

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة سعد دحلب البليدة
Université SAAD DAHLEB de BLIDA

Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'électronique



كلية الهندسة
دائرة الإلكترونيك

Mémoire de projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de MASTER en électronique
option automatique

Stabilité des boucles de régulation floue.

Présenté par :

BERRAK Amine

MELZI Djamel Eddine

Dirigé par :

Mr. HADJ SADOK M'hamed

Session : Septembre 2011

Remerciements

*Nous tenons a remercier Dieu de nous avoir donné
la force de réaliser notre travail.*

*Nous remercions Monsieur HADJ SADOK
M'hamed, notre promoteur avec qui nous avons eu
tant de plaisir à travailler et qui nous a fait profiter
de son expérience.*

*Nous exprimons notre profonde reconnaissance aux
membres du Jury d'avoir accepté de Juger notre
travail.*

*Que tout nos professeurs qui ont contribué a notre
formation trouvent ici notre plus profonde
gratitude.*

*Que tous ceux et toutes celles qui ont contribué de
prés ou de loin a l'aboutissement de notre travail
trouve ici nos sincères remerciements et l'expression
de notre reconnaissance .*

*Enfin ,nous remercions nos parant rien n'aurait été
possible sans leur soutien, confiance et générosité.*

Dédicaces

A mes parents

A mon frère et mes deux sœurs

A mon binôme et toute sa famille.

A mes amis d'enfances

A mes amis de l'université

A tous mes proches

A tous ceux qui sont chers à mon cœur

A ceux que j'aime et qui m'aime

Amine

Dédicaces

A qui puis je dédier ce travail si ce n'est à mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite. Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui.

Je dédie ce travail également

- ✓ A mon frère, mes sœurs .*
- ✓ A mon binôme et toute sa famille.*
- ✓ A toute ma famille.*
- ✓ A tout mes enseignants, du primaire au niveau supérieur*
- ✓ A mes amis (es).*

Djamel

Listes des Figures et Tableaux

Liste des figures

Fig I.1. Exemple de définition d'ensembles sur un univers de discours en logique binaire et en logique floue.....	4
Fig I.2. Représentation d'un sous-ensemble flou et principales caractéristiques.....	6
Fig I.3. Représentation d'une variable linguistique définie comme $\{U, V, TV = A1, A2, A3, A1\}$	7
Fig I.4. Notions de spécificité et de précision représentées à l'aide de sous-ensembles flous.....	8
Fig.I.5. Les fonctions d'appartenances usuelles.....	11
Fig.I.6. Procédé générale lors de la conception d'une commande par logique floue.....	15
Fig.I.7. structure de base d'un régulateur flou	17
Fig II.1. Schéma de principe de la plate forme d'essais	24
Fig.II.2. Schéma du système mécanique « chariot-pendule »	25
Fig.II.3. Allure des fonctions d'appartenance associées au modèle flou à quatre règles	27
Fig.II.4. résultat PDC : loi de commande $u1(t)$ (CI : $x0 = [0,5 \ 0,1 \ 0]T$).....	39
Fig.II.5. Résultats CDF : loi de commande $u2(t)$ (CI : $x0 = [0,5 \ 0,1 \ 0]T$).....	39
Fig.II.6. Variable d'état du modèle avec un gain $G=80$ et des CI : $x0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]T$	41
Fig.II.7. Commande et sortie du modèle avec gain $G=80$ et des CI : $x0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]T$	41
Fig.II.8. Système complet commande+observateur avec $x0 = [0,5 \ 0,1 \ 0]T$, $x0 = [0,5 \ 0 \ 0]T$	47
Fig II.9. Loi u_{lin} avec : $x(0)=[0,4 \ 0 \ 0 \ 0]T$	50
Fig II.10. Loi u_{PDC} avec $x0 = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]T$	51
Fig.II.11. Loi u_{SSF} avec perturbation externes	53
Fig.II.12. Système complet avec partie intégrale	55
Fig.II.13. système complet commande +observateur avec : $x0 = [0,5 \ 0,1 \ 0]T$, $x0 = [0,5 \ 0 \ 0]T$	58
Fig III.1. fonctions d'appartenances de la position	60
Fig III.2. fonctions d'appartenances de Del-position	61
Fig III.3. fonctions d'appartenances de l'angle	61
Fig III.4. fonctions d'appartenances de Del-l'angle.....	62

Fig.III.5. Bloc simulink de la commande d'un pendule inversé avec deux contrôleurs	64
Fig.III.6. Résultats de simulation pour la condition initiale(-0.2,0,0 ,0)	65
Fig.III.7. Résultats de simulation pour la condition initiale(-0.2,0,-1 ,0) et pour une référence échelon	66
Fig.III.8. Poursuite d'une référence sinusoïdale.....	67
Fig.III.9. poursuite d'une référence rectangulaire	68

Liste des Tableaux

Tableau II.1. Domaines de stabilité des paramètres en fonction des différentes lois de commande utilisées	42
Tableau.III.1. table des règles floue de décision pour la position	62
Tableau.III.2. table des règles de décision floue pour l'angle.....	63

Abréviations

BMI :Bilinear Matrix Inequalities

CDF :Compensation et Division pour système flous

LMI :Linear Matrix Inequalities

LTV :Linéaire Variant dans le Temps

MFD :Modèle Flou Continue

MFD :Modèle Flou Discret

MIMO :Multiple Input Multiple Output

PDC :Parallel Distributed Compensation

SIMO :Single Input Multiple Output

SSF: Stabilisation Simultanée pour modèles flous

TS :Takagi Sugeno

SOMMAIRE

Remerciements

Dédicaces

Résumés

Liste des Figures et Tableaux

Abréviations

Sommaire

Introduction générale..... 1

Chapitre I

Introduction aux technique floues

I.1.Introduction..... 3

I.2.La logique floue..... 3

I.3.Les concepts..... 5

I.3.1.Sous-ensemble flou 5

I.3.2. Variable linguistique 7

I.3.3. Opérateurs de la logique floue..... 8

I.3.4.Fonction d'appartenance 10

I.3.5.Propositions et règle floue 11

I.4.Commande par logique floue 13

I.4.1.Introduction..... 13

I.4.2.Principe et réalisation d'un régulateur flou 14

I.4.2.1.Procédé général lors de conception d'une commande par logique floue 14

I.4.2.2.Propriétés d'une commande par logique floue..... 15

I.4.3. Structure d'un régulateur flou 16

I.5. Conclusion 17

Chapitre II

Stabilité et stabilisation à partir de modèles flous

II.1.Introduction 18

II.2 Modèles flous de Takagi Sugeno(TS) 19

II.2.1 Modèles flous continus(MFC) 20

II.2.2.Modèles flous discrets(MFD) 21

II.2.3.Exemple A 22

II.2.4.Le pendule inversé	24
II.3.Stabilité des modèles flous	28
II.4.Stabilisation des modèles flous.....	31
II.4.1. Construction d'un régulateur flou	31
II.4.2.Conditions de stabilité.....	32
II.5.Stabilisation par modèles flous complets : modèle flou – régulateur flou – observateur flou	42
II.5.1. Observateur flou.....	43
II.5.2.Etude du modèle complet dans le cas particulier des variables de prémisses mesurables	44
II.5.2.1.Commande linéaire quadratique.....	48
II.5.2.2.Régulateur flou de type PDC.....	50
II.5.2.3.Régulateur de type SSF	51
II.5.3.Etude du modèle complet dans le cas général	53
II.6.Annulation des erreurs stationnaires.....	55
II.7.Stabilité non quadratique de modèles flous	56
II.8. conclusion	58

Chapitre III

Application de la commande par logique floue au pendule inversé

III.1.introduction	60
III.2. Fuzzification	60
III.2.1.Les fonctions d'appartenances de la position	60
III.2.2.Les fonctions d'appartenances de l'angle.....	61
III.3. Mécanisme d'inférence	62
III.3.1.Désignation.....	63
III.4.Déffuzification	63
III.5.simulation	64
III.5.1.Interprétation des résultats obtenus dans la simulation	69
III.6.Conclusion	69
Conclusion générale	70

Références bibliographiques

Annexes

*Introduction
Générale.*

La diversité des problèmes rencontrés en automatique, notamment sur la théorie de la commande et de la conception, ont connu une évolution considérable ces dernières années. Parmi ces théories, la commande des systèmes non linéaires ne cesse de se perfectionner. Ainsi, le concept des ensembles flous s'est avéré très utile du point de vue de la synthèse de commandes. Les travaux sur la théorie des ensembles flous et la logique floue ont été initiés dans les années soixante par le professeur Lotfi Zadeh [Zadeh, 1965] à l'Université de Berkeley. Ces travaux, qui ont mis un certain temps avant d'être acceptés par la communauté de l'automatique et de l'industrie, avaient déjà posé les bases de la commande floue. La logique floue, de part ses aptitudes multidisciplinaires, a été utilisée dans des domaines aussi variés que la gestion de base de données, les systèmes experts, le traitement du signal, la classification de données, la modélisation ainsi que la commande de systèmes automatiques. De ce fait, elle s'est attirée les critiques des scientifiques de chacun des domaines respectifs en introduisant une solution informelle à des problèmes pour lesquels les développements mathématiques ne trouvaient pas de solutions. Il faut attendre les années quatre-vingts dix pour que ces nouvelles théories soient reconnues et utilisées au sein d'applications variées, notamment la modélisation et la commande de systèmes complexes.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la stabilité des boucles de régulation floue. Une représentation féconde de nombreux modèles non linéaires a été proposée par [Takagi et Sugeno, 1985]. Elle permet d'obtenir des modèles flous de systèmes où la partie conclusion utilise une représentation d'état. Le développement d'une théorie à base de ce type de modèles flous (stabilité, stabilisation) s'appuie sur l'avancée des outils informatiques et mathématiques. Et plus précisément sur les techniques récentes basées sur les programmes d'optimisation convexe d'un type particulier avec contraintes nommées "Linear Matrix Inequalities" (LMIs). Ils permettent de résoudre une large classe de problèmes d'analyse et de synthèse de lois de commande en automatique.

Dans le premier chapitre on va présenter les principales notions de la logique floue ; les sous-ensembles flous et les variables linguistiques ainsi que les opérateurs de la logique floue et les règles floues. À la fin du chapitre on va voir comment utiliser la logique floue dans la commande, ainsi que les éléments constructifs d'un régulateur flou.

Dans le deuxième chapitre en va voir les différents travaux effectués autour des modèles flous. La première partie permet d'étudier la forme des modèles flous de type Takagi Sugeno. Ce type de modèle est très utilisé dans la représentation des systèmes non linéaires. La seconde partie présente l'étude de la stabilité des modèles flous. Ces résultats sont obtenus à l'aide de la fonction de Lyapunov quadratique. La troisième partie concerne la stabilisation par les modèles flous. Les lois de commande utilisées sont retour d'état linéaire ou PDC (Parallel Distributed Compensation), SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles flous). La quatrième partie traite du modèle complet, comprenant en plus un observateur flou pour étudier deux cas suivant que les prémisses sont mesurables ou non. Enfin en proposant des conditions de stabilité basées sur la fonction de Lyapunov non quadratique.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse au contrôle du pendule inversé par la commande floue. Le contrôleur utilisé dans cette commande est de type Takagi Sugeno. L'objectif de la commande d'un tel système est de réguler l'angle autour de zéro et d'asservir la position du chariot à une consigne désirée.

Chapitre I

Introduction aux techniques floues.



I.1.Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions principales de théorie de la logique floue, ainsi que de la commande floue. D'abord, nous présentons quelques concepts de base de la logique floue ainsi que leurs applications pour la synthèse d'une commande floue. Les éléments de bases d'un régulateur par logique flou.

I.2.La logique floue

Les compréhensions de l'univers dans lequel nous évoluons sont généralement imparfaites dans la mesure où elles peuvent être entaché d'incertitudes et/ou d'imprécisions, ne serait-ce qu'à travers la perception que nous en avons. Or, nous pouvons constater que l'homme intègre naturellement ces imperfections dans la vie de tous les jours, en particulier au niveau du raisonnement et de la décision. L'idée du professeur Lotfi A.Zadeh , en 1965, à travers le nouveau concept ensembliste d'appartenance graduelle d'un élément à un ensemble, a été de définir une logique multi évaluée permettant de modéliser ces imperfections c'est prendre en compte les états intermédiaires entre le tout et le rien. L'utilité de cette approche peut être illustrée de la manière suivante :

Une température de 10°C, pour un humain, est généralement considérée comme froide; une autre de 40°C est qualifiée de chaude. Si chacune de ces valeurs appartient à une catégorie (ensemble) bien définie, qu'en est-il pour des valeurs intermédiaires? Une réponse intuitive consiste à affirmer qu'elles appartiennent à une ou deux des catégories précédentes avec des niveaux ou des degrés (normalisés) différents. On évite ainsi des transitions brusques entre différentes catégories, comme cela est le cas en logique binaire (figureI.1). Il semble en effet surprenant de considérer qu'une température de 40°C est chaude, alors qu'une température de 39,9°C ne l'est pas.

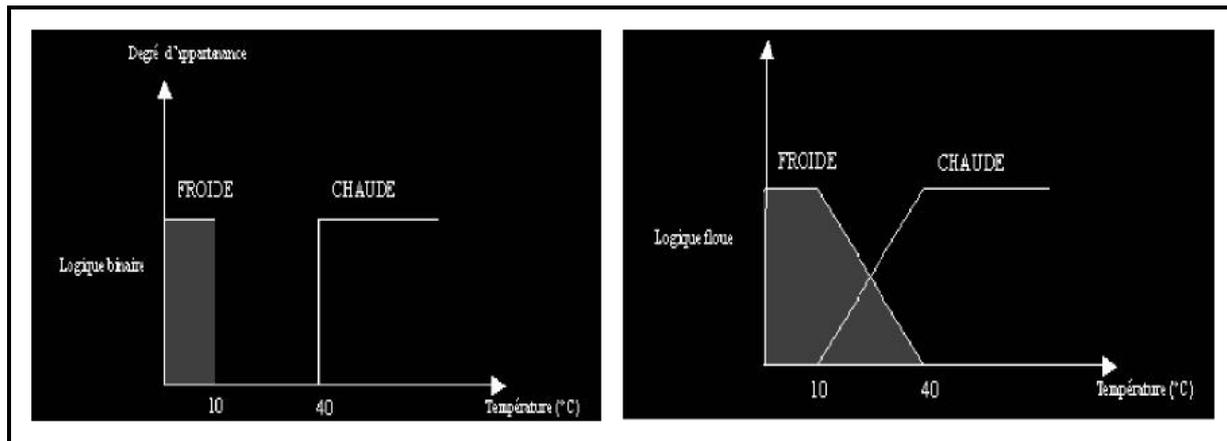


Fig I.1. Exemple de définition d'ensembles sur un univers de discours en logique binaire et en logique floue

Cet exemple permet d'illustrer le fait qu'une logique binaire classique soit, dans certains cas, trop limitative. Donc il est nécessaire de faire appel à une autre logique multi évaluée qui sera vue comme une extension de la précédente, c'est bien la logique floue.

En ce qui concerne la commande d'un processus quelconque, la logique floue permet une approche fondatrice par rapport à l'automatique classique. En automatique, en général, on s'attache à modéliser le processus à travers un certain nombre d'équations différentielles. Cette modélisation est rendue difficile et par fois impossible à mesurer que la complexité des processus à contrôler augmente. D'une manière radicalement opposée, un contrôleur va décrire non pas le processus mais la façon de le contrôler, tout comme le ferait un expert humain à travers des règles intégrant naturellement imprécisions et incertitudes.

Un certain nombre d'applications utilisant la logique floue ont vu le jour ces dernières années. Les plus médiatisées sont certainement les réalisations des chercheurs et industriels japonais qui, depuis les années 80, se sont intéressés notamment au contrôle/commande de processus. Ces applications s'appuient sur les travaux de Mamdani [Mamdani, 74], [Mamdani & Assilian, 75] qui fut certainement le premier à voir la potentialité de la théorie des sous-ensembles flous dans ce domaine. Nous pouvons citer autres dans des domaines généraux, tels que le marketing, les traitements médicaux, le domaine de traitement de l'image, le traitement de signal, la robotique, est autres.

I.3.Les concepts

Le concept de la théorie des sous-ensembles flous, s'appuie sur la notion de degré d'appartenance d'un élément à un sous-ensemble flou. Tandis que les ensembles traditionnels sont caractérisés par une fonction d'appartenance notée x , (également appelée fonction caractéristique) définie sur $\{0,1\}$, les sous-ensembles flous sont, eux, caractérisés par une fonction d'appartenance notée μ définie sur $[0,1]$.

En d'autres termes, dans le langage ensembliste classique, un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble tandis qu'un élément appartient à un sous-ensemble flou avec un certain degré (éventuellement nul). En résumé, pour un sous-ensemble A défini sur un univers de discours U , on peut écrire :

A sous-ensemble classique : fonction caractéristique $\chi_A : U \rightarrow \{0,1\}$

A sous-ensemble flou : fonction caractéristique $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$

Par extension, ce nouveau concept définit une logique multi évaluée qui apparaît comme une généralisation de la logique binaire.

I.3.1.Sous-ensemble flou

Nous venons de voir ce que l'on entend par sous-ensemble ou, d'un point de vue formel. Un sous-ensemble A sur un univers de discours U , est représenté comme dans la *figure I.2* à travers sa fonction caractéristique μ_A . Il peut également être décrit par un certain nombre de caractéristiques comme:

- **son Support :**

$$\text{Support}(A) = \{x \in U / \mu_A(x) \neq 0\} \quad [\text{I.1}]$$

- **sa hauteur :**

$$\text{hauteur}(A) = \sup_{x \in U} \{\mu_A(x)\} \quad [\text{I.2}]$$

- **son noyau :**

$$\text{noyau}(A) = \{x \in U / \mu_A(x) = 1\} \quad [\text{I.3}]$$

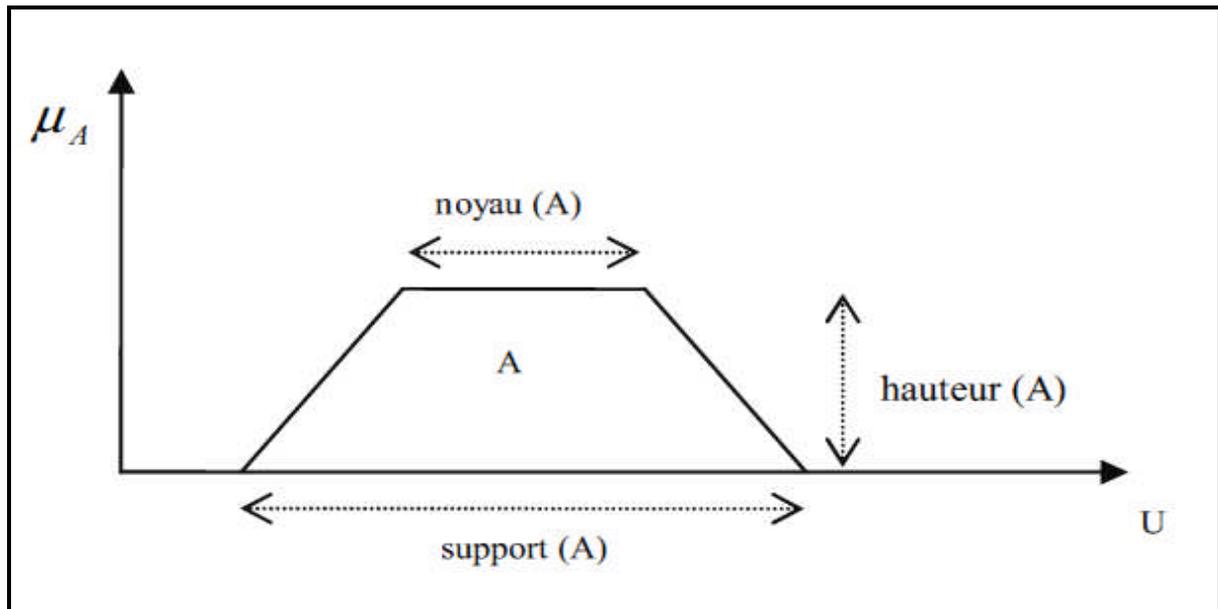


Fig I.2 .Représentation d'un sous-ensemble flou et principales caractéristiques

Le concept de sous-ensemble flou a été introduit pour éviter les passages brusques d'une classe à une autre (de la classe noire à la classe blanche par exemple) et autoriser des éléments à n'appartenir complètement ni à l'une ni à l'autre (à être gris, par exemple) ou encore à appartenir partiellement à chacune (avec un fort degré à la classe noire et un faible degré à la classe blanche dans le cas du gris foncé).

La notion de sous-ensemble flou permet de traiter :

- des catégories aux limites mal définies (comme « centre ville » ou « ancien »),
- des situations intermédiaires entre le tout et le rien (« presque noir »),
- le passage progressif d'une propriété à une autre (de « proche » à « éloigné » selon la distance),
- des valeurs approximatives (« environ 2 km »),
- des classes en évitant l'utilisation arbitraire de limites rigides (il est difficile de dire qu'une maison située à 200 m de la plage en est proche, mais qu'à 210 m elle en est éloignée).

Remarque

Le terme « sous-ensemble » flou provient du fait que celui-ci est considéré comme une partie de l'univers de discours U. Dans la littérature, on peut trouver parfois ensemble flou, qui constitue un abus de langage.

