

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
-----oOo-----

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE MECANIQUE



MEMOIRE DE MAGISTERE

PRESENTE PAR : DOUGDAG Mourad

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MAGISTERE EN GENIE MECANIQUE
Option : CONSTRUCTION

Thème

INTRODUCTION DE DEFAUTS MECANQUES DANS L'ETUDE DES MACHINES TOURNANTES

Devant le jury :

Président	: A. AIAD	Maître de conférences	U. Blida
Examineurs	: B. NECIB	Professeur	U. Constantine
	Z. E. YOUBI	Maître de conférences	U. Blida
	M. MEGHATRI	Chargé de cours	U. Blida
Rapporteur	: M. OUALI	Maître de conférences	U. Blida

ALGERIE 2001

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur M. OUALI, mon promoteur, pour son aide, ces conseils et le suivi de ce mémoire. Je tiens aussi à remercier Monsieur le Directeur du CRNB pour toutes les facilités qu'il m'a accordées pour mener à biens mes travaux , l'ensemble de mes responsables hiérarchiques du CRNB et mes collègues du laboratoire des études mécaniques et matériaux nucléaires.

Je remercie Monsieur AIAD Abdelkrim d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance .

Je tiens à exprimer mon profond respect et mes remerciements à tous les examinateurs de mon mémoire de magister ,Messieurs YOUBI Zine Eddine ,Brahim NECIB et MEGHATRIA M'Hamed .

Je dédic ce travail à mon fils MOUIIAMED, à ma fille RANIA et à mon épouse.

A mes défunts parents.

Sommaire

REMERCIEMENTS.....	II
LISTE DES FIGURES.....	V
NOTATIONS PRINCIPALES	VIII
RÉSUMÉ.....	IX
I. INTRODUCTION	001
1.1. Généralités	
1.1.1 Présentation générale	002
1.1.2 Approches préliminaires.....	002
II. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUES.....	003
2.1 Aspects des principales anomalies.....	003
2.1.1 Défauts de l'arbre (ou de la ligne d'arbre).....	003
2.1.2 Défauts des droits de liaisons ou paliers.....	004
2.1.3 Défauts d'engrenages.....	007
2.1.4 Défauts d'accouplement.....	009
2.1.5 Défauts de courroie.....	014
2.1.6 Défauts divers.....	015
2.2 Modélisation des principaux organes.....	015
2.2.1 Modélisation de la ligne d'arbre.....	016
2.2.2 Modélisation d'un roulement à billes.....	033
2.2.3 Modélisation du palier lisse.....	037
2.2.4 Modélisation de l'engrenage.....	038
2.2.5 Modélisation d'un Accouplement (Cardan).....	042
2.2.6 Modélisation de Transmission par Courroie.....	044
2.3 Fiabilité des organes de machines et interdépendance.....	045
2.3.1 Fiabilité.....	045
2.3.2 Interdépendance entre les organes et les défauts.....	046
2.4 Méthodes de résolution des équations différentielles.....	047
2.4.1 Accélération linéaire.....	047
2.4.2 La méthode β	047
2.4.3 La méthode θ	047
2.4.4 Choix de méthode.....	047
2.5 Conclusions de la recherche bibliographique.....	048
III. ETUDE THEORIQUE.....	049
3.1 Ligne d'arbre.....	049
3.1.1 Modèle.....	049
3.1.2 Choix du modèle.....	050
3.1.3 Développement analytique.....	050
3.1.4 Critiques du modèle.....	054
3.1.5 Modifications et introduction des défauts.....	054
3.2 Roulement à bille.....	060
3.2.1 Modèle.....	060
3.2.2 Choix du modèle.....	060
3.2.3 Développement Analytique.....	061
3.2.4 Critiques du Modèle.....	072
3.2.5 Modifications et introduction des défauts.....	072

3.3. Palier Lisse.....	075
3.3.1. Modèle.....	075
3.3.2. Choix du modèle.....	075
3.3.3. Développement Analytique.....	075
3.3.4. Critiques du Modèle.....	079
3.3.5. Modifications et introduction des défauts.....	079
3.4. Engrenage droit.....	083
3.4.1. Modèle.....	083
3.4.2. Choix du modèle.....	084
3.4.3. Développement Analytique.....	084
3.4.4. Critiques du Modèle.....	099
3.4.5. Modifications et introduction des défauts.....	100
IV. ETUDE COMPARATIVE ET DE VALIDATION NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE.....	103
4.1. Ligne d'arbre.....	103
4.1.1. Calcul de la Souplesse locale c_{xx} ou c_{yy}	104
4.1.2. Calcul dynamique.....	105
4.1.3. Discussion des résultats.....	106
4.1.4. Conclusion et recommandations.....	107
4.2. Paliers (roulement à bille).....	107
4.2.1. Procédé de calcul.....	107
4.2.2. Modèle de Référence.....	108
4.2.3. Modèle théorique.....	108
4.2.4. Modèle expérimental.....	109
4.2.5. Modèle Dynamique.....	110
4.2.6. Modélisation des défauts.....	111
4.2.7. Résultats.....	113
4.2.8. Discussion des Résultats.....	118
4.3. Engrenage droit.....	118
4.3.1. Procédé de calcul.....	118
4.3.2. Modèle de Référence.....	119
4.3.3. Modèle théorique.....	120
4.3.4. Modèle dynamique.....	120
4.3.5. Modélisation des défauts.....	121
4.3.6. Résultats.....	123
4.3.7. Discussion des Résultats.....	129
4.4. Conclusion de l'étude comparative.....	129
V. CONCLUSION GENERALE.....	130
BIBLIOGRAPHIE.....	132
ANNEXE. A.....	A1
ANNEXE. B.....	B1
ANNEXE. C « Communications ».....	C1

Liste des figures

Titres	P.
Figure 1-1 Schéma d'une machine	2
Figure 2-1 Paliers lisses	4
Figure 2-2 Schéma d'un roulement	5
Figure 2-3 Schéma d'une denture d'engrenage et d'une dent isolée	7
Figure 2-4 Accouplements	9
Figure 2-5 Accouplement élastique	10
Figure 2-6 Schéma d'un joint de cardan	11
Figure 2-7 Schéma cinématique du joint de cardan	11
Figure 2-8 Association de plusieurs joints de cardan	12
Figure 2-9 Liaison rigide entre deux arbres	14
Figure 2-10 Schéma de chaîne de transmission par courroie	14
Figure 2-11 Schéma de quelques modèles de base	15
Figure 2-12 Schémas des différents modèles qui ont été développés	15
Figure 2-13 Schéma d'une ligne arbre réelle	17
Figure 2-14 Élément poutre en compression	19
Figure 2-15 Élément de poutre en flexion	20
Figure 2-16 Flexion d'un arbre avec plusieurs roues	22
Figure 2-17 Cisaillement d'un arbre	23
Figure 2-18 Torsion d'un arbre avec plusieurs roues	24
Figure 2-19 Schéma d'un désalignement	28
Fig. 2-20 Un balourd de masse m sur un rayon r , produit lors de la rotation de l'arbre une force centrifuge	28
Figure 2-21 Schéma d'une ligne d'arbre à section variable	29
Figure 2-22 Ligne de rotation avec balourd réparti	29
Figure 2-23 Éléments massique d'un rotor	29
Figure 2-24 Torseur des balourds d'un rotor	30
Figure 2-25 Position générale d'un disque sur un rotor	31
Figure 2-26 Phénomène de flambage sur un arbre vertical	32
Figure 2-27 Phénomènes des fréquences propres directes et rétrograde	33
Figure 2-28 Schéma d'un roulement	34
Figure 2-29 Schéma d'une bille de roulement	35
Figure 2-30 Le passage d'une bille sur une défautuosité provoquant un choc	35
Figure 2-31 Schéma des forces, modèle de Rajab 1982	36
Figure 2-32 Représentation en éléments finis d'un roulement	36
Figure 2-33 Schéma d'un palier lisse soumis à des forces	37
Figure 2-34 Modèle torsionnel de base	38
Figure 2-35 Modèles à paramètres concentrés on cite celui de Küçükkay (1984)	39
Figure 2-36 Modèle masse-ressort d'un train planétaire de Boyd et Pike (1985).	39
Figure 2-37 Modèle de Tuplin	40
Figure 2-38 Variation théorique et simple de la raideur	40
Figure 2-39 Définition de l'erreur de transmission (Munro)	41
Figure 2-40 Modèle de Strauch et all	41
Figure 2-41 Schéma d'un modèle d'engrenage avec introduction de l'effet de l'erreur de transmission	42
Figure 2-42 Comportement cinématique	42
Figure 2-43 Forces radiale	43
Figure 2-44 Arrangement Z & W	43
Figure 2-45 Evolution de l'erreur de transmission avec l'angle de rotation	43
Figure 2-46 Evolution de ϕ et du coefficient U en fonction de l'angle de désalignement	43
Figure 2-47 Schéma de modélisation d'un cardan	44
Figure 2-48 Schéma de modélisation d'un cardan en torsion	44
Figure 2-49 Modèle de transmission par courroie	44
Figure 2-50 Evolution d'un défaut	45
Figure 2-51 Taux de défaillance par organes et défauts	56

Figure 2-52 Organigramme de défaillance ou de propagation des défauts	46
Figure 3-1 Schéma des modèles d'éléments finis avec la méthode de déplacement	49
Figure 3-2 Arbre élémentaire assemblé	53
Figure 3-3 Repère sphérique	56
Figure 3-4 Schématisation d'un désalignement	58
Figure 3-5 Représentation d'une force de désalignement	58
Figure 3-6 Cas de faux rond	59
Figure 3-7 Modèle d'un roulement	60
Figure 3-8 Schéma des forces, modèle de Rajab 1982	60
Figure 3-9 Contact entre deux sphères	61
Figure 3-10 Représentation Coupe d'un roulement	62
Figure 3-11 Ellipse de contact	62
Figure 3-12 Schéma de la surface de contact de la bille avec les bagues supérieure et inférieure	62
Figure 3-13 Déformation locale d'une bille	63
Figure 3-14 Déformation globale d'une bille	63
Figure 3-15 Application d'une force sur une rangée de bille	64
Figure 3-16 Répartition des forces sur la rangée de bille	64
Figure 3-17 Chargement radial	66
Figure 3-18 Schéma de la déformation totale d'un roulement sur la tranche de roulement engagé	66
Figure 3-19 Modèle géométrique de la déformation angulaire	67
Figure 3-20 Répartition des couples de force le long du périmètre de la bague intérieure	67
Figure 3-21 Déformation sous l'effet d'un moment	68
Figure 3-22 Déformation sous l'effet d'une force axiale	69
Figure 3-23 Répartition des forces de force le long du périmètre de la bague intérieure	70
Figure 3-24 Représentation de l'angle de contact	70
Figure 3-25 Application d'une force résultante	71
Figure 3-26 Modèle modifié d'un roulement	72
Figure 3-27 Schéma de variation de $K(t)$	74
Figure 3-28 Modélisation d'une piste écaillée	74
Figure 3-29 Position d'équilibre dans un palier lisse	75
Figure 3-30 Modèle d'un palier lisse anisotrope	75
Figure 3-31 Modèle 3D d'un palier lisse	79
Figure 3-32 Modélisation des moments	80
Figure 3-33 Schéma d'une transmission par engrenage	83
Figure 3-34 Modèle proposé d'une transmission par engrenage	83
Figure 3-35 Schéma d'une roue d'engrenage	84
Figure 3-36 Modèle proposé d'une roue d'engrenage (Poutre de section variable)	84
Figure 3-37 Schéma du mécanisme de contact entre les dents	85
Figure 3-38 Modèle cinématique	85
Figure 3-39 Représentation schématique de l'application d'un chargement équivalent sur une dent	85
Figure 3-40 Cinématique de l'engrènement et la Ligne d'action	87
Figure 3-41 Modèle cinématique (calcul de γ_0)	87
Figure 3-42 Evolution de la force le long de la ligne d'action	89
Figure 3-43 Schéma des forces normales et de cisaillements	90
Figure 3-44 Déplacement radiale globale	92
Figure 3-45 Déplacement tangentiel	93
Figure 3-46 Déformation de flexion d'une dent	94
Figure 3-47 Déplacement axial	95
Figure 3-48 Déplacement angulaire	96
Figure 3-49 Réponse du système à une excitation	100
Figure 3-50 Schéma de dégradation de la denture d'engrenage.	101
Figure 4-1 Effet de la zone ignorée	104
Figure 4-2 Erreur due à l'effet de la zone ignorée	104
Figure 4-3 Souplesse d'un arbre creux	104
Figure 4-4 Souplesse d'un arbre creux (2 ^{ème} approche)	104
Figure 4-5 Effets des zones 1 et 2	105
Figure 4-6 Effets du changement géométrique	105
Figure 4-7 Amplitude des vibrations d'un arbre fissuré	106
Figure 4-8 Formes vibratoire des effets dues à des défauts sur la piste interne et externe d'un roulement	108
Figure 4-9 Représentation schématique de la sollicitation.	109



Figure 4-10 Modes d'engagement des billes	110
Figure 4-11 Modèle dynamique	110
Figure 4-12 Zones engagées, non engagées et zones qui peuvent être engagées	111
Figure 4-13 Déformations théoriques	113
Figure 4-14 Résultats d'essais avec Axe de chargement sur bille	114
Figure 4-15 Résultats d'essais avec Axe de chargement entre billes	114
Figure 4-16 Déduction de la déformation du roulement	114
Figure 4-17 Superposition des courbes théorique et expérimentale	115
Figure 4-18 Comparaison entre WILSON- θ méthode et β méthode	115
Figure 4-19 Rigidité dynamique d'un roulement	116
Figure 4-20 Déformation dynamique d'un roulement	116
Figure 4-21 Réponse dynamique sur la piste externe	117
Figure 4-22 Défaut sur la piste interne	117
Figure 4-23 Défaut sur la piste interne	117
Figure 4-24 Défaut de Balourd	117
Figure 4-25 Modèle de rigidité d'un couple d'engrenage	119
Figure 4-26 Réponses caractéristiques (Signaux $X(t)$).	119
Figure 4-27 Modèle dynamique d'un engrenage	120
Figure 4-28 Déformation globale de deux dents d'engrenage	123
Figure 4-29 Variation de la rigidité d'un couple d'engrenage donné.	124
Figure 4-30 Variation de la rigidité d'un couple d'engrenage donné pendant deux engrènements successifs.	124
Figure 4-31 Déplacement en fonction du temps	125
Figure 4-32 Spectre de déplacement (log)	125
Figure 4-33 Rigidité avec Interférence	125
Figure 4-34 Force avec interférence	125
Figure 4-35 Spectre de vitesse. Effet du balourd	126
Figure 4-36 Effet de l'absence d'une dent (la 5 ^{ème} /10)	126
Figure 4-37 Faux rond ou excentricité	127
Figure 4-38 Usure des dents d'une roue du couple	127
Figure 4-39 Effet de l'irrégularité de pas	127
Figure 4-40 Effet de la fissuration d'une dent	128

Notations Principales

α : angle, déplacement angulaire autour de x,
 β : angle, déplacement angulaire autour de y,
 θ : angle, déplacement angulaire autour de z,
 ρ : rayon polaire,
 φ : angle, phase,
 ϕ : angle, angle d'attitude dans les paliers
 lisses,
 ε : petite variation,
 δ : déplacement,
 η : coordonnée locale,
 ξ : coordonnée locale,
 ν : coefficient de POISSON,
 μ : coefficient de viscosité,
 τ : contrainte de cisaillement, laps de temps,
 σ : contrainte,
 Ω : vitesse angulaire de rotation,
 ω : vitesse angulaire de rotation, pulsation
 propre,
 α_0 : angle de pression dans les engrenages,
 a : accélération, taille de la profondeur d'une
 fissure,
 b : largeur, coefficient,
 c : coefficient de souplesse,
 u : le déplacement à l'abscisse x,
 v : le déplacement à l'abscisse y, vitesse,
 h : déformation locale, épaisseur du film
 d'huile,
 x : déplacement,
 l : longueur d'un arbre,
 t : le temps en seconde
 k : coefficient de rigidité,
 n : nombre d'éléments ou nombre de billes
 d'un roulement ou de dents d'un engrenage,
 m : masse linéairement répartie, module,
 p : poids, pas primitif,
 g : accélération de la pesanteur,
 e : excentricité du rotor à vitesse de rotation
 nulle,
 f : flèche de flexion de l'arbre sous l'effet de
 la force centrifuge fléchissante,
 bi : balourd élémentaire,
 fp : flèche de flexion de l'arbre sous l'effet du
 poids p du rotor.
 f_c : fréquence correspondant à la vitesse
 d'entraînement,
 f_b : fréquence correspondant à la vitesse de
 rotation des billes d'un roulement,

f_c : fréquence correspondant à la vitesse de
 rotation de la cage d'un roulement,
 r_0 : distance axe point de contact,
 pb : pas de base,
 $c.d.g.$: centre de gravité,
 A : section d'un arbre,
 I : moment d'inertie,
 J : moment polaire,
 E : module d'élasticité, module de YOUNG,
 F : force
 Q : effort tranchant,
 G : module de cisaillement,
 N : nombre de cycles, vitesse de rotation en
 tours par minute,
 H : hauteur totale de la dent,
 T : température, période temporelle, moment
 de torsion,
 O : centre géométrique,
 R : rayon, distance du c.d.g. de l'axe de
 rotation,
 M : masse, moment,
 P : chargement normal,
 C_t : couple transitoire,
 C_p : couple permanent,
 F_c : force centrifuge,
 M_f : moment fléchissant,
 K_c : facteur de concentration de contrainte,
 V_c : Vitesse critique,
 LB : épaisseur r de Base,
 LP : épaisseur r de pied,
 LT : épaisseur de Tête,
 $L1$: épaisseur donnée,
 $L2$: hauteur de la roue d'engrenage,
 LM : épaisseur primitive, Intervalle primitif
 entre deux dents,
 $S(N)$: courbe de wöler (fatigue),
 K_{IC} : ténacité en mode I,
 $f(r, \theta)$: fonction de forme et ((r, θ) coordonnés
 polaire à la pointe de la fissure,
 $K_{I,II,3}$: facteur d'intensité de contrainte en mode
 I, II et 3,

 $[M]$: matrice masse,
 $[K]$: matrice de rigidité,
 $[C]$: matrice d'amortissement ou de souplesse,

Résumé

◊ Ce présent travail rentre dans le cadre du projet de recherche J 0901/99 dirigé par Monsieur OUALI. Il consiste en l'introduction des défauts mécaniques dans l'étude des machines tournantes. C'est un ensemble de travaux de modélisation de plusieurs organes de machines et de certains de leurs défauts mécaniques caractéristiques.

L'objectif de ce mémoire est l'élaboration d'une modélisation mathématique aussi fidèle que possible du comportement dynamique réel d'une machine.

Dans ce travail, on se limite aux organes de machines les plus courants, notamment : l'arbre, les paliers et les engrenages. Ce choix est dicté par l'importance de ces organes, les limites expérimentales, la complexité de certains cas.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la littérature ou ceux obtenus par expérimentation.

Ils sont jugés satisfaisants pour l'ensemble des organes traités. Ils peuvent être exploités par les agents de la maintenance et les constructeurs.

Ce modeste travail est une initiation à la recherche scientifique qui peut servir à de futurs travaux.

Abstract

This work returns in the framework of the project of research J 0901/99 directed by Sir OUALI. It consists of the mechanical defect introduction in the study of machines. It is a group of modelling works of several organs of machines and their characteristic defects.

The objective aimed by this study is the elaboration of a mathematical modelling as faithful as possible to the real dynamic behaviour of a machine.

In these works, one limits to organs most important machines, notably: The tree, landings and chains. This choice has been dictated by the importance of these organs, them experimental limit, the complexity of some cases and so as to concentrate our efforts on a number limited of problems.

The modelling has been submitted to comparative works, experimental and numerical validation by a confrontation to results found in the literature or these obtained by experimentation.

Obtained results have been good for the totality of organs processed. It can be exploited as an interesting tool to the people who do maintenance and to constructors.

This modest work is an initiation to the scientific research; this is why it can carry defaults. Nevertheless, one can consider it as flat forms for future enrichment works and improvement.

ملخص

هذه الأطروحة التي بين أيدينا تناول دراسة ذات أهمية خاصة في إطار مشروع بحث رقم J0901/99 والتي تشمل من خلالها إلى إدخال جملة من الأعطاب في بعض القطع الميكانيكية في دراسة للأداة الدوارة ذات الإستعمال الواسع في عالم الصناعة وتحويل الطاقة.

درستنا هذه تنقصر على البحث في تلك الظواهر الميكانيكية الناشئة في هذه الآلات أثناء التشغيل. وبالرغم من قلة الوسائل المتوفرة لدينا فإن النتائج التي حصل عليها في هذه الأطروحة تكاد تتطابق إلى حد بعيد مع تلك التي تناولتها المراجع الأساسية في ميداني النظري والتطبيقي. فيما تفضل البحوث جارية في هذا المجال ومفتوحة للمهتمين وذوي التخصص في مجال البحث العلمي والتكنولوجي الرحب.

ويبقى هذا البحث، رغم ما يكتسبه من أهمية، جهد متواضع بالمقارنة مع التطور العلمي والتكنولوجي. فنرجو أن نكون قد وفقنا في إدخال بعض الحلول إلى جزء من تلك المسائل المطروحة بالحاح في مجالات التصنيع والصيانة الحديثة.

I. Introduction

La modélisation mathématique du comportement normal et anormal[29] des machines tournantes est importante durant les phases de calcul, de conception, de contrôle et de diagnostic des machines. Elle permet l'économie d'énormes moyens.

Elle est un outil moderne de simulation des machines soumises à des conditions d'environnement et de sollicitations diverses et hostiles. Elle permet la réduction des charges de l'expérimentation et du temps d'élaboration, en réduisant ou éliminant le nombre de prototypes d'études. En plus, elle améliore la fiabilité de fonctionnement.

Elle est devenue une solution nouvelle pour la maintenance moderne[5,6,15,17,31]. Elle offre un modèle mathématique de référence permettant d'évaluer l'ampleur des détériorations et d'identifier des anomalies par la comparaison aux mesures faites sur la machine réelle. L'avènement informatique a permis de réduire les temps de calcul ainsi que l'obtention d'une visualisation graphique et rapide des résultats.

Il existe deux approches de la modélisation des machines tournantes. La première est classique, elle considère la machine comme une entité idéale et/ou simplifiée. Par conséquent, les phénomènes nuisibles surgissant normalement ou aléatoirement au cours de son fonctionnement ne sont pas pris en considération ou très peu. Des travaux de modélisation de quelques défauts caractéristiques existent, ils sont jugés peu nombreux. La deuxième approche considère la machine comme une boîte noire [37,38]. Elle lui ôte son caractère physique et présente une formulation très complexe.

Certes, le comportement des machines avec les différents phénomènes interférants est complexe, mais le dénouement n'est pas impossible.

Les phénomènes qui entravent le bon fonctionnement d'une machine sont nombreux. Ils sont dus à leurs propres spécificités mécaniques et à la présence d'une multitude d'anomalies[27]. L'anomalie est présente dès le début ou se forme après fonctionnement. A l'origine, elle ne représente pas un danger mais son évolution fait qu'elle atteint des seuils jugés indésirables[26]. Parmi les anomalies, il y a celles qui font partie intégrante de la structure et celles qui se forment sous l'effet de certaines conditions. Parmi ces conditions, on cite les jeux mécaniques, le contact entre éléments tournants, la plasticité de la structure, la mauvaise viscosité des lubrifiants, les erreurs de montage, les erreurs de fabrication et de conception ...

On se propose dans ce travail d'étudier certains aspects intrinsèques liés au comportement statique et dynamique des organes de machines et les effets de quelques anomalies qu'on modélise pour les introduire dans le modèle global de la machine. Il est intéressant de modéliser la rigidité dynamique des organes, le désalignement de l'arbre, l'effet dû à la présence des fissures dans l'arbre, l'effet dû à une défectuosité dans un roulement, l'effet dû à une usure de la denture d'un engrenage et autres .

Les spécificités du comportement statique et dynamique des organes de machines ainsi que leurs défauts caractéristiques peuvent être l'objet d'une modélisation aussi fidèle que possible. Il suffit de pousser la modélisation vers les détails de ce comportement mécanique en introduisant les notions de non linéarité des raideurs mécaniques, de rigidités dynamiques, de chocs mécaniques, de la théorie de la mécanique de la rupture, de la théorie de la fiabilité, du principe de discrétisation par éléments finis...

L'étude a pour but l'obtention d'une formulation permettant de décrire au mieux le comportement réel des machines.

Elle comporte une recherche bibliographique sur la modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des principaux organes de machines, une étude théorique englobant les modèles courants et le développement analytique pour les modèles élaborés, une étude comparative et de validation numérique et expérimentale et des conclusions.

1.1 Généralités

1.1.1 Présentation générale

Les machines tournantes sont des systèmes mécaniques complexes. Elles sont, généralement, composées d'un ensemble d'organes dont une partie est fixe et l'autre mobile. Les organes fixes servent comme moyen de support aux organes mobiles ou tournants et les organes en mouvement créent l'énergie ou transforment du travail [27].

Les machines tournantes sont un moyen indispensable à la production d'énergie. Elles sont devenues indispensables dans la vie moderne.

Description

Une machine tournante de base est composée [6,27,28,29,30], généralement, d'une structure reposant sur une fondation rigide ou bâti, de deux paliers fixés sur la dite structure et supportant un arbre tournant et portant une roue (voir Fig. I-1).

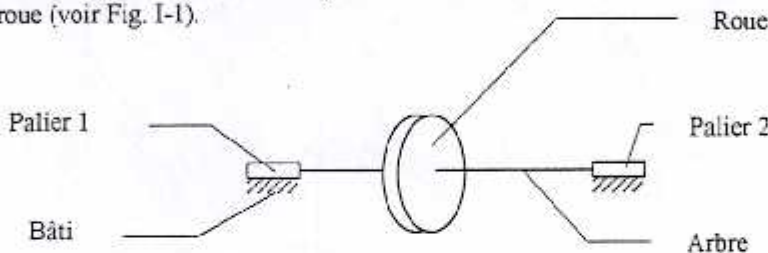


Fig. I-1 Schéma d'une machine

En pratique, ces systèmes sont sujets à des imperfections dues à la fabrication [6], au montage, à la nature même des matériaux (isotropie, anisotropie, etc.), aux jeux de fonctionnements, ...

Ces facteurs font que le comportement dynamique des machines n'est pas idéal et reste complexe dans son approche et son analyse.

Le comportement idéal d'une machine aurait été sans vibrations sauf celles générées délibérément comme c'est le cas des vibreurs de béton, concasseurs, etc.

En pratique, chaque organe présente, au départ, des défauts ou anomalies naissantes [6]. Ces dernières interagissent entre elles, évoluent au cours du temps et marquent ainsi le vieillissement de la machine.

1.1.2 Approches préliminaires

L'étude des machines tournantes suit trois approches différentes. L'approche « PRATIQUE », l'approche « EXPERIMENTALE » et l'approche « THEORIQUE ».

L'approche « PRATIQUE » [1,6,7,17,18,28,30] consiste à exploiter l'expérience cumulée et l'utiliser comme référence. Cette méthode utilise le constat visuel, sonore et même les techniques de mesure et d'analyse vibratoire et/ou acoustique.

L'approche « EXPERIMENTALE » consiste à élaborer des machines réelles ou réduites (maquettes) et de leurs faire subir plusieurs types d'expériences afin d'établir les différentes limites et déterminer les problèmes les plus probables.

L'approche « THEORIQUE » consiste à élaborer des modèles mathématiques pour simuler le comportement mécanique des machines tournantes. Cette dernière est subdivisée en deux autres voies différentes. Une voie considère la machine comme une « BOITE NOIR » [4,5] et l'autre se base sur la connaissance des différentes lois de comportement des structures mécaniques. C'est le modèle de « CONNAISSANCE ».

Cette dernière voie est la méthode adoptée, dans ce travail.

II Recherche Bibliographique

2.1 Aspects des principales anomalies

2.1.1 Défauts de l'arbre (ou de la ligne d'arbre)

Description

L'arbre est l'organe principal de la machine. C'est lui qui supporte et entraîne les organes mobiles en rotation tels que les roues, les engrenages, les poulies, etc.

Généralement, il présente une forme cylindrique simple pleine ou creuse avec un diamètre uniforme ou constitué de plusieurs cylindres de diamètres différents. Il est caractérisé par un diamètre, un poids et une longueur de valeurs importantes[3,61].

Fonctionnement

Le fonctionnement de l'arbre est caractérisé par un mouvement de rotation autour de l'axe de rotation reposant sur deux paliers aux extrémités. Ces droites de liaisons lui permettent le mouvement en rotation et la possibilité de se déplacer suivant un plan axial en cas de dilatation thermique[3,6].

Défauts intrinsèques

L'arbre, quelle que soit sa complexité, est caractérisé par des modes propres de flexion et de torsion. Ces derniers sont excités, lors du fonctionnement, avec des vitesses de rotation proches d'eux. Généralement, elles sont rencontrées en montée et en descente de puissance et correspondent aux vitesses critiques[3,6,61].

Défauts de fabrication (et de conception)

L'un des problèmes insurmontables, lors de la fabrication, est la réalisation d'un arbre sans mauvaise répartition de masse. Ceci est dû à plusieurs contraintes technologiques relevant des caractéristiques du matériau, de la qualité des outils de fabrication et des machines outils. Ce défaut est appelé le balourd[6,61].

Par ailleurs, il peut se présenter d'autres défauts de fabrication, aussi importants, telles que les fissures, les porosités, les impuretés, les imperfections de l'état de surface, etc. [3].

Défauts de montage

Lors du montage sur les paliers, les problèmes les plus fréquents sont le désalignement, l'excentricité et le désaxement qui se manifestent par une mauvaise coïncidence entre les axes des paliers. Ces défauts peuvent aussi apparaître aléatoirement et/ou s'aggraver [3].

Défauts après fonctionnement

Après montage, lors du fonctionnement plusieurs anomalies apparaissent [3,6,30,31,32,33,61] ; on cite :

- ☞ l'effet du poids de l'arbre fait apparaître une flèche de flexion qui amplifie les forces centrifuges,
- ☞ les arrêts, les démarrages et les changements rapides de vitesses, font naître des forces cycliques de fatigue de torsion et de flexion. Ces conditions de fonctionnement provoquent le vieillissement, la détérioration des propriétés mécaniques et l'apparition des fissures et finalement la destruction de l'arbre par rupture,
- ☞ la rupture d'une ligne d'arbre entraîne l'arrêt de la machine et de la production, sauf dans certaines machines très complexes possédant plusieurs lignes d'arbres.

En effet, la rupture de la ligne d'arbre est, généralement, due à un emballement de la vitesse de rotation provoquant un éclatement ductile. La rupture peut aussi être fragile en présence d'une fissuration causée par un fluage, une corrosion sous tension ou de friction et/ou une fatigue oligocyclique. Il existe aussi des ruptures sous l'effet d'une fissuration transverse à l'axe qui est, généralement, provoquée par la corrosion et/ou la fatigue thermique. La rupture ductile est difficile à détecter mais des méthodes de détection de la fissuration sont du le domaine de recherche [20,32]. Il est possible de modéliser une fissure par la mécanique de la rupture[8,38,59,62].

Le fonctionnement en présence de températures élevées et variables crée des contraintes thermiques et dynamiques de fatigue qui s'associent aux autres effets (ex : la corrosion) et il y a apparition des fissures[32,33]. En outre, ces efforts nuisibles se transmettent vers les autres organes de la machine.

2.1.2 Défauts des droits de liaisons ou paliers

Dans le but de réduire le coefficient de frottement entre paliers et arbres, on interpose des éléments tournants (billes, rouleaux ou aiguilles) ou enceintes cylindriques lubrifiées [3]. Généralement, les roulements ont des éléments qui roulent sans glisser. Plusieurs types de roulements existent : à contact tournant, à billes, à rouleaux et à aiguilles. Pour les chambres, il existe généralement, deux types les paliers lisses à 180° et 360° [3].

Un autre type de palier existe dans l'industrie, à savoir, les paliers magnétiques [3].

Communément, les paliers lisses sont utilisés pour les grandes machines, les paliers à roulements pour les petites et moyennes machines et les paliers magnétiques pour les machines à grande vitesse [3].

2.1.2.1 Palier Lisse

Description

Un palier lisse est un organe de support et de guidage des arbres en rotation. C'est une sorte de chambre cylindrique étanche contenant un liquide de lubrification et tenant dans son axe l'arbre (fig 2-1). Le lubrifiant permet d'éviter le contact métal-métal sur un jeu d'environ quelques microns [3].

En générale, il existe deux types de paliers lisses, à 180° et à 360° [3].

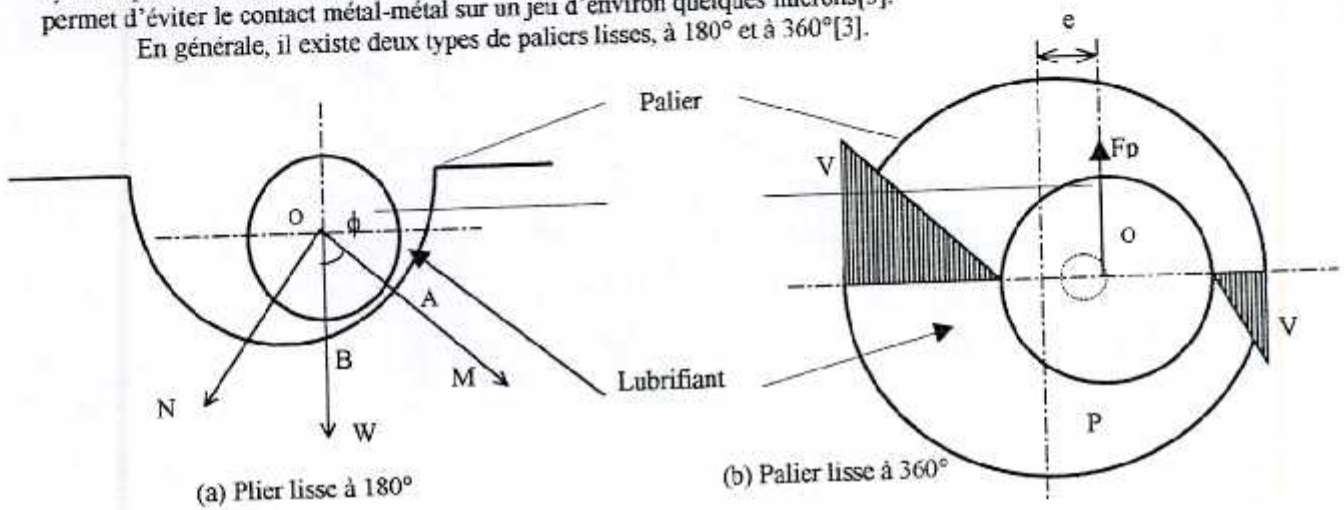


Fig. 2-1 Paliers lisses

Fonctionnement

Un jeu est indispensable pour éviter le contact métal-métal. Théoriquement, il devrait suffire pour éviter incident. Dans la réalité, il existe de nombreuses raisons qui affectent la valeur de ce jeu. On cite, en particulier, les surcharges, les déformations thermiques, les impuretés, la détérioration de la qualité du lubrifiant. [3].

Défauts intrinsèques

Souvent, pour les machines industrielles, la qualité de filtration imposée est d'environ $5 \mu\text{m}$. En pratique, il peut exister des particules de dimensions supérieures. Ceci est dû à la défaillance des filtres ou à la présence des particules dans la circuiterie ou par érosion Ces particules sont des impuretés qui entravent le bon fonctionnement et nuisent au rôle du lubrifiant [3].

Le film d'huile se présente comme une raideur et se comporte comme une structure ayant une fréquence propre et l'excitation de cette fréquence risque de provoquer la résonance [3]. La qualité du lubrifiant (viscosité) dépend des vitesses, des charges ou des pressions et des températures maximales qui sont [3].

Défauts de fabrication (et de conception)

Lors de la fabrication, il faut tenir compte de la nature du couple de matériaux frottants. Le choix des matériaux de ce couple est important, par leur qualité d'absorption des impuretés et leur résistance à la corrosion, à la fatigue, à la pression, à la température, à la bonne conductivité et au risque de grippage [3].

Défauts de montage

En montage, le parallélisme des surfaces en regard peut être affecté. En effet, ce facteur peut être modifié ou amplifié en cas de flexion de l'arbre ou de désalignement [3].

Défauts après fonctionnement

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du palier subissent de nombreuses détériorations à cause des conditions du fonctionnement, parmi elles, on cite [3]:

- ☞ La variation de la température d'alimentation du lubrifiant : en fonctionnement continu, le lubrifiant subit des variations de température. La viscosité et l'épaisseur du film d'huile changent. Par conséquent, les caractéristiques, comme la raideur, varient. En plus ? il y a création de déplacements dynamiques.
- ☞ La pression spécifique qui règne dans le palier, à l'arrêt, est fonction principalement des caractéristiques du fluage du matériau. En fonctionnement, elle dépend de la vitesse de rotation et de la température. La variation de ce facteur crée des vibrations.
- ☞ Le coefficient de frottement : pendant le démarrage et à l'arrêt, le frottement est onctueux. Pour réduire le frottement, il existe des additifs au lubrifiant.
- ☞ L'arrachement de métal : durant les premiers tours de rotation, des particules peuvent être arrachées et restent entre les surfaces. Elles provoquent des échauffements locaux et par la suite des déformations ou boursoflures.
- ☞ La déformation élastique et plastique : sous l'effet des charges, les surfaces en regard se déforment, provoquant le changement de la géométrie de ces structures.
- ☞ La déformation thermique : en régime permanent, l'énergie calorifique liée à la formation du film d'huile est évacuée par le débit d'huile d'une part et par conduction d'autre part. Il existe un flux de chaleur qui traverse les surfaces fixes et mobiles, créant des variations de température dans leur épaisseur et par suite des déformations. Le flux thermique est, généralement, non uniforme.
- ☞ L'angle d'attitude ϕ : pour les paliers lisses à 180°, cet angle peut être grand (exemple $\phi > 60^\circ$ sous l'effet de désalignement), ce qui se répercute par des phénomènes d'instabilité.
- ☞ Le tourbillon à (1/2) vitesse. Ce phénomène est rencontré sur les paliers lisses à 360° (FIG. 2-1-(b)). Il est caractérisé par un chemin circulaire de rotation et correspond, généralement, à (1/2) de la vitesse de rotation. Avec une excentricité (e), il existe une différence de pression (P) qui génère une force (F_p) faisant déplacer (O) le centre de gravité de l'arbre. On déduit qu'en régime permanent, le centre (O) décrit autour du centre géométrique du palier un parcours fermé à une vitesse ($\omega t = \text{constante}$). C'est la vitesse de tourbillonnement généralement égale à la moitié de vitesse de rotation. L'amplitude du tourbillonnement est fonction de la charge, de la vitesse de rotation, de la température, etc.

2.1.2.2 Roulements

Description et fonctionnement

Le roulement (Fig. 2-2) est un palier de support et de guidage de l'arbre en rotation. Il est constitué d'une chambre lubrifiée contenant en son sein une rangée d'éléments mobiles (billes, rouleaux, aiguilles). Le tout est enfermé et maintenu en position par deux bagues, l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur. Habituellement, l'une des bagues est maintenue fixe et l'autre est libre en rotation [3,39,40].

Les éléments tournants roulent sans glisser.

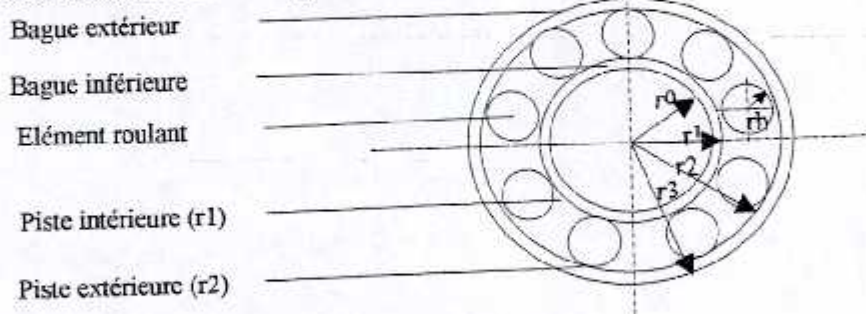


Fig. 2-2 Schéma d'un roulement

Il existe, généralement, trois types de roulements : à billes, roulement à rouleaux et à aiguilles. Chaque type a, théoriquement, un chemin de forme donné, selon le type de l'élément roulant [3]:

1. Roulement à billes : pour une bille, la piste est une lignée de points de contact. En raison de la déformation élastique sous la charge, il y a obtention d'une surface ovale très petite avec une grande pression. C'est pourquoi des matériaux très durs sont nécessaires, ce qui donne au facteur d'amortissement une valeur très faible et les roulements sont bruyants. Le chargement est souvent supporté par une moitié des billes, en raison de la symétrie et du jeu de fonctionnement. Il existe d'autres types de roulements avec précharge, où l'ensemble des billes sont toujours en contact et en charge (cas des roulements des machines outils).
2. Roulement à rouleaux : il a des capacités de charges plus importantes que celles du roulement à billes. Le contact devient une ligne le long du rouleau au lieu du point pour les billes. La forme des rouleaux est, ordinairement, cylindrique, conique ou en tonneau.
3. Roulement à aiguilles : c'est un cas spécial des roulements. Les éléments roulants sont longs et fins. La bague interne est inexistante. Ils roulent, souvent, directement sur l'arbre ou le moyeu.

Défauts intrinsèques

Le roulement possède des fréquences propres. Vu la dureté de ses éléments roulants, il a un très faible coefficient d'amortissement. Il dispose de quatre fréquences d'excitations caractéristiques, soient les fréquences d'excitation de la piste externe, de la piste interne, de la bille et de la cage. Le calcul de ces fréquences est donné par les normes internationales et nationales telles que l'I.S.O., la norme canadienne CDA/MS/NVSH, etc. [3].

Défauts de fabrication (et de conception)

Les défauts de fabrications peuvent être résumés comme suit [3]:

- ☞ Les écaillages : ce sont des déformations permanentes sur la piste de roulement. Elles sont localisées très près de la surface (distance $< 100 \mu\text{m}$) et plus profondément à quelques millimètres aux points de contacts (au niveau de la contrainte hertzienne maximale). La perte de matériau est minime dans la 1ère zone ce qui conduit à des piqûres. Dans la 2ème zone, elles sont plus importantes et aboutissent à un contour tourmenté, ressemblant à des écailles. Ces défauts résultent de plusieurs facteurs:
 1. les phénomènes de fatigue des surfaces en contacts liés au mouvement, aux caractéristiques des matériaux et aux lubrifiants,
 2. une mauvaise lubrification,
 3. une épaisseur du film d'huile insuffisante,
 4. un défaut métallurgique,
 5. une formation d'oxyde qui peut causer des fissurations.
- ☞ Les fissures profondes sont, en général, la conséquence d'un écaillage profond. Elles résultent de :
 1. chocs au montage,
 2. chocs brutaux en service,
 3. traitements thermiques,
 4. jeu trop serré,
 5. un jeu trop grand, sur la bague tournante, provoque des glissements,
 6. phénomènes de corrosion.
- ☞ Usure adhésive : ce défaut est très rare (cas de frottement de glissement et /ou de graissage insuffisant).

Défauts de montage

Les défauts de montage, dépendent de [3] :

- ☞ La propreté : l'intrusion des particules étrangères provoque la détérioration jusqu'à l'écaillage.
- ☞ La chauffe : l'échauffement ($T > 120^\circ$) peut entraîner le changement des caractéristiques métallurgiques et la destruction du graissage,
- ☞ Les chocs : les roulements sont très sensibles aux chocs (montages/démontages),
- ☞ La géométrie : l'ovalisation, les coaxialités, les désalignements, les jeux trop faibles ou trop forts altèrent le bon fonctionnement des roulements.
- ☞ La vaseline de protection existant dans les roulements : en cas où elle n'est pas éliminée avant le graissage, elle peut provoquer le grippage par fusion de la vaseline et le dégraissage.

Défauts après fonctionnement

Lors du fonctionnement, plusieurs paramètres opérationnels doivent être contrôlés, tels que[3]:

- ☞ La charge : si la charge est trop élevée ou mal appliquée, elle provoque la détérioration rapide du roulement,
- ☞ Les chocs : ils se traduisent par des écaillages, des empreintes et la destruction du roulement,
- ☞ La vitesse : chaque roulement admet une vitesse maximale, au-delà de laquelle il y a échauffement, usure et grippage,
- ☞ Les vibrations en rotation : les roulements supportent les vibrations en fonctionnement, mais en arrêt ces dernières peuvent conduire à la naissance de la «corrosion de contact»,
- ☞ La pollution : l'adjonction de dispositif d'étanchéité est nécessaire pour éviter tout contact avec des gaz, liquides ou matériaux polluants,
- ☞ Le jeu du roulement peut augmenter par usure et peut provoquer le désalignement,
- ☞ La détérioration par étincelage résulte d'une mauvaise mise à terre (phénomène électrique) et provoque la «corrosion de contact».

2.1.3 Défauts d'engrenages

Description et fonctionnement

L'engrenage (Fig. 2-3) est installé sur l'axe il transmet un mouvement, souvent, de rotation entre deux arbres dont les positions relatives sont invariables. Le rapport des vitesses de rotation ou rapport de transmission est constant et inversement proportionnel au nombre de dents de chacune des deux roues[3].

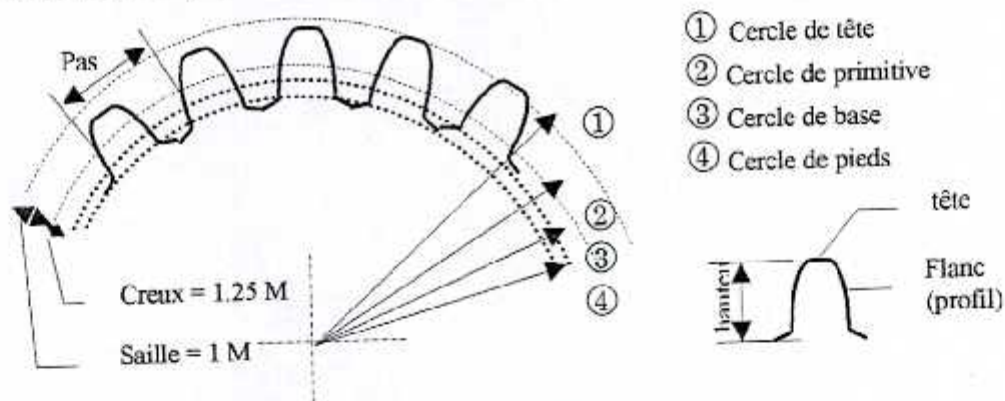


Fig. 2-3 Schéma d'une denture d'engrenage et d'une dent

Les engrenages sont des roues dentées dont les dents sont caractérisées par des surfaces ou plans imaginaires cylindriques ou coniques et roulent l'un contre l'autre. Quand les pignons sont en contact, le roulement est, généralement, sans glissement. Il existe de nombreux types de pignons, parmi eux, on cite [3,41,46]:

1. Engrenage cylindrique : placé sur des arbres parallèles. Il peut être extérieur ou intérieur en fonction de la rotation de l'arbre. Le profil est la section du flanc actif de la dent. Il est, souvent, en épi ou hypocycloïde ou en développement de cercle. Ce type d'engrenage a plusieurs formes : l'engrenage à denture droite si les dents sont cylindriques à génératrice parallèle à l'axe de rotation, l'engrenage à denture hélicoïdale, lorsque les dents ont la forme d'une hélice et l'engrenage à denture en chevron a la forme de deux engrenages hélicoïdaux de pas contraires accolés de façon à annuler l'effort axial. Dans le 1er cas d'engrenage, le contact est discontinu, alors, que dans les autres cas, il est progressif. Ces derniers font peu de bruit.
2. Engrenage conique : ce type d'engrenage est placé, généralement, sur les arbres concourants. Or, il existe un autre type dit engrenage gauche qui est placé sur des arbres non concourants mais sur axes quelconques. Il existe des types dont la denture est droite ou hélicoïdale dits hypoïde à denture spirale.
3. La crémaillère : est un segment d'engrenage dont l'axe de rotation est rejeté à l'infini. Elle sert à transformer un mouvement rectiligne en rotation et inversement.

4. Pignon à vis sans fin : ce type est constitué d'une paire de pignons avec une vis sans fin. Il transmet un mouvement de rotation à angle droit. Plusieurs dents sont en contact en même temps. Les pignons ont un fonctionnement silencieux mais leur capacité de charge est limitée.

Défauts intrinsèques

En général, le pignon est synonyme de bruit, les origines de ces bruits sont multiples. Parmi eux, autre que le contact simple des dents, il y a les caractéristiques intrinsèques de cet organe. Les pignons et leurs dentures sont des milieux déformables possédant une infinité de modes propres. Les fréquences basses de ces modes sont, habituellement, les plus gênantes du fait qu'elles sont facilement excitables[3].

Défauts de fabrication (et de conception)

Les défauts de fabrication sont nombreux, on cite les défauts d'usinage de la denture. Ils se manifestent, au cours de la réalisation des flancs des dents, sous forme d'erreur de profil, de pas incorrects entre deux dents successives (pas circulaires) et de pas uniformes mais décalés (erreur de pas cumulé ISO 1328, erreur individuelle du pas [3]). Par ailleurs, la conception des flancs doit obéir à une géométrie donnant un roulement sans glissement, car le glissement est un facteur d'usure[3].

Défauts de montage

Les défauts de montages les plus fréquents sont : l'erreur sur l'entraxe, l'inclinaison et la déviation des roues en contacts[3].

Défauts de montage

Les défauts de montages les plus fréquents sont : l'erreur sur l'entraxe, l'inclinaison et la déviation des roues en contacts[3].

Défauts après fonctionnement

Ces défauts sont les plus fréquents. Vu les conditions de fonctionnement, les caractéristiques géométriques et mécaniques de la denture évoluent au cours de l'exploitation. On peut répertorier les cas suivant [3,14,20,23,24,26]:

Mauvaise lubrification,

Evolution et développement des surfaces des flancs,

Déformation plastique de la denture,

Rupture ou fissuration d'une dent d'engrenage,

Déformation élastique suivie par un déplacement angulaire des roues,

Effets des conditions de fonctionnement sur la surface de la denture, parmi ces conditions, on cite :

1. type d'efforts,
2. vitesse des surfaces en contacts,
3. températures,
4. lubrification,
5. dureté des surfaces.
6. compatibilité/incompatibilité et nature des matériaux en contacts,
7. conditions externes.

Effets destructeurs :


1. l'usure,
2. corrosion,
3. surchauffe,
4. érosion,
5. étincelage,
6. fatigue de contact.


Conditions externes :

1. variation de puissance,
2. fluctuation d'inertie,
3. positionnement et caractéristiques des structures de liaisons.

L'usure :

1. adhésion et arrachement de métal,
2. rayures,
3. polissage,
4. grippage,
5. abrasure,
6. griffures.

 Effet des sources hydrodynamiques par emprisonnement du fluide par rapport à l'engrenage,

 Effet de battement ou cliquetis en cas des engrenages à faibles charges.

2.1.4 Défauts d'accouplement

Présentation générale

La transmission du mouvement de rotation d'un arbre à un autre est nécessaire lorsqu'un seul arbre ne peut remplir les fonctions souhaitées [10,50,51,52]. La discontinuité de l'arbre est imposée par :

- Contrôle du mouvement ; La transmission du mouvement n'est pas forcément permanente,
- Existence au préalable de deux arbres ; la conception mécanique devient de plus en plus modulaire,
- Existence d'un mouvement relatif.

La jonction des arbres se fera, alors, par un organe de transmission [50] (fig. 2-4): accouplement élastique, accouplement rigide, coupleur hydro-cinétique, embrayage, joint mécanique, cardan, etc.

Il existe par ailleurs, deux types d'accouplements. Les accouplements directs et indirects (avec réduction ou multiplication du rapport de vitesse de transmission). On discutera ici, le premier cas le deuxième est traité dans les paragraphes concernant les engrenages et les courroies.

Le rôle d'un accouplement peut se résumer-en :

- Transmetteur du mouvement de rotation,
- Transmetteur du couple,
- Transmetteur de puissance.

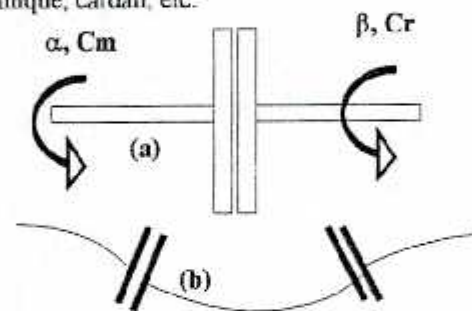


Fig. 2-4 Accouplements
(a) joint
(b) plusieurs joints

Le rapport de transmission n'est pas toujours égal à un (01). Les raisons de cette différence sont dues à la discontinuité élastique entre les deux arbres. Il y a, alors, un « retard » de transmission exprimé par :

Transmission de mouvement	: $\beta = f(\alpha)$
Transmission de couple	: $Cr = f(Cm)$
Transmission de puissance	: $Cr (d\beta/dt) = f[Cm (d\alpha/dt)]$

Les propriétés attendues d'un accouplement sont l'homocinétisme, les possibilités de mouvements relatifs et l'accouplement comme organe de commande.

L'homocinétisme est la capacité de transmission avec un rapport égale à un (01). Cette propriété n'est assurée que par les accouplements rigides et les joints de cardan mais pour des faibles vitesses.

Les accouplements présentent, quelques fois, des possibilités de mouvements relatifs secondaires : mouvements axial, radial, et angulaire. Cette propriété est utilisée généralement pour les cas où les arbres chargés se déforment sous les effets thermiques et les défauts d'alignements.

Les accouplements peuvent servir comme organe de commande. La transmission est contrôlée par une liaison directe ou progressive. Dans ces cas, on utilise le frottement ou l'adhérence (cas de l'embrayage) ou les effets hydrodynamiques (coupleurs ou convertisseurs).Le choix d'un d'accouplement dépend de ces propriétés.

On présentera ici, les accouplements élastiques, rigides, homocinétiques et les joints de cardan.

2.1.4.1 Les accouplements élastiques

Description et fonctionnement

L'accouplement élastique (fig. 2-5) est souvent composé d'un joint élastique. Il comporte deux disques cylindriques (Flasques/manchons) avec un noyau sous forme d'une noix ou plusieurs éléments élastiques.

Les manchons sont en matière métallique. Les éléments élastiques sont faits à partir de trois matières :

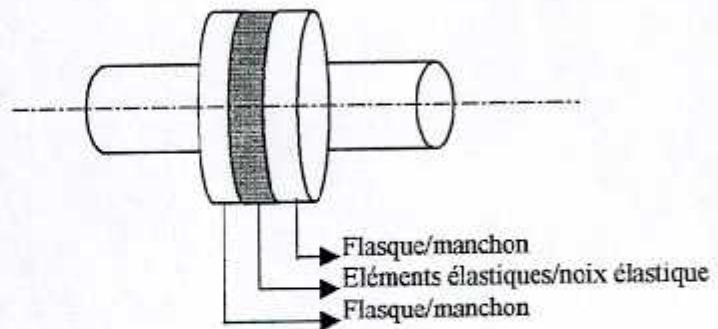


Fig. 2-5 Accouplement élastique

les élastomères, les matériaux métalliques ou les plastomères présentant des rigidités différentes. L'accouplement élastique est un point de discontinuité élastique dans l'arbre, il permet de diminuer la déformation de flexion et de torsion et même d'amortir l'amplitude des vibrations et de décaler le spectre des fréquences à gauche ou de diminuer la valeur des fréquences propres de l'arbre couplé.

La présence de l'accouplement élastique influe sur le fonctionnement de l'arbre. Sous l'effet de perturbations (exemple les balourds), le comportement dynamique établi présente une zone de fonctionnement rigide si la vitesse est inférieure à la vitesse critique de torsion. Il présente un fonctionnement élastique si la vitesse est supérieure à la vitesse critique de torsion. Le joint peut jouer le rôle de filtre des perturbations vibratoires.

Défauts de conception ou de fabrication

il faut tenir compte de [51]:

- ☞ Un mauvais choix du type de joint peut être source de ruine de l'arbre,
- ☞ Les moteurs thermiques et électriques sont des sources de fluctuations du couple moteur. Ils se caractérisent par des perturbations périodiques au cours d'une rotation, de même que pour les récepteurs. Ceci doit être pris en considération, lors du choix de l'accouplement,
- ☞ L'accouplement peut présenter une résistance faible en torsion et en flexion,
- ☞ L'accouplement peut présenter un défaut de conception, de fabrication ou une fissure.

Défauts de montage

La présence de deux joints non également opposés sont sources de vibrations de torsion et de problèmes, lors des arrêts/démarrages (phases transitoires) [51].

Défauts après fonctionnement

Après fonctionnement, les principales anomalies[51] sont:

- ☞ L'angle de rotation relatif ($\gamma = \alpha - \beta$) est, habituellement, source de couple pulsé responsable de vibrations,
- ☞ La vitesse de rotation nominale est atteinte lorsque les couples C_m et C_r s'annulent en moyenne sur une révolution. Autour des valeurs moyennes, il existe un couple résiduel ($C_m - C_r$) variable sur une rotation (2π). Cette variation provoque des vibrations de torsion,
- ☞ L'utilisation des accouplements est limitée par une vitesse limite maximale. Son dépassement provoque la résonance avec les modes propres de l'accouplement et/ou la détérioration de ce dernier,
- ☞ Il faut éviter l'utilisation des accouplements dans les conditions extrêmes mentionnés par le fabricant,
- ☞ Le joint d'accouplement peut se présenter comme un nœud neutre lors du comportement dynamique de l'arbre, ce qui conduit à un comportement sous forme de battement avec ventres et nœuds (corde).

2.1.4.2 Le cardan

Description

Le cardan [53,54] (Fig. 2-6) est, ordinairement, composé de deux joints et d'un arbre intermédiaire.

Le joint de cardan du nom de son inventeur Italien CARDANO (appellation Française) ou de hook (appellation Anglo-saxonne) comprend trois (03) pièces. Deux pièces (S1) et (S2) sont montées rigidement et la troisième pièce intermédiaire (S3) est utilisée comme une liaison pour (S3, S1) ou une liaison pivot (ou pivot glissant) d'axe (Δ_{13}) perpendiculaire à (Δ_{10}) et de même pour (S3, S2) avec l'axe (Δ_{23}) perpendiculaire à (Δ_{20})

Le joint de cardan est un assemblage mécanique constitué de pièces en contact. Le contact du solide S3 (pivot simple ou glissant) avec S'1 et S'2 est soit un contact direct avec frottements (pour les grandes charges avec petite vitesse) ou contact avec roulements ou équivalents. En effet, c'est cette relation entre solides qui définit les différents types de cardan, on citera:

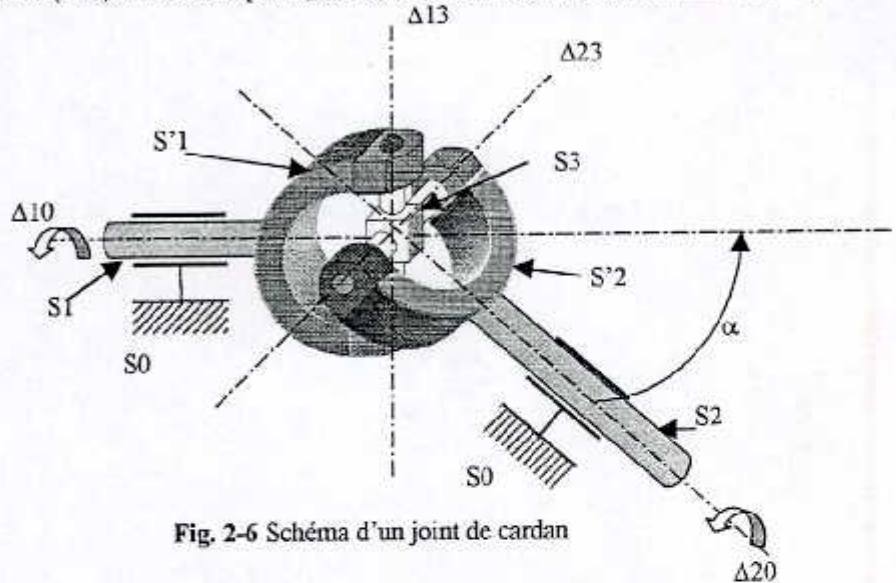


Fig. 2-6 Schéma d'un joint de cardan

1. Joints à croisillons : forme en fourche avec pivot (à roulements, à paliers secs ou à billes)
2. Joints à anneau ou couronne : forme en fourche avec anneau extérieur et intérieur et un pivot (à contact direct ou à éléments roulants)
3. Joints à surface de liaisons planes : forme en fourche avec pivot en forme de noix
4. Joints à coulisse : forme d'articulation mâle/femelle, la liaison est assurée par des patins ou billes se déplaçant dans des rainures (exemple joint de RZEPPA)

Fonctionnement

Le comportement cinématique (Fig. 2-7) du joint de cardan se caractérise par les équations [53]:

$$\sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\theta_2) \cdot \cos(\theta_1)$$

ou encore :

$$\text{tg}(\theta_1) \cdot \cos(\alpha) = \text{tg}(\theta_2)$$

La transmission du mouvement est composée :

$$\frac{s_0}{s_0} = \frac{s_0}{s_1} + \frac{s_1}{s_3} + \frac{s_3}{s_2} + \frac{s_2}{s_0}$$

immobilité
Pivot Δ_{10}
Pivot Δ_{13}
Pivot Δ_{23}
Pivot Δ_{20}

$\frac{s_0}{s_1}$: signifie le mouvement de S0 par rapport à S1

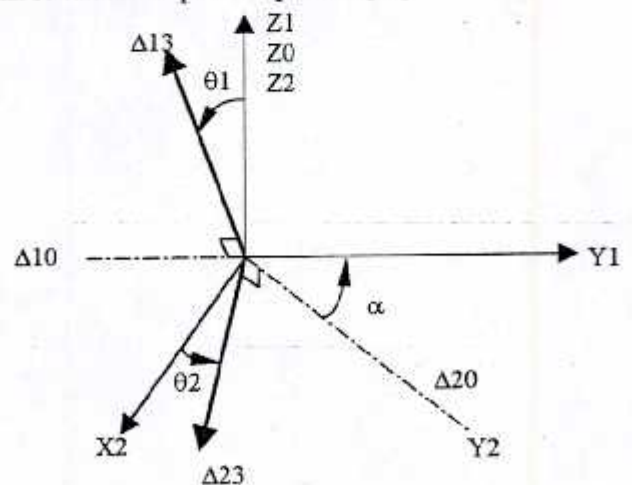


Fig. 2-7 Schéma cinématique du joint de cardan

Voyons les différents cas qui se posent :

- Si $\Delta 13$ et $\Delta 23$ est une liaison pivot on aura la chaîne de mouvement suivante :

$$\omega_{10} \cdot \Delta 10 + \omega_{13} \cdot \Delta 13 + \omega_{23} \cdot \Delta 23 + \omega_{20} \cdot \Delta 20 = 0$$

Avec : ω_{ij} : vitesse angulaire de S_i par rapport à S_j ,

Ce système d'équation est composé de (03) équations à (04) inconnus. Une telle réalisation sera hyperstatique d'ordre (03).

- Si $\Delta 13$ et $\Delta 23$ est une liaison pivot glissante, on aura la chaîne de mouvement suivante :

$$\begin{cases} \omega_{10} \cdot \Delta 10 + \omega_{13} \cdot \Delta 13 + \omega_{23} \cdot \Delta 23 + \omega_{20} \cdot \Delta 20 = 0 \\ v_{13} \cdot \Delta 13 + v_{23} \cdot \Delta 23 = 0 \end{cases}$$

Avec :

v_{ij} : vitesse de coulissement entre S_i et S_j , le long de l'axe Δ_{ij} ,

Ce système d'équation est composé de (05) équations à (06) inconnus. Une telle réalisation sera hyperstatique d'ordre (01).

Le rapport de vitesse est obtenu par la dérivation de l'équation cinématique, on obtient :

$$[1 + tg^2(\theta_1)] \cos(\alpha) \omega_{10} = [1 + tg^2(\theta_2)] \omega_{20}$$

ou

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{(1 + tg^2\theta_1) \cos(\alpha)}{1 + tg^2\theta_2 \cos^2(\alpha)}$$

Cette relation prouve que le joint de cardan n'est pas homocinétique ; puisque le rapport $(\omega_{20}/\omega_{10})$ est différent de un (01) pour $\alpha \neq 0$. Cette situation crée des couples pulsés source de vibrations.

L'association de plusieurs joints de cardan [53] (fig. 2-8) forme le cardan. Le fonctionnement cinématique d'une telle association peut être représenté par deux cas :

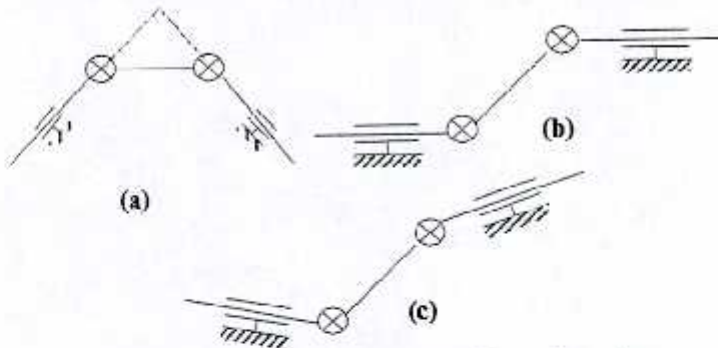
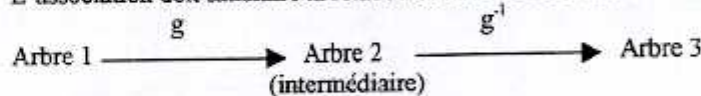


Fig. 2-8 Association de plusieurs joints de cardan
(a) et (b) association à axes concourants,
(c) association à axes quelconques.

L'association doit satisfaire la relation suivante entre l'arbre de départ et celui d'arriver :



$$\omega_{20} = g(\omega_{10})$$

$$\omega_{30} = g^{-1}(\omega_{20}) = g^{-1}[g(\omega_{10})] = \omega_{10}$$

Défauts de montage

Le caractère homocinétique permet d'éviter les couples pulsés et par conséquent les vibrations. Il dépend énormément de l'angle (α) de S2 par rapport à S0. Des études [53] ont prouvé que pour ($\theta \approx 6^\circ$) le caractère homocinétique reste valable.

2.1.4.3 Accouplement homocinétique

Description et fonctionnement

Cet accouplement est un système permettant de transmettre un mouvement d'un arbre à un autre sans décalage angulaire ($\omega_{20} = \omega_{10}$). Or, ceci n'est pas démontré dans la pratique, une erreur maximale de transmission existe, elle est estimée comme suit [54].

$$\varepsilon = 0.27 \theta^2$$

On trouve plusieurs spécimens de familles de ce type de joint, on cite [54]:

A. Famille joint centrés :

1. Joint double : composé de deux joints de cardan avec une rotule centrale,
2. Joint TRACTA : le même cas que précédemment, mais avec surface de contact plane,
3. Joint WEISS : composé de deux mâchoires qui comporte des pistes formant des chemins de roulement. Les billes roulantes, dans ces chemins, assurent la transmission des efforts,
4. Joint RZEPPA : composé de deux mâchoires en forme de bol à pistes interne, une cage à billes, une noix centrale à piste externe et des billes (environ 06).
5. Joint tripode : composé de mâchoires en forme de bol, d'un triaxe fixé sur l'arbre composé de trois (03) tourillons à chaque 120° et des galets montés sur les tourillons par l'intermédiaire d'aiguilles ou coussinets.

B. Famille des joints coulissants :



Les arbres avec cannelure représentent le cas le plus simple de ce type.

1. Joints coulissants non homocinétiques :

- a) Joint bipode (ou à dés) : joint équivalent au joint de cardan simple, sa mâchoire sous forme de bol ne dispose que de deux pistes diamétralement opposées et des rotules montées sur aiguilles.
- b) Joint BOUCHARD : joint ordinaire mais extensible via une jumelle,
2. Joints coulissants homocinétiques :
 - a) Joint de WEISS : joint centré de WEISS qui a été rendu coulissant,
 - b) Joint à pistes croisées : équivalant au joint de RZEPPA qui a été rendu coulissant,
 - c) Joint double offset : équivalant au joint de RZEPPA à commande par les sphères à pistes rectilignes et parallèles aux axes des arbres, les sphères ont été remplacées par des cylindres pour le centrage et le guidage.
 - d) Joint tripode : a été rendu coulissant via trois pistes à axe rectilignes d'angle 120° , un.



Défauts de conception ou de fabrication

Lors de la réalisation il faut tenir compte des problèmes suivants[54]:

-  La précision de réalisation (usinage) des pièces est un facteur important pour la durée de vie
-  La qualité des surfaces (géométrie, dureté, etc.) influe sur la durée de vie.



Défauts de montage

Lors du montage il faut tenir compte des problèmes suivants[54]:

-  La qualité de la graisse et de l'étanchéité.
-  L'angle d'utilisation doit être ($\theta < 7^\circ$) (facteur dominant) et on doit respecter le chargement maximal.

Défauts après fonctionnement

Ce sont:

-  Fatigue de la surface de contact et rupture des éléments roulants par fatigue.
-  Augmentation du jeu mécanique entre éléments et surface.

2.1.4.4 Liaison rigide de deux arbres

Description et fonctionnement

La liaison rigide (fig. 2-9) est une forme particulière des accouplements homocinétiques. Elle constitue une liaison complète par obstacles (clavette, ...) ou brides métalliques. L'erreur de transmission est entre 0° et 5° [52].

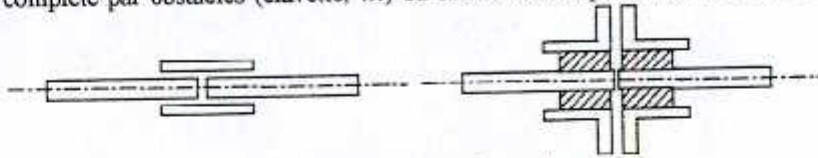


Fig.2-9 liaison rigide entre deux arbres

Les liaisons rigides offrent une augmentation de l'énergie de déformation d'où le décalage de la vitesse critique vers la droite (hautes fréquences), mais elles sont très sensibles aux problèmes de non-alignement.

Défauts de conception ou de fabrication

Lors de la réalisation on tient compte de la concentration de contrainte aux endroits à cannelures [52].

Défauts de montage

Lors du montage et vu la déformée des arbres non linéaires, il se trouve que le raccordement des arbres sans tenir compte de cette déformée crée un désalignement. Il est important de procéder à [52]:

- ☞ L'alignement à froid des arbres et l'alignement à chaud.
- ☞ Correction des dérives d'alignement en exploitation.
- ☞ L'assemblage des brides doit tenir compte de l'uniformité du serrage des boulons.

Défauts après fonctionnement

Après fonctionnement, il arrive que l'alignement se détériore progressivement sous l'effet du changement du niveau du bâti ou des fondations [52].

2.1.5 Défauts de courroie

Description et fonctionnement

Les courroies (fig. 2-10) sont un moyen de transmission de mouvement entre deux arbres via des poulies, le rapport de vitesses entre ces deux arbres est fonction du rapport des diamètres des deux poulies [3,47].

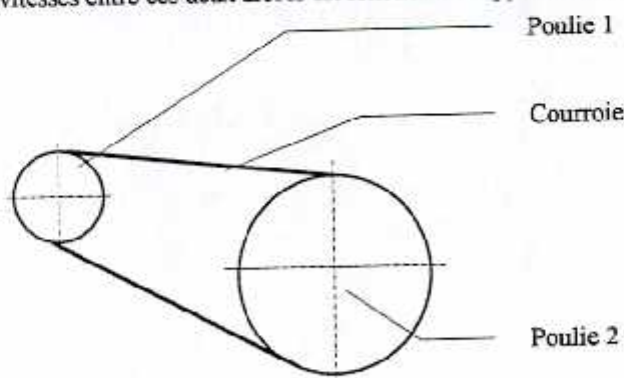


Fig. 2-10 Schéma d'une chaîne de transmission par courroie

Défauts intrinsèques

Les courroies sont comme les autres structures et possèdent des fréquences propres dont l'excitation entraîne la résonance. Leurs effets sont négligeables sur le reste de la machine [3]. Les courroies sont caractérisées par des fréquences identifiées aux harmoniques de la vitesse de rotation [3,7].

Défauts de montage

Les défauts de montages les plus fréquents sont : l'erreur sur l'entraxe, l'inclinaison et la déviation des poulies[3].

Défauts après fonctionnement

Après fonctionnement, les courroies sont soumises à des modifications de leurs caractéristiques mécaniques pouvant entraîner leur déchirure. Par ailleurs, les variations de la largeur et la déformation créent des tensions susceptibles d'induire des vibrations de fréquence égale à celle de la rotation de la courroie[3].

2.1.6 Défauts divers

Dans les machines tournantes, il existe plusieurs autres types de défauts [3,7]:

- ☞ Défauts électriques,
- ☞ Défauts aérodynamiques ou hydrodynamiques,
- ☞ Cavitation pour les pompes,
- ☞ Résonance de la structure du bâti,
- ☞ Transmission des vibrations d'autres machines voisines,...

2.2 Modélisation des principaux organes

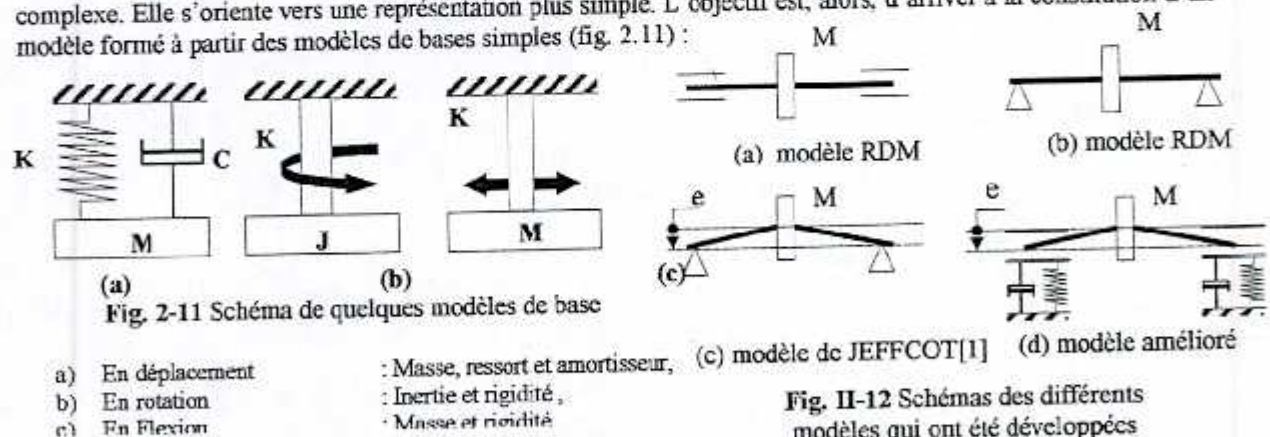
Introduction

La modélisation est un outil mathématique et analytique. Elle est utilisée dans divers domaines de recherche, de conception et de diagnostic. Son apport est très important en matière de gain de temps et d'argent. C'est une procédure, généralement, précédant les travaux expérimentaux pour la vérification et la validation du modèle analytique. Elle est aussi utilisée pour l'amélioration du niveau de la fiabilité des systèmes étudiés.

Comme les défaillances peuvent étre de natures différentes, il est parfois nécessaire de recourir aux techniques de modélisations pour cerner le problème et apporter des solutions [3,9,37].

Historique de la modélisation des machines tournantes

Le souci dans toute modélisation est l'efficacité et la simplification du modèle réel, souvent trop complexe. Elle s'oriente vers une représentation plus simple. L'objectif est, alors, d'arriver à la constitution d'un modèle formé à partir des modèles de bases simples (fig. 2.11) :



C'est pourquoi, la modélisation des machines tournantes a traversé plusieurs phases par évolutions et améliorations successives et progressives jusqu'à atteindre le niveau actuel.

1. Modélisation par la théorie de la R.D.M. : en premier temps, les théoriciens ont adopté le modèle simple d'une poutre appuyée aux extrémités. Ce modèle ne tenait pas compte de plusieurs problèmes et défauts. Le surdimensionnement était de rigueur pour augmenter la fiabilité des systèmes mécaniques et les problèmes d'économie et d'optimisation venaient en second lieu fig.2.12 (a) et (b)[27].
2. Le modèle de JEFFCOT[29]est un modèle amélioré qui introduit les effets du balourd et de l'excentricité. Ce modèle reste insuffisant ; puisqu'il ne considère pas le comportement des paliers (voir Fig. 2.12 (c)).
3. Un modèle plus complexe a été développé plus tard tenant compte de l'association des paliers et d'autres organes tournants. Plusieurs travaux de modélisation des défauts ont été introduits (fig. 2.12.d[3,6]

Remarque : Le cas (d) sera plus détaillé par organe.

