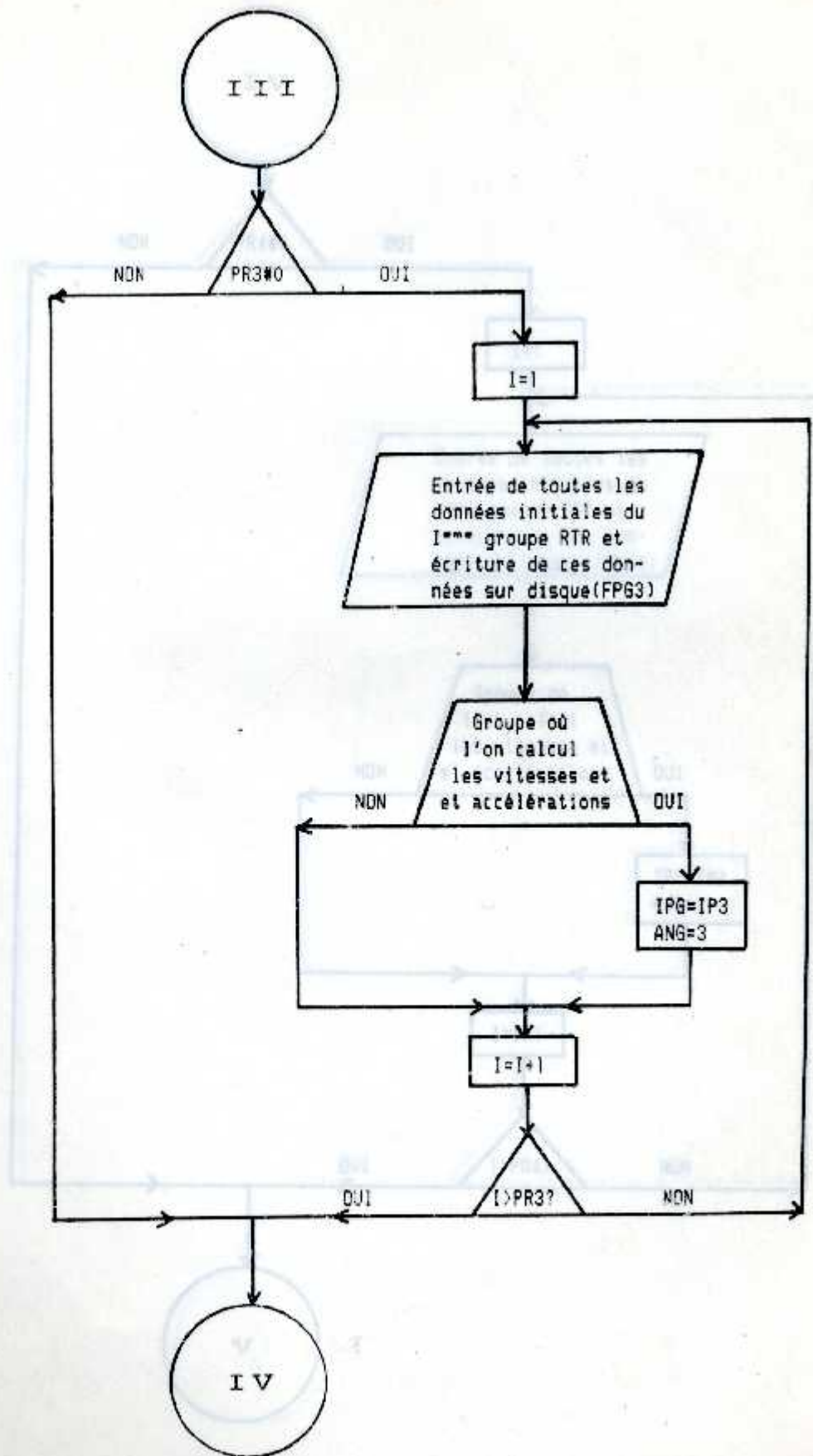


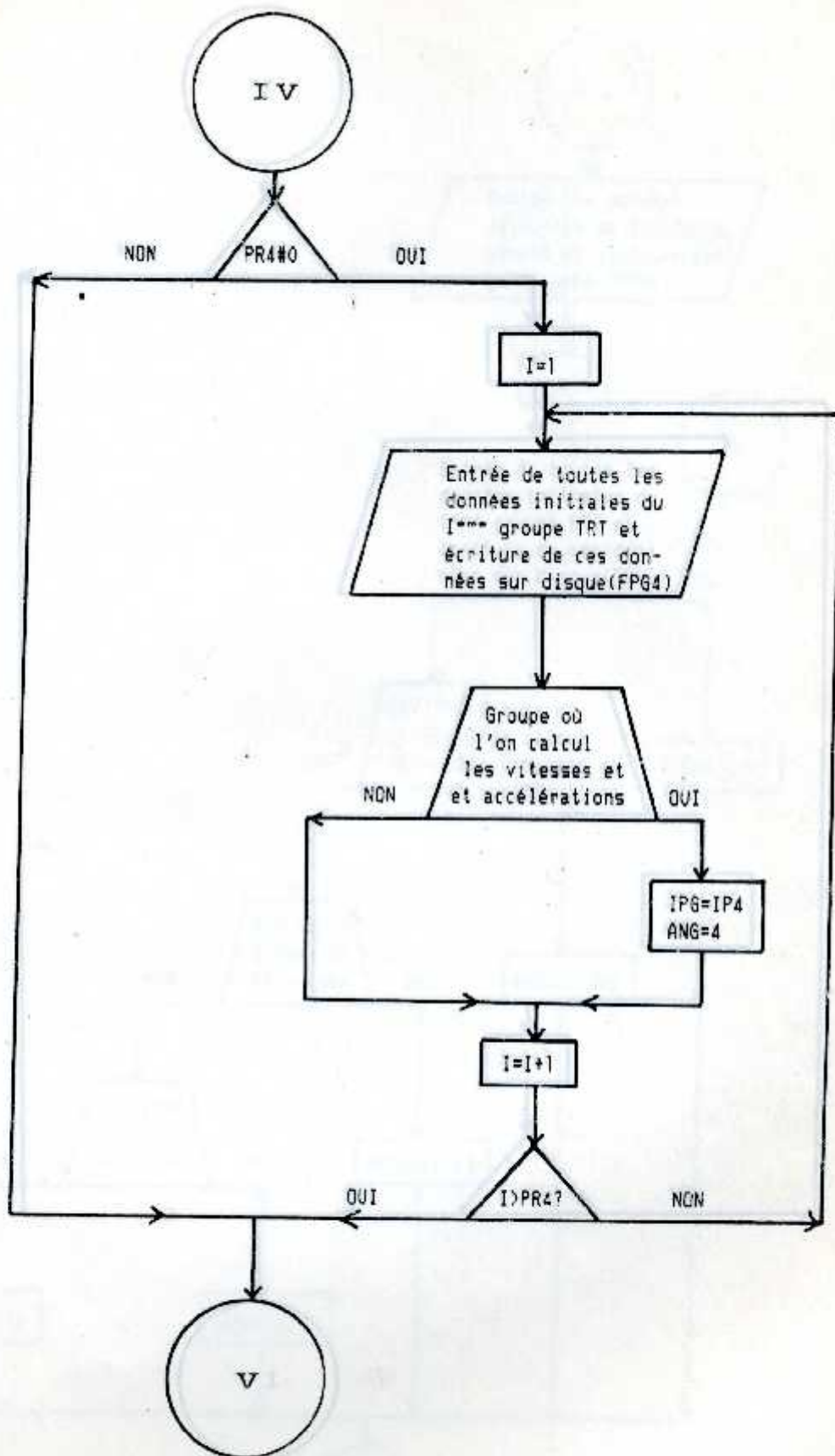
PROGRAMME D'INITIALISATION DE TOUTES LES DONNEES DE DEPART DU MECANISME  
 \*\*\*\*\*



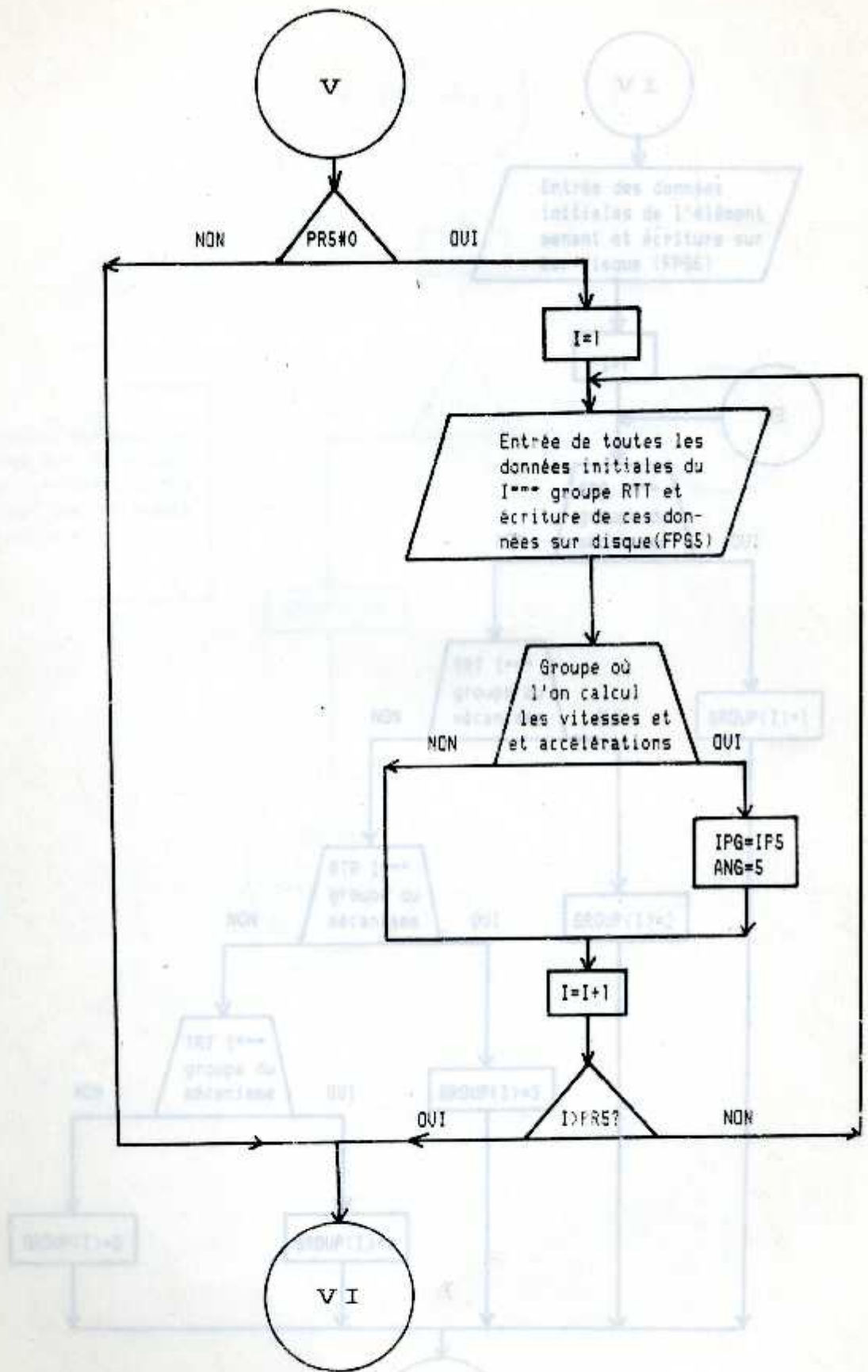
Pour chaque groupe se trouvant dans la constitution du mécanisme, il sera demandé l'entrée par clavier des données initiales nécessaires aux calculs. La variable IPG est l'indice de parcours des groupes du même type; la variable ANG indique le groupe où il est intéressant de calculer les vitesses et accélérations. On introduit aussi la valeur de la variable NANG qui indique l'angle d'un groupe qui correspond à l'angle de rotation de l'élément menant.

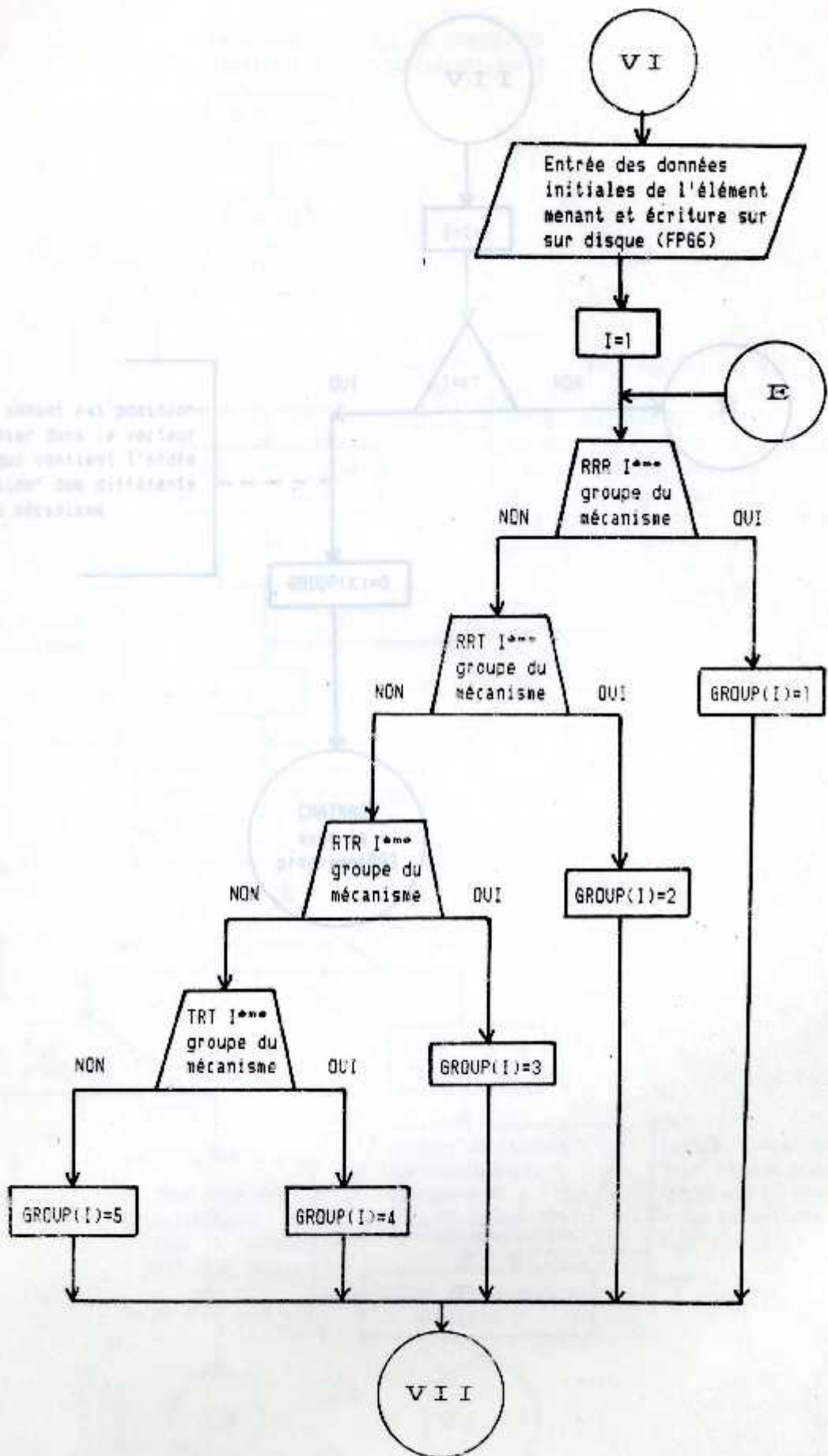






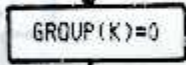
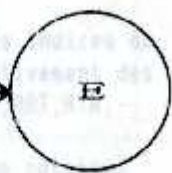
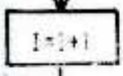






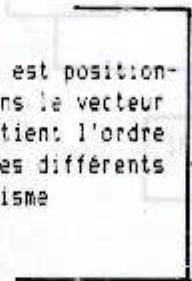
le groupe auquel est positionné en dessous dans le vertice RRR il qui contient l'ordre "apparition" des différents groupes de mécanisme

PROGRAMME DE CALCUL



Le groupe menant est positionné en dernier dans le vecteur GROUP () qui contient l'ordre "d'apparition" des différents groupes du mécanisme

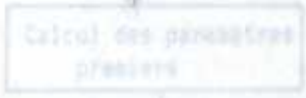
OUI NON



A partir de parcourir le mécanisme groupe par groupe, on peut se demander si un groupe est menant.