I.3.2. Variable linguistique

Une variable linguistique sert à modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise peut être inconnue. Elle est définie par un triplet (V, U, T_V) où V représente une variable classique (age, température,...) définie sur l'univers de discours U , T_V est l'ensemble des instanciations possibles de la variable V : Il s'agit de sous-ensembles flous repérés par leur label A_i : on écrit ainsi $T_V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Graphiquement, une variable linguistique peut être représentée comme dans la figure I.3

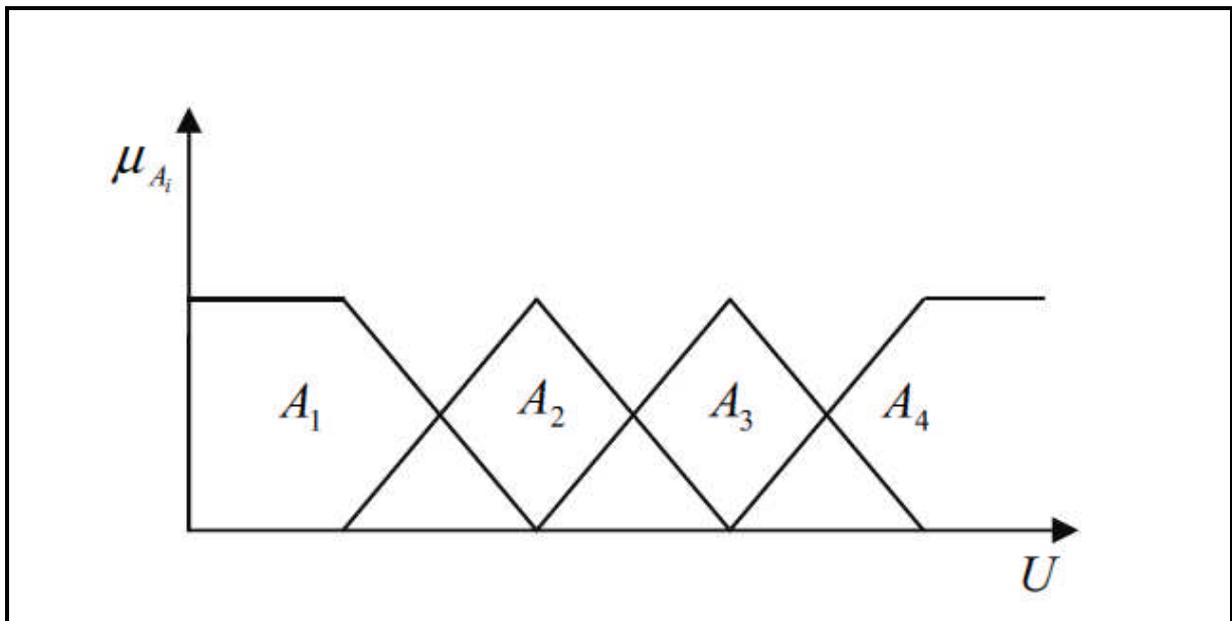


Fig I.3 . Représentation d'une variable linguistique définie comme $\{U, V, T_V = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}\}$

Un sous-ensemble flou permet de représenter différentes notions, en particulier la spécificité et la précision. Ces différentes notions apparaissent dans la figure I.4 :

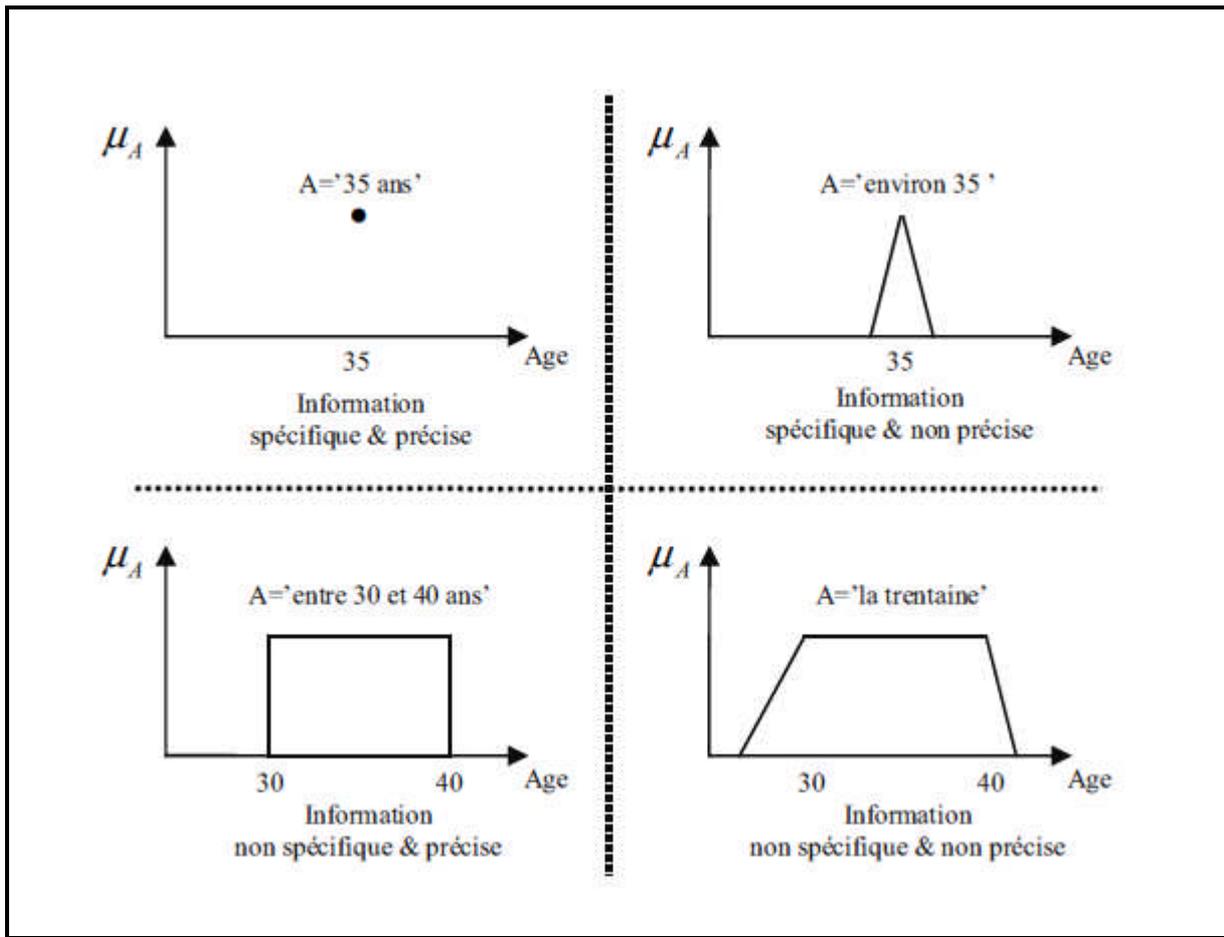


Fig I.4 .Notions de spécificité et de précision représentées à l'aide de sous-ensembles flous

I.3.3. Opérateurs de la logique floue

Les variables linguistiques sont liées entre elles au niveau des inférences par des opérateurs ET ou OU. IL s'agit d'opérateurs de la logique floue qui interviennent sur les fonctions d'appartenance représentant les variables linguistiques.

Le plus souvent, les opérateurs ET ou OU sont réalisés respectivement par les règles «min» et «max». Il y a alors une certaine affinité avec les règles de la logique classique. Cependant, il existe un grand nombre de règles pour la réalisation des opérateurs ET et OU qui tiennent compte du caractère particulier de la logique floue.

Soit A et B deux ensembles flous définis dans le référentiel U avec les fonctions d'appartenances μ_A et μ_B respectivement :

Définition 1 :(UNION) La fonction d'appartenance $\mu_{A \cup B}$ de l'union $A \cup B$, est définis pour tout $u \in U$ par :

$$\mu_{A \cup B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) \quad [I.4]$$

Dans le domaine de la commande, le + représente souvent le MAX :

$$\mu_A(u) + \mu_B(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \quad [I.5]$$

Définition 2 :(intersection) La fonction d'appartenance $\mu_{A \cap B}$ de l'intersection $A \cap B$, est définie pour tout $u \in U$ par :

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \quad [I.6]$$

Définition 3 : (Complémentation) La fonction d'appartenance $\mu_{\bar{A}}$ du complément de l'ensemble A, noté \bar{A} , est définie pour tout $u \in U$ par :

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u) \quad [I.7]$$

Définition 4 : (produit cartésien) soit A_1, \dots, A_n des ensembles flous respectivement définis sur U_1, \dots, U_n , le produit cartésien de A_1, \dots, A_n , est un ensemble flou définis sur U_1, \dots, U_n , de fonction d'appartenance :

$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \min(\mu_{A_1}(u_1), \dots, \mu_{A_n}(u_n)) \\ &= \mu_{A_1}(u_1) \cdot \mu_{A_2}(u_2) \dots \dots \dots \mu_{A_n}(u_n) \end{aligned} \quad [I.8]$$

Définition 5 : (Relation floue) Une relation floue représente le degré de présence, ou d'absence d'une association entre les éléments de deux ou plusieurs ensembles flous.

Une relation floue d'ordre n est un ensemble flou défini sur $U_1 \times \dots \times U_n$ par l'expression suivante :

$$R_{U_1 \times K \times U_n} = \{((u_1, K, u_n), \mu_R(u_1, K, u_n)) / (u_1, K, u_n) \in U_1 \times K \times U_n\} \quad [I.9]$$

Définition 6 : (Composition des règles floues) Soit R et S deux relations floues définies respectivement dans $U \times V$ et $V \times W$. La composition de R et S est un ensemble flou, symbolisé par $R \circ S$, de fonction d'appartenance :

$$\mu_{R \circ S}(u, w) = \{[(u, w), SUP(\mu_R(u, v) * \mu_S(v, w))], u \in U, v \in V, w \in W\} \quad [I.10]$$

I.3.4.Fonction d'appartenance

Afin de permettre un traitement numérique des variables linguistiques dans la prise de décisions floues sur ordinateur, une définition des variables linguistiques à l'aide de fonctions d'appartenance s'impose. Dans ce contexte on associe à chaque valeur de la variable linguistique une fonction d'appartenance désignée par $\mu_A(x)$, qui sera désignée par le degré ou le facteur d'appartenance. Il est à noter que l'ensemble des éléments de x pour lesquels $\mu_A(x) > 0$, est appelé «support de A». Le plus souvent, on utilise pour les fonctions d'appartenance les fonctions suivantes :

- **Fonction triangulaire :** Elle est définie par trois paramètres {a, b, c} qui déterminent les coordonnées des trois sommets.

$$\mu(x) = Max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right) \quad [I.11]$$

- **Fonction trapézoïdale :** Elle est définie par quatre paramètres {a,b,c,d} :

$$\mu(x) = Max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{c-x}{c-d} \right), 0 \right) \quad [I.12]$$

- **Fonction gaussienne :** Elle est définie par deux paramètres { σ, m } :

$$\mu(x) = exp \left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \quad [I.13]$$

- **Fonction sigmoïdale :** Elle est définie par deux paramètres {a,c} :

$$\mu(x) = \frac{1}{1+exp(-a(x-c))} \quad [I.14]$$

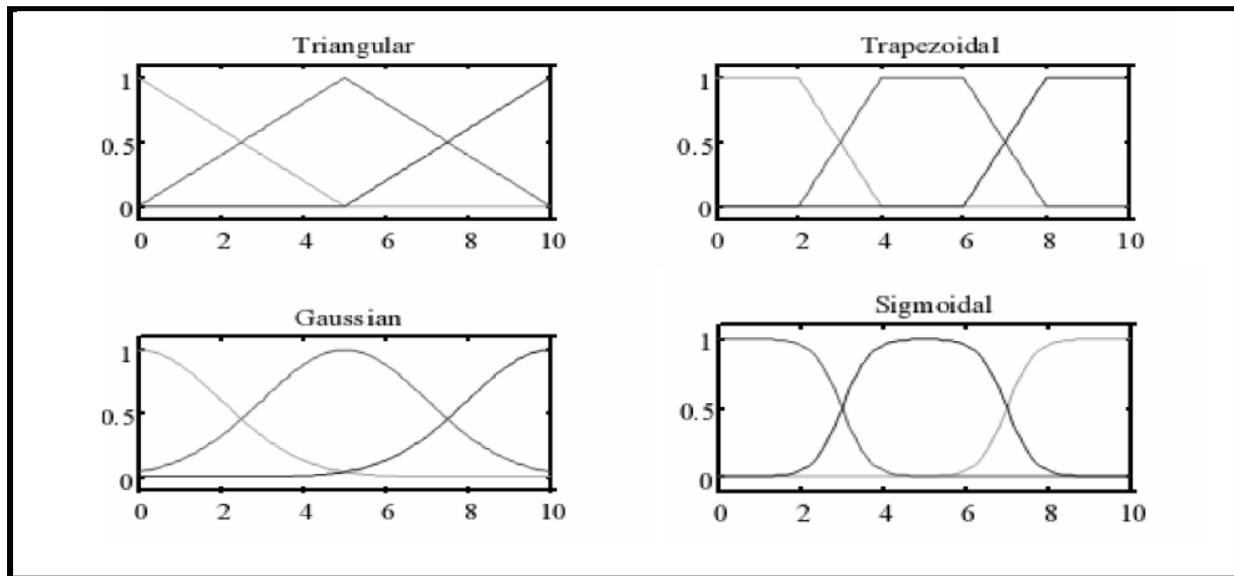


Fig.I.5. Les fonctions d'appartenances usuelles

I.3.5. Propositions et règle floue

Une proposition floue élémentaire est définie à partir d'une variable linguistique ($V ; U ; T_V$) par la qualification « V est A », avec A appartenant à T_V . Par exemple, « taille_de_Paul est MOYENNE » est une proposition élémentaire définie à partir de la variable linguistique (taille_de_Paul, {tailles}, {..., MOYENNE, ...}).

La valeur de vérité d'une proposition élémentaire « V est A » est égale à $\mu_A(v)$ où v correspond à la valeur numérique exacte de V .

Une proposition floue générale est définie à partir de propositions élémentaires et d'opérateurs logiques binaires (et, ou, implique) ou un aire (non). Il existe plusieurs méthodes pour calculer la valeur de vérité de telles propositions. Nous ne donnons ici que les plus communément utilisées.

- **Conjonction** : (V_1 est A_1) et (V_2 est A_2)

$$\min(\mu_{A_1}(V_1), \mu_{A_2}(V_2)) \quad (\text{Logique de Zadeh})$$

$$\max(\mu_{A_1}(V_1) + \mu_{A_2}(V_2) - 1, 0) \quad (\text{Logique de Lukasiewicz})$$

$$\mu_{A_1}(V_1) \cdot \mu_{A_2}(V_2) \quad (\text{Logique probabiliste})$$

- **Disjonction** : $(V_1 \text{ est } A_1) \text{ ou } (V_2 \text{ est } A_2)$

$$\max(\mu_{A_1}(V_1), \mu_{A_2}(V_2)) \quad (\text{Logique de zadeh})$$

$$\min(\mu_{A_1}(V_1) + \mu_{A_2}(V_2), 1) \quad (\text{Logique de Lukasiewicz})$$

$$\mu_{A_1}(V_1) + \mu_{A_2}(V_2) - \mu_{A_1}(V_1) \cdot \mu_{A_2}(V_2) \quad (\text{Logique probabiliste})$$

- **Implication** : $(V_1 \text{ est } A_1) \text{ implique } (V_2 \text{ est } A_2)$

$$\min(1 - \mu_{A_1}(V_1) + \mu_{A_2}(V_2), 1) \quad (\text{Lukasiewicz})$$

$$\min(\mu_{A_1}(V_1), \mu_{A_2}(V_2)) \quad (\text{Mamdani})$$

$$\mu_{A_1}(V_1) \cdot \mu_{A_2}(V_2) \quad (\text{Larsen})$$

- **Complémentation** : $\text{non } (V \text{ est } A)$

$$1 - \mu_A(v)$$

Dans ce qui précède, v, v_1 et v_2 correspondent à des instanciations numériques réelles des variables V, V_1 et V_2 .

Une règle floue est une proposition floue générale utilisant une implication entre deux propositions floues quelconques. Par exemple :

$$(V_1 \text{ est } A_1) \text{ et } (V_2 \text{ est } A_2) \text{ implique } (V_3 \text{ est } A_3)$$

Ou sous une forme plus linguistique :

$$\text{si } (V_1 \text{ est } A_1) \text{ et } (V_2 \text{ est } A_2) \text{ alors } (V_3 \text{ est } A_3)$$

est une règle floue. La partie $(V_1 \text{ est } A_1)$ et $(V_2 \text{ est } A_2)$ est appelée prémisses de la règle et $(V_3 \text{ est } A_3)$ conclusion.

Activation d'une règle floue

Une règle ne peut être activée que lorsque la valeur de vérité de la proposition floue constituant sa prémisses est non nulle.

I.4. Commande par logique floue

I.4.1. Introduction

Bien que la logique floue possède un champ d'application extrêmement vaste, nous nous intéressons ici qu'à son utilisation dans le cadre de la commande. En effet, cette méthode permet d'obtenir une loi de commande souvent très efficace sans devoir faire des études théoriques approfondies. L'algorithme de commande consiste en une collection de règles floues appelées base de règles. Dans cette section nous présentons toutes les bases générales du réglage et de la commande par logique floue.

Devant le problème délicat du contrôle et de la commande des systèmes complexes non linéaires et multi variables, les outils utilisés deviennent de plus en plus pointus. Un engouement certain s'est porté depuis quelques années autour de la logique floue, en parallèle des avancées de l'automatique classiques.

La théorie de la logique floue traite deux problèmes :

1. théorie de l'ensemble flou
2. théorie de mesure floue

La motivation primaire de la logique floue est la possibilité d'exploiter la tolérance de l'imprécision et de l'inexactitude .

L'idée d'appliquer les techniques floues au domaine du contrôle des processus a été proposée la première fois par Change et Zadeh en 1972. Leur démarche reposait sur une approche à base de modèle en utilisant le concept de fonction flou. Les principes de la logique floue ont été appliqués

en 1974 par Mamdani à la construction d'un premier contrôleur flou pour une commande de vitesse d'un moteur .

Mais ce n'est que depuis quelques années que la commande floue a connu, essentiellement au Japon, un essor remarquable ; Elle a été appliquée à des problèmes aussi divers que la purification de l'eau, la fabrication du ciment, la marche automatisée d'une rame de métro, etc.

L'attitude des automaticiens à l'égard de la commande floue a d'abord été réservée : après avoir, pendant des décennies, affirmé la nécessité d'identifier le mieux possible un système pour pouvoir construire une commande ayant des performances satisfaisantes, fallait-il faire confiance à cette méthode, qui prétendait remplacer les commandes plus ou moins sophistiquées, basées sur l'identification, par des techniques s'appuyant sur le savoir-faire humain plutôt que sur des équations ?

Actuellement, cette attitude a évolué. On peut penser que la commande floue va peu à peu prendre place dans la panoplie de l'ingénieur contemporain, sans supplanter les méthodes traditionnelles, et qu'elle constituera un complément précieux dans le cas des systèmes difficilement identifiables ou dont les paramètres subissent des variations brutales.

Ils existent beaucoup d'efforts de recherches réussies pour les applications de la théorie de la logique floue aux systèmes à commander. Ces travaux montrent une performance remarquable de ce type de régulateur en comparant avec le régulateur PID conventionnel .

I.4.2.Principe et réalisation d'un régulateur flou

I.4.2.1.Procédé général lors de conception d'une commande par logique floue

Le procédé à suivre lors de la conception d'une commande par logique floue est assez différent de celui d'une commande conventionnelle. La *figure 1.5* en montre les étapes principales. Généralement, lors de la conception d'un réglage ou d'une commande par logique floue nous commençons par une analyse approfondie sur le système à commander, ici il ne s'agit pas d'une recherche d'un modèle mathématique, mais il s'agit d'une exploration complète du comportement du système vis-à-vis de variation de la commande, cette exploration peut apparaître comme une description du comportement dynamique du système, qui se fait par des variables linguistiques qui peuvent être accompagnées d'une définition par fonction d'appartenance.

L'étape suivante consiste à une recherche d'une stratégie de commande, elle comprend la phase de fuzzification, les inférences et la défuzzification. En suite l'implémentation qui se fait généralement sur un PC, elle est suivie par une opération de test sur une installation réelle qui comporte bien sur le système à commander.

Finalemnt afin de trouver un comportement convenable, le changement de la stratégie de commande en plusieurs passages est très indispensable.

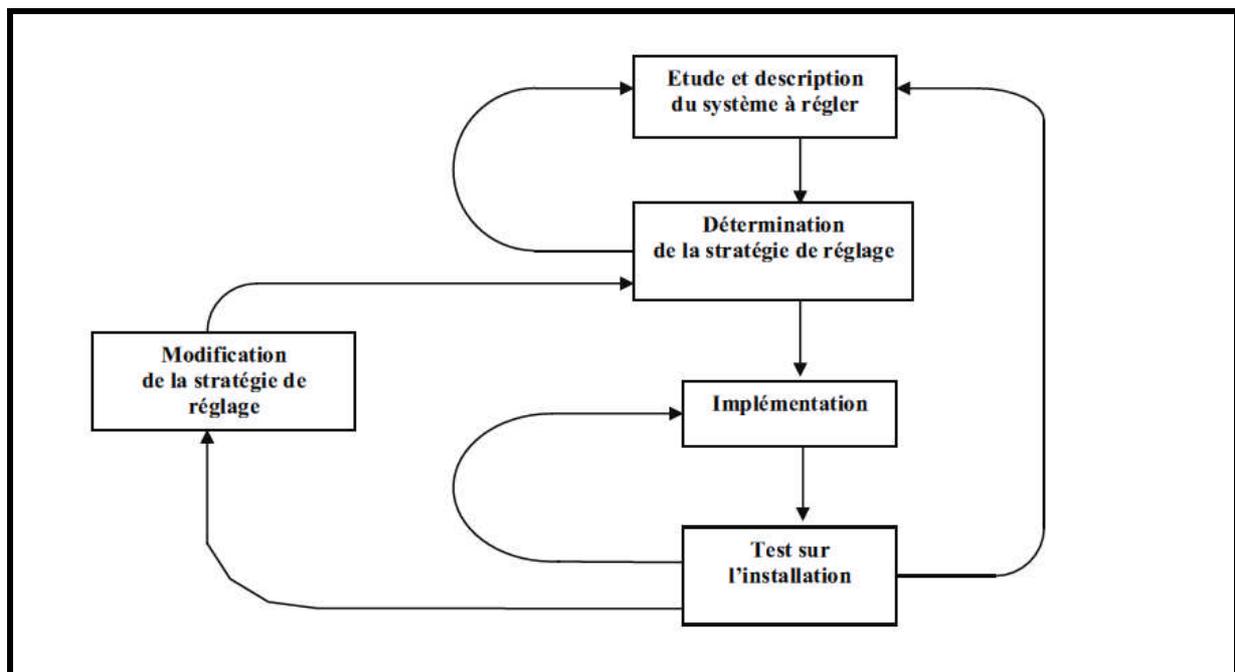


Fig.I.6. Procédé générale lors de la conception d'une commande par logique floue

I.4.2.2. Propriétés d'une commande par logique floue

Les propriétés essentielles d'une commande par logique floue peuvent être résumées de la manière suivante :

- Mesure de plusieurs grandeurs : la grandeur à régler et d'autres grandeurs caractérisant le comportement dynamique du système à régler,
- Comportement non linéaire du système,

- Aptitude à commander convenablement surtout des systèmes avec un comportement dynamique compliqué, dont la modélisation est difficile,
 - Connaissance approximative des paramètres du système à commander.
- La détermination de la stratégie de commande représente l'étape la plus importante, lors de conception d'une commande par logique floue. En effet, cette dernière contient la détermination de plusieurs paramètres. L'ensemble de ces derniers est très important ; nombre et forme des variables linguistiques des entrées, et mêmes des sorties, choix des différentes logiques, choix de la méthode de défuzzification.
- L'analyse de l'influence de ces paramètres n'est évidemment pas une chose facile. Néanmoins, plusieurs études récentes ont tenté en partie de faire varier certains de ces paramètres pour dégager quelques règles. La la forme et le nombre des fonctions d'appartenance sont très dépendants de l'application et ne peuvent se dissocier de la partie règles floues. Même chose pour les règles floues, une très grande quantité de travaux ont été réalisés dans le but est d 'améliorer et innover cette partie très importante dans un régulateur flou.