Dans ce qui suit, on présente des modélisations (comportement mécanique) d'organes les plus courants.

2.2.1 Modélisation de la ligne d'arbre

2.2.1.1 Généralités

Problématique

A première vue, il existe une similitude entre le comportement des arbres et la théorie des poutres[27,42]. Cette approche n'est pas sans fondements scientifiques ; car la ressemblance entre les deux cas est très grande. Or, les conditions de fonctionnement et les critères de fiabilité des arbres sont si différents qu'ils exigent une approche spéciale nécessitant l'inclusion des phénomènes qui leur sont propres[61], les raisons sont[61]:

1. Le calcul des flèches de flexion et des rotations des sections est nécessaire, même dans le cas d'isostatique, et ce, pour leurs effets sur le comportement de certains organes, tels que : paliers, engrenages, accouplements, etc. Il en est de même pour le calcul des vitesses critiques de flexion.
2. Généralement, Les arbres ont de nombreux changements de sections ce qui compliquent le calcul exact des flèches et rotations,
3. Le travail des arbres en fatigue demande un calcul de grande précision pour la détermination des contraintes aux sections changées et aux lieux des concentrations de contraintes,
4. Les tolérances de fabrication, les jeux de fonctionnement et les masses additionnelles mal réparties font que, sous l'effet du mouvement rotationnelle de l'arbre, il y a création de forces dynamiques centrifuges. La fréquence de ces forces dépend directement de la vitesse de rotation.
5. Les arbres travaillent en torsion car ils transmettent le couple moteur vers les organes récepteurs. Le comportement dynamique en torsion n'est perceptible qu'en régime transitoire. En générale, le mouvement est permanent.

Voyons le comportement idéal d'un arbre puis intégrant les effets des principaux facteurs qui conditionnent le comportement «réel».

Comportement idéal

Pour que le comportement d'un arbre tournant, soit considéré comme idéal [61], il doit satisfaire à des critères déterminés. On cite:

- L'arbre est parfaitement ou infiniment rigide,
- Les axes géométriques, massiques et de rotation sont parfaitement confondus. Ils sont parfaitement confondus avec l'axe passant par les centres géométriques des appuis (paliers),
- Ces axes sont parfaitement linéaires,
- L'arbre a une forme parfaite, uniforme et symétrique autour de son axe et ne présente aucune discontinuité ou cannelure,
- L'arbre est parfaitement isotrope et ses propriétés mécaniques sont idéales et non influençables par l'environnement (température, irradiation, érosion, corrosion, etc.),
- Les appuis sont parfaitement ou infiniment rigides,
- Les appuis ne causent aucunes excitations ou déplacements et ne présentent aucun jeu,
- Le couple d'entraînement ne présente aucune variation spatio-temporelle.

Dans un tel environnement, il n'y a que des sollicitations statiques et permanentes ou stationnaires de flexion, de compression, de traction et de torsion. Ces efforts sont dus principalement, aux poids et au couple moteur. Ce genre de problèmes est largement résolvable par les lois de la RDM classique. Cette solution se base sur la condition connue [3,27,61]:

$$\sigma >= [\sigma] \text{ (admissible)}$$

Or, la réalité est tout autre ; car, de telles conditions géométriques, physiques et fonctionnelles sont impossibles à obtenir, lors des phases de conception et de fabrication[3].

Comportement réel

La représentation du comportement réel est d'une telle complexité que des simplifications s'imposent. C'est pourquoi, des limites doivent être établies pour que l'approche reste objective. On fait abstraction de certains paramètres qu'on ne va pas les détailler ici[6].

L'arbre est une structure mécanique élaborée avec des matériaux possédant une certaine souplesse, amortissement, une anisotropie et présentant plusieurs anomalies de naissances. C'est ce qu'on appelle communément les défauts. On peut les classer en défauts de conception, de fabrication, défauts (impuretés et vides) à l'intérieur et au contour, de mauvaise uniformité des propriétés mécaniques et géométriques, etc.

Par ailleurs, les appuis de l'arbre présentent des jeux de fonctionnement, de tolérances de montage et de fabrication, de souplesse ainsi que d'autres anomalies. Ces dernières diffèrent selon le type d'appui.

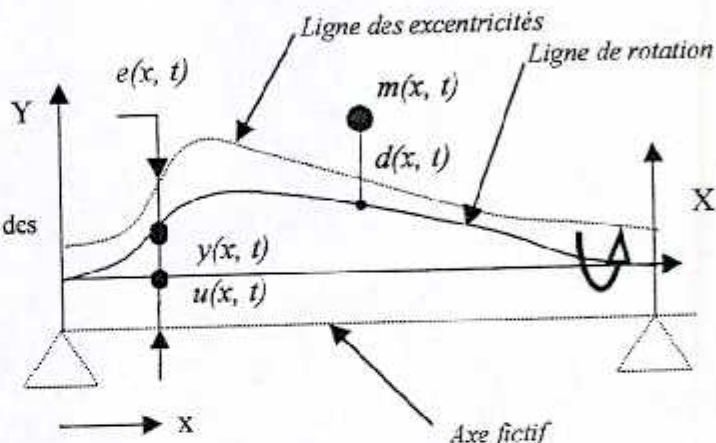
Lors du fonctionnement, le couple moteur est souvent variable à cause des changements de régime lors des démarrages, des arrêts et des variations de vitesse[3,48].

Ces facteurs font que l'arbre tournant est sujet à des excentricités statique et dynamique. Ce qui fait que l'axe de rotation est tournant par rapport à un axe fictif. L'excentricité résultante peut être exprimée par [3,6,28,30,42,55]:

$$f(q, t) = e(q, t) + y(q, t) + u(q, t)$$

Avec :

- $f(q, t)$: excentricité totale,
- $e(q, t)$: excentricité entre le centre géométrique et massique,
- $y(q, t)$: distance de la ligne des excentricités à l'axe des appuis,
- $u(q, t)$: déplacement des paliers,
- $m(q, t)$: excès de masses (Balourds),
- $d(q, t)$: position des excès de masses (Balourds),
- q : coordonnées généralisées.



La figure II.13 illustre cette problématique pour un cas plan:

Fig. 2-13 Schéma d'une ligne d'arbre réelle

Cette situation se manifeste par des vibrations caractéristiques (ou signatures), au niveau des appuis (paliers), selon le régime et les conditions de fonctionnement. Ces vibrations caractéristiques illustrent les anomalies existantes, leur poids et leur évolution dans le temps. Ces anomalies présentent, généralement, une interdépendance entre elles. Sans oublier le mouvement gyroscopique de l'arbre[29].

Principales anomalies

Les anomalies sont un phénomène naturel. Elles peuvent être jugées admissibles[7] à un certain moment, mais vu leur interdépendance et évolution, parfois spectaculaires⁽¹⁾. Elles peuvent présenter un danger et pousser à la méfiance. L'intérêt de l'identification de ces défauts, de la compréhension des relations d'interdépendance et de la caractérisation de leur évolution deviennent des impératifs dans toute étude.

Enumérons les principaux phénomènes influant sur le comportement des arbres. [61]:

1. Flexion, compression, traction et torsion en mode statique et dynamique,
2. Vitesses critiques,
3. Balourds,
4. désalignement,
5. Singularités (fissures, clavettes, cannelures, etc.),
6. Fluage, ...

Méthodes de résolutions

Il existe, habituellement, trois grandes familles de méthodes de résolutions[3]:

1. Méthodes analytiques,
2. Méthodes expérimentales,
3. Méthodes numériques (différences finis, Eléments finis, etc.).

⁽¹⁾ L'enclenchement d'une anomalie peut provoquer la naissance d'un ou plusieurs défauts plus dangereux.

Ces méthodes doivent tenir compte du régime de fonctionnement (permanent/transitoire), du mode de comportement (statique/dynamique), des lois de comportement (linéaires/non linéaires), des singularités (discontinuités/défauts) et des effets de la température, de l'irradiation, de l'érosion, de la corrosion, ... [3].

Dans la première famille, plusieurs lois sont connues. On cite les lois de la mécanique des solides et celles des milieux continus. Elles donnent des résultats presque exacts pour les cas très simples, mais leur efficacité baisse avec la complexité des cas traités. On peut résumer leurs principaux inconvénients [3,61]:

- ☞ Les sections sont considérées constamment droites,
- ☞ Milieu continu,
- ☞ Chargement et complexité en cas d'introduction d'autres effets supplémentaires.

La deuxième famille offre des méthodes de mesure et d'analyse des effets des anomalies mécaniques avec une très grande précision, mais rencontre plusieurs problèmes, lors des différentes phases au moment de la capture de l'information, au cours du transport et pendant le traitement et l'analyse[3].

Les capteurs présentent des limites physiques dues à leurs masses, à leurs gammes ou plages de fréquences utiles, à leurs modes de montage, à l'effet des intempéries et de l'environnement extérieur sur leurs sensibilités, aux effets du choix de la technologie de conception et fabrication du capteur (piézo-électrique, magnétiques, etc.), à la relation qui lie le type d'information capturée avec le signal «électrique» transmis (linéaire/non linéaire), à la sensibilité transversale du capteur, à la calibration, etc. [3,18]

Le transport de signal, par câbles de connexion, subit aussi des limites dues à la qualité matérielle du transporteur, aux problèmes triboélectriques, ..., à l'environnement. L'utilisation de moyen d'amplifications et de conditionnement du signal offre un avantage de sauvegarde, mais possède aussi des inconvénients qui derniers sont dus aux bruits et limites de l'instrumentation interne, à la qualité de l'alimentation électrique. [3,18].

Le traitement de signal est la phase la plus importante dans cette méthode. Au cours de cette phase, il y a plusieurs erreurs dues au filtrage du signal et aux pertes de données, à l'effet du choix du type de signal (signal pic à pic, moyennes, etc.), aux effets du choix des méthodes d'intégrations (linéaires, logarithmiques, etc.) et du nombre d'intégration, à l'effet du choix du type de fenêtrage (rectangulaire, Hanning, ...), aux erreurs dues à l'approche mathématique de ces méthodes (FFT, spectres, ...), etc. [3,13,16,18,25]

L'analyse ou phase finale, présente aussi plusieurs lacunes, dues aux pertes d'une partie de l'information, à la complexité de l'interprétation des signaux, aux erreurs de précision, à la sélection des parties de l'information utile et leurs durées, etc. [3,18,25,26]

On peut résumer ces inconvénients comme suit :

- ☞ Erreurs de mesure,
- ☞ Atténuation des valeurs mesurées par l'absorption mécanique pour certaines gammes de fréquence,
- ☞ Erreurs de l'instrumentation,
- ☞ Erreurs de transport,
- ☞ Erreurs de traitement des signaux,
- ☞ Erreurs d'analyse,
- ☞ Coûts élevés de l'expérimentation et de l'instrumentation.
- ☞ Ces erreurs n'empêchent pas que cette méthode est le meilleur moyen et le plus fiable pour l'étude du comportement vibratoire des machines tournantes[7,25].

La troisième famille des méthodes de résolution fondées sur les méthodes numériques représente, sans aucun doute, des techniques d'avenir. Ces méthodes se basent essentiellement sur la discrétisation du problème en plusieurs petits problèmes plus simples à résoudre.

L'outil l'informatique a apporté des facilités en accélérant les temps des traitements et en donnant une plus grande capacité de stockage de données.

Les méthodes analytiques donnent des résultats presque exacts pour les cas simples. L'association des moyens informatiques et ces dernières méthodes permet, via la discrétisation du cas traité en plusieurs cas simples, la résolution souhaitée. Ce qui rend les méthodes numériques plus adaptées.

Les inconvénients les plus importants sont [3]:

- ☞ Dépendance et limitation aux moyens informatiques,
- ☞ Demande des moyens informatiques lourds,

- ☞ Disponibilité des modèles analytiques,
- ☞ Connaissance des conditions initiales et aux limites,
- ☞ Chargement du modèle par l'introduction des effets des défauts un à un ou simultanément.

Ces méthodes sont rentables pour les problèmes complexes. Ce qui est le cas pour des machines tournantes.

Choix des méthodes

Vu les différentes conditions de fonctionnement, les critères de fiabilité et les raisons économiques, le choix des méthodes numériques est le plus adéquat.

Il reste à connaître avec précision les conditions aux limites et les conditions initiales.

2.2.1.2 Modélisation des principaux phénomènes qui régissent le comportement mécanique des lignes d'arbres

Les conditions de fonctionnement des arbres des machines tournantes font qu'il y a division des lignes d'arbres en deux catégories : arbres placés horizontalement et arbres placés verticalement. En effet, le mode de fixation de ces derniers, fait intervenir des modes différents de sollicitations statiques et dynamiques, et par conséquent, fait apparaître des formes de comportement distinctes. On présente.

1) Arbre Horizontal

Les lignes d'arbres placées horizontalement sont le cas le plus fréquent dans l'industrie. Le facteur le plus imposant sur le comportement dynamique de ce type d'arbre est le poids de l'arbre. On se propose de voir la modélisation des principaux phénomènes : compression/traction d'arbre, flexion, torsion, fatigue, balourds...

Compression /Traction de l'arbre

a) Principes de modélisation :

Parmi les méthodes analytiques qui donnent l'équation gouvernant les vibrations axiales, on présente celle issue de la mécanique des milieux continus pour un élément poutre [3,27,37] (fig. 2-14) en équilibre dynamique.

b) Mise en équation et résolution

Soit, un élément différentiel (dx) d'une poutre soumise à des forces dynamiques axiales, sur la base de la loi de HOOK, l'équilibre des forces donne[6,37]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{AE}$$

Avec :

- u : le déplacement à l'abscisse x,
- P : chargement normal,
- m : masse linéairement répartie,
- A : section d'une portion de poutre,
- E : module d'élasticité,

Pour un tronçon de longueur ln et de section A= Cte. En combinant ces relations et en résolvant l'équation différentielle résultante par la technique de séparation des variables, on obtient d'après [37] pour les conditions aux limites et initiales de la figure 2.14 :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = AEb \begin{pmatrix} \cot b.ln & -\operatorname{cosec} b.ln \\ -\operatorname{cosec} b.ln & +\cot b.ln \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

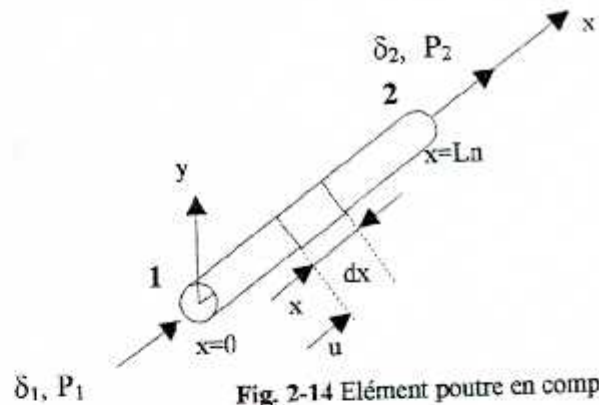


Fig. 2-14 Elément poutre en compression

Avec :

- Cot : cotangente,
- cosec : cosécante,
- ω : pulsation de l'équation temporelle.

$$b = \sqrt{\frac{m\omega^2}{AE}}$$

c) Manifestations vibratoires :

La fréquence vibratoire de ce phénomène dépend de la vitesse de propagation de l'onde de compression et de la fréquence de la force axiale[37].

Flexion de l'arbre

a) Principe de modélisation :

- La division de l'arbre en (k) tronçons de longueur L_n , aux points où il y a des différences de sections, aux points d'application des forces et moments et aux endroits des paliers, etc. [61].
- Le choix du système d'axe dépend du centre géométrique de la section de l'extrémité gauche (ox) pour chaque tronçon. Par la suite un changement de repère pour l'arbre (défini entre ces deux extrémités) est fait. Il se peut que les axes par tronçon se trouvent à des hauteurs différentes (y_n), [61]
- Chaque section dispose d'un moment d'inertie I_n qui dépend de la forme géométrique de l'arbre[61].

b) Mise en équations et résolution:

Les équations des poutres sans charges[27,37,61] s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} = 0 \\ \frac{dM}{dx} = -Q \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y} = \frac{-M}{E \cdot I} \end{cases}$$

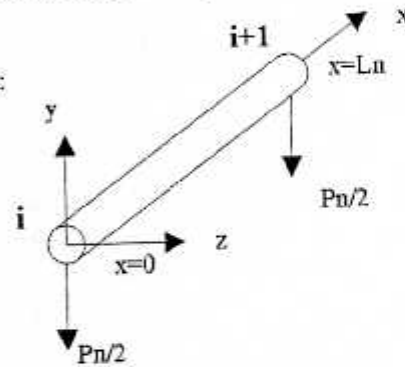


Fig. 2-15 Elément de poutre en flexion

Sur la base des hypothèses [61] et pour le cas d'un élément de poutre [i, (i+1)] sans charges (fig. 2-15), la résolution des équations différentielles, sous les conditions aux limites et initiales de la figure 2-15[61], donne:

$$\begin{cases} y(n+1) = y(n) + \theta(n) L_n - M(n) \frac{L_n^2}{(2EI_n)} + Q(n) \frac{L_n^3}{(6EI_n)} \\ \theta(n+1) = \theta(n) - M(n) \frac{L_n}{(EI_n)} + Q(n) \frac{L_n^2}{(2EI_n)} \quad (1.1) \\ M(n+1) = M(n) - Q(n) L_n + C_n \\ Q(n+1) = Q(n) + F_n \end{cases}$$

Etant donné, que le moment de flexion est linéaire, la contrainte est maximale sur l'une ou l'autre extrémité. Par ailleurs, le tronçon à gauche du peme palier est numéroté $V(p)$, les coordonnées seront notées :

$x(V(p))$, $y(V(p))$ et $\theta(V(p))$.

Les abscisses $x(n)$ sont calculés comme :

$$x(n) = \sum_{i=1}^{n-1} L_i$$

Le calcul de cas isostatique et hyperstatique dépend du nombre d'appuis; s'il est égal ou supérieur à (02) on a respectivement les cas isostatique et hyperstatique. Ce dernier nécessite une méthode de calcul particulière[61].

c) Manifestation vibratoire

L'effet de la flexion de l'arbre sur le phénomène vibratoire dépend de la vitesse de rotation et des forces centrifuges[61].

Flexion due à l'effet des forces centrifuges

a) Principe de modélisation :

Les tolérances de fabrication et les jeux fonctionnels font que le centre de gravité (c.d.g.) des rotors ne coïncide pas avec celui de l'arbre. La rotation de l'arbre, sous l'effet de l'excentricité, provoque une force centrifuge qui fait fléchir l'arbre[61]. Le régime de fonctionnement de l'arbre influe sur la force centrifuge.

b) Mise en équations et résolution:

La force centrifuge est composée de la force fléchissante et la force d'inertie[61] :

$$F_c = M \frac{V^2}{R} + M \frac{dV}{dt}$$

Avec :

- M : masse de l'arbre,
- V : vitesse du c.d.g.
- R : distance du c.d.g. de l'axe de rotation,
- F_c : force centrifuge.

En remplaçant pour la force centrifuge[61]:

- ω : vitesse angulaire,
- p : poids du rotor,
- g : accélération de la pesanteur,
- e : excentricité du rotor à vitesse de rotation nulle,
- f : flèche de flexion de l'arbre sous l'effet de la force centrifuge fléchissante,
- f_p : flèche de flexion de l'arbre sous l'effet du poids p du rotor.

Pour le cas de la force centrifuge fléchissante seulement, on a [61]:

$$F_c = p \cdot (e + f) \cdot \frac{\omega^2}{g}$$

Le calcul de la flexion possède plusieurs cas : la force centrifuge fléchissante seule, force fléchissante avec la force d'inertie pour plusieurs roues [61] (fig. 2-16).

❖ Cas simple avec force fléchissante seule :

En posant :

$$\omega c^2 = \frac{g}{fp} ; \omega c = \sqrt{\frac{g}{fp}}$$

On obtient :

$$F_c = e \cdot p \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^2}{\left(fp \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^2\right)\right)}$$

❖ Cas simple avec plusieurs Roues :

Parmi les méthodes utilisées, on cite la méthode des coefficients d'influence [61] (fig. 2-16). on aura :

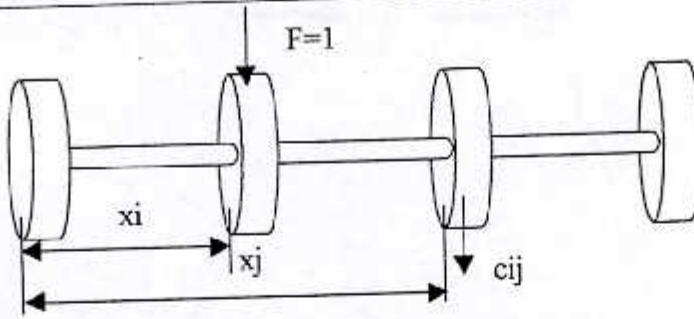


Fig. 2-16 Flexion d'un arbre avec plusieurs roues

Avec :

(cij) flèche à $x = x_j$ pour une force $F = 1$ appliquée à $x = x_i$ et $i, j = 1, \dots, k$.

Du théorème de réciprocité de RDM, on obtient [61] le système d'équation suivant:

$$\begin{Bmatrix} \left(\frac{g}{\omega_1^2} - \frac{g}{\omega^2}\right) & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & \left(\frac{g}{\omega_2^2} - \frac{g}{\omega^2}\right) & c_{23} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \dots & \left(\frac{g}{\omega_k^2} - \frac{g}{\omega^2}\right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ \dots \\ Fk \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e1 . p1 \\ e2 . p2 \\ \dots \\ ek . pk \end{Bmatrix}$$

ou encore :

$$[C] \cdot \{F\} = \{e . p\}$$

Remarque: les forces centrifuges agissent comme des forces statiques sur les arbres, mais comme des forces vibratoires sur les paliers. En effet, si Les réactions dynamiques sont égales aux forces statiques, alors, il y a rupture du film d'huile du palier lisse et/ou choc par rattrapage du jeu pour les roulements à chaque tour[61].

c) Manifestation vibratoire

Les forces centrifuges dépendent directement de la vitesse de rotation[61].

Vitesse critique de flexion

La détermination des vitesses critiques de flexion se fait par plusieurs méthodes[3,48,49]. l'une d'elles se base sur le calcul des forces centrifuges. En effet, la vitesse critique correspond à la fréquence à laquelle la force centrifuge ou la flèche sont infinies, d'où [61]:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{fp}}$$

Le calcul des vitesses critiques, pour un cas simple avec plusieurs roues, se base sur la résolution du système d'équations précédent:

$$[C] \{F\} = \{e . p\}$$

En effet, quand le déterminant de ce système est nul ($\det.[C] = 0$), le vecteur des forces $\{F\}$ devient infini. C'est les vitesses (ou fréquences) critiques.

Cisaillement de l'arbre

a) Principe de modélisation :

La modélisation du calcul de cisaillement se base sur le calcul de l'effort tranchant (fig. 2-17), précédemment obtenu dans le calcul de flexion[27].

b) Mise en équations et résolution:

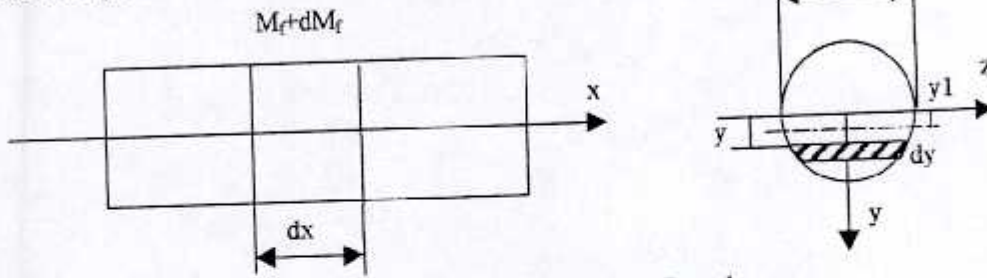


Fig. 2-17 Cisaillement d'un arbre

La somme des forces le long de x est nulle, donne [27]:

$$\tau \cdot b \cdot dx = \frac{dM}{dx} \frac{1}{bI_z} \int_{y1}^R y dA \quad \text{ou} \quad \tau \cdot b \cdot dx = Q \frac{1}{bI_z} \int_{y1}^R y dA$$

Avec :

- τ : contrainte de cisaillement,
- Q : effort tranchant,
- A : section.

Le calcul de τ max. ($y1=0$) pour une poutre cylindrique est de l'ordre de :

$$\tau = \frac{4 Q}{3 A}$$

Torsion des arbres

a) Principe de modélisation :

Les arbres transmettent en général un couple moteur à un récepteur. Ce couple provoque une torsion de l'arbre pour un phénomène isotropique, un système linéaire et une section droite [27].

b) Mise en équations et résolution:

La contrainte maximale dans les sections courantes due à la torsion est exprimée par :

$$\tau = \frac{C}{J} = 5, \frac{C}{D^3}$$

Cette contrainte de cisaillement est en mode permanent sans l'effet de la fatigue. Le phénomène de torsion dépend entre autre du régime de fonctionnement. Cette influence est régie par la variation de vitesse de rotation. Quand la vitesse est variable, on parle de régime transitoire.

En régime transitoire un couple oscillatoire C_t s'ajoute au couple du régime permanent C_p :

$$C_T = C_p + (C_t = I \cdot \frac{d\omega}{dt})$$

Cette addition s'ajoute dans deux cas : lors des démarrages, arrêts et changements de vitesse et quand le mouvement de rotation permanent est oscillant.

Le calcul des angles de torsion pour un arbre à (n) roues [61] (fig. 2-18) est sous la forme suivante :

Soit un arbre qui comprend [61]:

- «n» roues dont les moments d'inertie sont : I_1, I_2, \dots, I_n et les angles de torsion : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
- «n-1» tronçons d'arbre de longueur $L_{12}, L_{23}, \dots, L_{(n-1),n}$, situés entre ces roues avec $J_{12}, J_{23}, \dots, J_{(n-1),n}$ moment inertie de torsion. Leur expression est sous la forme:

$$J_{(n-1),n} = D_{(n-1),n}^4 / 10$$

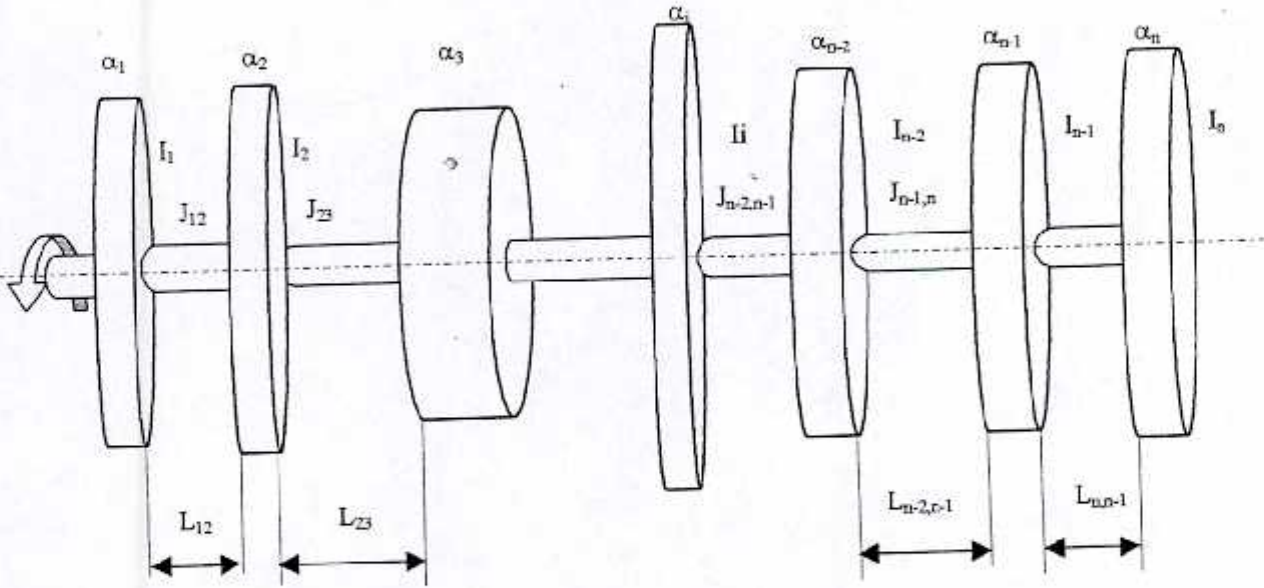


Fig. 2-18 Torsion d'un arbre avec plusieurs roues

La résolution pour toutes les portions donne[61]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{« n » équations} \\ I_1 \cdot \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = C_0 - C_{12} \\ I_2 \cdot \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} = C_{12} - C_{23} \\ - \\ I_{n-1} \cdot \frac{d^2 \alpha_{n-1}}{dt^2} = C_{n-2,n-1} - C_{n-1,n} \\ I_n \cdot \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} = C_{n-1,n} \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} \text{« n-1 » équations} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = C_{12} \cdot L_{12} / (G \cdot J_{12}) \\ \alpha_2 - \alpha_3 = C_{23} \cdot L_{23} / (G \cdot J_{23}) \\ - \\ - \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n = C_{n-1,n} \cdot L_{n-1,n} / (G \cdot J_{n-1,n}) \end{array} \right\}$$

Où :
 C_{ij} : les couples transmis par les tronçons de l'arbre,
 G : le module d'élasticité transversal,
 α_i : angles de rotation.

Ces équations sont linéaires [61]. Il y a « n » inconnues α_i et « n-1 » inconnues C_{ij} . Si on remplace ($d^2 a / dt^2$) par « $-\omega^2 a$ » et on divise les premières équations du système par I_i , puis on soustrait les équations 2 à 2, on obtient les « $\alpha_{i-1} - \alpha_i$ » qu'on élimine en se servant des équations du deuxième système. On détermine, alors, les C_{ij} et les α_i .

Vitesse critique de Torsion

Plusieurs méthodes [3,48] de calcul des vitesses critiques de torsion existent. Parmi elles, celle qui consiste à remplacer ($d^2 a / dt^2$) du système précédent par ($-\omega^2 a$). On obtient l'équation caractéristique du système dont les racines sont les fréquences propres recherchées[61]. Si le système d'équations s'écrit sous la forme:

$$[A] \{b\} = \{c\}$$

alors:

det. $A = 0$ donne l'équation caractéristique où ses racines sont les fréquences propres.

Clavettes et cannelures

a) Principe de modélisation :

Ces pièces créent du bruit et modifient les paramètres fréquentielles du comportement vibratoire des arbres[61].

En effet, la présence de ces derniers modifie les propriétés mécaniques et géométriques et introduisent des vibrations dues aux jeux de fixation. Ces perturbations se résument en [61]:

- Modification du moment d'inertie J, généralement, calculable par les méthodes des Différences Finis ou des Eléments Finis, principalement proche du contour,
- Le mouvement oscillatoire induit des problèmes de matage et de chocs,
- Les clavettes, cannelures, etc. transforment les valeurs discrètes des vitesses critiques en bandes (ou plages),
- Les angles vifs et rentrants induisent une concentration et une intensification de contraintes. Ce phénomène entraîne un comportement singulier, souvent, avec dépassement local de la limite élastique, à ces endroits, est fait annuler l'application de la loi de HOOK. L'utilisation de la Mécanique de la Rupture est conseillée.

b) Manifestation vibratoire

La présence de ces clavettes et cannelures entraîne le changement des raies fréquentielles en bandes[61].

Fatigue des arbres

Les arbres en rotations sont sollicités par plusieurs types de forces. On cite les forces qui ont une direction constante dans l'espace (poids, forces dues aux engrenages, à des organes fixes de distributions des fluides, etc.), les forces axiales de compression et de traction, les forces de torsion, les forces de flexion simple, composés ou rotatives et les différentes autres forces et contraintes thermiques, aérodynamiques, hydrodynamiques, électrodynamiques, etc. Ce qui induit des contraintes de fatigue alternées[61].

Le phénomène de fatigue est influencé par la valeur des contraintes par rapport à la limite élastique et la présence des endroits à concentration de contraintes[61].

La modélisation du phénomène de fatigue est, généralement, obtenue par la courbe de wöler. Cette dernière illustre l'allure caractéristique de ce phénomène. La modélisation mathématique se base sur le nombre de cycle N (alternance entre les contraintes max. et min.) et l'amplitude totale absolue entre contraintes[61].

$$\sigma = S(N)$$

Avec :

- σ : amplitude absolue entre les contraintes max. et min.
- S(N) : fonction de la courbe de WÖLER.

Le calcul du nombre de cycles restant avant rupture (ou durée de vie) Nf est souvent, erroné. La principale cause de ces erreurs est due à la grande dispersion sous l'effet d'une multitude de phénomènes, telles que la rugosité, la micro-corrosion, les discontinuités de la structure métallurgique, etc. Une estimation plus précise est obtenue par des conditions expérimentales plus sévères et généralement trop chères. On adopte, généralement, la collecte de plusieurs valeurs issues de la littérature et l'utilisation des statistiques et des méthodes de calcul de fiabilité[61].

Le calcul de Nf peut être converti en nombre d'heures, par le calcul du nombre de cycle des contraintes totales de flexion, de torsion, de compression/traction et thermiques pour un tour de rotation et sa multiplication par la vitesse de rotation et sa conversion en tours par minute ou en tours par heure. La correspondance entre Nf et Hf permettra de calculer Hf.

Concentration de contraintes

La concentration des contraintes est, couramment, localisée aux endroits de géométrie complexes (trous, gorges, rainures, etc.). Elle se manifeste par une élévation de l'amplitude des contraintes par rapport à d'autres endroits (seins) même proches[3]. La concentration de contraintes peut provoquer le dépassement de la limite élastique et entrer dans le domaine plastique ou de rupture[3]. Le calcul de l'effet de concentration des contraintes passe par la théorie de la RDM et la théorie de l'élasticité. On a [3]:

$$\sigma_r.dm = \frac{F}{A}, \sigma_r.dm = \frac{M_f}{\left(\frac{I}{y}\right)}, \tau_r.dm = K \cdot \frac{F}{A} \text{ et } \tau_r.dm = \left(\frac{C}{R}\right)$$

Avec :

- σ : contrainte normale,
 τ : contrainte de torsion,
 r : rayon de la zone de concentration des contraintes,
 R : rayon polaire,
 dm : élément de masse,
 F : force de compression et de traction,
 M_f : moment de flexion,
 C : couple de torsion,
 A : section,
 I : moment d'inertie,
 J : moment d'inertie de torsion,
 y : distance à l'axe neutre.



Le calcul des contraintes au voisinage du point de concentration des contraintes est :

$$\sigma_{\text{reel}} = K_c \cdot \sigma \cdot r \cdot dm$$

Le facteur K_c s'appelle le coefficient de concentration de contrainte. Ce facteur dépend du mode de sollicitation.

Dans la littérature [3], on trouve des formules empiriques de calcul de K_c pour les rainures, les épaulements, les trous, etc. Le phénomène de concentration de contrainte est plus dangereux en cas de fatigue. Une formule corrigée [14] est, alors, proposée [3]:

Le phénomène de concentration de contrainte est plus dangereux en cas de fatigue. Une formule corrigée [14] est, alors, proposée [3]:

$$\sigma_{\text{reel}} = K' \cdot K_c \cdot \sigma \cdot r \cdot dm$$

Avec :

- K' : coefficient de pondération qui dépend de :
 - du rapport de contrainte max. / contrainte moyenne,
 - du nombre de cycles dans la vie,
 - du matériau.

L'effet de ce phénomène est d'affaiblir la structure dans ces endroits donc faire diminuer la durée de vie avec une vitesse rapide. Par ailleurs, cette concentration de contraintes crée des endroits où les propriétés mécaniques sont différentes et pouvant être considérés comme des tronçons particuliers (exemple les gorges, sections différentes...)

Intensification de contrainte

L'intensification de contraintes en mécanique de la rupture désigne l'élévation du niveau des contraintes aux endroits de présence des défauts singuliers (ex. fissures). La différence avec le phénomène précédent est très grande. On parle ici de l'aptitude du matériau à résister à l'amorçage d'une fissure et sa propagation. Cette propriété est une caractéristique intrinsèque du matériau et est indépendante de la structure [8,59,62]. Le calcul des contraintes issues de l'intensification se base sur la théorie de la mécanique de la rupture. La modélisation de ce phénomène est faite sur deux bases : analytique et analytico-expérimentale. On décrit brièvement, ici, le modèle de base développé par IRWIN [8].

$$K(r, \theta) = \sigma \sqrt{\pi a} f(r, \theta)$$

Avec :

- σ : contrainte,
 a : taille totale de la fissure (fissure apparente et microscopique),
 $f(r, \theta)$: fonction théorico-expérimentale exprimant le facteur de forme dépendant de la géométrie de la pièce,
 (r, θ) : coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure,
 $K(r, \theta)$: facteur d'intensité de contrainte.

Ce facteur dépend des modes de sollicitations, suivants:

- le mode I : mode de traction,
- le mode II : mode de cisaillement plan,
- le mode III : mode de cisaillement anti-plan,
- le mode mixte : couplage de deux ou plusieurs mode entre eux.

Le facteur d'intensité de contrainte critique est la propriété intrinsèque du matériau, appelé : ténacité (K_{Ic}). Il est obtenu expérimentalement et peut être trouvé dans la littérature spécialisée. Ce facteur a les même effets que celui de concentration de contraintes mais avec des conséquences plus spectaculaires et plus graves.

Fluage

Le fluage se manifeste, souvent, sur les pièces mécaniques soumises à des contraintes élevées avec dépassement de la limite d'élasticité. Pour un même matériau, le fluage dépend de la température. Les aciers industriels fluent à partir de 200° et alliages réfractaires à base de nickel fluent à partir de 600° [3,61].

Le processus de dégradation par fluage est d'ordinaire le suivant : il y a striction et décohesion des joints des grains, perpendiculairement à la contrainte principale de traction. Les décohésions successives conduisent à la formation des fissures qui se propagent jusqu'à la rupture.

La courbe de fluage présente toujours un aspect logarithmique. La déformation initiale est suivie immédiatement par la mise en tension. Il apparaît trois stades successifs dans l'évolution du fluage [3,61]:

- Le fluage primaire, où la vitesse de fluage diminue fortement,
- Le deuxième stade, où la vitesse du fluage est constante,
- Le troisième stade, où la vitesse de fluage augmente jusqu'à la rupture.

Ce phénomène est fortement accéléré par la présence d'un chargement constant. La mesure du degré de dégradation est possible avec des moyens techniques adéquats : microscopie électronique, rayons X, ... [3,61].

Mauvais alignement

Le défaut de mauvais alignement est, habituellement, lié à la disposition des paliers (fig. 2-19). En effet, la non-coïncidence entre les axes de rotation au niveau des paliers (droits de liaisons) crée ce phénomène. Ce dernier peut se diviser en trois catégories [3]: les non-linéarités au niveau des paliers, les désalignement sur l'arbre et les défauts au droit des liaisons.

a) Principe de modélisation :

Le désalignement est, souvent, rencontré sur les longues arbres qui nécessitent plusieurs paliers. Il est évident que les axes de ces différents paliers doivent coïncider à chaud, lors du fonctionnement en régime nominal. Or, à chaud, par suite de dilatations thermiques différentielles, l'alignement réalisé à froid n'est plus correct. Par ailleurs, des désalignements progressifs dus à la détérioration et au tassement du béton interviennent progressivement en cours d'exploitation [3].

Les droites de liaisons au niveau des brides de raccordement ont des tolérances de concentricité et de perpendicularité très sévères, mais les problèmes surgissent à cause des erreurs de montage. Ce défaut est l'une des sources des accidents, il a pour conséquence [3]:

- Surcharge des paliers qui a pour effet de diminuer l'épaisseur du film d'huile, d'augmenter les forces de viscosité et finalement d'échauffer le palier avec toutes les conséquences fâcheuses qui peuvent en résulter,
- Décharge des paliers apparition consécutive d'instabilités tourbillonnaires des films d'huile quand les machines sont équipées de paliers lisses à 180 degrés. Les mouvements de l'arbre deviennent très importants et peuvent entraîner la destruction des paliers, des garnitures et des joints d'étanchéité, le blocage des trains d'engrenages et l'usure par corrosion sous contraintes aux droites des jonctions entre sous-ensembles, etc.

Hypothèses [3]:

- Sans considération de la flexion,
- Arbre linéaire et sans déformation,
- Le point (1) est considéré comme centre du repère (voir fig. 2-19),
- L'excentricité est supposée proportionnelle à x .

b) Mise en équations et résolution :

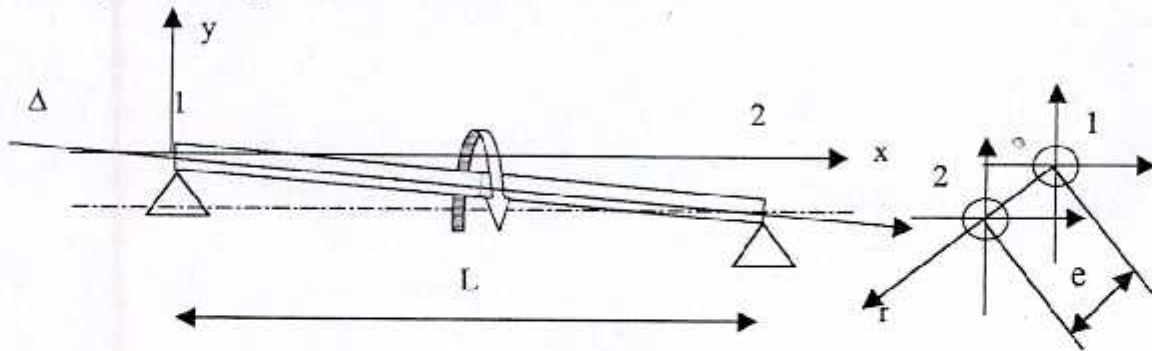


Fig. 2-19 Schéma d'un désalignement

Avec :

- $e(x)$: différence entre les axes du palier 1 et 2 le long de l'axe x
 $e(x) = (e/l) \cdot x$,
- ω : vitesse de angulaire de rotation,
- Δ : axe de rotation.

La non-linéarité est due à l'anisotropie des raideurs des paliers ou des structures d'accueil. L'amplitude du mouvement du centre géométrique des sections droites de l'arbre diffère suivant les directions du plan transversal. L'orbite n'est plus circulaire, mais ressemble à une ellipse.

Si a et b sont les amplitudes de cette ellipse et ρ le vecteur tournant, on a [3]:

$$\rho = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$$

ou encore :

$$2 \cdot \rho = a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos 2\omega t$$

Cette formulation montre une modulation avec une valeur double de la fréquence de rotation.

c) Manifestation vibratoire

Le désalignement [3] se manifeste, généralement, par des fréquences correspondant aux raies H2, H4, etc. c-à-d à la 2eme, 4eme, harmonique de la fréquence de rotation.

Balourds

Il existe plusieurs types de balourds, on cite : les balourds dans les rotors simples, les balourds des lignes d'arbres, etc. [3,6,28, 29,43,44,56]

Rotor simple : Un rotor qui présente un balourd (fig. II-20) produit, lors de sa rotation, une force centrifuge à la fréquence de rotation. Sa valeur se calcule d'après la formule suivante [6,58]:

a) Rotor simple

Un rotor qui présente un balourd (fig. 2-20) produit, lors de sa rotation, une force centrifuge à la fréquence de rotation. Sa valeur se calcule d'après la formule suivante [6,58]:

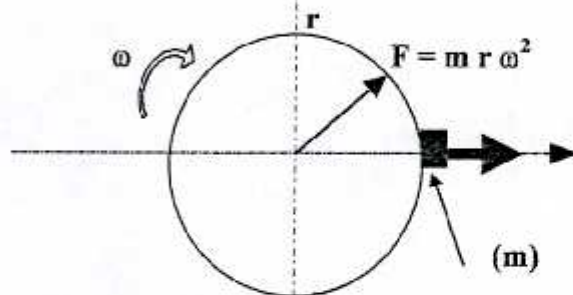


Fig. 2-20 Un balourd de masse (m) sur un rayon r, produit lors de la rotation de l'arbre une force centrifuge F

b) Une ligne d'arbre

Pour le cas plus complexe [1,6,28,30,55,56] (fig. 2-21), on définit un torseur de balourd et on traite section par section.

Soit un rotor d'une machine tournante dont le centre géométrique (Ci), et précisément, d'une section (Ai) sensiblement perpendiculaire à la ligne qui joint les centres de ses liaisons (liaisons qui associent le rotor au stator). Cette ligne est voisine de la ligne de rotation.

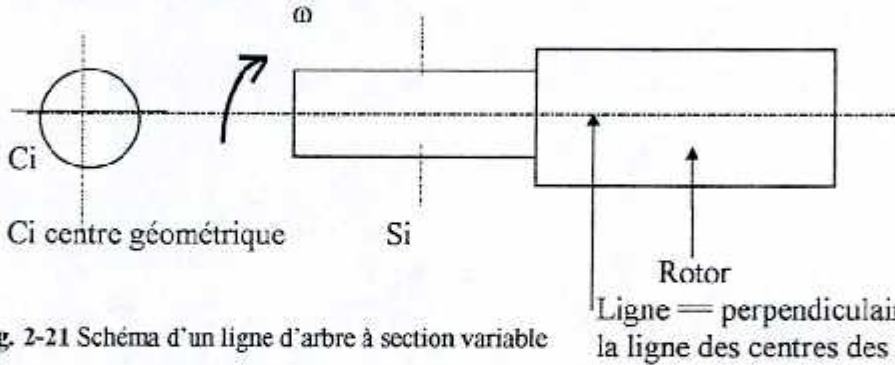


Fig. 2-21 Schéma d'un ligne d'arbre à section variable

Rotor
Ligne = perpendiculaire à la ligne des centres des liaisons

Pour une situation normale et en régime stationnaire ; lorsque les moyennes des grandeurs d'état qui définissent le fonctionnement de la machine tournante, sont constantes, les centres Ci décrivent des trajectoires fermées dites de précession à l'instant (t), la période Tp égale à la période de rotation Tr.

$$Tr = Tp = 2 \pi / \omega$$

Si le comportement est linéaire, ces trajectoires sont des ellipses, des circonférences ou des droites (fig. 2-22).

Les ensembles des centres géométriques Ci aux instants t_0 et $t_0 + dt$ ($dt < Tp$)

Ces ensembles constituent la ligne de rotation qui évoluent dans l'espace selon une loi, généralement, complexe.

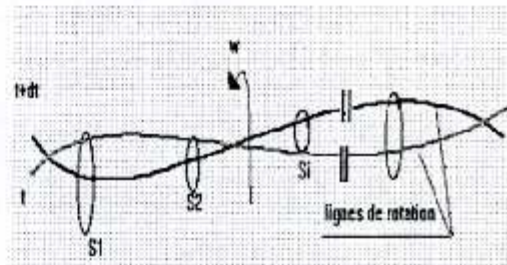


Fig. 2-22 Ligne de rotation avec balourd réparti

Dans ce cas l'évolution dépend, entre autres, des forces tournantes dues aux balourds. On considère, ici, un élément [6,30] (fig. 2-23) de rotor de longueur Δx_i petite et de masse Δm_i à un instant t_0 .

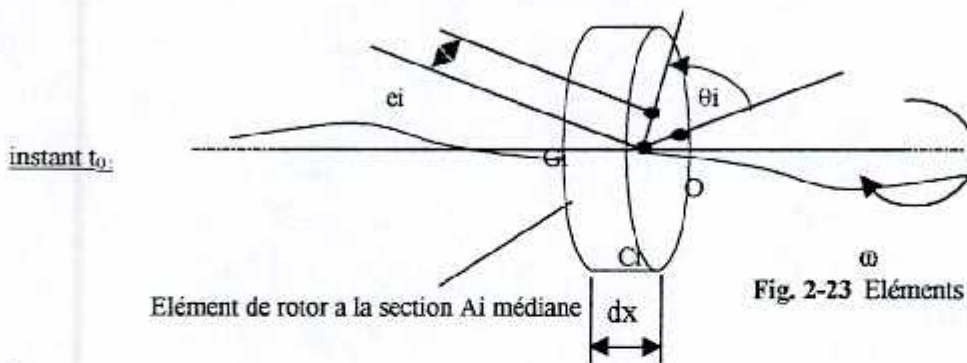


Fig. 2-23 Eléments massique d'un rotor

Avec :

Ci centre géométrique et Gi barycentre massique.

Par rapport à une origine arbitraire CiO_{bi} liée au rotor, nous pouvons définir le vecteur CiGi dit d'excentricité avec [6].

$$\begin{cases} |CiGi| = ei \\ \text{argument } CiGi = \theta_i \end{cases}$$

Le balourd élémentaire est défini par [6]:

$$\vec{b}_i = \Delta m_i \vec{C_i G_i}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i = \Delta m_i e_i \\ \text{argument } b_i = \theta_i \end{array} \right.$$

Lorsque Δx_i tend vers 0, l'ensemble des balourds élémentaires (fig. 2-24) associés à l'ensemble des éléments repérés par les sections S_i définit le Torseur des balourds du rotor[6].

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \vec{b}_i \rightarrow O$$

Avec :

$$\begin{array}{l} \vec{R} \text{ résultante en } O, O_1, \dots \\ \vec{M} \text{ moment résultant en } O \\ \vec{M}_1 \text{ moment résultant en } O_1 \\ \vec{M}_1 = \vec{M} + \vec{OO}_1 \wedge \vec{R} \end{array}$$

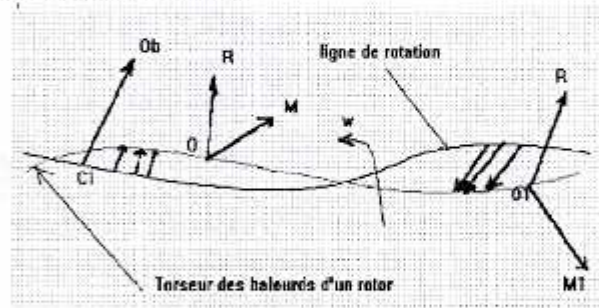


Fig. 2-24 Torseur des balourds d'un rotor

Pour un état déterminé, le Torseur des balourds est fixe par rapport au rotor.

En un point O quelconque, de la ligne de rotation, le Torseur des balourds est réductible à une résultante R et à un couple de moment M ; en un point O1 ses composantes sont [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 = \vec{R} \\ \vec{M}_1 = \vec{M} + \vec{OO}_1 \wedge \vec{R} \end{array} \right.$$

Le Torseur des balourds engendre des forces tournantes [6]:

$$\left\{ \dots \vec{\omega}^2 \vec{b}_i \dots \right\} \longrightarrow \left\{ \vec{\omega}^2 \vec{R}, \vec{\omega}^2 \vec{M} \right\}$$

c) Balourd des lignes d'arbre sous flexion

La déformation élastique des rotors provoque des forces centrifuges causant un balourd[3,61].

$$dF = \omega^2 (y_i + e_i) dm_i$$

Avec :

- y_i : la déflexion de la ligne neutre,
- e_i : l'excentricité au centre de gravité G_i
- dm_i : masse d'un élément de l'arbre,
- $m(x)$: masse linéaire par rapport à l'axe longitudinale x ,
- dF : force vectorielle.

La répartition des balourds b_i étant définie par : $b(x) = e_i dm/dx$

Le Torseur des forces appliquées est :

$$\begin{aligned} F &= \omega^2 \int y(x) m(x) dx + \omega^2 \int u(x) dx \\ M &= \omega^2 \int x y(x) m(x) dx + \omega^2 \int x u(x) dx \end{aligned}$$

Couplage

Il faut noter, ici, que les différents phénomènes, agissant sur le comportement statique et dynamique des arbres, interagissent entre eux. Cette interaction est appelée couplage. Le couplage des phénomènes deux à deux ou plusieurs à la fois, modifie considérablement la réponse «habituelle» du système[3].

La méthode de superposition est, alors, une restriction ; puisqu'elle ignore le couplage, mais reste valable pour certains problèmes et pour certaines conditions.

Les phénomènes physiques influençant le comportement des arbres par couplage peuvent être partagés en trois catégories [3]:

1. Modes de sollicitation : les différents types de modes de sollicitation (cisaillement, flexion, compression, traction, flambage, torsion et l'effet gyroscopique) en se couplant entre eux forment de nouvelles variantes différentes des précédentes ; par exemple le couplage de la compression à la flexion fait comme si la rigidité de l'arbre augmentait (modification virtuelle des propriétés mécaniques), de la même manière que le couplage de l'effet gyroscopique avec la flexion,
2. Environnements et dégradation (vieillessement) : plusieurs de ses aspects influent directement ou à long terme sur le comportement mécanique. On cite : le fluage, la fatigue, l'effet thermique, l'irradiation, etc. Ces facteurs modifient physiquement les propriétés mécaniques de la structure tel que le module de YOUNG,
3. Aspects structurels : la présence de formes modifiant l'uniformité de la structure modifie son comportement. Ces formes se divisent en deux catégories :les formes «régulières» (les rainures, les cannelures, gorges et trous)et les formes irrégulières (les fissures, cavités, interstices, impureté). Dans ces deux cas, on parle de problèmes de singularité. Le premier cas est partiellement résolu par la théorie d'élasticité ; En introduisant l facteur de concentration de contraintes. Dans le deuxième cas une nouvelle théorie a vu le jour c'est la mécanique de la ruptureen introduisant le facteur l'intensité de contraintes.

L'étude du couplage entre phénomènes est complexe et nécessite tout un travail. La modélisation par discrétisation peut résoudre en partie ce problème.

Diverses autres phénomènes

Dans la pratique il existe plusieurs autres défauts : la fatigue par flexion rotative, les défauts de montage, les défauts métallurgiques, les erreurs humaines de manipulation, les accidents, les calamités naturelles... Ces cas ne seront pas développés dans notre étude. On ne se limitera qu'aux problèmes mécaniques déjà cités[3].

2) Arbre Vertical

Les lignes d'arbres placées verticalement sont moins fréquentes dans l'industrie. L'effet du poids sur le comportement dynamique de ce type d'arbre est réduit par l'absorption de ce dernier par la réaction verticale, mais d'autres phénomènes interviennent et créent d'autres formes d'anomalies.

La modélisation de la ligne d'arbre, dans ce cas , est globalement semblable au cas horizontal. On ne s'intéresse qu'aux particularités de ce cas, à savoir la flexion et le flambage .

Flexion de l'arbre (cas vertical)

a) Principe de modélisation

balourd simple. S'il y a un excès de masse (m) dans une position excentrique par rapport à sa position idéale ou s'il existe une excentricité (e) de l'arbre par rapport à l'axe de rotation, cela provoque un comportement dynamique d'une force résultante à la fréquence correspondante à la vitesse de rotation. C'est le modèle de Jeffcott [29] (fig. 2 -25).

b) Mise en équations et résolution :

Avec :

- w : angle de rotation $w = \omega.t$
- ω : vitesse de rotation $\omega = 2.\pi .f_r$
- e : Excentricité par rapport au centre géométrique
- m, k, c : masse (arbre + disque), rigidité et amortissement de l'arbre (ou axe)

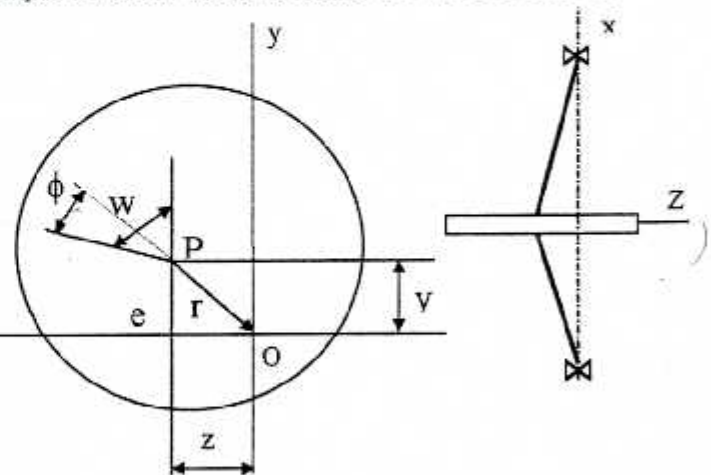


Fig. 2-25 Position générale d'un disque sur un rotor

L'équation de mouvement du rotor peut être écrite comme suite [29]:

$$\begin{cases} \frac{m}{dt^2} (y + e \cos wt) = \dot{k}y - c \dot{y} \\ \frac{m}{dt^2} (z + e \sin wt) = \dot{k}z - c \dot{z} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = m e w^2 \cos wt \\ m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = m e w^2 \sin wt \end{cases}$$

ou encore :

$$m \ddot{r} + c \dot{r} + k r = m \cdot e \cdot w^2 \cdot e^{j\omega t}$$

D'après [29] la solution de ce système forcé :

$$r = r_0 e^{wt} + r_0 e^{\lambda t}$$

Avec :

λ : fréquence propre du système

c) Manifestations vibratoires :

Dans ce cas de problème dynamique, la réponse générale est dominante en cas où ($w/\lambda > 1$), on a un système vibrant avec la fréquence excitatrice c-à-d la fréquence de rotation ω . Donc un rapport de fréquence égale à un (1).

Flambage

Le flambage [37] (fig. II-26) est un phénomène touchant principalement les lignes d'arbres verticales. Il comprend un couplage entre compression et flexion. Sauf qu'ici, on remplace [37] le moment de flexion par la force axiale et la distance d'application de cette force (l'excentricité (e) plus la flèche (δ)). On aura :

On remplace le moment fléchissant M ($M = -P(\delta + e - y)$) issue des équations de flexion (cas horizontal), on obtient pour la cas statique:

$$y = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pl}$$

Avec

$$\delta = \frac{Pel^2}{2EI}$$

Le calcul dynamique est semblable au cas de flexion (cas horizontal) avec un changement de variable adéquat.

L'arbre est soumis à des forces de compression exprimées par les forces externes et le poids l'arbre, tels que:

$$N(x) = P + \{m(x) = \rho \cdot S(x) \cdot x\} \cdot g$$

Avec :

- Ro : masse volumique du matériau,
- A(x) : section d'arbre à la position x,
- x : abscisse,
- m(x) : masse linéaire,
- g : accélération terrestre.

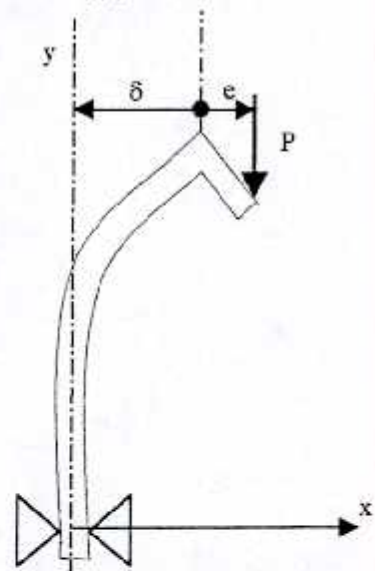


Fig. 2-26 Phénomène de flambage sur un arbre vertical

2.2.1.3 Complément d'étude

Soit les phénomènes suivants :

a) Les fréquences propres directes et rétrogrades et les vitesses critiques : le calcul des vitesses critiques, pour l'exemple (fig. 2-27) d'un arbre vertical avec une masse en porte à faux, donne le résultat graphique suivant[3]:

Les fréquences propres évoluent en fonction des vitesses de rotation, les points A et B représentent les fréquences du 1^{er} et 2^{ème} mode pour une vitesse de rotation nulle. Par la suite, il peut arriver, comme c'est le cas ici pour le premier mode, l'éclatement des fréquences propres en deux : directe (courbe C) et rétrograde (courbe D). Cet éclatement est dû aux couplages gyroscopiques. Le mouvement est direct quand l'orbite du centre de gravité c.d.g. à le même sens que celui de la rotation. Il est dit rétrograde dans le sens contraire des fréquences critiques[3].

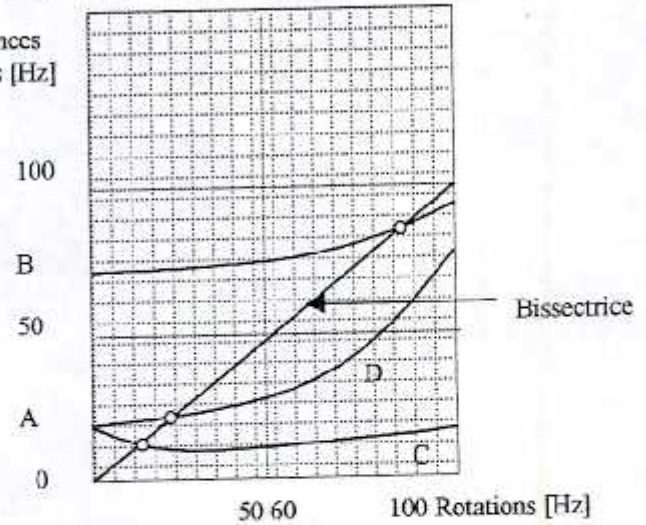


Fig. 2-27 Fréquences propres directes et rétrograde

La détermination des fréquences critiques est obtenue par l'intersection de la bissectrice avec les courbes du 1er et 2ème mode. On voit qu'il y a une différence entre les fréquences propres et les vitesses critiques[3].

b) Les méthodes «simplifiée» et «complètes» et le facteur de correction[9] : quand on procède à l'étude des mouvements de flexion des poutres droites uniformes, on observe que les sections droites tournent et se déforiment. Si on néglige les effets de la rotation et de la déformation des sections, souvent appelés «effets secondaires», les sections droites restent perpendiculaires à l'axe de rotation[3].

La théorie qui prend en compte la rotation et la déformation des sections est appelée «théorie complète» tandis que celle qui néglige ces effets est appelée «théorie simplifiée». Le calcul avec les équations simplifiées est généralement suffisant mais pour certains cas une correction des résultats théoriques doit être opérée[3].

En effet, les résultats expérimentaux semblent être la référence, l'expérience[3] a montré que l'écart entre les résultats théoriques «exactes» et expérimentaux sont faibles d'ordre 1%. Les erreurs communément commises sont dues à une mauvaise appréciation des conditions aux limites. Par ailleurs, les coefficients[3] établis dans les calculs théoriques (constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites) sont corrigés en tenant compte des masses additionnelles et de la forme de la section [3]:

- Le rapport m_0/m , (m_0) masse à l'extrémité et (m) la masse de poutre,
- Le rapport L/D , L longueur et D diamètre d'une poutre à section circulaire pleine,
- Le rapport L/e , L longueur et e épaisseur d'une poutre à section parallépipède,
- Le rapport $L/(D_i^2 + D_e^2)$, L longueur, D_i et D_e diamètres intérieur et extérieur d'une poutre creuse.

Ces corrections se trouvent dans des tableaux spécialisés et peuvent être obtenues par calcul avec les méthodes complètes[3].

c) L'aspect isotropique ou l'anisotropique du matériau,

d) La liaison de l'arbre avec ses appuis fait de cet organe dépendant mécaniquement du reste (exp. La rigidité de l'arbre dépend de la rigidité des paliers, etc.).

2.2.2 Modélisation d'un roulement à billes

2.2.2.1 Généralités

Problématique

Les roulements, vu les défauts qu'ils comportent, sont des sources de vibrations sous forme de bruits en spectres de raies ou spectre de bande dans le domaine des hautes fréquences.

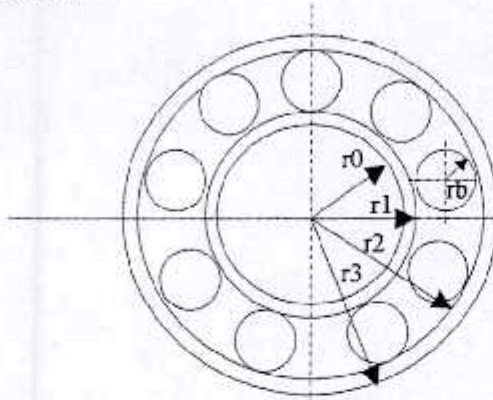
Il existe dans la littérature deux grandes approches. La première consiste à modéliser le roulement comme structure à rigidité et la deuxième consiste à modéliser l'aspect fréquentiel des vibrations émises par les roulements. La modélisation de l'aspect fréquentiel, en spectres de raies ou en spectres de bande, est donnée par [3, 7] Plusieurs aspects du comportement des roulements ainsi que les anomalies qui leur sont liés sont largement développés dans le chapitre III.

2.2.2.2 Modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des roulements

1) Modélisation fréquentielle

a) Les spectres de raies:

Les fréquences des raies sont fonction de la géométrie du roulement (fig. 2-28) et de la vitesse de rotation[3].



- r_1 : rayon du chemin de roulement interne,
- r_2 : rayon du chemin de roulement externe,
- r_B : rayon des éléments tournants,
- r_T : rayon du train d'éléments roulants,
- n : nombre des éléments tournants,
- N_R : vitesse de la bague interne (arbre),
- N_T : vitesse du train d'éléments roulant,
- N_B : vitesse rotationnelle des éléments,
- f_R : fréquence de rotation fondamentale,
- f_T : fréquence fondamentale rotationnelle du train,
- f_B : fréquence rotationnelle fondamentale des éléments,
- f_1 : fréquence due au chemin de roulement interne,
- f_2 : fréquence due au chemin de roulement externe.

Fig. 2-28 Schéma d'un roulement

Si le jeu de fonctionnement est négligeable, on a :

$$r_T = r_1 + r_B$$

Pour N_T et N_B vitesses de rotation des éléments et des billes exprimées par :

$$N_T = N_R \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

$$N_B = \frac{r_2}{r_B} N_T$$

Les cinq fréquences discrètes prédominantes sont :

$$f_R = \frac{N_R}{60}$$

$$f_T = \frac{N_T}{60}$$

$$f_B = \frac{N_B}{60}$$

$$f_1 = \frac{(N_R - N_T)}{60}$$

$$f_2 = \frac{N_T}{60}$$

Cette raie est induite par un désalignement ou un excentrement :

Cette raie est induite à l'irrégularité d'un élément roulant dans la cage :

Cette raie est induite par les défauts sur les pistes interne ou externe ou à l'écaillage. Le développement du nombre des écaillages influe sur le développement du nombre des harmoniques de cette raie

Cette raie est induite par une irrégularité sur le chemin interne. L'amplitude des harmoniques augmente avec l'augmentation de ces points défectueux.

Cette raie est induite par les irrégularités et les défauts du chemin de roulement externe.

Contrairement aux défauts sur les billes, les défauts sur les pistes engendrent des excitations indépendantes de l'orientation des billes. Les fréquences f_1 et f_2 sont alors fixes.

Une autre forme de formulation existe [7], introduisant l'angle de contact (fig. 2.29):

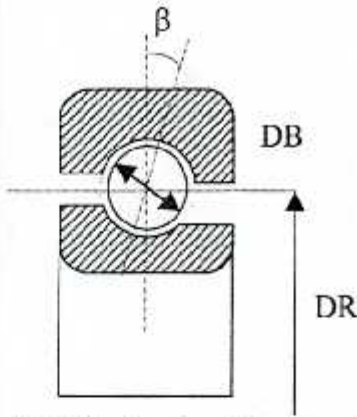


Fig. 2-29 Schéma d'une bille de roulement

f_r : fréquence de rotation,
 f_1 : fréquence du défaut sur la piste externe,
 f_2 : fréquence du défaut sur la piste interne,
 f_B : fréquence du défaut sur la bille,
 f_c : fréquence sur la cage.

DB : diamètre de la bille
 DR : diamètre moyen du roulement.

Les Fréquences d'identification :

$$f_2 = \frac{n}{2} f_r \left(1 - \frac{DB}{DR} \cos \beta\right)$$

$$f_1 = \frac{n}{2} f_r \left(1 + \frac{DB}{DR} \cos \beta\right)$$

$$f_B = \frac{DB}{DR} f_r \left[1 - \left(\frac{DB}{DR} \cos \beta\right)^2\right]$$

$$f_c = \frac{1}{2} f_r \left(1 - \frac{DB}{DR} \cos \beta\right)$$

b) Les spectres de bande

Dans l'étude précédente, on a vu que l'évolution des détériorations entraîne le passage progressif du spectre de raies au spectre de bande ; par le processus suivant : le développement du défaut fait amplifier l'amplitude et l'augmentation du nombre des défauts fait accroître le nombre des harmoniques[3].



Fig. 2-30 Le passage d'une bille sur une défautuosité provoquant un choc

Cette méthode introduit la théorie du choc appliquée aux roulements. Soit l'exemple d'une bille roulant sans glisser le long de la piste extérieure (fig. 2.30) et possédant un trou de la largeur ϵ . Lorsqu'elle se trouve au droit du trou, il résulte une discontinuité des efforts soit un choc. Si la vitesse linéaire de la bille est v , la durée τ du choc est alors[3]:

$$\tau = (\epsilon / v)$$

La réponse de la structure à ce choc est une oscillation amortie. Sa fréquence est celle des modes excités. Les fréquences prédominantes sont dues aux défauts des cages. Elles sont dans la gamme [1 kHz à 30 kHz]. La forme de l'oscillation amortie dépend de l'amortissement est principalement induite par les forces de cisaillement au droit du film d'huile. Ces impulsions, généralement s'évanouissent, mais vu le nombre important de ces dernières, vui qu'elles n'ont pas le temps pour être absorbées par la structure. On a alors une représentation en bandes[3]. La rugosité de la surface et les défauts de montage provoquent des bruits au début du service[3].

2) Modélisation de la rigidité

La modélisation d'un roulement n'est pas chose facile, vu la difficulté d'approcher de son comportement complexe. Plusieurs auteurs (J. Perret Liaudet DTS/ECL[21]) ont étudié certains aspects de son comportent, et ont considéré que le roulement a la caractéristique d'un amortissement faible, comme un transmetteur de vibrations par voie « solidoienne ». (Harris 1980 et Eschmann 1985[21]) l'ont considéré comme source de non-linéarité, étant donné ses caractéristiques élasto-dynamiques.(Krempst 1991[21]) a associé le jeu et les contacts Hertiens entre ses éléments roulants et les chemins de roulement comme cause du problème de saut.

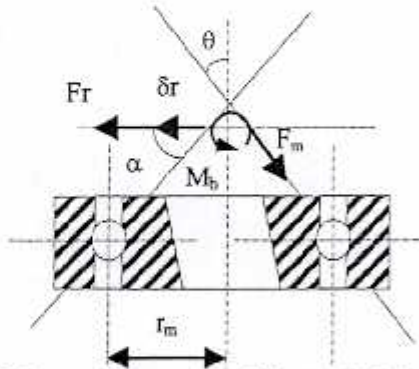
Etant donné que le calcul dynamique se base sur la connaissance de la raideur, le calcul de cette propriété pour les roulements est très ardu, plusieurs auteurs [21] ont proposé des méthodes d'estimation de cette propriété. Leur calcul se base sur une linéarisation des termes de raideur autour d'une position d'équilibre correspondant au chargement statique ou quasi-statique d'un roulement.

Une première approche, simpliste, consiste à considérer une raideur radiale, généralement, anisotropique et une raideur axiale (modèle à paramètres concentrés [21]). Ces raideurs sont évaluées pour des cas de charges distinctes ; ce qui signifie un découplage du phénomène de flexion de celui de traction/compression, de plus l'arbre est supposé libre en rotation selon les plans de flexion. Or, cette approche est limitée pour les cas des

roulements à rouleaux et les butés. Plusieurs travaux [21] avec cette approche simplifiée ont montré qu'elle ne permet pas de prendre en compte de manière fidèle les mécanismes de transfert vibratoire.

a) Modélisation de déplacements[21]:

Aussi depuis les années 1980, plusieurs auteurs ont proposé d'améliorer ces modèles en prenant en compte les couplages entre les différents mouvements relatifs des bagues intérieure et extérieure. Dans ce sens, Rajab (1982) (fig. 2-31) a proposé d'introduire les couplages.



- F_m : force maximale,
- F_r : force radiale,
- M_b : Moment,
- θ : Déflexion angulaire,
- δ_r : Déflexion radiale,
- r_m : pitch radius

Fig. 2-31 Schéma des forces, modèle de RAJAB (1982)

Soit un roulement dont la bague intérieure est chargée par une force F_r et un moment M_b avec la bague extérieure fixe. Le calcul de la raideur d'un tel système d'équation non-linéaire en équilibre statique donne.

A partir des solutions des déplacements radiales δ_r et rotation θ , on aura:

$$\begin{aligned} K_{rr} &= Fr / \delta_r & K_{r\theta} &= Fr / \theta \\ K_{\theta r} &= Mb / \delta_r & K_{\theta\theta} &= Mb / \theta \end{aligned}$$

La raideur est devenue une matrice de raideur $[K]$ d'ordre (02). Cette démarche a été validée par rapport aux modèles simplifiés, Lim (1990), et de manière expérimentale, par De Mul (1989).

b) Méthode des éléments finis [21]:

Le principal intérêt de ces modélisations réside dans le fait qu'elles peuvent s'insérer de manière simple, (introduction de matrices généralisées) dans des modèles aussi sophistiqués que ceux introduits par la méthode des éléments finis. En fonction des dimensions des cratères, on peut considérer un ensemble de nœuds répartis sur le pourtour de la bague extérieure Lim (1990, 1991) (fig. 2-32) ou un seul point.

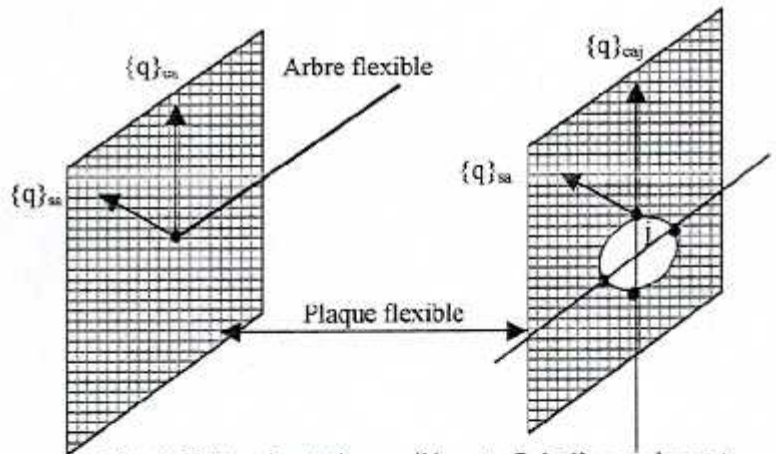


Fig. 2-32 Représentation en éléments finis d'un roulement

Parmi les problèmes, le couplage entre bague intérieure et extérieure Lim (1990)

c) Méthode des forces généralisés[21]:

La tendance actuelle semble s'orienter vers une prise en compte des défauts géométriques dans l'élaboration de modèles qui demeurent toutefois linéaires, exemple le modèle de Yhland (1992).

Depuis 1989, il apparut des modèles généraux, De Mull (1989), Lim (1990, 1991), permettant de prendre en compte les couplages entre l'ensemble des déplacements généralisés de la bague intérieure dans son mouvement par rapport à la bague extérieure.

Dans ce cas, en linéarisant l'équation matricielle reliant les efforts aux déplacements, on obtient :

$$[K] = [\partial\{F\} / \partial\{x\}^T]$$

Avec :

- $\{F\}$: chargement quelconque sur la bague intérieure (supposée rigide),
- $\{x\}$: déplacements généralisés de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure,
- $[K]$: matrice de rigidité carrée et symétrique d'ordre (05).

2.2.3 Modélisation du palier lisse

2.2.3.1 Généralités

Problématique

Généralement, la modélisation des paliers lisses passe par la résolution des équations Reynolds. Plusieurs auteurs [29] ont travaillé sur ce point et ont introduit d'autres phénomènes.

A l'arrêt, la génératrice inférieure de l'arbre est en contact avec la génératrice inférieure du coussinet lisse. Dès le démarrage, des forces de viscosité prennent naissance. Un film d'huile se forme. Les phénomènes vibratoires sont soit liés à la raideur du film d'huile, soit à l'angle d'attitude, soit à l'instabilité tourbillonnaire[3].

2.2.3.2 Modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des paliers lisses

On présente, ici, une synthèse des travaux de Hori (1959), Abdul-Wahab (1982), Lund (1990) et Frêne et col (1990) pour le calcul de la raideur du film d'huile [29] (fig. 2-33).