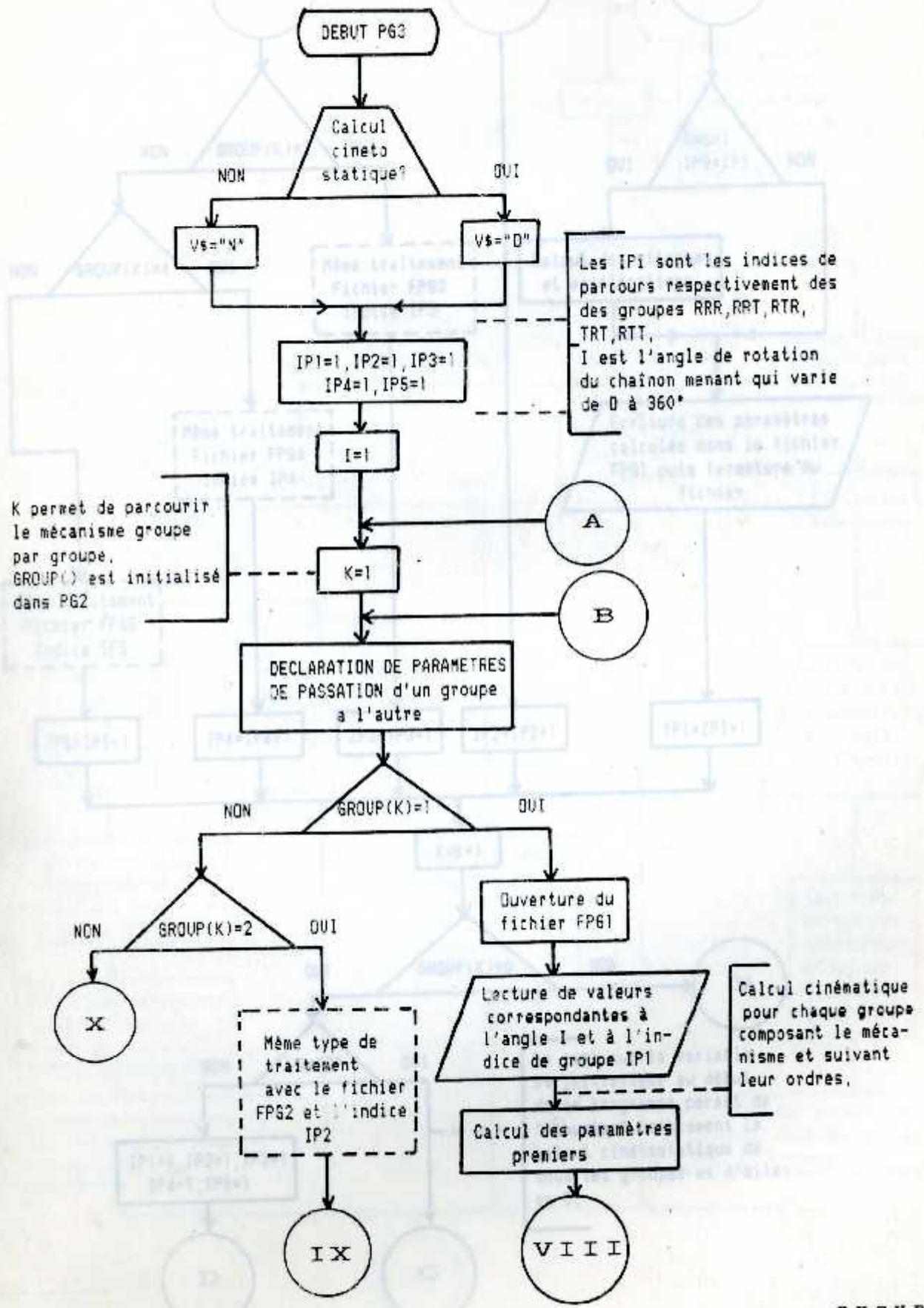


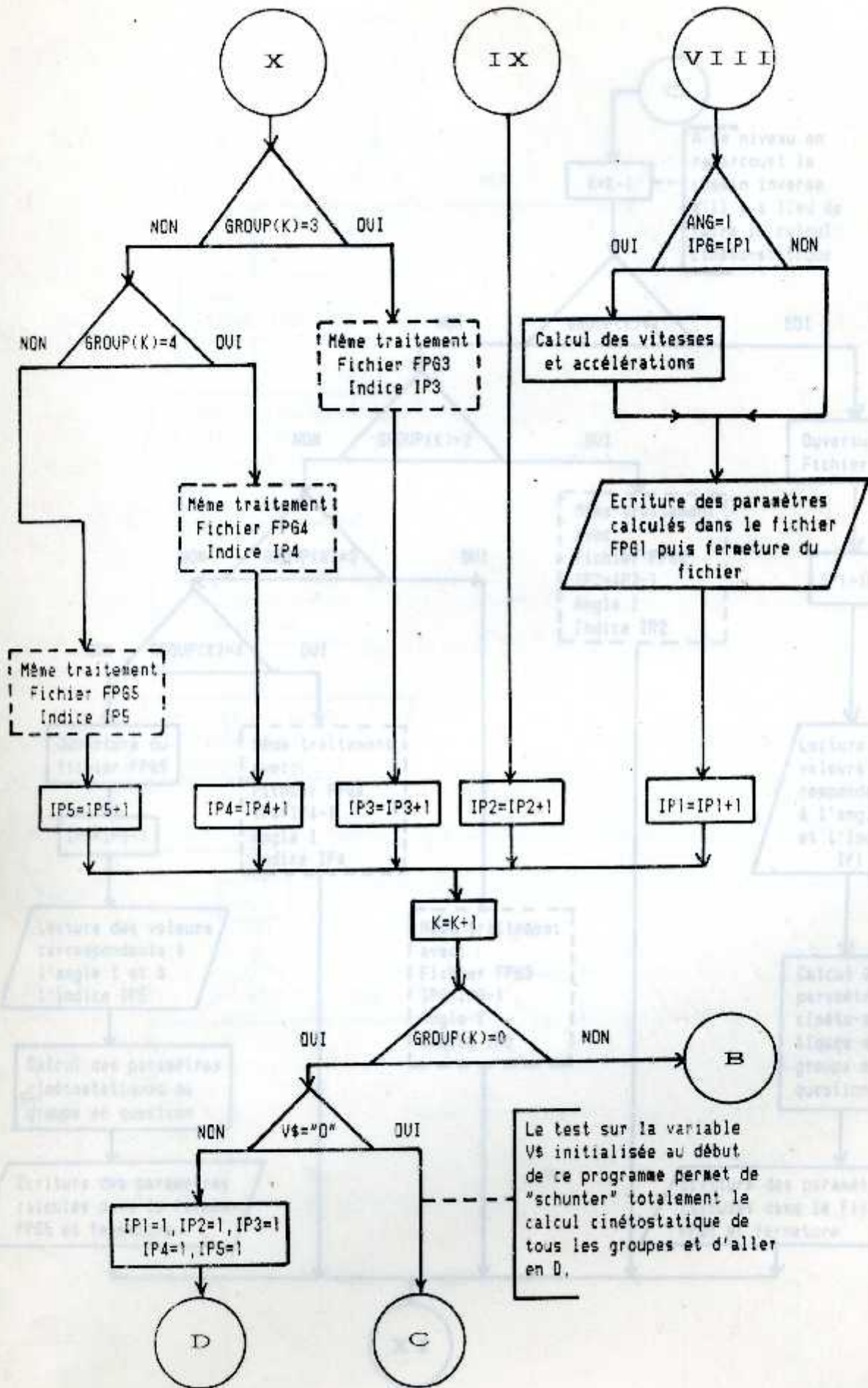
NON OUI

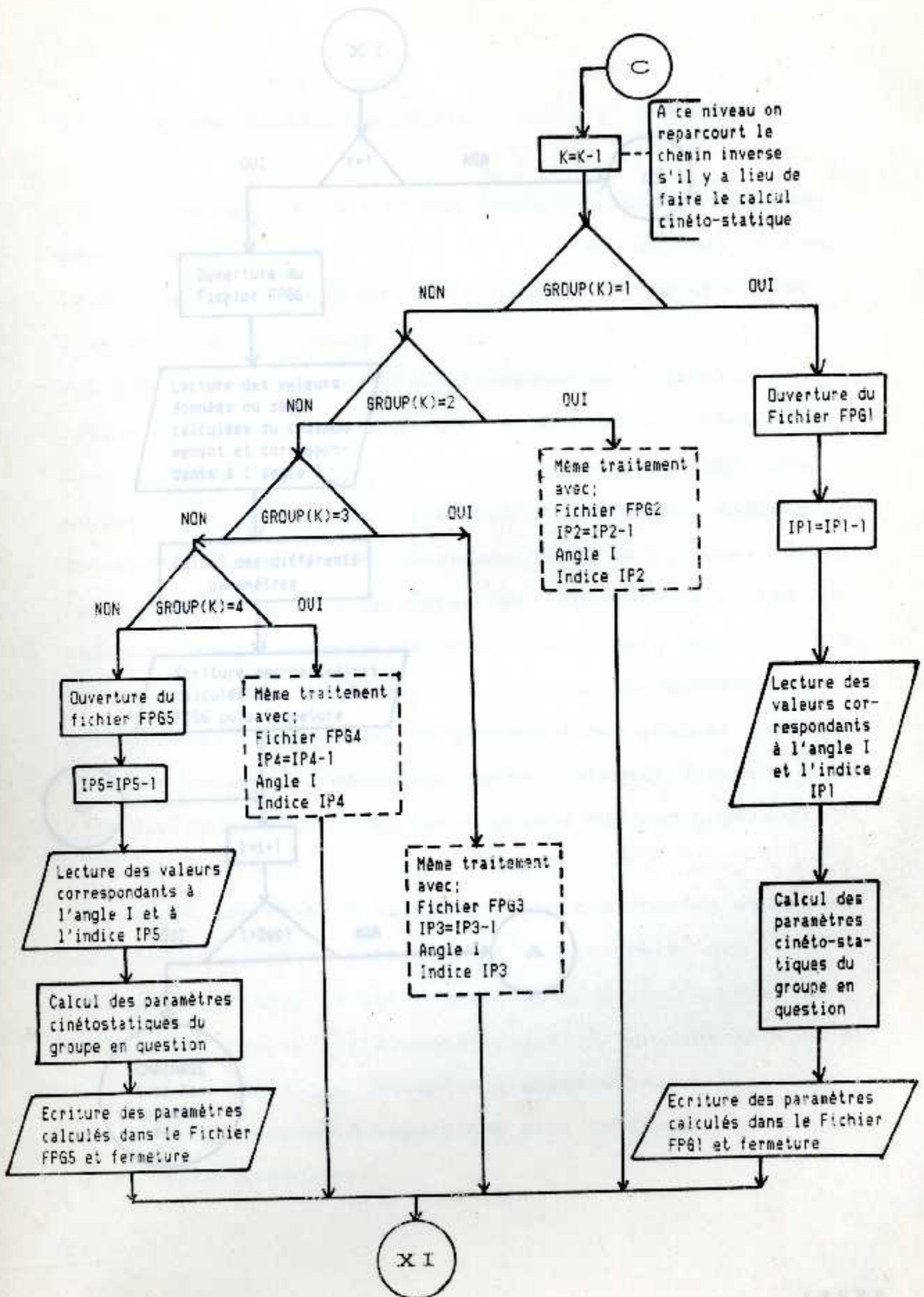


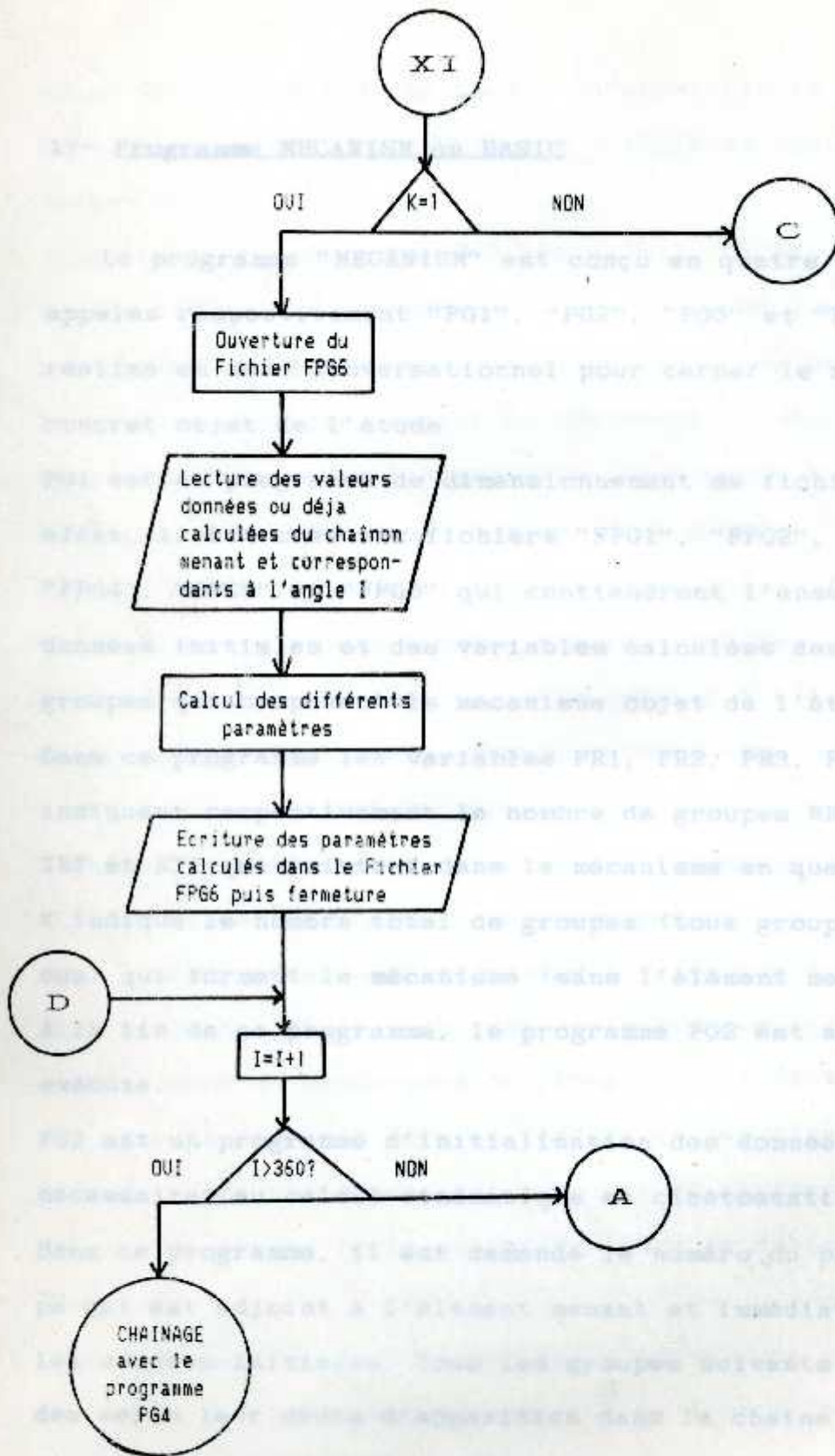
Calcul cinématique pour chaque groupe constant à vitesse et niveau leur ordre.

PROGRAMME DE CALCUL DE PARAMETRES  
\*\*\*\*\*









avant de quitter PG2, il faudra indiquer par la variable

17- Programme MECANISM en BASIC l'angle de rotation de la manivelle P1.

Le programme "MECANISM" est conçu en quatre programmes appelés respectivement "PG1", "PG2", "PG3" et "PG4". Il est réalisé en mode conversationnel pour cerner le mécanisme concret objet de l'étude et du mouvement du mécanisme principal.

PG1 est un programme de dimensionnement de fichiers. A cet effet, il est créé six fichiers "FPG1", "FPG2", "FPG3", "FPG4", "FPG5" et "FPG6" qui contiendront l'ensemble des données initiales et des variables calculées des différents groupes qui composent le mécanisme objet de l'étude.

Dans ce programme les variables PR1, PR2, PR3, PR4, PR5 indiquent respectivement le nombre de groupes RRR, RRT, RTR, TRT et RTT qui existent dans le mécanisme en question.

K indique le nombre total de groupes (tous groupes confondus) qui forment le mécanisme (sans l'élément menant).

A la fin de ce programme, le programme PG2 est appelé et exécuté.

PG2 est un programme d'initialisation des données de départ nécessaires au calcul cinématique et cinétostatique.

Dans ce programme, il est demandé le numéro du premier groupe qui est adjoint à l'élément menant et immédiatement après les données initiales. Tous les groupes suivants sont demandés selon leur ordre d'apparition dans la chaîne cinématique du mécanisme principal.

Le listing du programme est donné en annexe.