I.4.3. Structure d'un régulateur flou

Le régulateur par logique flou est composé de quatre éléments de base suivants:

- Interface de fuzzification,
- Base de connaissances,
- Moteur d'inférence floue,
- Interface de défuzzification.

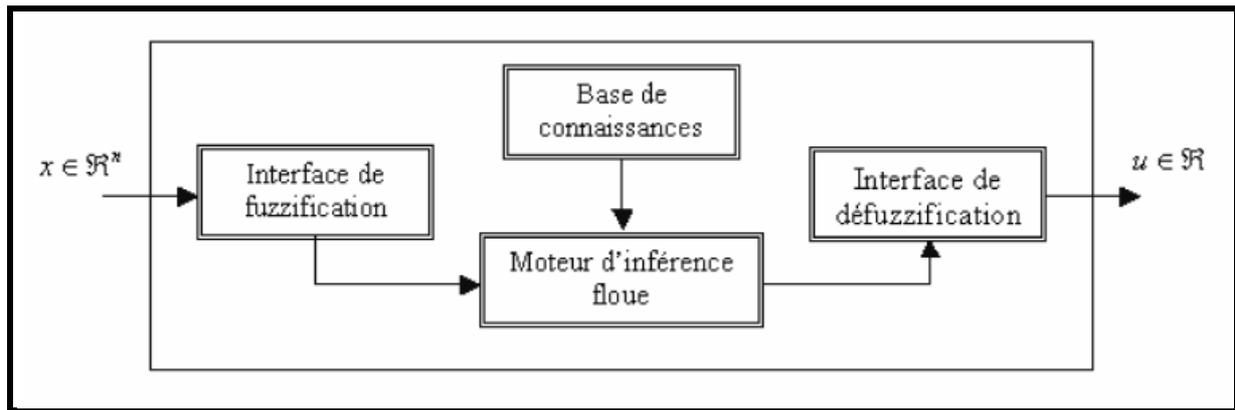


Fig.I.7.structure de base d'un régulateur flou

I.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les éléments de base relatifs à la théorie de la logique floue. En effet, des définitions de base sur les variables linguistiques, les sous-ensembles flous, ainsi que les opérateurs flous ont été donnés. L'utilisation de la logique floue dans la commande a été également présentée en décrivant les différents éléments constitutifs d'un régulateur flou.

Chapitre II

Stabilité et Stabilisation à partir de modèles flous

Introduction

Depuis plusieurs années, des travaux concernant la stabilité des boucles de régulation comprenant un régulateur flou ont vu le jour. On trouve, par exemple, des approches basées sur des méthodes qualitatives ou géométriques [23]. Elles utilisent, principalement, l'espace d'état et permettent d'obtenir des critères locaux ou globaux [22]. La mise sous la forme d'un problème de type Lur'e a également été exploitée dans plusieurs travaux, permettant l'utilisation, par exemple, du critère de Popov. D'autres approches sont également possibles : conicité, approche par passivité.

Une approche extrêmement féconde a également vu le jour concernant des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (TS) [SUG 88, TAK 85]. Ces systèmes sont constitués de règles dont la partie conclusion est mise sous forme d'une représentation d'état. La stabilité de ces systèmes a été étudiée à partir de plusieurs points de vue : approche de type Lyapunov, analogie avec des systèmes linéaires variant dans le temps mise sous la forme d'un système linéaire avec des incertitudes de modélisation, etc. Les conditions de stabilité obtenues dans ces travaux ne sont que suffisantes, puisqu'elles ne prennent pas en compte la partie antécédent des règles.

Des travaux proposent de prendre en compte cette partie antécédent pour aboutir à des résultats moins conservatifs. Dans le cas de la stabilité quadratique, des conditions nécessaires et suffisantes ont été proposées.

La plupart des travaux font appel, pour vérifier les conditions de stabilité, aux outils LMI (Linear Matrix Inequalities).

Dans tous les cas, le problème est de pouvoir déterminer une loi de commande stabilisante. On peut faire la synthèse d'une loi de commande linéaire, mais très souvent une approche de type PDC (Parallel Distributed Compensation) est utilisée pour calculer une loi de commande sur ces systèmes. Elle consiste à utiliser la même partie antécédent des règles que celle du système flou de type TSK (Takagi Sugeno Kang), et, dans la partie conclusion, des commandes locales par retour d'état. Dans ce contexte, chaque sous-système flou de type TSK est stabilisé localement par une loi linéaire.

Des approches utilisant la représentation d'état et des observateurs flous ont également été proposées [6] et, dans le cas où les prémisses des règles utilisent des variables mesurables, un principe de séparation a également été démontré [7].

Le but de ce chapitre est de développer des différents travaux effectués autour des modèles flous et, plus particulièrement, les modèles de type Takagi Sugeno (TS). Ce type de modèle permet de représenter une large classe de systèmes non linéaires. La première partie rappelle la forme de ces modèles ainsi que certains cas particuliers. La seconde partie traite de la stabilité de ces modèles, avec une approche utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques. La troisième partie concerne la stabilisation par ces modèles. Plusieurs types de lois de commande sont proposées, retour d'état linéaire, approche PDC (Parallel Distributed Compensation), ainsi que des lois de commande utilisant des propriétés particulières des modèles [15].

L'association avec un observateur flou est traitée dans la quatrième partie. Deux cas sont distingués, suivant que les prémisses sont mesurables ou non. Dans le premier cas, un principe de séparation est proposé. Le problème des erreurs statiques est également traité. L'ensemble des conditions obtenues peut se mettre sous la forme d'un problème de résolution de LMI (Linear Matrix Inequalities); le potentiel associé à ces inégalités est alors utilisé. Enfin, la dernière partie suggère d'autres possibilités de recherche, en proposant des conditions de stabilité basées sur des fonctions de Lyapunov non quadratiques, le problème, notamment pour la stabilisation, étant d'obtenir des équations de type BMI (Bilinear Matrix Inequalities).

II.2 Modèles flous de Takagi Sugeno (TS)

Ce type de modèle flou est très intéressant pour la représentation de systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, mécaniques ou chaotiques et a été proposé par [SUG 88, TAK 85]. Il est décrit par des règles floues « si ... alors » qui représentent localement des relations linéaires d'entrées-sorties d'un système.

Avec les relations $R^i : (i=1, 2, \dots, r)$ la $i^{\text{ème}}$ règle, r étant le nombre de règles « si ... alors », $F_j^i (j=1, 2, \dots, r)$ les sous-ensembles flous des prémisses, $x(t) \in R^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur des entrées, $y(t) \in R^q$ le vecteur des sorties, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{q \times n}$ et $Z_i(t) \sim Z_p(t)$ les variables des prémisses (variables dépendant de l'état et/ou des entrées), les modèles flous TS sont représentés sous la forme suivante, ou MFC et MFD indiquant, respectivement, les modèles flous continus et les modèles flous discrets.

II.2.1 Modèles flous continus(MFC)

Règle R^i du modèle :

$$\text{Si } Z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } Z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, r \quad [\text{II.1}]$$

Chaque conséquence de règle représentée par des relations dans l'espace d'état $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ est appelée un « sous-modèle ». A chaque règle R^i est attribué un poids $w_i(z(t))$ qui dépend de la valeur de vérité (ou degré d'appartenance) des $Z_j(t)$ aux sous ensembles flous F_j^i , notée $F_j^i(Z_j(t))$, et du choix de modélisation du connecteur (opérateur) « et » reliant les prémisses. Le connecteur « et » est souvent choisi comme étant le produit, d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(Z_j(t)), \quad i=1, 2, \dots, r \text{ avec } w_i(z(t)) \geq 0, \text{ pour tout } t \quad [\text{II.2}]$$

Puisque les fonction d'appartenance prennent leur valeur dans l'intervalle $[0,1]$.

A partir des poids attribués à chaque règle, les sorties finales des modèles flous sont inférées de la manière suivante, qui correspond à une défuzzification barycentrique :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad [\text{II.3}]$$

Qui peuvent être réécrites :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \quad [\text{II.4}]$$

avec :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

Vérifiant une propriété de somme convexe, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \text{ et } w_i(z(t)) \geq 0, \text{ pour tout } t :$$

De façon tout à fait analogue, les modèles flous TS discrets sont définis comme suit :

II.2.2. Modèles flous discrets (MFD)

Règle R^i $i = 1, 2, \dots, r$, du modèle :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad [\text{II.5}]$$

ou, de façon plus compacte, avec la même définition des $h_i(z(t))$:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \quad [\text{II.6}]$$

Une extension possible du modèle flou présenté ci-dessus permet de prendre en compte des incertitudes dans les paramètres des prémisses, dans le cas discret. De plus, il est également utilisé pour les modèles non linéaires incertains, en introduisant les incertitudes du modèle dans les parties conclusion des règles floues.

Le potentiel offert par ce type de représentation permet l'utilisation de toutes les techniques associées. Elle permet notamment, de traiter les problèmes multivariables et d'aborder le problème de stabilité à l'aide de la méthode de Lyapunov.

Plusieurs approches sont possibles pour obtenir des modèles écrits sous cette forme. Une première approche est, à partir d'un modèle mathématique non linéaire, d'obtenir un modèle flou soit de façon « directe », voir [MOR 01, TAN 98], soit par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement. Une deuxième approche dans le cas discret (MFD) fait appel à une identification floue ; des exemples d'algorithmes sont présentés dans [GAS 00, SUG 88, TAK 85].

Pour illustrer la plupart des résultats de stabilité et de stabilisation qui seront développés tout au long du chapitre, deux exemples seront utilisés. Le premier est un modèle discret de système non linéaire, il sera dénoté exemple A :le deuxième exemple concerne le pendule inversé, en simulation et en temps réel.

II.2.3.Exemple A

Dans le cas discret, on considère le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) + x_1(t)x_2(t) + x_1(t)x_3(t) + (3 - 2x_1(t))u(t) \\ x_2(t+1) = -\frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2} + \frac{x_1^2(t)}{2} - \frac{x_1(t)x_2(t)}{2} + x_1(t)x_3(t) \\ x_3(t+1) = x_1(t) + 3(3 - 2x_1(t))u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad [\text{II.7}]$$

On peut imaginer plusieurs solutions pour écrire un modèle flou de Takagi Sugeno. On peut décider de « découper » $x_2(t)$ pour reporter la non-linéarité $x_1(t)x_2(t)$ dans la partie prémisse et laisser dans partie conclusion que $x_1(t)$. Le même travail doit être fait pour $x_1(t)x_3(t)$, $x_1^2(t)$ et $x_1(t)u(t)$. Le problème peut alors être vu de deux manières. Il est préférable de travailler sur des variables mesurables, ce point sera détaillé dans le paragraphe consacré aux observateurs, donc ici $x_1(t)$ et de ne pas utiliser trop de découpages, cela entraînant une explosion du nombre de règles. Effectivement, si l'on choisit de découper $x_1(t)$ seul, le modèle sera composé de quatre règles, et avec $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ de huit règles.

Pour ces deux raisons, sachant, dans l'exemple choisi, que $x_1(t)$ est suffisant, le modèle flou sera constitué de deux règles . Pour obtenir la partie prémisse, il suffit de résoudre le problème suivant.

Trouver deux ensembles flous $F_1^1(x_1(t))$ et $F_2^1(x_1(t))$ et deux réels a et b vérifiant :

$$x_1(t) = F_1^1(x_1(t))a + F_2^1(x_1(t))b, 0 \leq F_1^1(x_1(t)) \leq 1, 0 \leq F_2^1(x_1(t)) \leq 1$$

et

$$F_1^1(x_1(t)) + F_2^1(x_1(t)) = 1$$

Après quelques opérations élémentaires, on aboutit à :

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1(t)-b}{a-b}, F_2^1(x_1(t)) = \frac{a-x_1(t)}{a-b} \text{ et } b \leq x_1(t) \leq a$$

Le modèle flou représente donc exactement le modèle non linéaire [II.7] si $x_1(t) \in [a, b]$. si l'on se place dans un objectif de stabilité et de stabilisation, il est clair que $0 \in [a, b]$, et une solution naturelle consiste à prendre un intervalle centré : $x_1(t) \in [-a, a]$. Dans cet intervalle, le modèle flou à deux règles suivant représente donc exactement le modèle linéaire [II.7].

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors :

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 2+a \\ \frac{a-1}{2} & -\frac{a-1}{2} & a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3-2a \\ 0 \\ 3(3-2a) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t) \end{cases} \quad [\text{II. 8a}]$$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors :

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 2-a \\ -\frac{a+1}{2} & \frac{a+1}{2} & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3+2a \\ 0 \\ 3(3+2a) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t) \end{cases} \quad [\text{II. 8b}]$$

Et pour des raisons évidentes de commandabilité : $a < \frac{3}{2}$

De plus, quel que soit a , les matrices A_1 et A_2 possèdent des valeurs propres en dehors du cercle unité.

II.2.4. Le pendule inversé

Le deuxième exemple, qui sera traité tout au long du chapitre, est le système bien connu du pendule inversé. Une plate-forme étant disponible au LAMIH (Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines), cet exemple sera traité aussi bien en simulation qu'en temps réel. Le pendule inversé est un système instable, SIMO (single input multiple output) et possède des non-linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique et aux forces de frictions. C'est pourquoi il est souvent utilisé pour la validation de nouvelles lois de commande et leurs performances.

Parmi elles, on peut citer l'application de réseaux neuronaux, la commande floue, la commande adaptative floue, la commande H^∞ , la commande linéaire, la méthode des moments pour le calcul des PID, la commande non linéaire, etc.

Le pendule inversé est composé d'un chariot mobile pouvant se déplacer le long d'un rail de quatre mètres (figure II.1).

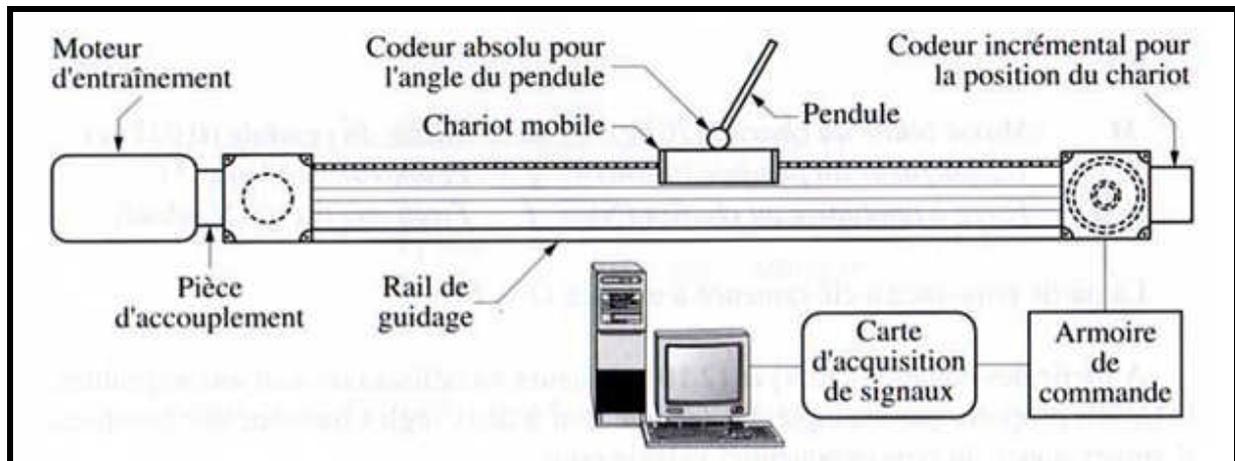


Fig II.1. Schéma de principe de la plate-forme d'essais

Cette plate-forme d'essais autorise une rotation du pendule de 360° permettant ainsi, à partir de conditions initiales quelconques, d'atteindre les objectifs de la commande qui sont de réguler l'angle autour de zéro en partant d'une condition initiale θ_0 comprise dans l'intervalle $[-\pi \text{ rad}, +\pi \text{ rad}]$, et d'asservir la position du chariot à une consigne désirée X , en partant d'une condition initiale X_0 comprise dans l'intervalle $[-1m, +1m]$ (figure II.2)

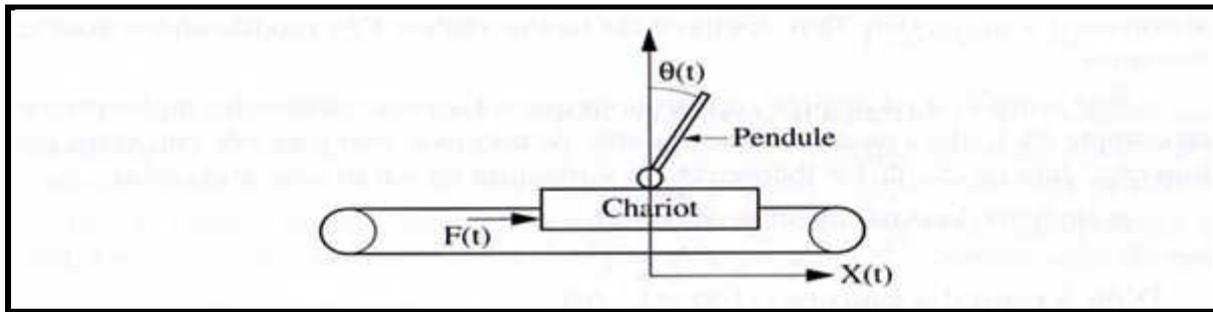


Fig.II.2.Schéma du système mécanique « chariot-pendule »

Les équations électriques et mécaniques de la plate-forme d'essais nous fournissent un modèle de connaissance du système. La méthode utilisée pour déterminer ce modèle est celle des équations du mouvement données par les équations d'Euler-Lagrange. Ces équations sont les suivantes : [II.9] pour la position, [II.10] pour l'angle.

$$\ddot{X}(t) = \frac{F(t) - f\dot{X}(t) + m(g/2 \sin(2\theta(t)) - L\dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)))}{M + m \sin^2(\theta(t))} \quad [\text{II.9}]$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{(g(M+m) \sin(\theta(t)) + F(t) \cos(\theta(t)) - f\dot{X}(t) \cos(\theta(t)) - mL\dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)))}{L(M + m \sin^2(\theta(t)))} \quad [\text{II.10}]$$

Avec :

M	Masse de totale du chariot (20kg)	m	Masse du pendule (0,025 kg)
L	1/2 longueur du pendule (0,1 m)	g	pesateur (9,8 m. s ⁻²)
$F(t)$	Force à appliquer au chariot (N)	f	Frottements (150 N.m/rad)

La partie puissance a été ramenée à un gain $G=67$

A partir des équations [II.9] et [II.10] plusieurs modélisations sont envisageables, [MA 98] propose, par exemple, un modèle flou à deux règles basé sur des fonctions d'appartenance du type exponentiel valable pour :

$$\theta(t) \in \left[-\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \right]$$

Il est possible de travailler directement sur les équations [II.9] et [II.10] pour éviter de passer par une étape d'optimisation par exemple. On peut montrer qu'un modèle flou à seize règles peut être obtenu représentant exactement les équations [II.9] et [II.10] dans un domaine compact du vecteur des prémisses $z(t)$.

Pour réduire le nombre de règles, quelques simplifications ont été réalisées qui aboutissent à un modèle flou composé de quatre règles, Ces modifications sont les suivantes :

$-\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t))$ est négligé ; remarquons que si l'on veut utiliser des règles prenant en compte $\dot{\theta}(t)$, alors on utilise une variable de prémisse non mesurée ; on verra plus loin que, dans ce cas-la, les théorèmes de séparation ne seront plus utilisables ;

$-m\sin^2(\theta(t))$ est négligeable devant M .

D'où, à partir des équations [II.9]et[II.10] :

$$\ddot{X}(t) = \frac{-f\dot{X}(t) + mg\sin(\theta(t))\cos(\theta(t)) + Gu(t)}{M} \quad [\text{II. 11}]$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{LM} (g(M + m)\sin(\theta(t)) - f\dot{X}(t)\cos(\theta(t)) + Gu(t)\cos(\theta(t))) \quad [\text{II. 12}]$$

Dans les équation [II.11]et[II.12], les non linéarité peuvent être reportées dans les prémisses en « découpant » $\cos(\theta(t))$ et $\sin(\theta(t))$. Sachant que $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$, les termes non linéaires peuvent être réécrits en utilisant la même méthode que dans le cas de l'exemple A :

$$\sin(\theta(t)) = F_1^1(\theta(t)) \cdot \theta(t) + F_1^2(\theta(t)) \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \theta(t)$$

avec :

$$F_1^1(\theta(t)) = \frac{\theta_0 \cdot \sin(\theta(t)) - \theta(t) \cdot \sin(\theta_0)}{\theta(t) \cdot (\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0,1]$$

$$F_1^2(\theta(t)) = 1 - F_1^1(\theta(t)) = \frac{\theta_0 \cdot \theta(t) - \theta_0 \cdot \sin(\theta(t))}{\theta(t) \cdot (\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0,1]$$

et :

$$\cos(\theta(t)) = F_2^1(\theta(t)) \cdot 1 + F_2^2(\theta(t)) \cdot \cos(\theta_0)$$

avec :

$$F_2^1(\theta(t)) = \frac{\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)}{1 - \cos(\theta_0)} \in [1,0]$$

$$F_2^2(\theta(t)) = 1 - F_2^1(\theta(t)) = \frac{1 - \cos(\theta(t))}{1 - \cos(\theta_0)} \in [0,1]$$

L'allure des fonctions d'appartenances est présentée à la figure II.3.