Le comportement dynamique d'un film d'huile est régi par la loi [29] suivante: W

$$F_p + W = 0$$

- F_p : Réaction engendrée par le lubrifiant
- W : autres charges

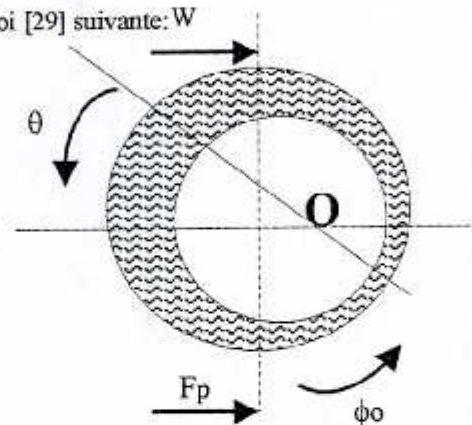


Fig. 2-33 Schéma d'un palier lisse soumis à des forces

Le système d'équation différentielle s'écrit [29]:

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= (\partial F_x / \partial x) \cdot \Delta x + (\partial F_x / \partial y) \cdot \Delta y + (\partial F_x / \partial \dot{x}) \cdot \Delta \dot{x} + (\partial F_x / \partial \dot{y}) \cdot \Delta \dot{y} + \dots \\ \Delta F_y &= (\partial F_y / \partial x) \cdot \Delta x + (\partial F_y / \partial y) \cdot \Delta y + (\partial F_y / \partial \dot{x}) \cdot \Delta \dot{x} + (\partial F_y / \partial \dot{y}) \cdot \Delta \dot{y} + \dots \end{aligned}$$

On arrive au système matricielle [29]:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix}$$

Les termes K et C sont dépendantes de la vitesse de rotation[29] :

$$[K] = \begin{pmatrix} (\partial F_x / \partial x) & (\partial F_x / \partial y) \\ (\partial F_y / \partial x) & (\partial F_y / \partial y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [C] = \begin{pmatrix} (\partial F_x / \partial \dot{x}) & (\partial F_x / \partial \dot{y}) \\ (\partial F_y / \partial \dot{x}) & (\partial F_y / \partial \dot{y}) \end{pmatrix}$$

On reviendra, en détail, sur le calcul de ces paramètres au chapitre III.

Remarques : FRENE et COL (1990) [29] ont démontré expérimentalement que K est correct mais pas C, BONNEAU (1988) a réalisé une étude analytique de linéarisation qui a donné des résultats satisfaisants pour les paliers infiniment court[29].

2.2.4 Modélisation de l'engrenage

2.2.4.1 Généralités

Problématique

Un problème ardu pour les théoriciens est la modélisation des engrenages. Souvent, une dent d'engrenage n'est sollicitée que pour une certaine période par contact du pignon menant avec la roue menée[3].

La modélisation des roues d'engrenages est basée sur la modélisation de sa raideur. Or, ici, la raideur dépend de plusieurs facteurs influants. Parmi ces facteurs, les caractéristiques géométriques et mécaniques des engrenages, leur positionnement, la qualité et l'épaisseur d'huile[3].

La théorie de calcul se base sur la résolution des équations de RYNOLDS. Or, les résultats obtenus sont incompatibles avec la rugosité de surface. La méthode de ERTEL & GRUBIN (1945) [3] introduit la théorie de la lubrification élasto-hydrodynamique L.E.H. Ils ont ajouté deux paramètres à la théorie de base (RYNOLDS) : la déformation sous charge des surfaces et l'augmentation de la viscosité en fonction de la pression[3].

2.2.4.2 Modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des engrenages

La modélisation des engrenages dépend de deux facteurs importants, le film d'huile et l'engrenage.

1) Calcul de la raideur du film d'huile

La connaissance de l'épaisseur d'huile nous permet de calculer et d'introduire la rigidité du film d'huile en complément de la rigidité des dents engrenées. Le calcul de l'épaisseur h selon la méthode LEH [3] est :

$$h = [G LP N \left(\frac{W}{l} \right)^{-0.148}]^{0.74}$$

Avec :

G : paramètres dépendant des données géométriques élastiques du matériau,

LP : paramètre de lubrification de l'huile,

N : vitesse de rotation,

W/l : charge linéique, l : étant la longueur de contact.

Les valeurs de h sont souvent corrigées pour tenir compte de la rugosité, des déformations sous charge, des sous-alimentations en huile.

2) Calcul de la raideur d'engrenage

La modélisation des engrenages en régime dynamique présente plusieurs aspect, dont [3]:

- La modélisation des engrenages,
- Liaisons entre engrenages,
- Erreur de transmission,
- L'écart de forme.

a) Modélisation des engrenages[20,21,22,23]

Pour des raisons de simplicité, les travaux de modélisation du comportement dynamique des engrenages se sont, dès l'origine, orientés vers des représentations à paramètres concentrés. Une première modélisation consiste à assimiler les engrenages à des cylindres rigides liés par une raideur d'engrènement, Tuplin (1950,1953,1958), Zeman (1957), Strauch (1953) (fig. II-34).

Cette représentation est plus ou moins précise de la déformée de contact, flexion de dent, déformée de jante et sous jante. Par la suite des travaux de SEIREG (1966), HAMAD et SEIREG (1979, 1980) ont démontré la carence de ce modèle qui néglige le mouvement de flexion et son couplage avec la torsion. HAGIWARA, IDA et KIKUCHI (1981) ont confirmé expérimentalement ces tendances.

Parmi les autres limites du modèle à paramètres concentrés, on cite :

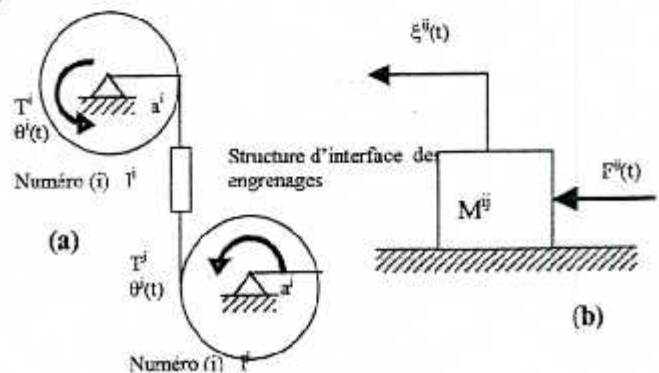


Fig. 2-34 Modèle torsionnel de base

- Limites d'application aux roues à voiles minces (aéronautique). Des dents sont inactives pour des fréquences propres considérées,
- Limites d'application aux engrenages larges, l'angle de torsion varie avec la largeur,

Parmi les autres modèles à paramètres concentrés on cite celui de KÜÇÜKAY (1984) et le modèle planétaire de BOYD et PIKE (1985) (fig. II-35-36).

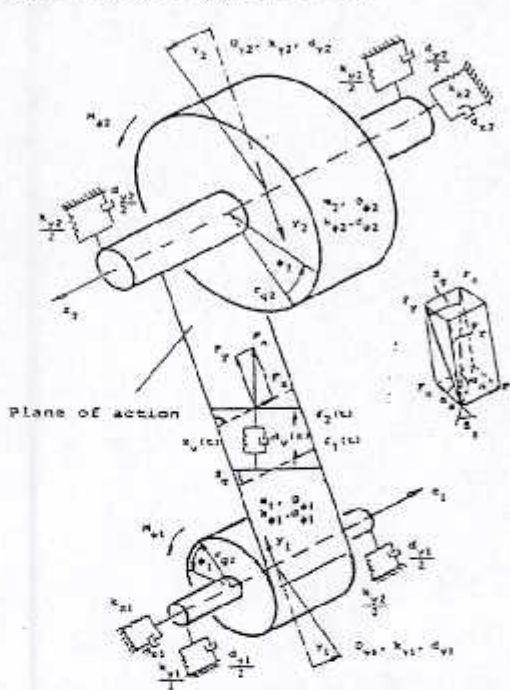


Fig. 2- 35 Modèles à paramètres concentrés on cite celui de KÜÇÜKAY (1984)

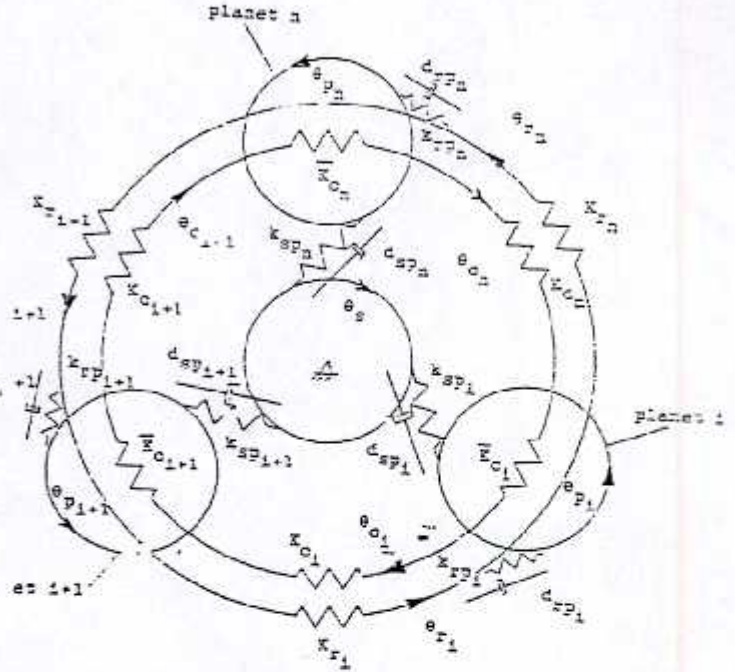


Fig. 2-36 Modèle masse-ressort d'un train planétaire de BOYD et PIKE (1985)

b) Liaisons entre engrenages[20,21,22,23]

Problématique

En général, en fonction du problème, il y a considération ou non du couplage des engrènements des arbres. Dans cette approche il y a deux tendances : La première ignore toute raideur d'engrènement Rieger (1969), Guilhen (1988), on parle la dynamique des rotors. La deuxième considère la raideur d'engrènement. Selon la seconde tendance, des hypothèses doivent être émise :

Hypothèses cinématique

- Les conditions de contact entre flancs actifs sont contrôlées par une cinématique infinie (corps rigide) Velex (1988),
- On exclut tout contact entre profils non conjugués,
- L'aire de contact et sa variation dans le temps sont connues et sont indépendantes des efforts de transmission.

Hypothèses de comportement des matériaux

- La liaison entre roues dentées est élastique et linéaire sur les plans d'actions
- La raideur de ce dernier est considérée discontinue, plusieurs modèles[3] existent pour représenter et approcher le plus le comportement réel.

La raideur d'engrènement résulte ainsi de la mise en série de raideurs associées au contact, à la déformée globale des dents (flexion et pivotement sur la jante), de la sous jante et du voile. Pour le cas des engrenages droits, une analyse bidimensionnelle est possible, il y a la considération d'une déformée globale et de l'écrasement localisé en zone de contact (théorie de Hertz 1882). Pour des engrenages de formes complexes (hélicoïdales, coniques,...) où la présence du problème de désalignement, nécessite une modélisation plus sophistiquée. Tobe et Inoue (1977) appliquent la théorie des plaques. Sainsot (1989) a introduit puis appliqué la méthode des éléments finis. D'autres techniques existent comme : les prismes finis, les équations intégrales, les différences finis et les transformations conformes.

Variation de la raideur

La variation de la raideur a évolué, depuis l'élaboration des premiers modèles. Au début, la variation de la raideur a été estimée négligeable et par conséquent, elle a été considérée constante. Le modèle de Tuplin (1950, 1953, 1957) (fig. 2-37) a introduit une raideur d'engrènement constante et modélise l'excitation extérieure due aux erreurs de profils par des coins de géométrie différentes

Cette approche de Velex (1988) a montré ses limites. Une autre modélisation, de plusieurs auteurs, considère la raideur d'engrènement variable en fonction du temps. Cette représentation est destinée à simuler les variations de longueur de contact au cours du mouvement. Ceci conduit à des équations du mouvement connues sous le nom d'équations de Mathieu-Hill. Ces dernières n'admettent pas de solutions analytiques et dans certaines gammes de fréquences présentent des risques de mouvement instables.

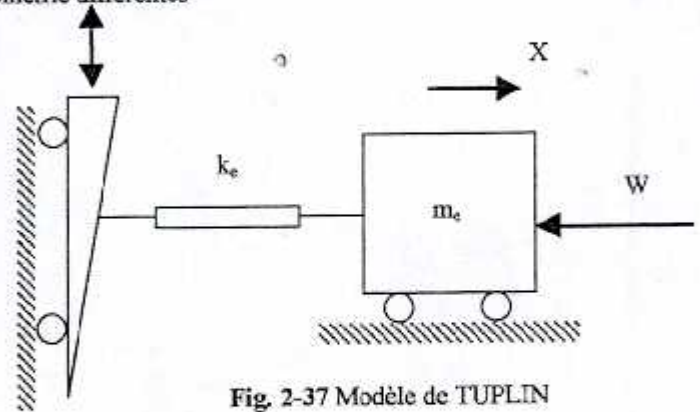


Fig. 2-37 Modèle de TUPLIN

La forme normale des solutions de ces équations proposé par Floquet (1883) est :

$$X = e^{\gamma} g(t)$$

Avec :

$g(t)$: fonction périodique,

γ : exposant caractéristique conditionnant la stabilité de la solution.

L'engrènement est une liaison dissipative

Si les fondements théoriques associés aux calculs de déformées des dentures et aux éléments élastiques apparaissent établis, la caractérisation des pertes d'énergie dans l'engrènement pose des problèmes [3].

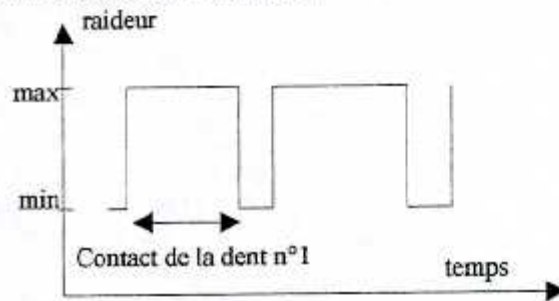


Fig. 2-38 Variation théorique et simple de la raideur

L'influence des forces de frottements sur l'équilibre dynamique des engrenages est introduite par l'intermédiaire de coefficients de frottement, ida et Col (1985), Lin et Yang (1980), Boyd et Pike (1985). La considération de ces coefficients est relativement imprécise. Les auteurs utilise un ou plusieurs amortisseurs visqueux linéaires. Harpersheidt (1984) trouve expérimentalement le facteur d'amortissement tel que :

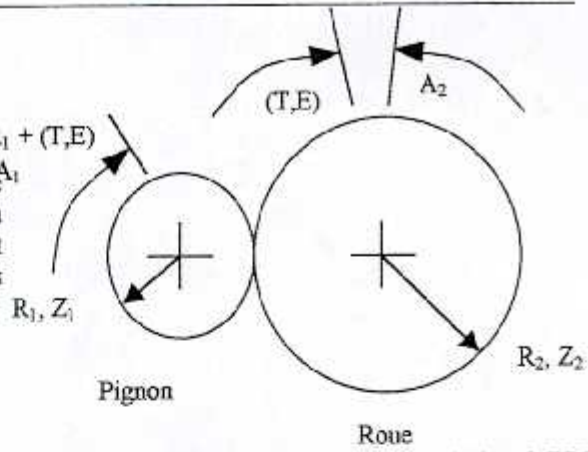
$$\eta = 0,245 e^{(0,000434 \omega)} + 0,11$$

Des travaux ont montré des variations importantes entre les valeurs trouvées dans la littérature. La mesure précise de ce facteur semble être un problème sérieux dans le calcul dynamique des machines tournantes.

c) Erreur de transmission [20,21,22,23]

L'erreur de transmission définie par Haris (1958) représente l'écart de position des engrenages en fonctionnement par rapport à un état de référence théorique d'engrenages indéformables. Elle est fréquemment rapportée sur le plan d'action théorique. Munro (1989) (fig. 2-39) montre les différentes valeurs associées

Position théorique : $A_2 = A_1 Z_1/Z_2$
 Position actuelle : $A_2 + (T,E)/R_2$
 Position actuel en termes linéaires : $A_2 R_2 + (T,E) = A_1 R_1 + (T,E)$



Aujourd'hui, il est admis que l'erreur de transmission constitue une image intéressante du comportement dynamique de trains d'engrenages et qu'elle peut être reliée au niveau de bruit relevé sur ces appareils, Favre et Col (1990).

Une première approximation consiste à considérer l'erreur de transmission quasi-statique sous charge comme une source d'excitation du système d'engrenage.

Fig. 2-39 Définition de l'erreur de transmission (MUNRO)

L'erreur de transmission peut être mesurée, Smith et Echeverria-Villagomez (1991) et peut être utilisée dans un contexte industriel. Elle présente, alors, un intérêt, certain pour une première approche, mais elle masque un certain nombre de caractéristiques d'engrènement (les flexibilité des arbres, paliers et carters,...) Blankenship et Singh (1992). Des remarques sur son utilisation sont nécessaires :

1. Les erreurs de transmission quasi-statique ne sont pas les premières sources d'excitation mais elles sont une conséquence des conditions de contact instantanées entre flancs actifs,
2. La transition entre statique et dynamique peut s'accompagner de singularités,
3. L'erreur de transmission n'est pas unique,
4. L'utilisation de l'erreur de transmission dans les cas de trains multiétages, trains planétaires, satellite couronne masque d'autres phénomènes (vitesses super critique), Velex (1988) et Saada (1992).
5. La notion d'erreur de transmission combine des déplacements de corps rigides et ceux élastiques.

d) L'écart de forme [20,21,22,23]

La modélisation sans écarts de formes suppose des profils de dents parfaits, contact entre dents sans changement des plans d'actions. Cette simplification permet de faire une première approche linéaire

Modèle de STRAUCH 1983, NAKADA et KTAGWA 1956

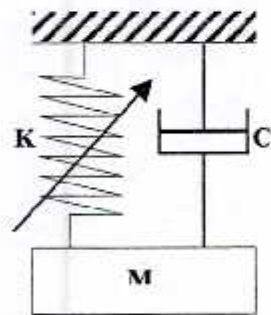


Fig. 2-40 Modèle de STRAUCH et all

Ce système est régie par [20,21,22,23]:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K(t)x = F_0$$

ou

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K_0 [1 + \alpha \phi(n\omega_0 t)] x = F_0$$

- K_0 : raideur moyenne,
- α : variation relative de la raideur d'engrènement,
- ϕ : fonction de forme représentative des variations de raideur,
- $n\omega_0$: $n^{\text{ème}}$ harmonique de la pulsation ω_0 ,
- F_0 : charge transmise,
- m : masse équivalente,
- x : écrasement élastique entre dentures (erreur de transmission dans ce cas)

Une solution particulière et stable sous forme de développement asymptotique est sous la forme :

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots$$

Cette solution est reportée à l'équation principale avec une égalisation des termes du mêmes ordre. L'introduction de l'écart de forme et l'analyse de leurs influences sur le comportement dynamique de transmissions mécaniques demeurent largement du domaine de la recherche.

Certaines caractéristiques de la réponse dynamique de la denture avec écart de forme peuvent être déduites d'une analyse comparable à celle pour des profils parfaits :

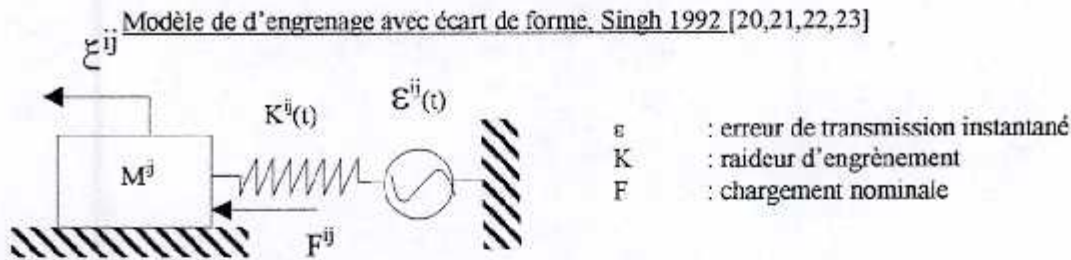


Fig. 2-41 Schéma d'un modèle d'engrenage avec introduction de l'effet de l'erreur de transmission

Remarque : Plusieurs types de ce modèle existent, on n'a représenté que celui-ci.
 L'équation différentielle régissant ce système est [20,21,22,23]:

$$M \cdot \ddot{y} + C \cdot \dot{y} + K_0 [1 + \alpha \phi(n\omega_0 t)] \cdot y = F_0 + F(j\omega_0 t)$$

La solution de ce système non linéaire passe par l'introduction de la contribution δx supplémentaire due à $F(j\omega_0 t)$ (voir méthodes de résolution des systèmes non linéaires).

$$y = x + \delta x$$

2.2.5 Modélisation d'un Accouplement (Cardan)

2.2.5.1 Généralités

Problématique

La résolution des problèmes mécaniques pour les joints d'accouplements simples tels que les joints élastiques et accouplements rigides ne présente pas une très grande difficulté. Le problème se pose pour le cas des joints complexes et le cas où il y a association de joints (exemple le cardan) avec un arbre intermédiaire.

Le joint est, généralement, modélisé par une raideur K_j , calculée sur la base de l'équilibre statique[53].

2.2.5.2 Modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des accouplements

La modélisation du cardan, passe par le calcul des efforts mécaniques sollicitant et se fait en se basant sur le comportement cinématique [53] (fig. 2-42) (voir détails au chapitre II-1.4) de ce dernier.

Rappel

1) Comportement cinématique

Sachant que [53]:

$$\phi = \theta_1 - \theta_2$$

et

$$\text{tg } \theta_2 = \text{tg } \theta_1 \cdot \cos(a)$$

et

de même $\text{tg } \phi = \frac{\text{tg } \theta_1 (\cos(a) - 1)}{1 + \text{tg}^2 \theta_1 \cos(a)}$
 $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2(a)}{1 + \text{tg}^2 \theta_1 \cos(a)}$

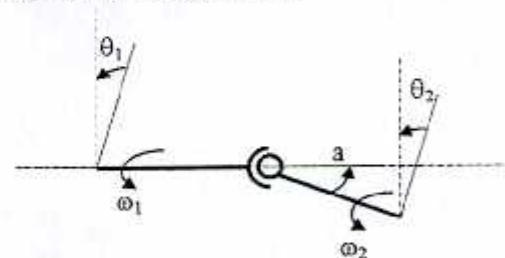


Fig. 2-42 Comportement cinématique

Ce rapport est maximal pour $\theta_1 = 90^\circ/270^\circ$ et minimal pour $\theta_1 = 0^\circ/180^\circ$.
 Le coefficient de variation dans le cycle est défini par [53]:

$$U = \frac{(\omega_2)_{\max} - (\omega_2)_{\min}}{\omega_1}$$

2) Force axiale

La force axiale est estimée égale à [53]:

$$F = \frac{T\mu}{R \cos(\alpha)}$$

Avec :

- T : moment de torsion,
- μ : coefficient de frottement,
- α : angle de désalignement,
- R : rayon

3) Force radiale

Avec[53] :

$$A = T \frac{\cos a_1 E}{L G} (tg a_1 \pm tg a_2)$$

$$B = T \frac{\cos a_1 (E + G)}{L G} (tg a_1 \pm tg a_2)$$

$$C = T \frac{\cos a_1 (F + H)}{L H} (tg a_1 \pm tg a_2)$$

$$D = T \frac{\cos a_1 F}{L H} (tg a_1 \pm tg a_2)$$

$$A_1 = B_1 = T \frac{tg a_1}{G}$$

$$C_1 = D_1 = T \frac{\sin a_2}{H \cos a_1}$$

Le signe (+/-) dépendra du type de configuration Z ou W [53] (fig. 2-44).

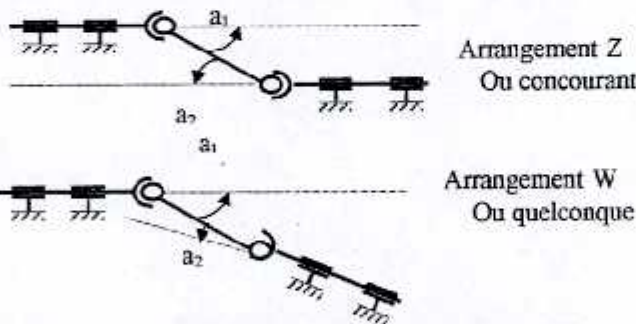


Fig. 2-44 Arrangement Z & W

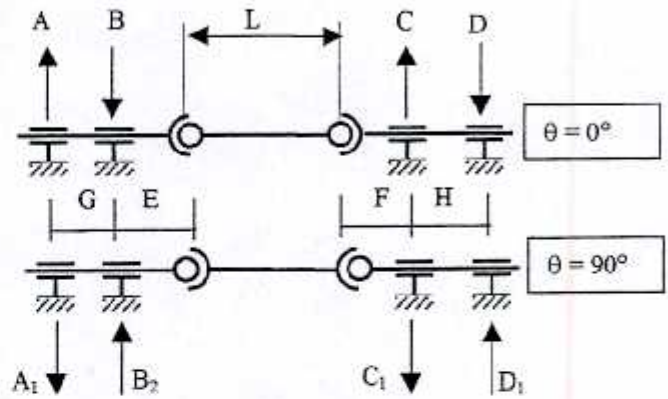


Fig. 2-43 Forces radiale

4) Evolution de (ω_1/ω_2) en fonction de l'angle a [53]

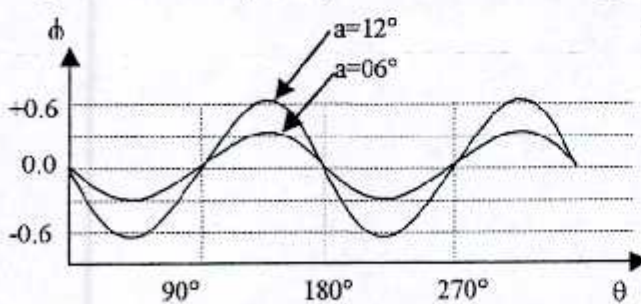


Fig. 2-45 Evolution de l'erreur de transmission avec l'angle de rotation

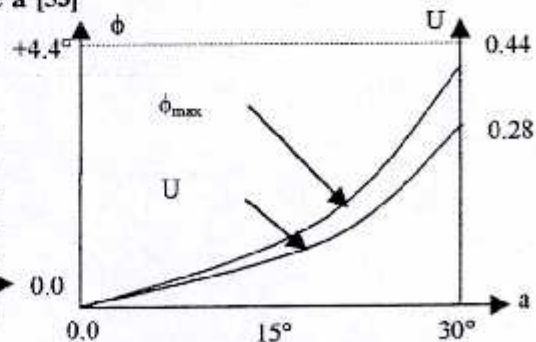


Fig. 2-46 Evolution de ϕ et du coefficient U en fonction de l'angle de désalignement

Les principaux phénomènes sont:

a) flexion

La modélisation la plus couramment utilisée [53] (fig. 2-47) est la suivante pour un cas symétrique.

Dans cette modélisation [53], on remarque que vu la petite dimension des arbres entre deux paliers successifs ou entre palier et joint de cardan ils sont représentés par des raideurs. Le joint de cardan est lui aussi représenté par une raideur. Seul l'arbre intermédiaire est représenté avec une poutre avec masse concentrée.

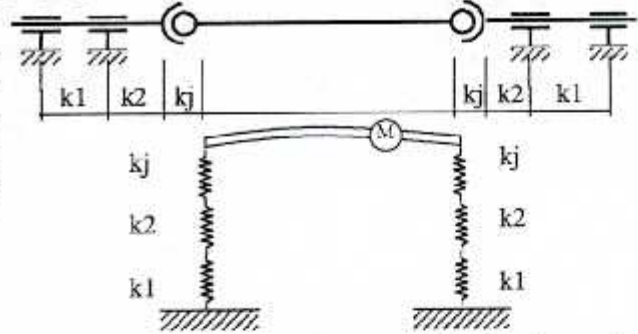


Fig. 2-47 Schéma de modélisation d'un cardan

b) torsion

Dans ce cas, on peut utiliser la modélisation énergétique pour le calcul des rigidités équivalentes (fig. 2-48), après calcul, on trouve:

$$J'_2 = (1 + i^2) J_2$$

$$J'_3 = (1 + i^2) J_2$$

et

$$K'a = [kj(1-i)^2 + ka i^2]$$

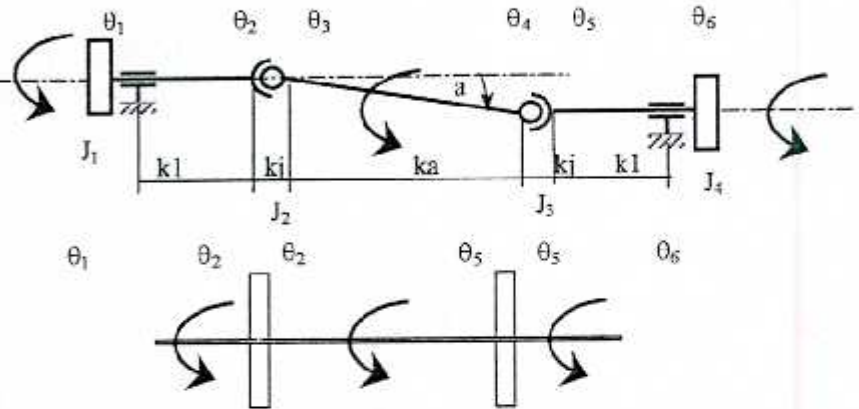


Fig. 2-48 Schéma de modélisation d'un cardan en torsion

2.2.6 Modélisation de Transmission par Courroie

2.2.6.1 Généralités

Problématique

La résolution des problèmes mécaniques pour les transmissions internes souples constituées, souvent, par des poulies et des courroies est relativement difficile vu la diversité des types de courroies et la connexion mécanique par frottement complexe entre poulie-courroie [3,47,21] (fig. II-49).

On considère une représentation simplifiée du problème. Le système est généralement modélisé par une raideur K équivalente.

2.2.6.2 Modélisation des principaux phénomènes régissant le comportement mécanique des accouplements

On sait d'après [21] que :

$$k = (Ec Sc B) / Lc$$

Avec :

E_c : module d'élasticité longitudinal de la courroie,

S_c : section transversale de courroie,

B : longueur du lien tendu,

L_c : coefficient dépendant du type de courroie et de la tension de montage $1 < b < 2$.

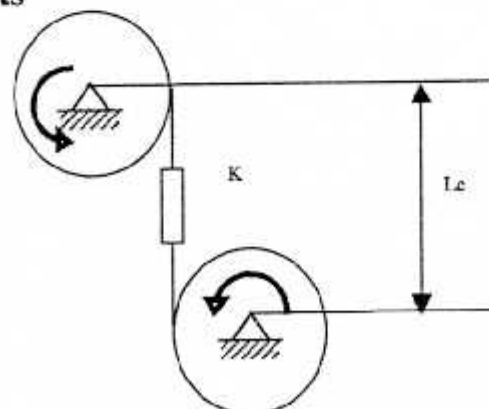


Fig. 2-49 Modèle de transmission par courroie

2.3 Fiabilité des organes de machines et interdépendance

2.3.1 Fiabilité

La fiabilité [9] ou "Reliability" est une caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise dans des conditions données, pendant un temps donné. Elle est caractérisée par [9]:

1. Probabilité,
2. L'accomplissement d'une fonction requise i.e. la fonction de l'organe,
3. Des conditions données relatives à l'environnement et l'utilisation (contraintes chimiques et physiques...),
4. Le temps, le nombre de cycles etc.

Dans la première catégorie, on peut introduire le taux de défaillance de chaque organe et les différentes données statistiques comme outil de calcul de la probabilité. Dans la deuxième catégorie, on introduit les phénomènes mécaniques de chargement et de sollicitation tels que la répartition des efforts ou la fatigue des matériaux. Dans la troisième catégorie, on introduit les différents types de dégradations tels que : l'usure et l'érosion, la corrosion, la chaleur, l'humidité, etc. Dans la quatrième catégorie, on tient compte du temps.

A. Probabilité

Chaque organe de machine possède un taux de défaillance qui varie selon la phase de défaillances. période précoces, période de défaillances à taux constants et la période des défaillances d'usure. C'est la courbe de baignoire [9] (voir fig. II.50).

Chaque organe de machines a des causes définies pour sa défaillance.

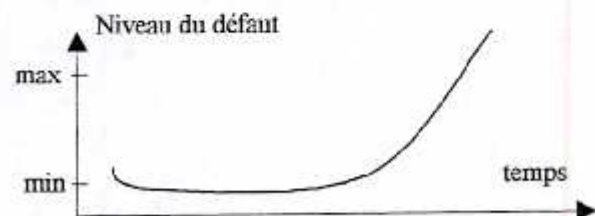


Fig. 2-50 Evolution d'un défaut

L'engrenage a les modes de défaillance suivants : l'usure (diminution des côtes), les détériorations superficielles (piqûres), la rupture par fatigue et le grippage. Le roulement a les modes suivants : l'usure (érosion, grippage, etc.), l'écoulement plastique (chemin de contact, adoucissement, échauffement, etc.), la fatigue de contact (écaillage, surcharge, etc.) et la défaillance générale (fissuration, fatigue, corrosion, piquûres...).

Chaque organe a des modes de défaillance qui lui sont propres. Il faut voir la répartition de leurs taux de défaillance ou défaut par machine. D'après les différentes études [9,34,35,36,57], on a les diagrammes suivants :

La figure 2-51 montre que les taux de défaillances les plus élevés touchent les lignes d'arbres (sous l'effet des défauts de mauvais alignement et du Balourd) et les de roulements[9].

B. Accomplissement d'une fonction

Le rôle de chaque organe est de fonctionner correctement selon les critères qui lui sont imposés. Parmi ces conditions le chargement des efforts, sujet traité par la modélisation.

C. Environnement

Dans cette partie de l'étude, on ne va pas s'intéresser aux conditions d'environnements c.-à-d. la corrosion, l'érosion, l'usure, la chaleur, l'humidité etc. On s'intéresse seulement à l'effet direct de l'usure dans la modélisation des défauts d'engrenage.

D. le temps

Dans ce cas, on s'intéresse au nombre de cycles par l'introduction de la fatigue de matériaux voir chapitre 3.1.5.3 lié à la dégradation par fatigue.

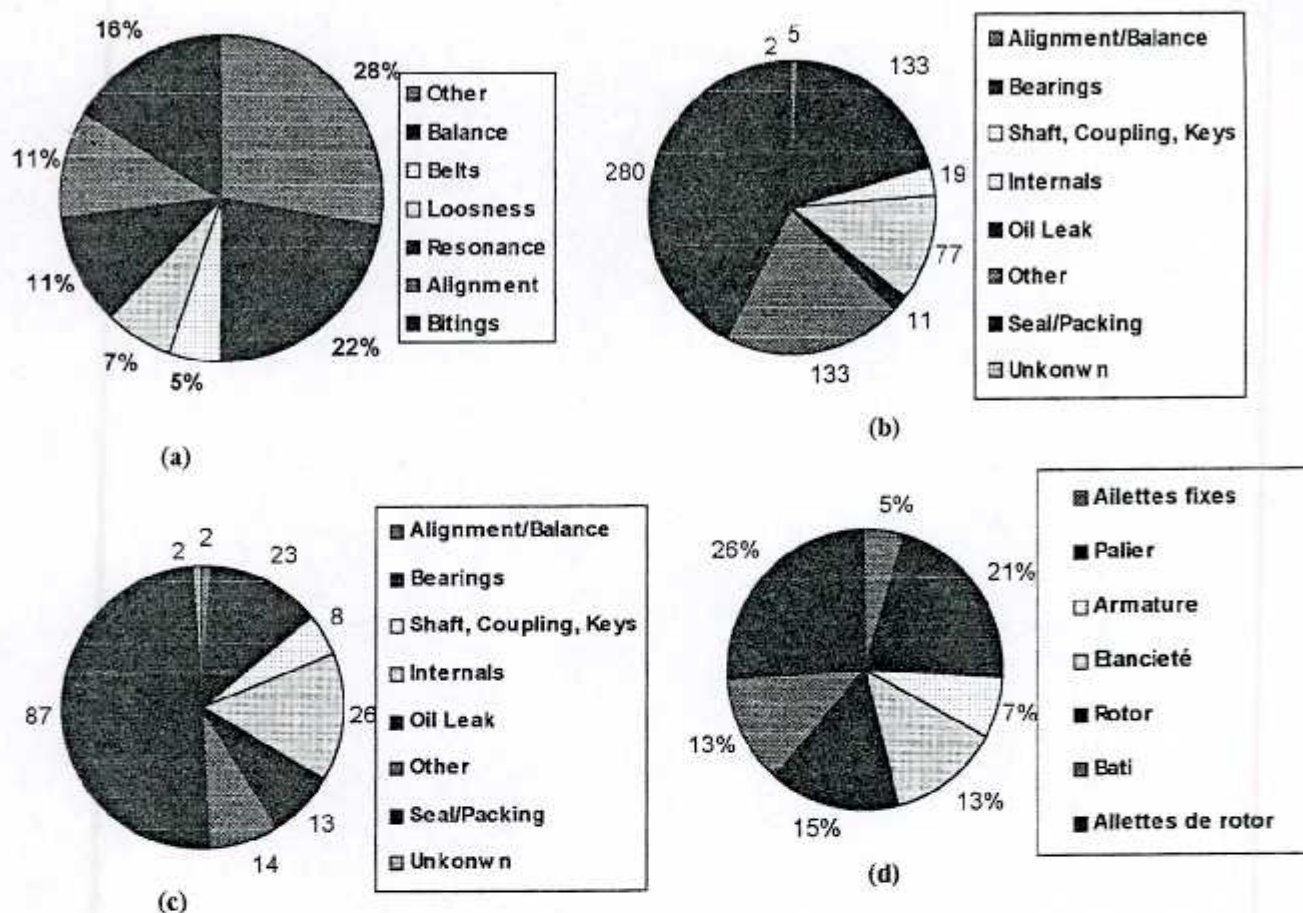


Fig. 2-51 Taux de défaillance par organes et défauts
 (a) Les causes de vibrations dans les pompes[34],
 (b) La répartition des défaillances dans un PWR [35],
 (c) La répartition des défaillances dans un BWR [36],
 (d) La répartition des pannes dans une turbine à vapeur (extrait de Incident de machines ALLIANZ 4/82) [57]

2.3.2 Interdépendance entre les organes et les défauts

En effet, il existe une interdépendance entre les organes et les défauts. Pour un défaut donné, quand il dépasse un certain seuil de vibration, il provoque la naissance d'un ou plusieurs défauts. Par exemple le mauvais alignement provoque un mauvais contact entre les dents d'un engrenage et par la suite provoque la rupture de ce dernier. C'est la même chose pour le balourd et ceci est valable pour les engrenages et les roulements.

Cette situation peut provoquer un phénomène d'avalanche schématisé par la figure 2.49.

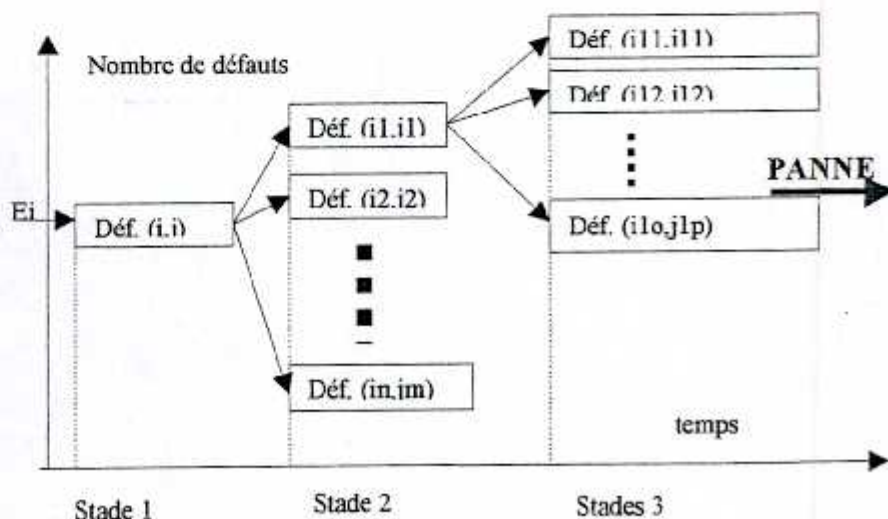


Fig. 2-52 Organigramme de défaillance ou de propagation des défauts

2.4 Méthodes de résolution des équations différentielles

La résolution des équations différentielles générales et non linéaires du type [37,60,63]:

$$Fm(t) + Fc(t) + Fk(t) = f(t)$$

Avec:

$$Fm(t) = M \cdot \ddot{r}(t)$$

$$Fc(t) = C \cdot \dot{r}(t) \quad \& \quad Fk(t) = K \cdot r(t)$$

Elle peut se faire par plusieurs méthodes. On cite les méthodes KRILOV BOGOLOUBOV-MITROPOLOSKY, de variation des paramètres, n de la balance harmonique, de la linéarisation harmonique, méthode des approximations successives, méthode de la valeur moyenne, la méthode de décomposition en série de fourier et la méthode de résolution pas à pas[63]. La majorité de ces méthodes aboutissent à l'obtention d'une expression analytique complexe, mais, vu que l'objectif de cette étude est d'aboutir à des résultats simples sous forme graphique, on choisit la méthode pas à pas. on cite [37,60] : Accélération linéaire, la méthode β et la méthode θ .

2.4.1 Accélération linéaire

La méthode de résolution à accélération linéaire se base sur la supposition que l'accélération soit linéaire sur le laps de temps : $T \leq t \leq T+\Delta T$. on aura[37,60]:

$$r(t) = a.t^2 + b.t^2 + c.t + d$$

$$\dot{r}(t) = 3.a.t^2 + 2.b.t + c$$

$$\ddot{r}(t) = 6.a.t + 2.b$$

La solution serait pour $Fc(t)=0$ de la forme [60]:

$$\left(K + \frac{6}{\Delta T^2} M \right) r_{T+\Delta T} = F_{T+\Delta T} + \frac{6}{\Delta T^2} M \left(r_T + \Delta T \dot{r}_T + \frac{\Delta T^2}{3} \ddot{r}_T \right)$$

Connaissant l'état initial un calcul pas à pas peut se faire en variant t avec un pas ΔT .

2.4.2 La méthode β

Selon le même principe que celui de l'accélération linéaire, mais en introduisant un paramètre $\beta^{(*)}$, après développement [60], on trouve :

$$\left(K + \frac{M}{\beta \Delta T^2} \right) r_{T+\Delta T} = F_{T+\Delta T} + \frac{M}{\beta \Delta T^2} \left(r_T + \Delta T \dot{r}_T + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta T^2 \ddot{r}_T \right)$$

D'après [60] la stabilité de cette méthode s'obtient pour : $\beta \geq \frac{1}{4}$

2.4.3 La méthode θ

Cette méthode est appelée aussi la méthode WILSON- θ . L'idée de cette méthode est de calculer la solution au temps $T+\theta\Delta T$, après développement [60], on trouve pour $\tau = \theta\Delta T$:

$$\left(K + \frac{6}{\tau^2} M \right) r_{T+\Delta T} = F_{T+\Delta T} + \frac{6}{\tau^2} M \left(r_T + \tau \dot{r}_T + \frac{\tau^2}{3} \ddot{r}_T \right)$$

D'après [60] la stabilité de cette méthode s'obtient pour : $\theta \geq 1.4$

2.4.4 Choix de méthode

D'après les travaux engagés dans l'étude de LEITERER[60], les méthodes θ et β sont semblables du point de vue ordre et temps de calcul, mais la méthode θ amortie les hautes fréquences. Par conséquent, et vu que nos travaux sur les machines tournantes et en particulier sur des organes ayant des réponses aux hautes fréquences, il est claire que la méthode adoptée sera la méthode β .

(*) Vu que la méthode β trouvée dans la littérature[60] ne considérée pas l'amortissement, un travail complémentaire a été fait afin de tenir compte de ce facteur et afin d'élaborer un algorithme de calcul.

2.5 Conclusions de la recherche bibliographique

La recherche bibliographique a montré que la plate-forme autour de laquelle une modélisation satisfaisante permet à la fois la meilleure approche du comportement statique et dynamique des différents organes d'une machine tournante et par la suite la machine elle-même, permet l'introduction d'une modélisation adéquate des principaux défauts caractéristiques avec souplesse et donne une modélisation plus réaliste du comportement des machines est la formulation mathématique des rigidité statique et dynamique de ces structures.

Vu la diversité des sujets qui peuvent être l'objet dans ce travail et vu qu'une partie de ces organes et défauts ont été très largement étudiés dans plusieurs ouvrages 1, on se limite à certains cas, où on a apporté des contributions modestes.

Dans l'étude théorique, on se propose d'étudier les lignes d'arbres (où on a modifié et introduit la modélisation de l'effet de présence d'une fissure transversale sur les arbres et particulièrement sur les arbres cylindriques creux). Dans l'étude des roulements à billes, on a élaboré des modèles sur les rigidité statiques et dynamiques et sur les principaux défauts caractéristiques. Dans l'étude des engrenages, on a élaboré des modèles sur les rigidité statiques et dynamiques et sur les principaux défauts caractéristiques. Par ailleurs, on a présenté les autres organes tel que les cardans et les paliers lisses, où dans l'étude de ce dernier cas, on a proposé des modifications sur le modèle de calcul.

Dans ce travail, on a eu recours à des travaux de validations numériques et expérimentales, afin de valoriser les modèles théoriques. Les travaux de validation numériques se sont basés sur le calcul numérique des rigidités et des réponses dynamiques, sur la base des formules mathématiques élaborées. Les travaux expérimentaux se sont limités à la validation du modèle mathématique de rigidité d'un roulement à bille. Ce travail expérimental a été réalisé conjointement avec l'équipe du laboratoire des études mécanique LEMMN/DEMEM/DTN/CRNB ; à savoir Monsieur TITOUCHE N., DJAOUI M et DOUGDAG M[64]. Les résultats obtenus ont été communiqués à la 1ere Rencontre sur les turbomachines organisée à LAGHOUAT en avril 2001.

Les objectifs visés par ces travaux, sont la vérification des hypothèses émises, lors des élaborations des modèles mathématiques des organes et de leurs défauts caractéristiques, de s'assurer de la simplicité de l'introduction des modèles des défauts dans les modèles des organes et la validation des modèles élaborés.

III Etude théorique

Dans l'étude théorique, on se limite à la présentation des modèles des principaux organes des machines tournantes : ligne d'arbre, droits de liaisons (palier lisse & roulements à billes), engrenages droits et cardans.

Il y a parmi ces organes et ces défauts ceux qui ont été largement traités dans la littérature et ceux où il y a relativement peu d'informations. On élabore une modélisation adéquate correspondant aux objectifs fixés ; afin qu'elle soit souple et permettant l'introduction d'anomalies et de défauts. Le travail ne s'arrête pas ici, on introduit quelques modifications jugées nécessaires ou complémentaires aux modèles non élaborés.

Les principes de base qu'on adopte pour le choix des modèles ou leur élaboration sont : le modèle mathématique doit décrire le comportement mécanique de l'organe en tant que structure mécanique englobant les principaux phénomènes régissant le comportement statique et dynamique, cette formulation doit aussi être explicite et malléable. Par ailleurs, on s'est inspiré de la philosophie de la théorie des éléments finis pour le choix des modèles pouvant être considéré comme un simple élément ou un ensemble d'éléments. Ceci permet leur assemblage pour former par la suite une structure complexe ou machine. Un autre principe dans notre choix s'est imposé. Obtenir un modèle ayant une formulation permettant d'introduire la "paramétrisation", c-à-d permettre d'introduire une multitude de facteurs correcteurs.

En résumé, la modélisation choisie est celle qui considère l'organe comme un élément de structure mécanique ayant une masse, une rigidité et un amortissement.

3.1 Ligne d'arbre

3.1.1 Modèle

Le modèle qu'on a choisi se base sur l'assemblage de trois modèles par la méthode de la superposition. Le premier est le modèle éléments finis ou élément poutre de Rayleigh[29] pour les arbres sous la sollicitation de flexion couplée avec l'effet gyroscopique et les deux autres modèles mathématiques sont issus de la théorie des milieux continus pour la torsion et la compression/traction [37].

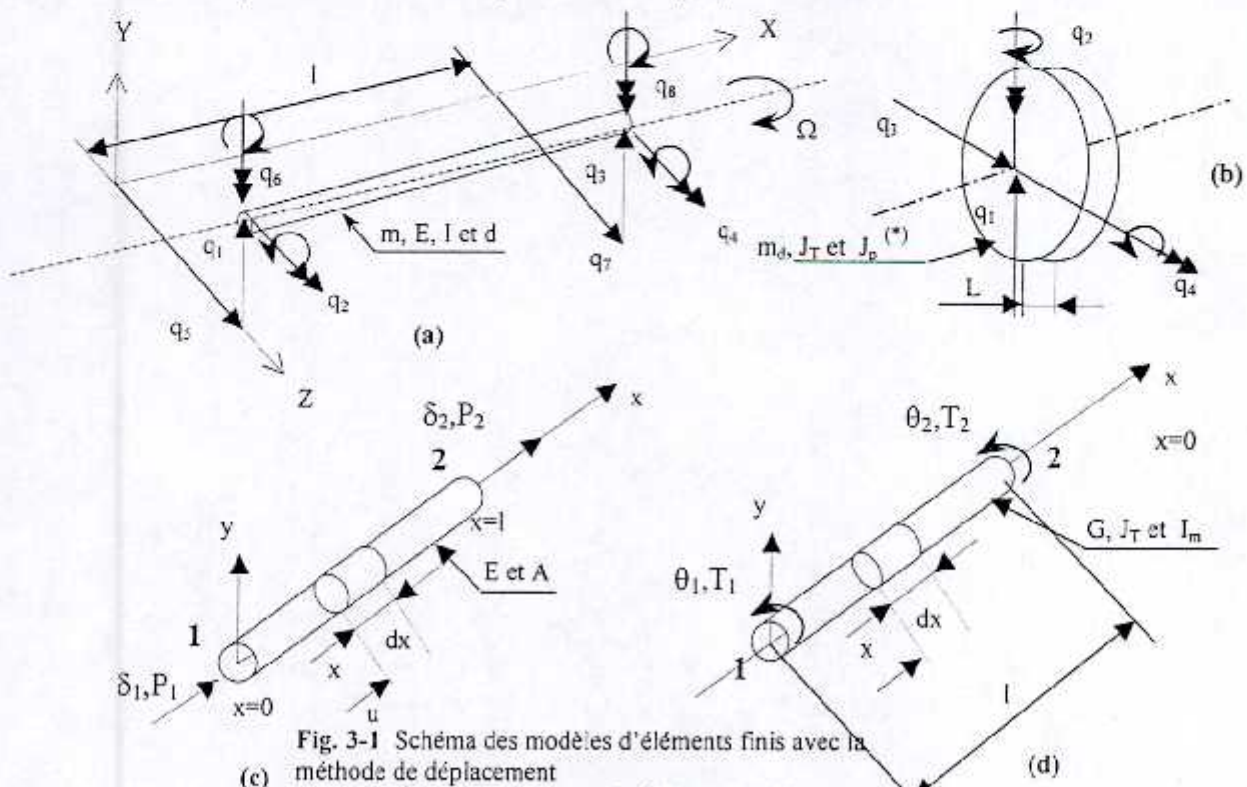


Fig. 3-1 Schéma des modèles d'éléments finis avec la méthode de déplacement

- (a) : modèle d'un arbre sous la flexion et l'effet gyroscopique [1],
 (b) : modèle discret d'un disque (suite de (a)) [29],
 (c) : modèle d'un arbre sous la force axiale [37],
 (d) : modèle d'un arbre sous la torsion [37].



On sait que les matrices k^s et m^s sont facilement calculables pour les mêmes conditions initiales et aux limites que celles fixées sur la fig. 3-1-(a) par la méthode suivante [4]:

Calcul de k^s :

De l'équation différentielle de flexion d'un tronçon élémentaire d'une poutre, on a :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

Le calcul de la déflexion $y(x)$ [14, 27] peut être donné sous la forme suivante :

$$y(x) = \psi_1(x) \delta_1 + \psi_2(x) \delta_2 + \psi_3(x) \delta_3 + \psi_4(x) \delta_4$$

L'application du théorème des travaux virtuels externe (force élastique) et interne (moment fléchissant), nous permet d'obtenir la rigidité pour le cas général, tel que [37]:

$$K_{ij} = \int_0^l EI \psi'_i(x) \psi''_j(x) dx$$

Avec : $K_{ij} = K_{ji}$

Connaissant les $\psi_i(x)$ on aura la matrice $[K]$ d'ordre 4×4 . Il s'avère que $[K] = K^s$

Calcul de m^s :

Le calcul de matrice masse se base sur la méthode des masses réparties (Consistent mass)[37], de la même manière que précédemment, on aura :

Les forces d'inerties s'expriment pour $\delta''_i = 1$ et $\delta''_j = 0$ ($j=1,4$ et $j \neq i$) :

$$\dot{y}_i(x) = \psi_i(x) \delta''_i$$

et

$$f_i(x) = m(x) \dot{y}_i(x) = m(x) \psi_i(x) \delta''_i$$

L'application du théorème des travaux virtuels externe (force élastique) et interne (moment fléchissant), permet d'obtenir la répartition des masses pour le cas général, tel que [37]:

$$m_{ij} = \int_0^l m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

Avec : $m_{ij} = m_{ji}$

Connaissant les $\psi_i(x)$ on aura la matrice $[M]$ d'ordre 4×4 . Il s'avère que $[M] = m^s$ (pour $g^s = 0$)

Calcul de g^s :

Sachant par analogie que l'amortissement s s'exprime :

$$c_{ij} = \int_0^l c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

Avec : $c(x)$: coefficient d'amortissement distribué (par unité de longueur),

Modèle de Rayleigh [29] pour la flexion des disques avec effet gyroscopique:

$$\begin{pmatrix} m^d & 0 \\ 0 & m^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^d \\ z^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^s & -\Omega g^d \\ -\Omega g^d & h^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^d \\ z^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y^s \\ f_z^s \end{pmatrix} \tag{3-1-2}$$

$$m^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & J_T^d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p^d \end{pmatrix} \tag{3-1-3}$$

Où :

$$\{y^{dT}, z^{dT}\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

Avec : m : masse du disque,

J_T : moment d'inertie diamétral,

J_p : moment d'inertie polaire.

Modèle [37] pour la torsion des arbres:

L'équation d'équilibre dynamique de torsion peut s'écrire : $[M]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{f_t\}$

Calcul [K]:

L'équation différentielle de déplacement s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{T}{JG} \quad (3-1-4)$$

Avec : θ : angle de torsion,
 J : moment polaire d'inertie pour section circulaire,
 G : module d'élasticité de cisaillement,

La résolution de cette équation, donne :

$$\theta(x) = \theta_1(x) \delta_1 + \theta_2(x) \delta_2$$

Analogiquement au calcul de k^s , on aura :

$$k_{ij} = \int_0^l JG \theta'_i(x) \theta'_j(x) dx$$

Connaissant les $\theta_i(x)$ on aura la matrice [K] d'ordre 2x2 :

$$[K] = \frac{JG}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de [M]:

Analogiquement au calcul de m^s , on aboutit à :

$$m_{ij} = \int_0^l I_m \theta_i(x) \theta_j(x) dx$$

Avec : I_m : moment d'inertie polaire par unité de longueur,
 Connaissant les $\theta_i(x)$ on aura la matrice [M] d'ordre 2x2, telle que :

$$[M] = \frac{I_m l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcul de [C]:

Sachant que par analogie l'amortissement s'exprime :

$$c_{ij} = \int_0^l c(x) \theta_i(x) \theta_j(x) dx$$

Avec : $c(x)$: coefficient d'amortissement distribué (par unité de longueur),

Modèle [4] pour la force axiale des arbres:

L'équation d'équilibre dynamique des forces axiales peut s'écrire :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f_u\}$$

Calcul [K]:

L'équation différentielle de déplacement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EA} \quad (3-1-5)$$

Avec : u : déplacement axial, A : section, E : module d'élasticité de Young,

La résolution de cette équation, donne : $u(x) = u_1(x) \delta_1 + u_2(x) \delta_2$

Analogiquement au calcul de k^s , on aura :

$$k_{ij} = \int_0^l EA u'_i(x) u'_j(x) dx$$

Connaissant les $u_i(x)$ on aura la matrice $[K]$ d'ordre 2×2 . :

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $[M]$:

Analogiquement au calcul de m^s , on aboutit à :

$$m_{ij} = \int_0^l m u_i(x) u_j(x) dx$$

Connaissant les $u_i(x)$ on aura la matrice $[M]$ d'ordre 2×2 . :

$$[M] = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Avec : m : masse par unité de longueur,

Calcul de $[C]$:

Sachant que par analogie, l'amortissement s'exprime :

$$c_{ij} = \int_0^l c(x) u_i(x) u_j(x) dx$$

Avec : $c(x)$: coefficient d'amortissement distribué (par unité de longueur),

Assemblage des effets dans une matrice élémentaire :

L'assemblage des matrices s'effectue sur la base des nœuds 1 & 2. Une réadaptation des matrices précédentes sera opérée, comme suit :

$$[M^e_A] \{q''\} + [C^e_A] \{q'\} + [K^e_A] \{q\} = \{F^e_A\}$$

ou encore :

$$[m^e \oplus m^d \oplus m^T \oplus m^A] \{q''\} + [c^e \oplus c^d \oplus c^T \oplus c^A] \{q'\} + [k^e \oplus k^d \oplus k^T \oplus k^A] \{q\} = \{Fe_A\}$$

Avec les indices :

- (^s) : Arbre en flexion,
- (^d) : Disque (assemblé au nœud 1 ou 2),
- (^T) : Arbre sous torsion,
- (^A) : Arbre sous forces axiales,
- ⊕ : Assemblage par déplacement.

$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$

et $[M^e_A]_{12 \times 12}$, $[C^e_A]_{12 \times 12}$, $[K^e_A]_{12 \times 12}$, $\{q^e\}_{1 \times 12}$ et $\{F^e_A\}_{1 \times 12}$

On a ici (fig. 3-2) un élément poutre disposant de six (06) degrés de liberté par nœud [1,4].

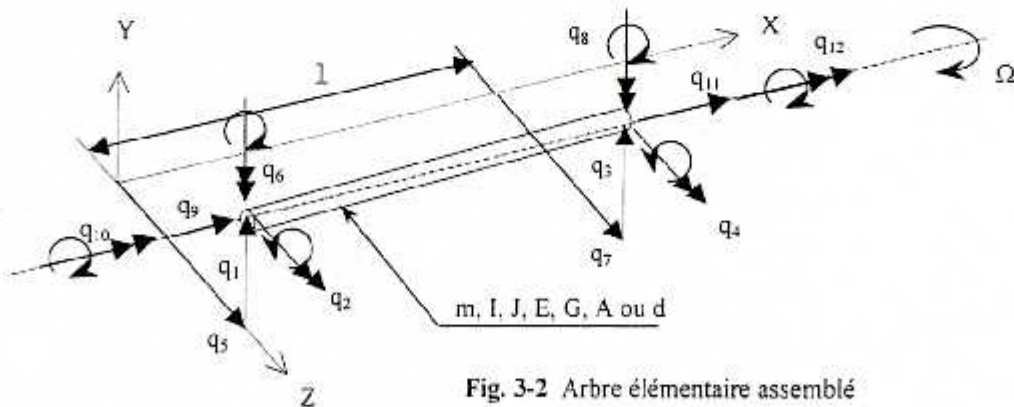


Fig. 3-2 Arbre élémentaire assemblé

$$\begin{bmatrix} m^s & 0 & 0 \\ 0 & m^s & 0 \\ 0 & 0 & m^{ia} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^s \\ z^s \\ x^{ia} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h^s & -\Omega g^s & 0 \\ -\Omega g^s & h^s & 0 \\ 0 & 0 & c^{ia} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{as} \\ z^{as} \\ x^{ia} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^s & -\Omega h^s & 0 \\ -\Omega h^s & k^s & 0 \\ 0 & 0 & k^{ia} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^s \\ z^s \\ x^{ia} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y^s \\ f_z^s \\ f_x \end{bmatrix} \quad (III-1-6)$$

$$\{y^{sT}, z^{sT}, x^{sT}\} = \{q\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$$

des contraintes dynamiques mises en jeu, mais, cette approche reste un bon moyen de calcul des fréquences acceptable. Il suffit, d'introduire ces fréquences dans les modèles "exactes" [37] et de recalculer les déformées pour une meilleure précision.

3.1.5.2 Introduction des défauts

Dans cette partie introduit quelques défauts caractéristiques dans la modélisation de départ. Les principales anomalies considérées sont :

- le balourd,
- forces gravitationnelles et centrifuges,
- forces magnétiques, aérodynamiques et hydrodynamiques,
- présence d'une fissure,
- désalignement,
- faux rond ou mauvaise forme circulaire,
- réponse transitoire,
- amortissement interne et externe

➤ Le balourd

Le balourd est une anomalie caractéristique des arbres qui cause un dysfonctionnement de ce dernier. Il se manifeste par un changement des propriétés physiques et géométriques. La difficulté réside dans son introduction dans la représentation matricielle d'un élément arbre.

Etant donné que notre choix de modélisation se fait par discrétisation en éléments, il est possible de représenter le balourd par sa forme simple vu dans le modèle de JEFFCOT[37]. Les autres aspects du balourd peuvent apparaître par le choix judicieux du taux de maillage (le nombre d'éléments).

Rappelons la représentation du balourd par JEFFCOT[37] du balourd dans le plan Y-Z:

$$\begin{cases} y_b = y + e \cos \Omega t \\ z_b = z + e \sin \Omega t \\ x_b = x \end{cases}$$

Avec : e : excentricité, Ω : vitesse de rotation, $\{y, z\}$: position du centre des masses, $\{y_b, z_b\}$: position du nouveau centre des masses.

Pour introduire les autres balourds, on utilise l'idée que ces derniers peuvent être construits par des balourds simples. Puisqu'on utilise la discrétisation en éléments, l'utilisation de plusieurs balourds à angles et positions différentes (φ, e) peut simuler les autres cas. On a [37]:

$$\begin{cases} y_b = y + e \cos \Omega t + \varphi \\ z_b = z + e \sin \Omega t + \varphi \\ x_b = x \end{cases}$$

Avec : φ : argument entre le centre des masses et géométrique par rapport à un repère fixe⁽¹⁾

L'introduction de l'effet du balourd peut être faite par une transformation géométrique des coordonnées : Une translation $T(e)$ dans le plan Y-Z plus une rotation $R(\Omega t)$ autour de l'axe x (coordonnées locales). Cette méthode aboutit à la définition d'un vecteur de force de Balourd [1]:

$$\{f_b\} = \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = m e \Omega^2 \cos (\Omega t + \varphi) \\ F_z = m e \Omega^2 \sin (\Omega t + \varphi) \end{cases}$$

Ce vecteur de force peut, alors, être introduit au niveau des forces nodales extérieures $\{f^e\}$ par une approximation qui consiste à ne considérer que la moitié de la masse de l'élément pour chaque nœud, on a :

$$\{f_b\} = \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = (1/2) m e \Omega^2 \cos (\Omega t + \varphi) \\ F_z = (1/2) m e \Omega^2 \sin (\Omega t + \varphi) \end{cases}$$

Pour chaque élément (i) on a les propriétés (m_i, φ_i, e_i) données.

⁽¹⁾ tous les angles sont pris par rapport à un repère tournant avec l'arbre, fixé initialement à un point témoin.

Critiques et recommandations :

La modélisation du balourd n'a pas introduit les forces de moments d'une façon explicite, mais a considéré que ces derniers peuvent être mis en évidence par les forces nodales.

Par ailleurs, l'approche consiste en l'introduction des forces au lieu de porter des modifications adéquates aux propriétés géométriques et mécaniques telles que : les moments d'inertie I_y, I_z et I_x - les moments polaires d'inertie J_y, J_z et J_x - Le supplément de masse Δm . Cette méthode aboutit à des équations différentielles très complexes et dont la résolution est fastidieuse.

Le calcul du balourd au nœud peut être considéré comme étant :

$$b = \Delta m e$$

L'estimation de Δm est calculée si on connaît l'excentricité (e) ou la variation de la répartition de masse ou la variation de la section.

➤ Forces gravitationnelles et centrifuges

Gravitation :

Sur la base de la méthode appliquée au calcul du balourd, on aura pour une machine horizontale[3,61]:

$$\{f_g\} = \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = (1/2)m g \\ P_z = 0 \end{cases}$$

Pour une machine verticale:

$$\{f_g\} = \begin{cases} P_x = (1/2)m g \\ P_y = 0 \\ P_z = 0 \end{cases}$$

Sous forme vectorielle, on a :

$$\vec{f}_g = (1/2)m\vec{g}$$

Avec : g : accélération gravitationnelle et φ : angle confondu avec l'axe y non tournant.

Forces centrifuges :

De la même manière, on a [3,61]:

$$\{f_c\} = \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = (1/2) m \rho_y \Omega^2 \cos \varphi \\ F_z = (1/2) m \rho_z \Omega^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Où :

$$\vec{\rho} = \vec{e} + \vec{y}$$

et

$$\begin{aligned} \rho_y &= y + e \sin \Omega t \\ \rho_z &= z + e \cos \Omega t \end{aligned}$$

Avec :

ρ : flèche résultante, e : excentricité,
 (y, z) : la déflexion totale de l'axe neutre,
 φ : argument entre le centre des masses et l'axe fictif de rotation, ici l'angle et tournant

➤ Forces magnétique, aérodynamique et hydrodynamique

Deux cas de figures se posent [3]:

Force externe fixe: (coordonnées sphériques)

$$\{f_f\} = \begin{cases} F_x = F \sin \theta \sin \varphi \\ F_y = F \cos \theta \\ F_z = F \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

Force externe embarquée ou tournante:

$$\{f_o\} = \begin{cases} F_x = F \sin \theta \sin \varphi \\ F_y = +F \cos \theta \cos \Omega t + F \sin \theta \cos \varphi \sin \Omega t \\ F_z = -F \cos \theta \sin \Omega t + F \sin \theta \cos \varphi \cos \Omega t \end{cases}$$

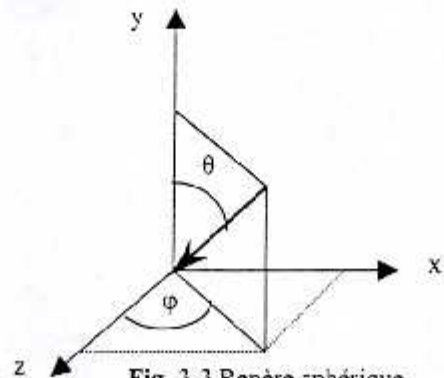


Fig. 3-3 Repère sphérique

Avec :

- F : module de la force résultante (magnétique ou aérodynamique ou hydrodynamique),
- θ : angle par rapport au plan X-Z
- φ : angle par rapport au plan Y-Z
- Ω : vitesse de rotation.

➤ Présence d'une fissure

La présence d'une fissure dans un arbre peut être représentée par une discontinuité en ce point avec des propriétés mécaniques différentes. Elle modifie, alors, le comportement mécanique à l'endroit du défaut. Elle introduit une flexibilité ou souplesse (compliance) locale fonction de la profondeur de la fissure[38]. Plusieurs auteurs ont étudié les différents aspects de ce problème. IRWIN [38] a fait une relation entre le facteur d'intensité de contrainte et la flexibilité, LIEBOWITZ & al. et OCAMURA [38] ont identifié la flexibilité au moment fléchissant. RICE & LEVY [38] ont introduit le couplage de la flexion à l'effet de la compression. DIMAROGONAS & CHONDROS [38] ont étudié l'effet de la fissure dans le comportement dynamique. DIMAROGONAS & MASSOUROS [38] ont étudié l'effet de la fissure dans une poutre cylindrique en torsion.

Les deux principaux aspects de fissuration étudiés sont : la fissure transversale et la fissure circonférencielle d'un arbre.

L'objectif de ces études est d'élaborer une matrice de rigidité équivalente mettant en évidence l'effet de la présence d'une fissure. Les détails se trouvent dans l'Annexe A[65].

La matrice de flexibilité pour une poutre ayant une fissure a la forme :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} \end{pmatrix}$$

Vu la réciprocité, la matrice C est systématique [38].

Le calcul de la raideur (locale) en l'endroit de la fissure est alors :

$$[K] = [C]^{-1}$$

Pour un cas simple (ANNXE A[65]), on a les raideurs correspondantes pour une poutre de longueur l :

$$k_{\xi} = \frac{k}{1 + \frac{c_{\xi} k l^2}{8}} \quad \text{et} \quad k_{\eta} = \frac{k}{1 + \frac{c_{\eta} k l^2}{8}}$$

Avec : k : raideur initiale.

L'équation de mouvement s'exprime comme suit [38] pour la totalité de l'arbre au point de fissure :

$$\begin{cases} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi}\xi + k_{\xi\eta}\eta = f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta}\xi + k_{\eta}\eta = f_{\eta}(t) \end{cases}$$

Le couplage des raideurs ($k_{\xi\eta}$ ou $k_{\eta\xi}$) est généralement de faible effet devant les deux autres[38], l'équation de mouvement devient :

$$\begin{cases} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi}\xi = f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta}\eta = f_{\eta}(t) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\xi} - m\Omega^2 & -c\Omega \\ +c\Omega & k_{\eta} - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\xi}(t) \\ f_{\eta}(t) \end{Bmatrix}$$

Cette équation ressemble à celle du modèle de base, mais sans la présence des déplacements angulaires sous l'effet des moments M_y et M_z . Le reste des sollicitations tels que l'effet de torsion et des forces axiales peuvent être ajoutées normalement par assemblage.

Cette approximation prend l'arbre entier sans discrétisation. Il semble que cette approche est très grossière ; vu qu'elle porte des simplifications globales dans le calcul, alors que la discrétisation a une certaine rigueur en jouant sur le nombre d'éléments.

Il est préférable, alors, d'introduire, dans l'élément de l'arbre, l'effet dû à la présence d'une fissure comme un nœud avec la matrice de rigidité modifiée locale en ce point.

➤ Le mauvais alignement

Un désalignement (fig. 3-4) est un mauvais positionnement de l'arbre. Cette situation arrive, lors du positionnement des paliers et de l'assemblage des arbres au niveau des accouplements. Le phénomène peut être représenté par un déplacement forcé (e) selon une direction (ϕ) donnée[3].

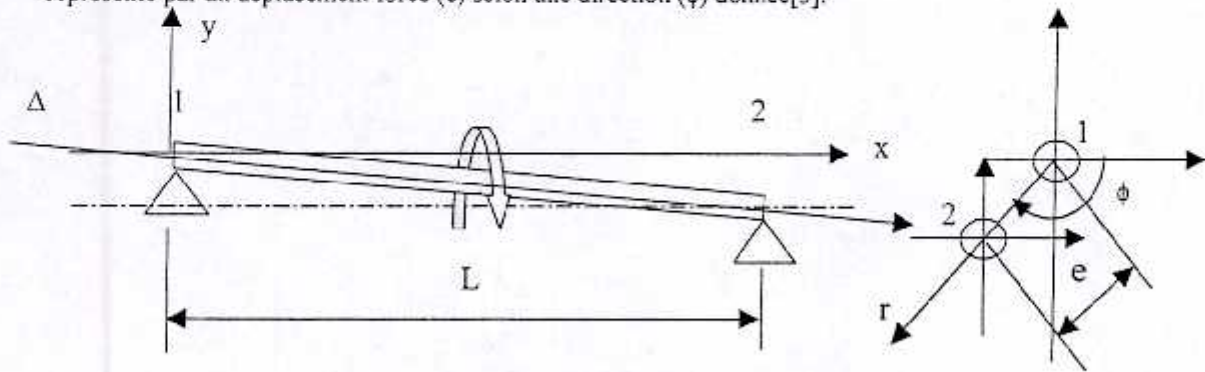


Fig. 3-4 Schématisation d'un désalignement

Avec :

- $e(x)$: différence entre les axes du palier 1 et 2 le long de l'axe x, $e(x) = (e/l) \cdot x$,
- Ω : vitesse de rotation, Δ : axe de rotation.

La modélisation de ce cas peut être représentée (fig. 3-5) par une force F virtuelle causant cette excentricité (e).

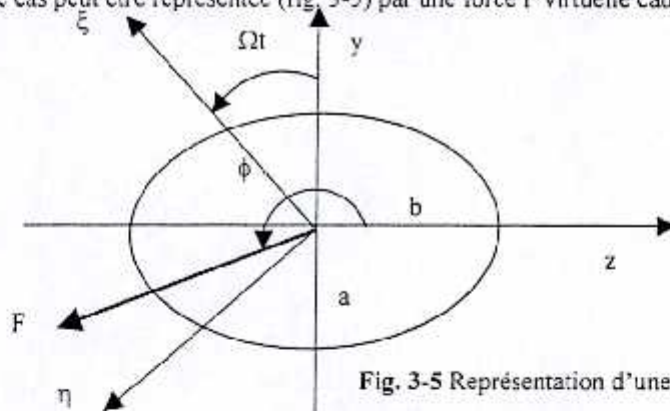


Fig. 3-5 Représentation d'une force de désalignement

Vu les propriétés de l'anisotropie, le phénomène de désalignement exprime selon les suppositions :

Si on suppose qu'il n'y a pas de couplage ($k_{xy} = 0$), on aura :

$$F^2 = F_y^2 + F_z^2$$

$$= (k_y \cdot e_y)^2 + (k_z \cdot e_z)^2$$

$$e^2 = e_y^2 + e_z^2$$

Si a et b sont les amplitudes de l'ellipse et e un vecteur tournant, est :

$$e^2 = a^2 \cos^2 \Omega t + b^2 \sin^2 \Omega t$$

ou encore :

$$2 \cdot c = a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos 2\Omega t$$

Cette formulation montre la modulation au double de la fréquence de rotation.

$$F_y = F \cos \phi = k_y e_y = k_y a$$

$$F_z = F \sin \phi = k_z e_z = k_z b$$

Avec : $k_y = k_\xi \cdot \cos \Omega t + k_\eta \sin \Omega t$

$$k_z = -k_\xi \cdot \sin \Omega t + k_\eta \cos \Omega t$$

(ξ, η) coordonnées locales de l'arbre,

D'où :

$$F_y = F \cos \phi = (k\xi \cdot \cos \Omega t + k\eta \sin \Omega t) a$$

$$F_z = F \sin \phi = (-k\xi \cdot \sin \Omega t + k\eta \cos \Omega t) b$$

ou

$$F_y = a k' \cos (\Omega t + \varphi) = a' k'$$

$$F_z = b k' \sin (\Omega t + \varphi) = b' k'$$

où

$$a' = a \cos (\Omega t + \varphi)$$

$$b' = b \sin (\Omega t + \varphi)$$

Avec : $k'^2 = k\xi^2 + k\eta^2$; $\varphi = \arctg(k\xi/k\eta)$

d'où :

$$F = a^2 k'^2 \cos^2 (\Omega t + \varphi) + b^2 k'^2 \sin^2 (\Omega t + \varphi)$$

ou

$$2(F/k'^2) = a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 2(\Omega t + \varphi)$$

➤ Un faux rond

Le faux rond d'un arbre ou mauvaise circularité se manifeste par des formes en bosses et des cavités à l'extérieur/intérieur de la forme circulaire nominale, les zones hachurées dans la figure (fig. 3-6). Ces zones peuvent être représentées par une ou des masses. Un calcul simple de barycentres permet de trouver le centre de masse (e). Or, ceci n'est pas suffisant puisqu'il peut arriver que le centre des masses coïncide avec le centre géométrique. Il faut donc tenir compte du changement des autres propriétés (moment d'inertie, moment quadratique et section) et des forces aérodynamiques qui se créent.

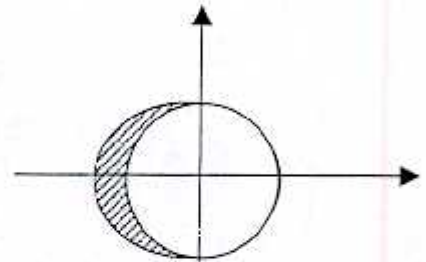


Fig. 3-6 Cas de faux rond

➤ Réponse transitoire

L'étude du comportement dynamique transitoire, fait qu'il introduit le terme $(d\Omega/dt)$ dans la résolution des équations différentielles de mouvement[3].

3.1.5.3 Mode de détérioration

Il existe plusieurs modes de détérioration, on traite ici le cas de fatigue[3].

La fatigue est un phénomène de vieillissement et de détérioration de la structure, notre choix de modélisation est fait sur la base des relations connues de la fatigue et celles de la mécanique de la rupture. C'est pourquoi notre approche suit deux phases : avant création d'une fissure et de propagation de fissure et rupture.

I. Phase de création d'une fissure:

On modélise par une relation simple tirée de la théorie de fiabilité (la courbe de baignoire):

$$N < N_f \Rightarrow \text{Pas de fissure}$$

$$N \geq N_f \Rightarrow \text{Création d'une fissure}$$

Avec : N: nombre de cycles de sollicitations dynamiques, dépendant du nombre de contraintes dynamiques actives et des fréquences de leurs oscillations f_i au point étudié de l'arbre (nœud), ainsi que du temps de fonctionnement,

N_f : seuil fixé dans la courbe estimant qu'après ce nombre la probabilité de création d'une fissure est maximale.