Avant de quitter PG2, il faudra indiquer par la variable NANG, l'angle qui correspondra à l'angle de rotation de la manivelle FI.

A la fin de ce programme PG3 est appelé. Ce programme calcule les différents paramètres cinématiques et dynamiques au niveau des différents groupes et suivant leur ordre.

On analyse un cycle complet du mouvement du mécanisme pendant lequel la manivelle prend successivement toutes les positions possibles dans le plan ( $FI=0$  à  $360^\circ$ ).

Le programme est conçu de telle manière que l'étude cinématique se déroule dans l'ordre d'adjonction des groupes. On examine en premier lieu le groupe adjoint à l'élément menant, ensuite on passe au groupe suivant etc. Pour l'étude des forces, le calcul se déroule dans l'ordre inverse de l'étude cinématique: il commence par le dernier groupe adjoint et se termine par l'élément menant.

Pour pouvoir effectuer le passage d'un groupe à un autre, il faut au départ de ce programme déclarer tous les paramètres cinématiques et dynamiques de passation. Il faut aussi déclarer la fonction caractéristique du mécanisme, c'est-à-dire la force extérieure qui agit sur le chaînon exécutif. En général, cette force est connue sous la forme d'un diagramme.

Le programme PG4 est un programme d'édition de matrices ou de vecteurs jugés intéressants et à la demande de "l'opérateur"; de même qu'il ya édition de graphes.

N.B. Un listing du programme est donné en annexe.

## VII- ANALYSE DES RESULTATS

Pour apprécier le modèle d'analyse élaboré et pour s'assurer du bon fonctionnement du programme, nous avons effectué le calcul de certains mécanismes, dont les paramètres sont connus. Parmi ces mécanismes, nous avons considéré le mécanisme d'une raboteuse, le mécanisme d'une presse à étirer et le mécanisme d'un moteur compresseur.

En comparant ces résultats à ceux déjà connus, nous pouvons affirmer que le modèle établi ne laisse aucun doute quant à leur exactitude. Aussi, dans chaque cas de mécanisme, le bon fonctionnement du programme est confirmé.

Tous les résultats cinématiques ou dynamiques sont consignés dans des tableaux ou présentés encore sous forme de graphes. Nous présentons dans cette partie l'utilisation des résultats obtenus dans l'analyse des mécanismes ainsi que quelques éléments de calcul.

### 1- Courbes cinématiques

Pour apprécier le mouvement du chaînon exécutif qui est en contact avec le milieu de travail, on obtient les courbes des positions, des vitesses et des accélérations.

## 2- Calcul de résistance

Les forces de réaction sont déterminées par leurs composantes normales et tangentiels, et ceci dans le but précis de pouvoir aborder le calcul de résistance des éléments.

En effet, au point de vue de la résistance des matériaux, on dimensionne la section minimale du corps des éléments (qui sont des bielles) de façon qu'elle résiste aux contraintes de compression et de traction, on vérifie la résistance au flambage par la composante normale et on détermine les contraintes de flexion maximales par la composante tangentielle.

$$M_{\text{mot}} = M_{\text{rest}} + M_{\text{fr}} \text{ avec } dV = M_{\text{fr}} \cdot d\theta$$

## 3- Calcul du moment moteur

Le moment équilibrant calculé tient compte des forces motrices, des forces de pesanteur, des forces de résistances utiles (réactions), des forces de résistances inutiles (frottement), et des forces d'inertie.

Dans le mouvement permanent, à la fin de chaque cycle de fonctionnement du mécanisme, le travail des forces d'inertie est nulle parce que la variation de l'énergie cinétique est nulle; de même que le travail des forces de gravité.

D'après le théorème de l'énergie cinétique:

$$W_{\text{mot}} - W_{\text{rest}} = \frac{1}{2} \sum m V_2^2 - \frac{1}{2} \sum m V_1^2$$

$W_{\text{rest}}$  est le travail des forces de résistances utiles et

inutiles. Le coefficient de frottement pourra être fixé

$W_{\text{mot}}$  est le travail des forces motrices. Le frottement est

considéré frottement sec, frottement à graissage continu.

Le terme à droite du théorème de l'énergie cinétique, et qui est affecté du signe moins, est assimilé conventionnellement au travail des forces d'inertie. Soit :  $W_{mot} + W_{rest} - W_{fi} = 0$ . Puisque à la fin de chaque cycle le travail des forces d'inertie est nulle, on obtient :

$$W_{mot} = W_{rut} + W_{fr}$$

$W_{rut}$  = travail des forces de réaction

$W_{fr}$  = travail des forces de frottement

Ou bien en faisant intervenir les moments :

$$M_{mot} = M_{rut} + M_{fr} \text{ avec } dW = Md\phi$$

Dans les calculs, nous avons fait ressortir le diagramme de variation du moment résistant des forces de réaction nécessaire au calcul du moment moteur.

#### 4- Calcul du rendement

Les forces de frottement considérées dans les couples cinématiques sont du type frottement de glissement et frottement de roulement qui sont régis d'après les lois d'AMONTONS et COULOMB.

Pour le calcul, nous avons considéré un coefficient de frottement  $f$  qui permet de les déterminer connaissant les charges radiales par la formule  $F_r = R_r \times f$ .

La valeur de ce coefficient de frottement pourra être fixée selon le cas à étudier et selon la nature du frottement à considérer : frottement sec, frottement à graissage onctueux,

frottement à graissage mixte, frottement avec lubrification ou hydrodynamique. Le rendement du mécanisme dépend de la nature des forces de frottement qui apparaissent dans les couples cinématiques et du mode de lubrification, si on admet que les résistances inutiles dans les mécanismes se réduisent seulement à ces forces. Aussi, la connaissance de ces forces permet de calculer ce rendement et de l'optimiser en diminuant la puissance dissipée par frottement. Le rendement  $\mu$  est donné par la formule:

$$\mu = 1 - N_{\text{frot}} / (N_{\text{ut}} + N_{\text{frot}})$$

$N_{\text{frot}}$  étant la puissance moyenne dissipée par frottement et  $N_{\text{ut}}$  la puissance moyenne de résistance utile pour faire fonctionner le mécanisme en régime permanent.

### 5- Éléments de base pour le calcul du volant d'inertie

Dans l'étude dynamique des mécanismes, il est indispensable de remplacer toutes les forces agissant sur les chaînons, par des forces fictives appliquées au chaînon initial dont on connaît la loi de mouvement. On remplace également les masses par une masse fictive appelée masse réduite  $M_r$  et les moments d'inertie par un moment d'inertie réduit  $J_r$ .

Le théorème de l'énergie cinétique devient après transformation

$$M = M_m - M_{\text{rut}} = J_r d\omega/dt + (\omega^2/2) dJ_r/d\theta$$

$M$  est le moment excédentaire.

Le terme  $M_{\text{iper}} = -(\omega^2/2)dJ_r/d\phi$  est le moment réduit des forces d'inertie en mouvement permanent lorsque la vitesse angulaire est constante.

Si  $\omega_{\text{max}}$  et  $\omega_{\text{min}}$  sont les vitesses angulaires maximale et minimale au cours d'un cycle, et si  $\omega$  est la vitesse angulaire moyenne, le coefficient d'irrégularité cyclique est:

$$\delta = (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}) / \omega$$

$\omega$  est la vitesse angulaire moyenne arithmétique. Les valeurs du moment d'inertie réduit des forces d'inertie pour les valeurs maximale et minimale de la vitesse angulaire seront respectivement:

$$M' = M_{\text{iper}}(1 + \delta) \quad M' = M'(\phi)$$

$$M'' = M_{\text{iper}}(1 - \delta) \quad M'' = M''(\phi)$$

Le tracé de ces deux courbes avec la courbe  $M = M(\phi)$  du moment excédentaire permet de calculer le moment d'inertie du volant pour régulariser la rotation de l'élément menant.

Les puissances absorbées par les forces de frottement dans les couples cinématiques sont égales à:

- a)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$
- b)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$
- c)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$
- d)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$  (couple de translation sur la coulisse)
- e)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$
- f)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$
- g)  $P_{\text{rot}} = M_{\text{iper}} \omega$

### Exemple d'une raboteuse transversale

Ce mécanisme comprend un groupe RRT adjoint à un groupe RTR qui lui est adjoint à l'élément menant.

A partir des figures 16, 22, 17, 23, 26 on détermine les paramètres qui permettent de passer d'un groupe à un autre dans le calcul cinématique et dans le calcul dynamique.

Ces paramètres sont:

$$F4=A5 ; dF4/dFI=dA5/dFI ; d^2F4/dFI^2=d^2A5/dFI^2$$

$$P51=RNK4 ; P52=RTK4 ; B5=A4-\pi ; PA1=RNM6 ; PA2=RTM6 ; B=A5+3\times\pi/2$$

L'angle  $F6$  dans le groupe RTR correspond à l'angle  $FI$  de l'élément menant qui varie de 1 à 360°.

Le diagramme de variation de l'effort de coupe est donné en fonction du déplacement de l'outil de la machine.

Toutes les données relatives au calcul sont consignées en annexe 1.

### Calcul du rendement:

Les puissances absorbées par les forces de frottement dans les couples cinématiques sont égales à:

a-  $N_0=R_0 \times f' \times r_0 \times \omega$

b-  $N_a=R_a \times f' \times r_a \times (|\omega_{ac}| + \omega)$

c-  $N_b=R_b \times f' \times r_b \times |\omega_{ac}|$

d-  $N_{ta}=R_{ta} \times f \times |\omega \times l'_{am}|$  (couple de translation sur la coulisse

BC)

e-  $N_c=R_c \times f' \times r_c \times (|\omega_{cb}| + |\omega_{ac}|)$

f-  $N_d=R_d \times f' \times r_d \times |\omega_{cb}|$

g-  $N_{td}=R_{nd} \times f \times |V_d|$

$R_i$  sont les charges radiales dans les couples cinématiques de rotation et  $R_{ni}$  sont les réactions normales sur les coulisses.  $r_i$  sont les rayons des tourillons dans les couples de rotation. Dans les couples cinématiques de translation, nous supposons un coefficient de frottement en mouvement  $f = 0.08$  (contact graissé acier sur bronze ou acier sur fonte).

Dans les tourillons ( nous les supposons rodés), le coefficient sera  $f' = 4/3 \times f$  soit 0,107.

La puissance totale dissipée par frottement est:

$$N_{fr} = N_b + N_a + N_b + N_{ta} + N_c + N_d + N_{td}$$

A partir des graphes  $N_{fr}(\varphi)$  et  $MRUT(\varphi)$  on détermine la valeur moyenne de la puissance absorbée par les frottements et la valeur moyenne de la puissance de résistance utile.

Par planimétrie, ces valeurs seront:

$$N_{fr\text{moy}} = 106,28 \text{ N.m/s} ; N_{r\text{utmoy}} = 98,53 \times 10,47 = 1031,6 \text{ N.m/s}$$

soit le rendement:

$$\mu = 0,906$$

### Exemple d'une presse à étirer

Ce mécanisme comprend un groupe RRT adjoint à un groupe RRR lui-même adjoint à l'élément menant.

Les paramètres de passation sont déterminés à partir des figures 15, 20, 16, 22, 26.

$$F_4 = A_1 ; dF_4/dF_1 = dA_1/dF_1 ; d^2F_4/dF_1^2 = d^2A_1/dF_1^2$$

$$P_{11} = RNK_4 ; P_{12} = RTK_4 ; B_1 = A_4 + \pi ; P_{A1} = RNK_2 ; P_{A2} = RTK_2 ; B = A_2 + \pi$$

L'angle  $F_2$  correspond à l'angle  $F_1$  qui varie de 1 à 360°.

Les données relatives sont consignées en annexe 2.



La puissance moyenne dissipée par frottement est:

$$N_{fr moy} = 147,5 \text{ N.m/s}$$

La puissance moyenne de résistance utile est:

$$N_{rut moy} = 468 \times 5,23 = 2448 \text{ N.m/s}$$

Le rendement sera:

$$\mu = 0,93$$

### Exemple d'un moteur compresseur

Ce mécanisme comprend trois groupes structuraux dans la succession suivante: élément menant-groupe RRT (IP2=1)-groupe RRR-groupe RRT (IP2=2).

Les paramètres de passation sont:

$$F_4 (IP2=1) = F_1; F_4 (IP2=2) = A_1 + \pi; F_4' (IP2=2) = A_1'; F_4'' (IP2=2) = A_1''$$

$$R_2 = (R_4^2 + 0,57^2 + 1,14 \times R_4 \times \cos(F_1 - A_4 (IP2=1)))^{1/2}$$

$$F_2 = \arcsin((R_4 \times \sin F_1 + 0,57 \times \sin A_4) / R_2)$$

On calcule ensuite les dérivées première et seconde de  $R_2$  et  $F_2$  par rapport à la coordonnée généralisée  $F_1$ .

$$P_{11} = RNK_4 (IP2=2); P_{12} = RTK_4 (IP2=2); B_1 = A_4 (IP2=2) - \pi$$

$$P_{41} (IP2=1) = RNK_2; P_{42} (IP2=1) = RTK_2; B_4 (IP2=1) = A_2 - \pi$$

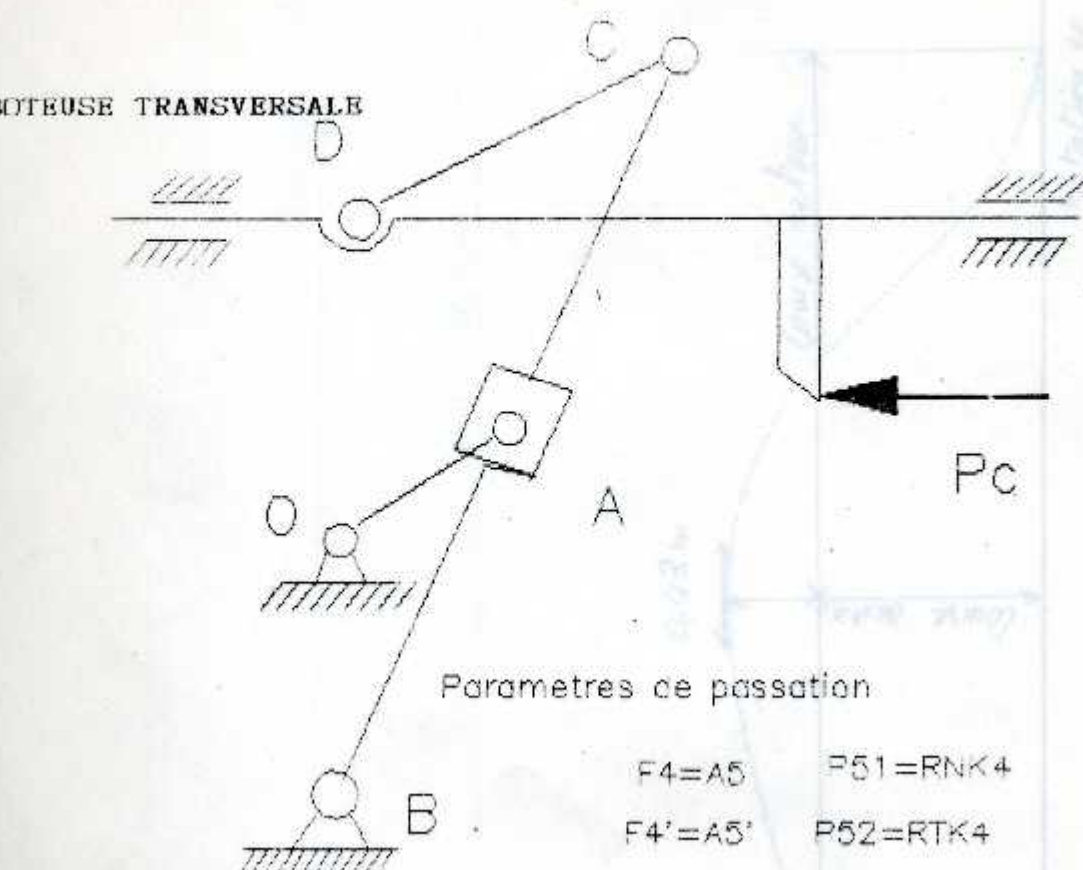
$$P_{A1} = RNK_4 (IP2=1); P_{A2} = RTK_4 (IP2=1); B = A_4 (IP2=1) - \pi$$

Les données relatives sont consignées en annexe 3.