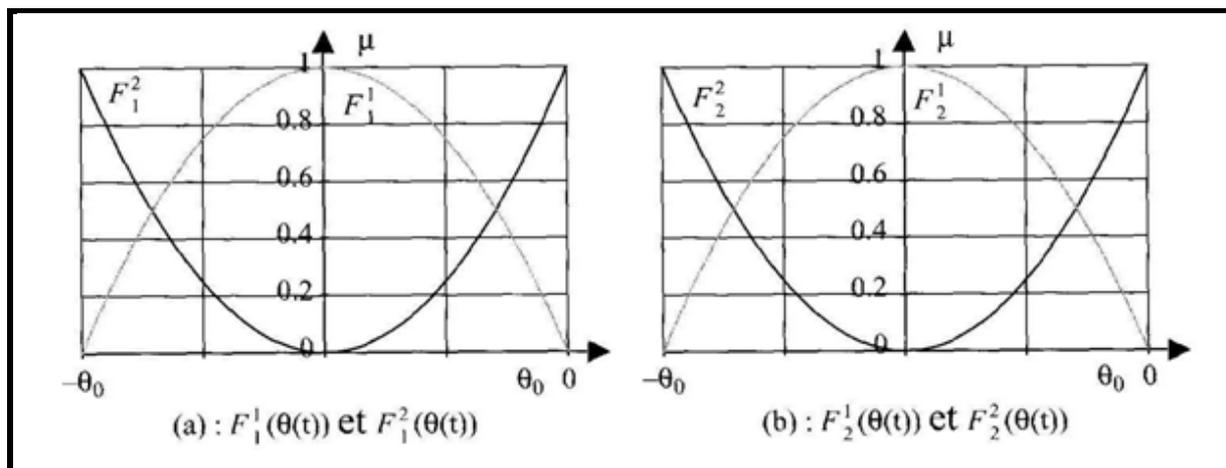


Fig.II.3.Allure des fonctions d'appartenance associées au modèle flou à quatre règles

Règle $i, i \in \{1, \dots, 4\}$: si $\theta(t)$ est F_1^i et $\theta(t)$ est F_2^i alors $\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$

Le modèle flou à quatre règles représente exactement le modèle écrit équations [II.11] et [II.12] quand $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$. Néanmoins, il est encore possible de simplifier ce modèle flou en remarquant que $F_1^1(\theta(t))$ est très proche de $F_2^1(\theta(t))$. Effectivement, l'erreur maximum entre ces deux valeurs d'appartenance est $\forall \theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$ et $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, inférieure à 2,4%. Compte tenu de cette remarque, un modèle flou à deux règles peut être proposé :

Règle $i, i \in \{1, 2\}$: si $\theta(t)$ est F_1^i alors $\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad [\text{II. 13}]$

avec le vecteur d'état : $x(t) = [\theta(t) \ X(t) \ \dot{X}(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$, et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{mg}{M} & 0 & \frac{-f}{M} & 0 \\ \frac{g}{L} \left(1 + \frac{m}{M}\right) & 0 & \frac{-f}{ML} & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{M} \\ \frac{G}{ML} \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{mgsin(\theta_0)\cos(\theta_0)}{M\theta_0} & \frac{-f}{M} & 0 \\ \frac{g}{L}(1 + \frac{m}{M})\frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & \frac{-f\cos(\theta_0)}{ML} & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{M} \\ \frac{G\cos(\theta_0)}{ML} \end{bmatrix} \quad C_2 = C_1$$

Notons que ce modèle flou n'est plus localement commandable si $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta_0 = \pi/2$.

Les deux exemple étant présentés, le paragraphe suivant traite des différentes propriétés de stabilité quadratique des modèles de type Takagi-Sugeno(TS).

II.3.Stabilité des modèles flous :

Excepté dans le dernier paragraphe du chapitre, on s'intéresse à la stabilité et à la stabilisation quadratique des modèles flous TS, c'est-à-dire en utilisant la fonction de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ avec $P > 0$. Les théorèmes suivants basés sur la seconde méthode de Lyapunov donnent les conditions suffisantes permettant de garantir la stabilité de [II.4]et [II.6].

THÉORÈME II.1 (MFC) [8]. *–L'équilibre d'un modèle flou, continu, décrit par [II.4],est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que :*

$$A_i^T P + P A_i > 0, i = 1, 2, \dots, r \quad [\text{II.14}]$$

THÉORÈME II.2 (MFD) [8]. *–L'équilibre d'un modèle flou, discret, décrit par [II.6],est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que :*

$$A_i^T P A_i - P < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad [\text{II.15}]$$

Les conditions de stabilité obtenues sont évidemment conservatives puisque la partie prémisses des règles n'est pas prise en compte. D'autres voies ont été explorées, certaines sont reprises dans la suite.

L'approche utilisée dans [19] considère un modèle flou comme un système linéaire avec des incertitudes de modélisation. Toutes les paires (A_i, B_i) intervenant dans les règles peuvent être réécrites en fonction d'une paire (A_0, B_0) unique :

$$\forall i, A_i = A_0 + \delta A_i, B_i = B_0 + \delta B_i$$

d'où [II.1] peut se réécrire avec $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$:

$$x(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^r h_i(z) \delta A_i) x(t) + (B_0 + \sum_{i=1}^r h_i(z) \delta B_i) u(t) \quad [\text{II.16}]$$

Le modèle (A_0, B_0) doit être choisi avec attention pour que les normes de δA_i , et δB_i soient faibles. On peut envisager, par exemple, de prendre le modèle obtenu par moyennage des autres modèles.

Le modèle (A_0, B_0) est supposé stable ; il existe, donc deux matrices $P > 0$ et $Q > 0$ tels que $A_0^T P A_0 - P = -Q$. Définissons les matrices symétriques :

$$D_i = (A_0 + \delta A_i)^T P (A_0 + \delta A_i) - P = \delta A_i^T P \delta A_i + \delta A_i^T P A_0 + A_0^T P \delta A_i - Q$$

De plus, chaque partie antécédent d'une R^i peut s'écrire « si $x(t)$ et F^i », ou F^i est considéré comme un ensemble flou multidimensionnel pour la règle, c'est-à-dire, $x(t) \in \text{supp}(F^i)$ signifie que $\forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j(t) \in \text{supp}(F^i)$.

THÉORÈME II.3 (MFD) [19]. – *Le modèle TS[II.1] autonome ($u=0$) est stable si pour une matrice A_0 Hurwitz, il existe une matrice $Q > 0$ telle que, pour toutes les règles $i, x(t)^T D x(t) < 0$ pour tout $x(t) \neq 0, x(t) \in \{x(t) / x(t) \in \text{Supp}(F^i)\}$.*

Afin de déterminer une matrice $Q > 0$ vérifiant les conditions de théorème II.3 les auteurs proposent un algorithme basé sur la descente du gradient. En ce qui concerne la partie commande, les auteurs se sont limités à travailler avec un retour d'état linéaire $u(t) = -F x(t)$.

L'intérêt de cette approche est de réduire la conservativité des résultats qui ne sont basés que sur la partie conséquence des règles. Les auteurs donnent un exemple où il est possible de prouver la stabilité d'un modèle flou comprenant deux matrices A_i non Hurwitz.

Le fait d'utiliser un support sans propriétés particulières ne permet pas une formulation sous forme de LMI du problème. Il est alors possible de remédier à ce problème en utilisant des propriétés sur ce support.

Dans le cas où le modèle TS contient des termes constants [II.17], il est possible d'utiliser les travaux de [20]. Considérons un modèle flou, discret, autonome qui admet dans sa partie conclusion des termes constants. Règle R^i du modèle :

$$\text{si } x(t) \text{ est } F^i \text{ alors } x(t+1) = A_i x(t) + b_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad [\text{II.17}]$$

En utilisant la connaissance des supports des fonctions d'appartenance qui peuvent être décrits par des contraintes de type quadratique :

$$x \in \text{supp}(F^i) \Leftrightarrow F_j^i(x) = x^T T_j^i x + 2x^T u_j^i + v_j^i \leq 0, j = 1, \dots, n_i$$

On peut définir la P-Stabilité-Quadratique d'une règle de la façon suivante.

DÉFINITION II.1 [MAR 95]. - La règle R^i est P-Quadratiquement-Stable si, et seulement si, il existe une matrice $P > 0$, et un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que : $\forall x(t) \in \text{supp}(F^i), x(t) \neq 0$:

$$\Delta V_i(x(t)) \leq -\varepsilon_i \|x(t)\|^2 \text{ et } \Delta V_i(x(t)) = 0 \text{ si } 0 \in \text{supp}(F^i)$$

$$\text{Avec : } V_i(x) = x^T P x \text{ et } \Delta V_i(x) = x^T (A_i^T P A_i - P)x + 2x^T A_i^T P b_i + b_i^T P b_i.$$

Et par l'utilisation de S-procédure, on peut déduire le théorème suivant :

THÉORÈME II.4 (MFD) [20]. $-\exists \tau_j^i \geq 0, j = 1, \dots, n_i, \varepsilon_i > 0$ et $P > 0$ tels que :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P A_i - P + \varepsilon_i I & A_i^T \\ b_i^T P A_i & b_i^T P b_i \end{bmatrix} - \sum_j \tau_j^i \begin{bmatrix} T_j^i & u_j^i \\ u_j^{iT} & v_j^i \end{bmatrix} \leq 0 \quad [\text{II.18}]$$

Alors la règle R^i est P -Quadratiquement -Stable .

Et en fin le théorème II.5 pour le modèle flou complet.

THÉORÈME II.5(MFD) [20]. -le modèle flou décrit par l'équation [II.17] est quadratiquement stable s'il existe une matrice $P=P^T > 0$ telle que toutes les règles soient P -Quadratiquement stables.

Les conditions [II.18] du théorème II.4 sont des LMI. Notons que si $b_i=0$ et que le support contient 0, alors, obligatoirement, les conditions deviennent celles de Tanaka.

Après avoir présenté les différentes approches permettant d'étudier la stabilité de modèle flous, la partie suivante traite la stabilisation de modèles flous.

II.4. Stabilisation des modèles flous

La réalisation d'un régulateur flou est basée sur le modèle flou TS représentant le système non linéaire .A partir du concept PDC(parallel Distributed Compensation) ,la détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle locale une matrice de gains, par exemple en utilisant une synthèse quadratique ou des LMI.L'idée principale de ce concept est de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état , pour chaque sous-modèles du modèle flou .Dans toute la suite, on suppose que les sous modèles sont commandables et observables.

II.4.1. Construction d'un régulateur flou

Le régulateur flou PDC partage les mêmes ensembles flous que le modèle ,donc, il garde les mêmes parties prémisses ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance .

Pour les modèles flous continus [II.1] et discrets [II.5],la réalisation du régulateur se fait de la façon suivante . Règle R^i du régulateur :

$$\text{si } z_i(t) \text{ est } F_j^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } u(t) = -F_i x(t), i = 1, 2, \dots, r \quad [\text{II.19}]$$

La sortie finale du régulateur flou est inférée de la manière suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad [\text{II.20}]$$

avec

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

Vérifiant toujours la même propriété de somme convexe.

La réalisation du régulateur flou consiste à déterminer les gains de contre-réaction F_i dans les parties conclusions.

II.4.2. Conditions de stabilité

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer [II.20] à [II.4] (cas continu) et [II.20] à [II.6] (cas discret). Ainsi les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\text{MFC}) \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) - B_i \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j x(t)) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \end{aligned} \quad [\text{II.21}]$$

$$\text{Avec } G_{ij} = A_i - B_i F_j$$

$$(\text{MFD}) x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \quad [\text{II.22}]$$

En appliquant les théorèmes II.1 et II.2 respectivement à [II.21] et [II.22], il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD. La démonstration du théorème II.6 (respectivement II.7) provient directement du théorème II.1 (respectivement II.2).

THÉORÈME II.6(MFC).-L'équilibre du modèle flou continu[II.21]est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \\ \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) < 0, i < j \quad [\text{II.23}]$$

pour tout $i, j = 1, 2, \dots, r$, exceptées les paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$.

THÉORÈME II.7 (MFD).-L'équilibre du modèle flou discret [II.22] est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ telle que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, \\ \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P < 0, i < j \quad [\text{II.24}]$$

pour tout $i, j = 1, 2, \dots, r$, exceptées les paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$.

Le fait d'utiliser la condition[II.23] pour les MFC,[II.24] pour les MFD, avec $i < j$ permet de réduire un peu la conservativité des résultat puisqu'il n'est pas obligatoire d'avoir tous les sous-modèles croisés $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ stables.

L'obtention du régulateur flou PDC consiste donc à déterminer les matrices de gains de retour d'état $F_j(j = 1, 2, \dots, r)$ satisfaisant les conditions du théorème II.6(cas MFC) ou théorème II.7(cas MFD) pour une matrice P définie positive.

Pour calculer les matrices de retour d'état, il est possible d'utiliser une synthèse quadratique et vérifier ensuite qu'il existe une matrice $P > 0$ commune. Il est également possible d'utiliser un placement des pôles pour assurer que les valeurs propres de $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ $i \in \{1, \dots, r\}$ tombent dans un domaine préspecifié. On peut alors, raisonnablement penser que si les pôles sont proches pour les modèles bouclés $G_{ij} = A_i - B_i F_j$, il y a de fortes chances que les équations [II.23] dans le cas MFC,[II.24] pour le cas MFD, soient également vérifiées. Néanmoins, des exemples ou les paires (A_i, B_i) n'ont pas la même forme montrent que ce résultat n'est pas garanti.

Il est également possible d'utiliser les théorème de [8] donnant des conditions moins conservatives en tenant compte d'une propriété particulière sur le poids des règles, ces théorèmes étant tirés des théorèmes II.6 et II.7.

Une autre façon de déterminer la matrice P et les gains de commande $F_j (j = 1, 2, \dots, r)$ simultanément est l'utilisation des outils issus de l'optimisation convexe, et plus particulièrement des LMI (Linear Matrix Inequalities). Certains outils LMI sont utilisables à l'aide du logiciel MATLAB et de la boîte à outils *LMI Control Toolbox*.

Par exemple, dans le cas de la synthèse d'une loi de commande de type PDC pour des modèles flous MFD, théorème II.7, la première partie de l'équation [II.24], non linéaire en P et F_j , s'écrit, après le changement de variables $x = P^{-1}$, $M_i = F_i P^{-1}$: $-(XA_i^T - M_i^T B_i^T)X^{-1}(A_i X - B_i M_i) + X > 0$ et, en utilisant le lemme de Schur [ELG 97], il revient le problème suivant. Trouver $X > 0$ et M_i tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \begin{bmatrix} X & XA_i^t - M_i B_i^t \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad [\text{II.25}]$$

De même, la seconde partie des équations [II.24] peut être réécrite. Trouver $X > 0$ et M_i, M_j tels que $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, i < j$:

$$\begin{bmatrix} X & \frac{1}{2}(XA_i^t + XA_j^t - M_j B_i^t - M_i B_j^t) \\ \frac{1}{2}(A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad [\text{II.26}]$$

Puis : $P = X^{-1}, F_i = M_i P$

Plusieurs problèmes sous forme de LMI appliquées à des modèles flous de type TS peuvent être trouvés dans [11]. On peut, de façon additionnelle, rajouter des contraintes de type degré de stabilité préspecifié, contraintes de saturation sur la commande, contraintes de saturation sur la sortie.

Enfin, d'autres travaux traitant de la stabilisation de modèles flous du type TS existent. Parmi eux, nous allons en présenter un certain nombre.

[17] :leurs travaux utilisent la similitude des modèles flous MFD de type TS avec les modèles LTV (linéaires variant dans le temps). En termes de stabilité, ils ont montré l'équivalence entre les modèles flous de type TS et une classe particulière de modèles LTV. Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique, globale, basée sur le système LTV équivalent, est donnée. Un cas particulier de cette condition suffisant, basé sur une normalisation simultanée des matrices, est également abordé, ainsi qu'une procédure de construction permettant, dans certains cas, d'obtenir cette normalisation.

Il n'y a pas de discussions ayant trait à la commande à partir de ces modèles.

[16] :ils se placent dans le même type d'approche que [19], c'est-à-dire, le modèle flou MFD est analysé comme un modèle linéaire soumis à une classe de perturbations non linéaires [II.16] ; les termes constants du type [II.17] sont également pris en compte. Ils obtiennent un test de stabilité sous la forme de LMI qui réduit la complexité des LMI du type [II.25]. Pour la partie commande, les auteurs se sont limités à travailler avec un retour d'état linéaire $u(t) = -Fx(t)$.

[6] :ces travaux concernent la stabilité des modèles flous MFC de type [II.1] et une commande qui n'utilise que le sous-modèle dominant, c'est-à-dire dont la valeur d'appartenance $h_i(z(t))$, $i \in \{1, \dots, r\}$ est la plus élevée. A chaque instant: $u(t) = -F_k x(t)$ avec $k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{h_i(z(t))\}$. Cette commande ne pouvant satisfaire tous les cas, une commande additionnelle est rajoutée qui s'apparente à une commande à grand gain qui utilise une division par $\|\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x\|$, sans garantir que cette loi est continue quand cette quantité est nulle.

[15] :cette approche s'inspire de la stabilisation quadratique, simultanée, d'une famille de systèmes linéaires SIMO et est appelée SSf (stabilisation simultanée pour modèle flous). Des conditions suffisantes d'existence d'une loi, pour des systèmes flous de type SIMO, sont données.

THÉORÈME 2.8(MFC)[15]. -soit un modèle flou décrit en [II.4] de type SIMO. supposons qu'il existe une matrice $P > 0$ et un réel $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists Q_i > 0, F_i, A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P + Q_i \leq 0 \quad [\text{II.27}]$$

$$\forall j \quad Q_i + P B_i F_j + F_j^T B_i^T P > \alpha I \quad [\text{II.28}]$$

Alors, la loi de commande : $u(x) = g_1(x) + g_2(x)$ avec :

$$g_1(x) = \min_i \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \text{ pour } : i \text{ tel que } : B_i^T P x > 0 \quad [\text{II.29}]$$

$$g_2(x) = \max_i \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \text{ pour } : i \text{ tel que } : B_i^T P x < 0 \quad [\text{II.30}]$$

Rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable.

La démonstration étant fastidieuse, elle n'est pas reprise ici : le lecteur se reporter à [15].

Dans ce cas , les équations [II.27]et[II.28] peuvent se mettre sous la forme de LMI. Effectivement, après multiplication droite et a gauche par P^{-1} , et en utilisant le changement de variables : $X = P^{-1}, M_i = F_i P^{-1}$ et $Y_i = P^{-1} Q_i P^{-1}$, les conditions sous forme de LMI suivantes peuvent être obtenues. Trouver $\alpha > 0, X > 0, Y_i \geq 0$ et M_i tels que :

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T + Y_i \leq 0 \quad [\text{II.31}]$$

$$\begin{bmatrix} Y_i + B_i M_j + M_j^T B_i^T & X \\ X & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \quad [\text{II.32}]$$

Puis : $P = X^{-1}, F_i = M_i P$ et $Q_i = P Y_i P$.

Le complément de Schur a été utilisé pour obtenir la forme LMI [II.32].

[14] :dans le cas particulier des modèles flous MIMO dont les vecteurs B_i sont linéairement dépendants : $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$, il est possible de réduire la conservativité des résultats précédents. Pour ce faire, une loi de commande dénommée CDF (compensation et division pour système flous) est utilisée correspondant à :

$$u_{CDF} = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} x(t) \quad [\text{II.33}]$$

Dans ce cas, le modèle en boucle fermée peut s'écrire :

$$(\text{MFC}) \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t) \quad [\text{II.34}]$$

$$(\text{MFD}) x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t) \quad [\text{II.35}]$$

On peut écrire donc s'apercevoir de la propriété remarquable qui conserve un modèle en boucle fermée à r règles c'est-à-dire les modèles croisés ne sont plus présents, Le résultat principale est par le théorème II.9.

THÉORÈME II.9[14]. -soient les modèles flous continus [II.4](respectivement discrets[II.6]) vérifiant $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$, en utilisant la loi de commande [II.33], s'il existe une matrice $P > 0$ et des gains F_i , tels que :

$$(\text{MFC}) \forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists F_i, A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P < 0 \quad [\text{II.36}]$$

$$(\text{MFD}) \forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists F_i, (A_i^T - F_i^T B_i^T) P (A_i - B_i F_i) - P < 0 \quad [\text{II.37}]$$

Alors le modèle en boucle fermé [II.34] du théorème II.9 peuvent être mise sous forme de LMI. Effectivement, après multiplication droite et gauche par P^{-1} , et en utilisant le changement de variables : $X = P^{-1}, M_i = F_i X$, les conditions obtenues sont les suivantes.

Trouver $X > 0$ et M_i tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}: X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0 \quad [\text{II.38}]$$

Il est également possible de considérer ce problème en utilisant des outils de la commande optimale donnant d'autres types de lois de commande. Dans ce cas, l'utilisation des outils issus d'une synthèse de type quadratique permet d'écrire des LMI dépendant de matrices de pondération Q_i et R_i .

Ces différentes remarques permettent de rejoindre en partie les travaux de [13].

Dans leur cas, comme chaque sous-système peut être représenté dans la base commandable, il est clair que $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists F_i, A_i - B_i F_i = A_{BF}$ et l'existence d'une matrice $P > 0$ est évidente ainsi que le fait que la boucle fermée du système flou complet devient linéaire.

A titre d'illustration, considérons l'exemple A (voir paragraphe II.2.1). en utilisant une loi de commande de type PDC sur le modèle flou [II.8] et les conditions de stabilité [II.24], une matrice $P > 0$ commune et des gains F_i peuvent être obtenus si $a \leq 0,653$.

Comme $B_2 = kB_1$ avec $k = 3 - 3a/3 + 2a > 0$, il est possible d'appliquer une loi de commande du type CDF. Dans ce cas, le domaine de stabilité est étendu, $a \leq 0,996$.

Un résultat sans utiliser de contraintes supplémentaires, pour $a=0,6$ est :

-pour une loi de commande de type PDC :

$$P = \begin{bmatrix} 0,9410 & 0,1096 & 1,3219 \\ 0,1096 & 0,4584 & 0,4239 \\ 1,3349 & 0,4239 & 2,4814 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_1 = [0,2024 & 0,1207 & 0,2011] \\ F_2 = [0,0862 & 0,0170 & 0,0307] \end{matrix}$$

-pour une loi de commande CDF :

$$P = \begin{bmatrix} 0,0154 & 0,0005 & 0,0224 \\ 0,0005 & 0,0074 & 0,0053 \\ 0,0224 & 0,0053 & 0,0431 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_1 = [0,2411 & 0,1411 & 0,2379] \\ F_2 = [0,0979 & 0,0201 & 0,0465] \end{matrix}$$

Un exemple, avec comme conditions initiales $x(0) = [0,5 \quad 0,1 \quad 0]^T$, est donné figure II.4, pour la loi $u_1(t)$ et figure II.5 pour la loi $u_2(t)$.