Par ailleurs, le mode de déformation est un paramètre très important qui peut accélérer la dégradation de la structure. Donc N_f n'est pas unique, mais dépend de ce mode, on cite parmi ces modes de déformation ou de variation de la contrainte $\Delta\sigma$ (résultante) :

- Mode de la fatigue d'endurance ($\Delta\sigma < [\sigma]$)
- Mode de la fatigue oligocyclique ($\Delta\sigma > [\sigma]$)

Phase de propagation de fissure et rupture

La loi qui relie la propagation de la fissure en fonction du nombre de cycles est sous la forme [8,62]:

$$\frac{da}{dN} = f(N)$$

Plusieurs solutions de cette relation existent, on choisit la plus appropriée au problème des arbres tournants.

a) calcul du nombre de cycles

$$N = \sum_i (\Delta t_i \sum_j f_{ij})$$

Avec :

- i : cumulé des différents temps démarrages-arrêts,
- j : cumulé des différents régimes ou modes de déformations,
- Δt_i : temps de fonctionnement entre un démarrage-arrêt,
- $\omega_{ij} = 2\pi f_{ij}$

b) comparaison de N et Nf

Calcul de Nf correspond au mode de déformation pour chaque régime et estimer le Nf moyen.

Si $N > Nf$ alors il faut passer aux étapes suivantes si non remonté au 1^{er} point.

c) calcul de a(N)

d) introduction de a(N) dans le calcul dynamique (fissure)

e) estimation de la durée de vie restante Δt

3.2. Roulement à billes

3.2.1 Modèle

Du type [21]:

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

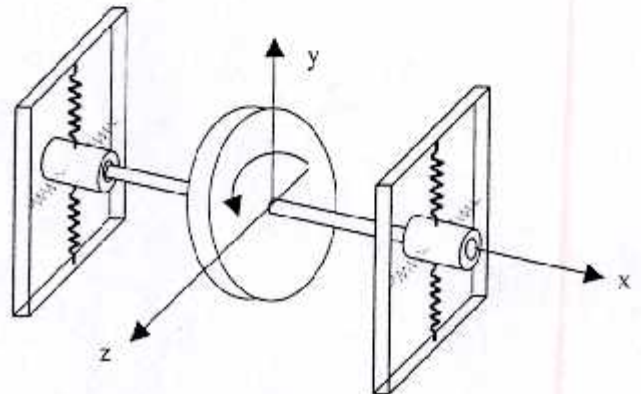
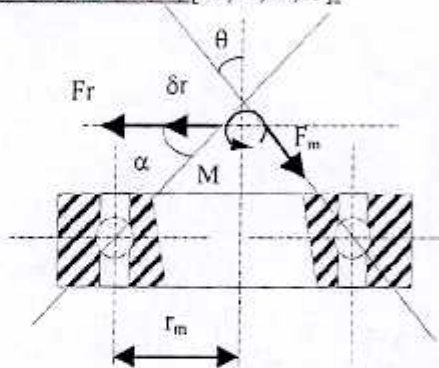


Fig. 3-7 Modèle d'un roulement

3.2.2 Choix du modèle

Le modèle choisit représente un roulement dont les équations lient les déplacements aux forces appliquées [20,21,22,23] pour établir les coefficients des raideurs et d'amortissements équivalents.

Modèle de RAJAB (1982) [20,21,22,23]:



- F_m : Force maximale,
- F_r : Force radiale,
- M : Moment,
- θ : Déflexion angulaire,
- δ_r : Déflexion radiale,
- r_m : pitch radius.

Fig. 3-8 Schéma des forces, modèle de Rajab 1982

Soit un roulement (fig. 3-8) dont la bague intérieure est chargée par une force F_r et un moment M_b avec la bague extérieure fixe. Le calcul de la raideur d'un tel système non-linéaire en équilibre statique donne :

A partir des solutions des déplacements radiaux δ_r et rotation θ , on aura [21]:

$$\begin{aligned} K_{rr} &= F_r / \delta_r & K_{r\theta} &= F_r / \theta \\ K_{\theta r} &= M / \delta_r & K_{\theta\theta} &= M / \theta \end{aligned}$$

La raideur est devenue une matrice de raideur [K] d'ordre (02).

3.2.3 Développement Analytique

On se propose d'obtenir les forces et les déplacements analytiquement.

La détermination de ces coefficients nécessite la connaissance des forces appliquées ainsi que les déplacements occasionnés. La position d'équilibre statique du roulement sous charge représente l'état idéal pour l'identification de ces paramètres.

On identifiera la force radiale et le moment par les composantes des réactions appliquées au roulement comme un point d'appui simple. Les relations de la RDM donnent pour une poutre de poids (W) et de longueur (l) supportée par deux appuis simples :

$$Fr = (1/2) W$$

$$M = (1/2) W l$$

Il suffira alors d'avoir les déplacements radiaux et angulaires δr et θ pour obtenir la matrice des raideurs. Dans ce développement analytique, on fait les hypothèses suivantes :

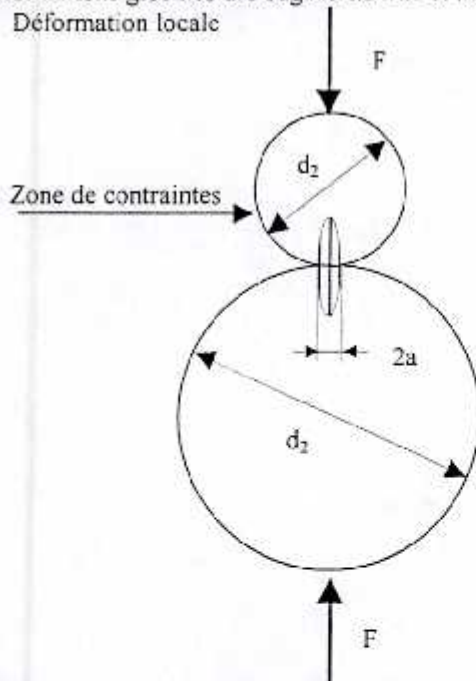
Hypothèses :

- On suppose que la déformation est semblable sur la bille et sur la bague (même surface de contact),
- on ne tient pas compte de l'épaisseur et de la raideur du film d'huile qui s'interpose entre la bille et les bagues,
- on ne tient pas compte des déformations globales respectivement de la bague intérieure et de l'arbre, de la bague extérieure et la structure d'accueil,
- on ne tient pas compte du jeu de fonctionnement avant et après montage ; puisqu'on ne s'intéresse qu'à la rigidité du roulement seul.

3.2.3.1 Déplacement radial

Pour obtenir le déplacement radial, on considère les déformations de la rangée de billes, des bagues intérieure et extérieure. On utilise la loi de HERTZ[11] de la mécanique de contact pour déterminer la déformation locale et les lois d'élasticité pour la déformation globale de la bille. On ne tiendra pas compte des déformations globales des bagues externe et interne. On calcule la force radiale appliquée sur une bille.

a) Déformation locale



Soit une force F appliquée sur deux objets (sphères/cylindres) (σ_1) et (σ_2) en contact, sur une aire (circulaire/rectangulaire) (fig. 3-9). Ces objets ont respectivement des diamètres d_1 et d_2 , des modules d'Elasticités E_1 et E_2 et des coefficients de Poisson ν_1 et ν_2 .

Si on suppose que le contact est parfaitement élastique, la largeur de l'aire circulaire/rectangulaire de contact est définie par[11]:

Pour une Sphère

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{8 (1/d_1) + (1/d_2)}}$$

Pour un Cylindre de longueur l

$$a = \sqrt{\frac{2F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{\pi l (1/d_1) + (1/d_2)}}$$

Fig3-9 Contact entre deux sphères

Remarque : le diamètre (d) est considéré infini pour le cas d'un plan et avec signe négatif pour le cas d'un contact à l'intérieure d'une sphère.

Cas traité :

Le roulement[11](fig. 3-10-11-12) présente une bille disposée dans un logement constitué d'une partie gravée sur la bague supérieure et une autre sur la bague intérieure. Le contact sur la partie supérieure est du type d'une sphère placée à l'intérieure d'une boule creuse, cette dernière présente une forme ovoidale ayant dans ses deux plans de base deux cercles de diamètres différents. Le contact inférieur est d'un type complexe avec sur un plan une sphère posée à l'intérieur d'une autre et sur l'autre plan d'une sphère placée sur une autre.

Ainsi, le contact selon le plan longitudinal est situé dans un logement de diamètre d_{log} . Le contact sur le plan transversal est sur sa partie supérieure un diamètre d_{ext} et sur la partie inférieure un diamètre d_{int} .

La surface de contact est alors non plane et à une surface courbe. La forme projetée sur le plan perpendiculaire aux forces est elliptique de largeur a et de longueur b , avec $a > b$.

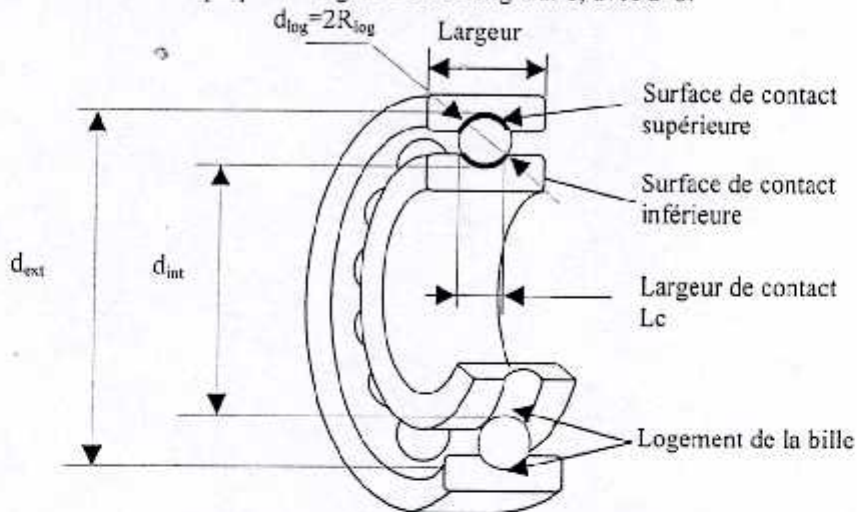


Fig.3-10 Représentation d'une coupe d'un roulement

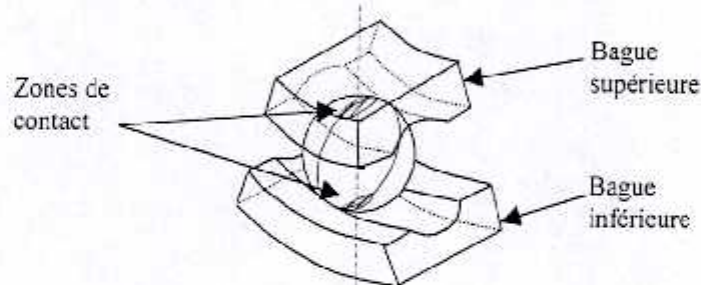


Fig. 3-11 Ellipse de contact

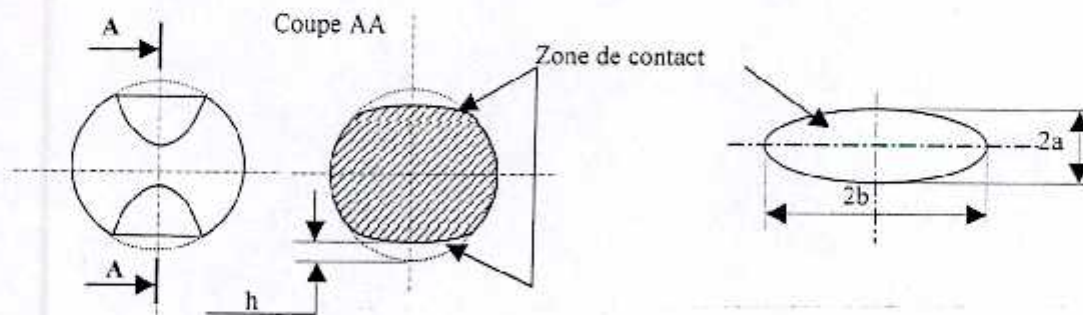


Fig. 3-12 Schéma de la surface de contact de la bille avec les bagues supérieure et inférieure

Le rapport entre le rayon de courbure du logement et le diamètre de la bille (R_{log}/d_{bille}) est de $\pi = 0.52$ [39,40]. Le contact est ponctuel sans charge, mais sous chargement il devient sous la forme d'une ellipse de contact.

On définit les diamètres extérieur et intérieur par la relation :

$$D_{prim} = (D_{ext} + D_{int})/2 ; \quad d_{ext} = D_{prim} + d_b ; \quad d_{int} = D_{prim} - d_b ; \quad d_{log} = (1 + 2 \cdot \epsilon) d_b$$

Avec : D_{ext} : diamètre extérieur du roulement, D_{int} : diamètre intérieur du roulement, D : diamètre passant par les centres des billes, d_b : diamètre de la bille.

Calcul de la surface de contact :

On démontre [21] que pour le contact avec la bague supérieure ou inférieure, le diamètre du logement donne une la largeur de contact plus grande que celle des diamètres des deux bagues ; c.-à-d. $2b > 2a$.

Le problème est dû à la forme de l'aire de contact sous forme d'une ellipse courbée dans l'espace et non pas une aire circulaire plane. Cette difficulté résulte de la forme géométrique du logement. Alors que, la formulation ne permet pas de calculer que pour le contact de deux formes géométriques semblables.

On se propose d'émettre l'hypothèse suivante : La déformation radiale aux sommets de la bille est due essentiellement aux empreintes des bagues supérieure et inférieure.

Calcul de la déformation :

a) déformation locale:

Une sphère (s) (fig. 3-13) ou un cylindre qui subit un «aplatissement» a sa hauteur dans cette direction réduite[11].

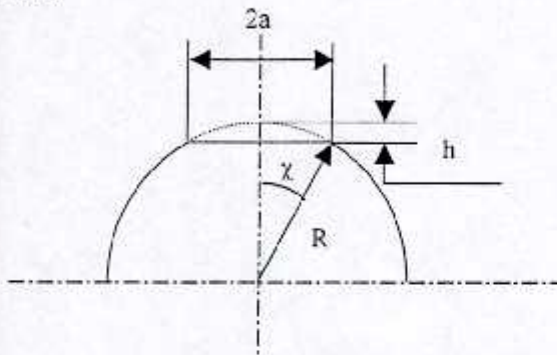


Fig. 3-13 Déformation locale d'une bille

Pour déterminer la hauteur de déformation h connaissant a, on a :

$$R^2 = (R-h)^2 + a^2$$

d'où

$$h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

ou encore :

$$\text{tg } \chi = a/(R-h)$$

et

$$\sin \chi = a/R$$

d'où :

$$h = R - a/\text{tg}[\text{arc sin}(a/R)]$$

Etant donné qu'une bille de roulement est en contact sur deux surfaces radiales par les bagues supérieure et inférieure, on aura deux aires et par conséquent deux hauteurs de déformations. La déformation locale totale sera la somme des deux.

$$h_{LT} = h_{sup} + h_{inf}$$

b) Déformation globale :

Pour étudier ce cas, on considérera la loi de HOOK[27] pour la déformation en traction/compression d'une poutre sollicitée (fig3 -14) par un chargement surfacique appliqué à ses extrémités.

Par raison de symétrie, on étudie une partie seulement[27].

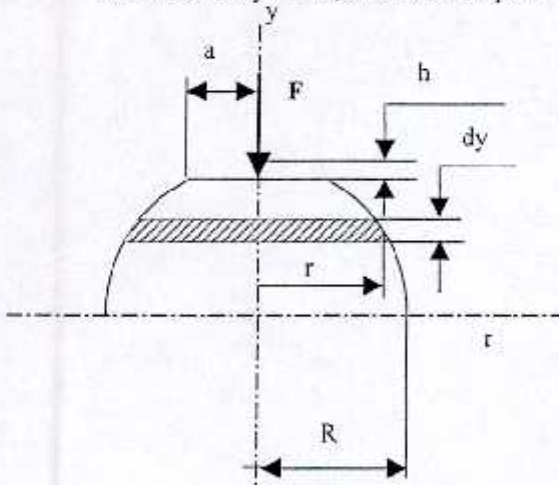


Fig. 3-14 Déformation globale d'une bille

Développement :

Soit un élément de poutre défini par la surface hachurée de longueur dy et de rayon r. L'aire de cet élément poutre est $\Lambda(y) = \pi r^2$.

La loi de Hook[27] pour ce cas est :

$$\frac{du(y)}{dx} = \frac{F}{EA(y)}$$

Avec :

u : déformation selon y.

$$r^2 = R^2 - y^2$$

En faisant un changement de variable adéquat et en intégrant, on aura :

La forme de l'intégrale est :

$$u(y) = \int \frac{F}{EA(y)} dy = \frac{F}{E} \int \frac{1}{\pi(R^2 - y^2)} dy$$

Ayant $y > R$; puisque y évolue dans le domaine $[0 .. (R-H)]$. La condition de non-singularité est satisfaite au point $(y=R)$.

La résolution de l'intégrale :

$$u(y) = \left[\frac{F}{\pi E d} \ln \left[\frac{R+y}{R-y} \right] \right] + c1$$

Les conditions aux limites :

$u(y = R-h) = u$ (déplacement global) ;

$u(y = 0) = 0$ (par symétrie)

Le calcul de l'intégrale à partir de y compris entre le centre et l'aire de la déformation locale donne :

$$u = \frac{F}{\pi E d_i} \ln \left[\frac{d_b}{h} - 1 \right]$$

On remarque que la déformation globale dépend de l'aire résultant de la déformation locale et par conséquent de la déformation locale.

La déformation globale totale est : $h_{GT} = u_{inf} + u_{sup}$

La déformation totale de la bille est alors :

$$h_T = h_{LT} + h_{GT} = h_{sup} + h_{inf} + u_{inf} + u_{sup}$$

ou encore :

$$h_T = h_T(E_i, d_i, d_b, F)$$

Avec : h_T : Fonction mathématique non linéaire, E_i : modules d'élasticité,
 d_i : diamètre au niveau des zones de contact, d_b : diamètre de la bille,
 F : force radiale appliquée,
 i : indice désignant bague extérieure (ext. ou 1) et intérieure (int ou 2).

Calcul du déplacement radial résultant :

- Le cumul des déformations successives de la bille et des deux bagues sous l'effet de la force radiale. l'axe du roulement se déplace radialement d'un déplacement δr . Alors, on aura :

$$\delta r = h_T = 2(h_{LT} + h_{GT})$$

c) Détermination de la force F_r appliquée radialement pour chacune des billes

Pour le calcul de la force radiale, on ne considère qu'une partie de la rangée des billes du roulement sous charge (fig. 3-15). On estime la moitié des billes $n' = n/2$.

On subdivise le roulement en plusieurs secteurs correspondant à chaque bille et dont la taille est fixée par la répartition angulaire égale à $\varphi_n = 2\pi/n$.

Pour simplifier le calcul, on remplacera la force F par une force répartie $q(z)$ appliquée selon l'axe y

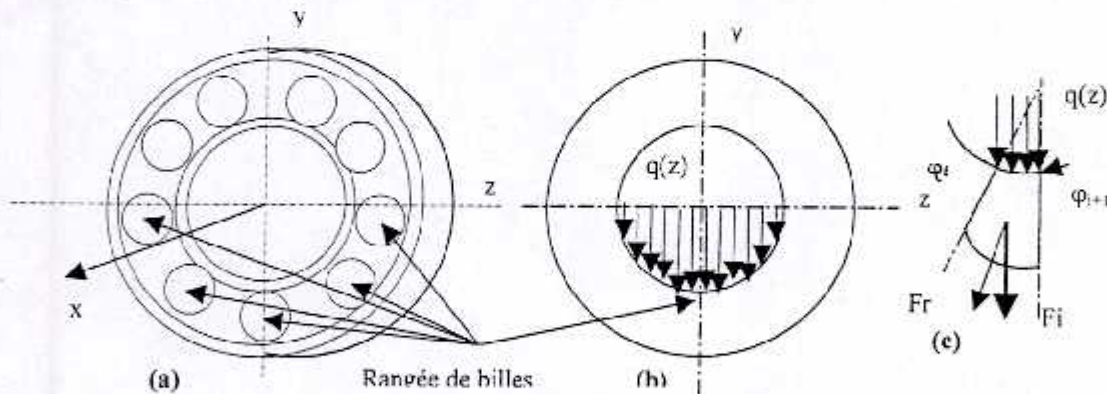


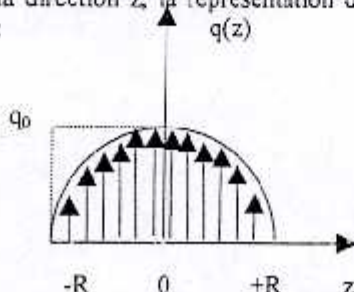
Fig. 3-15 Application d'une force sur une rangée de bille

(a) Rangée sollicitée
 (b) Répartition des forces

a) Répartition des forces q

La répartition du chargement de force est faite sur la surface intérieure de la bague définie en profondeur sur une largeur L_c et sur la demi-circonférence de la bague (fig. 3-16).

Selon la direction z , la représentation de ces forces $q(z)$ sur la bague intérieure peut se faire sous la forme suivante :



On pose alors la relation suivante :

$$q(z) = q_0 \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R}$$

Selon la direction x , la répartition est supposée uniforme telle que :

$$q(x) = C^{te}$$

Fig. 3-16 Répartition des forces sur la rangée de bille

La force totale appliquée s'exprimera alors :

$$F = Lc \int_{-R}^{+R} q(z).dz$$

On procède par le changement de variable :

d'où :

$$z = R \cos \alpha \quad \text{pour } -R < z < +R \text{ ou } \pi < \alpha < 0$$

$$dz = -R \sin \alpha d\alpha$$

Si I est l'intégrale s'exprimant :

$$I = \frac{Lc q_0 R^2}{R} \int -\sin \alpha \cdot \sin \alpha d\alpha = Lc q_0 R \int -\sin^2 \alpha d\alpha$$

l'intégration par partie donne :

$$I = -Lc q_0 R \left[-\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \int -\cos^2 \alpha d\alpha \right]$$

$$I = +Lc q_0 R \left[+\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \int (1 - \sin^2 \alpha) d\alpha \right]$$

$$I = +Lc q_0 R \left[+\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \int d\alpha + \int \sin^2 \alpha d\alpha \right]$$

$$I = +Lc q_0 R \left[+\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \int d\alpha - I \right]$$

$$I = \frac{Lc q_0 R}{2} \left[+\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \alpha \right]_x^y$$

$$I = \frac{Lc q_0 R}{4} \left[+\cos 2\alpha \dots - 2\alpha \right]_x^y$$

En intégrant q sur la surface de contact, on obtient la relation entre F et q_0 , telle que :

$$F = \frac{Lc \pi q_0 R}{2}$$

$$q_0 = \frac{2F}{RLc\pi}$$

b) calcul du chargement résultant pour une tranche de l'arc $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$

On doit reformuler $q(p)$ en fonction de φ avec un changement de variable adéquat, on obtient :

$$q = q(\varphi)$$

On procède par le changement de variable : $z = R \cos \varphi$

d'où :

$$q(\varphi) = q_0 \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = q_0 \cdot \sin \varphi$$

le chargement total F_i pour une tranche (i) est :

$$F_i = Lc \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} q(\varphi) dz = Lc R q_0 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} -\sin^2 \varphi d\varphi$$

Avec : $\varphi_{i+1} = \varphi_i + (\varphi_n = 2\pi/n) = \varphi_i + 2\pi/n$
on aura :

$$F_i = \frac{Lc R q_0}{4} \left[\cos 2\varphi - 2\varphi \right]_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} = \frac{Lc R q_0}{4} \left[\cos 2\varphi - 2\varphi \right]_{\varphi_i}^{\varphi_i + 2\pi/n}$$

$$F_i = \frac{Lc R q_0}{4} \left[\cos 2(\varphi_i + 2\pi/n) - 2(\varphi_i + 2\pi/n) - \cos 2(\varphi_i) + 2(\varphi_i) \right]$$

$$F_i = \frac{Lc R q_0}{4} \left[\cos 2(\varphi_i + 2\pi/n) - \cos 2(\varphi_i) - 4\pi/n \right]$$

c) Chargement radial et tangentiel

Le chargement total appliqué à deux composantes (fig. 3-17) l'une est radiale et l'autre est tangentielle. Avec un angle ϕ_i , donné comme suit :

Pour $\pi < \phi_i < 2\pi$

Si $\phi_i < 3\pi/2$ $\phi_i = (\phi_i + \phi_{i+1})/2 - \pi$
 si $\phi_i > 3\pi/2$ $\phi_i = -[2\pi - (\phi_i + \phi_{i+1})/2]$

On aura :

$F_{ri} = -|F_i| \sin \phi_i$

et

$F_{ti} = +|F_i| \cos \phi_i$

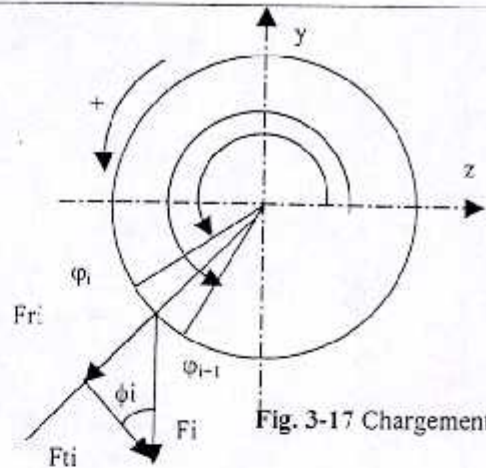


Fig. 3-17 Chargement radial

On remarque que la force tangentielle F_{ti} de signe positif dans la première partie et de signe contraire dans la deuxième.

On appliquera chacune des F_i à la bille correspondante, on obtiendra les déformations locales et globales au niveau de chacune d'elles.

La force maximale $F_{r_{max}}$ est pour la bille au milieu, pour $\phi_i = [3\pi/2 - \phi_n/2, 3\pi/2 + \phi_n/2]$

d) Calcul de la déformation totale de la cage de billes sollicitées (engagées).

Vu la différence de pression appliquée sur les différentes billes, la répartition de la déformation radiale (fig. 3-18) totale est globalement telle que :

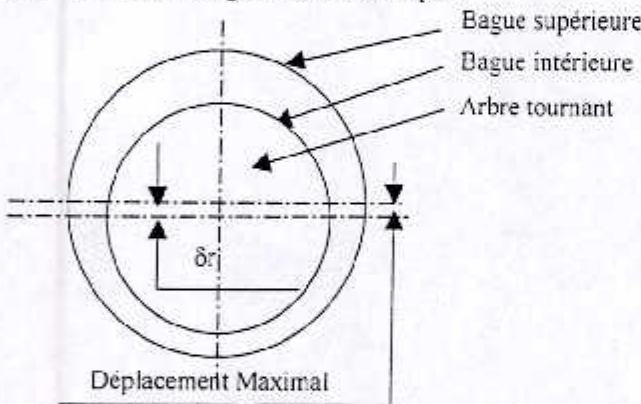


Fig. 3-18 Schéma de la déformation totale d'un roulement sur la tranche de roulement engagé.

On remarque que la déformation totale peut être représentée par un déplacement du à la déformation de la cage de roulement ou l'espace annulaire contenant les billes.

Cette représentation rappelle celle du palier lisse.

Le déplacement δr total peut être assimilé au déplacement max.

Généralement, ce déplacement est enregistré pour la ou les billes les plus engagées.

Dans notre cas la bille se trouvant sur l'axe y en bas ou les deux billes se trouvant de part et d'autre de cet axe.

Vu que la déformation maximale est obtenue pour la partie basse, seulement la déformation maximale et la force maximale sont considérées. On aura :

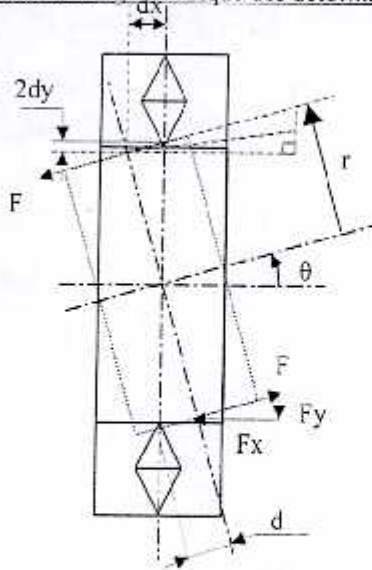
$\delta r_{Max} = h_{T_{max}}$

3.2.3.2 Déplacement angulaire

Le calcul du déplacement radial passe par la compréhension du phénomène et son interprétation. La modélisation adoptée pour représenter ce phénomène suit les étapes suivantes :

- La modélisation géométrique des déformations,
- La modélisation du moment par des couples de forces,
- La modélisation des couples de forces par une répartition de forces,
- Calcul des forces équivalentes appliquées sur les billes,
- Calcul des déformations sur les billes et les bagues,
- Calcul de l'angle de rotation par le calcul des déplacements (déformations) causés. Ce calcul se base sur la méthode précédemment adoptée pour le calcul du déplacement radial.

Modélisation géométrique des déformations



La modélisation géométrique adoptée se base sur la modélisation de la figure 3-19. Une représentation plane du roulement, la représentation des billes par des triangles, la bague intérieure par un rectangle.

Cette représentation illustre que, sous l'effet d'un moment, des couples de forces de déformations verticale et horizontale apparaissent et créent des déformations verticales dy et horizontales dx, telles que.

Couples de forces :

$$F_y = F \sin \theta$$

$$F_x = F \cos \theta$$

Déformations :

$$2dy = d \sin \theta$$

$$dx = d \cos \theta$$

Fig. 3-19 Modèle géométrique de la déformation angulaire

Modélisation des moments

Sachant qu'une force de moment M peut être représentée par un couple de forces, tel que :

$$M = F \cdot r$$

Avec :

- r : distance du point d'application de F à l'axe,
- R : rayon externe de la bague intérieure.

Modélisation de la répartition des couples de force

En effet, le couple de force est appliqué tout au long du périmètre de la bague intérieure (fig. III-20) avec une représentation ressemblant au cas traité précédemment dans le calcul du déplacement radial.

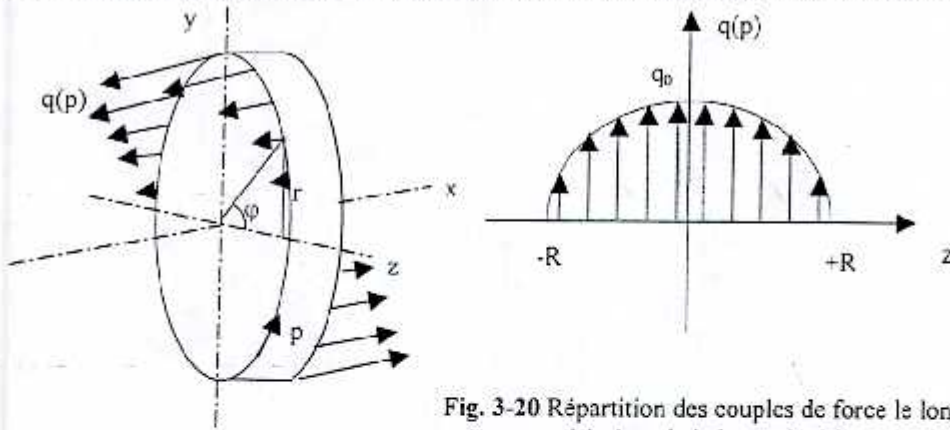


Fig. 3-20 Répartition des couples de force le long du périmètre de la bague intérieure

On pose :
$$q(z) = q_0 \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R} \quad \text{pour } -R < z < +R$$

ou encore :
$$q(\varphi) = q_0 \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = q_0 \cdot \sin \varphi \quad \text{pour } -\pi/2 < \varphi < +\pi/2$$

Le moment total le long du périmètre sera :

$$dM = dF \cdot r(\varphi)$$

$$dF = q(\varphi) \cdot R \cdot d\varphi \quad (\text{défini sur le périmètre p})$$

$$M = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} q(\varphi) \cdot r(\varphi) \cdot R \cdot d\varphi$$

Avec : p : périmètre défini par $p = R \cdot \varphi$ et $dp = R \cdot d\varphi$
 $r(\varphi)$: bras de levier défini par $r(\varphi) = R \cdot \sin(\varphi)$ pour $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$

$$M = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} q_0 \sin \varphi \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi = R^2 q_0 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$M = \frac{R^2 q_0}{4} [-\cos 2\varphi + 2\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{R^2 q_0}{4} [2\pi] = \frac{\pi R^2 q_0}{2}$$

d'où : $q_0 = 2M/(\pi R^2)$

Calcul des forces équivalentes

pour une tranche $\varphi_{i+1} = \varphi_i + (\varphi_n = 2\pi/n) = \varphi_i + 2\pi/n$

$$F_i = \int q(\varphi) R d\varphi = R q_0 \int \sin \varphi d\varphi$$

$$F_i = R q_0 [-\cos \varphi]_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} = R q_0 [-\cos \varphi]_{\varphi_i - 2\pi/n}^{\varphi_i}$$

$$F_i = R q_0 [\cos(\varphi_i + 2\pi/n) - \cos(2\varphi_i)]$$

On aura pour F_{yi} et F_{xi} :

$$F_{yi} = F_i \sin \theta$$

$$F_{xi} = F_i \cos \theta$$

Ayant ces forces, il suffira de calculer les déformations qu'elles causent sur les billes et les bagues supérieure et inférieure.

Calcul des déformations sur les billes et les bagues.

Le calcul des déformations passe par le calcul des forces radiales et tangentielles entrant directement dans la déformation (fig3-21).

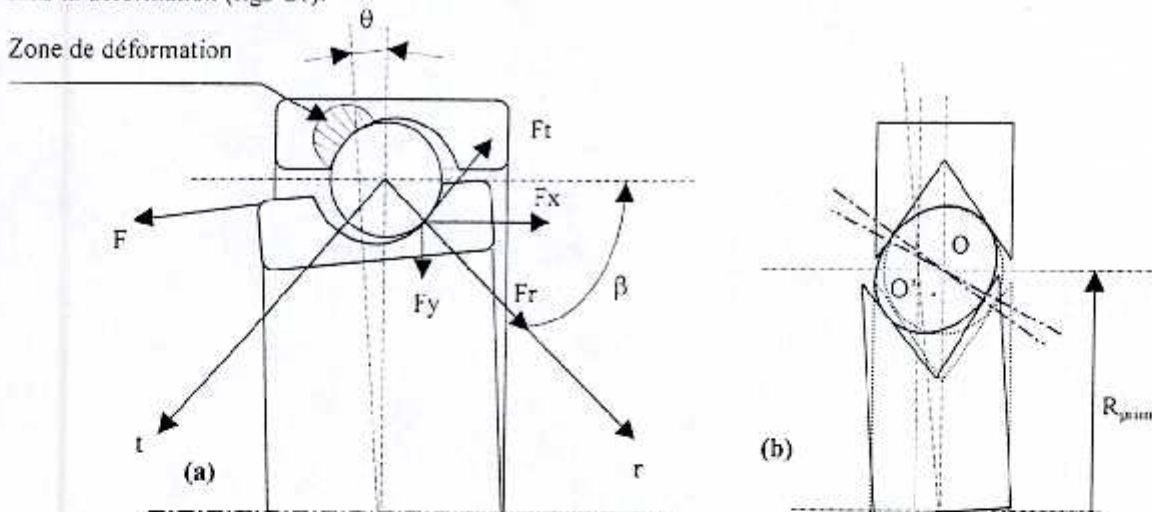


Fig. 3-21 Déformation sous l'effet d'un moment
 (a) Forces résultantes sous l'effet d'un moment
 (b) Mode de déformation

Le passage du repère cartésien au repère polaire s'effectue par la projection de F_x et F_y sur les axes r et t , on les relations algébriques suivante (transformation de rotation d'angle θ) pour:

Les forces :

$$F_r = (F_x + F_y) \cos \beta$$

$$F_t = (F_x - F_y) \sin \beta$$

Les déformations :

$$dr = (dx + dy) \cos \beta$$

$$dt = (dx - dy) \sin \beta$$

Avec :

$$\beta = \pi/2 - \theta$$

ou encore :

$$F_r = F_i (\sin \theta + \cos \theta) \sin \theta$$

$$F_t = F_i (\sin \theta - \cos \theta) \cos \theta$$

et

$$dr = d(\cos \theta + 1/2 \sin \theta) \sin \theta$$

$$dt = d(\cos \theta - 1/2 \sin \theta) \cos \theta$$

Remarque importante : Pour que la bille reste dans le logement, il faut que : $\beta < \beta_2$

Calcul du déplacement angulaire :

Le calcul du déplacement angulaire se confronte à un problème. Il passe par le calcul des forces qui eux-mêmes dépendent de cet angle. Une autre relation doit être introduite pour résoudre deux équations à deux inconnues l'angle et le déplacement total. Des hypothèses doivent être émises :

- La bille subit seulement une déformation radiale, la force tangentielle provoque une rotation sans glissement,
- On suppose que les diamètres extérieur et intérieur d_{int} et d_{ext} restent inchangés,
- Angle de rotation θ très petit,
- Si θ est très petit alors, on peut rompre l'interdépendance entre forces et l'angle par la supposition que :

$$F_x \approx F \quad dx \approx d$$

$$F_y \approx 0 \quad dy \approx 0$$

Les relations précédentes deviennent :

$$F_r = F_i \sin \theta \quad dr = dx \sin \theta$$

$$F_t = F_i \cos \theta \quad dt = dx \cos \theta$$

Le calcul de dr se base sur la méthode du calcul du déplacement radiale. Une fois dr connu, le calcul de θ se fait par :

$$\text{tg } \theta = dx / R_{prim}$$

et

$$\sin \theta = dr / dx$$

$$\text{Ayant } \text{tg } \theta \approx \sin \theta \approx \theta$$

On aura :

$$\theta^2 = dr / R_{prim}$$

Avec : R_{prim} : rayon primitif du roulement (confondu avec le centre de la bille)

3.2.3.3 Déplacement axial

Le calcul du déplacement axial passe par la compréhension du phénomène et son interprétation par la suite. La modélisation choisie représente ce phénomène par :

- La modélisation géométrique des déformations,
- La modélisation de la force axiale par une répartition uniforme de force,
- Le calcul des forces équivalentes appliquées sur les billes.
- Le calcul des déformations sur les billes et les bagues,
- Le calcul du déplacement axial se base sur la méthode précédemment adoptée pour le calcul du déplacement radial.

Modélisation de la déformation axiale

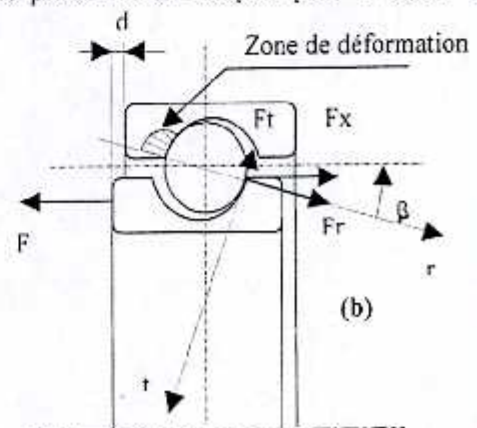
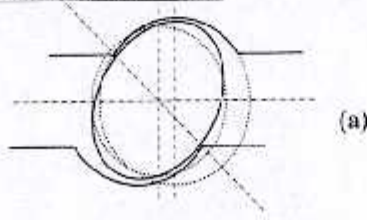


Fig. 3-22 Déformation sous l'effet d'une force axiale
 (a) Forces axiales résultantes
 (b) Mode de déformation

La représentation (fig3-22) montre que le contact d'une bille sur l'autre comme sur la bague est latéral et partiel. Cette situation donne position différente des cas précédents. Le contact devient bille sur un plan.

Modélisation de la répartition des forces

En effet, le couple de force est appliqué tout au long du périmètre de la bague intérieure avec une représentation (fig. 3-23) ressemblant au cas traité précédemment dans le calcul du déplacement radial.

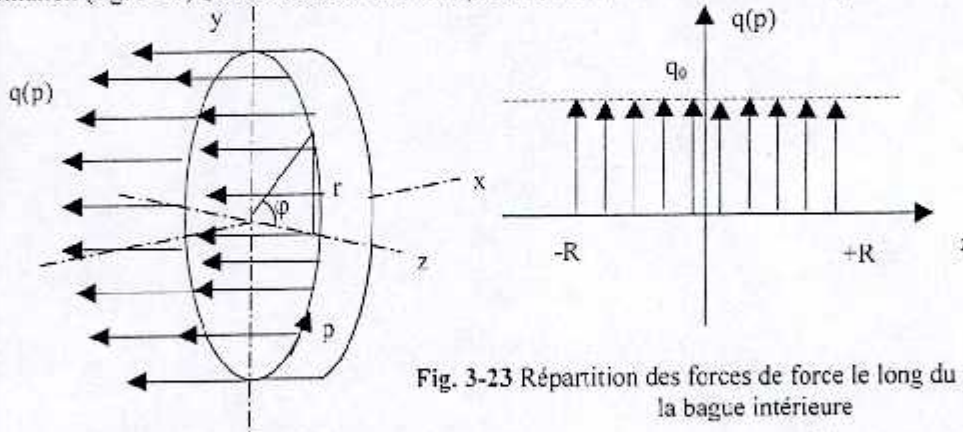


Fig. 3-23 Répartition des forces de force le long du périmètre de la bague intérieure

Le chargement uniforme est sous la forme : $q(p) = q_0$
 q_0 est obtenu par l'intégration de $q(p)$ le long du périmètre (p), tel que :

$$F = \int q(p).dp = \int_0^{2\pi} Rq.(p)d\varphi = 2Rq_0$$

$$q_0 = \frac{F}{2R\pi}$$

Avec : R : rayon extérieur de la bague intérieure.

Force appliquée sur une bille

Le chargement appliqué pour une bille est alors :

$$F_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} q(p).dp = Rq_0 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi = Rq_0[\varphi_{i+1} - \varphi_i]$$

$$F_i = \frac{2\pi Rq_0}{n}$$

Calcul de l'angle de contact β

Soient :

$$h = (R_{1e} + R_{2i})/2$$

et

$$\sin\beta = h/db$$

Avec :

- R_{1e} : rayon externe de la bague intérieure,
- R_{2i} : rayon interne de la bague extérieure,
- R_b : rayon de la bille.

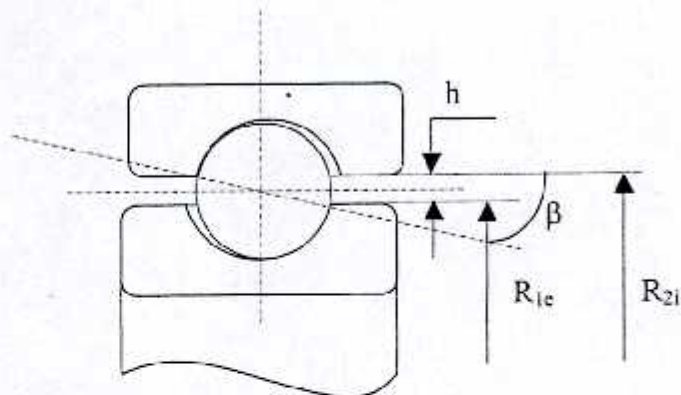


Fig. 3-24 Représentation de l'angle de contact

Le calcul de l'angle β (fig. 3-24) donne les forces radiales et tangentielles appliquées sur la bille.

Calcul du déplacement axial

Etant donné que la déformation axiale occasionnée au niveau d'une bille est semblable pour toutes les autres, il suffit de faire le calcul pour l'une seulement.

La méthode de calcul est semblable aux cas traités mais avec la supposition que d_i (diamètres des sphères où la bille est posée) infini : $d_i \rightarrow +\infty$

Cette opération permet d'obtenir δr . Sachant que :

$$\sin \beta = \delta x / \delta r$$

On aura :

$$\delta x = \delta r \sin \beta$$

3.2.3.4 Calcul de la matrice de rigidité

Matrice de rigidité simplifiée :

Sur la base du modèle de RAJAB :

$$K_{rr} = F_r / \delta r \quad K_{r\theta} = F_r / \theta \quad K_{\theta r} = M / \delta r \quad K_{\theta\theta} = M / \theta$$

Ayant les différents déplacements δx , δr , et θ , on introduit l'effet axial.

Composante axiale :

Vu l'importance du déplacement axial dans le calcul. On se propose de considérer ce paramètre. En effet, à la différence avec les paliers lisses, où l'arbre soumis à des efforts axiaux peut se déplacer axialement sans gêne. Les roulements présentent un obstacle. Leurs rigidités axiales deviennent importantes pour expliquer la contribution des roulements dans le comportement dynamique des machines.

On aura alors, une matrice de rigidité 3×3 .

$$K_{xx} = F_x / \delta x \quad K_{xr} = F_x / \delta r \quad K_{x\theta} = F_x / \theta \quad K_{\theta x} = M / \delta x \quad K_{rx} = F_r / \delta x$$

Effet anisotropique :

On peut supposer qu'au niveau de chaque bille il y a une raideur axiale K_{ri} . On aura deux anneaux circonscrits totalement rigides liés ensemble avec (n) raideurs, disposés sur la circonférence avec une répartition uniforme. Cette illustration permet de considérer le roulement comme ensemble isotrope.

Mais, vu, l'engagement partiel des billes, le caractère anisotrope de la matière, les contacts non uniformes, les différentes hypothèses émises, etc. laissent supposer que le caractère anisotropique est réel.

Matrice de rigidité complète :

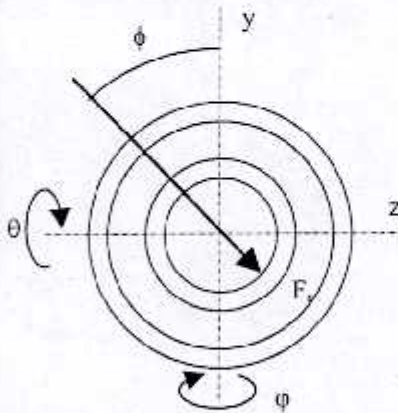


Fig. 3-25 Application d'une force résultante

Le passage de la matrice de rigidité complète dans le repère cartésien $(0, x, y, z)$ (fig3-25) s'obtient par une transformation de la matrice simplifiée ou polaire.

Soit F_r la force résultante appliquée sur un roulement dans le plan $(0, y, z)$. La décomposition de cette dernière en composantes permet le calcul des composantes de la matrice de rigidité complète par la méthode suivante :

$$F_y = F_r \sin \phi$$

$$F_z = F_r \cos \phi$$

et

$$\delta y = \delta r \sin \phi$$

$$\delta z = \delta r \cos \phi$$

De même les déplacements angulaires:

$$\varphi = \theta \text{ (anisotrope)}$$

On aura :

$$\begin{aligned} K_{yy} &= F_y / \delta y = F_r \sin \phi / (\sin \phi \delta r) = F_r / \delta r & K_{xx} &= F_x / \delta x = F_x / \delta x & K_{\varphi\varphi} &= M_y / \varphi = M_y / \theta \\ K_{y\theta} &= F_y / \theta = F_r \sin \phi / \theta & K_{x\theta} &= F_x / \theta = F_x / \theta & K_{\varphi x} &= M_y / \delta x = M_y / \delta x \\ K_{y\varphi} &= F_y / \varphi = F_r \sin \phi / \theta & K_{x\varphi} &= F_x / \varphi = F_x / \theta & K_{\varphi\theta} &= M_y / \theta = M_y / \theta \\ K_{yx} &= F_y / \delta x = F_r \sin \phi / \delta x & K_{xy} &= F_x / \delta y = F_x / (\sin \phi \delta r) & K_{\varphi y} &= M_y / \delta y = M_y / (\sin \phi \delta r) \\ K_{yz} &= F_y / \delta z = F_r \sin \phi / (\cos \phi \delta r) = F_r \tan \phi / \delta r & K_{xz} &= F_x / \delta z = F_x / (\cos \phi \delta r) & K_{\varphi z} &= M_y / \delta z = M_y / (\cos \phi \delta r) \\ K_{zz} &= F_z / \delta z = F_r \cos \phi / (\cos \phi \delta r) = F_r / \delta r & K_{\theta\theta} &= M_z / \theta = M_z / \theta \\ K_{z\theta} &= F_z / \theta = F_r \cos \phi / \theta & K_{\theta x} &= M_z / \delta x = M_z / \delta x \\ K_{z\varphi} &= F_z / \varphi = F_r \sin \phi / \theta & K_{\theta\varphi} &= M_z / \varphi = M_z / \theta \\ K_{zx} &= F_z / \delta x = F_r \cos \phi / \delta x & K_{\theta y} &= M_z / \delta y = M_z / (\sin \phi \delta r) \\ K_{zy} &= F_z / \delta y = F_r \cos \phi / (\sin \phi \delta r) = F_r \cot \phi / \delta r \end{aligned}$$

D'où la matrice de rigidité $[k]_{3 \times 3}$ au lieu de $[K]_{3 \times 3}$.

Procédé de calcul :

Le calcul de la matrice de raideur simplifiée ne semble pas être simple surtout si on ajoute aux difficultés précédentes le problème de la relation non linéaire entre déplacement et force. Par conséquent la rigidité n'est pas une constante.

3.2.3.4 Critiques du Modèle

Les principales critiques de ce modèle portent sur :

- Le découplage de la bague intérieure et extérieure,
- La raideur axiale négligée sur le modèle de base,
- La considération du roulement comme un système isotrope,
- La modélisation des défauts est absente.

3.2.3.5 Modifications et introduction des défauts

3.2.3.5.1 Modèle

Plusieurs modifications ont été portées sur le modèle de base de RAJAB (fig. 3-8). On cite :

- Le calcul analytique des différentes raideurs,
- L'élargissement de la matrice de rigidité simplifiée (polaire) de l'ordre 2×2 à l'ordre 3×3 , par la considération de la composante axiale,
- La considération de l'anisotropie par le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes,

On a :

Ce modèle (fig.3-26) reste incomplet sans l'introduction de la modélisation des défauts mécaniques des roulements.

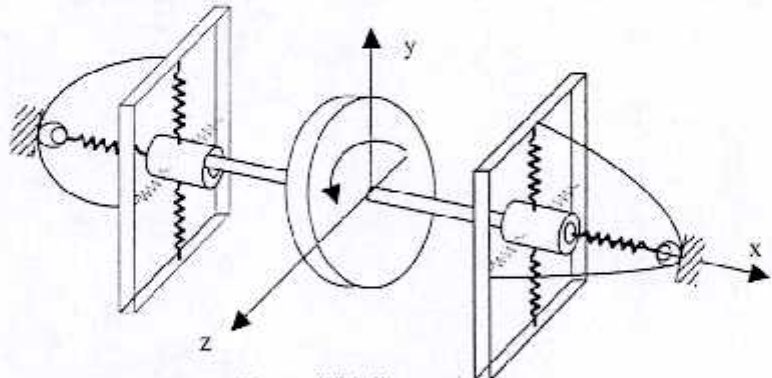


Fig. 3-26 Modèle modifié d'un roulement

3.2.3.5.2 Introduction des Défauts

On propose dans ce qui suit la modélisation des principaux défauts mécaniques des roulements et leur introduction dans le modèle modifié. Soient :

- Un défaut sur la piste intérieure,
- Un défaut sur la piste extérieure,
- Un défaut sur la bille,
- Présence d'une impureté dans le roulement,
- Problème de saut (ou rupture de contact).

Développement de ces défauts :

Les principales formes d'un défaut, sur les pistes des bagues d'un roulement sont : la présence d'une discontinuité dans le chemin sous forme de fissure, de porosité ou de perturbations (exemple l'écaillage).

Une première approche simplifiée [3,29] consiste à modéliser la discontinuité par l'introduction d'un vecteur de forces d'excitation harmonique non synchrone sur la piste supérieure avec une vitesse angulaire de la cage égale à $(0.4.t)$ la vitesse de rotation de l'arbre. On aura :

$$\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} = f_0 \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{bmatrix} e^{j(0.4)\omega t}$$

Avec :

- f_0 : amplitude de la force d'excitation sur la piste extérieure,
 φ_0 : angle de positionnement du défaut dans le roulement,
 n : nombre de billes dans le roulement.

Dans une autre approximation [3,29] similaire pour le cas d'un défaut sur la piste inférieure avec la différenciation entre la vitesse de l'arbre et la cage du roulement, on a :

$$\begin{bmatrix} fy \\ fz \end{bmatrix} = f_i \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \left[e^{j(0.6n+1)\Omega t} + e^{-j(0.6n-1)\Omega t} \right]$$

Avec :

- f_i : force d'excitation sur la piste inférieure,

Une deuxième méthode consiste à modéliser ces défauts et de les introduire dans le calcul des raideurs. Dans ce cas, plusieurs approches peuvent être entamées. Le calcul des raideurs en fonction des diamètres permet d'introduire les variations sur les pistes par la considération des diamètres dynamiques, sous la forme $d_{inf} = d_{inf}(t)$, $d_{sup} = d_{sup}(t)$ et $d_b = d_b(t)$. Une deuxième approche consiste à introduire des paramètres dans la formulation de la raideur obtenue. Ces modifications conduiront à :

$$[K] = [K(t)]$$

Cette modélisation analytique doit tenir compte de la forme du chemin en fonction de la vitesse de rotation relative. On aura pour une discontinuité (fissure) sur une période T de rotation :

$$\begin{aligned} di(t) &= di - \delta i(\tau_i) \\ ds(t) &= di + \delta s(\tau_s) \\ db(t) &= db \pm \delta b(\tau_b) \end{aligned}$$

où :

$$\tau_i = \frac{2}{n} T \left(1 - \frac{d_b}{d_{prim}} \cos \beta \right)^{-1}$$

$$\tau_s = \frac{2}{n} T \left(1 + \frac{d_b}{d_{prim}} \cos \beta \right)^{-1}$$

$$\tau_b = \frac{d_{prim}}{d_s} T \left[1 - \left(\frac{d_b}{d_{prim}} \cos \beta \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\tau_c = 2T \left[1 - \frac{d_s}{d_{prim}} \cos \beta \right]^{-1}$$

On aura par conséquent : $K(t) = K \pm Kd(\tau)$

Avec :

- \pm : signe dépendant du type bosse ou trou ,
 τ : instant de provocation du défaut sur la piste intérieure, supérieure, la bille et la cage.
 n : nombre de bille,
 $Kd(t)$: raideur résultante des perturbations.
 δ : fonction mathématique (pic de DIRAC) nulle pour $t \neq \tau$ pour ce cas et d'amplitude équivalente à la profondeur de la fissure ou de la hauteur de la bosse et d'égale durée pour parcourir la largeur du défaut.

Cette approche risque de ne pas représenter l'effet de la force d'excitation générée ; c.-à-d. de ne pas représenter physiquement le choc mécanique, quand il y a changement brusque de la géométrie lors du mouvement rapide.

Pour répondre à cette interrogation, on propose qu'à ce moment il n'y ait pas de contact pour la bille en présence de la discontinuité. Par conséquent, la raideur se retrouve modifiée subitement. Le système est soumis alors, à un mouvement accéléré de « chute » suivi par un choc, lors du contact. La force d'impact est dérivée de l'énergie cinétique.

Le système d'équations différentielles du mouvement dynamique non amorti, lors du choc est:

$$[M]\{\ddot{a}\} + [K(t)]\{q\} = \{f(t)\}$$

Où :

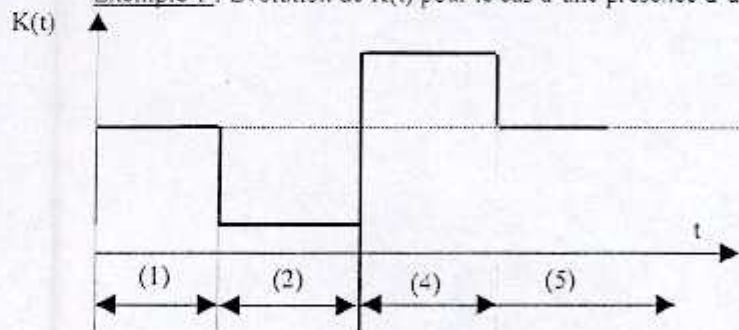
$$\{f(t)\} = f_0 \delta(t)$$

Avec : $\{f(t)\}$: force résultante d'impulsions ou excitations,
 f_0 : force résultante estimée égale aux forces dynamiques mises en action à cet endroit,
 $\{a\}$: vecteur d'accélération.
 La position du défaut est modélisée par un retard τ_{0i} en relation avec la position φ_0 est:

$$\tau_{0i} = \varphi_0 / v_i$$

Avec : i : indice indiquant la bague extérieure, la bague intérieure ou la bille.

Exemple 1 : Evolution de $K(t)$ pour le cas d'une présence d'une cavité dans le chemin.



Commentaire :

- > Zone de rigidité normale,
- > Zone de chute et de contact,
- > Instant d'application de la force d'impulsion,
- > Zone de la nouvelle raideur,
- > Retour à la normale.

(3) Fig. 3-27 Schéma de variation de $K(t)$

Cette modélisation peut représenter l'ensemble des défauts de discontinuité sur les pistes des bagues supérieures, inférieures ou sur la bille. Le défaut de saut est aussi modélisable par une chute de raideur. Par ailleurs, même le cas de présence d'écaillles ou chemin perturbé peut être modélisé par une raideur d'allure perturbée ou ondulée. Des forces d'impulsions résulteront de ces changements subits.

Exemple 2 : Evolution de $K(t)$ en présence d'une piste écaillée

Avec :
 d : diamètre variable sinusoïdalement avec une fréquence (ν) de la piste et son impact (schématisée) sur $K(t)$.

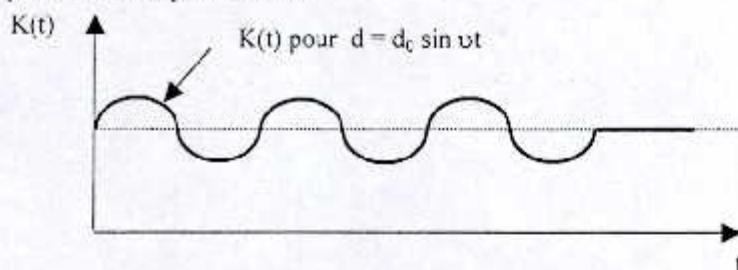


Fig. III-28 modélisation d'une piste écaillée

La présence d'une impureté dans le roulement peut être modélisée par une bosse de la taille de cette impureté sur la piste externe ou inférieure, la raideur introduite en série par cette impureté peut être négligée et on ne tient compte que des modifications géométriques.

Remarque importante: Cette modélisation exige une résolution des équations différentielles du mouvement par les méthodes pas à pas.

3.2.3.5.3 Modes de dégradation

Le mode de dégradation des roulements a été largement détaillé dans la littérature spécialisée. On utilise, souvent, la loi de baignoire paramétrée selon le type de roulement. Ces paramètres sont fournis par les constructeurs.

Une autre approche plus consistante est basée sur :

- Loi de propagation mécanique des fissures,
- Loi de propagation électrochimique des fissures (corrosion),
- Fatigue des matériaux,

Mais une telle étude est très fastidieuse et nécessite un énorme temps de travail et de recherche bibliographique. On se limitera au modèle de Baignoire.

3.3 Palier Lisse

3.3.1 Modèle

Le modèle choisi pour représenter un palier lisse (fig3-30) est tiré des équations de Réynolds [29] pour une position d'équilibre (fig. 3-29). On peut établir les coefficients de raideurs et d'amortissements équivalents.

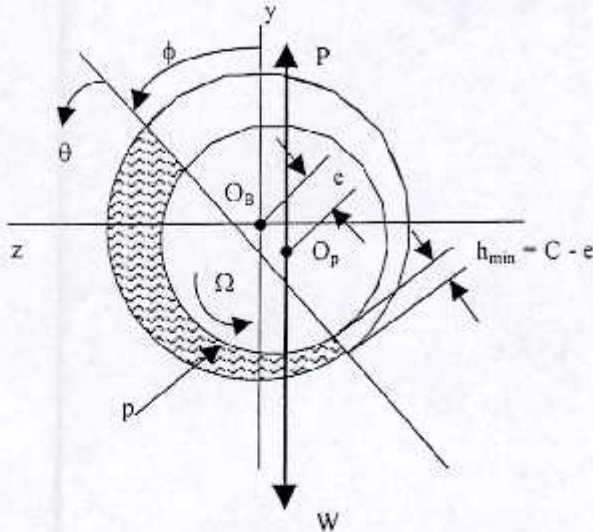


Fig. 3-29 Position d'équilibre dans un palier lisse

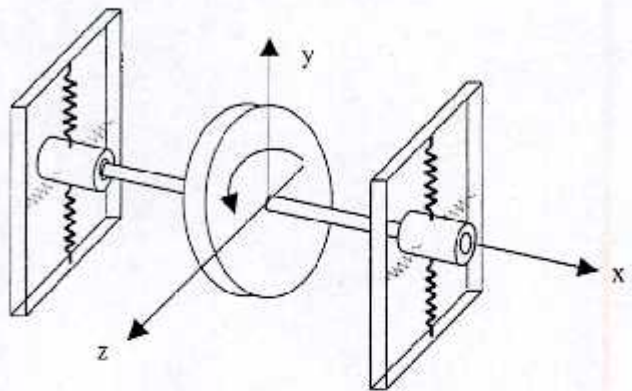


Fig. 3-30 Modèle d'un palier lisse anisotrope

3.3.2 Choix du modèle

Le choix de cette modélisation est animé par le souhait d'atteindre une représentation simple et linéaire pouvant représenter le plus grand nombre possible de cas de comportement des paliers lisses dans les machines tournantes.

Cette modélisation repose sur la considération d'une représentation plane du phénomène et permet de calculer les propriétés mécaniques par rapport à une position d'équilibre donnée. Par ailleurs, elle permet l'apport de modifications et l'introduction d'autres paramètres, ce qui facilite son amélioration.

3.3.3 Développement Analytique

Position d'équilibre[29]:

L'équilibre des charges dans un palier cylindrique plan-hydrodynamique introduit la notion d'une position d'équilibre à une excentricité $e = O_B O_p$ par rapport au centre géométrique O_B .

$$e = c/C$$

et la charge addimensionnelle nommée nombre de SOMMERFELD [29] $S = 1/p_{moy}$ (p_{moy} pression moyenne):

$$S = \frac{\mu N D L}{W} \left[\frac{R}{C} \right]^2$$

- Avec :
- N : vitesse de rotation [tr/s],
 - W : charge ou poids de l'arbre,
 - μ : coefficient de viscosité du lubrifiant [1.00254×10^{-3} N.s/m²],
 - R : rayon du palier,
 - C : "clearance radiale" épaisseur de l'anneau formé entre l'arbre et le palier.

Le modèle des forces[29]:

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (3-3-1)$$

L'expression de l'équation de REYNOLDS en coordonnées cylindriques (r, θ , x) pour un écoulement laminaire, isotherme et isovisqueux s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3-3-2)$$

Avec : h : l'épaisseur du film d'huile,
 p : la pression,
 θ : angle,
 Ω : vitesse de rotation

La résolution de cette équation donne plusieurs solutions selon les conditions initiales et aux limites considérées et selon le type de palier (court ou long). Parmi celles qu'on trouve dans la littérature on présentera :

1. condition de SOMMERFELD [29] (palier à 360°) :

$$p(\theta, x) > 0 \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi$$

$$p(\theta, x) = -p(2\pi - \theta, x)$$

Cette condition suppose que :

- $p=0$ à $\theta=0$ et π
- la pression est antisymétrique autour de $\theta = \pi$
- une pression négative est générée pour $\pi < \theta < 2\pi$

Dans cette région la pression considérée est actuellement identifiée à la pression atmosphérique et représente la rupture du film d'huile.

2. Condition GÜMBEL [29] (moitié SOMMERFELD) (palier à 180°):

$$p(\theta, x) > 0 \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi$$

$$p(\theta, x) = 0 \quad \text{pour } \pi \leq \theta < 2\pi$$

La pression négative de SOMMERFELD [29] est remplacée par la pression atmosphérique ; puisqu'elle est à l'état libre. Mais cette condition reste physiquement impropre parce que la condition de continuité de l'écoulement n'est pas satisfaite.

3. Condition REYNOLDS[29]:

$$p(\theta, x) > 0 \quad \text{pour } 0 < \theta < \theta^*$$

$$p(\theta, x) = 0 \quad \text{pour } \theta^* \leq \theta < 2\pi$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = \theta^*$$

Les différentes solutions existantes pour les cas de palier court et palier long. Un palier est considéré court si le rapport de sa longueur sur son diamètres (L/D) est inférieur à un (1) si non il est considéré long.

Palier court ($L/D < 1$) [29]:

Dans ce cas le terme $(\partial p / \partial \theta)$ de l'équation (3-3-2) est négligé et la solution devient [29]:

$$\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3-3-3)$$

Si on suppose l'épaisseur du film d'huile comme :

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) = C - y_p \cos(\theta + \phi) - z_p \sin(\theta + \phi) \quad (3-3-4)$$

Avec : (y_p, z_p) : coordonnées du centre du palier,
 L'équation peut être simplifiée en:

$$\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = A(\theta) \quad (3-3-5)$$

Où :

$$h(\theta) = \Omega \{y_p \sin(\theta + \phi) - z_p \cos(\theta + \phi)\} - 2 \{y'_p \cos(\theta + \phi) + z'_p \sin(\theta + \phi)\} \quad (3-3-6)$$

Pour la condition au limite : $p(\theta, x)_{x=0, L} = 0$

Le profil de pression est donné :

$$p(\theta, x) = \frac{3\mu\alpha(x-L)}{h^3} A(\theta) \quad (3-3-7)$$

La force complexe $F = F_y + jF_z$, s'exprime :

$$F = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p(\theta, x) R^{j(\theta-\phi)} d\theta dx \quad (3-3-8)$$

$$F = \frac{\mu RL^3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{A(\theta)}{h(\theta)^3} e^{j(\theta+\phi)} d\theta$$

On tient compte de la cavitation au niveau film d'huile dans l'analyse en négligeant les pressions négatives dans le calcul de l'intégral. L'introduction des valeurs addimensionnelles donne [29]:

$$Y_p = y_p/C; Z_p = z_p/C; \dot{Y}'_p = y'_p/(C\Omega); \dot{Z}'_p = z'_p/(C\Omega); \quad (3-3-9)$$

$$H_p = 1 - Y_p \cos(\theta + \phi) - Z_p \sin(\theta + \phi)$$

D'où :

$$F = \frac{\mu RL^3 \Omega}{2C^2} \int_0^{2\pi} \frac{Y_p \sin(\theta + \phi) - Z_p \cos(\theta + \phi) - 2\dot{Y}'_p \cos(\theta + \phi) + \dot{Z}'_p \sin(\theta + \phi)}{H_p^3} e^{j(\theta+\phi)} d\theta \quad (3-3-10)$$

L'incrément $\{f\}$ des forces appliquées au film d'huile peut être exprimé par des matrices de rigidité et d'amortissement linéaire dans une petite zone proche de la position d'équilibre (y_e, z_e) [29].

$$f_y = -[k_{yy} y + k_{yz} z] - [c_{yy} y' + c_{yz} z'] \quad (3-3-11)$$

$$f_z = -[k_{zy} y + k_{zz} z] - [c_{zy} y' + c_{zz} z']$$

avec :

$$y = y_p - y_e \quad z = z_p - z_e$$

$$f_y = F_y - F_{ye} \quad f_z = F_z - F_{ze}$$

et

$$k_{yy} + jk_{zy} = -(\partial F_y / \partial y)_e - j(\partial F_z / \partial y)_e =$$

$$= - \frac{\mu RL^3 \Omega}{2C^3} \int_0^{\theta'} \frac{H_e \sin(\theta + \phi) + 3 \cos(\theta + \phi) \{Y_e \sin(\theta + \phi) - Z_e \cos(\theta + \phi)\}}{H_e^4} e^{j(\theta+\phi)} d\theta$$

$$k_{yz} + jk_{zz} = -(\partial F_y / \partial z)_e - j(\partial F_z / \partial z)_e =$$

$$= - \frac{\mu RL^3 \Omega}{2C^3} \int_0^{\theta'} \frac{-H_e \cos(\theta + \phi) + 3 \sin(\theta + \phi) \{Y_e \sin(\theta + \phi) - Z_e \cos(\theta + \phi)\}}{H_e^4} e^{j(\theta+\phi)} d\theta$$

$$c_{yy} + j c_{zy} = -(\partial F_y / \partial \dot{y})_e - j(\partial F_z / \partial \dot{y})_e = \frac{\mu RL^3}{2C^3} \int_0^{\theta'} \frac{2 \cos(\theta + \phi)}{H_e^3} e^{j(\theta+\phi)} d\theta$$

$$c_{zy} + j c_{zz} = -(\partial F_z / \partial \dot{y})_e - j(\partial F_z / \partial \dot{z})_e = \frac{\mu RL^3}{2C^3} \int_0^{\theta'} \frac{2 \sin(\theta + \phi)}{H_e^3} e^{j(\theta+\phi)} d\theta$$

L'intégrale est calculée dans la zone de pression positive sous les conditions d'étude. Le film d'huile est discontinu à cause de son inhabilité pour supporter la pression négative dans cette zone. Durant cette opération, les ruptures et les cavitations du film d'huile aux endroits supérieurs à 180° de l'arc sont le cas le plus fréquent[29].

Pour les petits paliers à 180° les matrices addimensionnelles de la rigidité et de l'amortissement sont :

$$K_{ij} = (k_{ij}C/W) \text{ et } C_{ij} = c_{ij}C\Omega/W \quad i, j = y, z$$

On aura :

$$K_{yy} = \frac{4\{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4\}Q(\varepsilon)}{(1 - \varepsilon^2)}$$

$$K_{yz} = \frac{\pi\{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4\}Q(\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}$$

$$K_{zz} = \frac{-\pi\{\pi^2 - 2\pi^2\varepsilon^2 - (16 - \pi^2)\varepsilon^4\}Q(\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}$$

$$K_{\dots} = 4\{2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2\}Q(\varepsilon)$$

et

$$C_{yy} = \frac{2\pi\{\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4\}Q(\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}} \quad (3-3-12)$$

$$C_{yz} = C_{zy} = 8\{\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2\}Q(\varepsilon)$$

$$C_{\dots} = \frac{2\pi\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}\{\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2\}Q(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

avec:

$$Q(\varepsilon) = \frac{1}{\{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2\}^{3/2}}$$

ε : le rapport d'excentricité se trouvant dans le palier lisse.

L'étude de la position d'équilibre sous charge quelconque avec un calcul itératif en utilisant le nombre SOMMERFELD, donne [29]:

$$S_s(\varepsilon) = S[L/D]^2 = S_B \Omega^*[L/D]^2 = S_s(\varepsilon) = \frac{\mu N}{W} \left[\frac{R}{C} \right]^2 \frac{L^3}{D} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\pi \varepsilon \sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}} \quad (3-3-13)$$

(ε) est déterminée par la résolution de l'équation 3-3-13). Une méthode itérative permet de faire cette résolution.

On aura, par la suite la position d'équilibre, telle que :

$$Y_e = (y_e/C) = -\varepsilon \cos \phi$$

$$Z_e = (z_e/C) = -\varepsilon \sin \phi$$

D'où :

$$\phi = \arctg \left[\frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{4 \varepsilon} \right] \quad (3-3-14)$$

Dans le cas des conditions aux limites de GÜMBEL (palier à 180°), propose :

$$K_{ij} = kij/(2\pi S_s(\varepsilon)) \quad \text{et} \quad C_{ij} = cij/(2\pi S_s(\varepsilon)) \quad i,j=y,z$$

Palier long ($L/D \gg 1$) [29]:

Dans ce cas, on considère le palier d'une longueur infinie d'où une variation négligeable de la pression par rapport à l'axe x, par conséquent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$$

L'équation (3-3-2) devient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \quad (3-3-15)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$p = 6\mu\Omega R^2 \int \frac{d\theta}{h^2} + 12\mu R^2 \int \frac{1}{h^3} \int h d\theta d\theta + 6\mu R^2 C_1 \int \frac{d\theta}{h^3} \quad (3-3-16)$$

C est une fonction du temps, pour trouver la forme explicite de p on utilise la transformation de SOMMERFELD [1] :

$$\frac{h}{C} = (1 + \varepsilon \cos \theta) = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \chi}$$

Avec : $\chi \rightarrow$: variable

Conditions aux limites de SOMMERFELD :

$$p(0) = p(\pi) = 0$$

Le chargement appliqué :

$$W \cos \phi = \int_0^{2\pi} LRp \cos \theta . d\theta$$

Et

$$(3-3-17) \quad W \sin.$$

$$\phi = - \int_0^{2\pi} LRp \cos \theta . d\theta = \frac{12\pi\mu R\Omega L(R/C)^2 \varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}$$

Pour : $\phi = \pi/2$

Ceci signifie que le déplacement de l'arbre est toujours perpendiculaire au chargement W . Ceci est dû à la pression négative dans la région de cavité. C'est pourquoi le nombre de SOMMERFELD dépend de ε .

$$S = S_B \Omega = \frac{\mu N}{p} \left[\frac{R}{C} \right]^2 = \frac{(2 + \varepsilon^2)\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}{12\pi^2 \varepsilon} \quad (3-3-18a)$$

Pour le de Gümbel (palier 180°) :

$$S = S_B \Omega = \frac{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon\sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 4\varepsilon^2}} \quad (3-3-18b)$$

$$\phi = \arctg \left[\frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2 \varepsilon} \right] \quad (3-3-19)$$

La force complexe est exprimée par :

$$F = \int_0^{2\pi} LRpe^{j(\theta - \phi)} d\theta = F_y + jF_z \quad (3-3-20)$$

Les huit (08) coefficients de rigidités et d'amortissements sont calculés en utilisant la relation (3-3-11).

3.3.4 Critiques du Modèle

On reproche à cette modélisation les points suivants :

- elle n'introduit pas de défauts,
- seule la charge statique du poids est considérée, (équilibre statique),
- représentation plane du phénomène,
- calcul des propriétés à partir d'une position d'équilibre statique,
- les forces de moments, de torsion et axiales sont absentes,

3.3.5 Modifications et introduction des défauts

3.3.5.1 Modèle

a) Raideurs et amortissements de moments de flexion

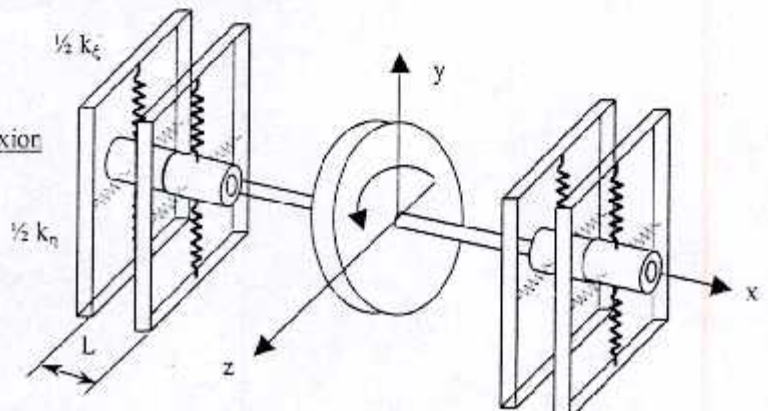


Fig. 3-31 Modèle 3D d'un palier lisse

Vu l'importance des forces de moments de flexion, nous suggérons d'introduire une représentation 3D (fig. 3-31) du palier lisse par le doublement des rigidités et amortissements.

Considérons le cas (fig. III-32) du plan Y-X, on se propose de calculer les raideurs et amortissements équivalents pour l'application des forces de moments M_z et M_y .

Cette approche donne :

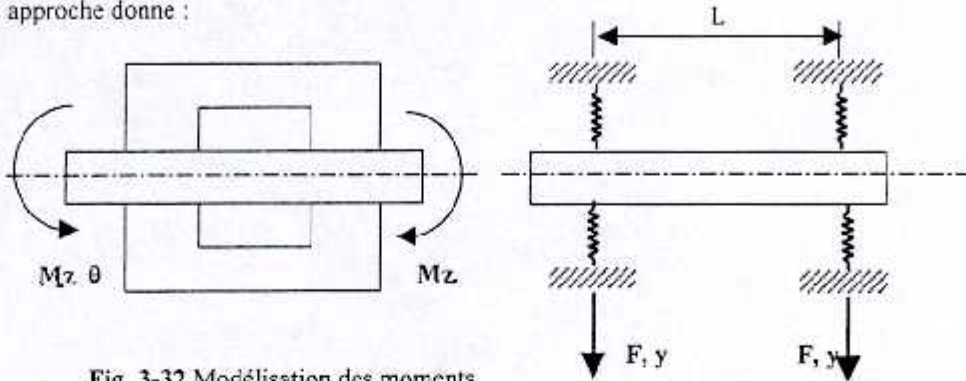


Fig. 3-32 Modélisation des moments

L'équilibre des moments appliqués à l'arbre à l'intérieur du palier donne la rigidité correspondante:

$$M_z = 2 F \cdot L$$

Avec : $F = k_y \cdot y$

$$\theta = y / [(1/2)L] = 2 y / L$$

D'où :

$$M_z = 2 k_y (\theta L / 2) = k_y \theta L$$

Et

$$k_\theta = k_y L$$

Pour le moment M_y :

$$k_\phi = k_z L$$

De même, on peut entendre cette méthode au calcul des amortissements:

$$c_\theta = c_y L$$

et pour le moment M_y :

$$c_\phi = c_z L$$

b) Raideurs et amortissement axiale et de torsion

La raideur axiale et la raideur de torsion sont supposées faibles. Les amortissements axiale et de torsion sont calculables par la loi de NEWTON[11] qui donne pour un cylindre en rotation dans une enceinte cylindrique remplie d'un lubrifiant :

$$F = \mu A \frac{v}{h}$$

Où : $v = \Omega \cdot R$

Avec : F : force tangentielle,
 h : épaisseur du film d'huile,
 A : surface latérale,
 R : rayon du cylindre
 μ : coefficient de viscosité,
 Ω : vitesse de rotation du cylindre,
 v : vitesse tangentielle.