Diagramme de charge sur l'arbre de sortie

RABOTEUSE TRANSVERSALE



Parametres de passation

- F4=A5      P51=RNK4
- F4'=A5'    P52=RTK4
- F4''=A5''   B5=A4-3.14
- PA1=RNM6
- PA2=RTM6
- B=A5+3\*3.14/2

$P_c = 1800 \text{ N}$

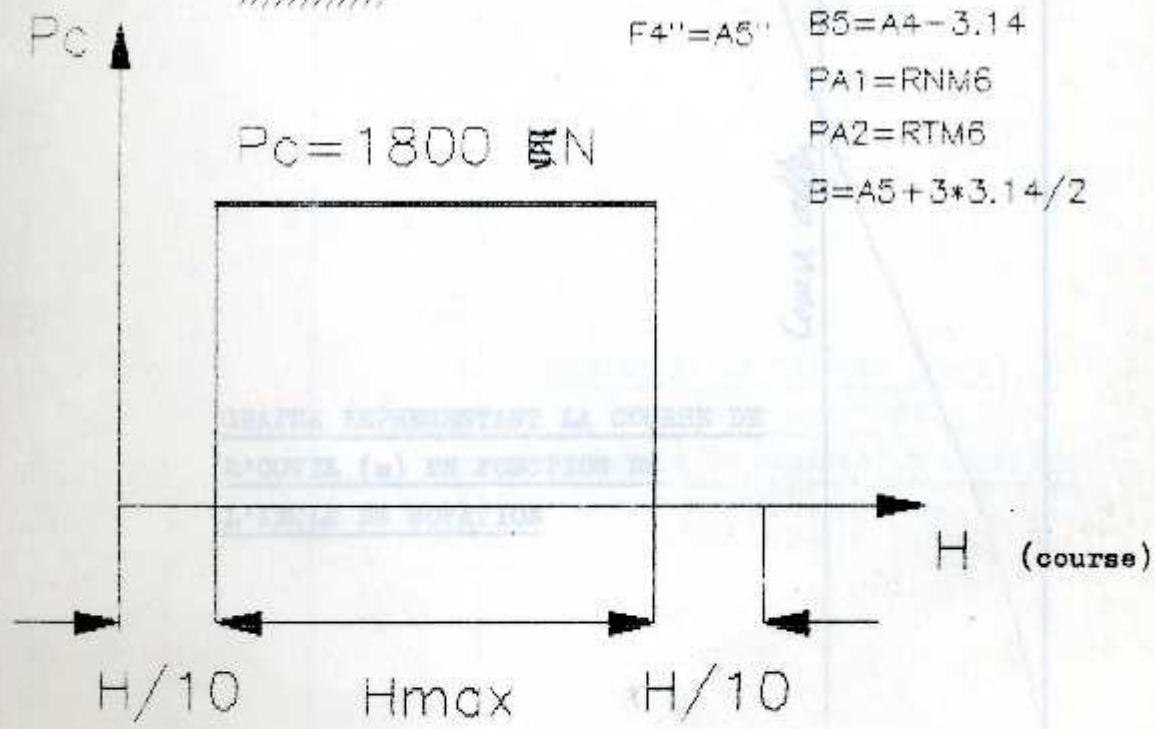
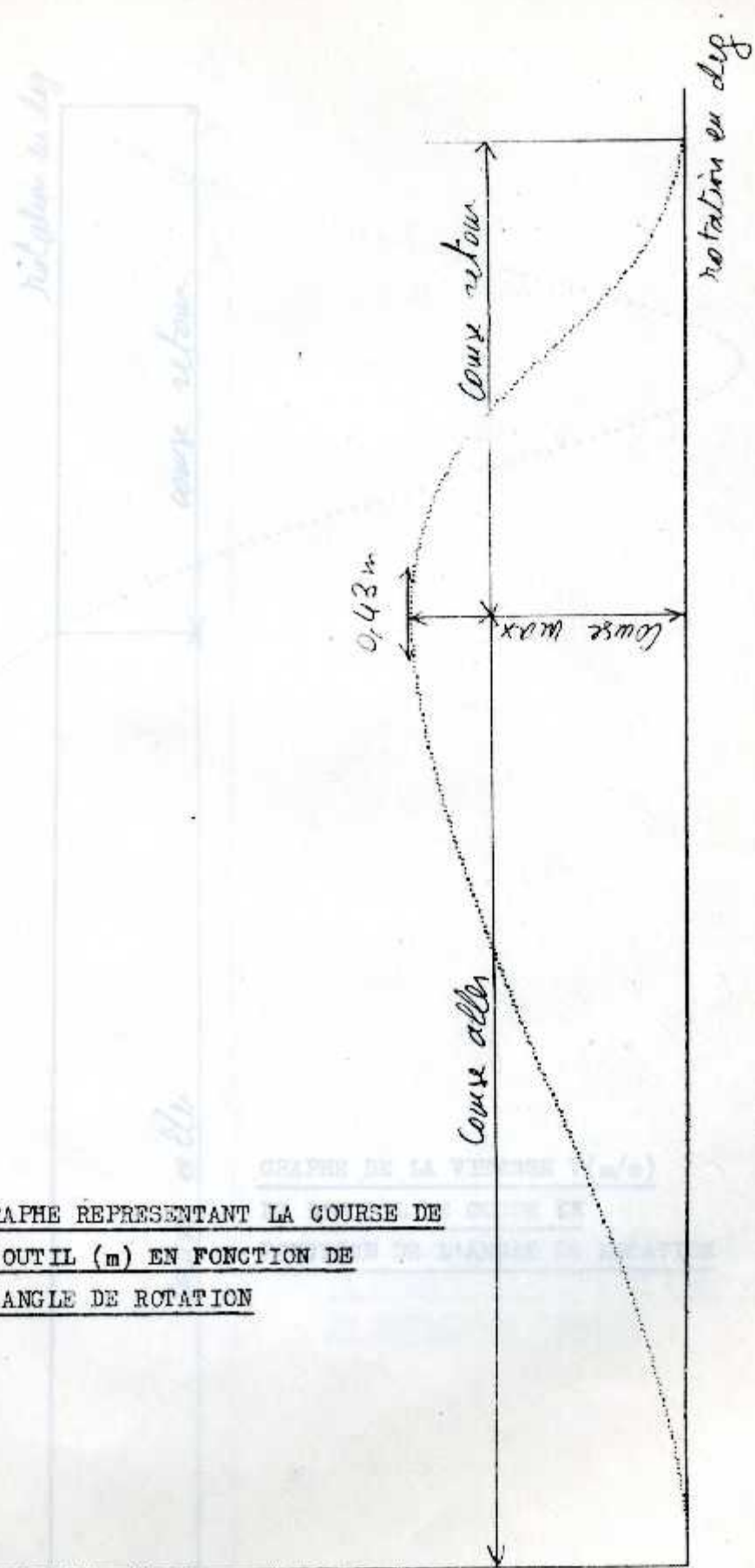


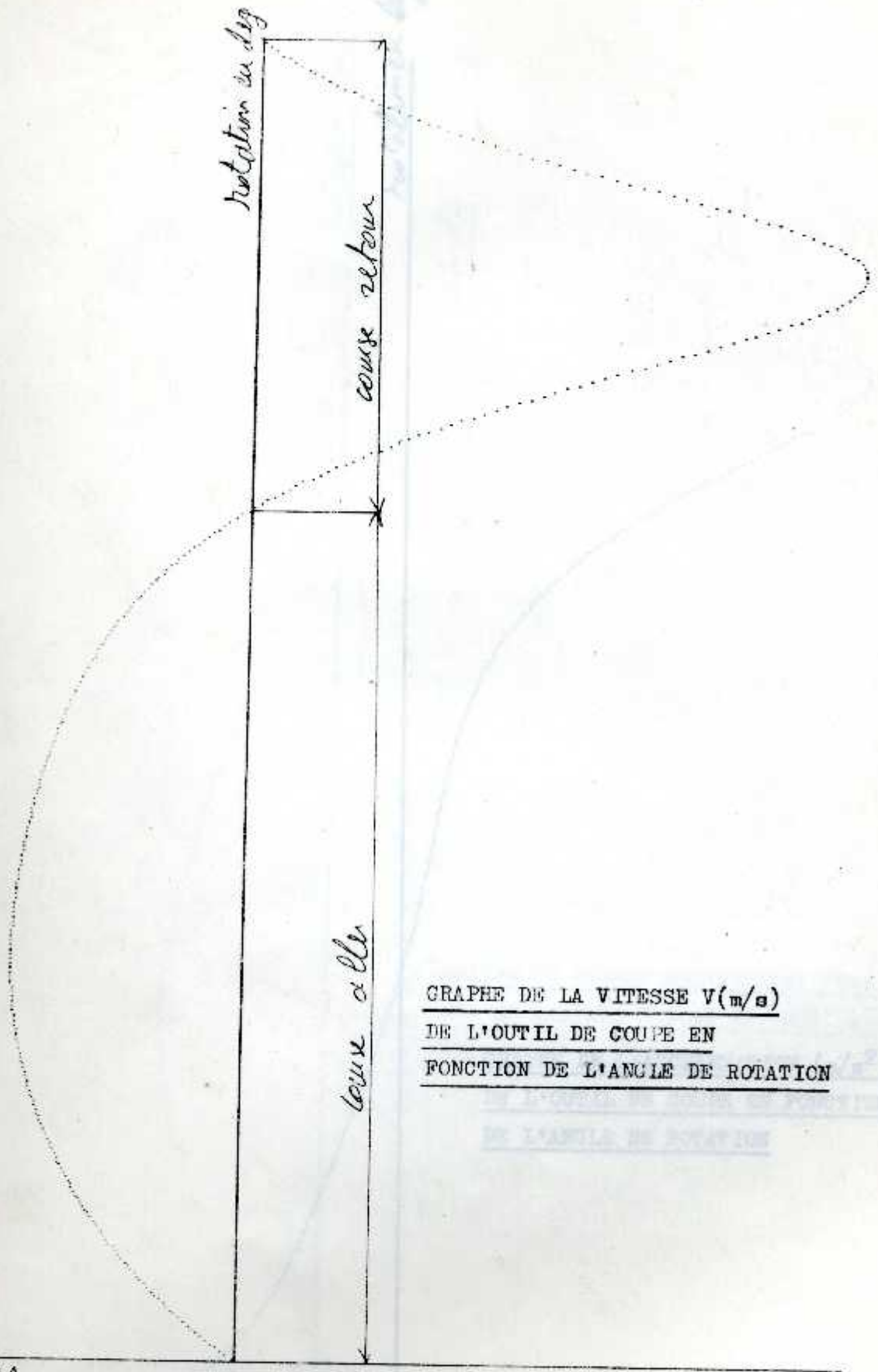
Diagramme de charge sur l'outil de coupe

GRAPHE DE (11853-33)  
 VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE

GRAPHE REPRESENTANT LA COURSE DE  
L'OUTIL (m) EN FONCTION DE  
L'ANGLE DE ROTATION



GRAPHE DE UHG  
VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE



GRAPHE DE LA VITESSE  $V(m/s)$   
DE L'OUTIL DE COUPE EN  
FONCTION DE L'ANGLE DE ROTATION

GRAPHE DE ANG  
VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE

rotation en deg.  
rotation en deg.

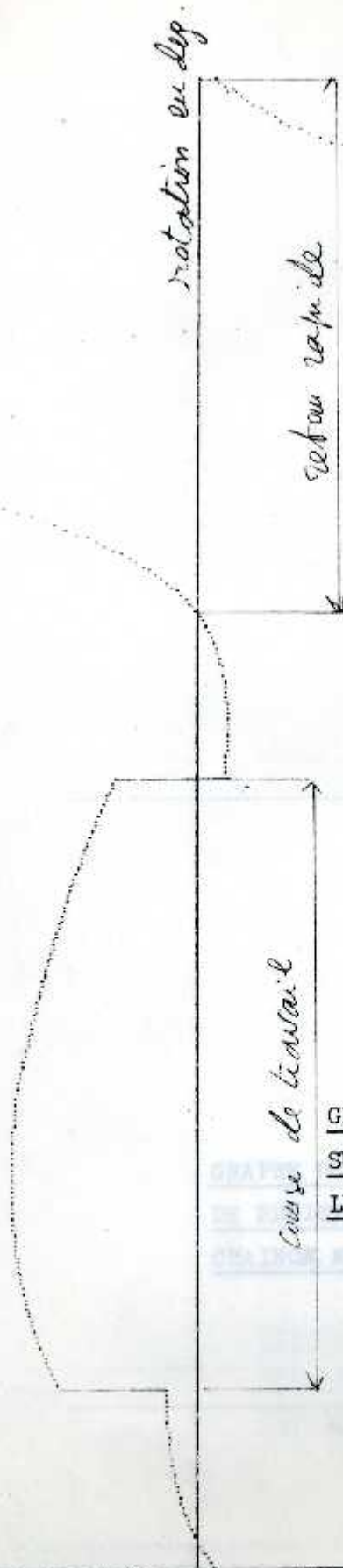
GRAPHE DU MOMENT EQUILIBRANT (N.m)  
SUR LE CHAÎNON MENANT ES COUPEUR

GRAPHE DE L'ACCELERATION ( $m/s^2$ )  
DE L'OUTIL DE COUPE EN FONCTION  
DE L'ANGLE DE ROTATION

acceleration en  $m/s^2$

GRAPHE DE MEQ  
VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE

Meq (N.m)



GRAPHE DU MOMENT EQUILIBRANT (N.m)  
SUR LE CHAINON MENANT EN CONSIDERANT  
LES FORCES D'INERTIE

GRAPHE DE MRUT  
VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE

GRAPHE DU MOMENT DES FORCES  
DE RESISTANCE UTILE SUR LE  
CHAINON MENANT

*Mrut moyen*

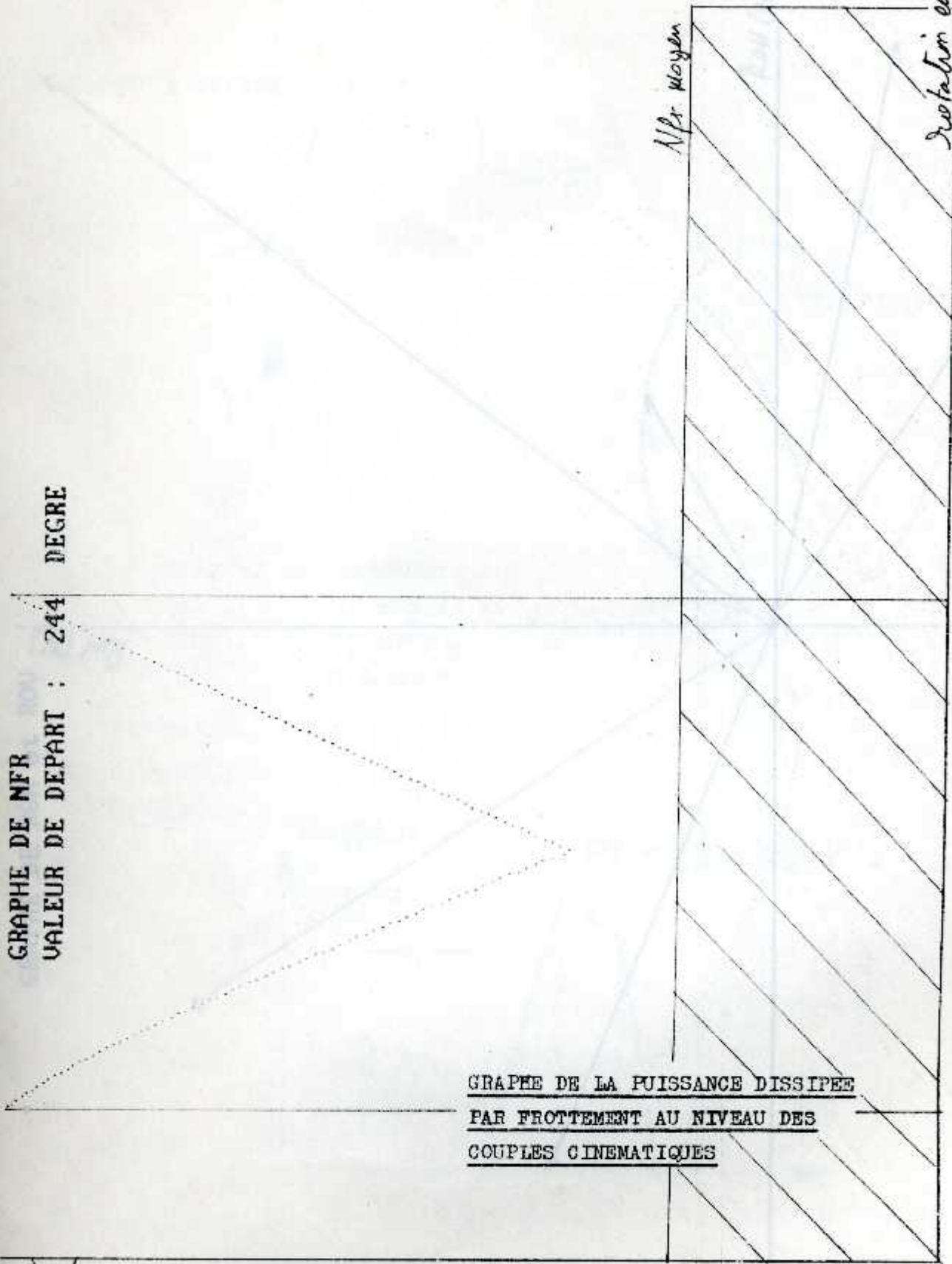
*rotation en deg.*

*course de travail*

GRAPHE DE LA PUISSANCE PERDUE  
PAR FROTTEMENT AU NIVEAU DES  
CHAÎNES

*Mrut (Mr)*

GRAPHE DE MFR  
VALEUR DE DEPART : 244 DEGRE



GRAPHE DE LA PUISSANCE DISSIPÉE  
PAR FROTTEMENT AU NIVEAU DES  
COUPLES CINEMATiques

Mfr (N/m<sup>2</sup>)