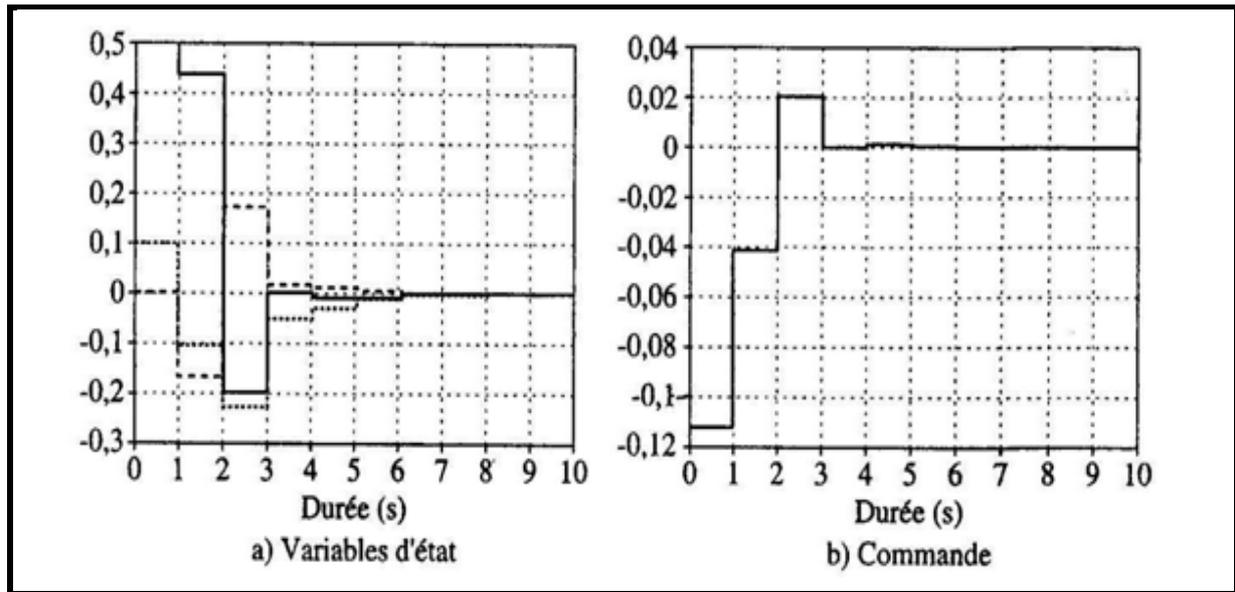


Fig.II.4. résultat PDC :loi de commande $u_1(t)$ (CI : $x(0) = [0,5 \ 0,1 \ 0]^T$)

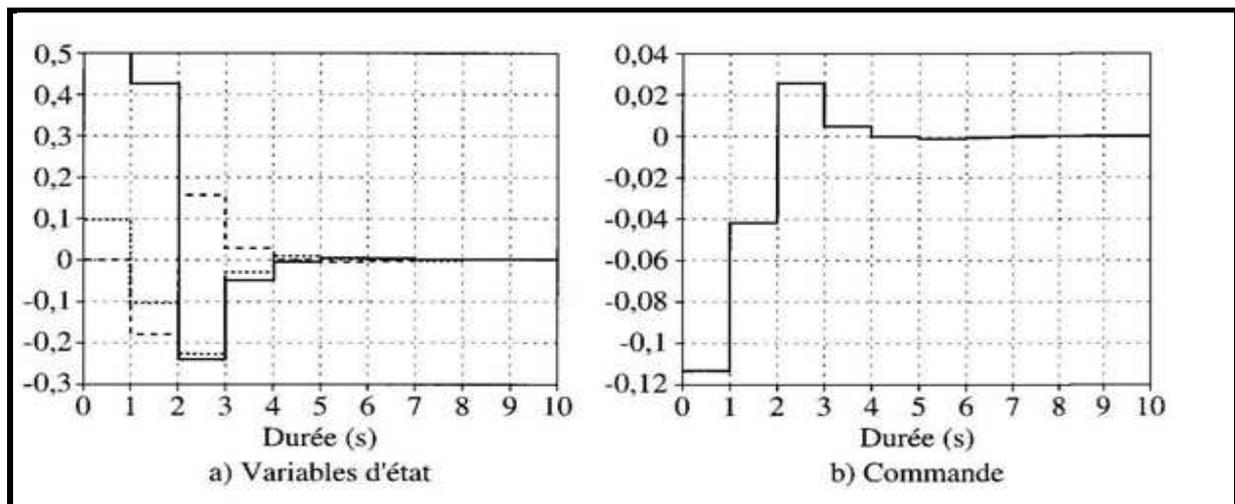


Fig.II.5.Résultats CDF : loi de commande $u_2(t)$ (CI : $x(0) = [0,5 \ 0,1 \ 0]^T$)

Pour illustrer les lois de commande de type SSF, reprenons l'exemple du pendule inversé(voir paragraphe II.2.2)en simulation.

Comme pour cette exemple, on ne rentre pas dans le cas particulier $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$, les lois qui peuvent être testées sont une loi linéaire, une loi de type PDC (théorème II.6) et une loi de type SSF(théorème II.8).

Dans toute la suite de ce paragraphe , la loi de commande est construite avec $\theta_0 = 1rad$. Comme il est très difficile d'effectuer des comparaisons, le nombre de paramètres à régler

pour chaque méthode étant important, l'approche suivante est retenue. Une approche par placement de pôles est choisie pour la loi de commande. La matrice A_1 correspond en fait à la linéarisation du pendule autour de $\theta(t) \approx 0$ avec les simplifications usuelles. Elle admet comme pôles $-9,9 -7,5 0 9,9$: en symétrisant le pole instable, on choisit comme pôles de la boucle fermée $A_1 - B_1 F_1$: $-10 -10 -7,5 -2$, Il vient : $F = [12,4929 -4,5643 -6,0424 1,2610]$.

Pour les deux sous-modèles $A_i - B_i F_i, i \in \{1,2\}$, les poles en boucle fermée sont choisis au même endroit que pour la commande linéaire à savoir $-10 -10 -7,5 -2$. Le résultat obtenu est : $F_1 = F$ et $F_2 = [22,4201 -5,4194 -6,7550 2,4657]$.

De façon immédiate, on montre que les conditions de stabilité du théorème II.8 pour la loi SSF, et celles de [11] pour la loi PDC, sont vérifiées si $\theta_0 = 1 \text{ rad}$. Les lois suivantes sont donc appliquées :

$$-u_{LIN}(t) = -Fx(t);$$

$$-u_{PDC}(t) = -\sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) F_i(x(t));$$

$$-u_{SSF}(x) = g_1(x) + g_2(x) \text{ avec :}$$

$$g_1(x) = \min_{i \in \{1,2\}} \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2B_i^T P x} - F_i x \right) \text{ pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x > 0$$

$$g_2(x) = \max_{i \in \{1,2\}} \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2B_i^T P x} - F_i x \right) \text{ pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x < 0$$

En se plaçant pour tous les essais dans le cas $x(0) = [1 0 0 0]^T$, la robustesse des lois de commande est testée en faisant varier un des paramètres du modèle et en laissant les autres aux valeurs nominales.

A titre d'illustration, pour la loi de commande u_{SSF} , les figures II.6 et II.7 présentent la réponse de la loi SSF, avec comme conditions initiales $x(0) = [1 0 0 0]^T$ et pour un gain $G = 80$.

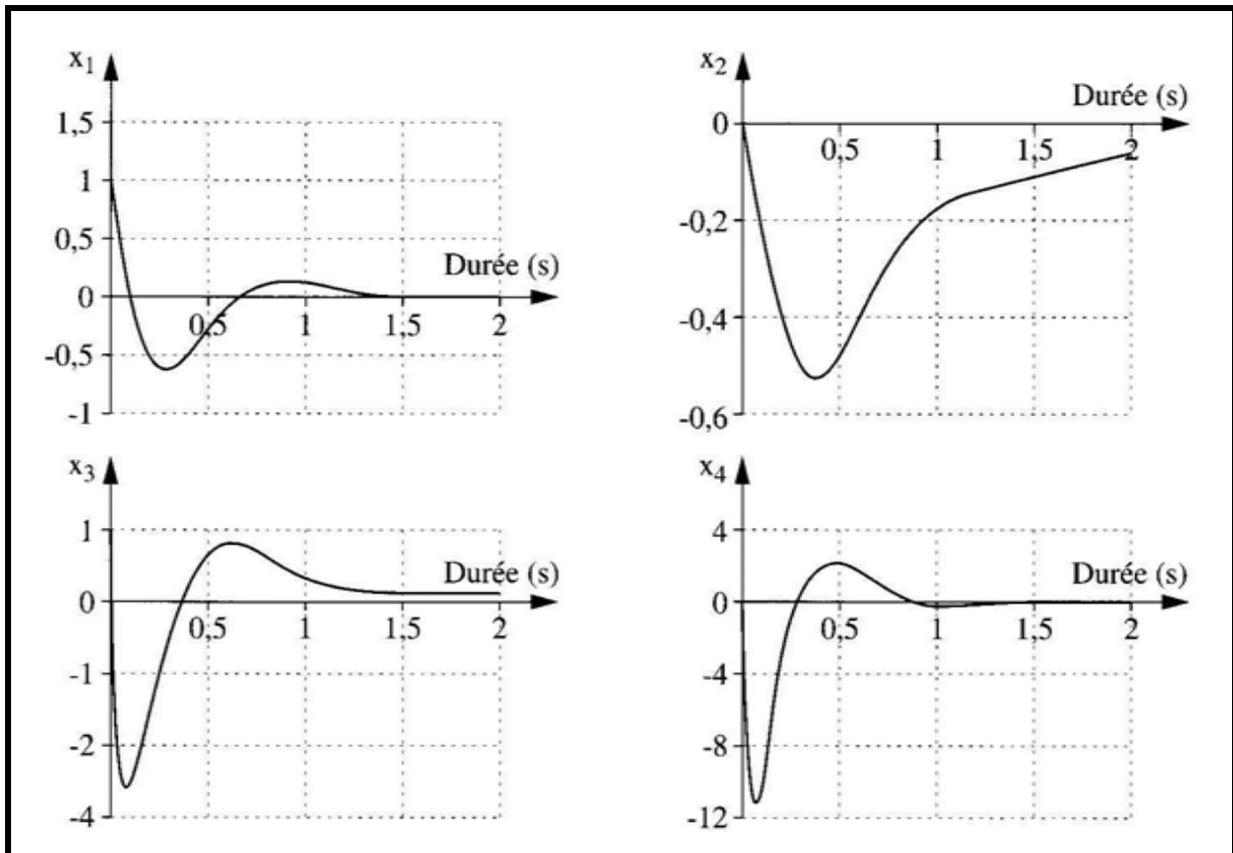


Fig.II.6. Variable d'état du modèle avec un gain $G=80$ et des CI :

$$x(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

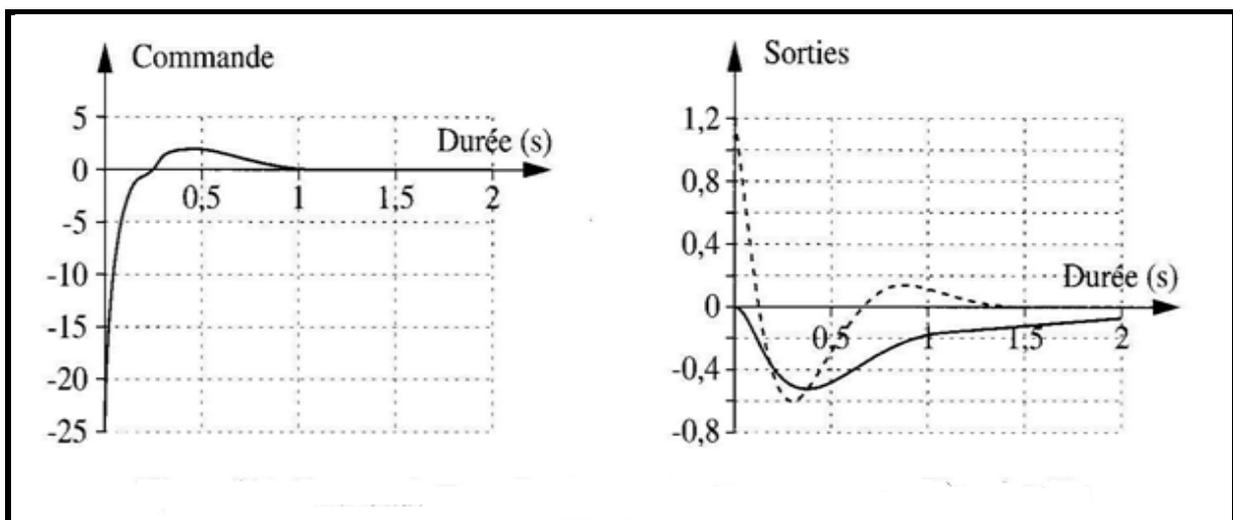


Fig.II.7. Commande et sortie du modèle avec gain $G=80$ et des CI :

$$x(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Les résultats sont regroupés tableau II.1 ;chaque case représente le domaine de stabilité du modèle bouclé.

commande	$ \theta(0) <$	$G \in$	$M \in$	$F \in$	$L \in$	$m \in$
linéaire	1,1	[57 ;16]]0; 24]	[2 ;256]	[0,04 ;0,16]]0; 7]
u_{PDC}	1,29	[42 ;163]]0; 30]	[0 ;450]	[0,04 ;0,16]]0; 18]
u_{SSF}	1,24	[38,186]]0; 35]	[0 ;450]	[0,03 ;0,17]]0; 22]

Tableau II.1. Domaines de stabilité des paramètres en fonction des différentes lois de commande utilisées

La première remarque concerne la loi linéaire qui s'avère, dans tous les cas, moins robuste ; néanmoins, cela ne veut pas dire qu'une loi linéaire ne peut pas avoir les mêmes performances, notamment si l'on place les pôles des deux modèles $A_i - B_i F_i, i \in \{1,2\}$, plutôt que de conserver la loi linéaire issue de modèle $A_1 - B_1 F_1$ seul. En ce qui concerne les deux autres lois de commande, elles semblent globalement équivalentes, même si en termes de robustesse vis-à-vis de la variation des paramètres du modèle, la loi u_{SSF} semble performante.

Après avoir présenté différentes approches permettant d'obtenir un régulateur (flou ou linéaire) par retour d'état, ainsi que les conditions de stabilité associées, la partie suivante traite du modèle complet, comprenant en plus un observateur flou.

II.5. Stabilisation par modèles flous complets : modèle flou – régulateur flou – observateur flou

L'approche étant dans l'espace d'état, si tout l'état n'est pas accessible, il est nécessaire d'avoir recours à un observateur.

II.5.1. Observateur flou

Chaque règle de l'observateur R^i est construite à partir de celle du modèle flou. La théorie classique concernant l'observation est utilisée dans la réalisation de la partie conclusion de l'observateur, puisque les parties résultantes du modèle flou sont décrites par des équations d'état linéaires. Pour les modèles flous continus [II.1] et discret [II.5], l'observateur s'écrit de la manière suivante dans le cas général.

Pour les observateurs flous continus (MFC), la règle R^i de l'observateur est :

Si $\hat{z}_i(t)$ est F_1^i et et $\hat{z}_p(t)$ est F_p^i

$$\text{alors} \begin{cases} \hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad [\text{II.39}]$$

que l'on peut réécrire avec :

$$h_i(\hat{z}(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} \text{ et bien entendu } : \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) = 1, \text{ pour tout } t$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{aligned} \quad [\text{II.40}]$$

Pour les observateurs flous discrets (MFD), avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{aligned} \quad [\text{II.41}]$$

Les matrices K_i représentent les matrices de gains d'observation, $\hat{x}(t)$ le vecteur d'état reconstruit, $y(t)$ et $\hat{y}(t)$ sont respectivement la sortie finale du modèle flou et celle de l'observateur flou.

Néanmoins, dans le cas particulier où toutes les variables des prémisses sont mesurables, il est possible de remplacer $h_i(\hat{z}(t))$ par $h_i(z(t))$ dans les équations [II.40] et [II.41], c'est-à-dire, et c'est un point important pour la suite, que les poids attribués au modèle et à l'observateur sont identiques, puisqu'ils se basent sur des variables mesurées.

La construction de l'observateur flou se fait donc de façon très naturelle à partir d'un modèle flou. Le but est alors de déterminer les matrices de gains d'observation K_i dans les parties conclusions. Pour calculer ces matrices de gain, on retrouve les mêmes possibilités que pour la commande : placement des pôles, synthèse quadratique, utilisation de LMI avec comme inconnues, P et les K_i ($i = 1, 2, \dots, r$).

Deux approches sont alors prises en compte pour établir la stabilité du modèle complet. La première se place dans le cas particulier où toutes les variables utilisées dans les prémisses sont supposées mesurables $z(t)$, la deuxième concerne le cas générale.

II.5.2. Etude du modèle complet dans le cas particulier des variables de prémisses mesurables

Cette partie permet de définir la représentation d'état de la dynamique du modèle complet en boucle fermée. L'expression de la loi de commande peut s'écrire dans ce cas :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t) \text{ avec } h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad [\text{II.42}]$$

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de remplacer la commande [II.42] dans le modèle [II.4] et dans l'observateur flou [II.40] (cas continu MFC) et [II.42] dans [II.6] et [II.41] (cas discret MFD). Ainsi les expressions sont les suivantes en définissant :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} \text{ et } : G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - K_i C_i \end{bmatrix}$$

MFC :

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t)\end{aligned}\quad [\text{II. 43}]$$

MFD :

$$\begin{aligned}x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t)\end{aligned}\quad [\text{II. 44}]$$

En appliquant le théorèmes II.6 et II.7 respectivement à [II.43] et [II.44], il est possible de tirer des conditions de stabilité pour MFC et MFD. Mais cette fois, la matrice P est de dimension $2n \times 2n$. De plus, il devient difficile d'écrire des LMI permettant de déterminer, $P > 0$, F_i et K_i simultanément. Il est alors nécessaire de séparer la procédure en deux. Trouver, dans un premier temps, les matrices F_i et K_i , puis, vérifier qu'une matrice $P > 0$ commune existe. Il s'agit alors de procéder par essais successifs.

Pour éviter cette procédure itérative, [7] a proposé un théorème de séparation pour le calcul de la commande, les gains F_i , et celui de l'observateur, les gains K_i . Pour le modèle complet, équation [II.43], le théorème se formule comme suit.

THÉORÈME II.10(MFC)[7].- *S'il existe deux fonctions scalaires $V(x): R^n \rightarrow R$ et $\tilde{V}(\tilde{x}): R^n \rightarrow R$ et des nombres réels positifs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$, et $\tilde{\gamma}_4$ tels que :*

$$(i) \gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2, \tilde{\gamma}_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{V}(\tilde{x}) \leq \tilde{\gamma}_2 \|\tilde{x}\|^2$$

$$\text{avec } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$(ii) \frac{\partial V(x)}{\partial x} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i F_j) x \leq \gamma_3 \|x\|^2$$

$$\frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \leq \tilde{\gamma}_3 \|\tilde{x}\|^2$$

$$(iii) \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq \gamma_4 \|x\|, \left\| \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right\| \leq \tilde{\gamma}_4 \|\tilde{x}\|$$

alors, le modèle complet [II.43] est globalement, uniformément, asymptotiquement stable.

La preuve de ce théorème est donnée dans [7] ; elle est basée sur le principe de comparaison vectorielle .

Dans ce contexte, si l'on choisit des fonctions scalaire du type : $V(x) = x^T P_c x$ et $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_c \tilde{x}$ avec $P_c > 0$ satisfaisant les conditions de stabilité pour la loi de commande seule [II.23], théorème II.6, et $P_0 > 0$ satisfaisant les conditions de stabilité pour la partie observateur seule, les conditions du théorème II.10(i-ii) sont vérifiées.

De même, un théorème de séparation est également disponible dans le cas discret. Sans entrer dans le détail des modèles flous utilisant d'autres lois de commande présentées précédemment, CDF et SSF, il faut noter que ce théorème de séparation existe aussi dans ces cas [14].

Pour illustrer ce principe de séparation, les deux exemples sont repris dans la suite. Pour l'exemple A, la loi de commande est celle issue du théorème II.9 L'observateur est calculé à l'aide des LMI de [11].

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1,2887 & 0,1584 & -0,0001 \\ 0,1584 & 0,1976 & 0,0025 \\ -0,0001 & 0,0025 & 0,0865 \end{bmatrix} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1,1989 \\ -0,1753 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1,0569 \\ -0,6997 \\ 0,9998 \end{bmatrix}$$

Afin d'illustrer les résultats, les conditions initiales choisies sont, pour le système $x(0) = [0,5 \ 0,1 \ 0]^T$, pour l'observateur, $\hat{x}(0) = [0,5 \ 0 \ 0]^T$; seule $\hat{x}_2(0)$, non mesurée, est choisie nulle. La figure II.8 illustre les résultats obtenus pour les variables d'état $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

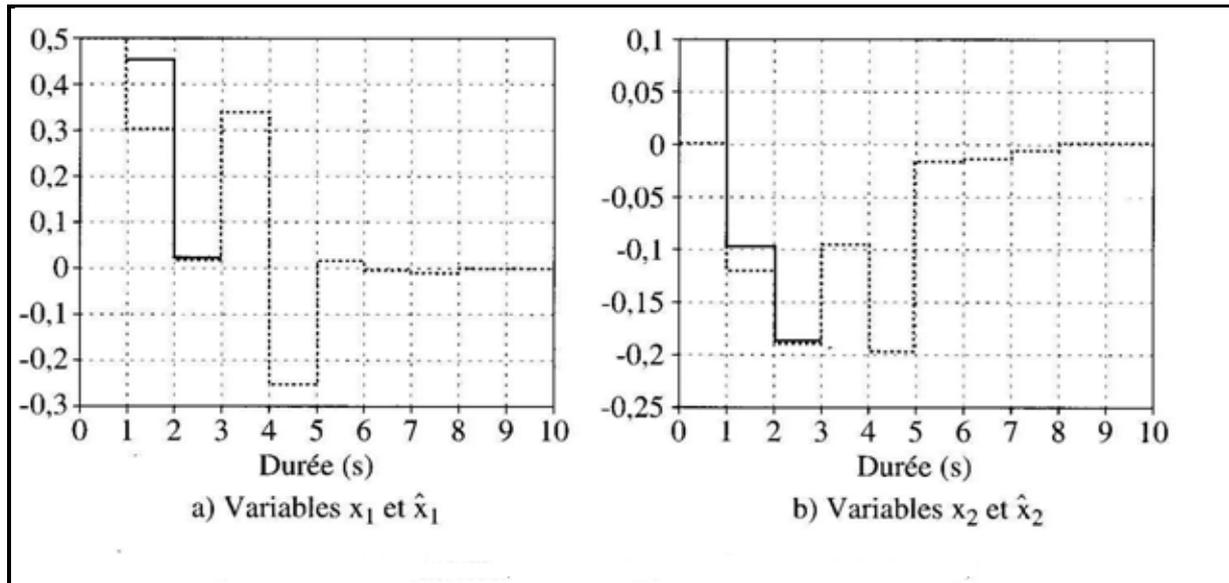


Fig.II.8. Système complet commande+observateur avec $x(0) = [0,5 \ 0,1 \ 0]^T$,
 $\hat{x}(0) = [0,5 \ 0 \ 0]^T$

Pour illustrer l'utilisation d'un observateur flou, l'exemple du pendule inversé en commande temps réel est repris (voir le paragraphe II.2.2). La plupart des travaux qui ont utilisé des régulations floues basées sur un modèle de TSK, pour le pendule inversé, ont travaillé soit, dans le cas SIMO, avec $\theta(t) \in]-\pi/2, \pi/2]$ [7], soit avec $\theta(t) \in]-\pi, \pi]$, mais dans le cas SISO (sans utiliser la position du chariot). Pour travailler dans le domaine complet de l'angle, il est possible d'utiliser une séquence de balancement et ne sont utilisées que dans une plage acceptable de l'angle.