On aura :

$$c_T = \mu A / h$$

On suppose que l'amortissement axiale et de torsion égaux.

$$c_s = c_T$$

3.3.5.2 Introduction des Défauts

Dans l'étude des paliers lisses, les principaux défauts traités sont [3,29]:

- Le phénomène de tourbillonnement « Oil Whirl »,
- Le phénomène de fouettement « Oil Whip »,
- Défauts technologiques,
- Effets de la température,
- La pression d'alimentation d'huile,
- Déformation élastique,
- Epaisseur minimale,
- Facteurs externes.

Le phénomène de tourbillonnement [3,29]:

Le rapport de flux de l'écoulement du lubrifiant par unité de longueur du palier dans l'espace convergent du clearance (anneau) donné par la théorie mécanique des fluides :

$$F_i = \frac{1}{2} LR\Omega (C+e)$$

Et $F_o = \frac{1}{2} LR\Omega (C-e)$

Quand la pression développée dans la partie chargée du film est insignifiante, une petite vitesse de tourbillonnement est induite. Le palier est déplacé de sa position d'équilibre avec une force F_p , le flux ainsi déséquilibré devient : $F_i = F_o + 2LR e v$

En remplaçant l'équation de (F_o) dans l'équation (F_i) et on identifie (v): $v = \frac{1}{2} \Omega$

En pratique, le rapport entre v et Ω est dans la plage [0.46 et 0.48]

Ce comportement peut être modélisé par un déplacement imposé de l'arbre en ce point:

$$y = y_0 + e \cos \omega t$$

$$z = z_0 + e \sin \omega t$$

D'où la création d'une force centrifuge supplémentaire sur l'arbre:

$$\{f_c\} = \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = (1/2) m v^2 (y_0 - e \cos \omega t) \\ F_z = (1/2) m v^2 (z_0 + e \sin \omega t) \end{cases}$$

Avec : e : l'excentricité estimée ($e < C$)
 m : masse de l'arbre,
 (y_0, z_0) : position initiale (avant)

Le phénomène de fouettement [3,29]:

Le phénomène de tourbillonnement devient un phénomène de fouettement pour les arbres rigides ; le comportement rotationnel est alors généralisé à l'arbre.

Défauts technologiques [3]

Dans les paliers lisses plusieurs anomalies technologiques modifient les paramètres géométriques de la structure. En effet, la rugosité des surfaces en regards, le parallélisme, les fuites de lubrifiant et la présence d'impuretés, dont le taux et la taille, modifient à la fois l'épaisseur du film d'huile et la qualité de la viscosité.

a) la rugosité :

Les surfaces frottantes ne sont jamais parfaitement polies. Il existe toujours une certaine rugosité et par conséquent des aspérités. L'épaisseur du film d'huile varie, par conséquent, d'un point à un autre. Elle est généralement quantifiée par un facteur de qualité λ [14] ou épaisseur spécifique.

$$\lambda = h/a$$

La rugosité composée (a) des deux surfaces est donnée par : $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Avec : a_1 et a_2 sont respectivement les rugosités propres aux surfaces en regards.

b) le parallélisme

Le parallélisme des surfaces en regards, modifie l'épaisseur du film d'huile h d'une extrémité à l'autre du palier. On aura deux épaisseurs h_1 et h_2 de chaque extrémité

c) les fuites du lubrifiant

Les fuites du lubrifiant sont un facteur modifiant la viscosité. Habituellement, on introduit un facteur correcteur (η) sur la force portante [14]:

$$F^* = \eta F$$

d) la présence d'impuretés

Les impuretés, ordinairement, de nature métallique, modifient en particulier l'épaisseur relative du film d'huile. Le taux et la taille de ces impuretés.

τ est le taux d'impuretés et κ la taille moyenne. Cette dernière est limitée par la qualité de filtrage et les opérations de rinçage avant la mise en marche des machines. On aura la formulation suivante :

$$h_{solide} = \tau \kappa$$

$$h' = h - h_{solide}$$

Le facteur correcteur IMP (<1) sera :

$$IMP = h'/h = (h - h_{solide})/h = 1 - h_{solide}/h = 1 - \tau \kappa/h$$

$$IMP = 1 - \tau \kappa/h$$

e) la dilution de l'huile

La dilution de l'huile de lubrification modifie sa viscosité. Un facteur F_v est alors établi selon le taux de dilution et la nature du diluant tel que : $\mu' = f_v \mu$

L'assemblage de ces facteurs permet de recalculer les épaisseurs minimales aux deux extrémités du palier h_1 et h_2 ainsi que la viscosité, d'où une influence directe sur l'excentricité spécifique ϵ et par conséquent la modification des raideurs calculées précédemment.

Effets de la température[27]

La température est un facteur très important de perturbation de l'environnement des paliers lisses. L'augmentation de la température en ces endroits modifie la qualité de viscosité mais aussi change les dimensions des pièces mécaniques, à savoir, principalement le diamètre de l'arbre et par conséquent la clearance (C).

Si Δ est la variation du diamètre de l'arbre, alors : $h' = h - \Delta$

Le facteur correcteur est :

$$\chi = h'/h = (h - \Delta)/h = 1 - \Delta/h$$

$$\chi = 1 - \Delta/h$$

On aura : $\mu = \mu(1)$ et $h' = \chi h$

Ces variations sont alors portées dans le calcul de l'excentricité spécifique ϵ et par conséquent la modification des raideurs.

La pression d'alimentation[3]

Vu les fluctuations de la pression de l'alimentation, si p_{moy} est la pression moyenne et f_p le facteur de variation globale de la pression, on aura : $p = f_p p_{moy}$

Cette variation est alors portée dans le calcul de l'excentricité spécifique ϵ et par conséquent dans la modification des raideurs.

Déformation élastique[3]

La déformation élastique des parois influe directement sur l'épaisseur du film d'huile h . Elle est portée directement sur la clearance (C). Elle est calculée par la variation du diamètre nominal de l'arbre sous l'effet composé de la flexion, compression/traction et la torsion et le calcul du diamètre nominal du palier.

La procédure est alors similaire à celle effectuée pour l'effet thermique sur l'arbre.

Epaisseur minimale[3]

L'épaisseur minimale entre les surfaces en regards est très importante, car au-dessous d'une certaine valeur ($< 2 \mu\text{m}$ [3]) elle conduit au contact métal-métal au-delà le système est en frottement hydrodynamique. Ce dernier est un facteur d'usure, source de chocs mécaniques et de grippage.

Facteurs externes[3]

Les principaux facteurs externes sur les paliers sont les forces de balourds, les forces centrifuges et les forces dues au mauvais alignement des arbres.

Le balourd et les forces centrifuges

L'effet du balourd et des forces centrifuges résultantes au niveau du palier se manifeste par une augmentation de la charge W appliquée sur les butées.

Une correction par cumul de forces donne une nouvelle charge corrigée W' .

f_w est le facteur correcteur global estimé par : $F_w = W'/W$

Avec : $W' = W + F_b + F_c$

$F_p = 1 + F_b/W + F_c/W$

Où : W : composante du poids de l'arbre appliquée au palier.

Cette variation est alors portée dans le calcul de l'excentricité spécifique ϵ et par conséquent dans la modification des raideurs calculées précédemment.

3.3.5.3 Modes de dégradation

La dégradation d'un palier lisse est fonction principalement de l'évolution de la viscosité et l'épaisseur minimale du film d'huile h . Les autres paramètres, généralement, technologiques et mécaniques peuvent être considérés comme facteurs amplificateurs des deux paramètres précédents. Des modèles mathématiques ou graphiques peuvent être donnés.

Evolution de la qualité d'huile [3]:

- a) viscosité : $\mu = \mu(t)$
 b) épaisseur du film d'huile : $h = h(t)$

Avec : t : le temps de fonctionnement

Ces relations, généralement expérimentales, peuvent être tirées de la littérature. Leur estimation analytique peut aussi être faite sur la base des lois de fiabilité.

3.4 Engrenages (Engrenage Droit)

3.4.1 Modèle

Le comportement mécanique d'une transmission par engrenages fait intervenir plusieurs mécanismes complexes, lors du fonctionnement, parmi eux, on cite :

- Déformation de la dent engrenée et de la roue sous l'effet du contact,
- Inertie de la roue due au mouvement de rotation.

La modélisation proposée, a pour but de simplifier le comportement des deux mécanismes dominants, par :

- La modélisation du mécanisme de contact entre les roues par la mécanique de contact et la théorie d'élasticité,
- La modélisation de l'inertie de la roue d'engrenage par un disque d'inertie.

La transmission par engrenage recèle plusieurs types de forme d'engrenages. Vu leurs complexités et leurs diversités, on ne s'intéresse qu'à la transmission par engrenages droits à axes parallèles et à engrenement externe et unique.

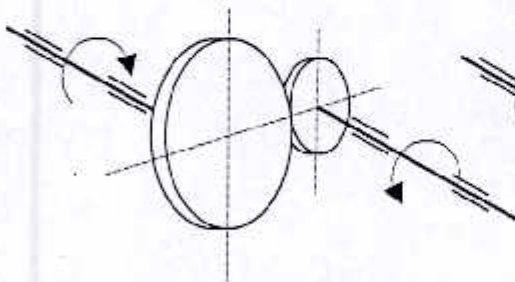


Fig. 3-33 Schéma d'une transmission par engrenage

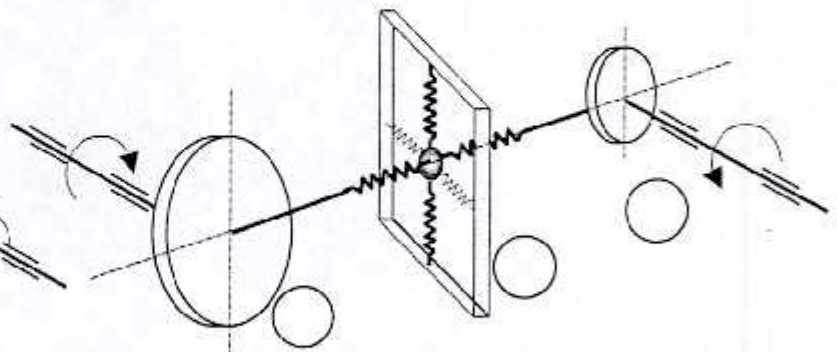


Fig. 3-34 Modèle proposé d'une transmission par engrenage

- 1.3 : Disque d'inertie,
 2 : Rigidité équivalente.

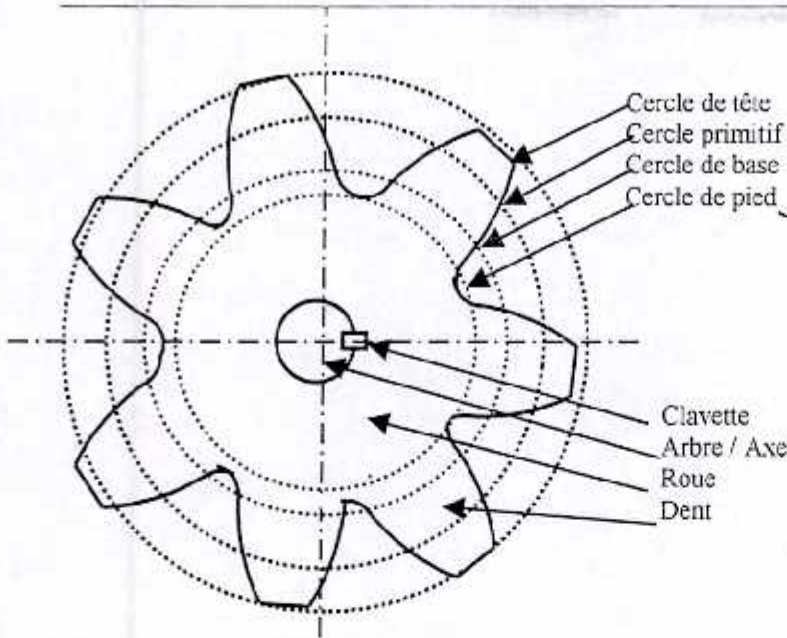
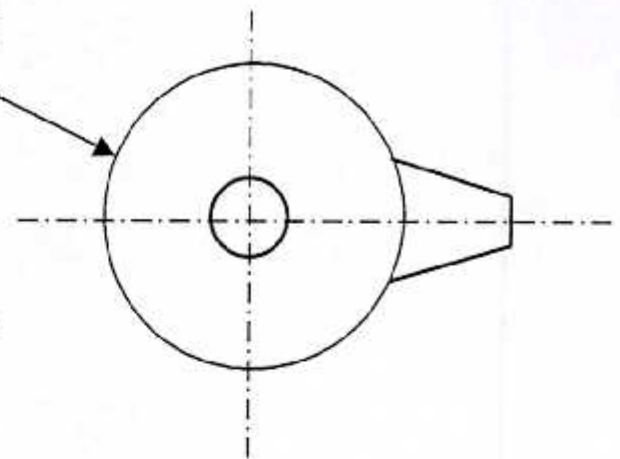


Fig. 3-35 Schéma d'une roue d'engrenage

Fig. 3-36 Modèle proposé d'une roue d'engrenage
(Poutre de section variable)

3.4.2 Choix du modèle

Le choix sur la modélisation du système de transmission par engrenage (fig. 3-33) se fait sur la base du modèle (fig. 3-34) représentant les deux roues en disques d'inerties équivalentes (1, 3) et la déformation due au contact par deux poutres infiniment rigides raccordées au nœud (2) liées par des ressorts déformables selon les six (06) degrés de liberté. Les rigidités équivalentes dépendent des distances du point de contact aux centres de chaque roue. En ce point il y a association ou assemblage des matrices de rigidités équivalentes de chaque roue.

Dans la modélisation de la roue d'engrenage (fig. 3-35) par une poutre à section variable (fig. 3-36) de dimensions équivalentes, la dent est représentée par une poutre trapézoïdale et la roue par une poutre de même forme avec le diamètre de pied. La modélisation des roues par des disques d'inerties se fait de la même manière que celle des arbres (voir chapitre 2-1). On aboutit à un système mécanique inertie-ressort de base, tel que [21].

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

On s'intéresse au calcul du système de rigidité équivalente. L'amortissement ne sera pas étudiée.

3.4.3 Développement Analytique

La modélisation de la transmission par engrenages pose le problème de l'approche à adopter pour définir les phénomènes qui régissent le mécanisme de déformation de la dent et de la roue, tel que le type de contact, les efforts mis en jeu, les déplacements, etc.

Problématique

La transmission par engrenages est une forme très fiable de transmission : puisqu'il n'y a pas de perte. Elle représente un moyen très efficace de transmission de puissance et de réduction ou de multiplication de vitesse de rotation dans les machines tournantes.

La modélisation de l'engrenage droit fait intervenir plusieurs paramètres, même, dans le cas idéal (sans défauts mécaniques) ; En effet, le contact des deux dents (fig. III-37-38-39) se fait selon l'axe ($\Delta 2$). Le point de contact démarre d'une position de départ ou début d'engrènement (γ_0) à une position de fin d'engrènement (γ_1).

La distance du point de contact aux centres géométrique des deux roues varie d'une position éloignée vers une position rapprochée, inversement pour chaque roue.

Cette évolution impose une approche plus précise du phénomène et ne peut être ignorée. Une étude cinématique et dynamique sera faite pour définir les principaux paramètres.

La modélisation se base sur la modélisation d'un engrenage en roue de diamètre égal au diamètre de pied avec une seule dent sous forme trapézoïdale (fig. 3-34). Le calcul des rigidités équivalentes [K] se fait comme pour les roulements.

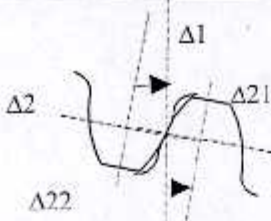


Fig. 3-37 Schéma du mécanisme de contact entre les dents.

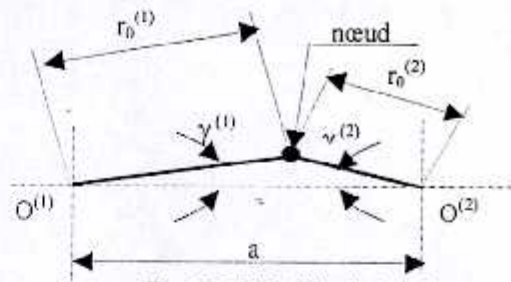


Fig. 3-38 Modèle cinématique

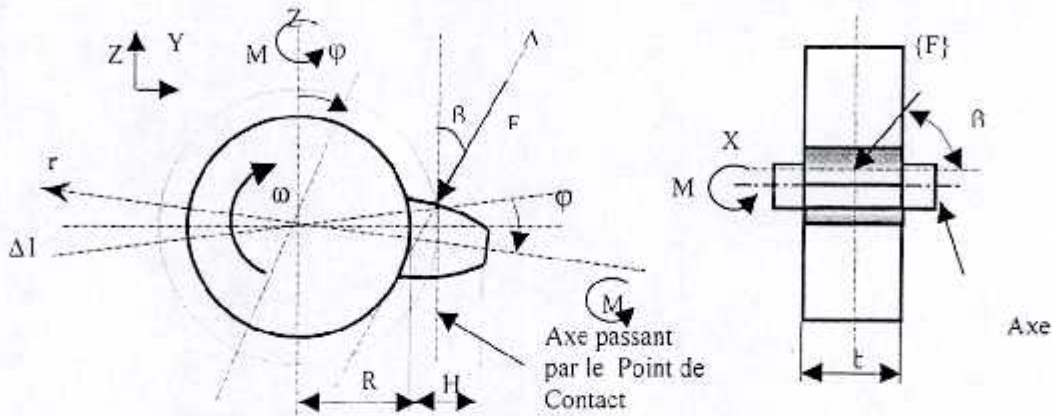


Fig. III-39 Représentation schématique de l'application d'un chargement équivalent sur une dent d'engrenage

Afin d'atteindre ces objectifs, on procède de la manière suivante :

- calcul de la position d'équilibre et des caractéristiques géométriques et physiques,
- étude cinématique,
- étude dynamique,
- calcul des rigidités équivalentes K_j d'un seul engrenage sur la base du calcul des déplacements et des forces,
- couplage des rigidités des deux roues engrenées.

3.4.3.1 Position d'équilibre et caractéristiques

Position d'équilibre

La position d'équilibre considérée est la position de contact à $r = r_0$, sous les conditions de fonctionnement. Les paramètres considérés sont alors appelés paramètres de fonctionnement[41,45,46].

Caractéristiques géométriques et physiques

Dimension de la dent [41,45,46]:

Largeur	:	b
Hauteur totale de la dent	:	H
Epaisseur r de Base	:	LB ou sb
Epaisseur r de pied	:	LP ou sf
Epaisseur de Tête	:	LT ou sa
Epaisseur donnée	:	L1(r) ou s(r)
Epaisseur primitive	:	LM ou s
Module	:	m
Intervalle primitif entre deux dents	:	$e = LM$
Pas primitif	:	p
Pas de base	:	pb
$p = e + LM = 2e = 2.LM$		

Montage de l'engrenage [41,45,46]: (entre les deux roues)

Entraxe de fonctionnement entre roues	:	a
Distance axe point de contact	:	r_0
Angle de pression	:	$\alpha = \alpha_0$
Angle d'inclinaison des roues autour de z	:	β_z
Angle d'inclinaison des roues autour de y	:	β_y
Bras de levier du moment autour de r	:	b_0
Avec : (en cas d'inclinaison)		

$$b_0 = b \cos \beta_y \cos \beta_z$$



Dimension de la roue [41,45,46]:

- Rayon moyen ou rayon primitif de la roue : R_m
- Rayon de l'axe (Arbre) : R_a
- Rayon de base de la roue : R_b
- Rayon de tête de la roue : R_t
- Rayon de pied : R_p
- Nombre de dents par roue : n
- Largeur de la roue : b
- Hauteur de la roue : $L2(r)$

Propriétés physiques des roues :

- $E1$: module de YOUNG de la roue (1),
- $E2$: module de YOUNG de la roue (2),
- $G1$: module de cisaillement de la roue (1),
- $G2$: module de cisaillement de la roue (2),
- $\nu1$: coefficient de poisson de la roue (1),
- $\nu2$: coefficient de poisson de la roue (2).

Relation dimensionnelle d'un engrenage droit[41,45,46]:

Désignation	Sym.	Formule
Module	m	Déterminé par un calcul de RDM
Nombre de dents	n	Déterminé à partir des rapports des vitesses $\frac{N1}{N2} = \frac{n2}{n1}$
Pas	p	$P = m \cdot \pi = 2.LM$
Saillie	h_a	$H_a = m$
Creux	H_f	$H_f = 1.25 \cdot m$
Hauteur de dent	H	$H = h_a + h_f = 2.25 \cdot m$
Diamètre primitif	d_m	$D_m = 2.R_m = m \cdot n$
Diamètre de tête	d_a	$D_a = 2.R_a = d + 2.0 \cdot m$
Diamètre de pied	d_f	$D_f = 2.R_f = d - 2.5 \cdot m$
Largeur de denture	b	$B = k \cdot m$ (k valeur à se fixer, fréquemment ou prendre (k=8 ou 10)
Entraxe de deux roues (1) et (2)	a	$a = \frac{d1 + d2}{2} = \frac{m.n_1}{2} + \frac{m.n_2}{2}$
Angle de pression	α_0	20°

Limites de contact[41,45,46] : (En fonctionnement)

- rayon de contact r_c à partir du centre : r_c ,
- longueur de contact par rapport au rayon primitif sur le profil : C_0
- longueur de contact maximale : $+C_{max}$
- longueur de contact minimale : $-C_{min}$
- angle début contact : $+\gamma_0$
- angle fin contact : $-\gamma_0$
- angle de contact au cours de l'engrènement : γ

Repère de calcul [41,45,46]:

- (O, X, Y, Z) : repère fixe au centre de la roue,
- O : centre géométrique de la roue,
- (O', r, τ , z) : repère mobile selon la dent engrénée, avec un angle ϕ par rapport au repère fixe,
- O' : milieu et extrémité de la dent,
- C : point de contact décrivant la ligne d'engrènement et point d'application de la force F,
- r : rayon radial passant par l'axe de la roue et le milieu de la dent,
- τ : tangente de la roue ou normale de la roue et parallèle à l'axe de l'arbre de la roue,
- z : l'axe perpendiculaire à l'axe (r),
- β_z, β_x et β_y : angles que fait la force résultante F autour des axes z, x et y.

Forces et déplacements [41,45,46]:

Décomposition du vecteur force en : $\{F, M\} \rightarrow \{F_r, F_\tau, F_z, M_r, M_\tau, M_z\}$

Décomposition du vecteur déplacement en : $\{\delta\} \rightarrow \{\delta_r, \delta_\tau, \delta_z, \theta_r, \theta_\tau, \theta_z\}$

- δ_r : déplacement radial, δ_τ : déplacement tangentiel, δ_z : déplacement axial,
- θ_r : rotation autour de l'axe r, θ_τ : rotation autour de l'axe τ , θ_z : rotation autour de l'axe z.

Indices : i: numéro de la roue (1,2), j: numéro de la dent (1, n), o: état initial ou début engrènement.

On rappelle que la rigidité de la roue engrenée dépend du point d'application du vecteur de force ; c.-à-d. que $K_{ij} = \hat{f}(F_{ij}, H, R_p, R_a, r_0, r_{ij} \dots)$. Etant donné, que r_0 varie en fonction $\gamma(t)$, K_{ij} en dépend aussi.

3.4.3.2 Etude cinématique

Avant de faire les calculs des déplacements, un calcul cinématique [41, 45, 46] est nécessaire. L'objectif de ce calcul est de déterminer la relation entre l'angle γ et le rayon r_0 ou la longueur de contact.

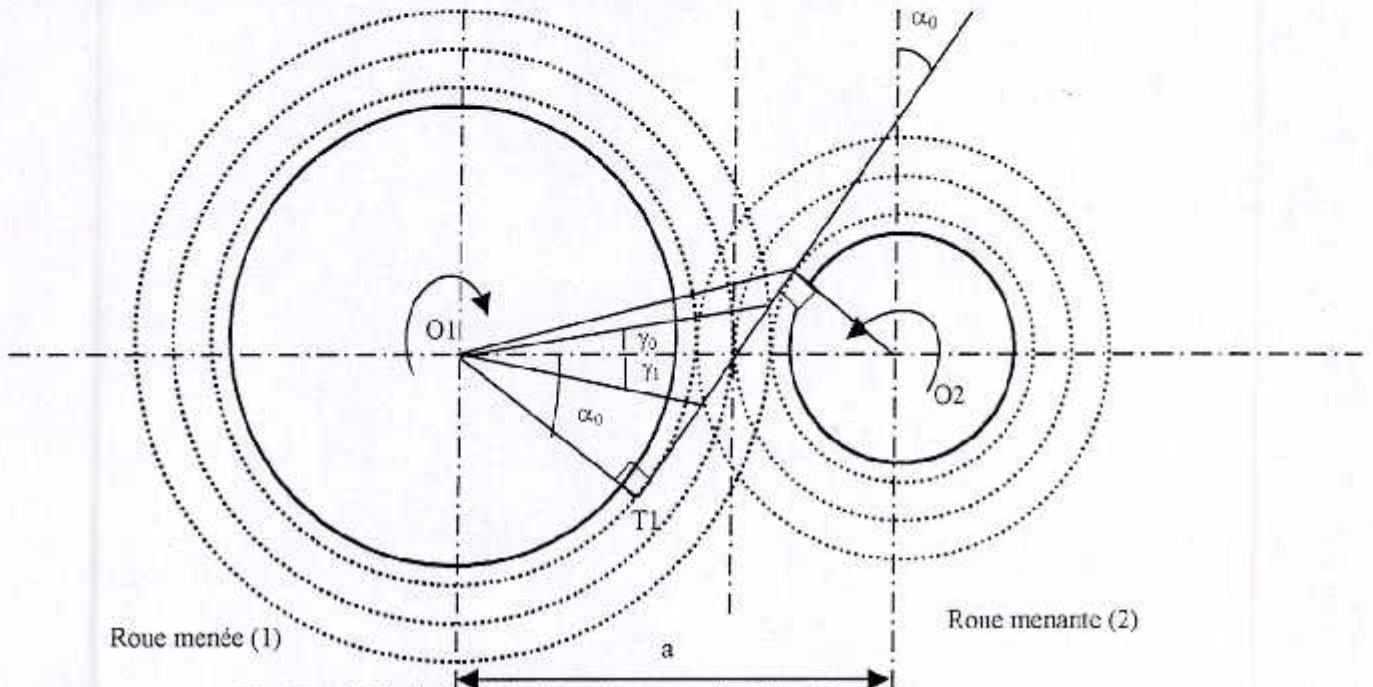


Fig. III-40 Cinématique de l'engrenement et la Ligne d'action

Avec :

- T1 : tangente au cercle de base de la roue menée (1),
- T2 : tangente au cercle de base de la roue menante (2),
- T1T2 : ligne d'engrenement ou de contact ou ligne d'action sur l'axe Δ_2 ,
- A : début engrenement, intersection de la ligne d'action avec le cercle de tête de la roue menée (1)
- B : fin engrenement, intersection de la ligne d'action avec le cercle de tête de la roue menante (2)
- I : milieu de AB, intersection de la ligne d'action avec les cercles primitifs (1) et (2).
- AI : longueur d'approche,
- BI : longueur de retraite,
- AB : longueur de conduite.

Le calcul cinématique a pour objectif la détermination des propriétés cinématiques et géométriques de la transmission par engrenages lors du fonctionnement et les relations qui les lient.

Calcul de α_0 :

On sait que l'angle de pression (α_0) peut être déterminé par la relation :

$$\cos \alpha_0 = Rb/Rm \text{ et } (\beta x = \alpha_0)$$

Calcul de γ_0 et γ_1

L'angle γ_0 dépend de l'angle α_0 . Il existe une relation de la forme :

$$\frac{tg \gamma_0}{tg \alpha_0} = 1 - \frac{Rm}{Rt} \frac{1}{\cos \gamma_0}$$

La résolution de cette équation, permet d'obtenir

γ_0 . Or, il faut remarquer que γ_0 dépend du rapport (Rm/Rt) ce qui fait qu'il y a $\gamma_0^{(1)}$ et $\gamma_0^{(2)}$

γ_1 est obtenue par analogie à γ_0 (remplacer Rt par Rb).

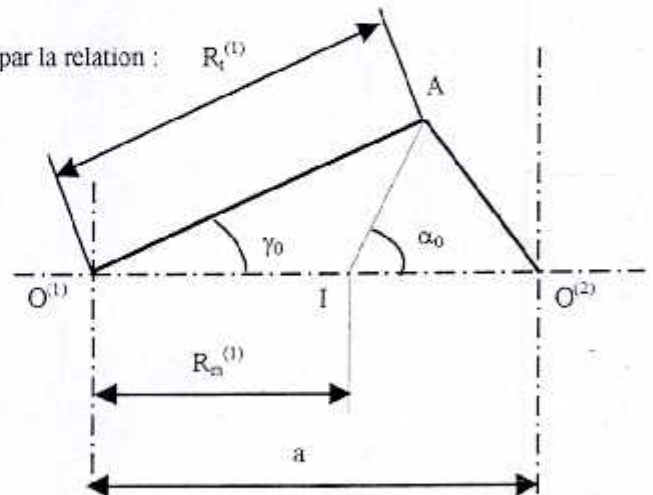


Fig. 3-41 Modèle cinématique (calcul de γ_0)

Calcul du pas de rotation φ :

On peut approximer cet angle par la relation suivante :

$$\varphi^{(i)} = \pi / n^{(i)}$$

Ce pas angulaire de rotation est l'angle que fait l'axe passant par le milieu de la dent (r) avec l'axe (Y) parallèle à l'entraxe. Il correspond à un cycle d'engrènement (début et fin).

Il faut remarquer, ici, que la différence ($\varphi - \gamma$) de la roue (1) est minimale au début d'engrènement et maximale à la fin de l'engrènement. Si ϕ est cet angle de différence, alors, on peut calculer ϕ_1 et ϕ_2 . Pour des angles petits on a :

$$\phi_1 \approx LT / (4 \pi Rt), \phi_2 \approx LB / (4 \pi Rb) \text{ et } \phi_2 \approx LM / (4 \pi Rm)$$

En conséquence, une autre méthode de calcul approximatif de γ_0 et γ_1 peut être obtenue avec :

$$|\gamma_0| = (\varphi / 2) + \phi_1$$

$$|\gamma_1| = (\varphi / 2) - \phi_2$$

Calcul de r_0 :

Si les dents des deux roues sont géométriquement identiques et si les phases d'approche et de retraite sont identiques, on a :

$$r_0^{(1)} = Rm^{(1)} + C_0$$

$$r_0^{(2)} = Rm^{(2)} - C_0$$

Avec : $C_0 : [-C_{min}, 0, +C_{max}]$

$$C_{max} = Rt - Rm \text{ et } C_{min} = Rm - Rb$$

r_0 subit une rotation angulaire et une variation radiale ; puisqu'il tourne autour de l'axe de rotation et passe de la position du cercle de tête ($r_0 = Rt$) à la position du cercle de base ($r_0 = Rb$). Cette situation fait qu'il possède une vitesse angulaire relative,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\varphi}{T/n}$$

$$\omega' = \frac{\Delta\gamma}{T/n} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{T/n} = \frac{\varphi - (\phi_2 - \phi_1)}{T/n}$$

Alors :

$$\omega' = \left[1 - \frac{\phi_2 - \phi_1}{\varphi} \right] \omega$$

On suppose une relation de proportionnalité entre l'angle γ et C_0 , pour γ petit :

$$C_0 = C_{max} \cdot \left[1 - \frac{\gamma_0 + \gamma}{\gamma_0} \right]$$

Avec : $\gamma : [+ \gamma_0, \dots, 0, \dots, - \gamma_1]$

Par ailleurs, la valeur de γ peut être calculée en fonction du temps :

$$\gamma = -\omega' t' + \gamma_0$$

avec :

$$t' = t \text{ MODULO } (T/n)$$

D'où l'expression de r_0 devient : $r_0 = Rm \pm C_{max} \cdot \left[1 - \frac{\gamma_0 + \gamma}{\gamma_0} \right]$

Calcul de l'épaisseur variable de la dent: $Ll(r)$

D'après [27] existe une forme complexe de calcul de l'épaisseur au niveau d'un point donné M de coordonnées (L et R) sur le profil de la dent, on a :

$$L = R \left[\frac{LM}{Rm} + 2 \cdot (\text{inv} \alpha_0 + \text{inv} \theta_0) \right]$$

$$\cos \theta_0 = \frac{Rm}{R} \cos \alpha_0$$

$$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$$

Avec :

- α : angle de pression
- θ : angle d'incidence au point M.

Vu la complexité de cette formule, on adopte la modélisation du profil sous forme d'un trapèze:

Soit l'épaisseur : $L1(r) = LT + [(LP-LT)/H] \cdot r = [B + C r]$

On pose :

$$B = LT$$

$$C = (LP-LT)/H$$

La formule complexe peut être utilisée pour le calcul de LT et LP tel que :

$$LT \approx LM - 2 \cdot ha \cdot \text{tg} \alpha = LM - 2.0 \cdot m \cdot \text{tg} \alpha$$

$$LP \approx LM + 2(H - m) \text{tg} \alpha = LM + 1.5 m \text{tg} \alpha$$

Calcul de l'épaisseur variable de la roue : L2(r)

$$\text{On sait que : } L2(r) = 2 \cdot \sqrt{Rp^2 - (H + Rp - r)^2} = 2 \sqrt{D^2 - (E - r)^2}$$

On pose :

$$D = Rp$$

$$E = Rp + H$$

Calcul de profil : (diamètre de l'arc)

Le profil de la dent a la forme d'un développement de cercle. L'équation régissant cette courbe est complexe, pour pouvoir utiliser la mécanique de contact pour le calcul de déformation par la méthode de HERTS[11]. On approxime cette courbe par un arc de cercle.

Pour calculer le diamètre de cet arc de cercle, on suppose qu'il passe par trois (03) points, les plus importants, du profil du flan actif de la denture. Soient les points d'intersection du profil avec les cercles de tête, le cercle primitif et le cercle de base.

Pour une position, où la dent se trouve sur l'axe (Y), on aura un système d'équations :

$$\begin{cases} 2 \cdot z_1 \cdot (z_1 - z_2) + 2 \cdot y_1 \cdot (y_1 - y_2) = R_t^2 - R_m^2 \\ 2 \cdot z_3 \cdot (z_3 - z_2) + 2 \cdot y_3 \cdot (y_3 - y_2) = R_b^2 - R_m^2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$R^2 = d^2/4 = z^2 + y^2$$

Avec :

$$\begin{cases} z1 = Rt \cos \phi1 \\ y1 = Rt \sin \phi1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z2 = Rm \cos \phi3 \\ y2 = Rm \sin \phi3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z3 = Rb \cos \phi2 \\ y3 = Rb \sin \phi2 \end{cases}$$

3.4.3.3 Etude dynamique

La force appliquée, lors de l'engrènement, subit une variation d'amplitude ; puisqu'il y a une interférence entre les dents en début et en fin d'engrènement (AW et BV). D'après [41,45,46] cette variation est :

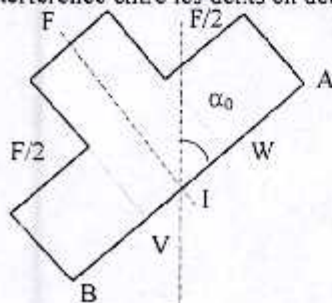


Fig. I3-42 Evolution de la force le long de la ligne d'action

Avec :

V : fin d'engrènement de la dent précédente interférente,

W : début d'engrènement de la dent venante interférente,

Où :

$$AV = BW = \text{pas de base } (p)$$

Le calcul des forces équivalentes se base sur la théorie de la mécanique de contact. En effet, les forces mises en action, lors du contact entre la dent menante et la dent menée sont multiples. On peut les résumer par une force résultante (les forces normales et les forces de cisaillements).

Cette force résultante est projetée sur les axes (r, τ, z).

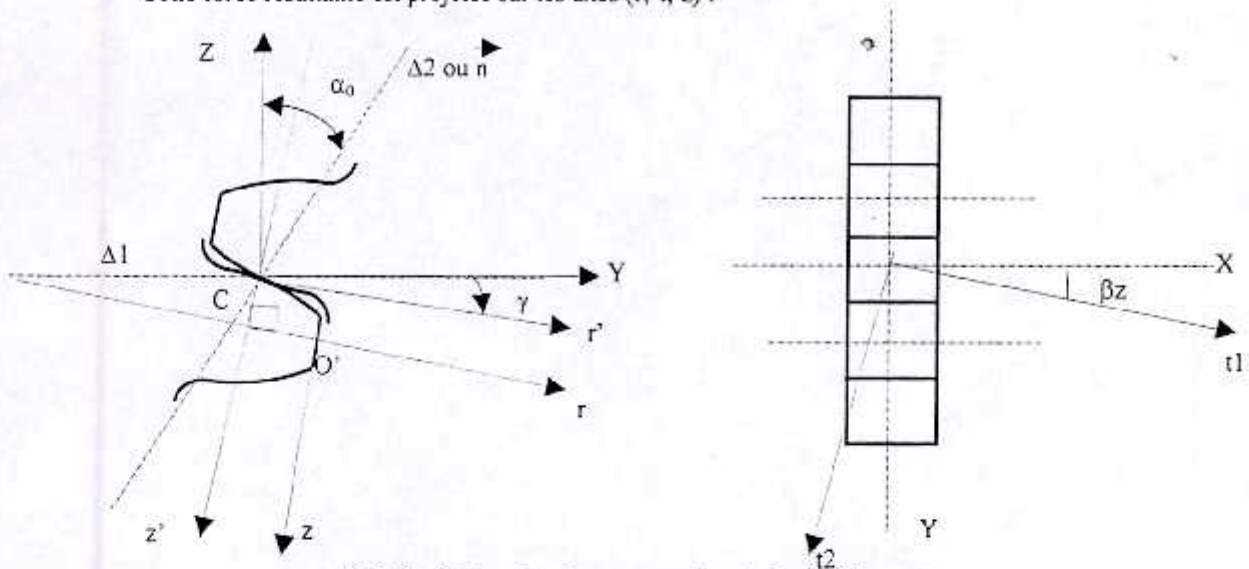


Fig3-43 Schéma des forces normales et de cisaillements

Soit C le point de contact. l'axe (n) l'axe normal se trouve sur l'axe Δ2, l'axe (τ1) l'axe tangential le long de la largeur (b) parallèle à l'axe (X) et l'axe (τ2) l'axe tangential le long de la hauteur perpendiculaire à l'axe Δ2. Le repère (C, x, r', z') est le repère (O', x, r, z) transposé au point C.

Hypothèses sur les forces :

- On considérera que le contact se fait avec roulement sans glissement. Les forces de frottements et de cisaillements seront alors négligées,
- On ignore le film d'huile de contact,
- On considère que la force équivalente est ponctuelle au milieu de la largeur de la dent, on ignore la forme surfacique de contact.
- La normale ainsi obtenue suit les points de contact. Elle dépend du profil de la denture et de la distance du point de contact au centre de rotation de la roue (r_0),
- L'angle β_x est égal à l'angle de pression α_0
- Les angles β_y et β_z dépendront de l'inclinaison de la roue menante par rapport à l'autre,
- La valeur de la force (F) dépendra du couple moteur de la roue menante C_m , le couple résistant de la roue menée et de la distance du centre de rotation au point de contact de cette roue (1 ou 2):

$$F = \frac{C_m - C_r}{r_0}$$

- Les couples C_m et C_r sont supposés constants et connus. On aura, alors :

$$\begin{cases} Fr &= F \sin(\beta_x + \gamma) \sin \beta_y \\ Fx = F\tau &= F \sin(\beta_x + \gamma) \cos \beta_y \\ Fz &= F \cos(\beta_x + \gamma) \end{cases}$$

Et les moments seront :

$$\begin{cases} Mr &= Fz \cdot b_0 + Fx \cdot r_0 \sin \beta_x \\ Mz &= Fx \cdot r_0 \\ Mx = M\tau &= Fz \cdot r_0 \end{cases}$$

Remarque : En cas d'inclinaison autour de Z, on suppose que la largeur d'application des dents se rétrécit à b_0 .

3.4.3.4 Calcul des déplacements (Modèle de Déplacement)

Le déplacement total, causé par chaque force et moment, est le résultat de la déformation locale et de la déformation globale. Le calcul de la rigidité équivalente du modèle d'engrenage impose la supposition d'une série d'hypothèses pour la simplification du problème de base.

Vu que le système présente deux parties symétriques par rapport à l'axe (r), soient la dent et la roue et vu que l'axe est considéré parfaitement rigide, les conditions limites sont :

Conditions aux limites :

1ere partie : r [$Rt-r_0$ à H]

2eme partie: r [H à R_D-Ra+H]

Avec : Pour $r = r_0$ on a $\delta \neq 0$ et $(d\delta/dt) = 0$

Pour $r = Ra$ on a $\delta = 0$ et $(d\delta/dt) = 0$.

On pose pour la suite des calculs s: $\rho_0 = Rt-r_0$

Hypothèses :

Hypothèses de base :

- La forme de la dent est trapézoïdale,
- Le chargement dépend des $\beta_x = \alpha_0$, et β_y ,
- Le point d'application de la force dépend d'une distance r_0 , qui dépend de $\alpha(t)$. Cette variable ne sera considérée qu'en fin de calcul pour obtenir $\delta = \delta(t)$ et par conséquent $k(t)$,
- La présence de la clavette roue/arbre est ignoré,
- La fixation de la roue avec l'arbre est parfaite,
- L'arbre à une rigidité infinie,
- Le calcul est fait pour la roue menée puis les résultats seront reportés sur la roue menante,
- On suppose que les paramètres de fonctionnements [41,45,46];
- On suppose que les dents sont identiques,
- Le pas angulaire est très petit,
- Le système d'engrenages est formé de deux roues seulement,
- La déformation totale est la somme de la déformation locale (Mécanique de contact) et la déformation globale (Théorie d'élasticité) $\delta r = h + \delta$
- Les rigidités des (1) et (2) sont complémentaires,

Hypothèse de calcul pour la déformation locale (h) : (voir Calcul de Roulement)

- Contact avec déformation élastique,
- Le contact de l'autre dent est simulé ici par une force appliquée au point de contact situé à r_0 ,
- Le profil de la denture est supposé circulaire,
- La zone de contact est réduite en un point situé au milieu.

Hypothèses de calcul de la déformation globale (δ)

- Les déformations sont le résultat des efforts de compression, de flexion et de torsion prises indépendamment,
- le contact des deux roues à l'endroit des dents est supposé unique c-à-d une dent sur une dent,
- la déformation du film d'huile est ignorée,
- Le contact entre les deux dents est supposé comme étant un contact de deux cercles de diamètres connus $D1$ et $D2$.

Méthode de calcul

Le calcul se base sur le modèle de déplacement énoncé dans le calcul du roulement ; soit par le calcul du déplacement δr et de la force équivalente F_i . La rigidité est le rapport de cette charge sur le déplacement total résultant. L'effort appliqué est la force équivalente aux forces résultantes du contact des dents des roues au point $r = r_0$.

$$K_{ij} = F_i / \delta_j$$

Exemple :

$$\begin{aligned} K_{rr} &= F_r / \delta_r & K_{r\theta} &= F_r / \theta \\ K_{\theta r} &= M / \delta_r & K_{\theta\theta} &= M / \theta \\ K_{rz} &= F_r / \delta_z \\ &etc. \end{aligned}$$

Comme le contact génère deux déformations, l'une locale est l'autre globale, on aura deux étapes.

3.4.3.4.1 Calcul de la déformation locale

Etant donné, qu'on suppose que le contact est entre deux cylindres de rayons et de largeur égaux. La loi de Hertz[1] de la mécanique de contact, permet de calculer la déformation locale h .

Cette déformation se trouve sur la normale à la dent, les deux angles caractérisant cette position dépendent de α , leur valeur exacte dépend du type d'engrenage. Les différentes déformations radiales (r), tangentielle (τ) et axiale (z) seront calculées par la projection de h sur les axes (r , τ et z).

Si a est la largeur de la déformation locale observable sur les profils des deux dents, on a :

$$a = \sqrt{\frac{2F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{\pi b (1/d_1) + (1/d_2)}}$$

La déformation radiale globale est :

$$h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

avec : R : rayon de courbure de la dent $R=d/2$

La déformation locale h est ainsi projetée sur les axes z , x et r

$$\begin{cases} hr &= h \sin(\beta x + \gamma) \sin \beta y \\ hx = h\tau &= h \sin(\beta x + \gamma) \cos \beta y \\ hz &= h \cos(\beta x + \gamma) \end{cases}$$

3.4.3.4.2 Calcul des déformations globales

3.4.3.4.2.1 Calcul du déplacement radial (δr)

Développement

Etant donné que la déformation radiale globale de la roue est un cumul de la déformation par compression de la dent et du corps de la roue. Le calcul se divise en deux parties, la première par intégration le long de la dent et la seconde sur la roue. On aura :

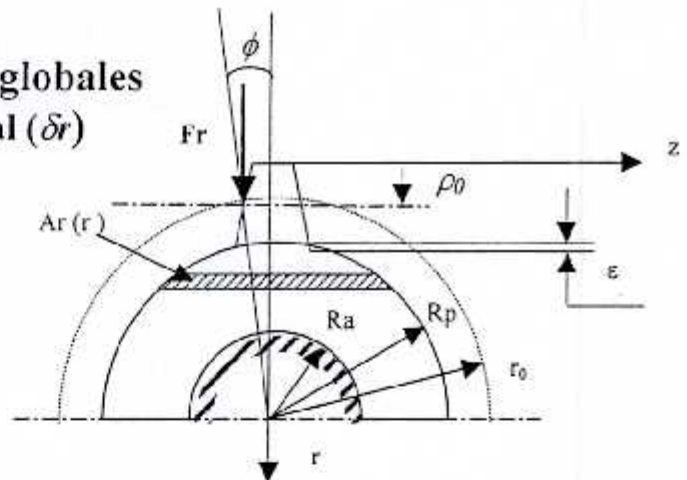


Fig. 3-44 Déplacement radial global

Soit $A(r)$ l'aire de la section perpendiculaire à Fr définie par $A(r) = b.L(r)$, soit deux parties, tel que :

$$\begin{aligned} A(r) &= A1(r) = b.L1(r) \\ A(r) &= A2(r) = b.L2(r) \end{aligned}$$

La loi de HOOK[27] pour ce cas est :

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{Fr}{EA(r)}$$

On aura :

$$\delta(r) = \frac{Fr}{E} \left[\int \frac{1}{A1(r)} dr + \int \frac{1}{A2(r)} dr \right] = \frac{Fr}{E} \left[\int \frac{1}{b(B+Cr)} dr + \int \frac{1}{2b\sqrt{D^2 - (E-r)^2}} dr \right]$$

Conditions mathématiques:

Pour que cet intégrale soit définie elle doit satisfaire aux conditions selon le domaine d'intégration:

Pour le 1^{er} domaine r [$\rho_0 .. H$]

on doit avoir : $C.r > -B$

Pour le 2^{eme} domaine r [$H .. Rp-Ra+H$]

on doit avoir : $D - (E - r) > 0$

ou

$$r^{(1)} > -B/C$$

$$r^{(2)} > E - D$$

ou

$$r^{(1)} > H / (1-\lambda) \quad \text{avec : } \lambda > 1 (\lambda = LP/LT) \Rightarrow r < 0 \quad \text{Or } r \geq 0 \Rightarrow \text{condition satisfaite}$$

$$r^{(2)} > H \quad \Rightarrow \text{singularité pour } r \rightarrow H$$

Un problème de singularité se pose pour $r^{(2)}$ aux frontières Or, il s'avère que la dent de hauteur H se prolonge dans la roue d'une distance (ϵ) que nous n'avons pas pris en considération. La solution serait de modifier R_p par R_p' , tel que :

$$R_p' = R_p - \epsilon \quad \text{avec : } \epsilon = R_p - \sqrt{R_p^2 - (LP/2)^2}$$

d'où :

$$E = R_p' + H = R_p - \epsilon + H \Rightarrow \text{La condition } D - (E - r) > 0 \text{ et } DD - (E - r) > 0 \text{ est vérifiées ; puisque :}$$

$$\epsilon - H + r > 0 \text{ et } r > H - \epsilon$$

Remarque Importante : Ces conditions mathématiques seront considérées tous le long des calcul des différents déplacements. En faisant un changement de variable adéquat et en intégrant, la résolution de l'intégral donne :

$$\delta^{(1)}(r) = \frac{Fr}{bE} \left[\frac{1}{C} \ln(B + Cr) \right] + c1 \quad \& \quad \delta^{(2)}(r) = \frac{Fr}{2bE} \left[\text{ArcCos} \frac{r}{R_p} \right] + c1$$

Sachant que les conditions aux limites sont :

Pour $\delta^{(1)}$: $\delta = \delta r'$ pour $r = \rho_0$ $\delta = 0$ pour $r = H$
 Pour $\delta^{(2)}$: $\delta = \delta'$ pour $r = H$ ou $r' = R_p - \epsilon$ où $r' = r - (R_p - \epsilon + H)$
 $\delta = 0$ pour $r = R_p - \epsilon - Ra + H$ ou $r' = Ra$
 et $\delta r = \delta r' + \delta''$

$$\delta r = \frac{Fr}{bE} \left\{ \frac{H}{LP - LT} \ln \left[\frac{H.LP}{(LP - LT)\rho_0 + H.LT} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{ArcCos} \left[\frac{Ra}{R_p} \right] - \text{ArcCos} \left[1 - \frac{\epsilon}{R_p} \right] \right] \right\}$$

ou encore :

$$\delta r = \frac{Fr}{bE} \left\{ \frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[\frac{1}{(1-\lambda)\beta_0 + \lambda} \right] + \frac{1}{2} [\text{ArcCos} \alpha - \text{ArcCos} \alpha_1] \right\}$$

Avec : $\beta_0 = \frac{\rho_0}{H}$, $\alpha = \frac{Ra}{R_p}$, $\lambda = \frac{LT}{LP}$ & $\alpha_1 = 1 - \frac{\epsilon}{R_p}$

3.4.3.4.2.2 Calcul du déplacement tangentiel (δz)

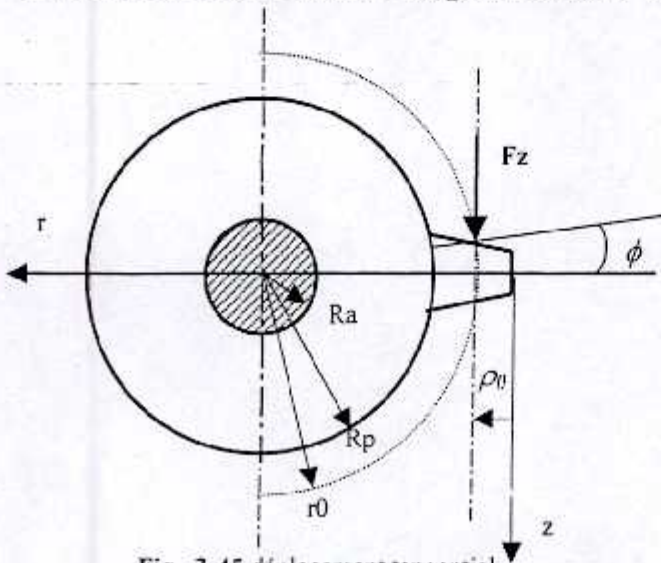


Fig. 3-45 déplacement tangentiel

Développement :

La déformation tangentielle de la roue peut être considérée comme une combinaison de deux déformations.

1. la déformation de flexion de la dent seule.
2. la déformation de torsion du corps de la roue seule.

1. Déformation de la dent par flexion

On considère la dent de hauteur H et de largeur b comme une poutre de forme trapézoïdale de longueur L(r), soumise à une force appliquée au point de contact r=r₀. On considérera que la partie sollicitée. Soit un repère local (o, r, z).

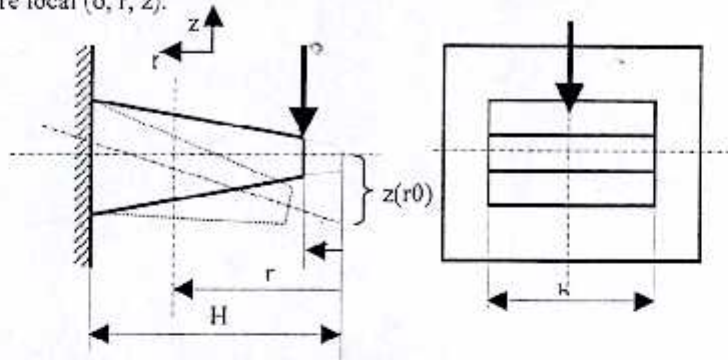


Fig. 3.46 Déformation de flexion d'une dent

La théorie de l'élasticité donne :

$$EI(r) \frac{d^2\delta}{dr^2} = M(r)$$

Avec :

$$I(r) = b [L(r)/2]^2 / 12$$

$$M(r) = Fz \cdot r$$

Pour r défini dans [ρ₀, H]

$$EI(r) \frac{d^2\delta}{dr^2} = Fz \cdot r$$

$$\frac{E}{Fz} \frac{d^2\delta}{dr^2} = \frac{1}{I(r)} r$$

$$\frac{E}{Fz} \frac{d^2\delta}{dr^2} = \frac{96}{b [B + Cr]^3} r$$

$$\frac{E}{Fz} \frac{d^2\delta}{dr^2} = \frac{96}{b} \frac{r}{[B + Cr]^3}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$\frac{b}{96} \frac{E}{Fz} \frac{d\delta}{dr} = \frac{-1}{2C} \left[\frac{r}{[B + Cr]^2} + \frac{1}{C} \frac{1}{B + Cr} \right] + c1$$

$$\frac{b}{96} \frac{E}{Fz} \delta = \frac{1}{2C^3} \left[\frac{Cr}{[B + Cr]} - 2 \ln[B + Cr] \right] + c1 \cdot r + c2$$

Connaissant les conditions aux limites :

$$\delta = \delta z \text{ pour } r = \rho_0 ; \delta = 0 \text{ pour } r = H ; \frac{d\delta}{dr} = 0 \text{ pour } r = H$$

on aura :

$$\delta z = \frac{48}{b} \frac{Fz}{E} \left(\frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \right)^3 \left[\frac{\lambda(1-\lambda)(1-\beta_0)}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} - 2 \ln \left[\frac{1}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} \right] \right]$$

$$\text{Avec : } \lambda = \frac{LT}{LP} \text{ et } \beta_0 = \frac{\rho_0}{H}$$

2. Déformation de torsion de la roue

$$Tr = \frac{1}{2} Fz \cdot r_0$$

La théorie d'élasticité donne le long de la longueur (x=b):

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{Tr}{GIp}$$

L'intégration sur les deux domaines donne :

$$\frac{2}{r_0} \frac{G}{Fz} \delta = \int \frac{1}{\pi d_p^4} dx = \frac{64}{\pi d_p^4} x + c1$$

Sachant les conditions aux limites :

$$\delta = \delta\theta_x \text{ pour } x = b$$

$$\delta = 0 \text{ pour } x = 0$$

$$\delta\theta_x = 32 \frac{b r_0}{\pi d_p^4} \frac{Fz}{G}$$

$$\delta\theta_x = 32 \frac{b}{\pi d_p^4} \frac{Fz}{G} (Rt - H\beta_0)$$

La déformation totale est, alors :

$$\delta z^{(T)} = \delta z + Rp \cdot \delta\theta_x$$

$$\delta z = \frac{48}{b} \frac{Fz}{E} \left(\frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \right)^3 \left[\frac{\lambda(1-\lambda)(1-\beta_0)}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} - 2 \ln \left[\frac{1}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} \right] \right] + 32 \frac{b}{\pi d_p^4} \frac{Fz}{G} (Rt - H\beta_0) \cdot Rp$$

3.4.3.4.2.3 Calcul du déplacement axial (δx) ou (δr)

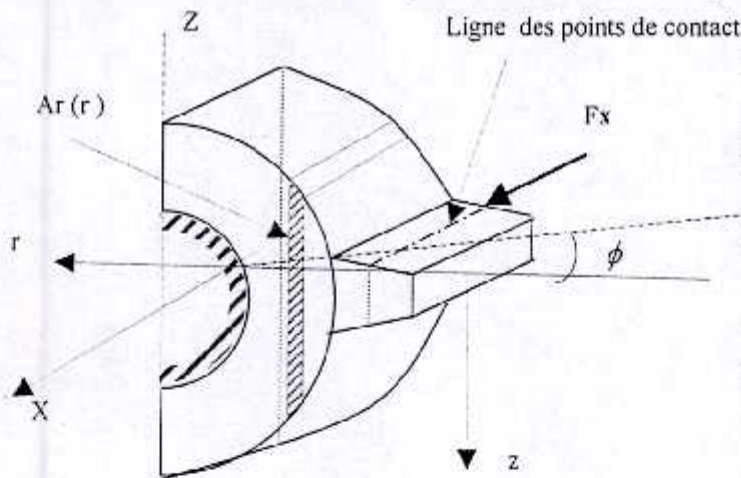


Fig. 347 déplacement axial

Développement :

De la même manière que pour le calcul du déplacement radial.

Théorie d'élasticité :

$$\frac{d^2\delta}{dr^2} = \frac{M(r)}{EI(r)}$$

Avec :

$$M(r) = Fx \cdot r$$

$$I(r) = \frac{(b/2)^3 L(r)}{12} = \frac{b^3}{96} L(r)$$

On aura par intégration en deux parties:

$$\frac{E}{Fx} \frac{d^2\delta}{dr^2} = 96 \frac{1}{b^3} \frac{r}{L(r)}$$

$$\frac{b^3}{96} \frac{E}{Fx} \frac{d\delta}{dr} = \int \frac{r}{(B+Cr)} dr + \int \frac{r}{2\sqrt{D^2 - (E-r)^2}} dr + c1$$

La condition de non-singularité est vérifiée voir précédemment.

En faisant un changement de variable adéquat et en intégrant,

pour la première, on pose $R = B + Cr$

pour la deuxième, on pose $E - r = D \cos\phi \rightarrow$ un problème étant $E = Rp - s + H$

On aura :

$$\frac{b^3}{96} \frac{E}{Fx} \frac{d\delta}{dr} = \frac{1}{C^2} \int \left(1 - \frac{B}{R}\right) dR + \frac{D}{2} \int (E - D \cos\phi) d\phi + c1$$

La résolution de cet intégrale, donne :

$$\frac{b^3}{96} \frac{E}{F_x} \frac{d\delta}{dr} = \frac{1}{C^2} [R - B \ln(R)] + \frac{D}{2} [E\varphi - D \sin \varphi] + c1$$

et

$$\frac{b^3}{96} \frac{E}{F_x} \delta = \frac{1}{C^2} \int [R - B \ln(R)] dR + \frac{D^2}{2} \int [E\varphi - D \sin \varphi] \sin \varphi d\varphi + c1.r + c2$$

d'où :

$$\frac{b^3}{96} \frac{E}{F_x} \delta = \frac{1}{C^2} \left[\frac{R^2}{2} - BR(\ln(R) - 1) \right] + \frac{D^2}{2} \left[E(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{D}{2} (\sin \varphi \cos \varphi - \varphi) \right] + c1.r + c2$$

Connaissant les conditions aux limites :

$$\delta^{(1)} = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$$

Pour $\delta^{(1)}$

$$\delta = \delta r' \text{ pour } r = \rho_0$$

$$\delta = 0 \text{ pour } r = H$$

Pour $\delta^{(2)}$

$$\delta = \delta' \text{ pour } r = H$$

$$\text{ou } r' = Rp - \varepsilon$$

$$\text{ou } r' = r - (Rp - \varepsilon + H)$$

$$\delta = 0 \text{ pour } r = Rp - \varepsilon - Ra + H$$

$$\text{ou } r' = Ra$$

$$\frac{d\delta}{dr} = 0 \text{ pour } r = Rp - Ra + H$$

$$\text{avec : } \delta r = \delta r' + \delta'$$

La résolution finale donne :

$$\delta x = \frac{F_x}{E} \frac{96}{b^3} \left\{ \frac{H^3}{LP} \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[\frac{1}{2} [1 - (\beta_0^1)^2] + \lambda \left(\ln \frac{LP}{(\beta_0^1 LP)^{\beta_0^1}} - (1 + \beta_0^1) \right) \right] + \right.$$

$$\frac{Rp^2}{2} \left[\left(Rp - \varepsilon + H + \frac{Ra}{2} \right) \sqrt{1 - \alpha^2} - \left(\frac{3}{2} (Rp - \varepsilon) + H \right) \sqrt{1 - \alpha_1^2} + \right.$$

$$\left. \left. \left(\frac{3}{2} Rp + (H - \varepsilon) \alpha_1 - \varepsilon \right) \text{ArcCos} \alpha_1 - \left(Ra + (H - \varepsilon) \alpha + \frac{Rp}{2} \right) \text{ArcCos} \alpha \right] \right\}$$

$$\text{Avec : } \lambda = \frac{LT}{LP}, \beta_0 = \frac{\rho_0}{H}, \beta_0^1 = [\lambda + (1-\lambda)\beta_0], \alpha = \frac{Ra}{Rp} \text{ \& } \alpha_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{Rp}$$

3.4.3.4.2.4 Calcul du déplacement angulaire (θ_r) (autour de l'axe r)

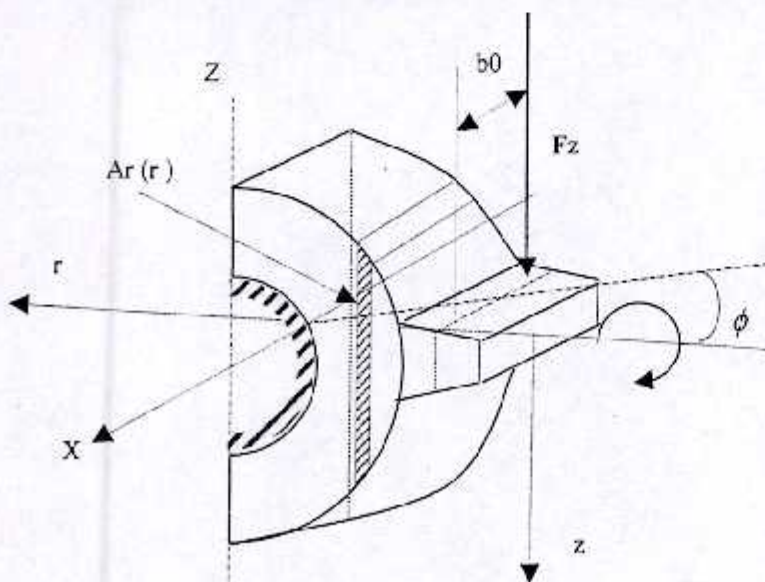


Fig. 3-48 Déplacement angulaire

Développement :

Le déplacement angulaire autour de l'axe r est obtenu sous l'effet d'un moment de torsion Tr , résultant des efforts de torsion Fz selon un bras de levier estimé égal à $b_0/2$. Avec : $b_0 = b \cos \beta$ ($b_0 = [0..b]$). On aura :

$$Tr = \frac{1}{2} Fz b_0/2$$

La théorie d'élasticité donne :

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{Tr}{GIp(r)}$$

L'intégration sur les deux domaines donne :

$$4 \frac{G}{F_z} \frac{b^3}{b_0} \delta = \int \frac{1}{\frac{L1(r)}{3 + 1.8 \frac{b}{L1(r)}}} dr + \int \frac{1}{\frac{L2(r)}{3 + 1.8 \frac{b}{L2(r)}}} dr + c1$$

$$4 \frac{G}{F_z} \frac{b^3}{b_0} \delta = \int \left(\frac{3}{L1(r)} + 1.8 \frac{b}{L1^2(r)} \right) dr + \int \left(\frac{3}{L2(r)} + 1.8 \frac{b}{L2^2(r)} \right) dr + c1$$

ou encore :

$$4 \frac{G}{F_z} \frac{b^3}{b_0} \delta = \left[\frac{3}{C} \ln(B + Cr) - \frac{1.8b}{C} \frac{1}{B + Cr} \right] + \left[3 \text{ArcCos} \left[\frac{r}{Rp} \right] \right] + \left[\frac{1.8b}{2D} \ln \frac{D - R}{D + R} \right] + c1$$

Sachant les conditions aux limites :

$$\delta = \delta\theta_r \text{ pour } r = \rho_0$$

$$\delta = 0 \text{ pour } r = H + Rp - Ra$$

On aura alors :

$$\delta\theta_r = \frac{1}{4} \frac{F_z}{G} \frac{b_0}{b^3} \left\{ \frac{H}{LP} \frac{3}{1 - \lambda} \left[\ln \left(\frac{1}{\lambda + (1 - \lambda)\beta_0} \right) - \frac{1.8bH}{LP^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda + (1 - \lambda)\beta_0} \right) \right] \right. \\ \left. - 3 \left[\text{ArcCos} \alpha - \text{ArcCos} \alpha_1 \right] + \frac{1.8b}{2Rp} \left[\ln \left(\frac{Rp - Ra}{Rp + Ra} \frac{2Rp - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \right] \right\}$$

$$\text{Avec : } \lambda = \frac{LT}{LP}, \beta_0 = \frac{\rho_0}{H}, \alpha = \frac{Ra}{Rp} \text{ \& } \alpha_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{Rp}$$

Remarque : L'expression de $lp(r)$ a été tirée TIMOSHINKO[27] pour le calcul des moments polaire pour les sections carrés.

3.4.3.4.2.5 Calcul du déplacement angulaire (θ_z) (autour de l'axe τ)

Le déplacement angulaire autour de l'axe (z) peut être évalué directement par une approximation linéaire en fonction du déplacement rectiligne total le long de l'axe (x) soit δx , tel que :

$$\delta\theta_x = \frac{\delta x}{r_0} = \frac{\delta x}{Rt - H\beta_0}$$

3.4.3.4.2.6 Calcul du déplacement angulaire (θ_τ) (autour de l'axe x)

Le déplacement angulaire autour de l'axe (τ) peut être considéré comme confondu avec celui autour de l'axe (x) qui peut être évalué directement par une approximation linéaire en fonction du déplacement rectiligne total le long de l'axe (z) soit δz , tel que :

$$\delta\theta_z = \frac{\delta z}{r_0} = \frac{\delta z}{Rt - H\beta_0}$$

3.4.3.5 Calcul de la matrice de rigidité

Le calcul de la rigidité se base sur le déplacement total sur la force, l que

$$K_{rr} = F_r / \delta r \quad K_{rz} = F_r / \delta z \quad K_{r\tau} = F_r / \delta \tau$$

$$K_{zr} = F_z / \delta r \quad K_{zz} = F_z / \delta z \quad K_{z\tau} = F_z / \delta \tau$$

$$K_{\tau r} = F_\tau / \delta r \quad K_{\tau z} = F_\tau / \delta z \quad K_{\tau\tau} = F_\tau / \delta \tau$$

$$\begin{aligned} K_{r\theta} &= F_r / \delta\theta, & K_{r\alpha} &= F_r / \delta\theta_x, & K_{r\alpha} &= F_r / \delta\theta_z \\ K_{z\theta} &= F_z / \delta\theta, & K_{z\alpha} &= F_z / \delta\theta_x, & K_{z\alpha} &= F_z / \delta\theta_z \\ K_{\tau\theta} &= F_\tau / \delta\theta, & K_{\tau\alpha} &= F_\tau / \delta\theta_x, & K_{\tau\alpha} &= F_\tau / \delta\theta_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\theta r} &= Mr / \delta r, & K_{\theta r\alpha} &= Mr / \delta\theta_r, & K_{\theta r\alpha} &= Mr / \delta\theta_x, & K_{\theta r\alpha} &= Mr / \delta\theta_z, & K_{\theta r z} &= Mr / \delta z, & K_{\theta r \tau} &= Mr / \delta\tau \\ K_{\theta z} &= Mz / \delta r, & K_{\theta z\alpha} &= Mz / \delta\theta_r, & K_{\theta z\alpha} &= Mz / \delta\theta_x, & K_{\theta z\alpha} &= Mz / \delta\theta_z, & K_{\theta z z} &= Mz / \delta z, & K_{\theta z \tau} &= Mr / \delta\tau \\ K_{\theta \tau} &= Mx / \delta r, & K_{\theta \tau\alpha} &= Mx / \delta\theta_r, & K_{\theta \tau\alpha} &= Mx / \delta\theta_x, & K_{\theta \tau\alpha} &= Mx / \delta\theta_z, & K_{\theta \tau z} &= Mx / \delta z, & K_{\theta \tau \tau} &= Mx / \delta\tau \end{aligned}$$

On obtient une matrice de rigidité : $[K]_{6 \times 6}$

Si on pose que $F \approx Keq h$, pour la déformation locale, on aura :

$$K_{rr} = F_r / \delta r + Fr / hr = F_r / \delta r + F/h = F_r / \delta r + keq^{(r)}$$

$$k_{rr} = bE \left\{ \frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[\frac{1}{(1-\lambda)\beta_0 + \lambda} \right] + \frac{1}{2} [ArcCos\alpha - ArcCos\alpha_1] \right\}^{-1} + k_{eq}^{(r)}$$

$$K_{zz} = F_z / \delta r + keq^{(z)}$$

$$k_{zz} = \left\{ \frac{48}{b} \frac{1}{E} \left(\frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \right)^3 \left[\frac{\lambda(1-\lambda)(1-\beta_0)}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} - 2 \ln \left[\frac{1}{\lambda + \beta_0(1-\lambda)} \right] \right] + 32 \frac{b}{\pi d_p^4} \frac{1}{G} (Rt - H\beta_0) Rp \right\}^{-1} + K_{eq}^{(z)}$$

$$K_{\tau\tau} = F_\tau / \delta r + keq^{(\tau)}$$

$$k_{\tau\tau} = E \frac{b^3}{96} \left\{ \frac{H^3}{LP} \frac{1}{(1-\lambda)^3} \left[\frac{1}{2} [1 - (\beta_0^1)^2] - \lambda \left(\ln \frac{LP}{(\beta_0^1 LP)^{\beta_0^1}} - (1 + \beta_0^1) \right) \right] + \right.$$

$$\left. \frac{Rp^2}{2} \left[\left(Rp - \varepsilon + H + \frac{Ra}{2} \right) \sqrt{1-\alpha^2} - \left(\frac{3}{2} (Rp - \varepsilon) + H \right) \sqrt{1-\alpha_1^2} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} Rp + (H - \varepsilon)\alpha_1 - \varepsilon \right) ArcCos\alpha_1 - \left(Ra + (H - \varepsilon)\alpha + \frac{Rp}{2} \right) ArcCos\alpha \right] \right\}^{-1} + K_{eq}^{(\tau)}$$

$$K_{\alpha_x \alpha_x} = Mx / \delta\theta_x \quad \text{Avec : } Mx = M\tau = Fz \cdot r_0$$

$$\text{Et comme } \delta\theta_x = \frac{\delta x}{r_0} = \frac{\delta x}{Rt - H\beta_0}$$

$$K_{\alpha_x \alpha_x} = \frac{\delta x}{r_0} = \frac{\delta x}{Rt - H\beta_0}$$

$$K_{\theta_z \theta_z} = \frac{Fz}{Fx} \frac{(Rt - H\beta_0)^2 b^3}{96} E \left\{ \frac{H^3}{LP} \frac{1}{(1-\lambda)^3} \left[\frac{1}{2} [1 - (\beta_0^1)^2] + \lambda \left(\ln \frac{LP}{(\beta_0^1 LP)^{\beta_0^1}} - (1 + \beta_0^1) \right) \right] + \right.$$

$$\left. \frac{Rp^2}{2} \left[\left(Rp - \varepsilon + H + \frac{Ra}{2} \right) \sqrt{1-\alpha^2} - \left(\frac{3}{2} (Rp - \varepsilon) + H \right) \sqrt{1-\alpha_1^2} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} Rp + (H - \varepsilon)\alpha_1 - \varepsilon \right) ArcCos\alpha_1 - \left(Ra + (H - \varepsilon)\alpha + \frac{Rp}{2} \right) ArcCos\alpha \right] \right\}^{-1}$$

$$K_{\theta_r \theta_r} = Mr / \delta\theta, \quad \text{Avec : } Mr = Fz \cdot b_0 \text{ (on suppose la 2eme partie négligeable)}$$

$$K_{\theta, \theta} = 4Gb^3 \left\{ \frac{H}{LP} \frac{3}{1-\lambda} \left[\ln \left(\frac{1}{\lambda + (1-\lambda)\beta_0} \right) - \frac{1.8bH}{LP^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda + (1-\lambda)\beta_0} \right) \right] + \right. \\ \left. - 3 \cdot [\text{ArcCos } \alpha - \text{ArcCos } \alpha_1] + \frac{1.8b}{2Rp} \left[\ln \left(\frac{Rp - Ra}{Rp + Ra} \frac{2Rp - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \right] \right\}^{-1}$$

$$K_{zr} = F_z / \delta_r + K_{eq}^{(zr)}$$

$$k_{zr} = \frac{F_z}{Fr} bE \left\{ \frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[\frac{1}{(1-\lambda)\beta_0 + \lambda} \right] + \frac{1}{2} [\text{ArcCos } \alpha - \text{ArcCos } \alpha_1] \right\}^{-1} + K_{eq}^{(zr)}$$

etc.

3.4.3.6 Couplage des deux roues

Connaissant la rigidité de chaque engrenage, le modèle propose une poutre de rigidité infinie de masse nulle avec un nœud sous la forme d'une articulation au point de contact des dents. En ce nœud on a un système de ressort dont la rigidité est équivalente au système de transmission par engrenages.

Le couplage matriciel se fait par la considération au nœud (1) des propriétés mécaniques de l'arbre seul plus la roue seule, au nœud (2) il y a couplage entre les matrices de rigidité de la roue (1) et (2) et au nœud (3) identiquement qu'au nœud (1).

Etant donné, que l'effort transmis d'une roue à l'autre, le calcul de la rigidité commune est celle équivalente d'un système en série,:

$$\frac{1}{K_y^{(T)}} = \frac{1}{K_y^{(1)}} + \frac{1}{K_y^{(2)}}$$

$$K_y^{(T)} = \frac{K_y^{(1)} K_y^{(2)}}{K_y^{(1)} + K_y^{(2)}}$$

avec : i et j les indices relatives à (r, τ, z, θr, θτ, θz)

3.4.4 Critiques du Modèle

Un ensemble de critiques peut être émis sur le modèle choisi, sur le calcul des déplacements et des forces, on peut les résumer par les points suivants :

1. Le modèle proposé se base sur la théorie classique du calcul des poutres avec section variables, cette approche a nécessité la simplification de la forme des dents,
2. La simplification du modèle du chargement à une seule force résultante d'après [41] ignore certains aspect de ce chargement le long du profil ; puisqu'il prend plusieurs formes, roulement avec glissement à l'intérieur, roulement pur au milieu et roulement avec glissement à l'extrémité, peu compromettre l'exactitude des calculs. Pourtant le fait d'ignorer les forces de cisaillements n'est pas très important, puisque les calculs se basent sur la force résultante, en outre, l'étude présentée dans [14] montre que le profil des contraintes le long de la profondeur est presque semblable entre les cas avec et sans glissement.
3. La considération de l'ensemble roue-dent comme un seul corps peut être une négligence ; En effet, des vibrations de la dent séparément de la roue peuvent exister, comme d'autres effets d'origines différents.

3.4.5 Modifications et introduction des défauts

3.4.5.1 Modèle

Le modèle étudié a été élaboré avec l'introduction de certaines modifications. Des améliorations peuvent être introduites : la considération du profil réel de la denture et des forces de cisaillements.

Commençant tout d'abord par voir la fiabilité de ce modèle tel qu'il a été élaboré. Les résultats de l'étude comparative et de validation permettront de donner un jugement d'appréciation sur ce modèle. C'est, alors, qu'on peut envisager les modifications futures.

3.4.5.2 Introduction des Défauts

Les défauts touchants un système de transmission par engrenage droit sont très diversifiés, on se propose de traiter les plus importants.

Avant de traiter ce sujet, il faut introduire la notion d'indice, vu que les défauts peuvent être caractéristiques pour chaque dent et roue séparément, on aura par exemple:

$F^{(ij)}$: la force de pression appliquée sur la dent (j) de la roue (i)

$k^{(ij)}$: la rigidité force de pression appliquée sur la dent (j) de la roue (i)

(i,j) : indice de la roue et (j) indice de la dent.