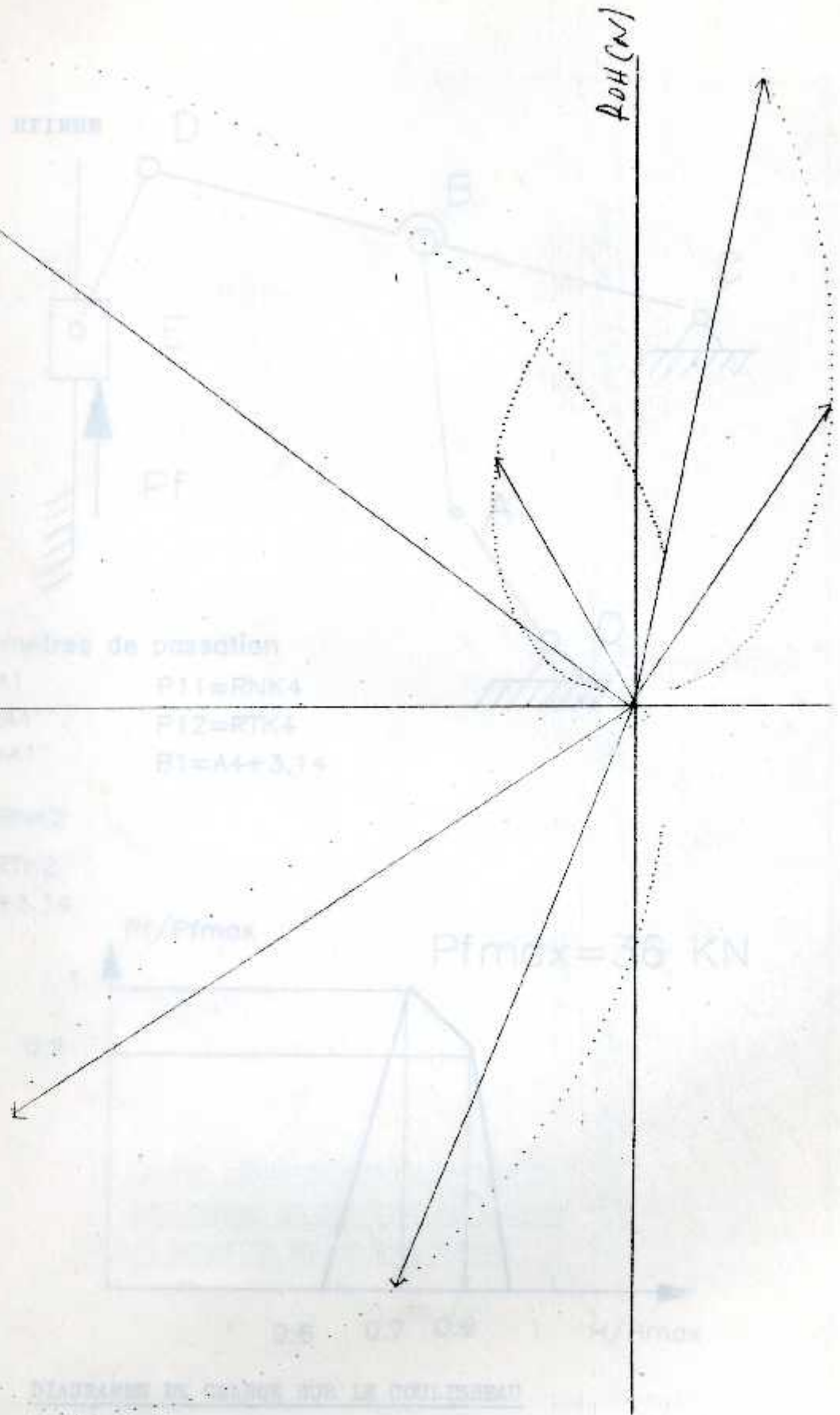
GRAPHE RELATIF DES FORCES DE REACTION SUR LE PALIER



GRAPHE DE ROH et ROU

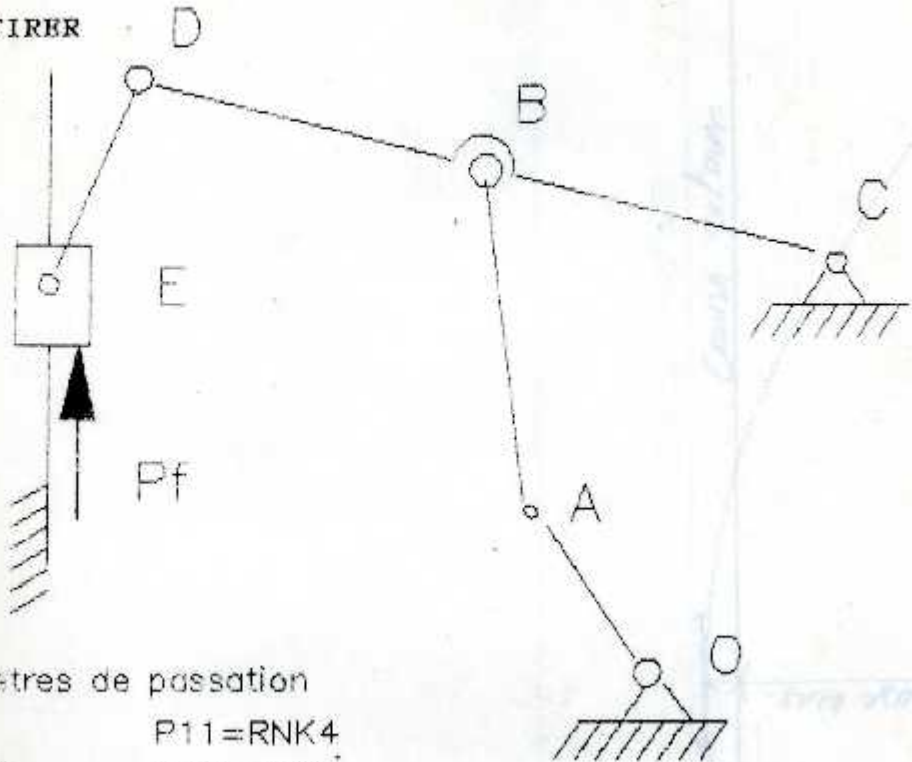
$R_{OH}(N)$

$R_{OH}(N)$



GRAPHE POLAIRE DES FORCES DE REACTION SUR LE PALIER

PRESSE A ETIRER



Parametres de passation

$$F4=A1$$

$$P11=RNK4$$

$$F4'=A1'$$

$$P12=RTK4$$

$$F4''=A1''$$

$$B1=A4+3.14$$

$$PA1=RNK2$$

$$PA2=RTK2$$

$$B=A2+3.14$$

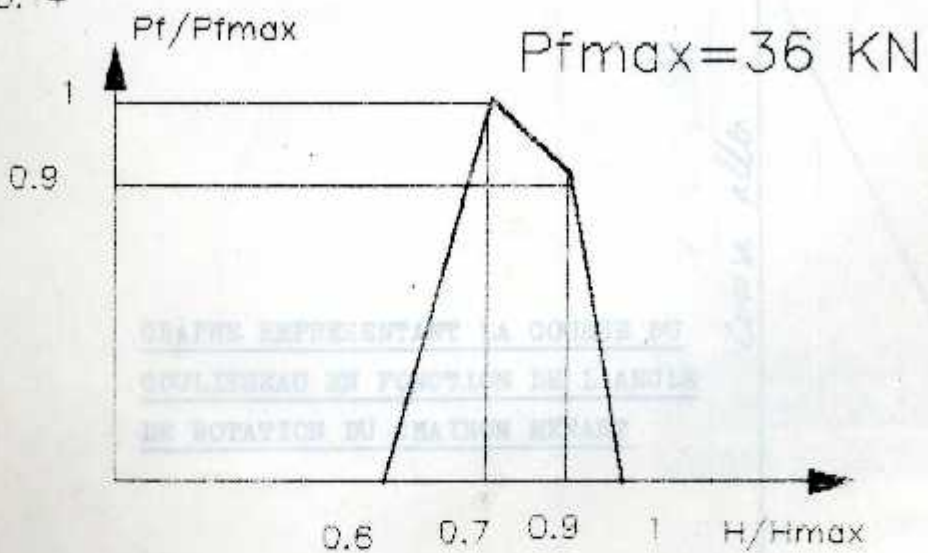
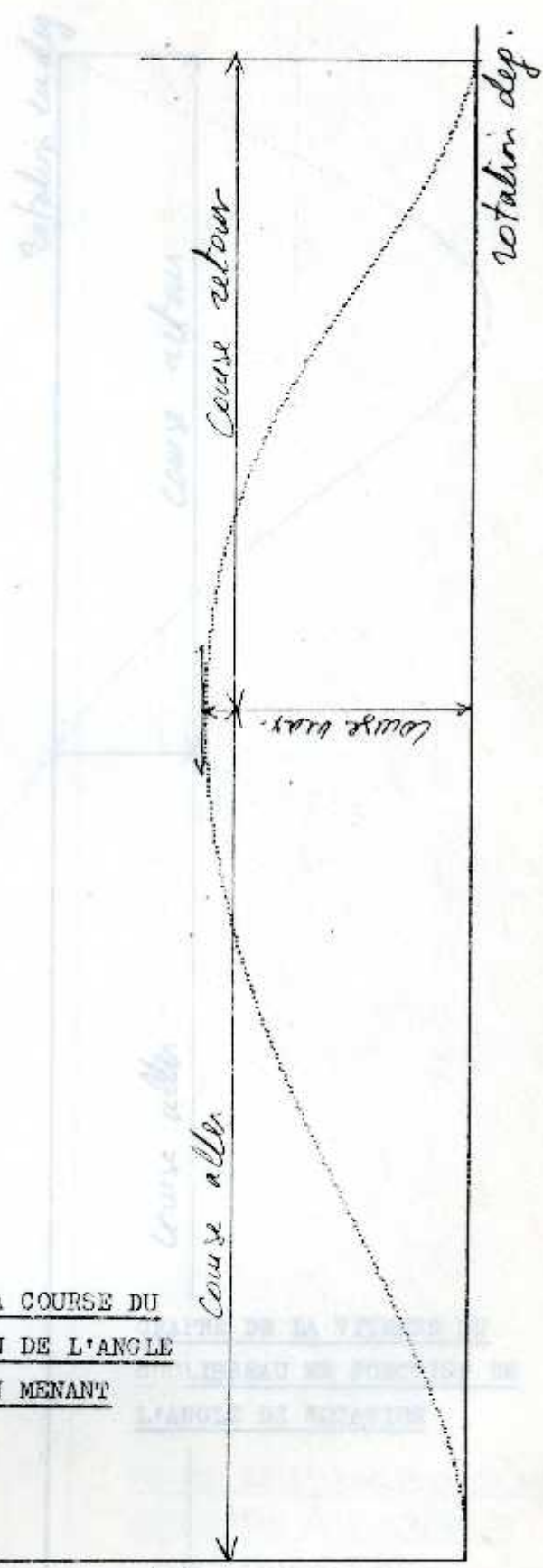


DIAGRAMME DE CHARGE SUR LE COULISSEAU

GRAPHE DE (MAXS3-S3)  
 VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

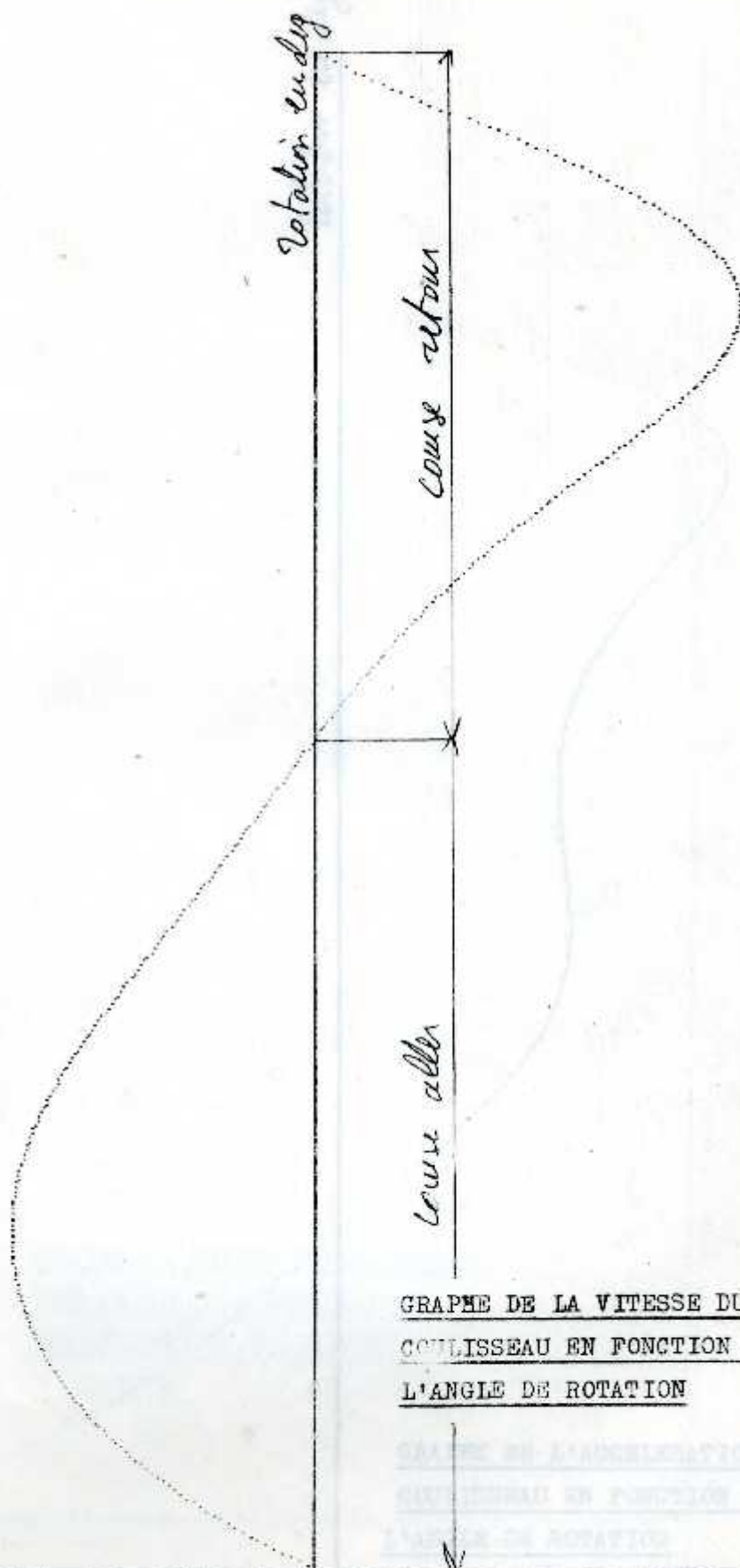
GRAPHE REPRESENTANT LA COURSE DU  
COULISSEAU EN FONCTION DE L'ANGLE  
DE ROTATION DU CHAINON MENANT