Lorsque cette condition est vérifiée, une loi permettant de stabiliser le pendule autour de sa position instable est alors utilisée. Différentes approches sont proposées :

- commande linéaire par retour d'état et observateur linéaire calculés à l'aide d'une synthèse quadratique ;
- commande flous par retour d'état de type PDC(théorème II.6) et observateur flou associé ;
- commande par retour d'état de type SSF(théorème II.8) et approximation au premier ordre des vitesses du chariot et du pendule.

Pour étudier ces lois de commande, il est nécessaire de travailler sur un modèle discrétisé du pendule. Avec une période d'échantillonnage de 3 ms et pour $\theta_0 = 1,2 \text{ rad}$, ce modèle flou est donné par :

$$\text{R\`egle } i, i \in \{1,2\}: \text{ si } \theta(t) \text{ est } F_1^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_{di}x(t) + B_{di}u(t) \\ y(t) = C_{di}x(t) \end{cases} \quad [\text{II. 45}]$$

avec le vecteur d'état : $x(t) = [\theta(t) \quad X(t) \quad \Delta X(t) \quad \Delta\theta(t)]^T$ et :

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,003 \\ 0 & 1 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0,2947 & 0 & -0,2225 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0099 \\ 0,0994 \end{bmatrix} \quad C_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,003 \\ 0 & 1 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0,2943 & 0 & -0,1550 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,099 \\ 0,0692 \end{bmatrix} \quad C_{d2} = C_{d1}$$

Ce système mécanique comporte, en plus, une non-linéarité du type de bande morte due aux frottements secs qui n'a pas été prise en compte dans le modèle du pendule. Cette bande morte explique les phénomènes d'oscillations autour du point d'équilibre $\theta_0 = 0 \text{ rad}$, que l'on retrouve sur plupart des figures en temps réel.

Le paragraphe suivant présente la première approche utilisée, basée sur une synthèse quadratique.

II.5.2.1. Commande linéaire quadratique

Les matrices de pondération ont été choisies, après quelques essais en simulation, pour assurer une bonne convergence de l'erreur de prédiction du vecteur d'état, notamment sur les vitesses. Effectivement, Lors du passage de la loi correspondant au balancement, une approximation des vitesses au premier ordre est utilisée pour ne pas commencer avec des conditions initiales sur les vitesses au premier ordre est utilisée pour ne pas commencer avec des conditions initiales sur les vitesses de l'observateur nulles. Pour ne pas perturber la loi de commande, il est alors nécessaire que la reconstruction des vitesses se fasse le mieux possible.

En minimisant le critère $J = \sum_t (x(t)^T Q_0 x(t) + u^T(t) R_0 u(t))$, le résultat obtenu sur le modèle linéarisé autour de 0, c'est-à-dire matrices (A_{d1}, B_{d1}, C_{d1}) , avec les matrices de pondération :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{et } R_0 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

est donné par la matrice K_d suivante :

$$K_d = \begin{bmatrix} -0,0196 & 1,0930 \\ 1,0088 & -0,0169 \\ 3,2322 & -5,5763 \\ -6,8834 & 32,0953 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de la loi de commande, les matrices de pondération Q_c et R_c sont choisies de manière à assurer un compromis entre la qualité de la régulation et les sollicitations sur la commande. Les matrices obtenues sont les suivantes, en minimisant le critère :

$$J = \sum_t (y(t)^T Q_d y(t) + r_d u(t)^2):$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, r_d = 0,001 \quad \text{et } F = [198,8803 \quad -26,5146 \quad -34,8360 \quad 6,6977]$$

Pour donner une base de comparaison visuelle au lecteur, la figure II.9 donne un résultat dans le cas nominal pour la loi linéaire u_{lin} , avec comme conditions initiales $x(0)=[0,4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. Toutes les courbes seront présentées sur une durée de 9s. On peut noter sur les courbes les effets de la bande morte résultant en de faibles oscillations de pendule et du chariot autour de 0.

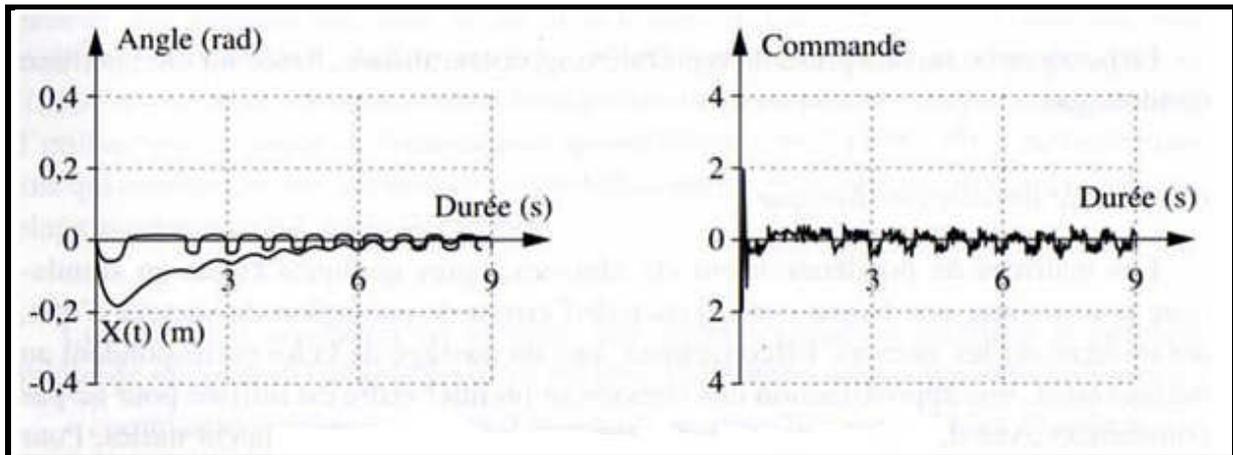


Fig II.9. Loi u_{lin} avec : $x(0)=[0,4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

II.5.2.2. Régulateur flou de type PDC

L'observateur utilisé est calculé par synthèse quadratique ; la matrice $P_0 > 0$ est déterminée à posteriori. Les matrices de pondération obéissent à la même remarque faite sur le calcul de l'observateur de la commande linéaire quadratique. Le résultat est avec :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Règle $i, i \in \{1,2\}$: si $\theta(t)$ est F_1^i alors $\hat{x}(t+1) = (A_{di} - K_{di}C_{di})\hat{x}(t) + B_{di}u(t) + K_{di}y(t)$

$$\text{Et : } K_{d1} = \begin{bmatrix} -0,0196 & 1,0930 \\ 1,0088 & -0,0169 \\ 3,2322 & -5,5763 \\ -6,8834 & 32,0953 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_{d2} = \begin{bmatrix} -0,0172 & 1,0749 \\ 1,0099 & -0,0152 \\ 3,5801 & -4,9947 \\ -6,0272 & 25,8\grave{a}77 \end{bmatrix}$$

Le régulateur flou est calculé à partir des LMI issues du théorème II.7 (équations [II.25] et [II.26])

Un résultat sans contrainte supplémentaire est :

$$F_1 = [198,8803 \quad -26,5146 \quad -34,8360 \quad 6,6977]$$

$$F_2 = [208,9475 \quad -27,3146 \quad -32,0839 \quad 8,4961]$$

Notons que, pour introduire une propriété de robustesse, on peut décider d'adjoindre des LMI supplémentaires qui correspondent à un modèle avec d'autres paramètres(par exemple en modifiant la masse du chariot et/ou la longueur du pendule).

Pour illustrer la séquence de balancement permettant de ramener le pendule de sa position d'équilibre stable. Un résultat avec la loi u_{PDC} , avec comme conditions initiales $x(0) = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$, est présenté figure II.10.

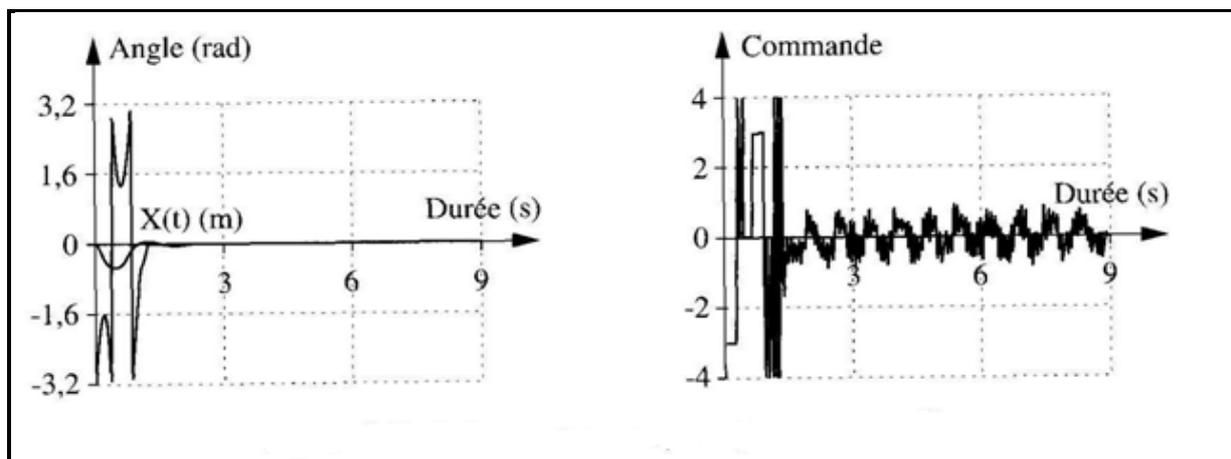


Fig II.10. Loi u_{PDC} avec $x(0) = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Les discontinuités apparaissant dans la courbe de l'angle, figure II.10, sont dues au passage par $\theta(t) = \pi rad$.

II.5.2.3. Régulateur de type SSF

Concernant l'approche utilisant la stabilisation simultanée pour modèles flous, la synthèse de la loi a été réalisée en continu. Il s'agit alors de l'adapter au calcul temps réel. Si, *a priori*, cela ne pose pas de problème pour la loi de commande elle-même, il n'en va pas de même si l'on utilise un observateur flou. Pour éviter de devoir discrétiser un observateur non linéaire continu, les vitesses du chariot et du pendule ont été approximées au premier ordre. De plus, pour éviter une commande trop hachée, un filtre moyenneur est placé sur la sortie de commande.

A partir des LMI issues du théorème. II.8, un résultat sans contrainte supplémentaire est donné par :

$$F_1 = [96,1466 \quad -6,9250 \quad -23,7508 \quad 12,2392]$$

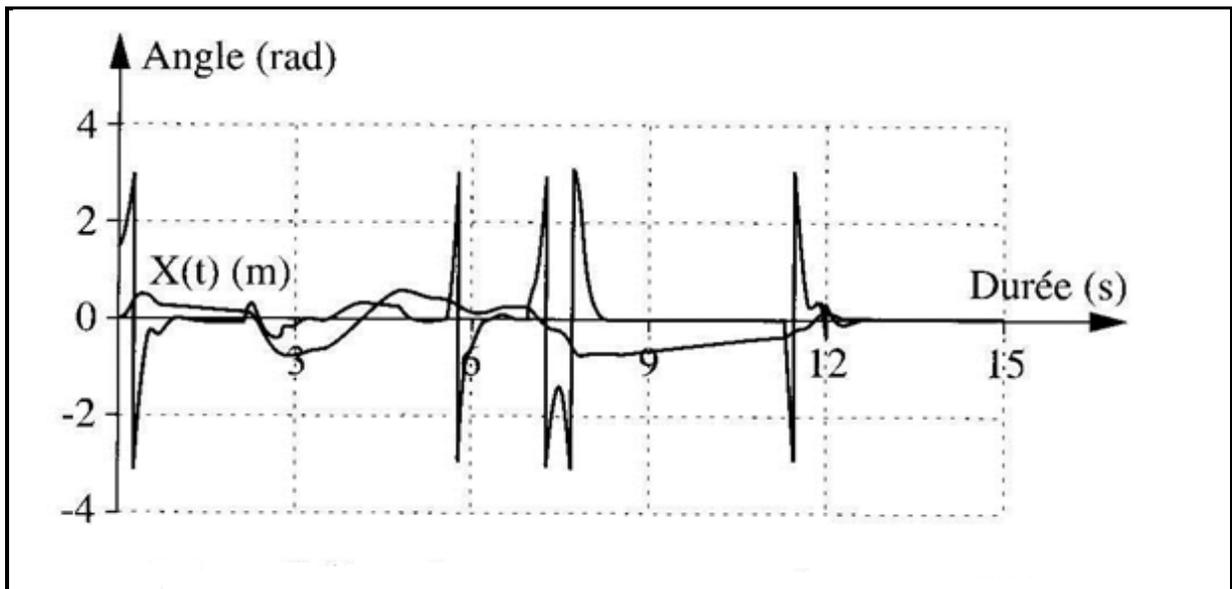
$$F_2 = [89,0633 \quad -6,4152 \quad -23,7508 \quad 11,3100]$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 30280 & -2274 & -7192 & 3553 \\ -2274 & 173 & 541 & -267 \\ -7192 & 541 & 1712 & 844 \\ 3553 & -267 & 844 & 417 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 13413 & -1051 & -3463 & 1579 \\ -1051 & 84 & 273 & 124 \\ -3463 & 273 & 903 & 408 \\ 1579 & 124 & 408 & 417 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 517,07 & -39,94 & -125,96 & 60,795 \\ -39,94 & 7,715 & 11,07 & -4,725 \\ -125,96 & 11,07 & 33,569 & -14,96 \\ 60,795 & -4,725 & -14,96 & 7,677 \end{bmatrix}$$

Pour montrer la robustesse vis-à-vis de perturbations externes, du type coup porté sur le pendule, un résultat avec la loi u_{SSF} est présenté figure II.11.



FigII.11. Loi u_{SSF} avec perturbation externes

La condition initiale correspond à $x(0) = [\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, le bras est frappé légèrement vers 2 s, il est ensuite poussé de façon continue durant 1 s, ce qui explique l'allure « plate » de la réponse de l'angle entre 4 s et 5 s. Ensuite, des coups plus violents sont portés (5,5s, 7s et 11s) amenant le pendule à effectuer une rotation complète avant de se stabiliser à nouveau. Enfin, pour une variation des paramètres du système réel, et également en présence de perturbations provoquées sur le pendule, les résultats rejoignent ceux obtenus en simulation, à savoir que le meilleur comportement obtenu est celui de la loi SSF.

Le paragraphe suivant décrit le second cas, celui où les variables des prémisses dépendent des variables d'état.

II.5.3. Etude du modèle complet dans le cas général

Dans ce cas, une partie des variables $\hat{z}_1(t) \sim \hat{z}_p(t)$ n'est pas mesurable, la structure du régulateur ainsi que ses prémisses dépendent des variables d'état reconstruites ; donc, son expression au lieu de [II.42] est la suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=0}^r h_i(\hat{z}(t)) F_i \hat{x}(t) \text{ toujours avec } h_i(z(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} \quad [\text{II. 46}]$$

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, la loi de commande [II.46] est introduite dans les équations du modèle flou [II.4] et de l'observateur flou [II.40] (MFC), ou dans [II.6] et [II.41] (MFD). Ainsi, les expressions sont les suivantes :

MFC :

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s} h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad [\text{II. 47}]$$

MFD :

$$\begin{aligned}
x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t))G_{ijs}x_a(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j^2(\hat{z}(t))G_{ijj}x_a(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < s} h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) \frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2} x_a(t)
\end{aligned} \tag{II.47}$$

Avec :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_s & B_i F_s \\ S_{ijs}^1 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix}$$

$$S_{ijs}^1 = (A_i - A_j) - (B_i - B_j)F_s + K_j(C_i - C_j)$$

$$S_{ijs}^2 = A_j - K_j C_s + (B_i - B_j)F_s$$

En appliquant les théorème II.6 et II.7 respectivement à [II.47] et [II.48], il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD .

THÉORÈME II.11 .-L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par [II.47] (respectivement discret [II.48]) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ commune tels que :

$$G_{ijj}^T P + P G_{ijj} < 0$$

$$\text{MFC} \quad \left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right) < 0, \quad j < s \tag{II.49}$$

$$G_{ijj}^T P + P G_{ijj} < 0$$

$$\text{MFD} \quad \left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right)^T P \left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right) - P < 0, \quad j < s \quad [\text{II.50}]$$

Pour tout $i, j, s=1, 2, \dots, r$, exceptés les triplets (i, j, s) tels que : $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall t$.

A nouveau, la matrice P est de dimension $2n \times 2n$ et il est alors nécessaire, en dehors de cas très simples, de procéder par essais successifs[11] pour déterminer les matrices $P > 0, F_i$ et K_i .

II.6. Annulation des erreurs stationnaires

Pour résoudre le problème des erreurs stationnaires, un intégrateur est adjoint à la boucle de régulation, figure II.12.

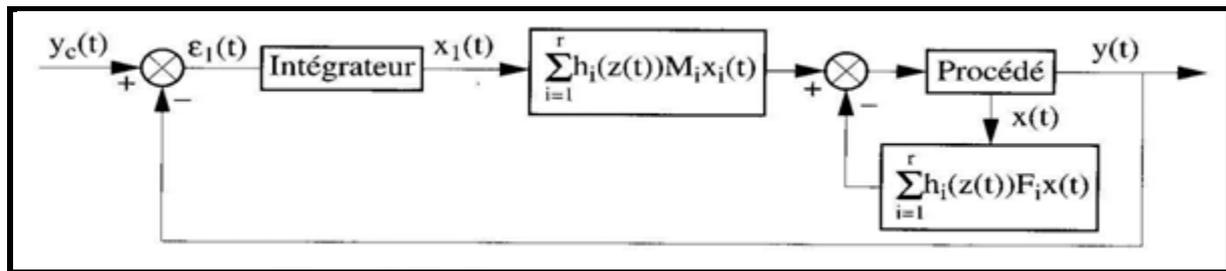


Fig.II.12. Système complet avec partie intégrale

Avec $y_c(t)$ le vecteur des consignes, on peut écrire :

$$\dot{x}_I = y_c(t) - y(t) = y_c(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t)$$

Le système peut être réécrit avec le vecteur d'état $X(t) = [x(t) \quad x_I(t)]^T$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A'_i X(t) + B'_i u(t)) + B y_c(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C'_i X(t) \end{cases} \quad [\text{II.51}]$$

avec : $A'_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}$, $B_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_i = [C_i \quad 0]$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 0 et 1 étant des matrices de taille appropriée.

La loi de commande peut alors être mise sous la forme :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) M_i x_l(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F'_i X(t)$$

avec : $F'_i = [F_i \quad M_i]$.

Tout les résultats de stabilisation vus précédemment sont donc transposables au système [II.51]. Dans le cas discret, l'équation de la partie intégrale devient :

$$x_l(t+1) = x_l(t) + y_c(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t)$$

en remplaçant $\dot{X}(t)$ par $X(t+1)$, et A'_i par $A'_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 1 \end{bmatrix}$.

Enfin, pour conclure ce chapitre, d'autres pistes ont été explorées. Parmi elles, on peut noter l'utilisation de fonctions de Lyapunov non quadratiques.

II.7. Stabilité non quadratique de modèles flous

Des essais dans sens ont été réalisés en utilisant des fonctions de Lyapunov floues non quadratiques du type : $V(x) = x^T \sum_{i=1}^r h_i(z) P_i x$. Pour les MFC, des conditions de stabilité locales ont été obtenus. Pour les modèles discrets MFD, le résultat suivant peut être obtenu et le théorème se formule comme suit.

THÉORÈME II.12. - *L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par [II.7] est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ telles que :*

$$\forall i, j \quad A_j^T P_i A_j - P_j < 0 \quad [\text{II.52}]$$

Pour établir la preuve de ce théorème, après une réécriture de $\Delta V(x)$, le lemme suivant est nécessaire.

LEMME II.1[24].-Si $A_j^T P_i A_j - P_j < 0$ et $A_k^T P_i A_k - P_k < 0$ alors :

$$A_j^T P_i A_k + A_k^T P_i A_j - P_j - P_k < 0.$$

Ce résultat de stabilité permet d'améliorer les conditions de stabilité quadratiques obtenues précédemment.

En stabilisation, les premiers résultats ont été obtenus avec les cas particuliers intéressants de modèles flous MIMO de type TS, à savoir, des modèles dont les vecteurs B_i, B_j sont linéairement dépendants : $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$: $\forall i, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ qui permettant d'éliminer les sous-modèles croisés et en utilisant une loi de commande CDF[II.33]. On peut alors déduire le théorème II.13.

THÉORÈME II.13.-soit le modèle MFD et la loi de commande [II.33], le système en boucle fermée est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_i > 0$, et des gains $F_i, i = 1, 2, \dots, r$ tels que :

$$\forall i, j (A_j - B_j F_j)^T P_i (A_j - B_j F_j) - P_j < 0 \quad [\text{II.53}]$$

Ces conditions peuvent être mises sous la forme de LMI en utilisant le complément de Schur [ELG 97], avec $M_i = F_i P_i^{-1}$ et $X_i = P_i^{-1}$; [II.53] devient :

$$\forall i, j \begin{bmatrix} X_i & X_i A_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X_i - B_i M_i & X_j \end{bmatrix} < 0 \quad [\text{II.54}]$$

Pour illustrer ce résultat l'exemple A est repris. En utilisant une loi de commande CDF et des conditions de boucle fermée est démontrée si $a \leq 1,035$. Notons, par exemple pour $a = 1$, que les LMI [II.54] donnent :

$$P_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,2342 & 0,1935 & 0,5039 \\ 0,1935 & 0,6577 & 0,6143 \\ 0,5039 & 0,6143 & 1,8079 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1,1549 & -0,8455 & 1,3472 \\ -0,8455 & 0,7934 & -1,0064 \\ 1,3472 & -1,0064 & 1,7661 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres de $P_1 - P_2$ sont : $10^{-3} \times [0,0860 \quad 1,5815 \quad -2,6822]^T$.