1. Choc d'engrènement

Le choc de l'engrènement est un phénomène normal, lors du fonctionnement. Ce choc cyclique au rythme de la fréquence de rotation et du nombre de dents engrénées peut présenter l'inconvénient de se transmettre à toute la structure. Sa modélisation peut se faire d'une manière relativement facile; puisque d'après [41,45,46] la force de pression exercée au niveau du point de contact a une forme impulsionnelle carrée dépendant du temps.

Le système mécanique (roue + dent) devient un système forcé, dont la réponse obéit à ces fluctuations périodiques.

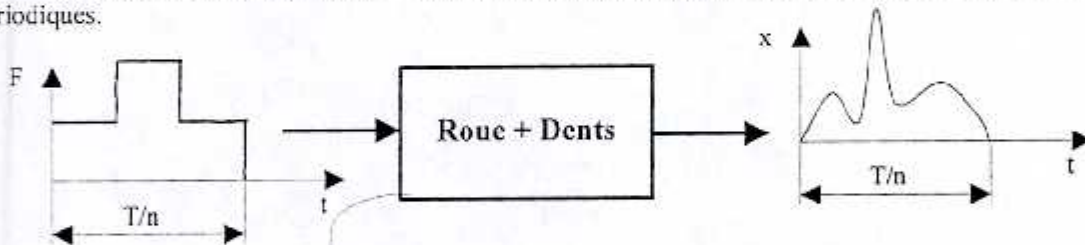


Fig. 3-49 Réponse du système à une excitation

La réponse du système à ce type d'excitation est une réponse propre plus une réponse forcée périodique.

2. absence d'une dent

L'absence d'une dent d'engrenage peut être modélée par une augmentation brusque de la force de pression au $j^{\text{ème}}$ dent absente ; puisque, la force est calculée sur la base du couple moteur et du couple résistant, l'absence d'une dent peut être simulée par un couple résistant nul :

$$F^{(ij)} = Cm / r_0 \quad \text{Avec } Cr = 0$$

3. irrégularité du pas entre dents

Le pas entre les dents peut être irrégulier d'une façon singulière et unique pour une dent donnée constant ou cumulatif avec une évolution arithmétique, géométrique ou autre sur l'ensemble des dents.

Cette modification influe directement sur le rayon de contact et la rigidité du système ; puisqu'elle cause une interférence variable entre les dents. Il se trouve, donc que pendant la phase d'approche, alors que la dent précédente devrait être en phase de retraite, elle se trouve à une position retardée.

On peut modéliser cette anomalie par une rigidité supplémentaire calculée sur la base de la position de la dent retardée. En effet, l'erreur de pas (pr) peut être transformée en valeur angulaire (γ'). Cette erreur angulaire peut être convertie en rayon de contact et donc permettre le calcul de la rigidité équivalente modifiée.

Par exemple pour le cas de cumul arithmétique:

$$P^{(j)} = p0^{(j)} + j pr$$

Avec : p : pas irrégulier, $p0$: pas théorique, pr : pas d'irrégularité arithmétique.
 j : numéro de la dent par rapport la dent d'origine ou la dent à erreur minimale.

La rigidité modifiée sera par conséquent:

$$k^{(j)}(\gamma) = ko^{(j)}(\gamma) + k^{(j+1)}[\gamma - (\gamma + j \cdot pr)]$$

Avec : $k^{(j)}$: rigidité modifiée de la $j^{\text{ème}}$ dent de $i^{\text{ème}}$ roue,
 $ko^{(j)}$: rigidité théorique de la $j^{\text{ème}}$ dent de $i^{\text{ème}}$ roue,
 $k^{(j+1)}$: rigidité théorique de la $(j+1)^{\text{ème}}$ dent de la $i^{\text{ème}}$ roue.
 γ_1 : angle de fin engrènement.

Si le pas est uniforme pour toutes les dents, on aura : $k^{(j)}(\gamma) = ko^{(j)}(\gamma) + k^{(j+1)}[\gamma - (\gamma + pr)]$

4. inclinaison d'une roue par rapport à l'autre

L'inclinaison d'une roue par rapport à une autre a été considérée dans les calculs, par l'introduction des angles β_y et β_z . Or, cette procédure s'avère insuffisante ; puisqu'elle n'influe que sur la projection des forces et du calcul des moments par l'introduction de la largeur du bras de levier b_0 .

En effet, l'inclinaison des roues par rapport à l'axe (Z) fait (schématiquement) pousser un côté de la dent vers l'intérieur et l'autre vers l'extérieur. Cette situation modifie le rayon de contact et modifie la ligne de contact qui donne plusieurs rayon de contact selon la largeur (b) et même les angles de début et de fin d'engrènement se trouvent modifiés.

La modélisation de ce phénomène devient difficile, on se limitera aux effets déjà introduits, lors de la modélisation. Une validation poussée de cette modélisation sera faite.

5. balourd dans l'une des deux roues engrénées

Le phénomène de balourd, influe sur le comportement des transmissions par engrènement ; puisqu'il modifie les conditions de contact des roues entre elles. Ceci par des déplacements forcés des roues dans le sens opposé ou inversement et de même par une augmentation ou réduction de la force de pression.

Il est, généralement, modélisé par une force dynamique de fréquence donnée et de direction donnée. La modélisation de la force peut être ajoutée à la force de pression selon la périodicité de cette force de balourd.

On aura vectoriellement : $F' = F + Fb(w_b t + ph)$

Avec : F' : nouvelle force de pression, F : force initiale de pression,
 Fb : force de balourd de fréquence (w_b) et de phase (ph) appliquée à la roue.
 Les effets dus aux déplacements ne seront pas traités.

6. présence d'une fissure

La présence d'une fissure, principalement sur la connexion de la dent à la roue, est un phénomène très fréquent. Cette anomalie fait modifier la rigidité de la dent. La modélisation de ce phénomène peut se faire par analogie avec la méthode étudiée dans le chapitre concernant la fissuration des arbres, pour le cas des formes prismatiques. On aura :

$$1/k^{(j)} = 1/ko^{(j)} + c^{(j)}$$

Avec : $c^{(j)}$: flexibilité locale due à la présence de la fissure.

7. usure d'engrenage (modification du profil de l'engrenage)

En cours d'utilisation, les dents d'engrenages subissent une altération de leur profil du flan actif. Cette dégradation est due principalement à l'usure par frottement, érosion ou attaque chimique.

Cette détérioration provoque, par conséquent, la modification des propriétés géométriques initiales, ce qui provoque le changement du comportement de l'engrenage.

Cette anomalie est l'une des formes de dégradation de la transmission par engrenages. Elle évolue d'une manière déterminée, dans le temps.

On s'intéressera ici, à un état donné de dégradation.

On remarque, à première vue, que ce cas de figure présente certaines ressemblance avec le cas d'irrégularité du pas, mais la différence réside, dans la modification des propriétés géométriques et physiques de la denture et la variation et le changement du rayon de contact.

On propose de modéliser ce défaut par une irrégularité de pas plus une irrégularité du rayon de contact ou l'angle de contact.

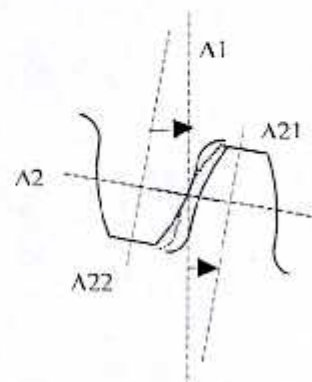


Fig. 3.50 Schéma de dégradation de la denture d'engrenage.

Exemple :

Pour un cas où on suppose que cette dégradation a une influence négligeable sur le comportement mécanique de la dent (flexion, compression) et donc ne change pas les calculs des rigidités théoriques.

1^{er} cas : Cas simple où l'usure est uniforme pour l'ensemble des dents de l'engrenage et que l'usage des profils est similaire. On aura le cas, déjà traité de l'irrégularité uniforme de pas, tel que :

$$k^{(ij)}(\gamma) = k_0^{(ij)}(\gamma) + k^{(ij+1)}[\gamma_1 - (\gamma + \gamma_r)]$$

2^{ème} cas : cas où l'usure est minimale au niveau du cercle de base est maximale au niveau du cercle de tête mais similaire pour toutes les dents de l'engrenage. Pour chaque angle (γ) on a une modification de la rigidité :

$$k^{(ij)}(\gamma') = k_0^{(ij)}(\gamma') + k^{(ij+1)}(\gamma_1 - \gamma_r) \quad \text{et} \quad \gamma' = A\gamma + (\gamma_0 - \gamma_r)$$

Avec : γ_r : erreur angulaire due à l'usure au niveau du cercle de base, γ' : angle de contact modifié,
 γ : angle de contact initial γ_0 : angle de début d'engrènement,
 A : taux de variation du profil ($\Delta L_T - \Delta L_B$) / (φ)

Remarque : Ces modélisations des défauts seront l'objet de validation .

3.4.5.3 Modes de dégradation

Les principaux modes de dégradation sont le vieillissement par fatigue, le développement d'une fissure et l'usure du profil des dents d'engrenage.

IV Etude Comparative et de validation numérique et expérimentale

Le travail s'inscrit dans le cadre de l'introduction des défauts mécaniques dans l'étude des machines tournantes. C'est un ensemble de travaux de modélisation de plusieurs organes de machines. On s'intéresse à la confrontation des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature ou ceux obtenus par expérimentation.

L'objectif primordial est l'élaboration d'une modélisation mathématique aussi fidèle que possible du comportement dynamique réel des machines.

Dans ces travaux, on se limite aux organes machines les plus importants, à savoir : l'arbre, les paliers et les engrenages. Ce choix a été dicté par l'importance de ces organes, les limites expérimentales, la complexité de certains cas et dans le soucis de concentrer tous les efforts sur un nombre limité de problèmes.

La modélisation de ces organes nécessite impérativement la connaissance de leur raideur et leurs principaux défauts caractéristiques. Ils ont, déjà, fait l'objet d'un calcul analytique actuellement de validations numérique et expérimentale.

La procédure adoptée se base sur trois phases. Dans une première étape faire la comparaison du comportement mécanique statique de ces organes, sous l'effet d'un chargement ; c.-à-d. la comparaison de l'allure des déformations en fonction des efforts appliqués. En deuxième étape, vérifier la souplesse de ces modèles pour l'introduction des défauts caractéristiques à chaque organe (un travail d'appréciation). En troisième étape, faire la comparaison du comportement dynamique sans défauts et avec défauts, en se référant aux réponses dynamiques de la littérature.

Ces étapes permettent de vérifier la fidélité et la fiabilité de ces modèles ainsi que le degré d'approche atteint.

4.1 Ligne d'arbre

Le modèle choisi représente le comportement mécanique et dynamique de l'arbre d'une machine tournante, il a été entièrement repris à partir d'une étude théorique de la littérature (chapitre 3.1). Ce modèle est hybride ; puisqu'il réunit la modélisation en éléments finis des tronçons de l'arbre et la modélisation des roues en disques.

La vérification de la fiabilité et de la fidélité de ce modèle doit se faire, en isolant cet organe de son environnement normal. Ses paramètres seront évalués sur la base des résultats obtenus de la validation numérique ou expérimentale.

Des critiques peuvent être émises sur ce modèle, mais le principal objectif et de voir l'effet de l'introduction des défauts mécaniques et leur identification et ce problème a été largement traité dans différents ouvrages. Le choix de ce modèle semble être suffisant et acceptable. En effet, des méthodes «exactes»[29] existent et sont exposées dans la littérature, mais elle donnent une formulation très complexe.

Concernant les défauts, on se limite à l'étude de l'effet de présence d'une fissure transversale dans un arbre et à l'évocation des critiques qu'on a émises sur les travaux de ANDREW[38]. On procédera à valider et à comparer les résultats analytiques obtenus et modifiés [65].

Le modèle analytique adopté a montré une grande souplesse pour l'introduction des effets des anomalies mécaniques les plus importants pouvant toucher un arbre de machine. On présente, ici, les résultats obtenus et les détails sont exposés dans l'annexe A.

4.1.1 Calcul de la souplesse locale $c_{\xi\xi}$ ou c_{55}

Dans le cas de flexion simple seulement, on a la réduction de la matrice en une valeur :

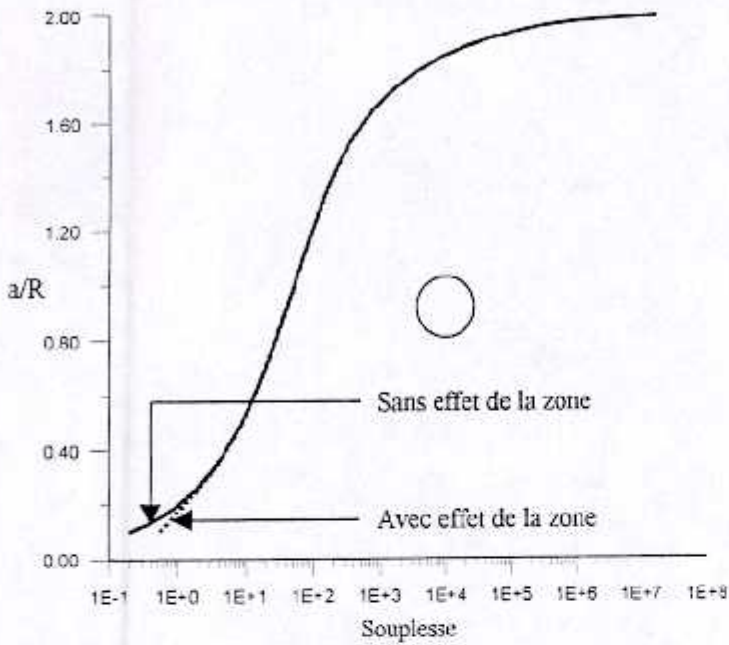


Fig. 4-1 Effet de la zone ignorée

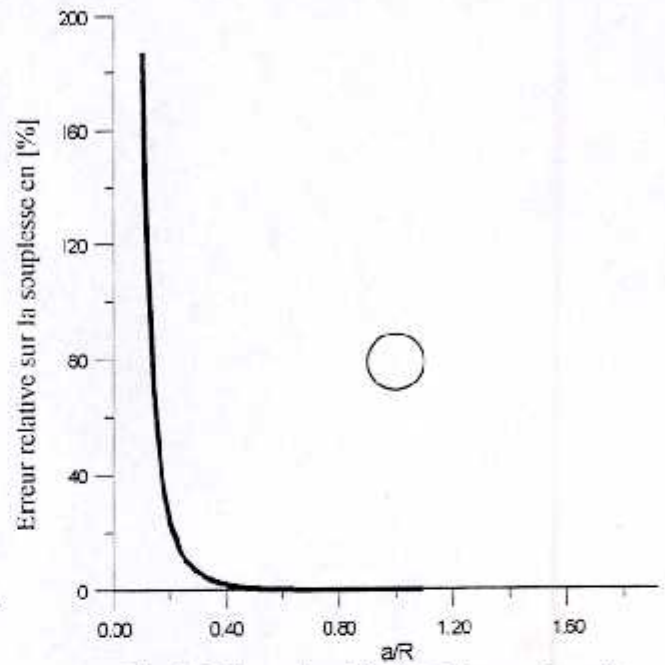


Fig. 4-2 Erreur due à l'effet de la zone ignorée

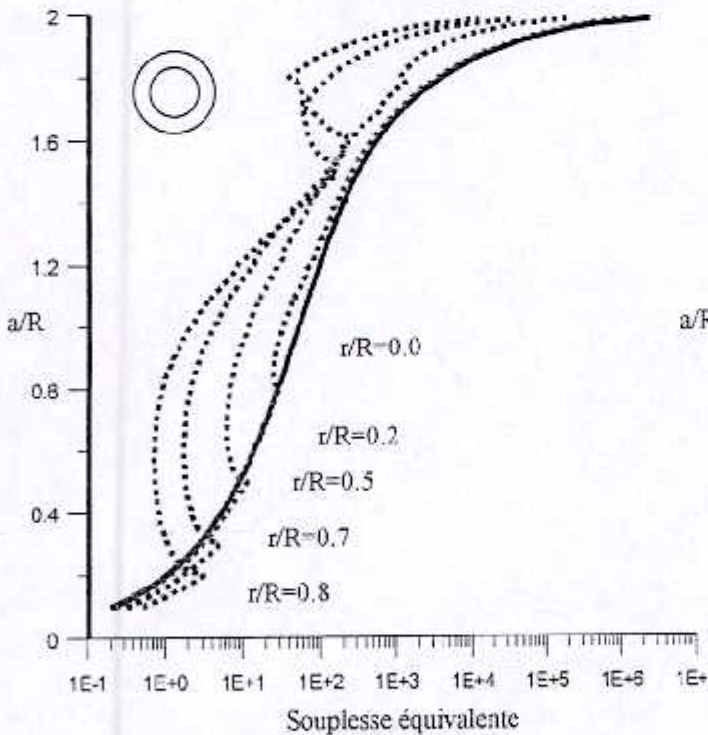


Fig. 4-3 Souplesse d'un arbre creux

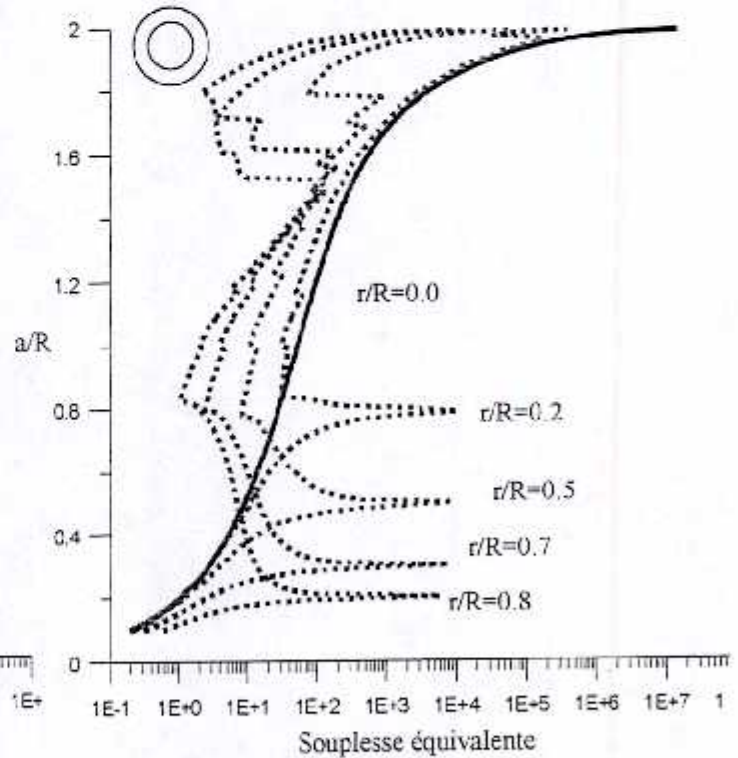


Fig. 4-4 Souplesse d'un arbre creux (2eme approche)

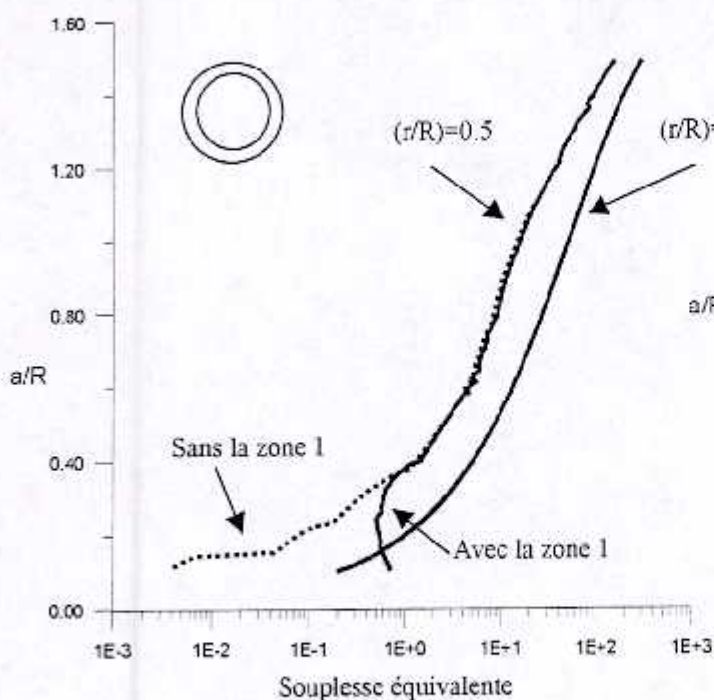


Fig. 4-5 effets des zones 1 et 2

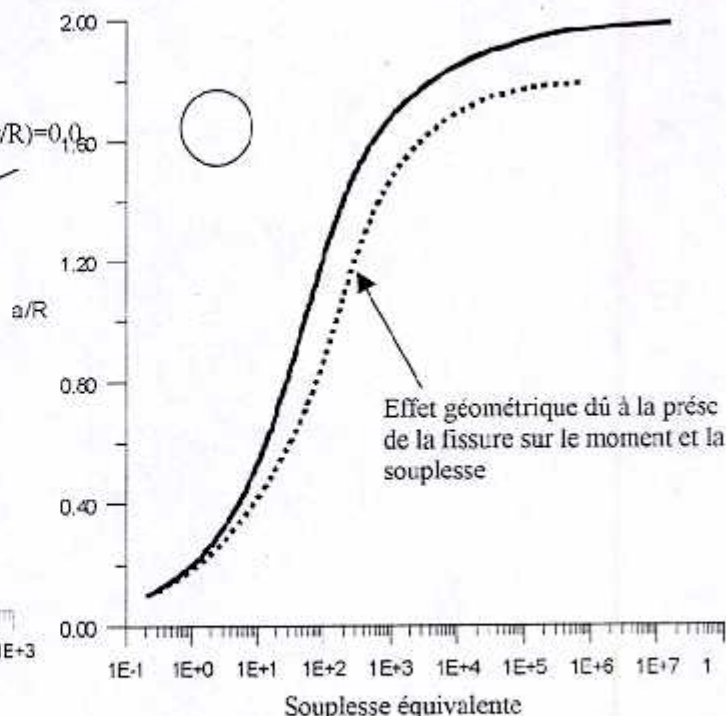


Fig. 4-6 effets du changement géométrique

4.1.2 Calcul dynamique

On considère le cas simple d'un arbre cylindrique en présence d'une fissure transversale (détails Annexe A). Les raideurs correspondantes à ce cas pour un arbre de longueur l , sont :

$$k_{\xi} = \frac{k}{1 + \frac{c_{\xi} k l^2}{8}} \quad \text{et} \quad k_{\eta} = \frac{k}{1 + \frac{c_{\eta} k l^2}{8}}$$

Avec :

k : raideur initiale.

L'équation de mouvement s'exprime comme suit [38] pour la totalité de l'arbre au point de fissure :

$$\begin{aligned} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi}\xi + k_{\xi\eta}\eta &= f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta}\eta + k_{\eta\xi}\xi &= f_{\eta}(t) \end{aligned}$$

Le couplage des raideurs ($k_{\xi\eta}$ ou $k_{\eta\xi}$) est généralement de faible effet devant les deux autres [38]. L'équation de mouvement devient :

$$\begin{aligned} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi}\xi &= f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta}\eta &= f_{\eta}(t) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\xi} - m\Omega^2 & -c\Omega \\ +c\Omega & k_{\eta} - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\xi}(t) \\ f_{\eta}(t) \end{Bmatrix}$$

Cette équation ressemble à celle du modèle de base, mais sans la présence des déplacements angulaires sous l'effet des moments M_y et M_z . Les effets de torsion et des forces axiales peuvent être ajoutées normalement par assemblage.

Cette approximation prend l'arbre entier sans discrétisation. Il semble que cette approche est très grossière ; vu qu'elle porte des simplifications globales dans le calcul, alors que la discrétisation récupère une certaine rigueur en jouant sur le nombre d'éléments.

La résolution de ce système d'équation en fonction de la pulsation donne les allures représentées dans la figure 4-7[38].

La solution générale [38] de ce système à la forme :

$$\xi = A.e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \eta = B.e^{\lambda t}$$

Si on pose ρ comme le module tel que: $\rho = \xi + i\eta$

La solution [38] devient :

$$\rho = U.e^{i\omega t} + V.e^{-i\omega t}$$

Avec : U, V : variables complexes de l'amplitude.

Dans la figure 4-7, on illustre les réponses libres non forcés.

On constate que la structure, en présence de la fissure, modifie son comportement dynamique par l'apparition d'autres pulsations propres (effet anisotropique) et décale ces dernières vers la gauche ou "left shifting".

Deux conséquences résultent de ce changement :

1. Le déplacement vers la gauche des fréquences peut être très dangereux pour les machines qui travaillent en subcritique.
2. La structure possède un nombre supérieur de fréquences propres.

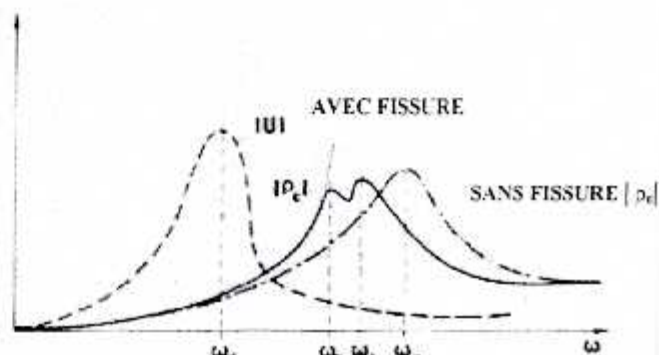


Fig. 4-7 Amplitude des vibrations d'un arbre fissuré

Par ailleurs, on note [38] que la différence entre les nouvelles fréquences propres est négligeable pour les petites fissures, tel que :

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0$$

Avec:

ω_0 fréquence propre initiale

Cette différence augmente avec l'augmentation de la taille de la fissure.

4.1.3 Discussion des résultats

La souplesse (fig. I4-1) d'un arbre cylindrique plein présente une allure de faible croissance pour ($a/R < 0.5$) puis une croissance encore plus faible pour ($a/R < 1.6$) et enfin une croissance accélérée. Un phénomène semblable à l'avalanche, tout à fait logique physiquement, vu l'importance de la fissure.

L'effet de l'ignorance des zones latérales (fig. 4-1) non introduites dans l'intégral de calcul est notablement important pour les petites fissures mais s'atténue pour ($a/R > 0.4$) puis disparaît. Par ailleurs, la considération de cette zone ($n^{\circ}1$) fait augmenter sensiblement la souplesse, mais cette augmentation diminue au fur et à mesure qu'on s'approche du rapport ($a/R < 0.5$).

L'erreur (fig. 4-2) introduite par cette simplification est considérable et dépasse de loin les 5% au-dessous de ($a/R = 0.5$). En conséquence, pour le calcul de la souplesse (ou la rigidité) il faut tenir compte de ces zones latérales $[-R, -b]$ et $[+b, +R]$ pour les fissures d'une profondeur ($< 0.5R$). Le cas le plus fréquent dans la pratique avant la panne.

Le calcul de la souplesse d'un arbre cylindrique creux (fig. 4-3) montre une influence considérable du trou. La présence du creux diminue globalement la souplesse, mais présente une augmentation sensible quand la profondeur de la fissure n'atteint pas le trou. L'allure générale de la courbe présente deux pics, un

pic d'augmentation à la première frontière du trou ($R-r$) et un autre pic de réduction à la deuxième frontière du trou ($R+r$) avec un extremum pour ($R < a < R+r$) et un minimum à ($a/R=1$). Cette allure s'explique par des singularités aux frontières du trou, un redressement à l'intérieur du trou puis une évolution similaire à celle d'un arbre plein pour ($a > R+r$).

Une deuxième approche (fig. 4-4) consiste à considérer la hauteur physique entre deux bords libres successifs (ou l'épaisseur du cylindre) et conforte la première approche, mais présente une singularité au niveau de la première frontière du trou ; ce qui signifie une rupture (cas semblable pour $a/R=2$). Cette singularité n'est pas confortée par la pratique ; en effet, une telle allure signifie une rigidité nulle ou rupture totale ce qui n'est pas vrai, mais peut être expliquée par une rupture locale. Cette approche n'est donc qu'un moyen d'éclaircissement du phénomène. L'expérimentation est souhaitée pour une approche plus détaillée de ce phénomène.

L'augmentation du rapport (r/R) du rayon du trou sur celui de l'arbre semble avoir influé bénéfiquement sur la structure en diminuant globalement la souplesse, donc en augmentant la rigidité ! Il faut remarquer que dans ce graphe (fig. 4-3 et 4-4) on n'a pas introduit les effets des zones ($n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$) latérales et centrales.

L'effet de la considération de la zone latérale (zone 1) et centrale (avec fissure profonde au-delà du creux) (zone 2) (fig. 4-5) sont très différents ; alors que l'effet de la première zone est très présent pour ($a/R < 0.5$), celui de la deuxième est totalement absent et même négligeable.

La présence de la fissure fait modifier la géométrie de la structure à l'endroit du défaut. La considération de cette modification (fig. 4-6) illustre parfaitement l'importance de cette "erreur d'appréciation" par une augmentation sensible de la souplesse, particulièrement dans la zone ($a/R > 0.4$), mais reste faible pour les fissures peu profondes.

Par ailleurs, le comportement dynamique en présence des fissures est modifié ; les fréquences propres de la structure se trouvent déplacées vers la gauche avec augmentation du nombre de ces dernières.

4.1.4 Conclusion et recommandations

Le calcul analytique développé est très satisfaisant vu la correspondance des courbes trouvées avec celles de la littérature [33]. C'est pourquoi, on peut estimer que cette extension aux arbres creux semble être acceptable et validée pour ce modèle.

Il faut noter que pour les fissures peu profondes la considération de l'effet de la zone des côtés latéraux est importante dans les calculs de la souplesse et par la suite de la rigidité globale de l'arbre et de ses fréquences propres en présence du défaut de la fissuration.

Par ailleurs, il semble que les différents facteurs introduits donnent des résultats justifiables. La validation expérimentale de ces résultats est souhaitable dans le futur.

Le calcul dynamique a montré que la présence d'une fissure modifie le comportement dynamique, il est d'une grande importance, d'où l'intérêt de tenir compte de ces changements.

4.2 Paliers (roulement à billes)

Parmi les défauts qui peuvent exister dans les machines tournantes on trouve ceux liés aux roulements. La modélisation du roulement nécessite impérativement la connaissance de sa rigidité. Cette propriété a déjà fait l'objet d'un calcul analytique et actuellement d'une validation expérimentale et numérique.

Dans cette étude, on se limitera à la rigidité radiale du roulement, vu l'importance de cette dernière par rapport aux autres et vu le manque de temps.

4.2.1 Procédé de calcul

La procédure adoptée dans cette étude comparative suit les étapes :

- Modèle de référence,
- Calcul de la rigidité,
- Mesure expérimentale de la rigidité,
- Calcul dynamique,

- Modélisation des défauts caractéristiques,
- Exposé des résultats,
- Discussion des résultats,
- Conclusion.

Dans la première partie, on présente les principales anomalies d'un roulement. Dans la deuxième, on présente le modèle théorique (rigidité statique) et sa validation par comparaison au modèle expérimental. Dans la troisième partie, on présente brièvement, le modèle expérimental (les détails [64]). Dans la quatrième partie, on se propose de choisir un modèle dynamique pour l'étude de la réponse du système. Dans la cinquième partie, fait la modélisation des principaux défauts caractéristiques et la comparaison de leurs réponses typiques avec celles de la littérature.

On expose les différents résultats et on procède à leur discussion sans oublier une conclusion émise .

4.2.2 Modèle de Référence

Etant donné, que dans cette étude un travail expérimental a été fait, le modèle présenté ne concerne que les résultats des références sur les effets caractéristiques des principaux défauts touchant les roulements.

Les résultats de référence, voir figure 4-8[25], ont été triés parmi plusieurs références [7,20,21,22,23,25,27,34,35,36,57].

Le choix de ces résultats comme source de référence a été dicté par la réputation du sérieux des travaux entrepris par Brüel & Kjaer[25].

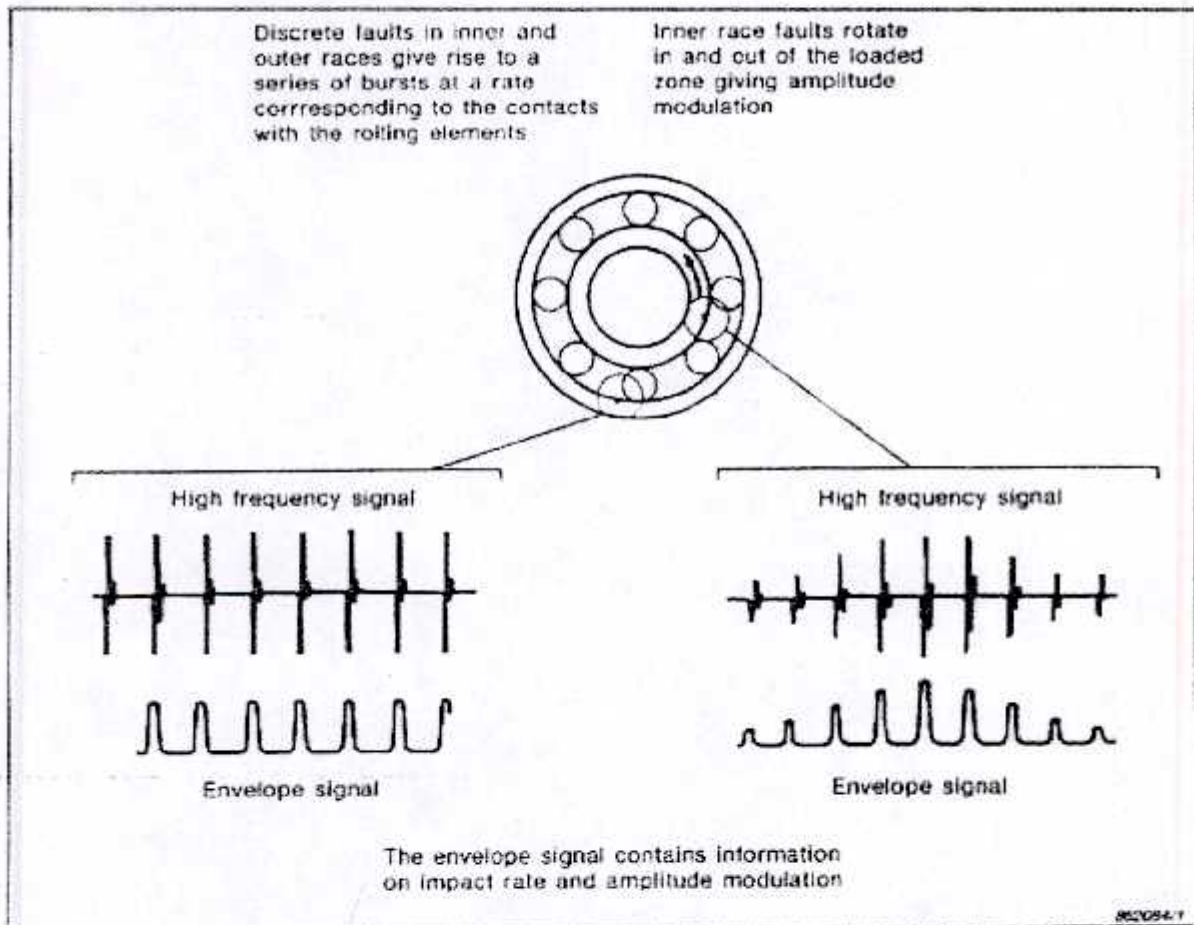


Fig. 4-8 Formes vibratoires des effets dus à des défauts sur la piste interne et externe d'un roulement

4.2.3 Modèle théorique

Pour obtenir la rigidité radiale d'un roulement à billes, on procède au calcul des déformations locales et globales. Ensuite on utilise la relation liant les efforts appliqués aux déplacements résultant pour déterminer la rigidité.

4.2.3.1. Calcul des déformations

➤ Déformation locale

Pour obtenir la déformation radiale, on considère la déformation radiale d'une rangée de billes ainsi que celle de la bague intérieure et extérieure. Selon la loi de HERTZ [11], on a pour une sphère:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{8 (1/d_1) + (1/d_2)}} \quad (4-2-1)$$

La hauteur de déformation h est : $h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$ (4-2-2)

La déformation locale totale sera : $h_{LT} = h_{sup} + h_{inf}$

➤ Déformation globale

Sur la base de la loi de HOOK[27] on détermine la déformation globale en compression (u) par :

$$u = \frac{F}{\pi E d_b} \ln \left[\frac{d_b}{h} - 1 \right] \quad (4-2-3)$$

La déformation totale de la bille est alors : $h_T = h_{LT} + h_{GT} = h_{sup} + h_{inf} + u_{inf} + u_{sup}$
Avec : E_i : modules d'élasticité, d_b : diamètre de la bille, F : force radiale appliquée.

4.2.3.2 Calcul de rigidité

Il suffit, alors de voir sur graphe l'allure de la relation liant la variation du déplacement total résultant (h_T) en fonction de la force radiale appliquée.

4.2.4 Modèle expérimental

La mesure de la rigidité du roulement qui constitue un système composé (bagues + billes) nécessite une sollicitation comprise dans les limites des charges que peut supporter le roulement (FLT ISKRA 6203Z)[66]. Comme l'essai doit être conduit dans le domaine quasi statique, la vitesse de chargement doit par conséquent être la plus faible possible. Dans le cas des présents essais la charge est limitée selon les références SKF à 4000N et la vitesse de chargement, qui est conditionnée par les possibilités de la machine, est prise égale à 0.05 mm/min (cette vitesse est traduite en terme de déplacement de la traverse)[64].

Le roulement est donc bridé entre l'axe de pression et la bague de compensation (fig. 4-9), et l'essai est lancé au moment où le contact entre l'ensemble des pièces est réalisé[64].

Le nombre d'expériences a été de trois par roulement sur deux roulements identiques. Les différents résultats sont illustrés ci-après. Par ailleurs, les détails de ces expériences se trouvent en [64].

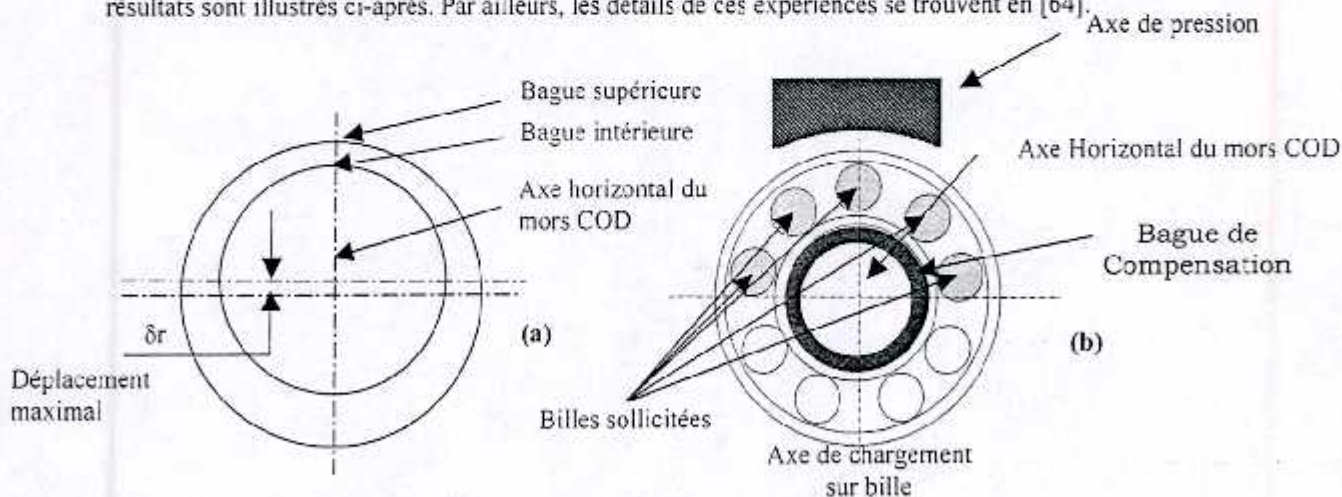


Fig. 4-9 Représentation Schématisée de la sollicitation.

- (a) Déformation totale d'un roulement sur la tranche engagée,
(b) Schéma des billes sollicitées lors du chargement.

Une série d'essais a été engagée sur deux roulements de type (FL.T ISKRA 6203Z). Les expériences réalisées peuvent être groupées en plusieurs catégories :

- ✓ Vérification de la fiabilité et de la fidélité des essais et de la machine de traction/compression,
- ✓ Etude de l'effet de configuration des billes sur la rigidité,

- ✓ Mesure de la variation de la déformation totale du roulement en fonction de la variation de la force de pression.

4.2.5 Modèle Dynamique

On s'intéresse au calcul dynamique du modèle théorique du roulement et au calcul de la réponse de cette structure mécanique sous les conditions normales de fonctionnement.

Mode d'engagement :

Le roulement présente une variation de sa rigidité en fonction de l'angle de rotation ; il passe de l'état (a) vers (b) puis retour à (a) (fig. 4-10).

Cette variation se répète d'une façon identique au nombre de billes (n) à chaque rotation de la cage de billes.

Lors de chaque cycle, il y a passage d'une bille sur l'axe de compression ou zone 3 (fig. IV-12). La configuration des billes est variable. La rigidité du roulement l'est aussi. Cette dernière se trouve tributaire de l'angle de rotation (γ).

On peut considérer la rigidité selon l'angle de rotation (γ).

$$K(\gamma) = \sum K_{0i} \cdot \sin(\gamma_i) \quad (4-2-4)$$

Avec :

- γ_i : $[\gamma_{0i} .. \gamma_{0i} + (2\pi/n)]$,
- γ_{0i} : angle initial de la $i^{ème}$ bille,
- i : $[1, .., m]$; m : billes engagées,
- K_{0i} : rigidité au niveau d'un roulement

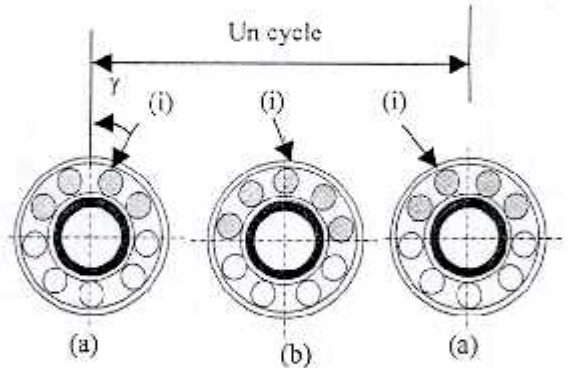


Fig. 4.10 Modes d'engagement des billes
(a) : deux billes en tête,
(b) : une bille en tête

Remarque : Comme pour la modélisation des engrenages, on considère chaque cycle d'une durée égale à la période d'un tour de la cage de billes divisé par le nombre de billes et par un nombre de pas adéquat. D'où $\gamma = [0 .. LMAX\%]$ d'un cycle, avec LMAX nombre de pas adéquat, généralement égale à 100.

4.2.5.1 Modèle de roulement

On premier lieu, on propose le modèle dynamique de calcul suivant:

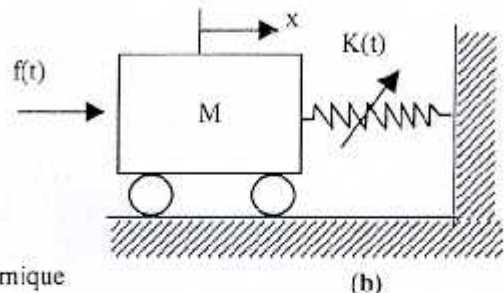
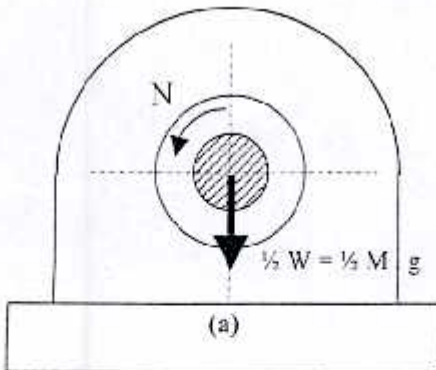


Fig. 4-11 Modèle dynamique
(a) modèle de roulement
(b) modèle de calcul dynamique

Pour entreprendre cette étude, un choix de modèle s'impose. Afin de simplifier les calculs, on adopte un modèle de roulement simple. Un roulement avec huit (n=8) billes. L'arbre tourne avec une vitesse de rotation N égale à 600 tours par minute. L'arbre a une masse égale 200 Kg.

4.2.5.2 Calcul dynamique

Le modèle de roulement est composé par les masses de l'arbre et la rigidité équivalente du palier, la masse du roulement et négligée ainsi que le jeu de fonctionnement. La résolution de ce système donne.

$$M \ddot{X} + K(t) \dot{X} = f(t) \quad (4-2-5)$$

Avec : X : déplacement relatif (x1-x2)

La rigidité K(t) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$K(t) = K_{max} g(t) + K_{min} \quad (4-2-6)$$

Avec : $g(t)$: fonction non-linéaire de la variation de K en fonction du temps.

Remarque: Il faut noter, que sur la base de ces formules un programme informatique de calcul a été élaboré avec la méthode de résolution des équations différentielles non linéaires pas à pas (Annexe B).

4.2.6 Modélisation des défauts

On se propose d'introduire les modèles de défauts mécaniques les plus importants dans le modèle théorique de calcul de la rigidité, voir leurs effets sur la réponse du système et comparer les résultats à ceux de la littérature.

Les principaux défauts étudiés sont : le choc normal du au mouvement des billes, la présence d'un défaut sur la piste de la bague intérieure, la présence d'un défaut sur la bague extérieure, la présence d'un défaut sur la bille et la présence d'un balourd.

Ces défauts peuvent se répertorier par la nature du défaut. En effet, on peut distinguer deux types de défauts, à savoir les défauts dus à la présence d'un obstacle comme une bosse, une inclusion d'une impureté, etc. la deuxième nature c'est les trous ou cavité dus à une fissure ou toute autre forme de brèche. Il existe d'autres types à savoir les défauts dus, principalement, à la nature même des roulements et à leur fonctionnement. Ils sont causés par des facteurs externes tel le balourd. Par conséquent, on aura quatre familles d'anomalies : de fonctionnement, due aux bosses, due aux crevasses et celle d'origines externes.

Pour introduire ces défauts, il faut rappeler les relations cinématique entre les différentes parties du roulement ; à savoir : la vitesse de rotation de l'arbre d'entraînement, la vitesse de rotation de la cage des billes, et la vitesse de rotation d'une bille [3,7] (chapitre 1).

$$r_T = r_1 + r_B$$

$$N_T = N_R \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad (7)$$

$$N_B = \frac{r_2}{r_B} N_T$$

Avec :

r_1 : rayon de la piste interne,
 r_2 : rayon de la piste externe,
 r_B : rayon de la bille,
 N_R : vitesse de rotation de l'arbre,
 N_T : vitesse de rotation de la cage,
 N_B : vitesse de rotation de la bille.

Soit le cas où la bague interne est mobile et la bague externe est fixe. On introduit une division du roulement en régions correspondantes aux zones où se trouve les billes. Ces régions, numérotées de (1) à (n), donnent une idée sur l'état des billes (engagées ou non). La zone soumise à la pression dominante se trouve sur l'axe de la force de pression du poids de l'arbre ayant le numéro (3).

En effet, une cavité se trouvant sur la partie non engagée ne peut entraîner de changement puisqu'il n'y a pas une discontinuité d'effort. par contre une bosse contrairement au cas précédent entraîne un déplacement imposé quelle que soit sa position. En outre, l'ampleur des effets causés par un défaut dépend de l'éloignement de sa position par rapport à la zone n°3.

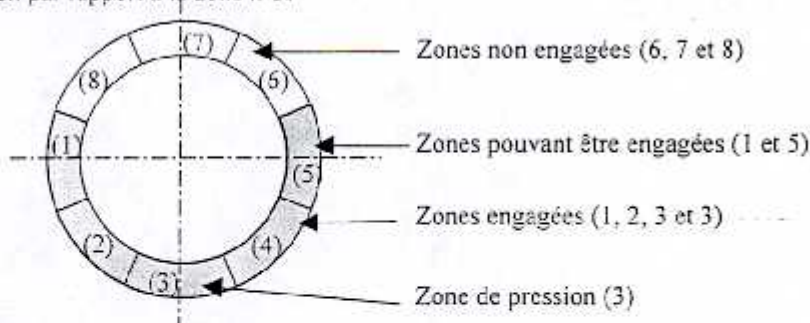


Fig. 4-12 Zones engagées, non engagées et zones qui peuvent être engagées

4.2.6.1 Anomalies de fonctionnement

Le choc dû au mouvement des billes peut être considéré comme un problème mineur. En effet, l'ampleur de ce dernier est très faible devant les effets que peuvent causer les défauts (déjà cités). Ce défaut constitue la principale source de vibrations. La modélisation de ce phénomène se base essentiellement sur la modélisation de la rigidité $K(\gamma)$ et sur le calcul de la période de rotation d'une bille correspondant à la répétition de (n) cycles.

$$T_T = 1/f_e \quad \text{et} \quad f_T = N_T/60$$



4.2.6.2 Anomalies dues aux bosses

La modélisation de ce type de défaut peut se traduire par un déplacement imposé, lors du passage d'une bille sur ce défaut. La grandeur du déplacement est égale à la taille de la bosse et il est sensé déformer toute la structure. La durée de ce changement varie aussi selon la taille du défaut et la vitesse de rotation.

4.2.6.2.1 Défaut sur la piste externe

La présence d'un défaut (bosse, impureté, ..) sur la piste externe entraîne directement un déplacement imposé qui se répercute par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité égale à la période de la cage,
- ✓ En considérant le choc régulier et d'ampleur qui dépend de la position du défaut par rapport à la zone de pression,
- ✓ $y = y_0 + y_s$ (Avec: y_s = la taille du défaut).

4.2.6.2.2 Défaut sur la piste interne

La présence d'un défaut (bosse, impureté, ..) sur la piste interne entraîne directement un déplacement imposé qui se répercute par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité équivalente à la vitesse relative ($N_R - N_T$).
- ✓ En considérant le choc non régulier, il dépend de son éloignement de la zone de pression,
- ✓ $y = y_0 + y_s$ (Avec: y_s = la taille du défaut).

4.2.6.2.3 Défaut sur la bille

La présence d'un défaut (bosse, impureté, ..) sur la bille entraîne directement une discontinuité dans le fonctionnement se manifestant par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité égale à $1/2T_B$; due au contact sur la piste interne et externe,
- ✓ En considérant le choc non régulier. Il dépend de son éloignement de la zone de pression,
- ✓ $y = y_0 + y_s$ (Avec: y_s = la taille du défaut).

4.2.6.3 Anomalies dues aux crevasses

La modélisation de ce type de défaut peut se faire par la considération suivante : lors du passage d'une bille sur une cavité, une discontinuité des efforts résulte. En conséquence, la rigidité se trouve subitement modifiée. Par ailleurs, la durée de cette perturbation dépend de la taille de la cavité.

Sachant que la rigidité totale est la somme des rigidités des billes engagées. La considération que l'une d'elles passe sur une cavité entraîne une rupture de contact et se traduit par $k_i = 0$ de cette bille.

4.2.6.3.1 Défaut sur la piste externe

La présence d'un défaut (fissure, cavité, ..) sur la piste externe entraîne directement une discontinuité dans le fonctionnement. Il se manifeste par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité égale à la période de la cage,
- ✓ En considérant le choc régulier sur la zone engagée et nul sur la zone non engagée,
- ✓ L'ampleur du choc dépend de la position du défaut par rapport à la zone de pression,
- ✓ $K_i = 0$ (de la $i^{\text{ème}}$ bille passant sur la cavité).

4.2.6.3.2 Défaut sur la piste interne

La présence d'un défaut (fissure, cavité, ..) sur la piste interne entraîne directement une discontinuité de fonctionnement et se manifeste par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité relative égale à la vitesse relative ($N_R - N_T$),
- ✓ L'ampleur dépend de son éloignement de la zone de pression,
- ✓ Le défaut est seulement sur les billes engagées,
- ✓ $K_i = 0$ (de la $i^{\text{ème}}$ bille passant sur la cavité).

4.2.6.3.3 Défaut sur la bille

La présence d'un défaut (fissure, cavité, ..) sur la bille entraîne directement une discontinuité de fonctionnement et se manifeste par un choc mécanique. On modélise ce phénomène :

- ✓ Pour une durée estimée égale à 1% d'un cycle,
- ✓ Avec une périodicité égale à $1/2T_B$; due au contact sur la piste interne et externe,
- ✓ Le choc est non régulier,
- ✓ L'ampleur dépend de son éloignement de la zone de pression,
- ✓ $K_i = 0$ (de la $i^{\text{ème}}$ bille passant sur la cavité).

4.2.6.4 Défaut de balourd

La présence d'une force de balourd sur l'axe radial ou seulement sur l'une de ses composantes peut être modélisée par une force radiale de forme sinusoïdale sans tenir compte des effets sur l'autre axe adjacent (ou perpendiculaire) ; on se limite au cas unidimensionnel dans cette étude, comme suit :

$$F = \frac{1}{2} W + F_b \cdot \sin(\omega b \cdot t + \phi b)$$

Avec: W : poids de l'arbre, F_b : force de balourd estimée, ϕb : phase du balourd.
 ωb : pulsation du balourd équivalente à la fréquence de rotation,

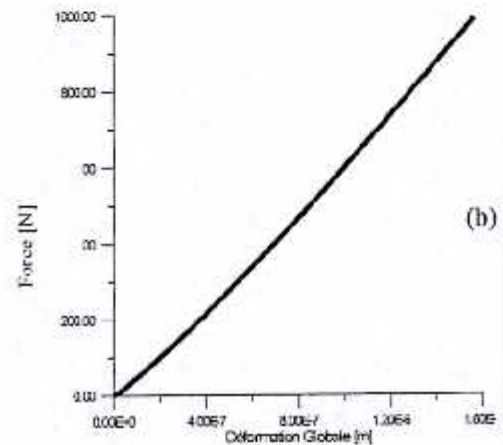
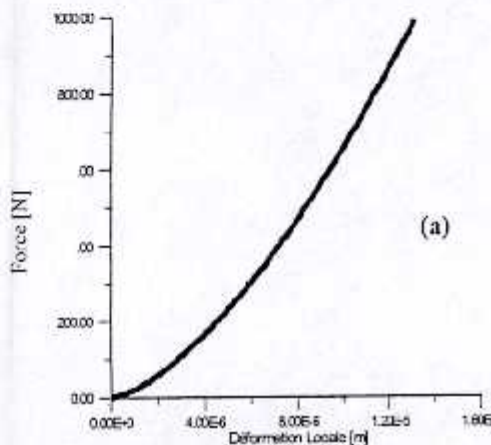
Remarques :

- On se limitera aux défauts de type bosses.
- Sur ces bases théoriques un programme de calcul a été élaboré pour l'exemple traité.

4.2.7 Résultats

4.2.7.1 Calcul de la rigidité

4.2.7.1.1 Déformation



4.2.7.1.2 Rigidité

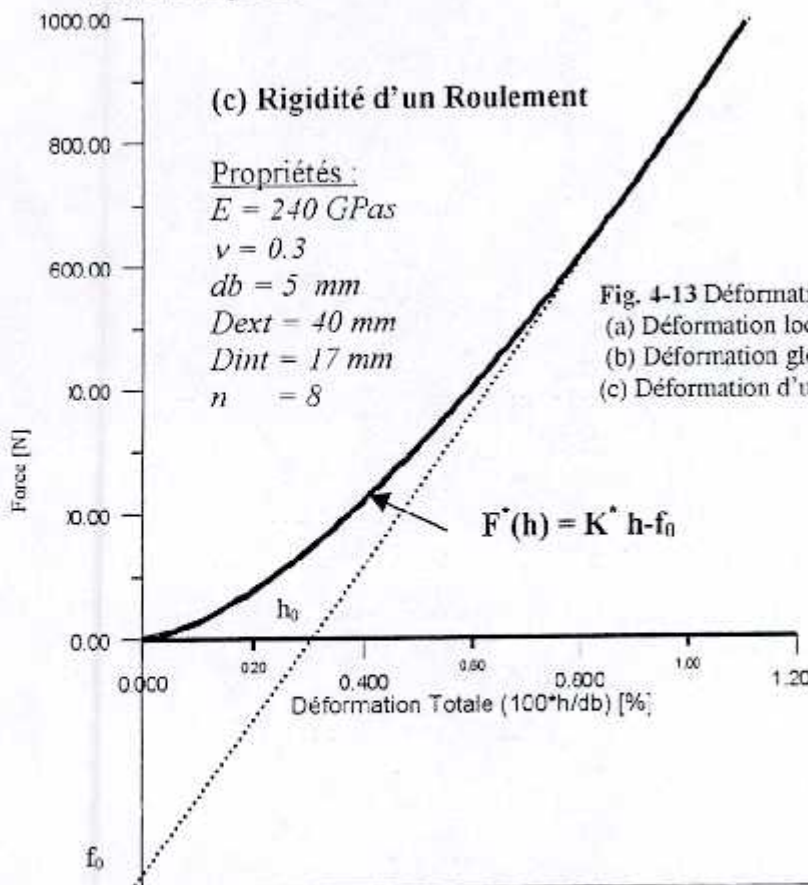


Fig. 4-13 Déformations théoriques
 (a) Déformation locale
 (b) Déformation globale
 (c) Déformation d'un roulement.

La déformation totale (fig. 4-13 (c)) en fonction des forces appliquées est non linéaire. Il y a deux courbes dont les allures sont curvilignes et une autre courbe presque linéaire pour les grandes forces. Sachant qu'un roulement est, généralement, sollicité par des forces plus grandes que celles utilisées dans cette illustration, on peut estimer que le comportement s'approche de la droite décrite par l'asymptote d'équation :

$$F^*(h) = K^* h_T + h_0$$

4.2.7.2 Mesures expérimentales

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes. On retrouve les courbes des essais réalisés sur les deux roulements. Les deux premières figures représentent les résultats d'essais similaires conduits sur deux roulements. Dans ces essais l'axe de chargement passe par la bille du roulement sollicité [64] (fig. 4-14).

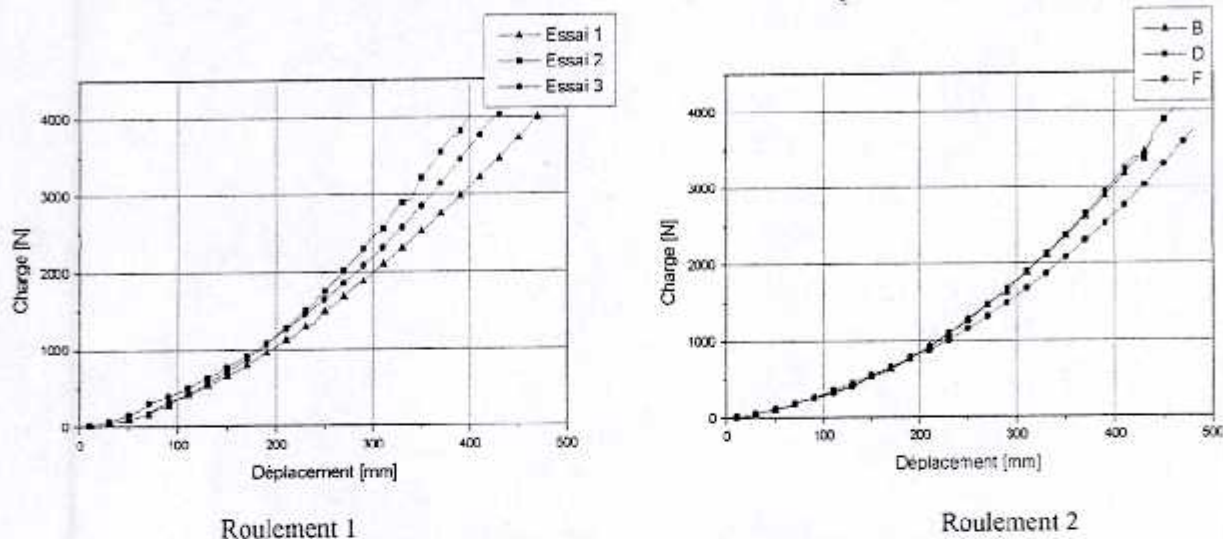


Fig. 4-14 Résultats d'essais avec axe de chargement sur la bille

La figure 4-15 présente les essais où l'axe de chargement passe entre les billes du roulement [64].

Sur ces courbes, on remarque une légère augmentation de l'inclinaison de la courbe par rapport aux cas précédents.

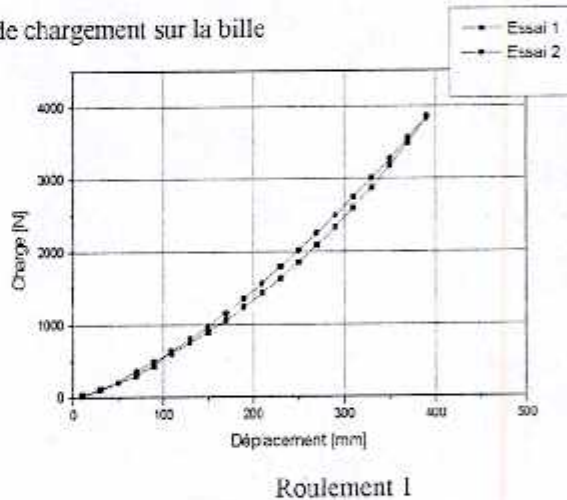


Fig. 4-15 Résultats d'essais avec axe de chargement entre les billes

A partir des courbes précédentes, on a pu déduire la rigidité du roulement seul. La courbe (fig. 4-16) traduit cette déduction.

En effet, il suffit de retrancher, pour une même valeur de la force, de la déformation totale la déformation de l'axe seul sans la présence du roulement.

On a la courbe marquée par les signes (+).

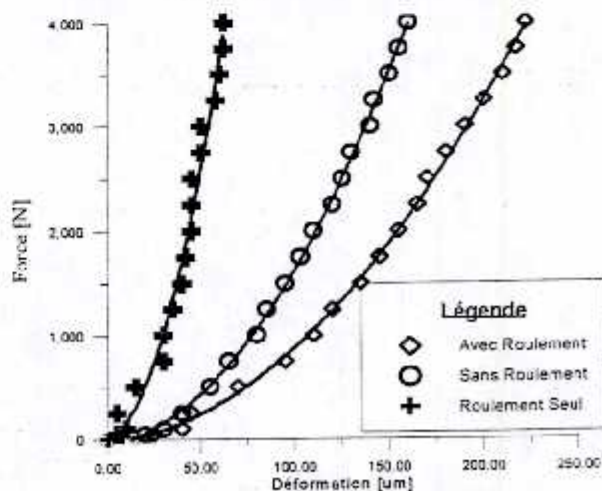


Fig. 4-16 Déduction de la déformation du roulement

Le traçage des deux courbes théorique et expérimentale sur le même graphe, donne : fig. 4-17.

On remarque que les deux courbes sont très proches l'une de l'autre, il y a une très grande ressemblance entre elles. Les deux modèles ont une grande similitude.

De petites divergences sont visibles au début et à la fin, mais restent négligeables.

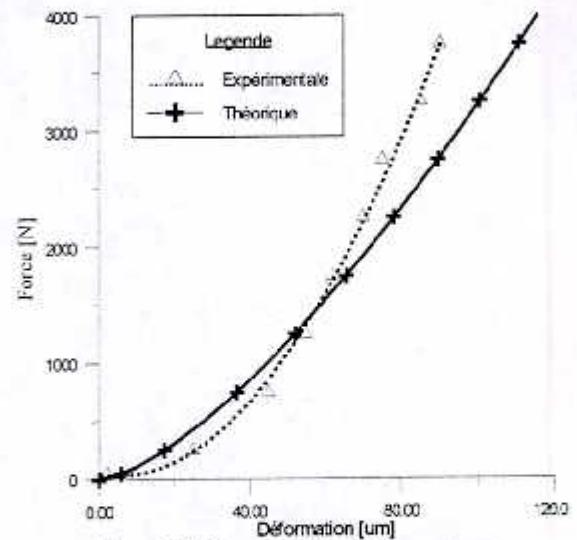


Fig. 4-17 Superposition des courbes théorique et expérimentale

4.2.7.3 Comparaison entre WILSON- θ méthode et β méthode

Avant de procéder au calcul dynamique, ont fait une comparaison entre la méthode WILSON- θ et la méthode β , pour confirmer le choix de la méthode β et être en accord avec la littérature (voir chapitre I).

L'exemple traité dans la figure (4.18) illustre le spectre de la vitesse dynamique pour le roulement étudié (cas sans défauts mécaniques) avec les deux méthodes de résolution pas à pas.

Le résultat obtenu confirme, d'une façon très claire, que la méthode β fait apparaître les pics des hautes fréquences contrairement à la méthode θ . Cette dernière a tendance à les amortir ou à les cacher.

La méthode β est la mieux adaptée.

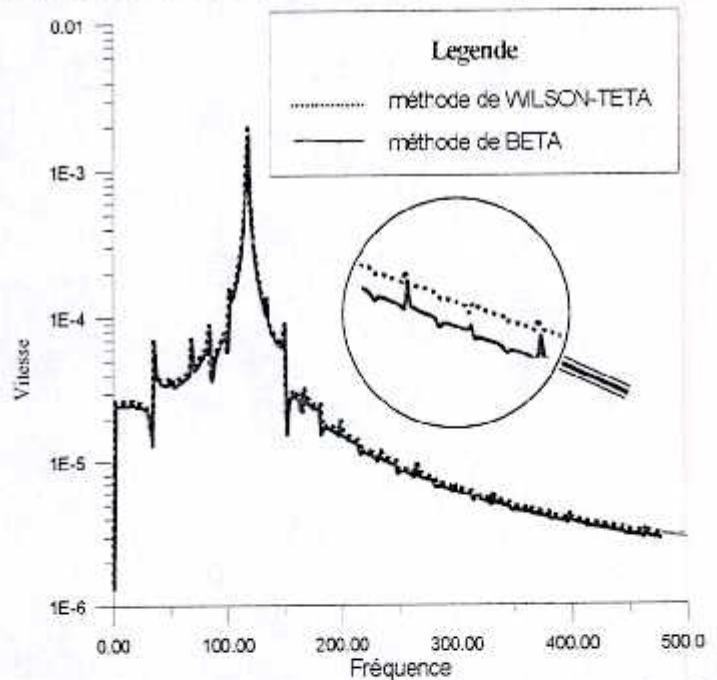


Fig. 4-18 Comparaison entre WILSON- θ méthode et β méthode

4.2.7.4 Calcul dynamique

Sur la base de la courbe de rigidité $K(\gamma)$ (fig. 4-19) exprimée sur une période $T_n = T_r / n$, on calcule la réponse $x(t)$ forcée. T_r est la période pour un tour de la cage des billes et n est le nombre de billes.

Puisque la masse du roulement est négligeable devant l'arbre, on ne tient compte que de ce cas de. La résolution de l'équation différentielle (4-2-5) par la méthode pas à pas [27] avec un pas $\Delta t = T_n/LMAX$ et les conditions initiales suivantes : $X(0) = 0 \mu m$, $V(0) = 0 m/s$ et $A(0) = 0 m/s^2$ avec $f(t) = 1/2 f_0 = 1/2 M.g$, pour la moitié de la masse de l'arbre vu que l'arbre se repose sur deux paliers.

La rigidité $K(\gamma)$ des billes engagées évolue dans le temps et possède un maximum au moment où l'axe radial passe entre deux billes.

La rigidité du roulement est la somme des rigidités des billes engagées mais avec des proportions différentes, vu leurs implications.

Contrairement aux engrenages, il n'y a pas, ici, d'interférences mais une périodicité. Par conséquent, à chaque période T_n il y a la même forme de la courbe de rigidité dynamique.

Par ailleurs, il faut noter que T_T ne correspond pas à T_R (période d'un tour de rotation de l'arbre).

Propriétés :

- $E = 240 \text{ GPas}$
- $\nu = 0.3$
- $db = 5 \text{ mm}$
- $D_{ext} = 40 \text{ mm}$
- $D_{int} = 17 \text{ mm}$
- $n = 8$
- $masse = 100 \text{ Kg}$
- $Amortissement c = 10^4 [12,19,16]$
- $N_R = 500 \text{ tr/min}$
- $N_T = 247 \text{ tr/min}$
- $N_B = 1654 \text{ tr/min}$
- Nombre de pas par cycle LMAX= 100

$(\xi = 6\% \text{ pour } \omega = 737.36 \text{ rd/s}) \text{ sachant : } \frac{c}{m} = 2 \cdot \omega_0 \xi$

Le comportement dynamique particulier du roulement (fig. 4-20) est dû principalement à la rigidité et sa variation dans le temps.

Pour la période T_n , la réponse est composée par trois ondulations caractéristiques d'amplitudes variées.

Il y a huit (8) signaux de base composés chacun par trois (3) ondulations caractéristiques

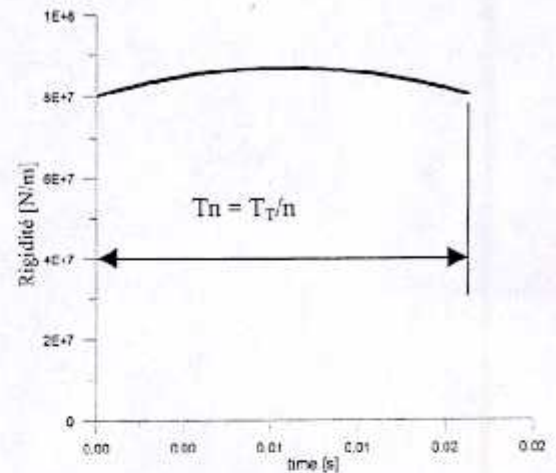


Fig. 4-19. Rigidité dynamique d'un roulement

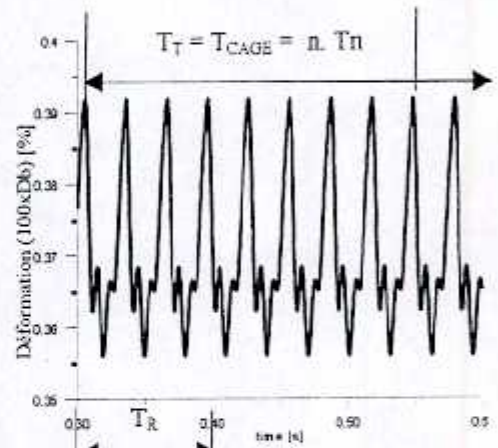


Fig. 4-20 Déformation dynamique d'un roulement

4.2.7.5 Identification des anomalies

Dans cette partie, on confronte des résultats issus de la simulation d'un défaut (du type bosse) de l'étude théorique aux résultats trouvés dans la littérature.

4.2.7.5.1 Anomalies de fonctionnement

Les premiers résultats obtenus étaient, tous, erronés. La cause principale était de n'avoir pas considéré l'effet de l'amortissement. Il s'est avéré que le principal paramètre non négligeable permettant de faire ressortir l'effet de la présence des défauts était l'amortissement. Sans lui il y a irrémédiablement une divergence des solutions numériques.

Les résultats trouvés montrent que ce phénomène est caractérisé par un pic identifié à la fréquence de cycle $F_n = n \cdot f_T = 28.93 \text{ Hz}$ et ses hautes harmoniques. Cette simulation du choc mécanique, lors du fonctionnement, a été illustrée sur les figures 4-20 et 4-21(a).

Ce phénomène est largement illustré sur les figures 4-20 et 4-21(a). Ces dernières montrent, clairement, que sous l'effet d'une charge constante (poids de l'arbre) le système possède une réponse caractéristique, connue dans la littérature, mais avec une différence (modulations) due à la rigidité dynamique et qui se manifeste par la présence d'autres harmoniques.

4.2.7.5.2 Défaut sur la piste externe

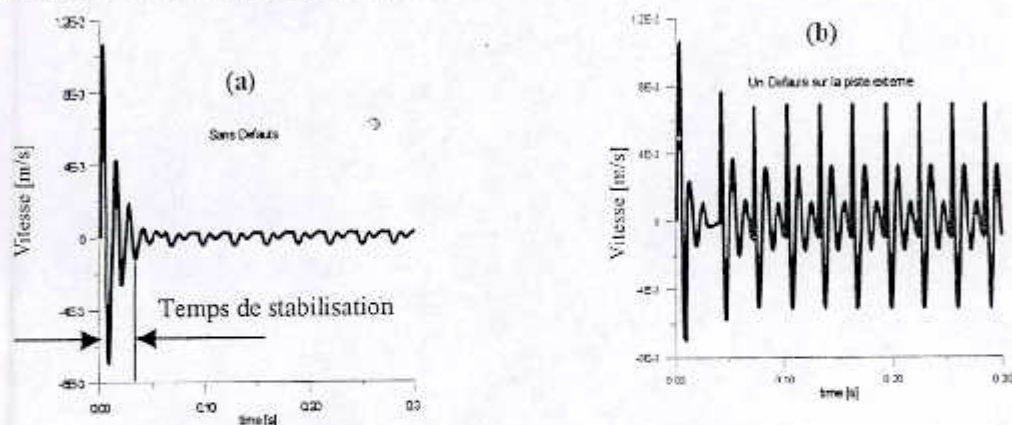


Fig. 4-21 Réponse dynamique sur la piste externe
(a) Sans défaut,
(b) Avec défaut.

L'exemple d'un seul défaut d'une cavité placée sur la piste externe de largeur (2%) est illustré par la fig. 4-21(a). La comparaison entre cette dernière et la figure 4-21(b) montre que la présence de ce genre de défaut excite et augmente la réponse ou le signal de base ; puisque la fréquence de ce défaut est la même que celle due au mouvement de la cage de billes.

4.2.7.5.3 Défaut sur la piste interne

L'exemple d'un seul défaut d'une cavité placée sur la piste interne de largeur (2%) est illustré sur la figure 4-22.

On remarque parfaitement la modulation de la réponse dynamique. Elle est due principalement aux éloignements et rapprochements successifs du défaut par rapport au point de contact (ou de pression) de l'arbre sur le roulement.

La modulation est fonction de la vitesse de la cage.

4.2.7.5.4 Défaut sur la bille

L'exemple d'un seul défaut d'une bosse de largeur (2%) placée sur l'une des billes est illustré sur la figure 4-23.

On remarque, parfaitement, la modulation de la réponse dynamique. Elle est due principalement aux éloignements et rapprochements successifs du défaut par rapport au point de contact (ou de pression) de l'arbre sur le roulement.

La modulation fonction de deux (02) fois la vitesse de la cage. C'est dû au contact doublé du défaut, une fois sur la bague externe et

4.2.7.5.5 Défaut de balourd

Le balourd est simulé par une force de 1000 N (d'une masse équivalente à celle de l'arbre). Le résultat est illustré : la figure 4-24.

On remarque une modulation de la réponse dynamique avec une période équivalente à celle de la rotation de l'arbre $T_R=0.1$ s.

En comparaison avec la figure 4-20 (sans défaut), on remarque que le balourd absorbe les petites variations, il devient dominant.

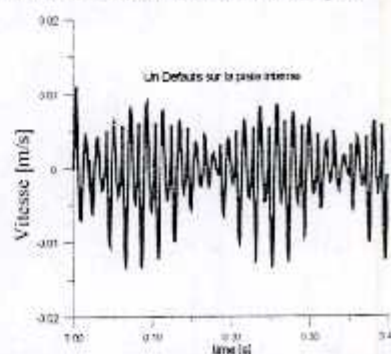


Fig. 4-22 Défaut sur la piste interne

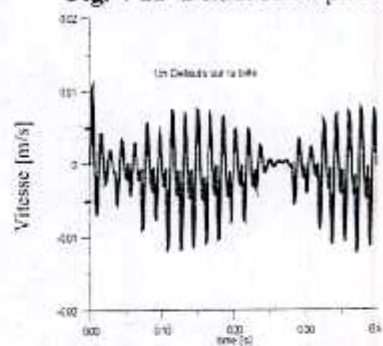


Fig. 4-23 Défaut sur la bille

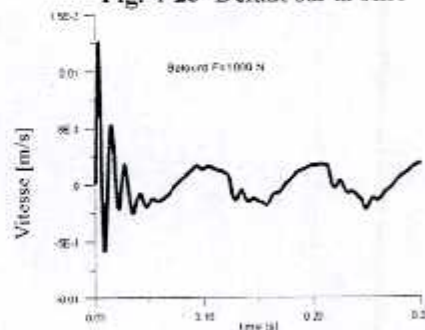


Fig. 4-24 Défaut de Balourd

4.2.8 Discussion des Résultats

4.2.8.1 Discussion des résultats expérimentaux

Les constatations [65] tirées des résultats sont :

- i. La concordance entre les essais réalisés dans les mêmes conditions : Cette concordance conforte la reproductibilité des essais réalisés.
- ii. La similitude qui existe entre les essais avec bille sur axe et bille hors axe : Cette similitude laisse croire que la rigidité du roulement ne varie pas sensiblement sur la circonférence.
- iii. Le passage d'un échantillon à l'autre ne fait apparaître aucune variation palpable dans la réponse du système : Cette reproduction des résultats traduit la fidélité de production des roulements. Il faut noter que les roulements utilisés possèdent la même référence et sont identiques.
- iv. La comparaison des résultats expérimentaux avec ceux tirés du modèle théorique révèle :
 - ♦ Du point de vue allure des courbes, la modélisation reflète relativement l'expérience.
 - ♦ Du point de vu quantitatif, on note ,qu'au départ des courbes, un certain écart existe. Cet écart peut être expliqué par le passage du système par une petite période d'adaptation, où les jeux fonctionnels sont rattrapés avant que le roulement ne soit réellement sollicité en compression. Dans la plage de fonctionnement du roulement, les deux courbes sont proches l'une de l'autre. Au-delà de cette zone, à proximité des valeurs de sollicitations extrêmes, une certaine divergence est constatée. Cette différence de rigidité peut être expliquée par le fait que le modèle développé ne tient pas compte des traitements thermiques et de surface que le matériau initial subit et qui modifient les propriétés physiques.