*COURSE (mm)*



GRAPHE DE UUG  
 VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

*UUG vitesse (m/s)*

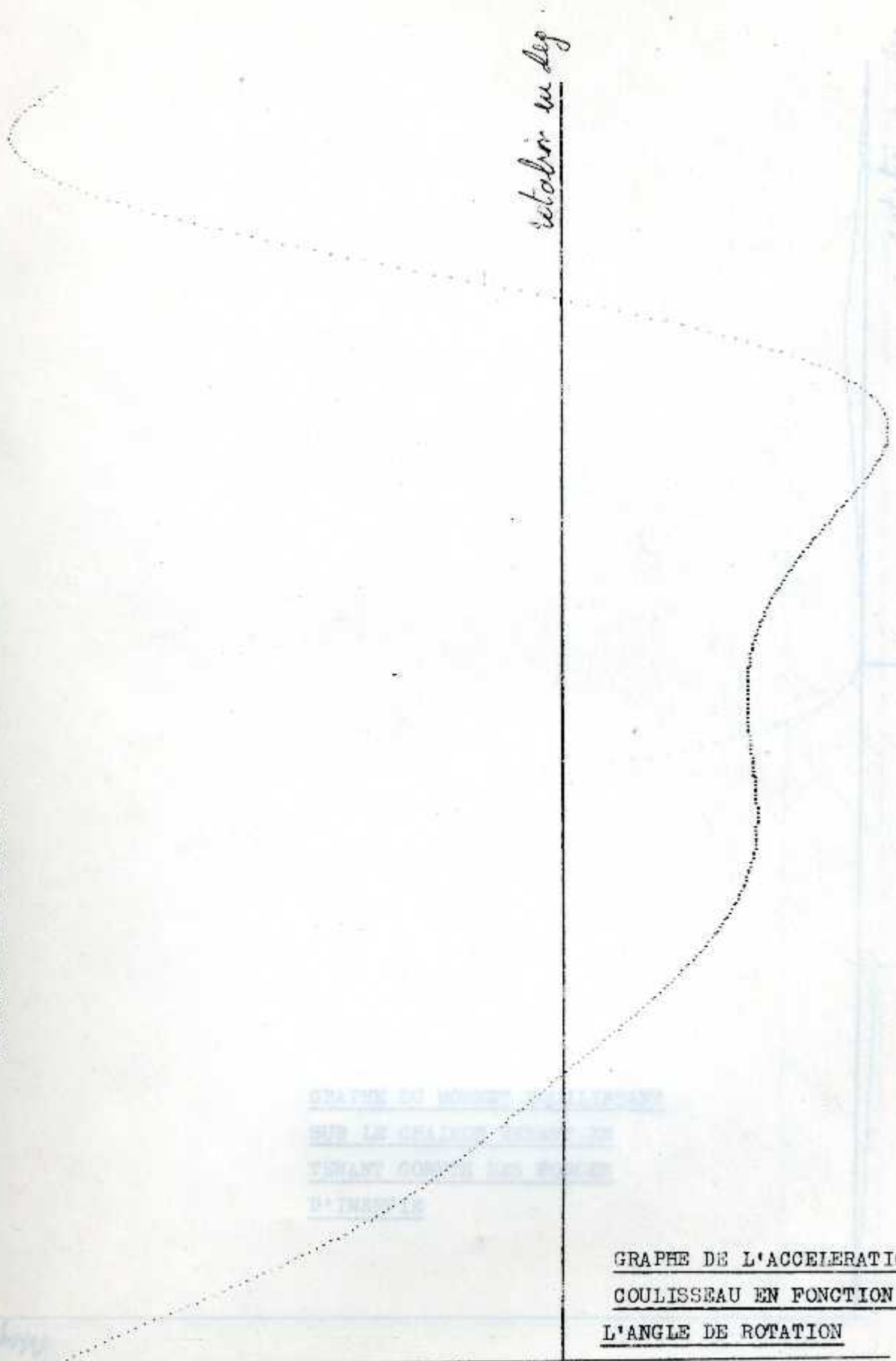


GRAPHE DE LA VITESSE DU  
COULISSEAU EN FONCTION DE  
L'ANGLE DE ROTATION

GRAPHE DE L'ACCELERATION DU  
COULISSEAU EN FONCTION DE  
L'ANGLE DE ROTATION

GRAPHE DE AUG  
VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

*accélération (m/s<sup>2</sup>)*



*rotation en deg*

*rotation en deg*

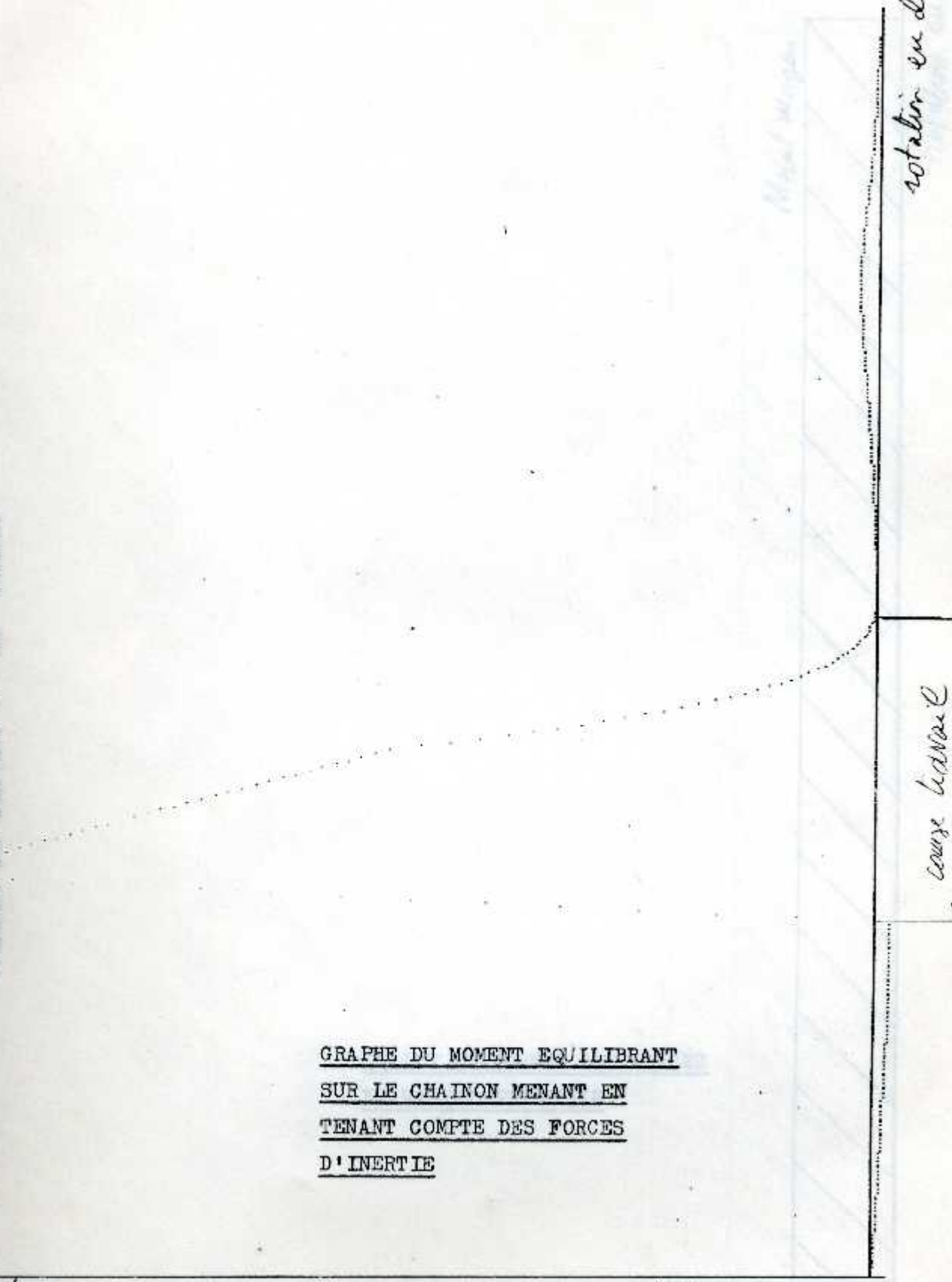
*16 deg*

GRAPHE DE L'ACCELERATION DU  
COULISSEAU EN FONCTION DE  
L'ANGLE DE ROTATION

GRAPHE DE MEQ  
VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

GRAPHE DU MOMENT EQUILIBRANT  
SUR LE CHAINON MENANT EN  
TENANT COMPTE DES FORCES  
D'INERTIE

*Meq (N.m)*



GRAPHE DE MRJT  
VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

GRAPHE DU MOMENT DES FORCES  
DE RESISTANCE UTILE

Moment (N.m)



rotation en deg.

GRAPHE DE NFR  
VALEUR DE DEPART : 16 DEGRE

*Nfr (N.m/d)*

GRAPHE DE LA PUISSANCE DISSIPEE  
PAR FROTTEMENT AU NIVEAU DES  
COUPLES CINEMATIQUES

GRAPHE DES FORCES DE REACTION  
EN LE JALIER

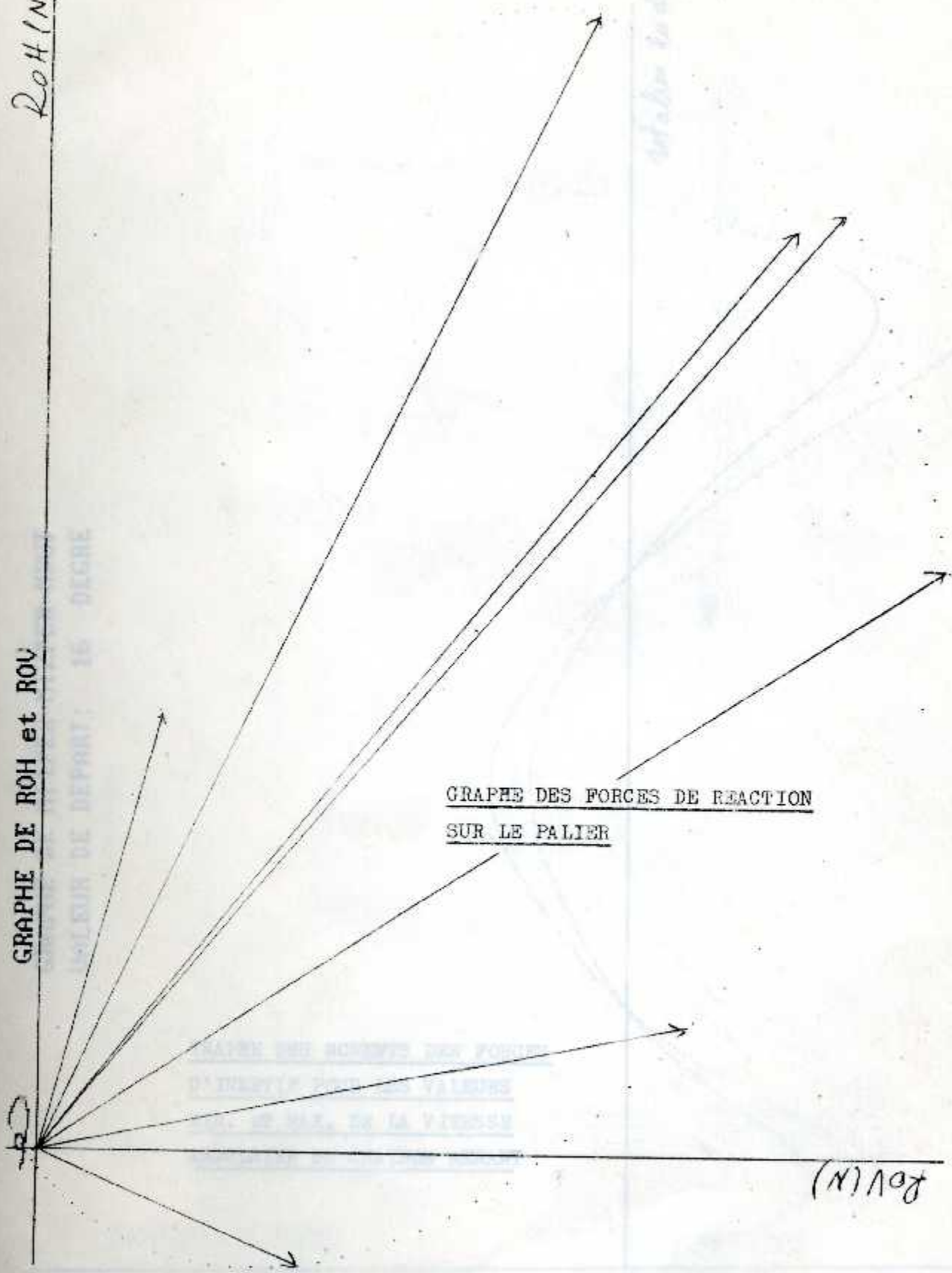
*Nfr moyen*

*rotation en deg.*



$R_{OH}(N)$

GRAPHE DE ROH et ROV

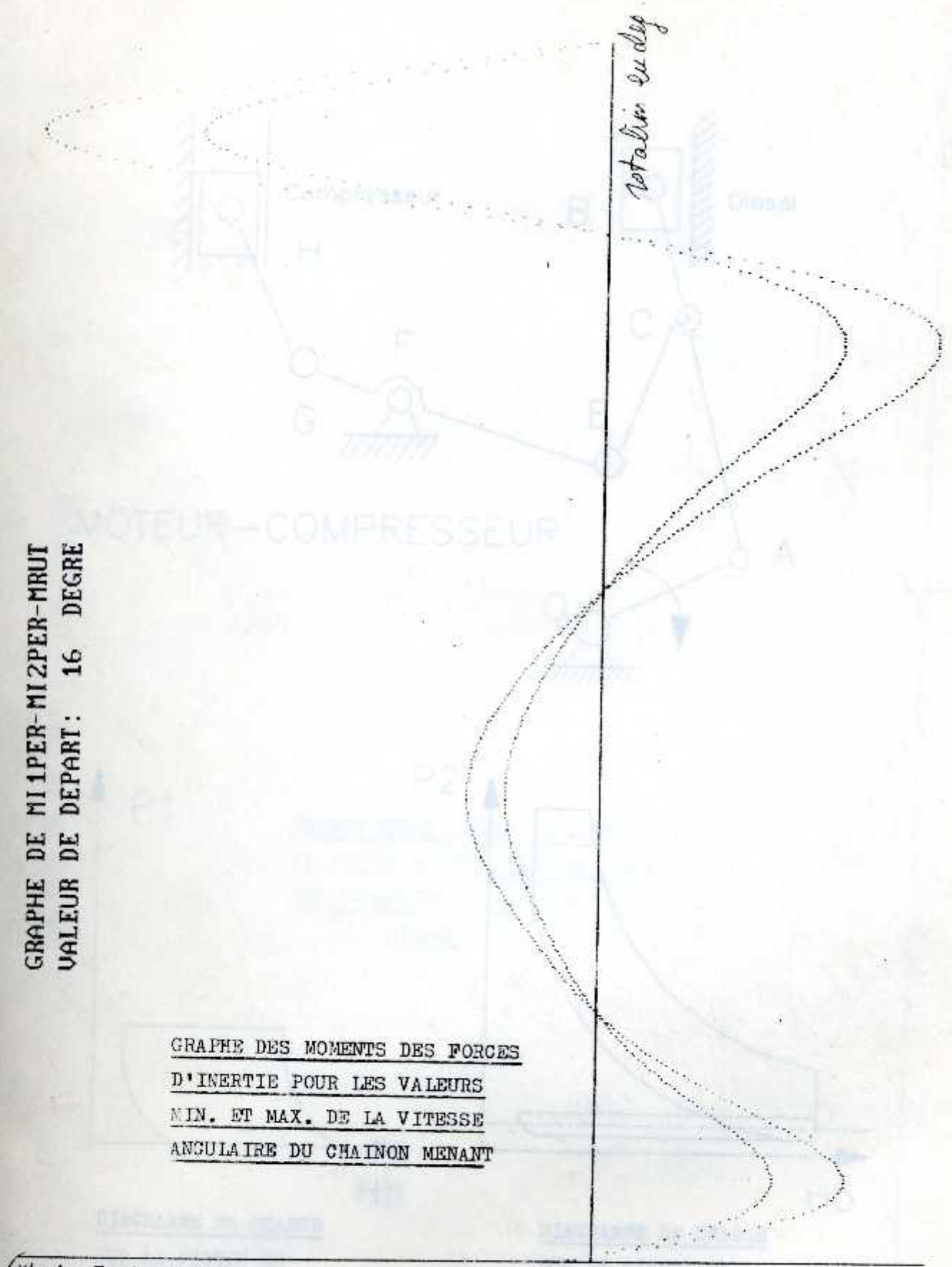


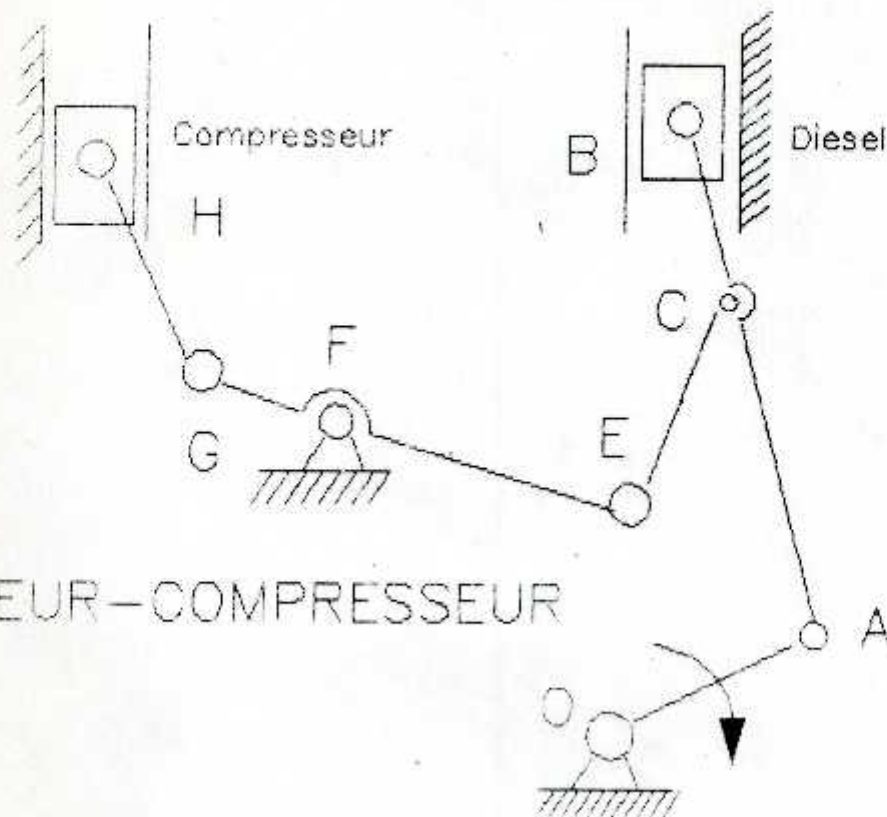
GRAPHE DES FORCES DE REACTION  
SUR LE PALIER