Afin d'illustrer les résultats, les conditions initiales choisies sont, pour le système $x(0) = [0,5 \quad 0,1 \quad 0]^T$ et, pour l'observateur, $\hat{x}(0) = [0,5 \quad 0 \quad 0]^T$. La figure II.13 illustre les résultats obtenus.

Des résultats plus complets sont disponibles pour cette approche dans [GUE 01b, MOR 01]

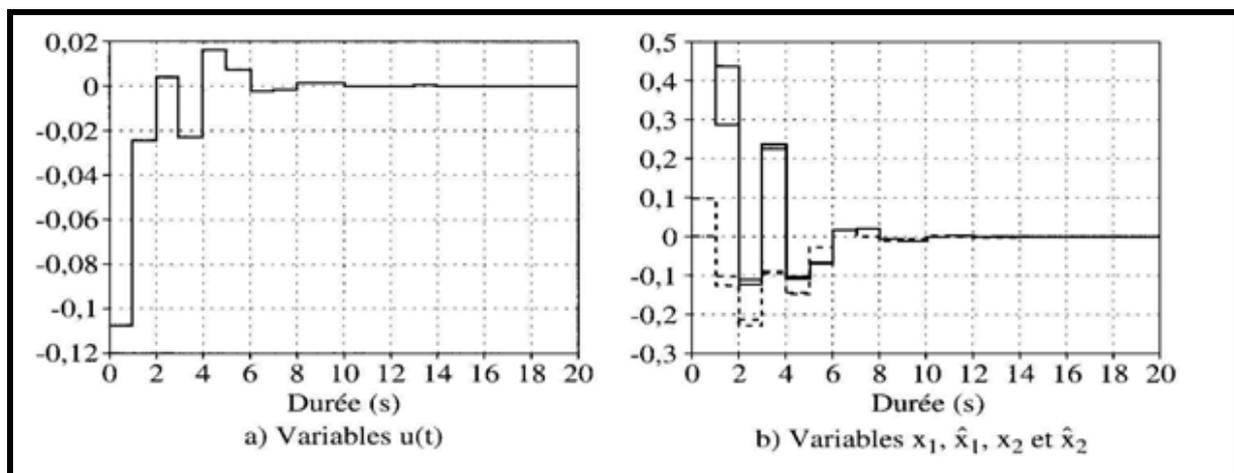


Fig.II.13. système complet commande +observateur avec : $x(0) = [0,5 \quad 0,1 \quad 0]^T$,
 $\hat{x}(0) = [0,5 \quad 0 \quad 0]^T$

II.8. conclusion

Ce chapitre a simplement donné un certain nombre de possibilités des modèles de type Takagi Sugeno à être utilisés dans un contexte de commande de systèmes non linéaires. L'obtention du modèle de type TS peut se faire de façon directe à partir d'un modèle non linéaire en « reportant » les non-linéarités dans la partie prémisses. Plusieurs lois de commande ont été proposées. Ainsi que les conditions de stabilité associées. L'un des aspects séduisants est d'avoir affaire à des problèmes pouvant se mettre sous une forme de LMI. Notons que le chapitre s'est contenté des aspects stabilité, mais que des LMI supplémentaires peuvent être rajoutées permettant de prendre en compte des notions de performances .

Les modèles flous peuvent également être utilisés pour construire de façon très naturelle des observateurs. Si ces derniers ont la propriété de n'utiliser que des variables de prémisses mesurables. Alors un principe de séparation est disponible [7] pour l'ensemble des lois de commande proposées.

Les différents points abordés ont été, pour la plupart, illustrés sur deux exemples, un exemple « académique » et le système réel du pendule inversé. Les résultats obtenus permettent de montrer l'intérêt de ce type d'approche.

Le but de ce chapitre n'était pas d'être exhaustif, mais de bien faire comprendre les différentes possibilités qu'offrent les modèles flous de type Takagi-Sugeno pour la commande des systèmes non linéaires.

Chapitre III

Application de la commande par logique floue au pendule inversé

III.1.introduction

Après avoir vu le fondement théorique de la commande par logique floue, nous nous intéressons ici à son application au pendule inversé. La commande de ce système doit permettre la régulation de l'angle du bras avec la verticale en partant d'une position initiale quelconque, ainsi que la régulation et la poursuite de la position x du chariot.

III.2. base de données

Le régulateur floue utilisé est de type Sugeno dont les entrées sont : l'angle et la vitesse angulaire du pendule, ainsi le déplacement x , et la vitesse du chariot. Pour le choix de la forme des fonctions d'appartenance, nous avons opté pour la forme triangulaire.

III.2.1.Les fonctions d'appartenances de la position

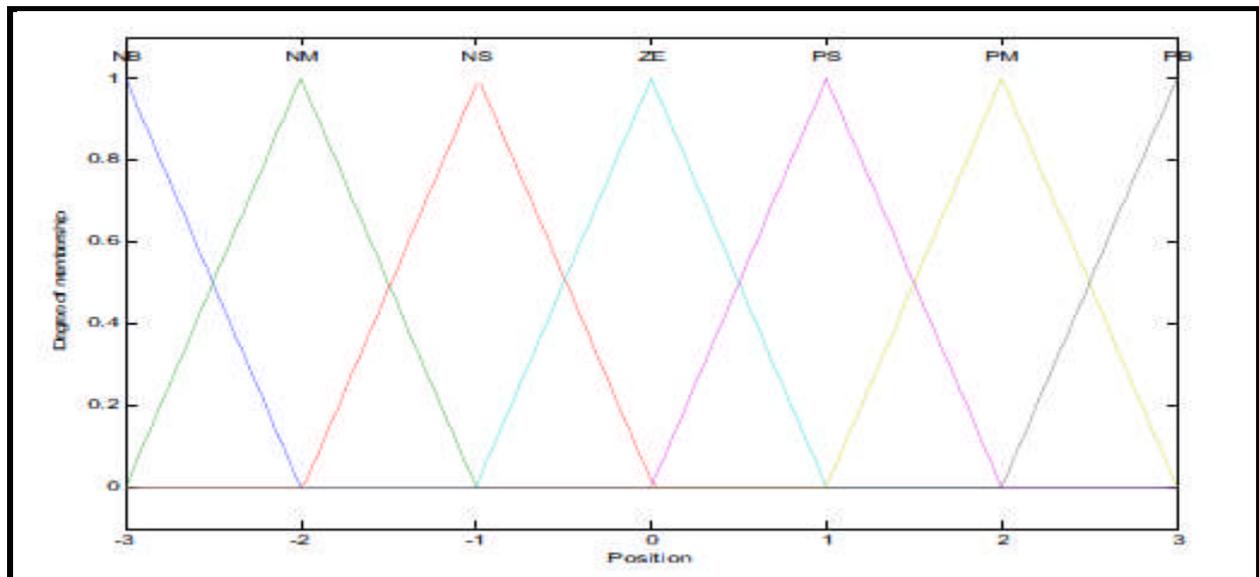


Fig III.1.fonctions d'appartenances de la position

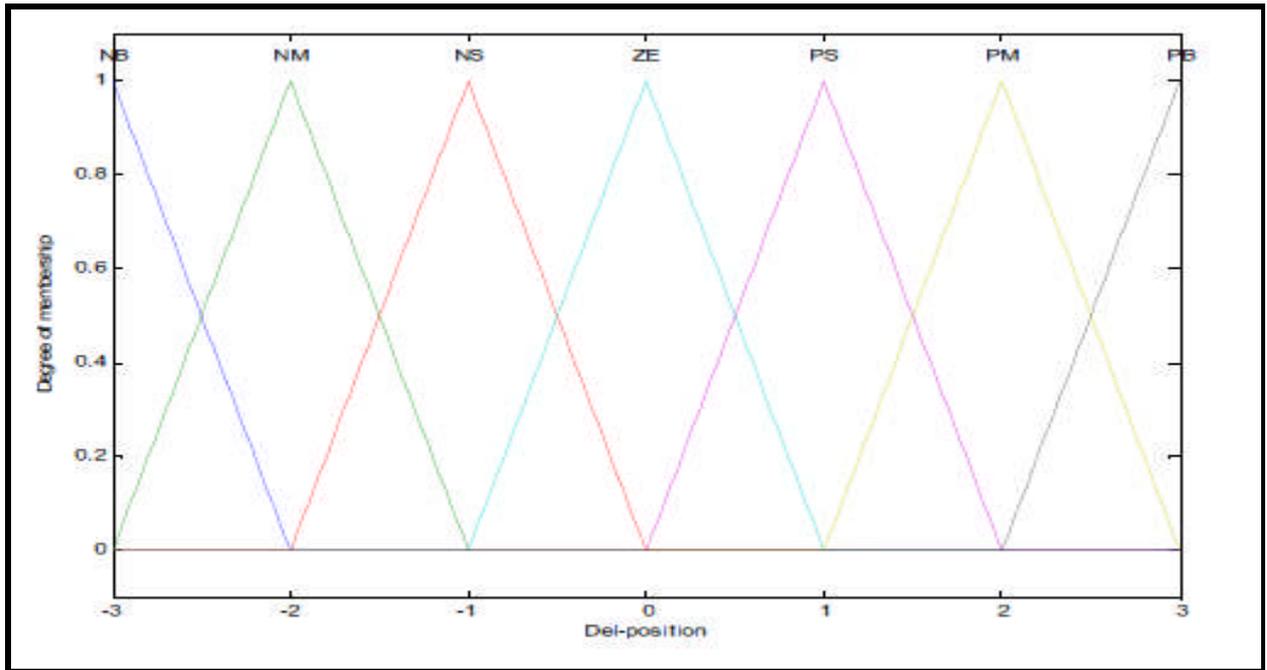


Fig III.2.fonctions d'appartenances de Del-position

III.2.2.Les fonctions d'appartenances de l'angle

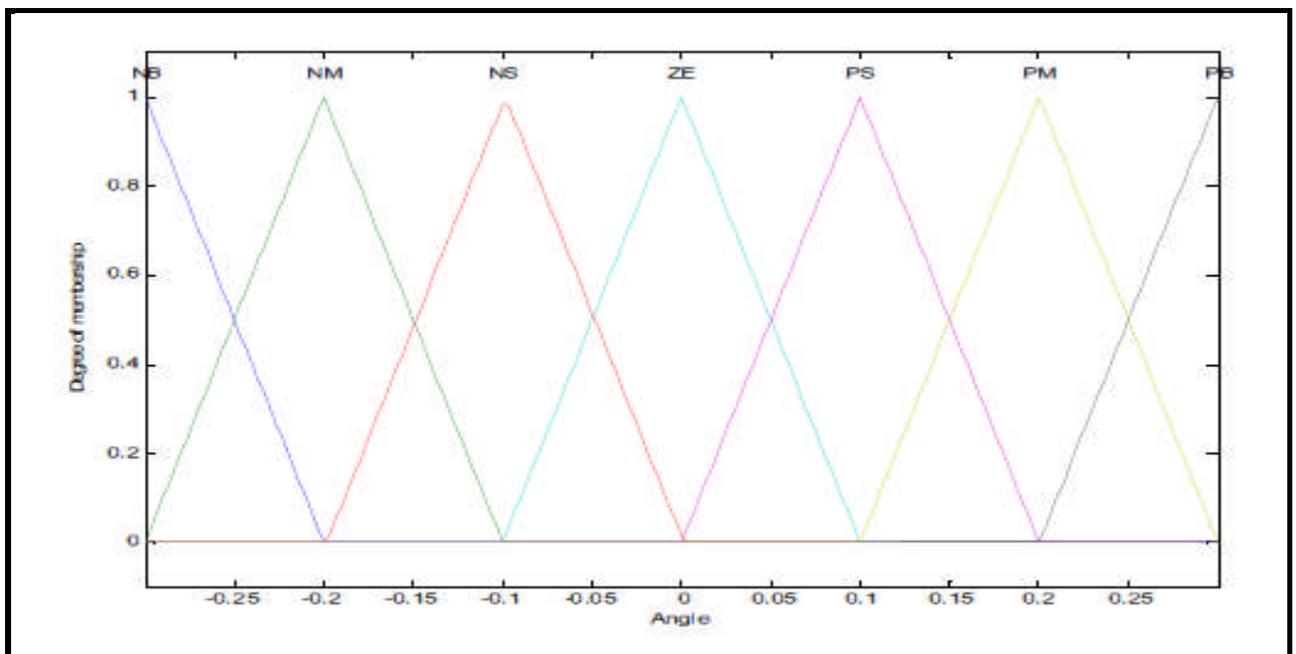


Fig III.3.fonctions d'appartenances de l'angle

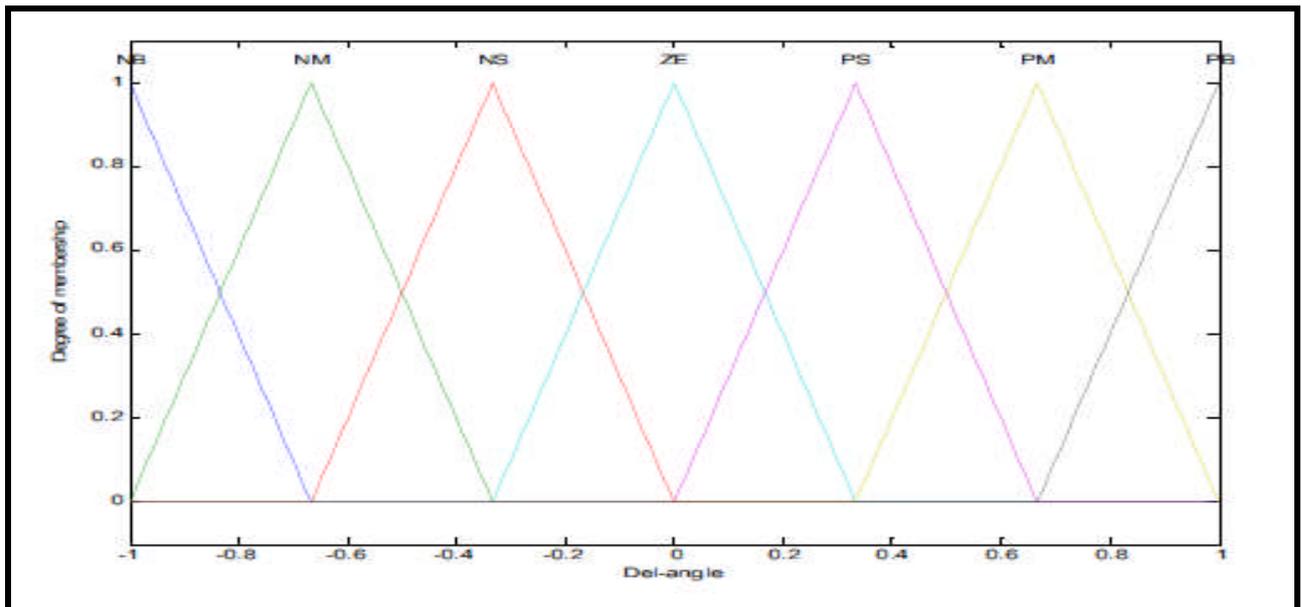


Fig III.4. fonctions d'appartenances de Del-l'angle

III.3. Base des règles

En général, plusieurs valeurs linguistiques, convenablement définies par des fonctions d'appartenance, sont liées entre elles par des règles. Afin de tirer des conclusions, on parle alors d'inférences. Une base de règles caractérisant les buts et la politique de contrôle des experts du domaine au moyen d'un ensemble de règles(if.....then). Pour notre application nous avons utilisé la base de règles donnée suivante :

III.3. A.la position

on a choisi 35 règles pour le contrôleur de la position

R1:if x is NB and Δx is NB then $y_1=0,5x+\Delta x-10$

R2:if x is NB and Δx is ZE then $y_1=0,5x+\Delta x-10$

·
·

R35:if x is PB and Δx is PM then $y_6=0,7x+0,81\Delta x+6,66$

III.3.B.L'angle

R1:if θ is NB and $\Delta\theta$ is NB then y is $y_1=0,23\theta+0,98\Delta\theta-10$

R2:if θ is NB and $\Delta\theta$ is ZE then y is $y_1=0,5\theta+\Delta\theta-10$

·
·

R35:if θ is PM and $\Delta\theta$ is PB then y is $y_6=0,7\theta+0,81\Delta\theta+6,66$

III.3.1. Désignation

NB :Négative Big

NM :Négative Medium

NS :Négative small

ZE :Zero

PS :Positive Small

PM :Positive medium

PB :Positive Big

III.4. les sorties des contrôleurs

Les sorties des contrôleurs utilisé dans cette commande sont des fonctions linéaires de type $y=ax_1+bx_2+c$:

Pour le contrôleur de la position les sorties sont :

$$\mathbf{Y1} = 0.5x_1 + x_2 - 10, \mathbf{Y2} = 0.3x_1 + 0.95x_2 - 7, \mathbf{Y3} = 0.4x_1 + 0.78x_2 - 3.33, \mathbf{Y4} = 0,$$

$$\mathbf{Y5} = 0.36x_1 + 0.7x_2 + 3.33, \mathbf{Y6} = 0.7x_1 + 0.81x_2 + 6.66, \mathbf{Y7} = 0.67x_1 + 0.5x_2 + 10.$$

Pour le contrôleur de l'angle les sorties sont :

$$\mathbf{Y1} = 0.23x_1 + 0.98x_2 - 10, \mathbf{Y2} = 0.3x_1 + 0.65x_2 - 7, \mathbf{Y3} = 0.35x_1 + 0.3x_2 - 3.33, \mathbf{Y4} = 0,$$

$$\mathbf{Y5} = 0.3x_1 + 0.8x_2 + 3.33, \mathbf{Y6} = 0.4x_1 + 1.2x_2 + 6.66, \mathbf{Y7} = 0.7x_1 + 1.4x_2 + 10.$$

III.5.simulation

Les simulations ont été faite à l'aide de logiciel MATLAB 7.8.le bloc simulink de la commande du pendule est présentée dans La figure III.5.

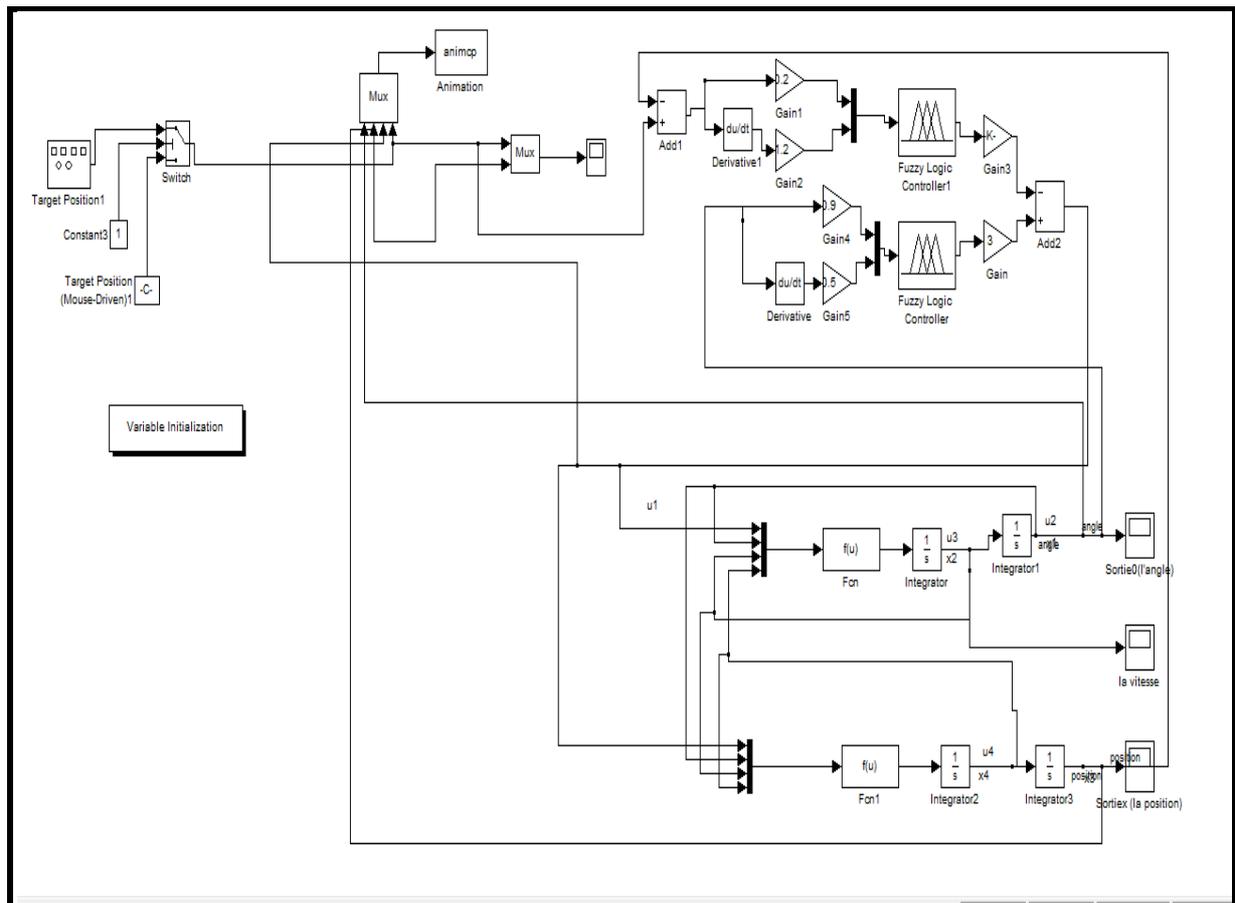


Fig.III.5.Bloc simulink de la commande d'un pendule inversé avec deux contrôleurs

Après avoir exécuter la simulation on obtiens les figures suivante :