4.2.8.2 Discussion des résultats du calcul dynamique : Les constatations sont :

- i. Sur la forme : Il y a concordance ente les courbes de rigidité $K(\gamma)$ (fig. 4-19). Le couplage des billes à des postions différentes illustrées par les modes d'engagement (fig.4-10), doit aboutir à des minimums aux extrémités et un maximum au milieu. La forme parabolique de la courbe de rigidité répond à cette logique. La forme de la réponse dynamique du système de roulement sans la présence des défauts illustre le caractère répétitif ou périodique correspondant à la ronde des billes sur ces modes d'engagements et à la multiplicité des ondulations selon le nombre de billes pour chaque cycle de rotation de la cage. La forme de la réponse, pour une période égaie à $T_n = T_c/n$, montre le passage des trois modes d'engagement illustrés par la figure 4-10. L'effet de l'amortissement au début est notable ;, la structure a besoin d'absorber le choc dû à l'application de la force de la masse de l'arbre puis de se stabiliser. Ces exigences ont été toutes satisfaites par les résultats , successivement illustrés par les figure 4-20 et 4-21. Les réponses dynamiques des différents défauts caractéristiques illustrent le caractère spécifique à chaque défaut à la fois sur la forme, périodicité et effet sur la réponse initiale sans défaut. Les résultats graphiques montrent parfaitement ces spécificités pour chaque anomalie.
- ii. La comparaison qualitative : La comparaison des résultats obtenus avec ceux de la littérature montre une très grande similitude. La comparaison des résultats obtenus avec ceux des références, comme il a été déjà vu sur les différentes interprétations et les graphes, montre cette correspondance.
- iii. La comparaison quantitative : Il est difficile de faire une comparaison quantitative des résultats obtenus avec ceux de la littérature pour des raisons objectives. Les résultats de la littérature ne donnent pas avec exactitude les données de base de leurs mesures et calculs ; à savoir les propriétés géométriques et mécaniques des roulements, les conditions de fonctionnement, les forces mises en jeu ou les conditions aux limites et initiales. Il est, alors, préférable de faire une telle étude avec un cas très bien explicité ou une comparaison avec un cas expérimental.
- iv. Les objectifs escomptés : Ce sont: la vérification des hypothèses, la simplicité de la modélisation et la validation des modèles d'engrenages et les défauts spécifiques. On estime qu'ils sont atteints.

4-3 Engrenage droit

Parmi les défauts qui existent dans les machines tournantes on trouve ceux liés aux engrenages. La modélisation de l'engrenage nécessite la connaissance de la loi de comportement qui repose principalement sur la rigidité. Dans cette étude, on se limite à la rigidité radiale, vu l'importance de cette dernière.

4.3.1 Procédé de calcul

La procédure adoptée dans cette étude comparative comprend les étapes suivantes :le modèle de référence, le calcul de rigidité, le calcul dynamique, la modélisation des défauts caractéristiques, l'exposé et la discussion des résultats et la conclusion.

Dans la première partie, on choisit un modèle de référence, puisé dans la littérature, avec lequel on compare les résultats. Ce modèle comporte les modèles de comportement de la rigidité et ses principaux défauts. Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la validation du modèle théorique développé avec le modèle de référence. La troisième partie consiste à valider ce modèle par un calcul dynamique par comparaison des réponses. Dans la quatrième partie, on propose des modélisations des défauts caractéristiques et la comparaison de leurs réponses typiques avec celles de la littérature.

4.3.2 Modèle de Référence

Sur la base des références [3,6,20,21,22,23,25,34,35,36,57], parmi lesquelles le modèle de comportement de HOUSER (1988)[21], et celui de WITHNER 1989[21], on adopte le dernier comme modèle de référence, puisqu'il émane d'une étude expérimentale et présente plusieurs aspects du comportement mécanique d'un engrenage.

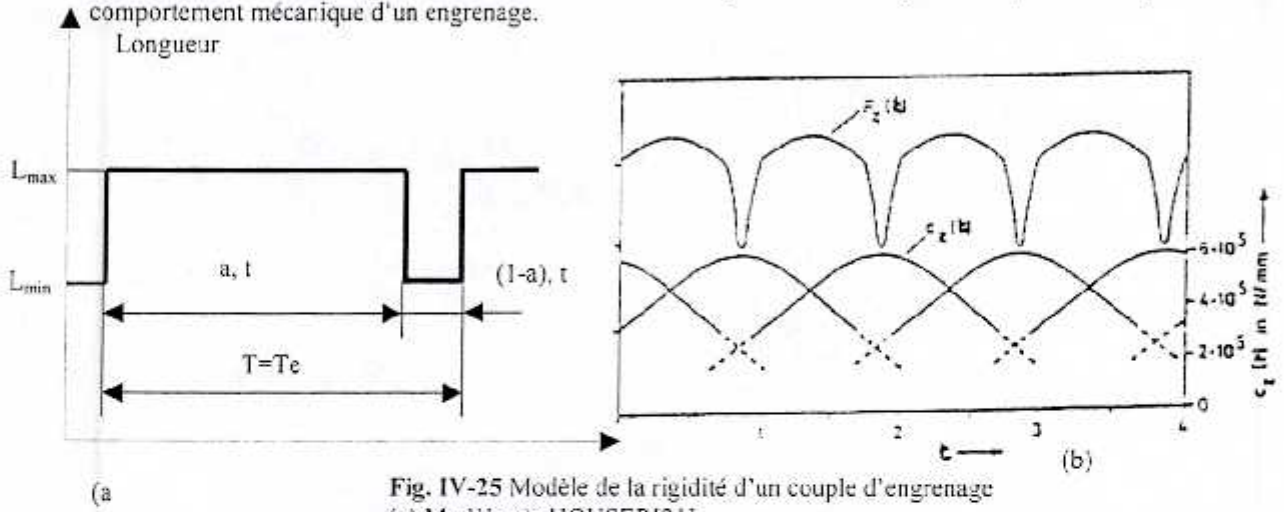


Fig. IV-25 Modèle de la rigidité d'un couple d'engrenage
 (a) Modèle de HOUSER[21]
 L : longueur de contact et T_e : période d'engrènement.
 (b) Modèle de WINTER[21]
 F : effort sur la denture et C_z : raideur au cours du temps.

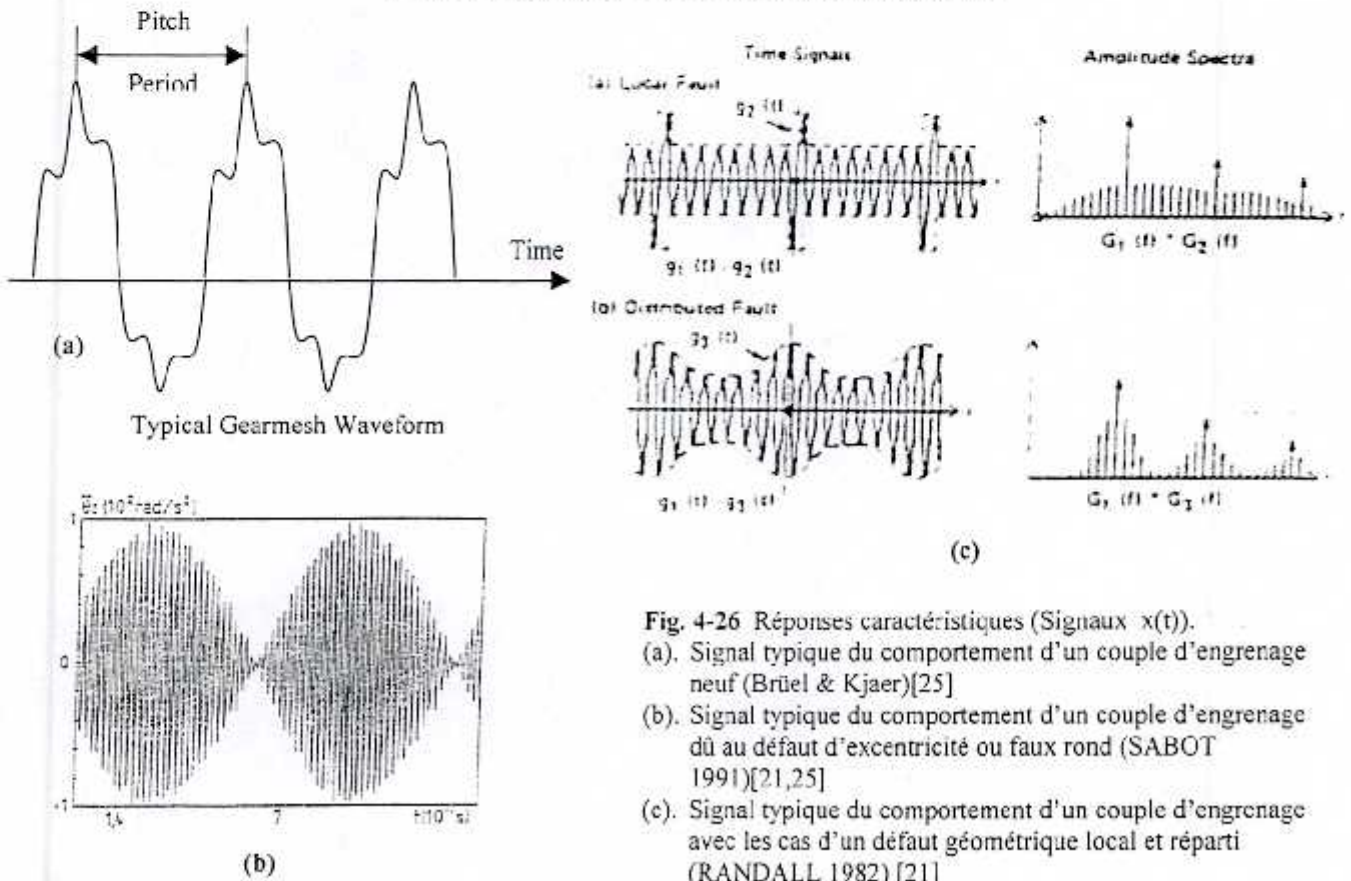


Fig. 4-26 Réponses caractéristiques (Signaux $x(t)$).
 (a). Signal typique du comportement d'un couple d'engrenage neuf (Brüel & Kjaer)[25]
 (b). Signal typique du comportement d'un couple d'engrenage dû au défaut d'excentricité ou faux rond (SABOT 1991)[21,25]
 (c). Signal typique du comportement d'un couple d'engrenage avec les cas d'un défaut géométrique local et réparti (RANDALL 1982) [21]

4.3.3 Modèle théorique

Pour obtenir la rigidité radiale d'un engrenage droit, on procède, en premier lieu au calcul des déformations locales et globales. En deuxième lieu, on utilise la relation liant les efforts appliqués aux déplacements résultant pour déterminer la rigidité.

3.1. Calcul des déplacements

4.3.1.1 Déformation locale :

Pour obtenir la déformation radiale, on considère le contact entre les deux dents des roues menante et menée comme une déformation locale d'une dent, dont le profil a la forme d'un cylindre de rayon R et d'une largeur (b). La loi de HERTZ [11] de la mécanique de contact, donne pour un cylindre :

$$a = \sqrt{\frac{2F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{\pi b (1/d_1) + (1/d_2)}} \quad (4-3-1)$$

La hauteur de déformation h est : $h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$

La déformation locale totale sera : $h_{LT} = h_{top} + h_{inf}$

4.3.1.2 Déformation globale :

Sur la base de la loi de HOOK [27], on détermine la déformation globale en compression (δ) par :

$$\delta_r = \frac{Fr}{bE} \left\{ \frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[\frac{1}{(1-\lambda)\beta_0 + \lambda} \right] + \frac{1}{2} [ArcCos\alpha - ArcCos\alpha_1] \right\} \quad (4-3-2)$$

Avec : $\beta_0 = \frac{\rho_0}{H}$, $\alpha = \frac{Ra}{Rp}$, $\lambda = \frac{LT}{LP}$ & $\alpha_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{Rp}$

La déformation globale totale est : $\delta_r = hr + \delta$

Lors du calcul, et vu la relation directe et proportionnelle entre le rayon ou longueur de contact (égale à la hauteur de la dent) et l'angle d'engrènement (égale à $2\pi/n$; n le nombre de dents) et le temps (égal à Te/n ; Te la période d'un tour). Ce dernier a été introduit dans les formules de l'étude théorique par facteur équivalent (angle γ) appelé position de contact dans le temps exprimé en [%]. On aura :

$$K(t) \equiv K(r_0) \equiv K(\gamma) \text{ avec } \gamma = [0\%, 100\%] \quad (4-3-3)$$

4.3.4 Modèle dynamique

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul dynamique du modèle théorique de l'engrenage et le calcul de la réponse de cette structure mécanique sous les conditions normales de fonctionnement.

4.3.4.1 Modèle d'engrenage

En premier lieu, on propose le modèle dynamique suivant :

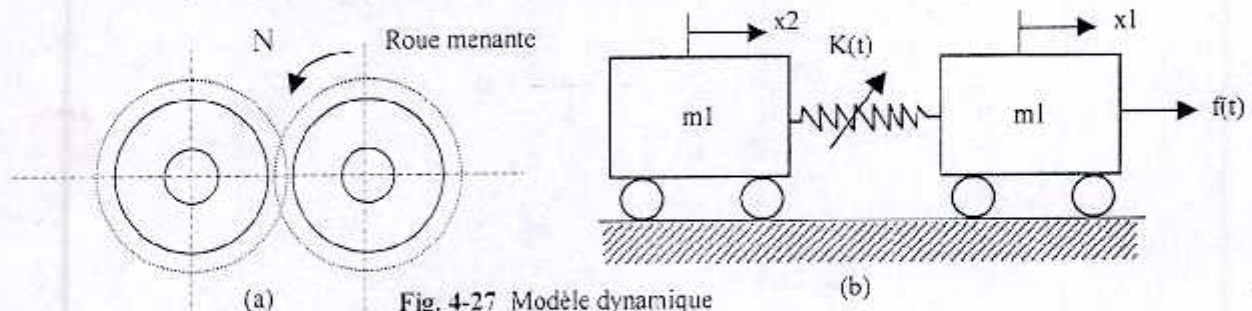


Fig. 4-27 Modèle dynamique
(c) modèle d'engrenage
(d) modèle de calcul dynamique

Pour entreprendre cette étude, un choix de modèle s'impose. Afin de simplifier les calculs, on adopte un modèle d'engrenage simple, composé de deux roues identiques avec dix ($n=10$) dents chacune. La roue menante (à droite) tourne avec une vitesse de rotation N égale à 60 tours par minute. Le couple moteur fournit une force radiale maximale égale 1000 Newton. La masse équivalente $M = 1$ Kg.

On suppose que les deux roues sont isolées des arbres, afin de se limiter aux vibrations internes du couple d'engrenages.

4.3.4.2 Calcul dynamique

Le modèle du couple d'engrenages est composé par les masses des roues liées par une rigidité équivalente au couplage de la denture. La résolution du système aboutit à une équation différentielle :

$$M \ddot{X} + K(t)X = f(t) \quad (4-3-4)$$

Avec : X : déplacement relatif ($x_1 - x_2$) et $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

La rigidité $K(t)$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$K(t) = K_{max} g(t) + K_{min} \quad (4-3-5)$$

Avec : $g(t)$: fonction non-linéaire de la variation de K en fonction du temps.

Connaissant la relation (4-3-2), on peut tirer directement $K(\gamma)$ ou $K(t)$ de la courbe $K(r_a)$.

Remarque: Il faut noter, que sur la base de ces formules un programme informatique de calcul a été élaboré, utilisant la méthode de résolution des équations différentielles non linéaires pas à pas (voir Annexe B).

4.3.5 Modélisation des défauts

On se propose d'introduire les modèles des défauts mécaniques caractéristiques les plus importants, cités dans l'étude théorique sur les engrenages, dans le modèle théorique de calcul de la rigidité. Par la suite, il est possible de voir leurs effets sur la réponse du système et comparer ces résultats à ceux de la littérature.

Les principaux défauts étudiés sont : le choc d'engrènement, l'absence d'une dent, le faux rond, l'irrégularité du pas entre les dents, le balourd, la présence d'une fissure et l'usure de la denture d'engrenage.

On assemble ces différentes anomalies en quatre familles importantes. Les anomalies de fonctionnement, les anomalies de sources externes, les anomalies géométriques et les défauts de montage.

4.3.5.1 Anomalies de fonctionnement

Le choc d'engrènement est, peut être, le problème le plus fréquemment rencontré, c'est la nature même du comportement dynamique des engrenages. En effet, la nature de la rigidité variable et la nature des forces appliquées font que le choc d'engrènement soit l'une des sources de vibrations.

La modélisation de ce type de comportement est prise du modèle de comportement et de force.

4.3.5.2 Anomalies de sources externes

Le balourd est un phénomène remarquable, lors de l'étude du comportement dynamique des machines tournantes. On s'intéresse à voir son effet sur les vibrations initialement émises par l'engrenage.

On modélise ce phénomène par une force radiale dynamique de forme sinusoïdale avec une amplitude égale à 1000 N et une fréquence égale à la fréquence de rotation.

4.3.5.3 Anomalies géométriques

Les anomalies géométriques peuvent être groupées en plusieurs types de défauts. On s'intéresse à l'absence d'une dent, au défaut de forme de la denture, à l'irrégularité du pas et à la présence d'une fissure.

4.3.5.3.1 Absence d'une dent

Pour simuler l'absence d'une dent, on utilise la méthode suivante. N'ayant pas avec précision le couple moteur, et vu que cette étude est un travail d'illustration, on suppose que :

$$C_r = \alpha C_m \quad \text{avec } \alpha < 1$$

Par ailleurs, il faut considérer l'absence de la dent en rigidité nulle ; c.-à-d. $K_i(\gamma) = 0$. Par conséquent, la dent ($i+1$) aura une force d'entérinement plus élevée. Le résultat obtenu donne pour la dent $n^{\circ} = i = 5$:

$$K_i(\gamma) = \kappa K_i(\gamma) + \Delta K_{i-1}(\tau) + \Delta K_{i+1}(\tau) \quad (4-3-6)$$

et

$$F_{i+1} = (1 + \alpha) F_i$$

Avec : τ : position de contact lors des interférences [%],

Δ : erreur d'interférence (estimée à 25 %),

$\kappa = 0$ pour la dent absente et $\kappa = 1$ pour les autres,

α : taux d'augmentation de la force

4.3.5.3.2 Défaut de forme (faux rond ou excentricité)

Pour simuler ce défaut, on considère que l'excentricité varie d'une manière sinusoïdale avec la période de rotation autour d'une valeur moyenne Δ . (Valeur relative au déplacement par rapport à la longueur totale de contact). Cette variation cause le déplacement d'une roue par rapport à l'autre et par conséquent les positions de début et de fin de contact se trouvent modifiées. D'où une variation de la rigidité $K_{(i)}$, par une translation de cette dernière de Δ . Pour chaque dent (i) de l'une des roues du couple, on a :

$$\begin{aligned} K^{(i)}(\gamma) &= K^{(i)}(\gamma') \quad \text{pour } \gamma' = [\Delta(i) \cdot 100\%] \\ \text{Avec : } \Delta(t) &= \Delta \cdot [1 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_e \cdot t)] \quad t = 0 \dots T_n \quad (T_n = T_e/n) \\ K^{(i)}(\gamma) &= 0 \quad \text{pour } \gamma' = [0 \dots \Delta(t)] \end{aligned} \quad (4-3-7)$$

où : Δ : erreur relative de l'excentricité en [%] (<100%)

f_e : fréquence de rotation.

γ : position de contact [0..100%]

Par ailleurs, le taux d'interférence τ se trouve aussi modifié : $\tau' = \tau + \Delta$

Remarques :

- On ne considère, dans le calcul, que les points de contact communs, Les autres sont nuls.
- Cette modélisation peut aussi servir pour le défaut de variation de l'entraxe.

4.3.5.3.3 Usure d'engrenage

En cours d'utilisation, les dents d'engrenages subissent une altération de leur profil du flan actif. Cette dégradation est due principalement à l'usure par frottement, érosion ou attaque chimique.

Cette détérioration provoque, par conséquent, la modification des propriétés géométriques et physiques initiales, ce qui provoque le changement du comportement de l'engrenage.

Pour un cas simple, l'usure est uniforme pour l'ensemble des dents de l'engrenage et que l'usure des profils est similaire. Pour une petite variation, on considère que cette différence du profil entraîne une variation proportionnelle de la rigidité.

Comme pour le cas du défaut du faux rond, mais avec une variation constante du taux d'interférence pour les deux dents avoisinantes et $A < 0$. On aura :

$$K_i(\gamma) = (1-A) \cdot K_i(\gamma) + \Delta' K_{i-1}(\tau) + \Delta' K_{i+1}(\tau) \quad (4-3-8)$$

Où :

$$\Delta' = \Delta - \alpha \quad \text{et } \alpha = A/2$$

Avec :

A : taux de variation moyen du profil par rapport au profil initial ($A > 0$ ou $A < 0$),

τ : position d'interférence,

Δ : erreur d'interférence (estimée à 25 %),

α : taux de variation de l'erreur d'interférence équivalent à A.

Remarque : Si $\alpha > 25\%$, on a une zone ($\alpha - 25$) où la rigidité est nulle ; car, il n'y a pas de contact.

4.3.5.3.4 Irrégularité du pas

La modélisation du défaut de l'irrégularité du pas d'engrènement se fera par la modélisation de la rigidité. Pour un cas simple de variation arithmétique on a :

$$K_i(\gamma) = K_i(\gamma) + \Delta i \cdot K_{i-1}(\tau) + \Delta_{i+1} \cdot K_{i+1}(\tau) \quad (4-3-9)$$

Où :

$$\Delta i = \Delta + i \cdot \alpha \quad \text{Avec : } \alpha : \text{taux de variation du pas } \alpha \equiv -\Delta p$$

4.3.5.3.5 Présence d'une fissure sur une dent (défaut local)

On modélise la présence d'une fissure sur une dent par une augmentation de la souplesse locale à l'endroit du défaut et par conséquent, la diminution de la raideur globale de cette dernière [38,65].

Si K_0 est la rigidité initiale, on suppose un facteur de réduction $\alpha < 1$. On aura :

$$K_i(\gamma) = \alpha \cdot K_0(\gamma) \quad (4-3-10)$$

Ce défaut devient réparti s'il est couplé à d'autres défauts externes tel qu'un balourd.

4.3.5.3.6 Défauts de montages

Les défauts de montages sont nombreux, on ne s'intéressera qu'au cas de variation de l'entraxe. Or, ce défaut est similaire au défaut du faux rond.

4.3.6 Résultats

4.3.6.1 Calcul de rigidité

4.3.6.1.1 Déplacement

Le graphe (fig. 4-28) donne l'allure de la variation du déplacement total résultant (δ_r) en fonction de la force radiale appliquée.

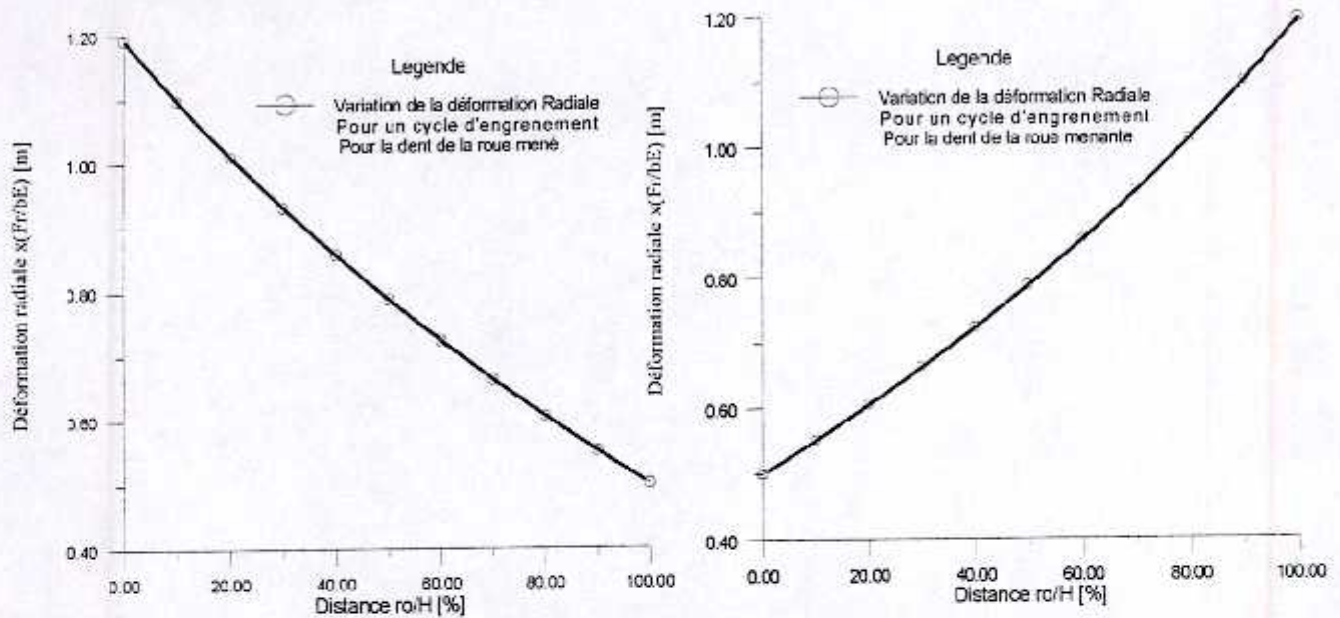


Fig. 4-28 Déformation globale de deux dents d'engrenage
Avec r_0 : la distance de l'extrémité de la dent à sa hauteur.

L'observation de ce graphe montre que le déplacement est maximal pour r_0 tendant vers zéro (0) et est minimale pour r_0 tendant vers H, ce qui correspond à la réalité. D'après la théorie des poutres le déplacement est maximal à l'extrémité et minimale à l'encastrement et inversement.

4.3.6.1.2 Rigidité

Si on pose que $F \approx Keq h$, pour la déformation locale, et sachant que la rigidité est fonction du rapport de la force fournie au déplacement résultant, on a:

$$K_{rr} = F_r / \delta r + Fr/hr = F_r / \delta r + F/h = F_r / \delta r + keq^{(r)}$$

$$k_{rr} = bE \left\{ \frac{H}{LP} \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[\frac{1}{(1-\lambda)\beta_0 + \lambda} \right] + \frac{1}{2} [ArcCos \alpha - ArcCos \alpha_1] \right\}^{-1} + k_{eq}^{(r)} \quad (4.3.11)$$

L'allure de la variation de la rigidité du couplage des deux dents des roues menante et mené donne :

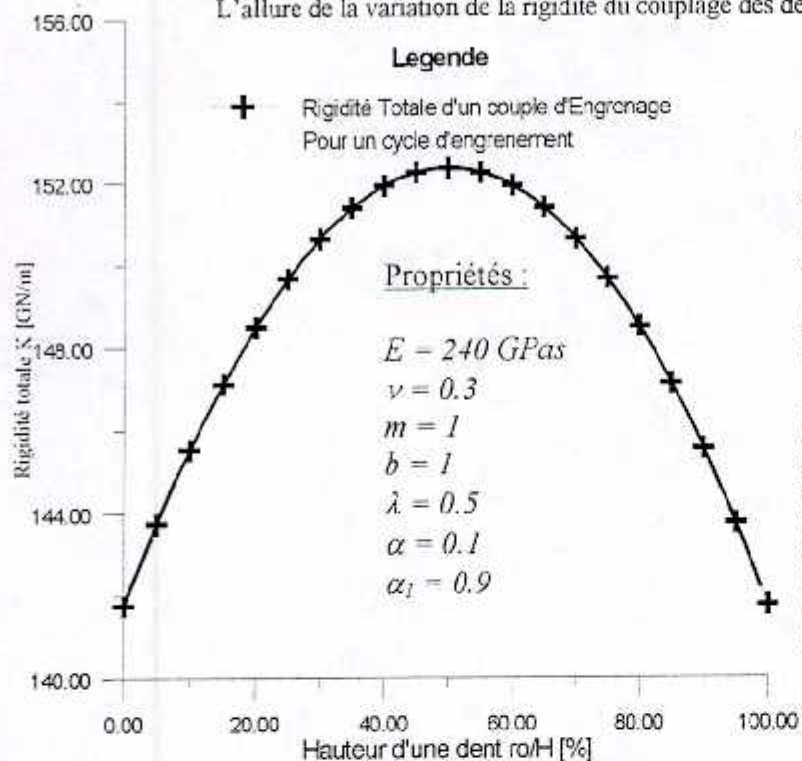


Fig. 4-29 Variation de la rigidité d'un couple d'engrenages donné.

L'allure (fig. 4-29) de la variation de la rigidité du couple d'engrenages montre une forme parabolique ayant un maximum au milieu quand les deux dents se trouvent en contact, au milieu de leur hauteur et des minimums aux extrémités.

L'observation de ce graphe montre une fluctuation entre une valeur minimale et maximale c.-à-d. K_{min} et K_{max} .

Etant donné, que pendant le fonctionnement, il y a succession de plusieurs cycles d'engrènement. Et puisqu'il y a interférence entre ces cycles aux points W et V (voir chapitre III consacré à l'étude théorique) ces points peuvent être représentés aux endroits de 25% et 75%. En ces points, on aura donc une intersection entre les courbes différentes. L'allure de la figure 4-20 le confirme.

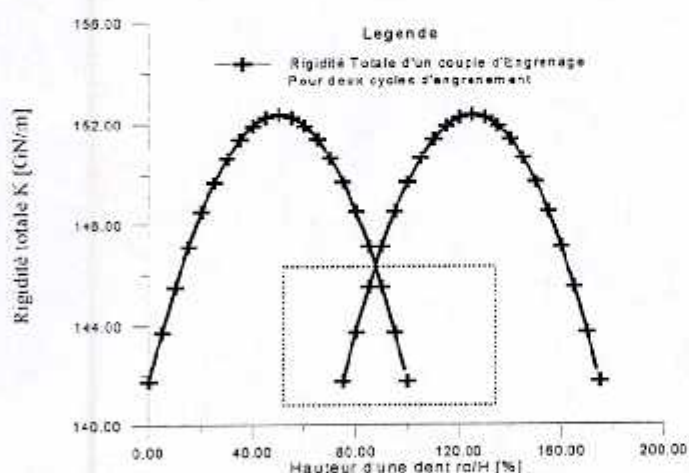


Fig. 4-30 Variation de la rigidité d'un couple d'engrenage

Le graphe (fig. 4-30) représente la variation de la raideur pour deux cycles d'engrènement. Chaque cycle correspond à une période de temps égale au rapport de la période d'un tour de la roue divisé par le nombre de dents.

La rigidité est fonction du temps ; étant donné, qu'il existe un rapport direct entre le temps et la longueur de contact.

On constate qu'il existe une zone, marquée par un rectangle en trait interrompue, délimitant une région d'intersection. c'est la zone d'interférence.

Cette fluctuation de la raideur est la cause principale des vibrations entretenues dues au fonctionnement des engrenages.

4.3.6.2 Calcul dynamique

Sur la base de la courbe de rigidité $K(\gamma)$ (fig4-29) exprimée sur une période d'engrènement $T_n = T_e/n$, on calcule la réponse $x(t)$ libre. T_e est la période d'un tour et n le nombre de dents. La résolution de l'équation différentielle (4-3-4) se fait par la méthode pas à pas avec un pas $\Delta t = T_n/100$ et les conditions initiales suivantes :

Pour $X(0) = 1 \mu m$, $V(0) = 0 \text{ m/s}$ et $A(0) = 0 \text{ m/s}^2$

On a une réponse qui ne correspond pas à la réponse typique de l'engrènement entre les dents d'engrenage. On se propose d'introduire le cas forcé.

Sur la base du modèle de rigidité $K(t)$ de la fig.4-29 et le modèle de force $f(t)$ (fig 4-32) (chapitre III), on calcule la réponse la réponse $X(t)$ avec les conditions initiales suivantes :

Pour $X(0) = 0 \mu m$, $V(0) = 0 \text{ m/s}$ et $A(0) = 0 \text{ m/s}^2$.

La réponse obtenue ne correspond pas non plus à la réponse typique de l'engrènement entre dents d'engrenage. L'introduction de l'effet d'interférence (fig. 4-30) semble être le seul moyen pour approcher le cas réel. Son introduction donne une nouvelle rigidité dynamique (fig. 4-31) exprimée par:

$$K_i(\gamma) = K_i(\gamma) + \Delta K_{i-1}(\tau) + \Delta K_{i+1}(\tau)$$

Avec :

τ : position d'interférence [%],

Δ : erreur d'interférence (estimée à 25 %),

α : taux de variation de l'erreur d'interférence [%].

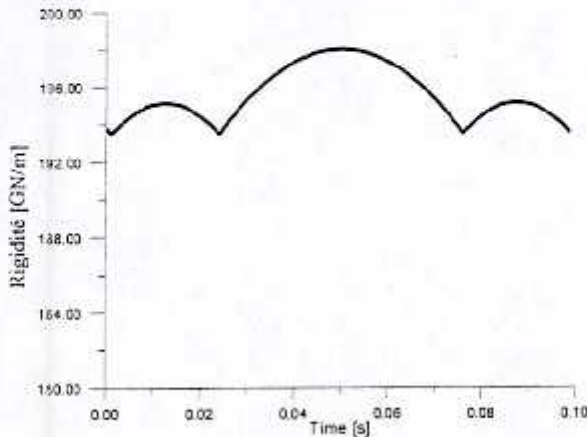


Fig. 4-31 Rigidité avec Interférence

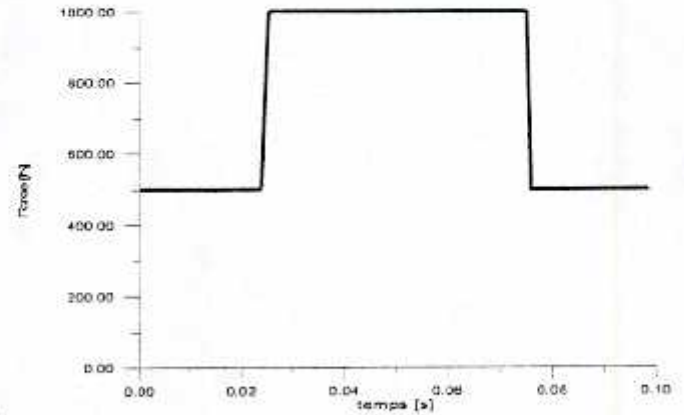


Fig. IV-32 Force avec interférence

Après cette modification, la réponse correspond à l'allure présentée dans [38]. La réponse temporelle $x(t)$ (fig. 4-33) a une forme très proche de celle présentée dans la fig4-26-(a) et la réponse spectrale $V(f)$ (fig4-34) est caractérisée par trois pics 1,2 et 3, le premier représentant la fréquence des engrènements et les autres les harmoniques.

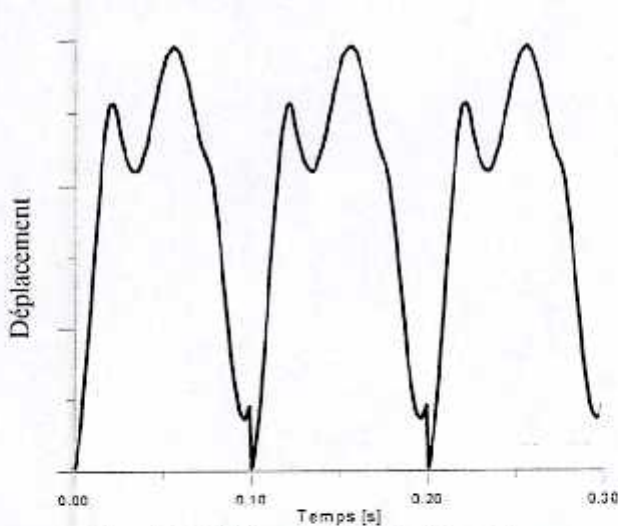


Fig. 4-33 Déplacement en fonction du temps

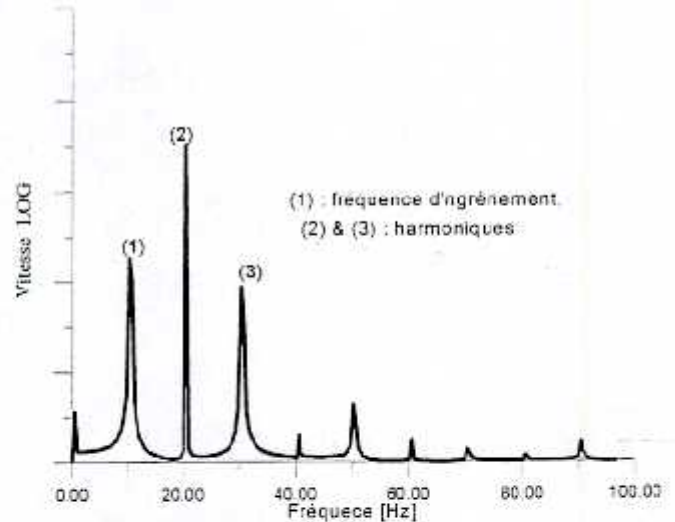


Fig. 4-34 Spectre de déplacement (log)

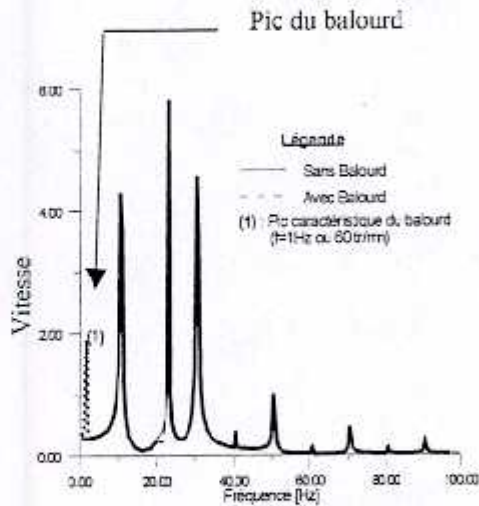
4.3.6.3 Identification des anomalies

Dans cette partie, on s'intéresse à la confrontation des résultats issus de la simulation d'un défaut comme il a été proposé dans l'étude théorique et les résultats trouvés dans la littérature.

4.3.6.3.1 Anomalies de fonctionnement

Les résultats trouvés montrent que ce phénomène est caractérisé par un pic identifié à la fréquence de d'engrènement $F_n = n \cdot f_e = 10$ Hz et ses harmoniques. Cette simulation du choc mécanique, lors des engrènements, a été illustrée les figures 4-33 et 4-34.

4.3.6.3.2 Anomalies de sources externes



On remarque que le balourd se manifeste par un pic caractéristique (représenté en pointillé) correspondant à la fréquence de rotation, non présent initialement, mais il a une faible influence sur les pics caractéristiques du fonctionnement de l'engrenage.

Fig. 4-35 Spectre de vitesse. Effet du balourd

4.3.6.3.3 Anomalies géométriques

Absence d'une dent

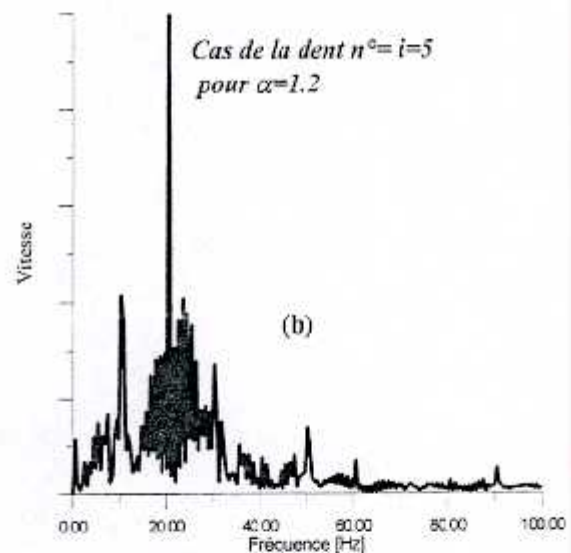
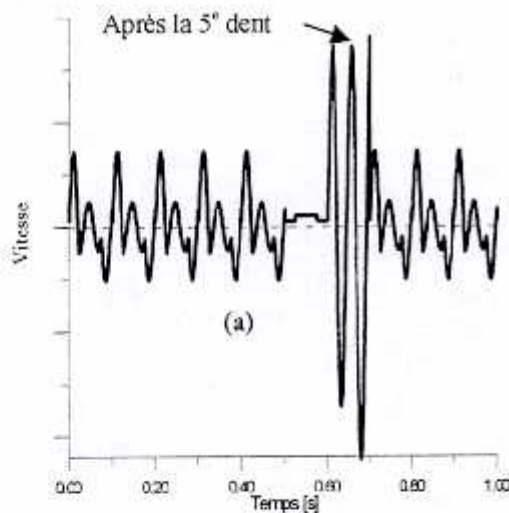
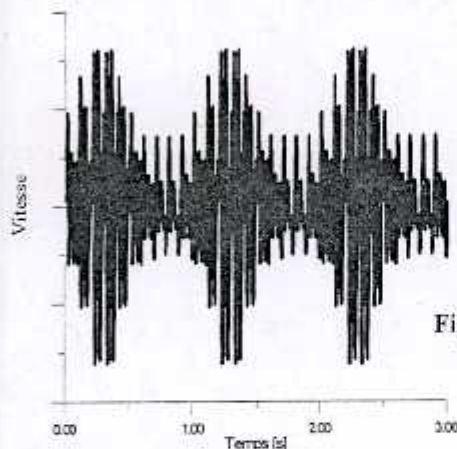


Fig. 4-36 Effet de l'absence d'une dent (la 5^{ème}/10)

- (a) réponse temporelle,
- (b) réponse spectrale.

L'absence d'une dent provoque une discontinuité dans l'équilibre des forces : puisqu'il n'y a pas de contact. Elle est suivie d'une impulsion périodique, lors de chaque passage et à chaque tour. La figure 4.36 illustre parfaitement la rupture pour la 5^{ème} dent, le pic correspondant à la fréquence de rotation est un spectre, de large gamme et de faible amplitude, additionné au spectre d'origine.

Défaut de forme d'une dent de faux rond

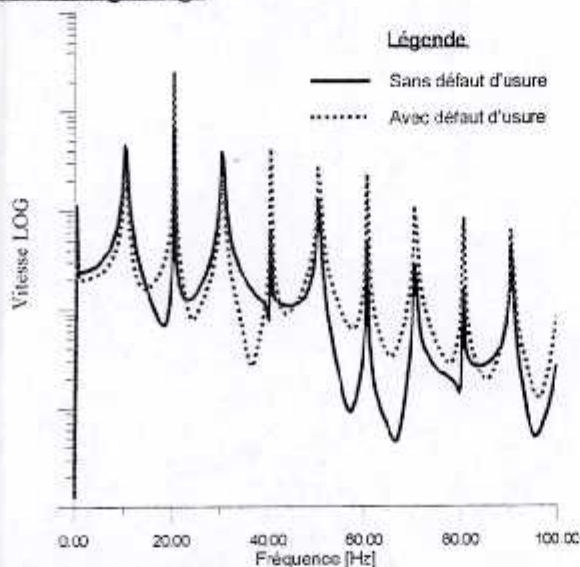


Pour : $\Delta=10\%$,

La figure 4-37 montre une modulation de la réponse en fonction de la période de rotation. Cette forme correspond à celle de la figure 4-26-(b) de la littérature.

Fig. 4-37 Faux rond ou excentricité

Usure d'engrenage

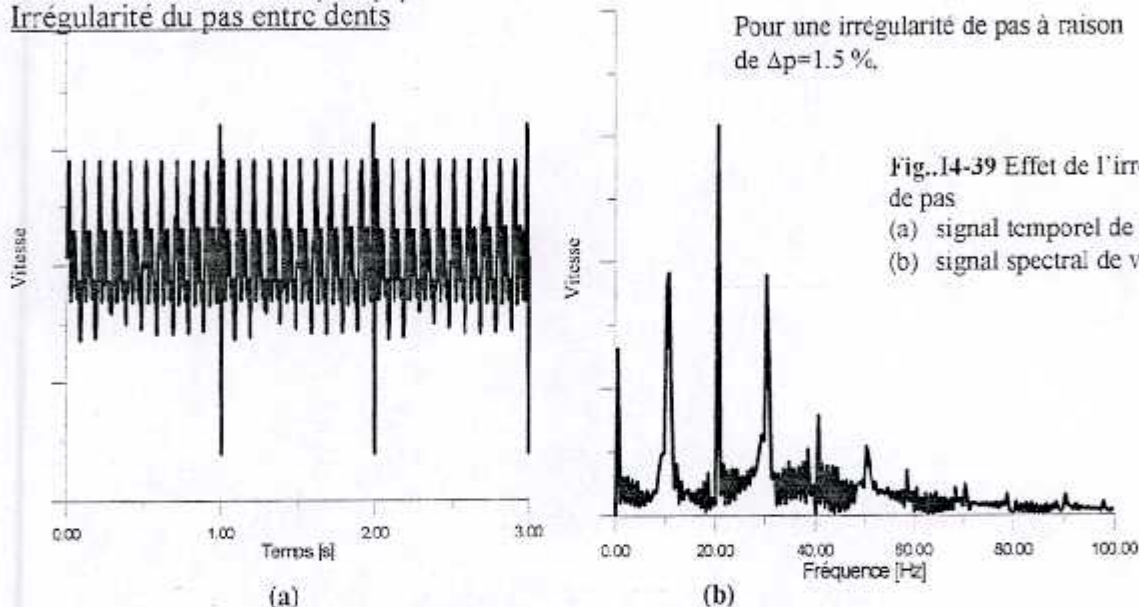


$A = -20\%$, $\alpha = -10\%$, pour l'usure d'une des deux roues.

La figure 4-38 montre une augmentation des amplitudes des pics des harmoniques paires.

Fig. 4-38 Usure des dents d'une roue du couple

Irrégularité du pas entre dents



Pour une irrégularité de pas à raison de $\Delta p=1.5\%$.

Fig.14-39 Effet de l'irrégularité de pas
(a) signal temporel de vitesse
(b) signal spectral de vitesse.

Les figures 4-39 (a) et (b) montrent la périodicité des impulsions dues au passage du dernier pas Δp_{max} au premier $\Delta p=0$ par des pics périodiques et un pic à la fréquence de rotation. Elles montrent aussi un spectre de large gamme et de faibles amplitudes correspondant aux impulsions. Une modulation faible de période égale à la période de rotation correspondant au phénomène de variation arithmétique de l'irrégularité du pas.

Présence d'une fissure et l'usure d'engrenage

Pour une fissure au niveau de la 5^{ème} dent
réduisant la rigidité de cette dernière à 80%

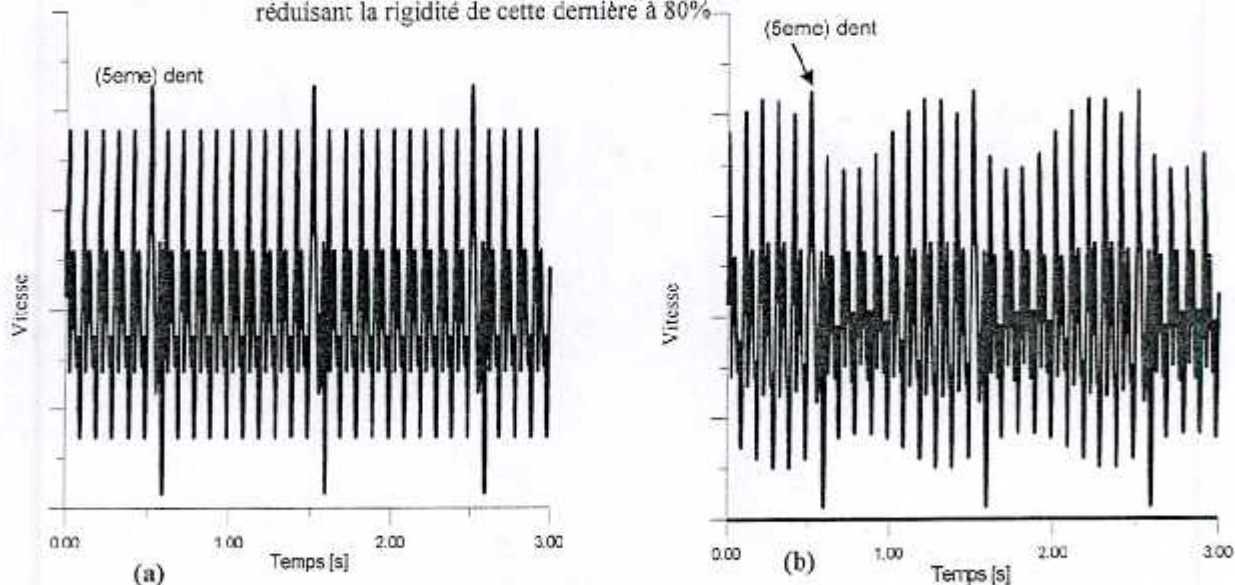


Fig. 4-40 Effet de la fissuration d'une dent
(a) : fissure de la 5^{ème} dent seule (défaut local)
(b) : fissure de la 5^{ème} dent avec couplage d'un balourd de 1000 N (défaut réparti)

Les figures 4-40 montrent que les défauts locaux et répartis correspondent aux cas trouvés dans la littérature fig. 4-26 (c). En effet, la première est caractérisée par des impulsions périodiques séparées par $(n-1)$ signaux. La constance de ces signaux est une caractéristique à l'engrènement de chaque dent. La deuxième montre une modulation du signal avec une périodicité égale à la période de rotation due à l'effet du balourd.

4.7 Discussion des Résultats

Les constatations que nous pouvons directement tirer des résultats obtenus sont :

i. Sur la forme

Il y a concordance ente les courhes de rigidité $K(\gamma)$ (fig. 4-29) et la logique qu'on peu tirer de l'appréciation directe faite sur un tel comportement ; En effet, le couplage des deux roues d'engrenage sur des positions opposées et mobiles dans le temps, comme c'est le cas, doit aboutir à des minimas aux extrémités et un maximum au milieu. La forme parabolique de la courbe de rigidité réponá à cette logique.

La forme de la réponse dynamique du système d'engrenage sans présence des défauts doit illustrer le caractère répétitif correspondant à chaque engrènement et la multiplicité des réponses doit correspondre au nombre de dents engrénées pour chaque cycle de rotation. La forme de la réponse doit montrer le passage des trois phases caractéristiques de l'engrènement ; A savoir la fin d'engrènement avec la dent antécédente, l'engrènement avec celle en cour et le début d'engrènement avec la dent venante :figure 4-26-(a), chose obtenue avec la forme en trois ondulations ou par le pic fondamental et ces deux harmoniques (fig. 4-33 et 4-34).

Les réponses dynamiques des différents défauts caractéristiques doivent illustrer le caractère spécifique de chaque défaut à la fois sur la forme, périodicité et effet sur la réponse originale sans défaut. Les résultats graphiques obtenus montrent parfaitement ces spécificités pour chaque anomalie.

ii. La comparaison qualitative

La comparaison des différents résultats obtenus avec ceux de la littérature montre une très grande similitude entre les deux. En effet, la comparaison de chaque résultat obtenu avec ceux des références, montre cette correspondance.

Certes, quelques divergences existent, mais elles resteni minimales. Ces divergences peuvent être expliquées par l'esprit illustratif adopté dans cette étude ; Donc, certaines considérations ont été prises superficiellement et non d'une manière très approfondie.

iii. La comparaison quantitative

Il est difficile de faire une comparaison quantitative des résultats obtenus et ceux de la littérature, et ce, pour des raisons très objectives. En effet, les résultats tirés de la littérature ne donnent pas avec exactitude les données de base de leurs mesures et calculs ; à savoir, les propriétés géométriques et mécaniques des engrenages, les conditions de fonctionnement, les forces mises en jeu ou les conditions initiales et aux limites.

Il est, alors, préférable de faire une telle étude avec un cas très bien explicité ou une comparaison avec un cas expérimental.

IV- Les objectifs escomptés

Les objectives visés par cette étude, à savoir : la vérification des hypothèses, la simplicité de la modélisation et la validation des modèles d'engrenage et ses défauts spécifiques sont atteints.

4-4 Conclusion de l'étude comparative

Les résultats obtenus sur le comportement statique et dynamique en comparaison avec ceux de la littérature montrent une grande similitude et par conséquent ils peuvent être considérés comme satisfaisants.

Cette étude a permis de confirmer les hypothèses émises. Elle a montré que les modèles choisis autorisent plusieurs manipulations dont l'introduction de plusieurs types de modèles de défauts caractéristiques. La majorité des modèles (des organes et des anomalies) ont donné des résultats satisfaisants.

L'étude a permis la validation des modèles théoriques développés. Elle peut, dans l'avenir, servir comme une plate forme pour des éventuelles améliorations.

V. Conclusion Générale

La problématique : La modélisation classique des machines tournantes ne peut entièrement satisfaire les besoins de l'industrie en matière de développement d'outils de diagnostic et d'assistance à la maintenance ni pour autant satisfaire aux exigences des constructeurs. En effet, cette modélisation donne deux aspects :

- √ un aspect mathématique complexe où la machine est considérée comme une boîte noire
- √ ou un modèle de connaissance, où la machine est modélisée sans tenir compte de toutes les lois de comportements mécaniques auxquelles elle obéit.

Or, ces deux aspects possèdent beaucoup d'inconvénients. Le premier est une abstraction aux connaissances acquises sur le comportement mécanique des machines et donne une forme très complexe qui peut entraîner des erreurs. Le deuxième considère le comportement mécanique des machines comme idéal et essaye de répondre aux exigences des agents de la maintenance et des constructeurs par la greffe de l'expérimentation, mais elle n'a pas pu donner des solutions très fiables.

Il existe, ces dernières années, une nouvelle approche qui consiste à aborder le modèle réel du comportement des machines. Certes, elle aboutit à des formulations fastidieuses, heureusement, avec l'avènement informatique, il est possible de surpasser cet obstacle. Cette approche est à ces débuts.

Les objectifs : Les objectifs de cette étude sont de faire une percée dans ce domaine et aboutir à une formulation permettant de décrire au mieux le comportement réel des machines et étant souple pour l'introduction des paramètres ou facteurs correcteurs et incluant la modélisation des phénomènes physiques complémentaires souvent ignorés ; les défauts.

La procédure adoptée : La recherche bibliographique est relativement riche avec certaines limites ; Limites causées, principalement, par le manque de documentations spécialisées dans ce domaine. En effet, certains modèles d'organes de machines possèdent une formulation explicitant les principaux facteurs géométriques et physiques régissant le comportement mécanique et par conséquent permettant d'introduire les modèles de défauts caractéristiques, mais, d'autres donnent peu d'informations. C'est pourquoi, on s'efforce d'élaborer les modèles de quelques organes : roulement à billes, engrenage droit.

La procédure adoptée comprend les étapes suivantes : La première étape est un essai pour regrouper les modèles mathématiques et dans le cas où il n'y aurait pas, tenter de les élaborer. La deuxième étape est de rechercher les modèles des principaux défauts caractéristiques des organes de machine. La troisième étape est de trouver des méthodes pour introduire ces défauts, dans la modélisation de base (sans défauts).

Les résultats obtenus : L'étude théorique a abouti au choix de modèles répondants aux exigences souhaitées. En effet, le modèle adopté et modifié de la ligne d'arbre permet de mettre en évidence l'effet gyroscopique et d'introduire des phénomènes tels que la torsion et la traction. En outre, la considération de l'arbre comme un ensemble d'éléments (discrétisation) permet de mettre en valeur certains phénomènes tels que les différents types de balourds et l'effet de présence d'une fissure. Le choix du modèle des paliers lisses permet de mettre en évidence les défauts dus aux phénomènes géométriques et physiques qui leur sont liés.

L'élaboration du modèle du roulement à billes permet de considérer ces principaux défauts et l'élaboration du modèle de l'engrenage permet de tenir compte des défauts caractéristiques.

Une large partie d'organes et de défauts n'ont pas été traités, mais ces travaux peuvent être considérés comme une introduction dans ce domaine et un étape à compléter par de futurs travaux

La validation de ces modèles, pris un à un, par comparaison aux résultats théoriques et expérimentaux a donné une grande satisfaction.

Perspectives : Les résultats obtenus restent à compléter par la validation de certains modèles de défauts non effectués, l'enrichissement de l'étude bibliographique et par l'élaboration de nouveaux modèles mathématiques des autres organes et défauts non traités ou d'élaborer d'autres modèles plus performants que ceux élaborés. Par ailleurs, un travail nécessaire et important reste à faire, c'est d'assembler, dans une première étape, ces modèles pour former un modèle complet d'une machine tournante ; c.-à-d. aboutir à un simulateur de machine. Ce travail nécessite l'élaboration d'un algorithme permettant d'activer et de désactiver les défauts sur la base des relations d'interdépendance entre les organes et les défauts et sur la base de la théorie de la stabilité des organes et des phénomènes pratiques définis ou aléatoires qui provoquent la naissance d'un ou plusieurs défauts à la fois et le déroulement du processus jusqu'à la panne. La figure II-49 est un exemple d'illustration de ce mécanisme.

On estime qu'il est possible d'aboutir à un simulateur (système expert) pouvant être un outil intéressant à la maintenance et aux constructeurs.

Bibliographie

- [1]. VIBRO-METER, Introduction à l'analyse modale. théorie expérimentale des structures mécaniques, P/N 561-008 F, Edition n°3/Mars 1989.
- [2]. L. GABRIEL & Y. PIMLOR, Maintenance assistée par ordinateur, MASSON
- [3]. L. BOURGAIN, R. DART & J. BOURGAIN, Machines tournantes et circuits pulsés, Dunod, Edition Bordas 1988
- [4]. Michèle BASSEVILLE, Albert BENVENISTE & Qing hua ZHANG, Surveillance d'installations industrielles : Demande générale et conception de l'algorithmique, Rapport de recherche n°2889/05-1996, INRIA
- [5]. Michèle BASSEVILLE, Marie-Odite CORDIER, Surveillance et diagnostic des systèmes dynamiques : Approches complémentaires du traitement de signal et de l'intelligence artificielle, Rapport de recherche n°285/04-1996, INRIA
- [6]. VIBRO-METER, Les machines tournantes et leurs comportements vibratoires, Edition n°1/Aout 1986
- [7]. BRÜEL & KJAER, Système de surveillance,
- [8]. D. R. J. OWENS & A. J. FAWKES, Engineering Fracture Mechanic,
- [9]. Claude MARCOVICI & J.-Claude LIGEON, Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique, PSI techniques et documentations, Paris 1996.
- [10]. J. R. MANCUSO, Couplings and Joints, Design, selection and application, Mechanical Engineering Software. 1986
- [11]. Joseph E. SHIGLEY & Larry D. MITCHEL. Mechanical Engineering Design. 4th Edition. McGraw-Hill, 1983
- [12]. Cyril M. HARRIS & Charles E. CREDE, Shock and vibration Handbook, McGraw-Hill 1976
- [13]. André PREUMONT, Vibrations aléatoires et analyse spectrale, POLYTECHNIQUE LOUSANE 1990
- [14]. Lester E. ALBAN, Systematic analysis of gear failures, American Society of Metals 1985
- [15]. Alain BOULENGER, Vers zéro panne avec la maintenance conditionnelle. Guide de l'utilisateur,
- [16]. J. TRAMPE BROCH, Mechanical Vibration and Shock Measurements, Brüel & Kjaer Avril 1984
- [17]. P. LYONNET, Optimisation d'une politique de maintenance, TEC DOC Londre, 1992
- [18]. R.B. RANDALL, B. TECH, B.A., Frequency Analysis, 3rd édition 1st print Brüel & Kjaer 1987
- [19]. Alain CAPRA & Victor DAVIDOVICI, Calcul Dynamique des structures en zones sismique, EYROLLES, 1984
- [20]. Didier REMOND, Inventaire des sources et des causes d'excitation dans les transmissions par engrenages, INSA/CASL/Laboratoire de conception assisté de système mécanique, Lyon. Publication CETIM/ Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenage, Synthèse Bibliographique, 1993
- [21]. Philippe VELEXE, Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenage, INSA/LMC/Laboratoire de mécanique de contacts, URA, CNRS 856, Lyon, Publication CETIM/ Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenage, Synthèse Bibliographique, 1993
- [22]. Jean SABOT, Comportement Acoustique des transmissions par engrenages, Ecole centrale de Lyon/LDTS/Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes, URA, CNRS 855, Lyon, Publication CETIM/ Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenage, Synthèse Bibliographique, 1993
- [23]. FAURE L. & ALLARD M.J., Aspect des dentures d'engrenages après fonctionnement, Guide, Publication CETIM 1992 (2^e édition)
- [24]. G. BARATTO, J.J. GUERIN, J. MONGIS, C. TOUPNIES & A. VIEU, Analyse morphologique des défaillances d'organes de machine, CETIM 1992
- [25]. ANGELO M., Vibration monitoring of Machines, Technical Review N°1-1987, Brüel & Kjaer
- [26]. Smith J. DEREK, Gears and their vibrations. A basic approach for understanding gear noise, copyright 1983 by DEKKER Marcel Inc. USA
- [27]. S. TIMOSHENKO, Résistance des matériaux, tome I & II, Dunod
- [28]. VIBRO-METER, Equilibrage des machines tournantes. Progiciel «Vibro-meter Equilibrage» sur micro-ordinateur portable autonome
- [29]. Lee CHANG-WONG, Vibration Analysis of Rotor, LUXER ACADIMIC PUBLISHERS. 1993
- [30]. VIBRO-METER, Les machines et les systèmes experts, P/N 561-010 F, Edition n°3/Oct. 1989.(Edition révisée)
- [31]. P. LEBORGNE, Comportement et surveillance des machines tournantes en exploitation et lors de leur mise en service, Revue Française de Mécanique n°1986-04, Publié par S.F.M.
- [32]. J.-M. BLANCHET, P.-B. BOURCIER, Surveillance des turbines à vapeur de grande puissance, vue du constructeur et de l'exploitant, Revue Française de Mécanique n°1986-04, Publié par S.F.M.

- [33]. P. CHETAIL, Entretien et surveillance en service des réacteurs à Air France, Revue Française de Mécanique n°1986-04, Publié par S.F.M.
- [34]. H. MAXWEL, Integrated predictive maintenance program. Vibration and lube oil analysis. Part 1 History and vibration program, Proceeding of the 4th NRC/ASME symposium on valve and pump testing. Washington, DC, July 15-18 1996 (Réf. NUREG/CP 0152) pages 2A-27
- [35]. Don CASADĀ, Examination of pump failure data in the nuclear power industry, Proceeding of the 4th NRC/ASME symposium on valve and pump testing. Washington, DC, July 15-18 1996 (Réf. NUREG/CP 0152) pages 2A-11
- [36]. B. JOHNSON, Part 2 : Current Program integrated strategy and vibration technology, Proceeding of the 4th NRC/ASME symposium on valve and pump testing. Washington, DC, July 15-18 1996 (Réf. NUREG/CP 0152) pages 2A-35
- [37]. Mario PAZ, Structural dynamics. Theory and computation, VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY New-York, 1985 (Second Edition)
- [38]. ANDREW D. DIMAROGONAS & STEPHEN A. PAIPETIS, Analytical methods in rotor dynamics, Applied Science Publishers LTD 1983.
- [39]. M. MORET, Roulements et butés à billes et à rouleaux, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-I, Août-1995
- [40]. D. MILOVANOVIC, Roulement à aiguillés, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-I, Août-1995
- [41]. G. HENRIOT, Engrenages, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-II, Août-1995
- [42]. R. BIGRET, Bases pour l'étude dynamique des poutres et des rotors, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [43]. R. BIGRET, Equilibrage des rotors, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [44]. R. BIGRET, Réduction des forces et des amplitudes de vibrations des machines tournantes par balourds correcteurs, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [45]. Robert LE BORZEC, Réducteurs de vitesse à engrenages, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [46]. René HULIN, Boîtes de vitesses, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [47]. Roland FARGES, Poulies et courroies de transmission. Entraînement par adhérence, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-III, Août-1995
- [48]. B. GIRONNET & G. LOURADOUR, Vibrations et vitesses dangereuses de torsion, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [49]. R. BIGRET, Vitesse critique de flexion des rotors-poutres, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [50]. G. VALEMBOIS, Accouplements d'arbres, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [51]. G. VALEMBOIS, Accouplement élastique, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [52]. G. VALEMBOIS, Liaison rigide de deux arbres, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [53]. R. BOUDET & P. STEPHANE, Joints de cardan, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [54]. J. DORE, Joints homocinétiques, Techniques de l'ingénieur, Volume B5-IV, Août-1995
- [55]. R. BIGRET, Surveillance et protection des machines tournantes par les descripteurs globaux des états vibratoires, Normes. Proceeding PROVIB'93, Blida 1993
- [56]. MAGHRAOUI, Dynamique des machines tournantes - Modélisation des systèmes de rotors : cas vécus, Proceeding PROVIB'93, Université de Blida 1993
- [57]. M. BOUNAZEF, Pourquoi la surveillance des machines ?, Proceeding PROVIB'93, Blida 1993.
- [58]. M. BOUNAZEF, Unité de mesure pour la surveillance, Proceeding PROVIB'93, Blida 1993.
- [59]. M. DOUGDAG & Dj. SAAD, Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de la mécanique de la rupture, Thèse de DPGS, 1991
- [60]. LEITERER Richard, Méthodes d'intégration numériques appliquées à des problèmes dynamiques en éléments finis, Centre d'étude de Limeil, Rapport CEA-R-4611, 1974
- [61]. Polycopie de cours de technologie – Arbres de la 4^e A, Etude des arbres, INGM, 1988/1989
- [62]. A. GHOU, Cours de mécanique de la rupture pour DPGS, HCR/CDSE, Ain-Oussera 1990/1991
- [63]. A. OUALI, Cours Vibration pour PGRS, INES Mécanique/Université de Blida, Blida 1998
- [64]. N. TITOUCHE, M. DJAOUI, M. DOUGDAG ET A. OUALI, Mesure expérimentale de la rigidité d'un roulement à bille, Proceeding RNT'2001 Laghroite.
- [65]. M. DOUGDAG & A. OUALI, Calcul de la rigidité d'un arbre en présence d'une fissure transversale. Cas d'un arbre creux, Proceeding RNT'2001 Laghroite.
- [66]. CHEVALIER, Dessin technique

ANNEXE A

Calcul de la rigidité d'une poutre en présence d'une fissure transversale et circonférentielle

Résumé

Dans le cadre des travaux d'étude des principaux organes de machine tournante, on présente, ici, un travail traitant les effets dus à la présence d'une fissure transversale sur le comportement dynamique d'un arbre.

L'objectif visé par ces travaux est l'élaboration d'une modélisation mathématique du comportement dynamique des principaux organes de machine en tenant compte des effets dus aux défauts caractéristiques à chaque organe.

La présente étude est constituée par un développement analytique d'un modèle mathématique simulant les effets de la présence d'une fissure transversale sur le comportement mécanique d'un arbre et des résultats graphique de validation.

Partant de l'étude d'ANDREW et on se basant sur la mécanique de la rupture, la théorie d'élasticité et le théorème de CASTIGLIANO, on a élaboré un modèle mathématique capable de décrire l'effet de la présence d'une fissure transversale sur le comportement d'un arbre.

Le modèle, ainsi obtenu, est validé par comparaison des résultats obtenus à celles d'ANDREW, à partir d'une série de calculs analytiques de la souplesse en fonction de la variation de la profondeur de la fissure.

Les résultats obtenus sont satisfaisantes ; En effet, en plus de la ressemblance avec celles d'ANDREW et les critiques qu'on a pu émettre le modèle de base, on a étendu cette technique pour toucher d'autres types d'arbres tels que les arbres creux.

Grâce à ce modèle, il est possible de simuler le comportement dynamique d'une machine, d'approcher d'avantage le modèle réel et de permettre le suivi en maintenance prédictive des machines. Par ailleurs, ce modèle peut également être utilisé comme un outil de calcul et d'aide à la conception de machine.

Cette étude englobera : une présentation généralisée des calculs entrepris, des modifications apportées sur le calcul analytique et en fin des résultats de calcul sous formes graphiques.

Abstract :

In this paper, we studying consequences of a transverse fissure presence on the dynamic comportment of rotating machine axis. This stud is one part of a many works touching different machine organs.

The objective aimed by these works is the elaboration of a mathematical modelling of the dynamic comportment of the main organs constituting a machine. Modelling obeying to the criterion of suppleness so as to introduce characteristics defects effects.

The approach adopted in this study consists of an analytic development of a model simulating effects of the presence of a transverse fissure on the mechanical comportment of axis followed by validation.

With the rupture mechanical, the elasticity theory and CASTIGLIANO theorem, we have elaborate a mathematical model able to reproduce the effect of the presence of a transverse fissure on a rotating machine axis.

The model, thus obtained, is validated by comparison to the ANDREW's model. Since, that the main factor entering this mechanics modelling is the rigidity, we have pianned to make a series of analytical calculations of the flexibility evolution according to the depth of the fissure.

Results were remarkable. Indeed, in more our critics of ANDREW's model we have widened this technique to touch others kinds such that hollow axis.

With this model, it us is possible to simulate a machine, to approach plus the real model and to allow it followed in maintenance of machines. Furthermore, this model can equally be used as a calculation and assistance tool in machine designs.

This study will include : a generalised presentation of undertaken calculations, modifications brought on the analytic calculation and in end those results graphical forms.

Mots clefs : Modélisation, Défauts, Arbre, Fissure, Souplesse, Maintenance Prédictive.

A.1 Cas d'une poutre prismatique

L'étude d'une poutre soumise à des chargements de flexion, de cisaillement et de traction/compression en présence d'une fissure transversale de profondeur (a) donne des déplacements généralisés u_i le long de la direction P_i .

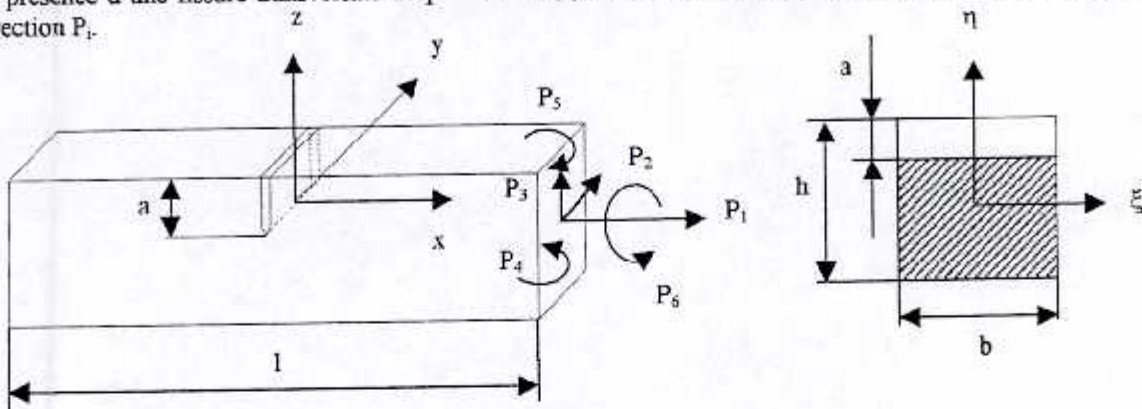


Fig. A-1 Poutre prismatique chargée avec fissure transversale

Relations fondamentales :

Le théorème de CASTIGLIANO [1] permet de calculer ces déplacements, tels que :

$$u_i = \partial U_T / \partial P_i$$

L'énergie de déformation à la forme :

$$U_T = \int_0^a \frac{\partial U_T}{\partial a} da = \int_0^a J da$$

Avec :

$$J = \partial U_T / \partial a \quad (\text{la densité d'énergie de déformation})$$

Le calcul de déplacement par Paris [22] devient :

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[\int_0^a J(a) da \right]$$

Le calcul des coefficients d'influence c_{ij} donne :

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a J(a) da$$

La fonction générale de la densité d'énergie de déformation $J(a)$ est :

$$J = \frac{1}{E'} \left[\left(\sum_{m=1}^5 K_{I,m} \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^5 K_{II,m} \right)^2 + \kappa \left(\sum_{l=1}^5 K_{III,m} \right)^2 \right]$$

Avec :

$E' = E$	(pour contrainte plane	$m=1,4,5$),
$E' = E/(1-\nu^2)$	(pour déformation plane	$m=1,4,5$),
$E' = G$	(pour le cisaillement	$m=2,3,6$)

Sachant qu'en cisaillement pur il existe une relation [3] entre G et E telle que :

$$G = E' / [2(1+\nu)]$$

et

$$\kappa = 1+\nu$$

ν : rapport de Poisson,
 E : module de Young.
 G : module de cisaillement.

$$c_{ij} = \frac{1}{E b} \int_0^a \left[\frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \sum_m \int_0^b \left(e_m \sum_n K_{mn} \right)^2 dy \right] da$$

Avec :

$e_m = \alpha$: pour $m=III$

$e_m = 1$: pour $m=I$ et $m=II$

K_{mn} : facteur d'intensité de contrainte pour les modes $m=I, II$ et III et sous les chargements P_n pour $n=1,2,\dots,5$ sauf pour K_{14} qui dépend aussi de y

Les facteurs d'intensité de contraintes sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} f_m(a/h)$$

Avec :

$[\sigma]$: matrice de contraintes,

K : facteur d'intensité de contraintes en mode ($I=I, II$ et III)

a : profondeur de la fissure,

$f(a/h)$: fonction facteur de forme dépendant du type de chargement et des modes de sollicitation.

La théorie d'élasticité donne les contraintes selon les directions des forces (voir fig. 1):

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{P_1}{bh}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \frac{P_2}{bh}$$

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{A} = \frac{P_3}{bh}$$

$$\sigma_4 = \frac{P_4}{I_4 / \xi} = \frac{12P_4}{b^3 h} \xi$$

$$\sigma_5 = \frac{P_5}{I_5 / \eta} = \frac{12P_5}{h^3 b} \eta$$

$$\sigma_6 = \frac{P_6}{\gamma h b^2} \approx \frac{P_6}{h b^2} \left(3 + 1.8 \frac{b}{h} \right) \text{ d'après [3]. pour } (b > h)$$

et

$$\eta = h/2$$

Avec :

$$\gamma = \frac{1}{3 + 1.8 \frac{b}{h}} :$$

γ : facteur correcteur dépendant du rapport b/h , où b est la longueur et h la largeur de la section carré.

Le facteur d'intensité de contrainte devient :

$$K_{mi} = \sigma_i \sqrt{\pi a} F_i(a/h)$$

$$K_{mi} = 0 \text{ pour } (m,i) = (I,2), (I,3), (I,6), (II,1), (II,2), (II,4), (II,5), (II,6), (III,1), (III,3), (III,4), (III,5).$$

Les différentes expressions sont alors :

$$\begin{aligned} K_{I1} &= \sigma_1 \sqrt{\pi a} F_1(a/h) \\ K_{I5} &= \sigma_5 \sqrt{\pi a} F_2(a/h) \\ K_{I4} &= \sigma_4 \sqrt{\pi a} F_1(a/h) \\ K_{II3} &= \sigma_3 \sqrt{\pi a} F_{II}(a/h) \\ K_{III2} &= \sigma_2 \sqrt{\pi a} F_{III}(a/h) \\ K_{III6} &= \sigma_6 \sqrt{\pi a} F_{III}(a/h)^{(*)} \end{aligned}$$

Où :

$$F_1(a/h) = \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2h}} \frac{0.752 + 2.020 \left(\frac{a}{h}\right) + 0.370 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2h}\right)^3}{\cos \frac{\pi a}{2h}}$$

$$F_2(a/h) = \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2h}} \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2h}\right)^4}{\cos \frac{\pi a}{2h}}$$

$$F_{II}(a/h) = \frac{1.30 - 0.65 \left(\frac{a}{h}\right) + 0.37 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 0.28 \left(\frac{a}{h}\right)^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{h}\right)}}$$

$$F_{III}(a/h) = \sqrt{\frac{\frac{\pi a}{h}}{\sin \frac{\pi a}{h}}}$$

Avec :

- i : type de sollicitation (i=1, .6).
- m : mode de rupture (m = I, II, III).