GRAPHE DE MI 1PER-MI 2PER-MRUI  
 VALEUR DE DEPART: 16 DEGRE

GRAPHE DES MOMENTS DES FORCES  
D'INERTIE POUR LES VALEURS  
MIN. ET MAX. DE LA VITESSE  
ANGULAIRE DU CHAINON MENANT

M12 - M12 (N.m)





MOTEUR-COMPRESSEUR

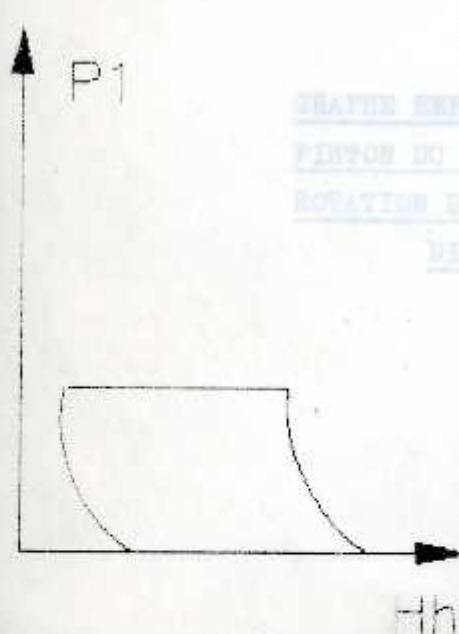


DIAGRAMME DE CHARGE  
SUR LE PISTON DU  
COMPRESSEUR

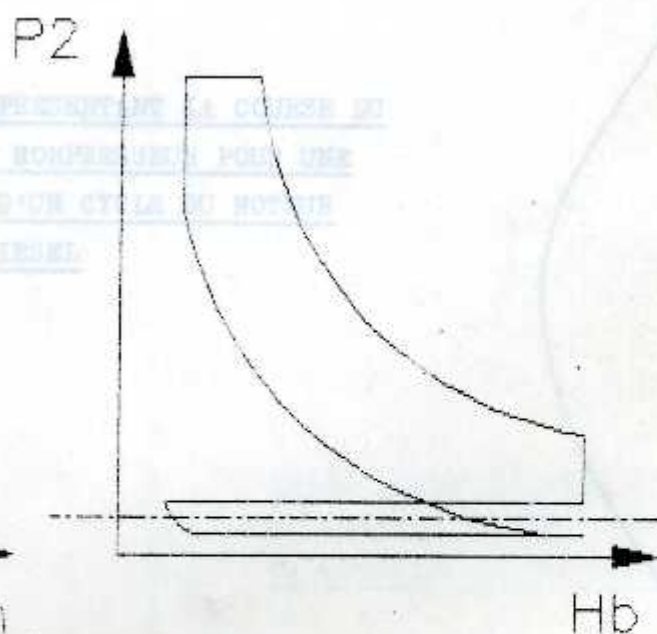


DIAGRAMME DE CHARGE  
SUR LE PISTON DU  
MOTEUR DIESEL

GRAPHE DE (MAXS3-S3)  
VALEUR DE DEPART : 180 DEGRE

GRAPHE REPRESENTANT LA COURSE DU  
PISTON DU BOMPASSEUR POUR UNE  
ROTATION D'UN CYCLE DU MOTEUR  
DIESEL

*Course en (m)*

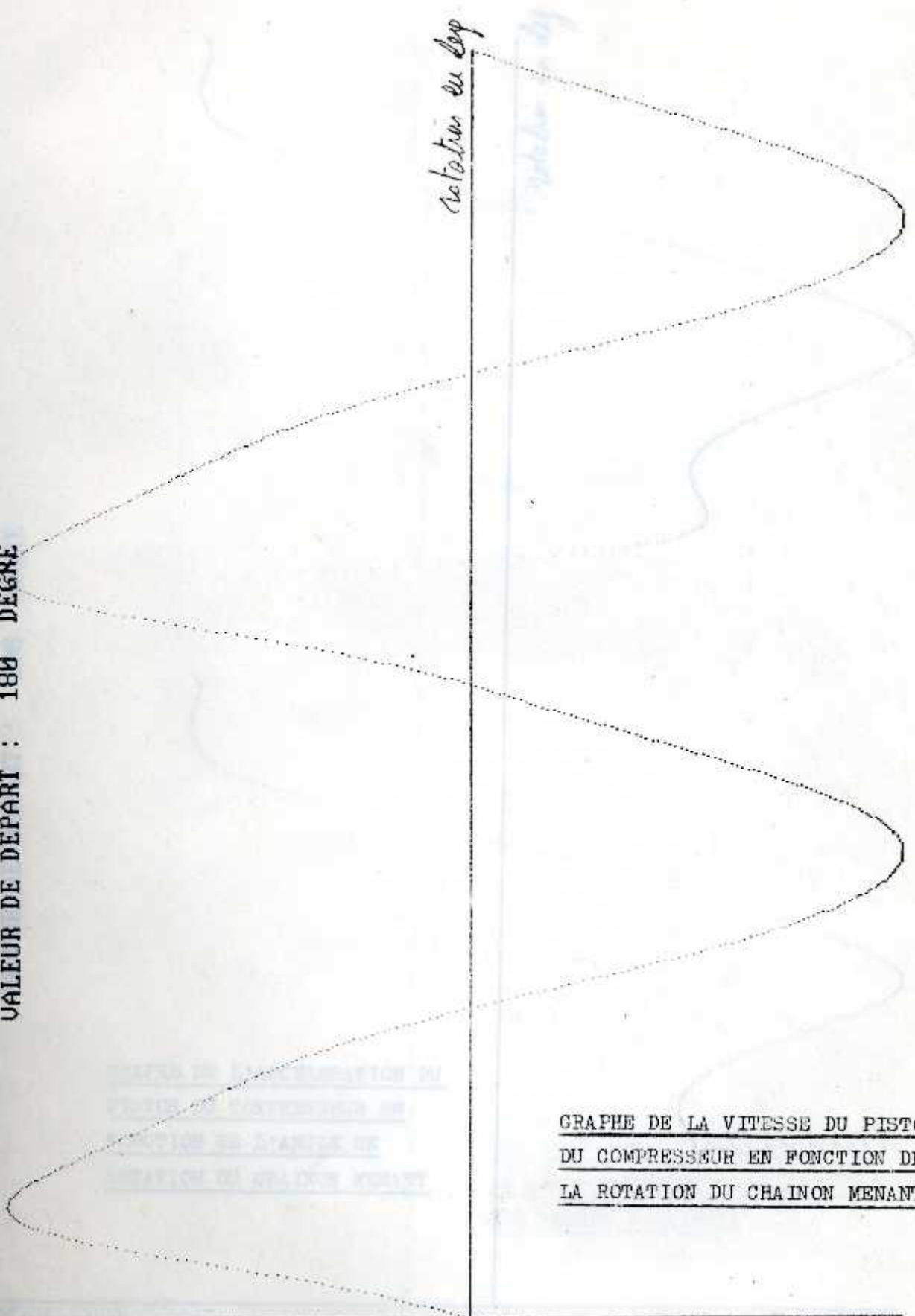
*rotation en deg*

*rotation en deg*

GRAPHE DE UUG  
VALEUR DE DEPART : 180 DEGRE

rotation en deg

Vitesse (m/s)



GRAPHE DE LA VITESSE DU PISTON  
DU COMPRESSEUR EN FONCTION DE  
LA ROTATION DU CHAINON MENANT

GRAPHE DE AUG  
VALEUR DE DEPART : 180 DEGRE

GRAPHE DE L'ACCELERATION DU  
PISTON DU COMPRESSEUR EN  
FONCTION DE L'ANGLE DE  
ROTATION DU CHAINON MENANT

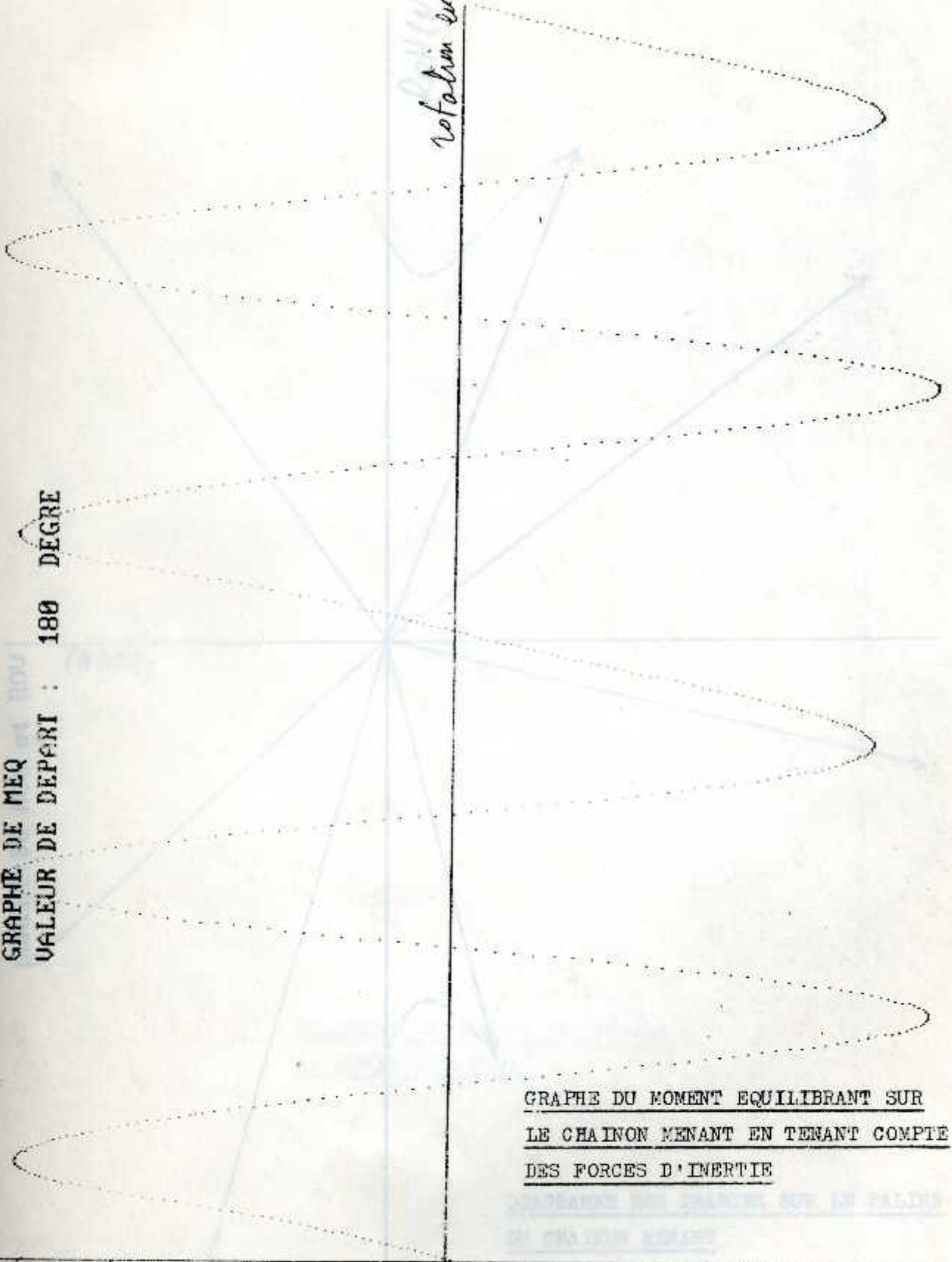
*acceleration (m/s<sup>2</sup>)*

*rotation en deg*

*rotation en deg*

GRAPHE DE MEQ  
VALEUR DE DEPART : 180 DEGRE

rotation en deg



GRAPHE DU MOMENT EQUILIBRANT SUR  
LE CHAINON MENANT EN TENANT COMPTE  
DES FORCES D'INERTIE

Meq (Nm)

$R_{oH}(N)$

*Relation en kg*

GRAPHE DE  $R_{oH}$  et  $R_{oV}(N)$

$R_{oV}(N)$

DIAGRAMME DU MOUVEMENT DES FORCES  
DE RESISTANCE UTILISE

DIAGRAMME DES CHARGES SUR LE PALIER  
DU CHAINON MEMBRE

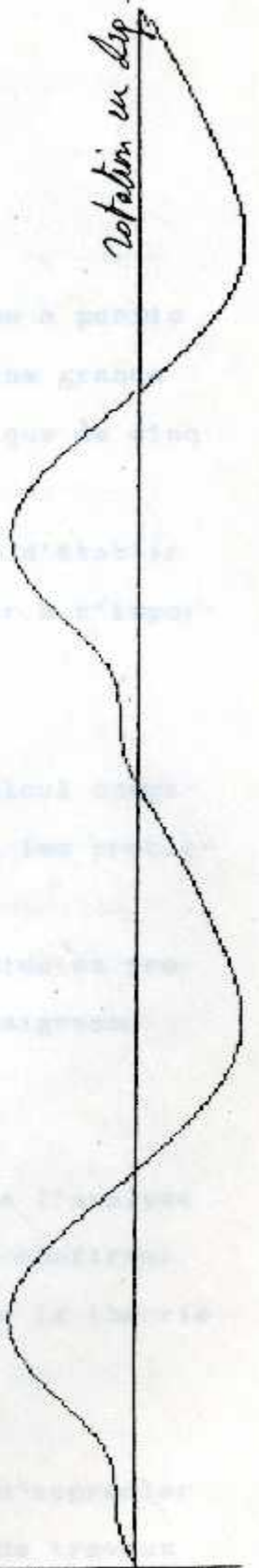


VIII - CONCLUSION

GRAPHE DE MRUT  
VALEUR DE DEPART : 180 DEGRE

DIAGRAMME DU MOMENT DES FORCES  
DE RESISTANCE UTILE

*Rotation en deg.*



*Murut (N.m)*

## VIII- CONCLUSION

- 1- La recherche de structure des mécanismes plans a permis d'établir leur propriété commune, à savoir que une grande famille de ces mécanismes ne peuvent être créés que de cinq (05) types de groupes structuraux.  
Cette propriété fondamentale nous a donné l'idée d'établir une généralisation qu'il est possible d'appliquer à n'importe quel mécanisme de ce type.
- 2- Sur cette idée, a été élaboré un modèle de calcul comparément simple, mais très effectif, pour résoudre les problèmes de l'analyse de ces mécanismes.  
Cette méthode de résoudre se prêtant bien à la mise en programme, un logiciel a été composé d'après l'organigramme établi.  
Les résultats obtenus par ce logiciel, suite à l'analyse de certains mécanismes types, nous permettent de confirmer son efficacité à être exploité dans ce domaine de la théorie des mécanismes.
- 4- L'utilisation du logiciel de calcul a permis d'apprécier son efficacité à réduire sensiblement le volume de travaux

et le temps de recherche des solutions qui sont obtenues avec une précision très haute.

5- Il serait possible d'étendre ce logiciel pour la résolution des mécanismes à deux chaînons ou manivelles ainsi que les mécanismes formés de groupes de classe III.

6- Dans une étude future, ce logiciel pourrait être également développé à une simulation complète du fonctionnement cinématique ainsi qu'une simulation du processus de résistance des éléments.