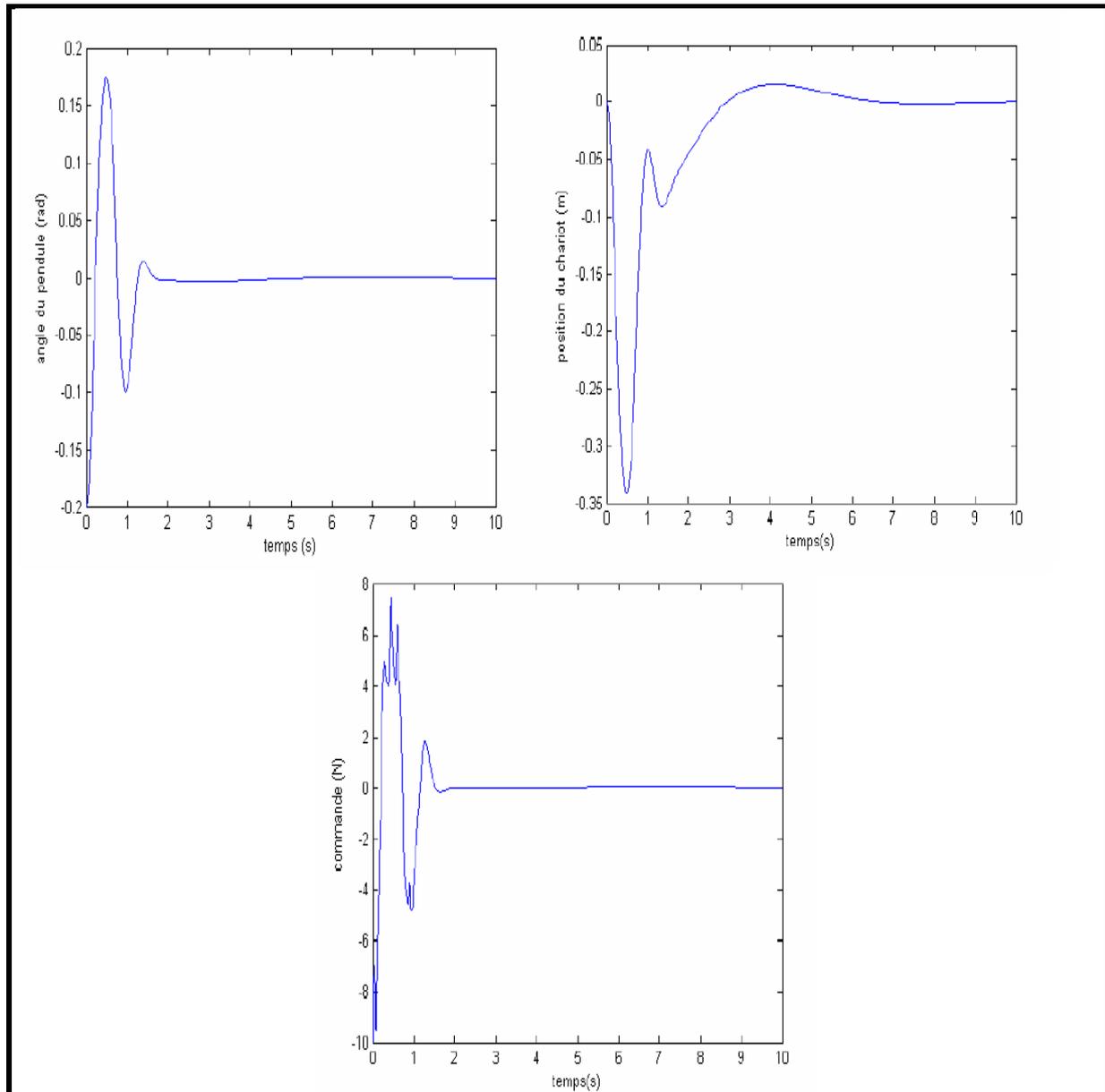


Fig.III.6.Résultats de simulation pour la condition initiale(-0.2,0,0 ,0)

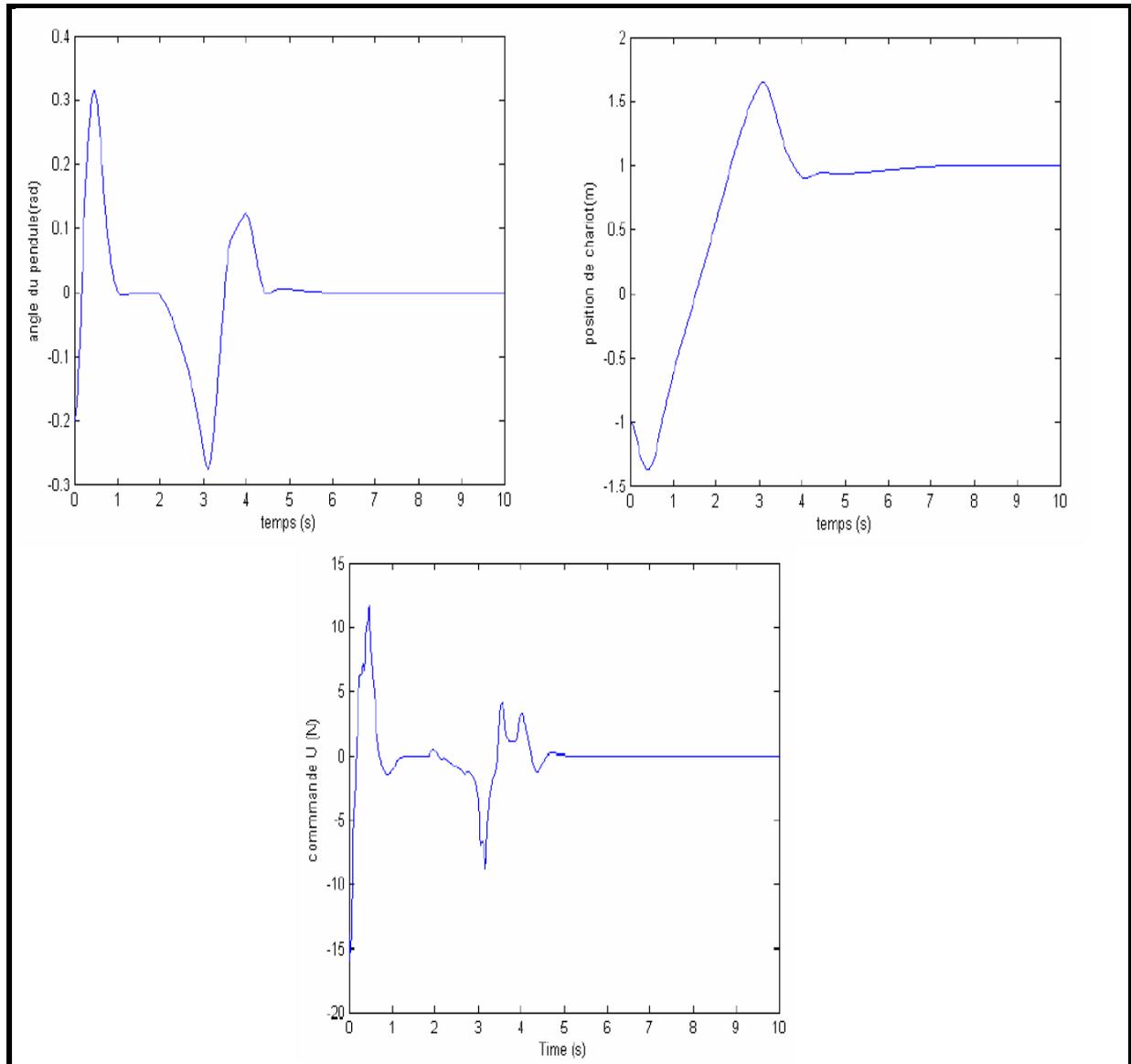


Fig.III.7.Résultats de simulation pour la condition initiale(-0.2,0,-1 ,0)
pour une référence échelon

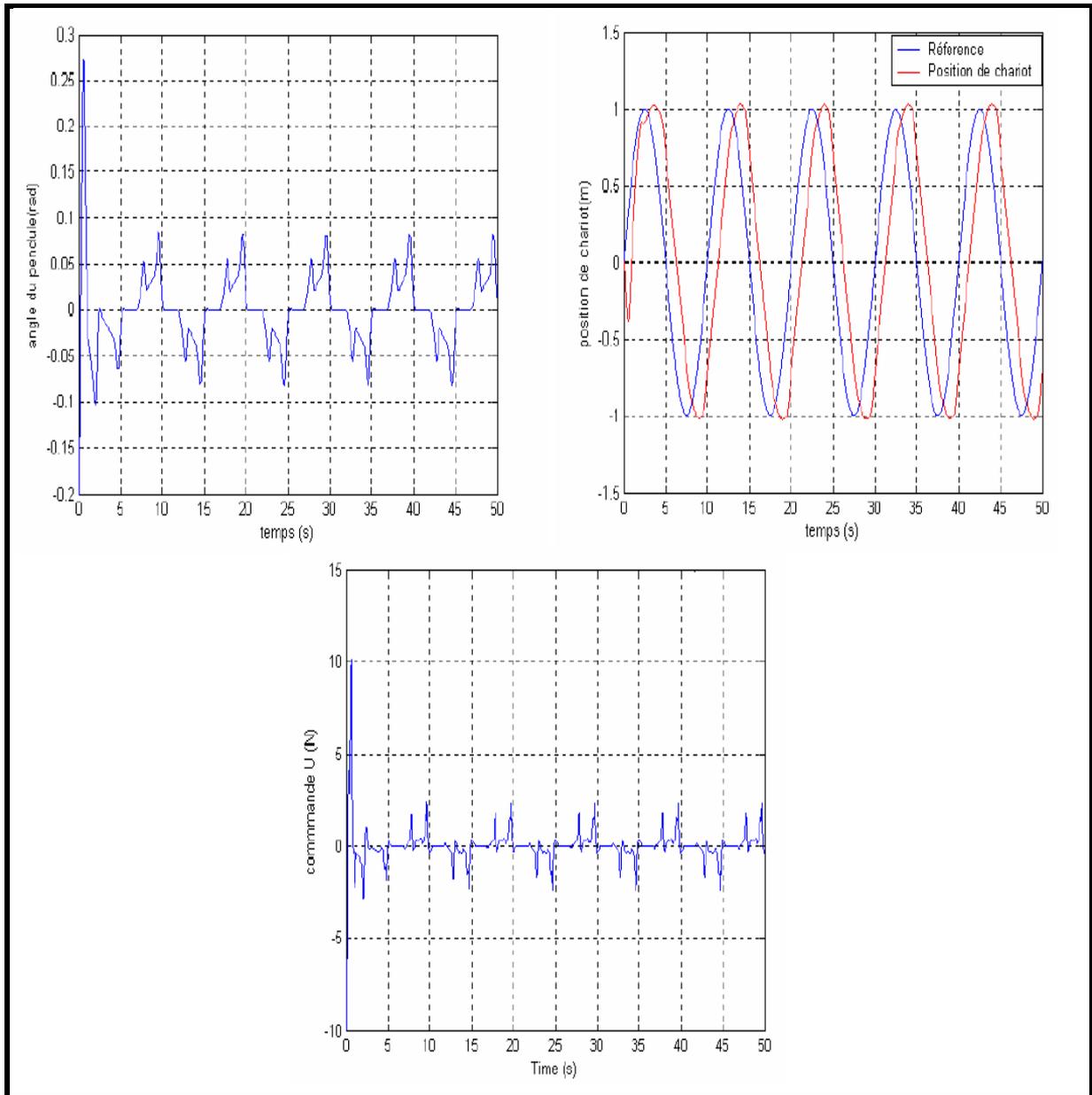


Fig.III.8.Poursuite d'une référence sinusoïdale

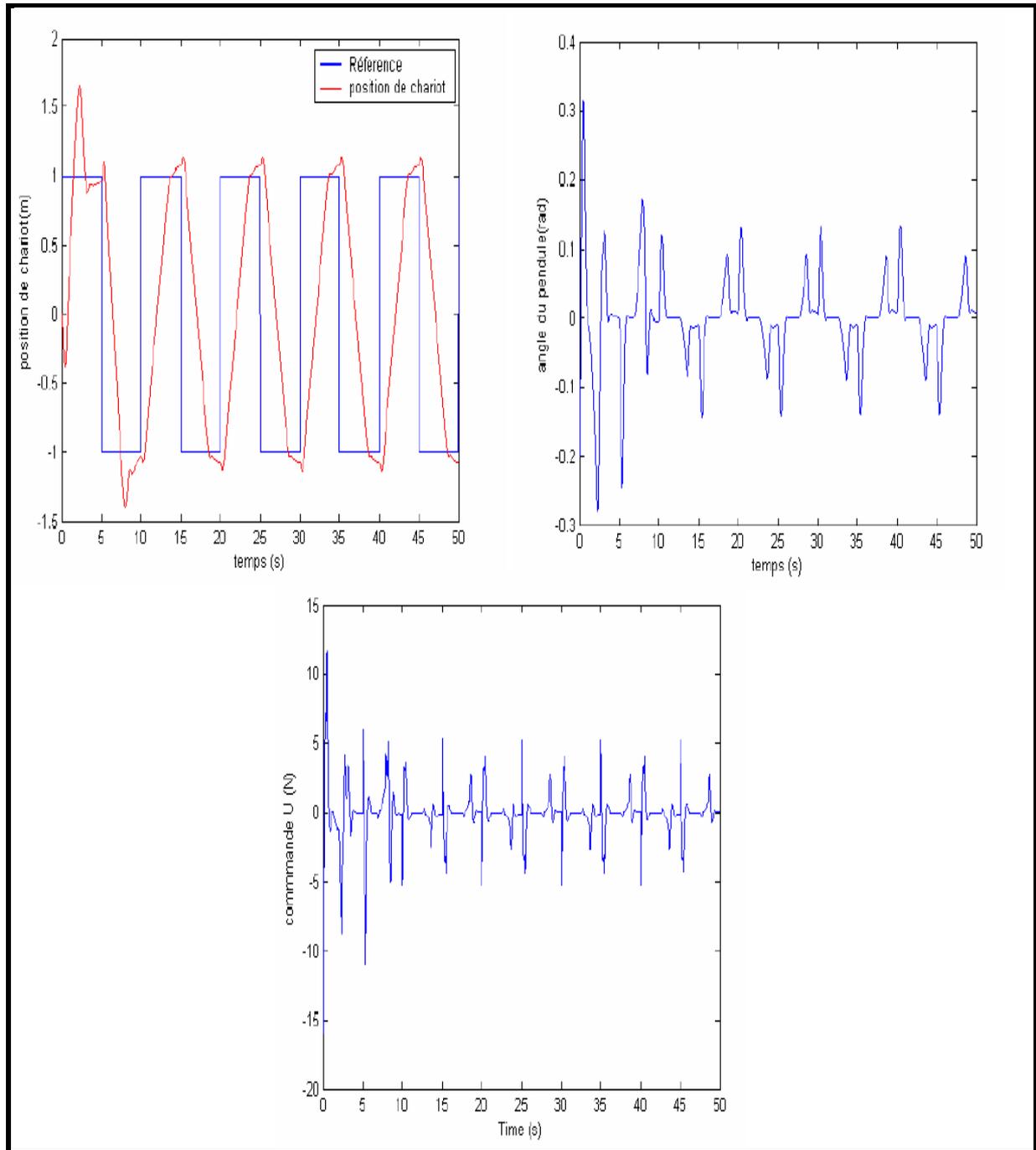


Fig.III.9.Poursuite d'une référence rectangulaire

III.5.1. Interprétation des résultats obtenus dans la simulation

Les résultats montrent l'efficacité de la commande par logique floue. On remarque que le régulateur réalise la poursuite avec une grande précision et que la position angulaire converge rapidement (temps de réponse de 2s), tandis que le déplacement du chariot prend plus de temps pour arriver à suivre la trajectoire. Cela s'explique par le fait qu'au niveau du régulateur flou, la priorité a été donnée pour la stabilisation de l'angle ensuite pour le suivi de la trajectoire (Fig.III.6) (fig.III.7) (fig.III.8) (fig.II.9). Donc on peut dire que dans notre cas cette commande présente une bonne robustesse vis à vis des variations conditions initiales.

III.6. Conclusion

L'objectif du contrôle pour stabiliser le pendule inversé a été atteint en employant deux blocs de contrôleur flou, ceci peut être vérifié par les réponses du système. La commande par la logique floue a pu stabiliser la tige de pendule et maintenir le chariot dans une position désirée avec un bon résultat, notamment en terme de rapidité et de poursuite de la trajectoire. La logique floue nous a fourni une méthode simple sans passer par l'approche mathématique.

Conclusion générale

Le but du travail présenté dans ce mémoire était la mise en œuvre d'une loi de commande pour les modèles floue de type Takagi Sugeno.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le principe de la commande par logique floue et les principales démarches pour la conception d'un régulateur flou. La logique floue est un mode puissant et performant de traitement de l'imprécision. Ce mode permet, à travers un formalisme simple, de modéliser de manière déterministe la façon de faire d'un concepteur. L'avantage essentiel de la commande par logique floue réside dans la non nécessité d'une modélisation précise et approfondie. Donc, elle est bien adaptée à la commande des systèmes pour lesquels les modèles disponibles sont souvent complexes ou approximatifs. Ceci permet de donner un avantage par rapport à la régulation classique.

Le deuxième chapitre présente alors les résultats les plus couramment utilisés en stabilité et stabilisation pour le modèle floue de type Takagi Sugeno, aussi bien pour un cas continu que pour un cas discret. Une application à un pendule inversé est proposée. Une modélisation non linéaire a été effectuée, puis transformée et réduite à un modèle à quatre règles, ce dernier est obtenu en reportant les non linéarité dans la partie prémisse. La stabilité est étudiée par deux méthodes, fonction de Lyapunov quadratique et non quadratique. Les trois lois de commande utilisées sont la loi linéaire et PDC (Parallel Distributed Compensation), SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles flous), on remarque que la loi linéaire est moins robuste vis-à-vis la variation des paramètres du modèle en perspective, on peut aussi utiliser des modèles flous pour construire des observateurs flous en utilisant que des variables de prémisse mesurable.

Dans le troisième chapitre on a appliqué la commande floue sur un pendule inversé pour la régulation de l'angle du bras avec la verticale ainsi que la régulation de la position du chariot, on a déduit que cette commande est très efficace en terme de rapidité et de poursuite de la trajectoire.

Références bibliographiques

- [1] Hadj sadok M. , «Méthodologie de contrôle basé sur la logique floue », mémoire de magistère , université de blida 1995.
- [2] Alouani F., « Commande par logique floue appliquée aux pendule inversés et au simulateur de vol d'Hélicoptère » », mémoire de magistère, université de Mohamed Boudiaf de M'sila, 2006.
- [3] Hugues Bersini, Alxandre evsukoff, Laurent Foulloy « Commande floue 1 de la stabilisation à la supervision »,P.59-93,2003.
- [4] Mansouri B., « contribution a la synthèse de lois de commande en poursuite de type takagi-sugeno incertains ». Thèse de doctorat, université de Reims champagne Ardenne, 2005.
- [5] T. Takagi et M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, vol. 15, n°1, p. 116-132, 1985.
- [6] G. Feng, S.G. Cao, N.W. Rees, et C.K. Chak. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 2, p. 1-10, 1997.
- [7] X.J. Ma, Z.Q. Sun, et Y.Y. He. « Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer ». *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, p. 41-50, 1998.
- [8] K. Tanaka et M. Sano. « A robust stabilization problem of fuzzy control systems ans its application to backing up control of a truck-trailer ». *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 2, p. 119-134, » 1994.
- [9] J. Zhao, R. Gorez, et V. Wertz. « Fuzzy controllers with guaranteed robustness and performance». Dans *EUFIT'96*, pages 1886-1890, Aachen, 1996.
- [10] J. Zhao. « système modeling, identification and control using fuzzy logic ». these doctorat, université catholique de louvain, Belgique, 1995.
- [11] K. Tanaka, Ikeda T, Wang H.O., «fuzzy regulators and fuzzy observes : relaxed stability conditions and LMI-based designs », *IEEE-transactions on fuzzy systems*, vol. 6, n°2, p 1-16, 1998.
- [12] L. Vermeiren. « *Proposition de lois de commandes pour la stabilisation de modèles flous* ». Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes, 1998.
- [13] F.H.F. Leung, L.K. Wong, et P.K.S. Tam. «Fuzzy model based controller for an inverted pendulum ». *Electronics Letters*, 32(18) :1683-1685, 1996.
-

-
- [14] T.M. Guerra et L. Vermeiren. « Control laws for continuous fuzzy systems». *Fuzzy sets and systems* .vol. 120, p. 95-108, 2001.
- [15] T.M. Guerra et L. Vermeiren., Delmotte F., Borne P., « Loi de commande pour système flou continu ». *Journal européen des systèmes automatisés*, vol. 33, n°4, p. 489-527, 1999.
- [16] Kiriakidis K. Grivas A., TzesA., « Quadratic stability analysis of the Takagi-sugeno fuzzy model », *Fuzzy sets and systems* , vol. 71, p1 1-14, 1998.
- [17] Thathachar M.A.L., Viswanath P., « on the stability of the fuzzy systems », *IEEE-transactions on fuzzy systems*, vol. 5, n°2, p 145-151, 1997.
- [18] L. El Ghaoui. « LMI approach for control : an introduction. Dans *Control summer school Grenoble, robust identification and control : LMI approach, septembre 1997*.
- [19] W.C. Kim, S.C. Ahn, et W.H. Kwon. « Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 71 p. 131-142, 1995.
- [20] J.P. Marin, « conditions nécessaires et suffisantes de stabilité quadratique d'une classe de système flous ». *Rencontres LFA '95*,p.240-247, paris, novembre 1995.
- [21] M. Sugeno et G.T. Kang. « Structure identification of fuzzy model ». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, p. 15-33, 1988.
- [22] A. Ollero, J. Aracil, et A. Garcia-Cerezo. « Robust design of rule-based fuzzy controllers » . *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 70 p. 249-273, 1995.
- [23] M. Braae et D.A. Rutherford. « Selection of parameters for a fuzzy logic controller». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 2, p. 185-199, 1979.
- [24] Morere Y., « Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type takagi-sugeno ». thèse de doctorat, université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrèsis, 2001
- [25] Gasso K., « Identification des système dynamique non-linéaires : approche multi-modèles ». Thèse de doctorat, université de Nancy, décembre 2000.
-

Annexe A

Table des Notations d'un modèle Takagi Sugeno

R^i	($i=1, 2, \dots, r$) la $i^{\text{ème}}$ règle, r représente le nombre de règle
F_j^i	($j=1, 2, \dots, r$) les sous ensembles flous des prémisses
$x(t) \in R^n$	le vecteur d'état
$u(t) \in R^m$	le vecteur des entrées
$y(t) \in R^q$	le vecteur des sorties
$A_i \in R^{n \times n}$	matrice d'état
$B_i \in R^{n \times m}$	matrice des entrées
$C_i \in R^{q \times n}$	matrice des sorties
$z(t) \in R^p$	les variables des prémisses (variables d'état et/ou d'entrée)

Annexe B

Le programme MatLab qui fait le calcul de delta :

```
%calcul de delta1
M=1;
m=0.1;
b=0.1;
L=1;
I=0.006;
g=9.8;
u=zeros(4,1);
delta1=((I+(m*(L^2)))*(m+M))-((m*L*cos(u(2)))^2)
```

M :masse du chariot.

m :masse du pendule.

b : frottement du chariot 0.1 N/m/sec.

L : 1 /2 la longueur du pendule.

I : inertie du pendule 0.006kgm^2 .

g : force d'attraction 9.8 N/kg.