7- La possibilité de passage de calcul d'un groupe à l'autre, le choix de successivité de calcul des groupes, la possibilité d'un calcul entier sans grande intervention supplémentaire, et la possibilité d'obtenir les résultats sous forme de tableaux numériques et graphes, démontrent la qualité du programme élaboré et la possibilité d'apporter des solutions concrètes et optimales.

8- La thèse présentée revêt une importance méthodique et pratique.

Nous souhaitons vivement que cette étude puisse contribuer à l'amélioration des problèmes d'études des mécanismes de ce type, et donner une aide concrète aux programmes d'enseignement de la théorie des mécanismes.

1 et 2 (1978) BIBLIOGRAPHIE-REFERENCES

9- G. FICOLET ET E. TRONCHY. Elements de mécanique.

1- ZIMOVIEV V.A. Théorie des mécanismes et des machines.  
Editions Naouka Moscou 1972 (384 pages).

10- KOTIKHIN (Sergey N.) Programmation des machines

2- LEVITSKY N.I. Théorie des mécanismes et des machines.  
Editions Naouka Moscou 1979 (574 pages)

11- BELAZHNYI (Claude) Les mécanismes en trois axes

3- ARTOBOLVSKI I. Théorie des mécanismes et des machines.  
Editions Mir Moscou 1977 (650 pages).

12- Encyclopedie des machines industrielles PHILET.

4- GEORGE H. MARTIN Cinématique et dynamique des machines.  
Mc. Graw-Hill 1969 (495 pages).

13- KOLICINS & DEKICAY V. (et al) des auteurs des

5- MECHANIKA Z. 85 GLIWICE 1987 Conférence sur la théorie  
des mécanismes et des machines (338 pages).

6- ARTOBOLVSKI I. Les mécanismes dans la technique moderne.  
(8 tomes). Moscou. Kinematics and Machine Theory

Vol. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

7- ARTOBOLVSKI I. EDELSCHTEIN B.V. Recueil d'application  
sur la théorie des mécanismes et des machines Editions  
Naouka Moscou 1973 (255 pages)

8- MECHANIKA Z. 85 GLIWICE 1987, Vol 11, pp 141-206

- 8- R. PHILIPPOT Pratique des mécanismes. Editions Dunod.  
Tome 1 et 2 (128 pages et 136 pages).
- 9- G. NICOLET ET E. TROTTET. Eléments de machines.  
Editions SPES Lausanne 1971 (351 pages)
- 10- GOTTFRIED (Byron S.). Programmation Basic: Théorie et  
Applications. Paris. Mc Graw-Hill, 1982.
- 11- DELANNOY (Claude). Les fichiers en Basic sur micro-  
ordinateur. Paris. Ed. Eyrolles, 1983.
- 12- Encyclopédie des sciences industrielles QUILLET.  
Librairie Aristide Quillet Paris 1974. Tome 4.
- 13- KOTLCHIN A. DEMIDOV V. Calcul des moteurs des  
automobiles et des tracteurs. Moscou. Ed. Ecole Supérieure.  
1980 (400 pages).
- 14- K. SUGIMOTO and J. DUFFY, Application of Linear Algebra to  
Screw Systems, Mechanism and Machine Theory  
Vol. 17, N°1, pp. 73-83, 1982
- 15- G.R. VELDKAMP, On the Use of Dual Numbers, Vectors and  
Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics, Mechanism and  
Machine Theory, 1975, Vol. 11, pp. 141-156

16- J.DUFFY and H.Y. HABIB-OLAH, A Displacement Analysis of Spatial Five-Link 3R-2C Mechanisms, Analysis of the RRCRC Mechanism, Journal of Mechanism, Vol.6, pp.463-473, 1970

17- CEMIL BAGCI, Shaking Force Balancing of Planar Linkages with Force Transmission Irregularities Using Balancing Idler Loops, Mechanism and Machine Theory, Vol.14, pp.267-284,1979

18- H.S.KIM, S.HAMID and A.H. SONI, Synthesis of Six-Link Mechanisms for Point Path Generation, Journal of Mechanisms, Vol. 6, pp.447-461, 1971

19- J.K.SALISBURY and B.ROTH, Kinematic and Force Analysis of Articulated Mechanical Hands, Journal of Mechanisms, Vol.105, pp 35-41, 1983

\*\*\*\*\*

Annexe 1

**RABOTEUSE**

GROUPE R.L.R

D6=0 ; R6=0,12 m ; R5=0,27 m ; F6=F1 (NANG=3) ; F5=180° ; A6=0  
F6'=1 ; A6'=0 ; F5'=0 ; F6''=0 ; A6''=0 ; F5''=0 ; I5=0,43 Kg<sup>m</sup>² ;  
I6=0 ; M5=18 Kg ; M6=0 ; FD6=0,25 m ; L5=0,49 m ; FD7=0 ; T11=1  
FC=0,08 ; FD=0,107 ; FB=0,107 ; RD=0,035 m ; RB=0,035 m ; WK5=0  
WM6=SW×W ; P51=RNK4 ; P52=RTK4 ; B5=A4-π

GROUPE R.R.T.

L4=0,20 m ; D3=0 ; R3=0,578 m ; R4=0,49 m ; F3=37,27° ; F4=A5  
A3=270° ; F3'=0 ; A3'=0 ; F4'=A5' ; F3''=0 ; F4''=A5'' ; A3''=0 ;  
I4=0,04 Kg<sup>m</sup>² ; I3=0 ; FD4=0,1 m ; J5=0 ; FD5=0 ; J6=0,10 m ;  
M4=5 Kg ; M3=40 Kg ; P41=0 ; P42=0 ; P4=0 ; H3=0,13 m ;  
FM3=0,08 ; C14=1 ; FE=0,107 ; FP=0,107 ; RE=0,035 m ; RF=0,035 m  
WK4=SW×W×A5' ; B3=270°

La force de coupe sur l'outil:

Dans l'intervalle  $116^\circ < \text{FI} < 244^\circ$  P3=0

Dans les intervalles  $0^\circ \leq \text{FI} \leq 116^\circ$  et  $244^\circ \leq \text{FI} \leq 360^\circ$ :

si:  $(\text{SMIN} + \text{CMAX}/10) \leq \text{S3} \leq (\text{SMAX} - \text{CMAX}/10)$  alors P3=1800 N

S3: course

CMAX: course maximale

ELEMENT MENANT

V=10,47 rd/s ; G=9,81 m/s² ; E=0 ; M=0 ; J=0 ; L=0,12 m ;  
PA1=RNK6 ; PA2=RTM6 ; B=A5+3π/2 ; IM=2 Kg<sup>m</sup>² ; FA=0,107 ;

RA=0,035 m ; FO=0,107 ; RCO=0,040 m ; WM=SW×W×A5' ; SW=1 ;  
CIR=1/30

Annexe 2

PRESSE A ETIRER

GROUPE R.R.R.

L1=0,30 m ; L2=0,32 m ; R1=0,331 m ; R2=0,10 m ; F1=331,1' ;  
F2=FI (NANG=6) ; Q1=0 ; Q2=90° ; LI1=0 ; LK1=0 ; F1'=0 ; F2'=1 ;  
F1''=0 ; F2''=0 ; I1=0,20 m ; I2=0,10 m ; FD1=0,09 m ; FD2=0,16 m ;  
J1=0,12 m ; J2=0 ; J3=0 ; J4=0,42 m ; M1=12 Kg ; M2=9 Kg ; B2=0 ;  
C1=-1 ; C2=0 ; C3=0 ; C4=1 ; FJ=0,107 ; FRI=0,107 ; FK=0,107 ;  
RJ=0,035 m ; RI=0,035 m ; RK=0,035 m ; WM1=0 ; WK2=SW×W ;  
P11=RNK4 ; P12=RTK4 ; P21=0 ; P22=0 ; B1=A4+π

GROUPE R.R.T

L4=0,11 m ; D3=0 ; R3=0,502 m ; R4=0,42 m ; F3=125,27' ; F4=A1 ;  
A3=0 ; F3'=0 ; A3'=0 ; F4'=A1' ; F3''=0 ; F4''=A1'' ; A3''=0 ;  
I4=1,1 Kgm<sup>2</sup> ; I3=0 ; FD4=0,055 m ; J5=0 ; PD5=0 ; J6=0 ; M4=30 Kg  
M3=0 ; P41=0 ; P42=0 ; B4=0 ; H3=0 ; FM3=0,08 ; C14=0 ; PE=0,107  
PF=0,107 ; RE=0,035 m ; RF=0,035 m ; WK4=W1 ; B3=0

Force de pression P3:

Dans l'intervalle  $1 \leq FI \leq 16^\circ$  et  $213^\circ \leq FI \leq 360^\circ$  P3=0

Dans l'intervalle  $(SMIN+0,3 \times CMAX) \leq S3 \leq (SMIN+0,4 \times CMAX)$ :

$P3 = P3MAX \times (SMIN+0,4 \times CMAX - S3) / 0,1 \times CMAX$

Dans l'intervalle  $(SMIN+0,1 \times CMAX) \leq S3 < (SMIN+0,3 \times CMAX)$ :

$P3 = P3MAX \times 0,5 \times CMAX \times (S3 - SMIN) + P3MAX \times 0,85$



Dans l'intervalle  $SMIN \leq S3 < (SMIN + 0,1 \times CMAX)$  ;

$$P3 = (9 \times P3MAX / CMAX) \times (S3 - SMIN)$$

$$P3MAX = 36000 \text{ N}$$

#### ELEMENT MENANT

$\omega = 5,23 \text{ rad/s}$  ;  $SW = 1$  ;  $E = 0$  ;  $M = 50 \text{ Kg}$  ;  $J = 0$  ;  $L = 0,1 \text{ m}$  ;  $IM = 2 \text{ Kg m}^2$

;  $FA = 0,107$  ;  $RA = 0,035 \text{ m}$  ;  $FO = 0,107$  ;  $RCO = 0,040 \text{ m}$  ;  $WM = W2$  ;

$PA1 = RNK2$  ;  $PA2 = RTK2$  ;  $B = A2 + \pi$  ;  $CIR = 1/6$

#### Annexe 3

#### MOTEUR-COMPRESSEUR

##### GRUPE R.R.T. (IP2=1)

$L4 = 0,84 \text{ m}$  ;  $D3 = 0$  ;  $R3 = 0$  ;  $R4 = 0,21 \text{ m}$  ;  $F3 = 0$  ;  $F4 = FI$  (NANG=2) ;

$A3 = 0$  ;  $F3' = 0$  ;  $A3' = 0$  ;  $F4' = 1$  ;  $F3'' = 0$  ;  $F4'' = 0$  ;  $A3'' = 0$  ;

$I4 = 1,8 \text{ Kg m}^2$  ;  $I3 = 0$  ;  $FD4 = 0,546 \text{ m}$  ;  $J5 = 0,27 \text{ m}$  ;  $FD5 = 0$  ;  $J6 = 0$  ;

$M4 = 15 \text{ Kg}$  ;  $M3 = 20 \text{ Kg}$  ;  $P41 = RNK2$  ;  $P42 = RTK2$  ;  $B4 = A2 - \pi$  ;  $H3 = 0$  ;

$FM3 = 0,08$  ;  $C14 = 1$  ;  $FE = 0,107$  ;  $FF = 0,107$  ;  $RE = 0,035 \text{ m}$  ;  $RF = 0,035 \text{ m}$

$WK4 = W$  ;  $B3 = 180^\circ$

Force de pression des gaz  $P3 = FPD$ :

Pour  $1^\circ \leq FI \leq 180^\circ$  :  $FPD = 0,9 \times PATM \times SPD$  avec  $SPD = 0,0962 \text{ m}^3$

(aspiration naturelle)

Pour  $180^\circ < FI < 360^\circ$  :  $FPD = SPD \times PATM \times (0,45 / (CX + 0,03))$  avec

$CX = 1,049 - S3$  (compression polytropique)

Pour  $FI = 360^\circ$  :  $FPD = 2 \times SPD \times PATM \times 15$  (combustion à volume constant)

Pour  $360^\circ < FI < 370^\circ$   $FPD = FPD$  (pour  $FI = 360^\circ$ ) (combustion à pression constante)

Pour  $370^\circ < FI < 540^\circ$   $FPD = FPD / (((CX + 0,03) / CZ^{1,25}))$

avec  $CZ = 1,049 S3 + 0,03$  (détente polytropicque)

Pour  $FI = 540^\circ$   $FPD = 1,15 \times PATM \times SPD$  (pression d'échappement)

Pour  $540 < FI < 720$   $FPD = FPD$  (pour  $FI = 540^\circ$ ) (échappement à pression constante).

#### GROUPE R.R.R.

$L1 = 0,32$  m ;  $L2 = 0,29$  m ;  $R1 = 0,374$  m ;  $F1 = 325,9^\circ$  ;  $Q1 = 35^\circ$  ;  
 $Q2 = 165^\circ$  ;  $L11 = 0$  ;  $LK1 = 0$  ;  $F1' = 0$  ;  $F1'' = 0$  ;  $I1 = 0,576$   $Kgm^2$  ;  
 $I2 = 0,085$   $Kgm^2$  ;  $FD1 = 0,24$  m ;  $FD2 = 0,105$  m ;  $J1 = 0,48$  m ;  $J2 = 0$   
 $J3 = 0$  ;  $J4 = 0,16$  m ;  $M1 = 10$  Kg ;  $M2 = 3,5$  Kg ;  $P21 = 0$  ;  $P22 = 0$  ;  $B2 = 0$   
 $C1 = 1$  ;  $C2 = 0$  ;  $C3 = 0$  ;  $C4 = -1$  ;  $FJ = 0,107$  ;  $FRI = 0,107$  ;  $FK = 0,107$  ;  
 $RJ = 0,035$  m ;  $RK = 0,035$  m ;  $RI = 0,035$  m ;  $WM1 = W4$  (IP2=2) ;  
 $WK2 = W4$  (IP2=1)

$R2 = (0,37 + 0,24 \times \cos(FI - A4))^{1/2}$

$R2' = dR2/dFI$  ;  $R2'' = d^2R2/dFI^2$

$F2 = \arcsin((R4 \times \sin FI + 0,5712 \times \sin A4) / R2)$

$F2' = dF2/dFI$  ;  $F2'' = d^2F2/dFI^2$

$P11 = RNK4$  ;  $P12 = RTK4$  ;  $B1 = A4 - \pi$

#### GROUPE R.R.I. (IP2=2)

$L4 = 0,48$  m ;  $D3 = 0$  ;  $R3 = 0,15$  m ;  $R4 = 0,16$  m ;  $F3 = 270^\circ$  ;  $F4 = A1 + \pi$  ;  
 $A3 = 0$  ;  $F3' = 0$  ;  $A3'' = 0$  ;  $F4' = A1'$  ;  $F3'' = 0$  ;  $F4'' = A1''$  ;  $A3''' = 0$  ;  
 $I4 = 0,322$   $Kgm^2$  ;  $I3 = 0$  ;  $FD4 = 0,264$  m ;  $J5 = 0$  ;  $FD5 = 0$  ;  $J6 = 0$  ;

M4=7 Kg ; M3=12 Kg ; P41=0 ; P42=0 ; B4=0 ; H3=0 ; FM3=0,08 ;  
C14=1 ; FE=0,107 ; FF=0,107 ; RE=0,035 m ; RF=0,035 m ; WK4=W1 ;  
B3=180°

Force de pression des gaz (air) P3=PFC:

Pour  $1^\circ \leq \text{FI} < 128^\circ$  et  $361^\circ \leq \text{FI} < 488^\circ$  : (compression)

$PFC = (\text{PATM} \times (0,226 / (0,61 - S3))^{1,35} - \text{PATM}) \times \text{SPC}$  avec  $\text{SPC} = 0,025 \text{ m}^2$

Pour  $128 < \text{FI} < 180$  et  $488 < \text{FI} < 540$  :  $PFC = (6 \times \text{PATM} - \text{PATM}) \times \text{SPC}$

(refoulement)

pour  $180 < \text{FI} < 224$  et  $540 < \text{FI} < 584$  :

$PFC = (6 \times \text{PATM} \times (0,126 / (0,61 - S3))^{1,35} - \text{PATM}) \times \text{SPC}$  (détente)

Pour  $224 < \text{FI} < 360$  et  $584 < \text{FI} < 720$  :  $PFC = 0$  (Aspiration)

ELEMENT MENANT

W=83,73 rd/s ; SW=1 ; E=0 ; M=12 Kg ; J=0,168 m ; L=0,21 m ;

PA1=RNK4 ; PA2=RTK4 ; B=A4- $\pi$  ; WM=WK2 ; I=0,05 Kg $\text{m}^2$  ; PA=0,107 ;

RA=0,035 m ; FO=0,107 ; RCO=0,040 m ; CIR=1/80

#####