Energie de déformation sans la présence de la fissure :

Le calcul de l'énergie de déformation [3] sans la considération de la fissure est nécessaire pour le calcul de la rigidité de la structure dans le cas normal. Pour le cas de l'absence du couplage entre les divers phénomènes de chargement, on aura :

$$U_n^s = \sum U_i \quad (i=1, \dots, n) \text{ et } n=6.$$

$$U_1 = \frac{P_1^2 l}{2EA}; U_2 = \frac{P_2^2 l}{2GA}; U_3 = \frac{P_3^2 l}{2GA}$$

$$U_4 = \frac{P_4^2 l}{2EI_4}; U_5 = \frac{P_5^2 l}{2EI_5}; U_6 = \frac{P_6^2 l}{2GI_6}$$

Calcul des coefficients de souplesse :

Pour ce cas de figure les coefficients de souplesse pour le cas d'une poutre prismatique sont issus essentiellement de l'énergie de déformation, qui dépendant des facteurs d'intensité de contraintes ; la fissure de largeur (b) couvre toute la largeur de la poutre.

(*) cette expression est posée sur la base de la similitude entre cisaillement et torsion.

L'énergie de déformation liée aux facteurs d'intensités de contraintes devient sur la base des ces modifications :

$$J = \int_0^{+b} \left[\frac{1}{E'} [K_{I1} + K_{I4} + K_{I5}]^2 + \frac{1}{G} K_{II3}^2 + \frac{\kappa}{G} [K_{III2} + K_{III6}]^2 \right] d\xi$$

Le remplacement des K_{mm} par leurs expressions et l'intégration dans $[0 \dots b]$ donne la matrice de souplesse pour une poutre ayant une fissure à la forme :

$$[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ 0 & c_{62} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Vu la réciprocité, la matrice C est systématique [22].

Le calcul de la raideur locale en cet endroit de la fissure est alors :

$$[K] = [C]^{-1}$$

A.2 Cas d'une poutre cylindrique pleine

Malgré la similitude entre le cas d'une poutre prismatique et cylindrique, des différences importantes persiste ; en particulier : la forme et l'effet de la rigidité normale de la structure aux endroits non touchés par la présence de la fissure.

Projection pour un arbre cylindrique plein:

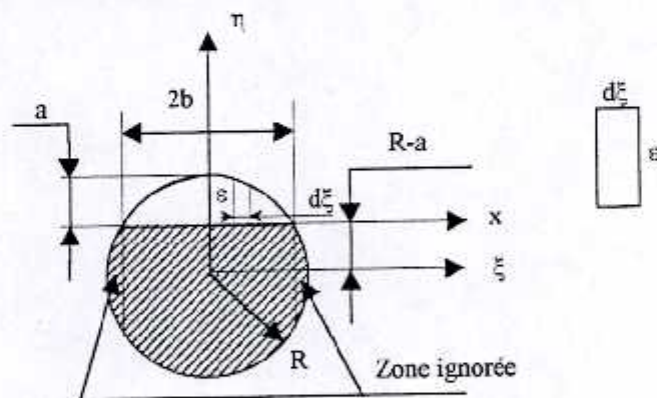


Fig. A-2 Schéma d'une fissure dans un arbre plein

Le passage de la forme prismatique à la forme cylindrique, nécessite un changement de variable, tel que :

$$\alpha = \alpha(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2} - (R - a)$$

$$h = h(\xi) = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$$

Avec :

(ξ, η) repère local

A.3 Cas d'une poutre cylindrique creuse

Dans cette étude on s'intéresse au cas d'une poutre cylindrique creuse.

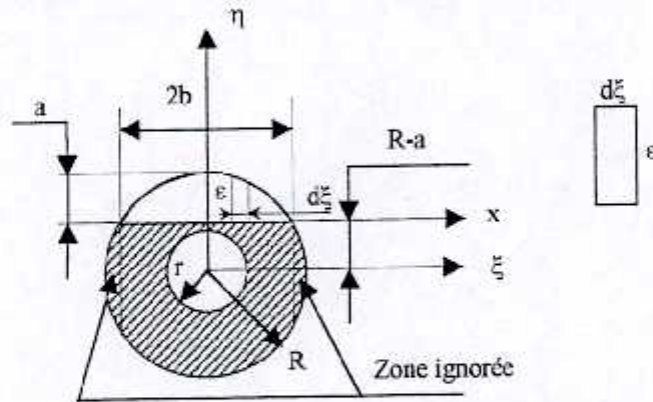


Fig. A-3 Schéma d'une fissure dans un arbre creux

Le passage de la forme cylindrique pleine à la forme cylindrique creuse, nécessite la considération de la présence du creux sur les propriétés géométriques et l'introduction d'un changement de variable adéquat, tel que :

Si on suppose que :

$$r = \rho R \quad \text{avec } 0 \leq \rho \leq 1$$

on aura :

$$A' = (1 - \rho^2)A$$

et

$$I' = (1 - \rho^4)I$$

La présence du trou fait modifier géométriquement et physiquement la structure de l'arbre. Pour tenir compte de cette influence sur la hauteur $h(\xi)$. On suppose que la hauteur se divise en deux groupes de hauteurs, la première sont les hauteurs effectives définies pour $(\xi < r)$ et les autres sont les hauteurs normales pour $(\xi > r)$. Par ailleurs, une autre modification doit être introduite. Le domaine d'intégration selon ξ , se modifie pour devenir non pas entre $[0 \text{ et } b]$ mais entre $[d \text{ et } b]$ où d est l'intersection de la fissure avec le trou.

Pour H comme l'épaisseur de cet arbre, on aura :

$$H = R - r.$$

Le changement de variable suit les cas suivants :

a) Pour $0 < a < H$

Zone de fissure comprise entre $[-b + b]$

Pour $\xi > r$, on a :

$$h = h(\xi) = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$$

Pour $\xi \leq r$, on a :

$$h = h(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2} - \sqrt{r^2 - \xi^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$$

$$d = 0$$

b) Pour $H < a < H + 2r$

Zone de fissure comprise entre $[-b - d]$ et $[+d + b]$

Pour $\xi > r$, on a :

$$h = h(\xi) = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$$

Pour $\xi \leq r$, on a :

$$h = h(\xi) = 2\sqrt{R^2 - \xi^2} - 2\sqrt{r^2 - \xi^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$$

$$d = \sqrt{r^2 - (R - a)^2}$$

Afin d'être uniforme dans cette approche, la présence du trou (vide) influe sur la profondeur de la fissure pour ($a > R$) et ne doit pas être considéré conformément au calcul de la hauteur effective.

On introduit α^* (fissure effective) telle que pour $\xi \leq r$:

$$\alpha^* = \alpha - 2\sqrt{r^2 - \xi^2}$$

c) Pour $H + 2r < a < 2R$

Zone de fissure comprise entre $[-b \ +b]$

$$h = h(\xi) = 2\sqrt{R^2 - \xi^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$$

$$\alpha^* = \alpha - 2\sqrt{r^2 - \xi^2}$$

Avec :

$$\alpha = \alpha(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2} - (R - a)$$

(ξ, η) repère local

A.4 Cas simple d'une fissure transversale

Le c_{ij} du cas prismatique est ici non explicitée pour simplifier la représentation Pour un cas simple d'hypothèses :

- Pas de couplage force axiale/flexion,
- Pas de contraintes de cisaillement,
- Déformation plane,
- "Rather long shaft", arbre long.

On a :

$$c = \frac{\partial u}{\partial P} = \frac{\partial^2}{\partial P^2} \int_0^a \int_{-b}^b \frac{(1 - \nu^2) K_I^2(\xi)}{E} da d\xi$$

Avec :

$$K_I = \frac{4P}{\pi R^4} \sqrt{R^2 - \xi^2} \sqrt{\pi \alpha} F_2(\alpha/h)$$

On aura :

$$c_\xi = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \int_0^a \int_{-b}^b \frac{32}{\pi^2 R^8} (R^2 - \xi^2) \pi \alpha F_2^2(\alpha/h) da d\xi$$

et

$$c_\eta = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \int_0^a \int_0^b \frac{32 \xi^2 \pi \alpha F_1^2(\alpha/h)}{\pi^2 R^8} d\alpha d\xi$$

D'où les raideurs correspondantes pour poutre de longueur l :

$$k_\xi = \frac{k}{1 + \frac{c_\xi k l^2}{8}} \quad \text{et} \quad k_\eta = \frac{k}{1 + \frac{c_\eta k l^2}{8}}$$

Avec :

k : raideur initiale.

L'équation de mouvement s'exprime comme suit [1] pour la totalité de l'arbre au point de fissure :

$$\begin{aligned} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi\xi}\xi + k_{\xi\eta}\eta &= f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta\xi}\xi + k_{\eta\eta}\eta &= f_{\eta}(t) \end{aligned}$$

Le couplage des raideurs ($k_{\xi\eta}$ ou $k_{\eta\xi}$) est généralement de faible effet devant les deux autres [1], l'équation de mouvement devient :

$$\begin{aligned} m(\xi'' - 2\Omega\eta' - \Omega^2\xi) + c(\xi' - \Omega\eta) + k_{\xi\xi}\xi &= f_{\xi}(t) \\ m(\eta'' + 2\Omega\xi' - \Omega^2\eta) + c(\eta' + \Omega\xi) + k_{\eta\eta}\eta &= f_{\eta}(t) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\xi\xi} - m\Omega^2 & -c\Omega \\ +c\Omega & k_{\eta\eta} - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi}(t) \\ f_{\eta}(t) \end{bmatrix}$$

Cette équation ressemble à celle du modèle de base mais sans la présence des déplacements angulaires sous l'effet des moments M_y et M_z . Le reste des sollicitations, L'effet de torsion et des forces axiales peuvent être ajoutées normalement par assemblage.

Cette approximation prend l'arbre entier sans discrétisation. Il semble que cette approche est très grossière ; vu qu'elle porte des simplifications globales dans le calcul, alors, que la discrétisation récupère une certaine rigueur en jouant sur le nombre d'éléments.

A.5 Cas simple d'une fissure circonférentielle

Sih & Loewer [1] ont introduit la méthode énergétique pour l'étude d'une poutre cylindrique avec une fissure circonférentielle. Il ont proposé d'exprimer l'énergie de déformation U telle que :

$$U = \frac{T^2 c}{2}$$

Où

$$c = \Delta\varphi / \Delta T$$

Avec :

- T : torsion,
- c : souplesse locale,
- φ : angle de torsion.

La densité de l'énergie de déformation s'exprime :

$$J = \frac{\partial U}{\partial A} = \frac{1}{2} T^2 \frac{\partial c}{\partial a} \frac{1}{2(\pi R - a)}$$

Avec :

- A : surface fissurée ($A=f(a)$)

Irwin [22] la densité d'énergie de déformation en torsion seule:

$$J = \frac{K_{III}^2}{2G}$$

Le facteur d'intensité de contrainte en mode III (de torsion) est définie par la relation :

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \text{termes d'ordre } (r^0)$$

Avec :

- r : rayon à partir de la pointe de fissure,

On tire (dc/da) à partir de l'expression de J telle que :

$$\frac{dc}{da} = \frac{K_{III}^2}{T^2 G} 2(\pi R - a)$$

L'intégrale donne :

$$c = \int_0^a \frac{K_{III}^2}{T^2 G} 2(\pi R - a) da$$

Benhen & Koiter [1] proposent une approximation du facteur d'intensité de contrainte K d'une poutre cylindrique fissurée:

$$K = \frac{3}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{5}{16} \lambda^3 + \frac{35}{128} \lambda^4 + 0.208 \lambda^5 \right]$$

$$\lambda = \frac{R-a}{R}$$

Avec :

R : rayon de la poutre cylindrique

K est définie par la relation :

$$\tau_{xy} = K \frac{2T}{\pi(R-a)^3} \left[\frac{a(R-a)}{R} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2r}}$$

D'où :

$$K_{III} = \frac{2T}{(R-a)^3} \left[\frac{a(R-a)}{\pi R} \right]^{1/2} K$$

On aura :

$$c = \frac{4}{\pi R^4 \mu} \int_0^a \frac{a}{R} \frac{2(\pi R - a)}{\pi R} \frac{R^5}{(R-a)^5} K^2(a) da = I(a/R)$$

Avec :

$\mu = G$ (module de cisaillement)

L'intégration de c donne :

$$I(a/R) = 0.035(1-a/R)^4 + 0.01(1-a/R) + 0.029(1-a/R)^2 + 0.0086(1-a/R)^3 + 0.0044(1-a/R)^4 + 0.0025(1-a/R)^5 + 0.0017(1-a/R)^7 + 0.008(1-a/R)^8 - 0.092$$

La raideur de l'élément arbre de longueur L et de raideur initiale k (en torsion) sera :

$$\frac{1}{k^*} = c + \frac{1}{k}$$

ou encore :

$$k^* = \frac{k}{kc + 1}$$

Cette méthode peut être appliquée facilement pour un élément (i) d'un arbre tel que :

$$k_i^* = \frac{k_i}{k_i c_i + 1}$$

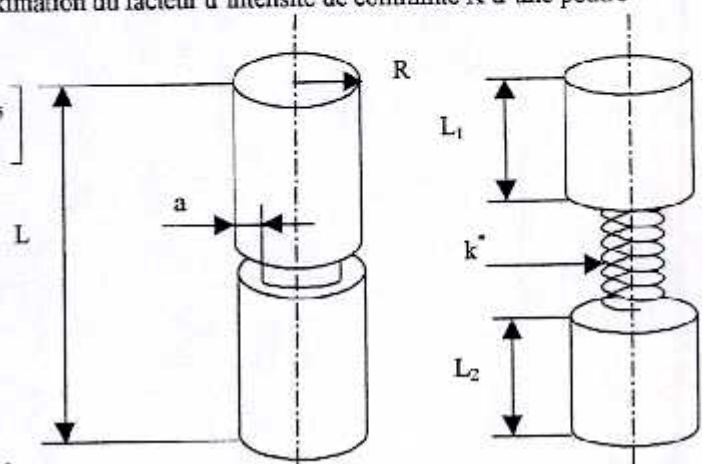


Fig. A-4 Fissure circumférentielle

A.6 Critiques du modèle :

Dans le modèle [1] présenté dans cette étude, on trouve un certain nombre d'incohérences et dont l'auteur a ignoré certains aspects par souci de simplification et dont les conséquences, ont donné une approche plus quantitative que qualitative. On peut citer :

1. Le modèle ne tient pas compte de la rigidité normale de la structure issue des zones non introduites dans le calcul de la densité d'énergie de déformation, en particulier les poutres à section cylindrique.
2. Le modèle ignore la répartition des contraintes, dans le cas de flexion, par rapport à l'axe neutre ; qui fait partager la section en une partie sollicitée en traction et l'autre en compression ! L'axe neutre introduit en cas de présence d'une fissure une amplification des contraintes dans la zone où se trouve la fissure et une répartition normale au-delà.
3. Le modèle a présenté une poutre à section prismatique et un cas particulier d'une poutre cylindrique plein et n'a pas explicité le cas général de chargement.
4. Le modèle n'a pas explicité le cas d'une poutre à section cylindrique creuse.
5. Le modèle utilise une formulation incohérente ; En effet, l'unité du facteur d'intensité diffère du mode I [$N/m^{3/2}$], alors que pour le mode II et III [N/m^2].
6. Le modèle de base utilise le module de YOUNG au lieu du module de cisaillement dans le calcul des contraintes de cisaillement aux modes II et III.
7. Le modèle ne tient pas compte des changements géométriques introduits par la fissure pour le calcul des propriétés mécaniques aire et moment quadratique.
8. Le modèle ne propose pas de méthode pour le calcul de la rigidité en torsion.

A.7 Applications pour le cas de fissure transversale

Dans le but de valider et de comparer nos résultats analytiques, nous nous proposons de faire une comparaison entre les résultats obtenus par ANDREW[1] et les nôtres pour le cas d'une poutre cylindrique pleine et une d'une autre creuse.

Calcul de la souplesse c_z ou c_{zz}

Dans le cas de flexion simple seulement, on a la réduction de la matrice en une valeur :

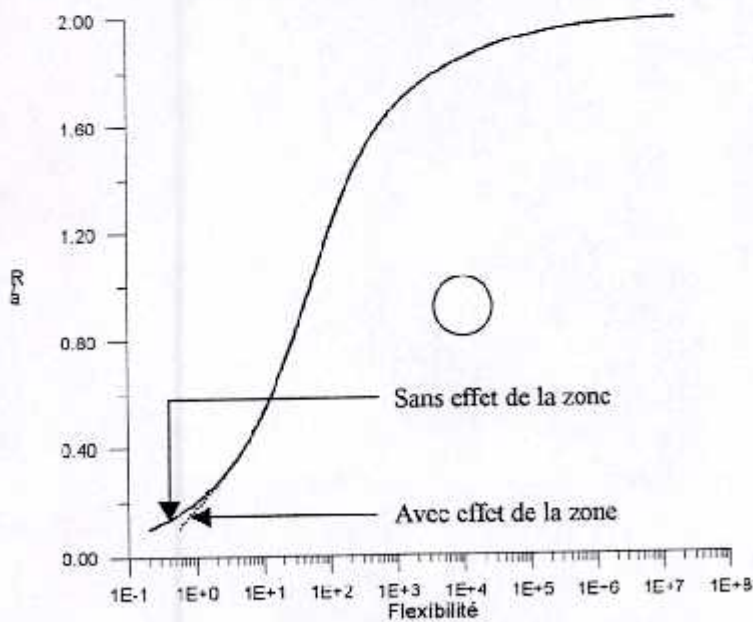


Fig. A-5 Effet de la zone ignorée lors des calculs (côtés latéraux)

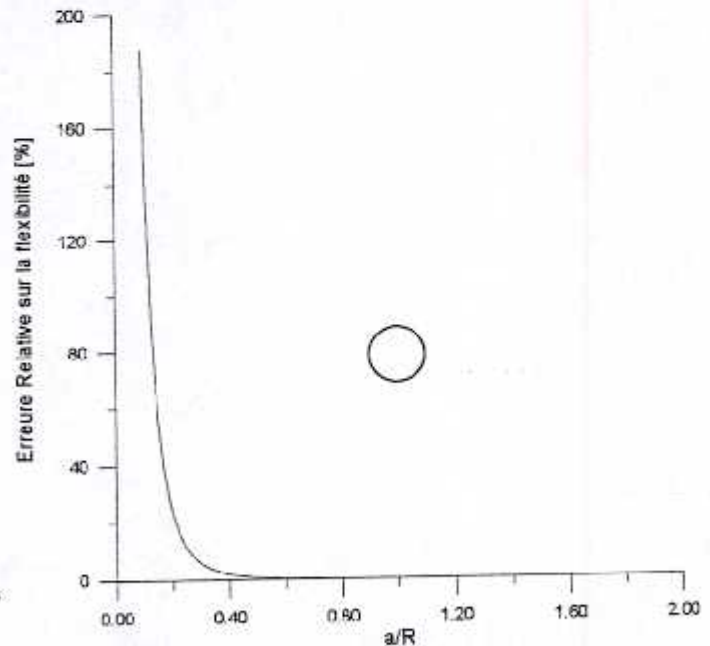


Fig. A-6 Erreur due à l'effet de la zone ignorée

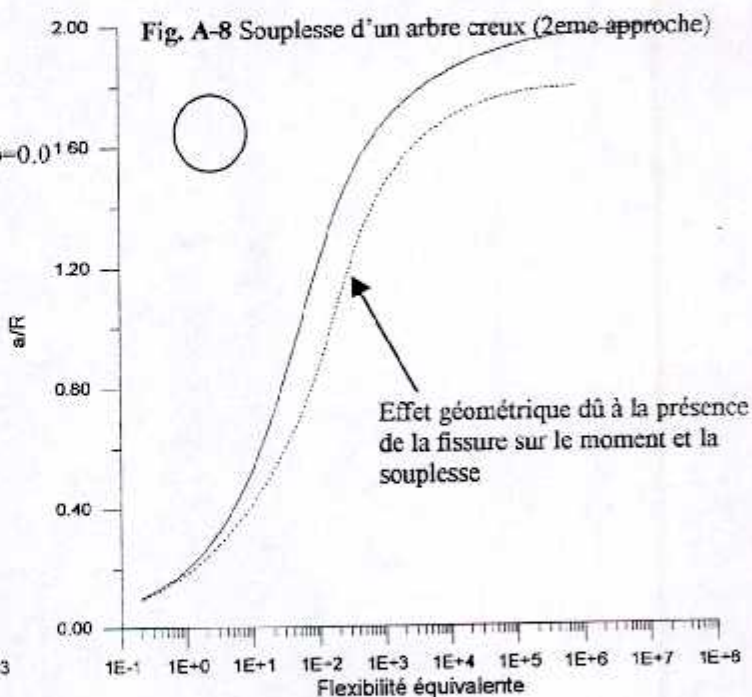
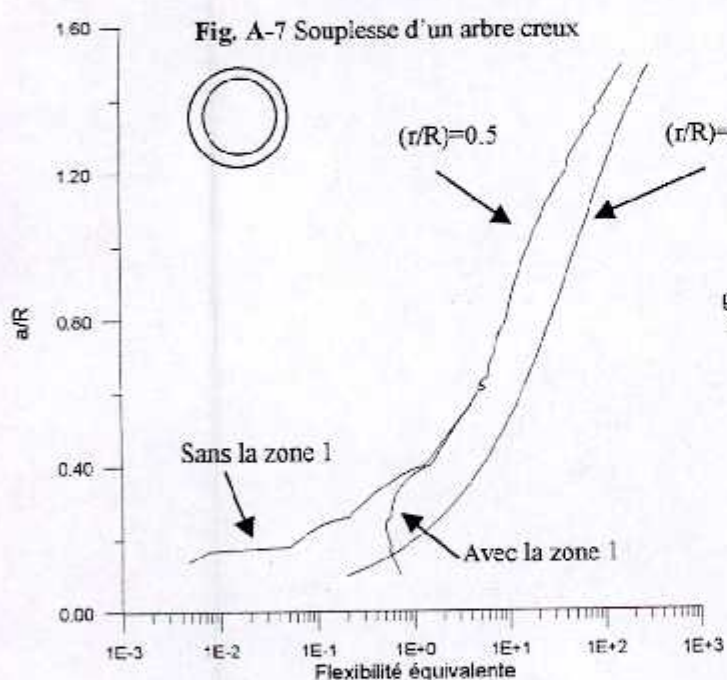
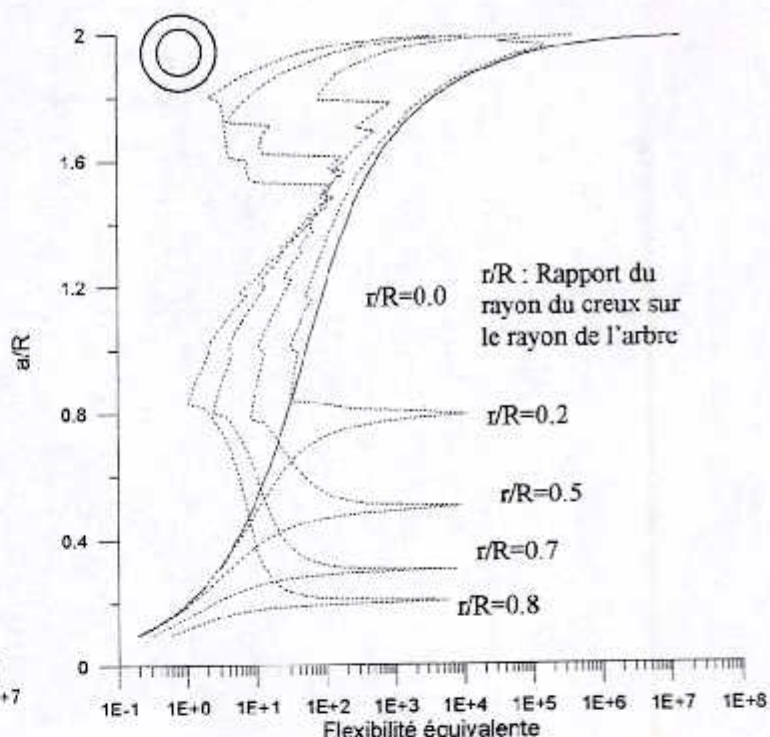
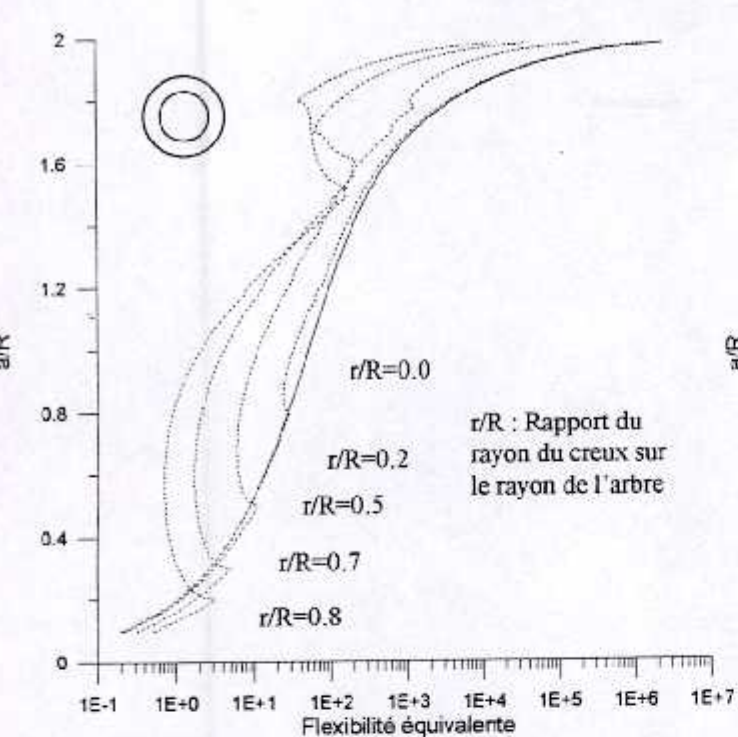


Fig. A-9 effets des zones 1 et 2

Fig. A-10 Effets géométriques

A.8 Discussion des résultats

La souplesse (Graphe.1) d'un arbre cylindrique plein présente une allure de faible croissance pour ($a/R < 0.5$) puis une croissance encore plus faible ($a/R < 1.6$) et enfin une croissance accélérée. Un phénomène semblable à l'avalanche, tout à fait logique physiquement, vu l'importance de la fissure.

L'effet de l'ignorance des zones latérales (Graphe.1) non introduites dans l'intégral de calcul est sensiblement important pour les petites fissures mais s'atténue ($a/R > 0.4$) puis disparaît. Par ailleurs, la considération de cette zone (1) fait augmenter sensiblement la souplesse, mais cette augmentation diminue au fur et à mesure qu'on s'approche du rapport pour ($a/R < 0.5$)

L'erreur (Graphe.2) introduite par cette simplification est considérable et dépasse de loin 5% au-dessous de ($a/R = 0.5$). En conséquence, pour le calcul de la souplesse (ou la rigidité) il faut tenir compte de ces

zones latérales $[-R, -b]$ et $[+b, +R]$ pour les fissures d'une profondeur ($< 0.5R$). Le cas le plus fréquent dans la pratique.

Le calcul de la souplesse d'un arbre cylindrique creux (Graphe.3) montre une influence considérable du trou. La présence du creux diminue globalement la souplesse, mais présente une augmentation sensible quand la profondeur de la fissure n'atteint pas le trou. L'allure générale de la courbe présente deux pics, un pic d'augmentation à la première frontière du trou ($R-r$) et un autre pic de réduction à la deuxième frontière du trou ($R+r$) avec un extrêmu pour ($R < a < R+r$) et un minimum à ($a/R=1$). Cette allure s'explique par des singularités aux frontières du trou, un redressement à l'intérieure du trou puis une évolution similaire à celle d'un arbre plein pour ($a > R+r$).

Une deuxième approche (Graphe 4) consistant à considérer la hauteur physique entre deux bords libres successifs (ou l'épaisseur du cylindre) conforte la première approche, mais présente une singularité au niveau de la première frontière du trou ; ce qui signifie une rupture (cas semblable pour $a/R=2$), mais, cette singularité n'est pas confortée par la pratique ; en effet, une telle allure signifie une rigidité nulle ou rupture totale ce qui n'est pas vrai, mais peut être expliquée par une rupture locale. Cette approche n'est donc qu'un moyen d'explication du phénomène. L'expérimentation est souhaitée pour une approche plus détaillée de ce phénomène.

L'augmentation du rapport (r/R) du rayon du trou sur celui de l'arbre semble influée bénéfiquement la structure en diminuant globalement la souplesse donc en augmentant la rigidité ! Il faut remarquer que dans ce graphe on n'a pas introduit les effets des zones (1 et 2) latéraux et centraux.

L'effet de la considération de la zone latérale (zone 1) et centraux (avec fissure profonde au-delà du creux) (zone 2) (Graphe 5) sont très différents ; alors que l'effet de la première zone est très présente pour ($a/R < 0.5$) la deuxième est totalement absente et même négligeable.

La présence de la fissure fait modifier la géométrie de la structure à l'endroit du défaut. La considération de cette modification (Graphe 6) illustre parfaitement l'importance de cette (erreur d'appréciation) par une augmentation sensible de la souplesse, particulièrement dans la zone ($a/R > 0.4$). Mais reste faible pour les fissures peut profondes.

A.9 Conclusions et recommandations

Le calcul analytique développé est très satisfaisant vu la correspondance des courbes trouvées à celle de la littérature [1]. C'est pourquoi, nous pouvons estimer que notre extrapolation aux arbres creux semble être acceptable et validée pour ce modèle

Il faut noter que pour les fissures peut profonde la considération de l'effet de la (zone 1) ou côtés latéraux est importante dans les calculs de la souplesse et par la suite de la rigidité et des fréquences propres de la structure sous la présence du défaut de la fissuration.

Par ailleurs, il semble être que les différents facteurs introduits donnent des résultats justifiables. En fin la validation expérimentale de ces résultats est la plus souhaitable.

En fin, il faut signaler que vu le temps, on n'a pas pu étudier toutes les critiques émises sur le modèle de base. Ces critiques ont été les éléments porteurs de cette étude.

Bibliographie

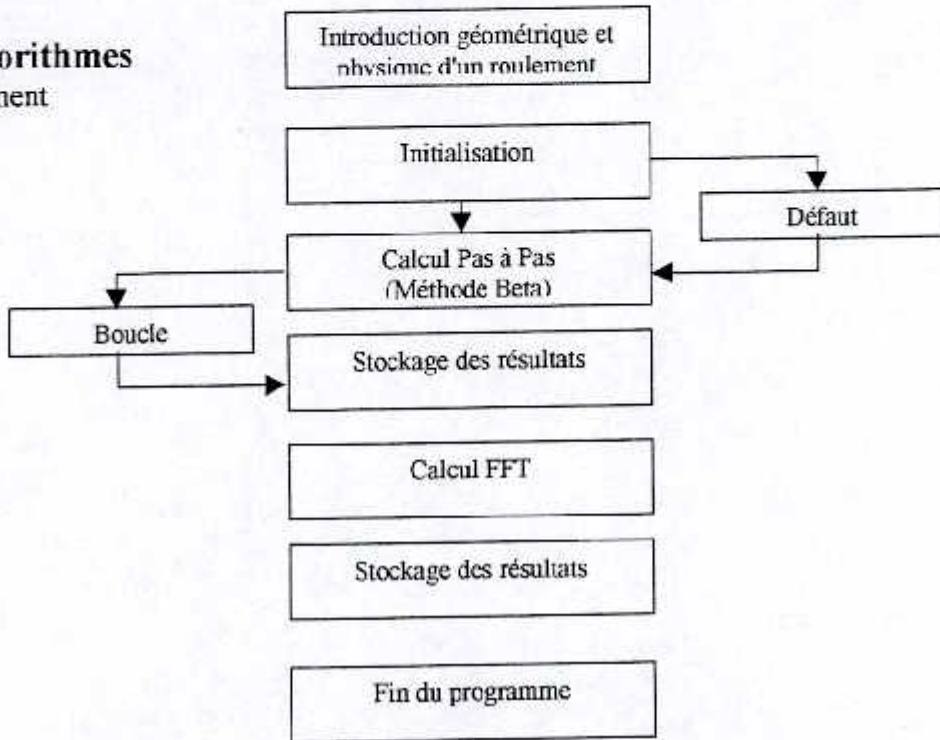
- [1]. D. DIMAROGANOS & S. A. PAIPETTIS, Analytical Methods in Rotor Dynamics, ASP, 1983, Pages 144-166
- [2]. Chong-Won LEE, Vibration Analysis of Rotor., KAP, 1993,
- [3]. S. TIMOSHENKO, Résistance des matériaux, Dunod
- [4]. GHOUL, Mécanique de Rupture, cours DPGS, 1990.
- [5]. M. DOUGDAG & D. SAAD, Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de la mécanique de la rupture, Thèses de DPGS, 1990,

ANNXE B

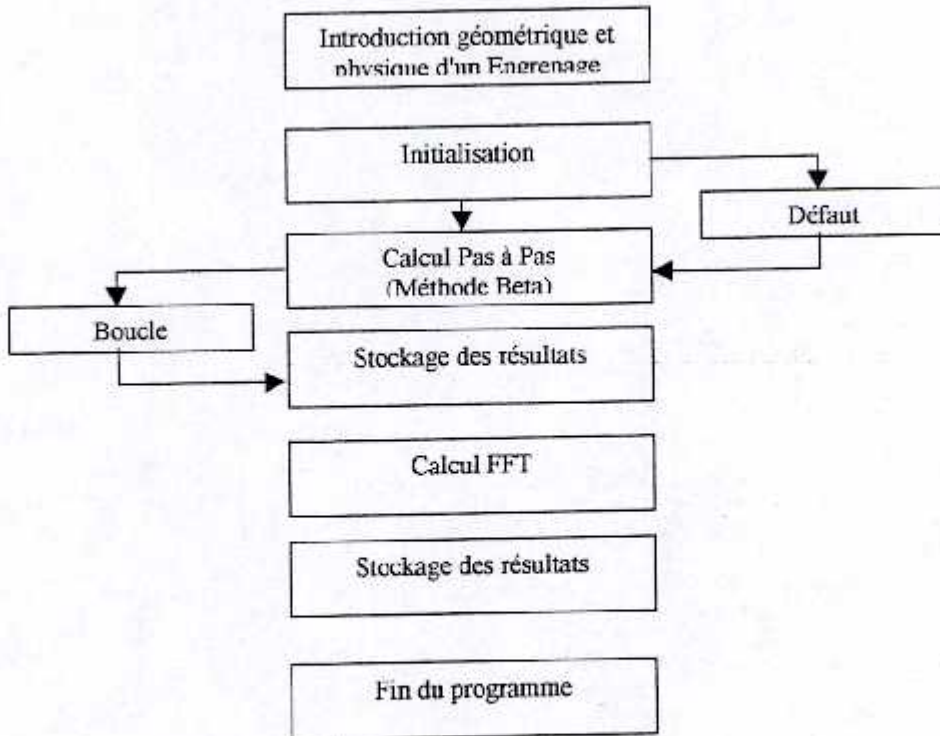
Algorithme et programme de calcul des réponses dynamiques avec et sans défauts pour un roulement à bille et un engrenage droit

B.1 Algorithmes

1. Roulement



2. Engrenage



B.2 Listing du programme

```

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
#define Nb          2048
#define PI          3.14159265358979
#define G           9.81
#define LMAX       100
#define FMAX       500
#define BOUCLE     10000

double g[LMAX-1],gg[LMAX+1],f[FMAX+4], max,min;
struct complex X[Nb+1];
/* ----- */
/* Subroutine de calcul de la rigidite */
/* ----- */
void rigiditeR(double force, double db, double din, double dout,
int n, int no, int indice)
{
double Young,mu,kb, fact;
double h,hin,hout,uin,uout,a,rb;
double delta, pasPI, alpha, debut;
int i,k;

    Young = 240.0; /*1.0e+9*/
    fact = pow(1.0e-9,1.0/3.0);
    mu = 0.5;
    rb = db/2.0;
    a = 2.0*(3.0*force/8.0)*((1-
mu*mu)/Young)*(1.0/(1.0/db+1.0/din));
    s = fact*pow(a,1.0/3.0);
    hin = rb-sqrt(rb*rb-a*a);
    a = 2.0*(3.0*force/8.0)*((1-
mu*mu)/Young)*(1.0/(1.0/db-1.0/dout));
    a = fact*pow(a,1.0/3.0);
    hout = rb-sqrt(rb*rb-a*a);
    uin = (force/(PI*Young*db))*log(db/hin-1);
    uout = (force/(PI*Young*db))*log(db/hout-1);
    h = 2.0*(uin+hout)+ 2.0*(uin+uout);
    kb = force/h;
    /* Rigidite totale */
    delta = 2.0*PI/n;
    pasPI = delta/LMAX;
    alpha = PI/2;
    do{
        debut = alpha;
        alpha -=delta;
    }while(alpha>=-1.0*delta);
    for(i=0;i<LMAX;i++)
    {
        alpha = debut+pasPI*i;
        g[i] = 0.0;
        k=0;
        do{
            fact = 1.0;
            if(alpha>PI) fact=0.0;
            if((no>=0)&(k==no)&(indice==i)) fact=0.0;
            if(alpha>=0.0) g[i] += fact*kb*sin(alpha);
            alpha +=delta;
            k++;
        }while(alpha <- 2*PI);
    }
    max = -1.0e+99;
    min = 1.0e+99;
    for (j=0; j<LMAX; j++)
    {
        if(max<g[j]) max = g[j];
        if(min>g[j]) min = g[j];
    }
}
/* ----- */
/* Calcul Roulement */
/* ----- */
void Roulement(int Default)
{
double db, din, dout, d1, d2, dprim/*,R2*/;
int n,k,o;
int i,j,indice;
double force,fb,ft,f0,k0,kb,x,v,a,masse;
double jp,delta,aa,xx;
double a1,a2,a3,a4,dx,dv,da,dK,teta,beta,gama,CAM;
double x0,wo;
FILE *time;
int Ntr,Nchar,Nbi,NN;
double /*Df,*/Dt,Dtc,Dfc,Dtb;

/* data */
db = 5e-3;
d1 = 17e-3;
d2 = 40e-3;
n = 8;
masse = (1.0/2.0)*200.0; /* >500 -> a>rb */
Ntr = 600; /* tr/mn */ /* <600 -> divergence */
fb = 0.0;
f0 = masse*G;
/*R2 = d2/2.0;*/

indice = 25;
NN = LMAX*n;
teta = 1.4;
beta = 1.0/4;
gama = 1.0/2;
CAM = 1.0e+3; /* Ammortiscent */
/* calcul des rapports */
dprim = (d1-d2)/2.0;
din = dprim - db;
dout = dprim + db;
Nchar = Ntr*(din/(din+dout)); /* OU (din+db)*/
Dtc = 60.0/((double)Nchar); /* temps d'un tour du chariot sec */
Dtc = Dtc/NN;
Dfc = (1.0/Dtc)/(double)Nb; /* Hz */
Dt = Dtc*(double)Ntr/(double)Nchar; /* temps d'un tour sec*/
Dt = Dt/n;
/*Df = Dfc*(double)Nchar/(double)Ntr;*/
Nbi = (dout/db)*Nchar;
Dtb = 60.0/(double)Nbi;

/* ----- */
Default = 0;
/* ----- */

jp = Dtc; /* */
x0 = x - v - a = aa - 0.0;
printf("waite.\n");
time = fopen("rtime.dat","w");
rigiditeR(f0,db,din,dout,n,-1,-1);
ft = f0;
for(i=0;i<Nb;i++) {X[i].x = 0.0; X[i].y
= 0.0; }
for(i=0;i<FMAX+4;i++) f[i] =
ft+fb*sin(2.0*PI*(Ntr/60.0)*i*jp);

if(time != NULL)
for(i=0; i< BOUCLE; i++)
{
j = i%LMAX;
o = i%FMAX;
ft = f0;
/* force d'impulsion
if (i==0) f[0]=ft; else f[0]=0.0;*/
/* DEFAULTS */
/* Default sur la piste externe CAVITE */
if(Default==1) /* duree 3e region
1*Dt/LMAX */
{ indice = 2*LMAX/3;
if (i==0)
rigiditeR(f0,db,din,dout,n,3,indice);
}
}
}

```



```

/* Defaut sur la piste externe BOSSE */
if(Defaut==2) /* duree 2*Dt/L.MAX */
{
    indice=LMAX/3;
    if(j == indice) x += 0.01*db;
}
/* Defaut sur la piste interene CAVITE */
if(Defaut== 3)
{
    if(i==0) { indice = -1;k = 0; indice =
60.0/(Dtc*n*(Ntr-Nchar));
if(indice>LMAX) indice = indice%LMAX;}
    if((i%indice==0)&(i>0))
    {
        k++;if(k>n) k=1; /*kb = 0.0;*/
        rigiditeR(f0,db,din,dout,n,k-
L,indice);
    }
/* Defaut sur la piste interene BOSSE */
if(Defaut == 4) /* chaque coincidence */
{
    if(i==0) { indice = -1;k = 0; indice =
60.0/(Dtc*n*(Ntr-Nchar));}
    if((i%indice==0)&(i>0))
    {
        k++;if(k>n) k=1;
        x=
-0.01*(db/2)*fabs(sin(PI*k/n));
    }
}
/* Defaut sur la bille CAVITE Un seul
Defaut sur une seule bille */
if(Defaut== 5)
{
    if(i==0) { indice = -1; indice =
Dtb/Dtc,indice=indice/2;}
    if((i%indice ==0)&(i>0))
        rigiditeR(f0,db,din,dout,n,(i/LMAX)%a,indice);
}
/* Defaut sur la bille BOSSE */
if(Defaut== 6)
{ /* deplacement impose */
    if(i==0) { indice = -1;k = 0; indice =
Dtb/Dtc;}
        k = (i/LMAX)%a;
        if((i%a(indice/2)==0)&(i>0))
            /*x+=0.01*(db/2);*/
            x+=0.01*(db/2)*fabs(sin(PI*k/n));
    }
}
/* Defaut de Balourd */
if((Defaut == 8)&(i==0)) fb =
1000.0;
k0 = g[j];
kb = k0;
force = fT+
fb*sin(2.0*PI*((double)Ntr/60.0)*(float)i*jp);
aa = (-1.0*kb*x+force)/masse;
/* omega propre */
if(i==LMAX/2)
    wo =
(1.0/(2.0*PI))*sqrt(kb/masse);
/* METHODES DE RESOLUTION */
/* ACCELERATION LINEAIRE
    delta = aa-a;
    v = v+a*jp+0.5*delta*jp;
    x = x+v*jp+0.5*a*jp*jp
+ (1.0/6.0)*delta*jp*jp;
    a = aa;
*/
/* BETA METHODE */
if(i==0){ a1 = 1.0/(beta*pcw(jp,2));
a2 =
1.0/(gama*jp);
a3 =
1.0*(masse/(gama*CAM*jp)+1);
a4 =
1.0*(beta*jp);
a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
force =
(1.0+a3)*force+a1*masse*(x+v*jp+(0.5-beta)*pow(jp,2)*a);
force = force-a2*a3*masse*(v+(1.0-
gama)*jp*a);
dK = -a1*masse+(1+a3)*kb;
xx = force/dK;
aa = a1*xx-(a1*x+a4*v+(0.5-
beta)*a/beta);
v = v+jp*a+(aa-a)/a2;
a = aa;
x = xx
if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
/* */
/* WILSON-TETA METHODE
if(i==0){ a1=3.0/(jp*teta);
a2=6.0/(jp*teta);
a3=(jp*teta)/2.0;
a4=6/pow(jp*teta,2);
a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
force = f[o+1]+(f[o+2]-f[o+1])*(teta-1)-
f[o];
force =
force+(a2*masse+3.0*CAM)*v+(3.0*masse+a3*CAM)*a;
dK = kb+a4*masse+a1*CAM;
dx = force/dK;
da = a4*dx-a2*v-3.0*a;
da = da/teta;
dv = a*jp+0.5*da*jp;
dx =
v*jp+0.5*a*pow(jp,2)+(1.0/6.0)*da*pow(jp,2);
x = x-dx;
v = v+dv;
a = -(f[o+1]-1.0*CAM*v-
1.0*kb*x)/masse;
if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
*/
if(i==0) fprintf(time,"indice time force
rigidite deplcement vitesse acceleration 'n");
        fprintf(time,"%d %g %g %g %g %g %g
'n",L,(float)i*jp,f[o],kb,100.0*x/db,v,a/G);
    }else { printf("ERROR");exit(0);}
    printf(" T = %g Pas Dt= %g freqSpain = %g Df =
%g'n",jp*NN,jp,Dfc*Nb,Dfc);
    printf(" Ntr = %d Nchar = %d Nbi = %d
'n",Ntr,Nchar,Nbi);
    printf(" fo = %g'n",((float)(N*Nchar)/60.0);
    printf(" wo = %g [Hz]'n",wo);
    printf(" Defaut = %d 'n",Defaut);
    printf("End. 'n");
    getch();
}
/* ----- */
/* Subroutine de calcul de la rigidite */
/* ----- */
void rigiditeE(int pas, double fact1, double fact2)
{
    int i;
    double j,Young;
}

```

```

a3 =
1.0*(masse/(gama*CAM*jp)+1);
a4 =
1.0*(beta*jp);
a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
}
force =
(1.0+a3)*force+a1*masse*(x+v*jp+(0.5-beta)*pow(jp,2)*a);
force = force-a2*a3*masse*(v+(1.0-
gama)*jp*a);
dK = -a1*masse+(1+a3)*kb;
xx = force/dK;
aa = a1*xx-(a1*x+a4*v+(0.5-
beta)*a/beta);
v = v+jp*a+(aa-a)/a2;
a = aa;
x = xx
if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
/* */
/* WILSON-TETA METHODE
if(i==0){ a1=3.0/(jp*teta);
a2=6.0/(jp*teta);
a3=(jp*teta)/2.0;
a4=6/pow(jp*teta,2);
a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
force = f[o+1]+(f[o+2]-f[o+1])*(teta-1)-
f[o];
force =
force+(a2*masse+3.0*CAM)*v+(3.0*masse+a3*CAM)*a;
dK = kb+a4*masse+a1*CAM;
dx = force/dK;
da = a4*dx-a2*v-3.0*a;
da = da/teta;
dv = a*jp+0.5*da*jp;
dx =
v*jp+0.5*a*pow(jp,2)+(1.0/6.0)*da*pow(jp,2);
x = x-dx;
v = v+dv;
a = -(f[o+1]-1.0*CAM*v-
1.0*kb*x)/masse;
if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
*/
if(i==0) fprintf(time,"indice time force
rigidite deplcement vitesse acceleration 'n");
        fprintf(time,"%d %g %g %g %g %g %g
'n",L,(float)i*jp,f[o],kb,100.0*x/db,v,a/G);
    }else { printf("ERROR");exit(0);}
    printf(" T = %g Pas Dt= %g freqSpain = %g Df =
%g'n",jp*NN,jp,Dfc*Nb,Dfc);
    printf(" Ntr = %d Nchar = %d Nbi = %d
'n",Ntr,Nchar,Nbi);
    printf(" fo = %g'n",((float)(N*Nchar)/60.0);
    printf(" wo = %g [Hz]'n",wo);
    printf(" Defaut = %d 'n",Defaut);
    printf("End. 'n");
    getch();
}
/* ----- */
/* Subroutine de calcul de la rigidite */
/* ----- */
void rigiditeE(int pas, double fact1, double fact2)
{
    int i;
    double j,Young;
}

```

```

Young = 240.0;
max = -1000.0;
min = -1000.0;
for(i=0;i<100;i++) { g[i]=0.0;gg[i]=0.0; }
for(i=0;i<100;i++)
{
    j = (float) i/100.0;
    g[i] = fact2*Young*(1.0/log(1.0/(.5*j+.5)+0.5));
    if((i-pas<100)&&(i+pas>0))
        gg[i-pas]=
fact1*Young*(1.0/log(1.0/(.5*(1.0-j)+.5)+0.5));
    g[i] = (g[i]*gg[i])/(g[i]+gg[i]);
    if(g[i]>0)
    {
        if(min>g[i]) min = g[i];
        if(max<g[i]) max = g[i];
    }
}
}
/* ----- */
/* Calcul Engrenage */
/* ----- */
void Engrenage(int Defaut)
{
    int i,n,k,m, NN,Ntr;
    double jp,delta,aa,xx;
    double a1,a2,a3,a4,dx,dv,da,dK,teta,beta,gama,CAM;
    double a,v,x;
    double d,dd,force,f0,fT,fb,masse,kb;
    double Dt,Df,fact,factd;
    double minG;
    int indice, pasL, indice0;
    int ok4;
    FILE *file;

    file = fopen("bal.dat", "w");
    a=0.0;
    v=0.0;
    x=0.0;
    force = 0.0;
    f0 = 1000.0;
    fb = 0.0;
    fT = f0;
    masse = 1.0;
    n = 10;
    NN = 100*n;
    Ntr = 60; /* tr/mm */
    Dt = 60.0/((double)Ntr); /* sec */
    Dt = Dt/(double)NN;
    Df = (1.0/Dt)/(double)Nb; /* Hz */
    indice0 = 25;

    for(i=0;i<Nb;i++) { X[i].x = 0.0; X[i].y = 0.0; }
    d = 0.0;

    /* ----- */
    /* Default = 0; */
    /* ----- */

    printf(" Defaults No %d \n", Defaut);
    printf(" Waite .. \n");
    rigiditeE(0,1.0,1.0);
    teta = 1.4;
    beta = 1.0/4;
    gama = 1.0/2;
    CAM = 1.0e+3; /* Ammortissement */
    jp = Dt;

    if (file != NULL)
    {
        fprintf(file, "Indice pas g(t) gg(t) deplacement vitesse
acceleration force \n", i,(float)i/100.0,g[i%100],d,x,v,a,force);
        for(i=0;i<10000/*Nb*/;i++)
        {
            k = (i/100)%a; /* dent no=k d'un TOUR */
            fT = f0;

```

```

indice = indice0;
fact = 1.0;
factd = 1.0;
ok4 = 0;
/* cycle */
if(i%100 == 0)
{
    a=0.0;
    v=0.0;
    x=0.0;
}
/* Erreur de forme sur une face de la 5eme dent */
if(Defaut == 1)
    if(k==5) { fact = 0.5; indice = 25.0; }
/* */
/* Interferences */
/* rigidite */
/* Absence de la 5eme dent */
if(Defaut == 2)
{
    /*if(k==6) fT = 1.2*f0;*/
    /*if(k==5) factd = 0.0;*/
    if(k==5)
        fact = 0.0;
}
/* Faux rond ou excentricite */
if(Defaut == 3)
{
    if(i%100 == 0) /* chaque cycle */
    {
        pasL = 10+(int)
((10.0)*sin(2*PI*((float)Ntr/60.0)*(float)i*Df));
        rigiditeE(pasL,1.0,1.0);
    }
    indice = indice0 + pasL;
    if(indice<0) indice=0;
}
/* Default d'usure sur une roue */
if(Defaut == 4)
{
    factd = 0.80;
    indice = indice0-10;
    if(i==0) rigiditeE(0,factd,1.0); /* une fois
*/
    if(indice<0)
    {
        if(i==0) for(m=0;m<abs(indice);m++) {
            g[m]=g[100-m]=0.0; }
        m = abs(indice);
        ok4=1;
        indice = 0;
    }
}
/* Default d'irregularite du pas d'engrenage */
if(Defaut == 5)
{
    if(i%100 == 0) /* chaque cycle */
    {
        pasL = (int)(k*1.5);
        rigiditeE(pasL,1.0,1.0);
    }
    indice = indice0 - (int)(k*1.5);
    if(indice<0) indice=0;
}
/* default locale = fissure ... la 5eme dent */
if((Defaut == 6)&&(k==5))
    fact = 0.8;
d=(g[i%100]-min);
if(d<0) d=0;
dd = 0.0;
if(i%100 < 0+indice) dd = g[(100-indice)+i%100]-
min;

if(Defaut == 5)
{
    if(k>=n-1) x=-1;

```



```

                indice = indice0 -
(int)(k+1)*1.5);
                if(indice<0) indice=0;
        }
        if(i%100 > 100-indice) dd = g[i%100-(100-indice)]-
min;
        if(dd != 0) d = d*fact+dd+min;
        else d = (d-min)*fact;
        /* force */
        if((i%100 < 25)(i%100 > 75)) fT=0.5*f0;
        /* usure */
        if(Default == 4)
        {
                fT = f0;
                if((i%100 < indice)(i%100 > 100-indice))
fT=0.5*f0;
                if(ok4)
                {
                        if((i%100 < m)(i%100 > 100-
m)) fT=((float)m+1.0)*f0;
                }
        }
        if(Default==2)
        {
                if ((k==6)&&(i%100<=75)) fT = 1.2*f0;
                if(k==5) { a=0;x=0;v=0;}
        }
        kb = d;
        force =
fT+fb*sin(2*PI*((float)Ntr/60.0)*(float)i*Dt);
        aa = (-1.0*kb*x+force)/masse;
        /* METHODES DE RESOLUTION */
        /* ACCELERATION LINEAIRE
                delta = aa-a;
                v = v+a*jp+0.5*delta*jp;
                x = x+v*jp+0.5*a*jp*jp;
        + (1.0/6.0)*delta*jp*jp;
                a = aa;
        */
        /* BETA METHODE */
        if (i==0){ a1 = 1.0/(beta*pow(jp,2));
                a2 =
1.0/(gamma*jp);
                a3 =
1.0/(masse/(gamma*CAM*jp)+1);
                a4 =
1.0/(beta*jp);
                a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
                }
        force =
(1.0+a3)*force+a1*masse*(x+v*jp+(0.5-beta)*pow(jp,2)*a);
        force = force-a2*a3*masse*(v+(1.0-
gamma)*jp*a);
        dK = -a1*masse+(1+a3)*kb;
        xx = force/dK;
        aa = a1*xx-(a1*x+a4*v+(0.5-
beta)*a/beta);
        v = v-jp*a+(aa-a)/a2;
        a = aa;
        x = xx;
        if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
        if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
        if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
        /* */
        /* WILSON-TETA METHODE
        if(i==0){ a1=3.0/(jp*teta);
                a2=6.0/(jp*teta);
                a3=(jp*teta)^2.0;
                a4=6/pow(jp*teta,2);
                a = (f[0]-
1.0*CAM*v-1.0*kb*x)/masse;
        }

```

```

        force = f[o+1] + (f[o+2]-f[o+1])*(teta-1)-
f[o];
        force =
force-(a2*masse+3.0*CAM)*v+(3.0*masse+a3*CAM)*a;
        dK = kb+a4*masse+a1*CAM;
        dx = force/dK;
        da = a4*dx-a2*v-3.0*a;
        da = da/teta;
        dv = a*jp+0.5*da*jp;
        dx =
v*jp+0.5*a*pow(jp,2)+(1.0/6.0)*da*pow(jp,2);
        x = x+dx;
        v = v+dv;
        a = (f[o+1]-1.0*CAM*v-
1.0*kb*x)/masse;
        if(fabs(a)<1.0e-10) a = 1.0e-10;
        if(fabs(v)<1.0e-10) v = 1.0e-10;
        if(fabs(x)<1.0e-10) x = 1.0e-10;
        /*
        }
    }
else
    printf("ERROR");
    printf(" End. \n");
}
/* ----- */
/* Programme Principale
/* ----- */
void main(void)
{
    int type, default;

    default = 0;
    Debut :
        clrscr();
        printf (" 1-Roulement \n");
        printf (" 2-Engrenage \n");
        printf (" votre choix: ");
        scanf ("%d",&type);
        printf (" Numero du defaults; (0:sans defaults)\n");
        scanf ("%d",&default);
        switch (type) {
            case 1 : Roulement(default);break;
            case 2 : Engrenage(default);break;
            default : { printf ("n Erreur de choix");goto Debut;}
        }
        printf("Fin du Programme");
    }

```


ANNEXE C

Calcul de la rigidité d'un arbre en présence d'une fissure transversale

(Cas de arbres prismatique, cylindrique pleine et creux)

DOUGDAG M.⁽¹⁾ et OUALI A.⁽²⁾

Résumé

Cette communication est une étude des conséquences de la présence d'une fissure transversale sur le comportement dynamique d'un arbre d'une machine tournante. Elle fait partie d'un ensemble de travaux de modélisation touchant différents organes de machines.

L'objectif visé par ces travaux est l'élaboration d'une modélisation mathématique du comportement dynamique des principaux organes constituant une machine. Une modélisation obéissante aux critères de souplesse et de malléabilité afin d'introduire les effets des défauts caractéristiques.

L'approche adoptée dans cette étude consiste en un développement analytique d'un modèle simulant les effets de la présence d'une fissure transversale sur le comportement mécanique d'un arbre.

En se basant sur la mécanique de la rupture, la théorie d'élasticité et le théorème de CASTIGLIANO, on a élaboré un modèle mathématique capable de reproduire l'effet de la présence d'une fissure transversale sur un arbre d'une machine tournante suivi par une validation.

Le modèle, ainsi obtenu, est validé par comparaison au modèle d'ANDREW. Etant donné, que le facteur principal entrant dans cette modélisation mécanique est la rigidité, on s'est proposé de faire une série de calculs analytiques de l'évolution de la flexibilité en fonction de la profondeur de la fissure.

Les résultats obtenus étaient remarquables. En effet, en plus des critiques qu'on a pu émettre sur les travaux d'ANDREW, on a étendu cette technique pour toucher d'autres types d'arbres tel que les arbres creux.

Grâce à ce modèle, il nous est possible de simuler le comportement dynamique d'une machine, d'approcher d'avantage le modèle réel et de permettre le suivi en maintenance prédictive des machines. Par ailleurs, ce modèle peut également être utilisé comme un outil de calcul et d'aide à la conception de machine.

Abstract

In this paper, we studying consequences of a transverse fissure presence on the dynamic comportment of rotating machine axis. This stud is one part of a many works touching different machine organs.

The objective aimed by these works is the elaboration of a mathematical modelling of the dynamic comportment of the main organs constituting a machine. Where this modelling may obeying to the criterion of suppleness so as to introduce characteristics defect effects.

The approach adopted in this study consists of an analytic development of a model simulating effects of the presence of a transverse fissure on the mechanical comportment of axis in rotating machine followed by validation.

With the rupture mechanical, the elasticity theory and CASTIGLIANO theorem, we have elaborated a mathematical model able to reproduce the effect of the presence of a transverse fissure on a rotating machine axis.

The model, thus obtained, is validated by comparison to the ANDREW's model. Since, that the main factor entering this mechanics modelling is the rigidity, we have planned to make a series of analytical calculations of the flexibility evolution according to the depth of the fissure.

Results were remarkable. Indeed, in more our critics of ANDREW's model we have widened this technique to touch others kinds such that hollow axis.

With this model, it us is possible to simulate a machine, to approach plus the real model and to allow it followed in maintenance of machines. Furthermore, this model can equally be used as a calculation and assistance tool in machine designs.

Mots clés : Modélisation, Défauts, Arbre, Fissure, Flexibilité, Maintenance Prédictive.

¹ Attaché de Recherche, COMENA/CRNB/DTN/Laboratoire des Etudes Mécaniques.

² Maître de Conférence, Université de Blida/Institut de Mécanique.

Modèle

L'étude d'une poutre soumise à des chargements de flexion, de cisaillement et de traction/compression en présence d'une fissure transversale de profondeur a , donne des déplacements généralisés u_i le long de la direction P_i .

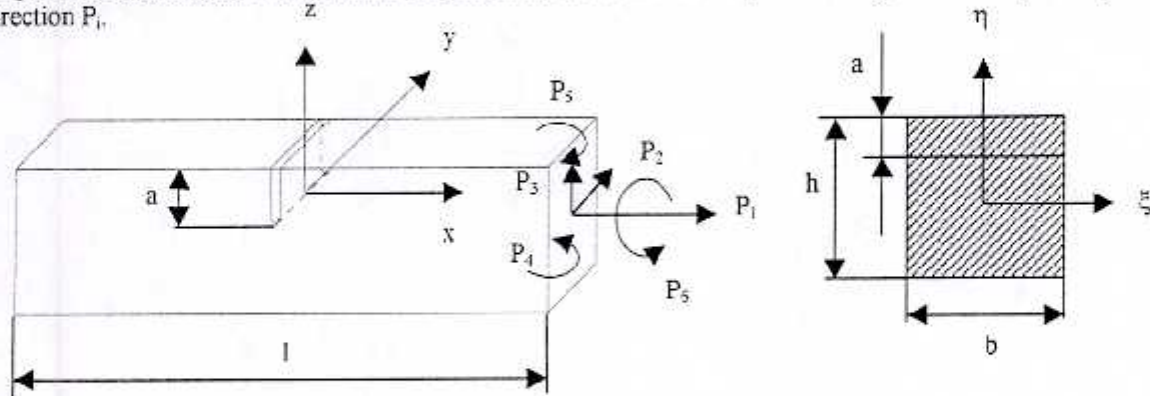


Fig.1 poutre prismatique chargée avec fissure transversale

Le fond théorique de l'étude analytiques se base sur le théorème de CASTIGLIANO, la théorie de la mécanique de rupture et la théorie d'élasticité.

Critiques du modèle d'ANDREW

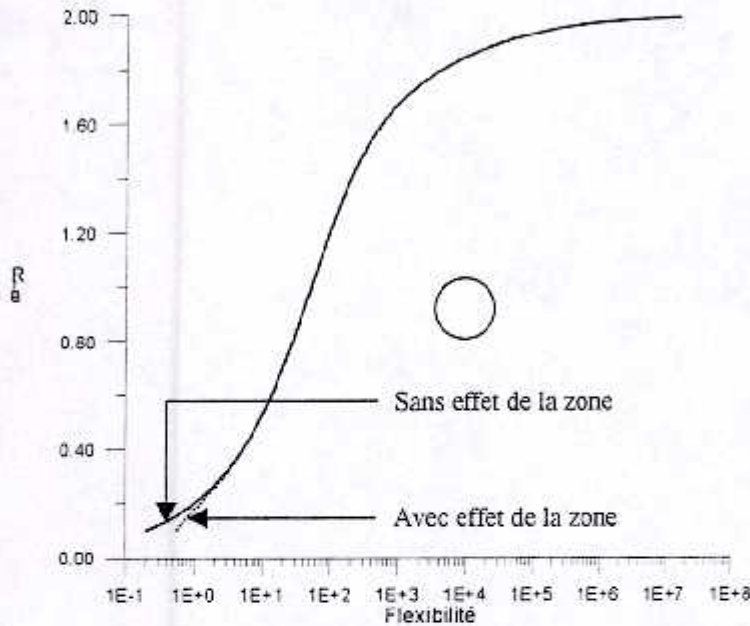
Dans le modèle [1] présenté dans cette étude, on trouve un certain nombre d'incohérences et dont l'auteur a ignoré certains aspects par souci de simplification et dont les conséquences, à mon avis, ont donné une approche plus quantitative que qualitative. On peut citer :

1. Le modèle ne tient pas compte de la rigidité normale de la structure issue des zones non introduites dans le calcul de la densité d'énergie de déformation, en particulier les poutres à section cylindrique,
2. Le modèle ignore la répartition des contraintes, dans le cas de flexion, par rapport à l'axe neutre : qui fait partager la section en une partie sollicitée en traction et l'autre en compression ! L'axe neutre introduit, en cas de présence d'une fissure, une amplification des contraintes dans la zone où se trouve la fissure et une répartition normale au-delà,
3. Le modèle a présenté que le modèle d'une poutre à section prismatique et un cas particulier d'une poutre cylindrique pleine et n'a pas explicité le cas général de chargement,
4. Le modèle n'a pas explicité le cas d'une poutre à section cylindrique creuse,
5. Le modèle utilise une formulation incohérente : En effet, l'unité du facteur d'intensité diffère du mode I [$N/m^{3/2}$], alors que pour le mode II et III [N/m^3],
6. Le modèle ne tient pas compte des changements géométriques introduits par la fissure pour le calcul des propriétés mécaniques tel que l'aire et le moment quadratique,
7. Le modèle ne propose pas de méthode pour le calcul de la rigidité en torsion,

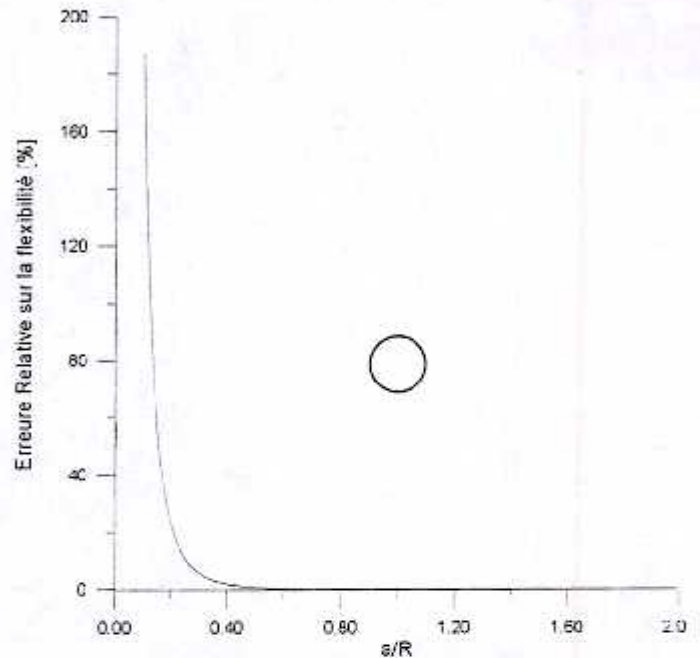
Applications

Dans le but de valider et de comparer nos résultats analytiques, nous nous proposons de faire une comparaison entre les résultats obtenus par ANDREW[1] et les nôtres pour le cas d'une poutre cylindrique pleine et une d'une autre creuse, en introduisant les différents effets ignorés par l'étude d'ANDREW.

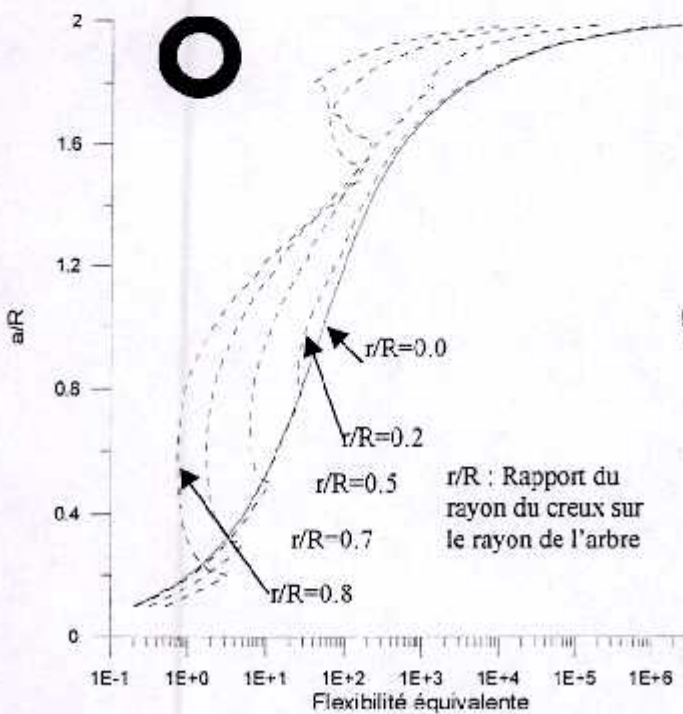
Calcul de la flexibilité



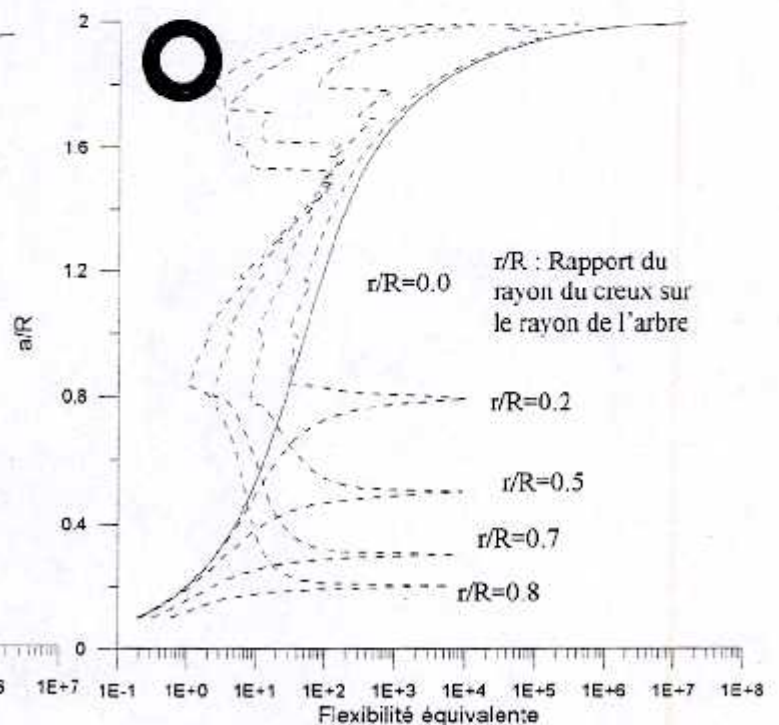
Graph. 1 Effet de la zone ignorée lors des calculs (côtés latéraux)



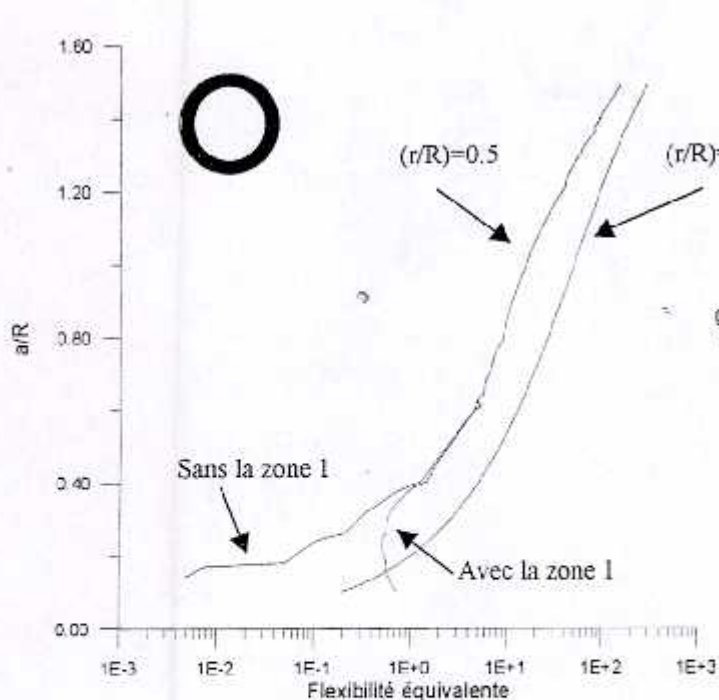
Graph. 2 Erreur dû à l'effet de la zone ignorée



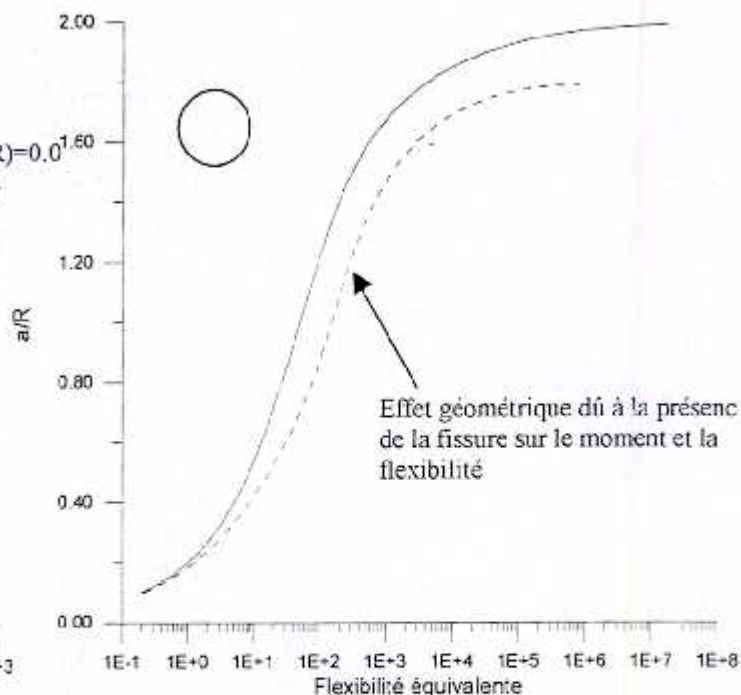
Graph. 3 Flexibilité d'un arbre creux



Graph. 4 Flexibilité d'un arbre creux (2cmc approche)



Graphe. 5 effets des zones 1 et 2



Graphe. 6 Effets géométriques

Discussion des résultats

La flexibilité (Graphe.1) d'un arbre cylindrique plein présente une allure de faible croissance pour ($a/R < 0.5$) puis une croissance encore plus faible ($a/R < 1.6$) et enfin une croissance accélérée. Un phénomène semblable à l'avalanche, tout à fait logique physiquement, vu l'importance de la fissure.

L'effet de l'ignorance des zones latérales (Graphe.1) non introduites dans l'intégral de calcul est sensiblement important pour les petites fissures mais s'atténue ($a/R > 0.4$) puis disparaît. Par ailleurs, la considération de cette zone (1) fait augmenter sensiblement la flexibilité, mais cette augmentation diminue au fur et à mesure qu'on s'approche du rapport pour ($a/R < 0.5$)

L'erreur (Graphe 2) introduite par cette simplification est considérable et dépasse de loin les 5% au-dessous de ($a/R = 0.5$). En conséquence, pour le calcul de la flexibilité (ou la rigidité) il faut tenir compte de ces zones latérales $[-R, -b]$ et $[+b, +R]$ pour les fissures d'une profondeur ($< 0.5R$). Le cas le plus fréquent dans la pratique.

Le calcul de la flexibilité d'un arbre cylindrique creux (Graphe.3) montre une influence considérable du trou. La présence du creux diminue globalement la flexibilité, mais présente une augmentation sensible quand la profondeur de la fissure n'atteignant pas le trou. L'allure générale de la courbe présente deux pics, un pic d'augmentation à la première frontière du trou ($R-r$) et un autre pic de réduction à la deuxième frontière du trou ($R+r$) avec un extrême pour ($R < a < R+r$) et un minimum à ($a/R = 1$). Cette allure s'explique par des singularités aux frontières du trou, un redressement à l'intérieur du trou puis une évolution similaire à celle d'un arbre plein pour ($a > R+r$).

Une deuxième approche (Graphe 4) consistant à considérer la hauteur physique entre deux bords libres successifs (ou l'épaisseur du cylindre) conforte la première approche, mais présente une singularité au niveau de la première frontière du trou ; ce qui signifie une rupture (cas semblable pour $a/R = 2$), mais, cette singularité n'est pas confortée par la pratique ; en effet, une telle allure signifie une rigidité nulle ou rupture totale ce qui n'est pas vrai, mais peut être expliquée par une rupture locale. Cette approche n'est donc qu'un moyen d'explication du phénomène. L'expérimentation est souhaitée pour une approche plus détaillée de ce phénomène.

L'augmentation du rapport (r/R) du rayon du trou sur celui de l'arbre semble influer bénéfiquement la structure en diminuant globalement la flexibilité donc en augmentant la rigidité ! Il faut remarquer que dans ce graphe on n'a pas introduit les effets des zones (1 et 2) latéraux et centraux.

L'effet de la considération de la zone latérale (zone 1) et centraux (avec fissure profonde au-delà du creux) (zone 2) (Graphe 5) sont très différents ; alors que l'effet de la première zone est très présente pour ($a/R < 0.5$) la deuxième est totalement absente et même négligeable.

La présence de la fissure fait modifier la géométrie de la structure à l'endroit du défaut. La considération de cette modification (Graphe 6) illustre parfaitement l'importance de cette (erreur d'appréciation) par une augmentation sensible de la flexibilité, particulièrement dans la zone ($a/R > 0.4$). Mais reste faible pour les fissures peu profondes.

Conclusions

Le calcul analytique développé est très satisfaisant vu la correspondance des courbes trouvées à celle de la littérature [1]. C'est pourquoi, nous pouvons estimer que notre extrapolation aux arbres creux semble être acceptable et validée pour ce modèle.

Il faut noter que pour les fissures peu profondes la considération de l'effet de la (zone 1) ou elle des côtés latéraux est importante dans les calculs de la flexibilité et par la suite de la rigidité et des fréquences propres de la structure sous la présence de fissures.

Par ailleurs, il semble être que les différents facteurs introduits donnent des résultats justifiables. La validation expérimentale complètera de ces résultats et la plus souhaitable, dans le futur.

En fin, il faut signaler que vu le temps, on n'a pas pu étudier tous les critiques émises sur le modèle de base. Ces critiques ont été les éléments porteurs de cette étude.

-----oOo-----

Bibliographie

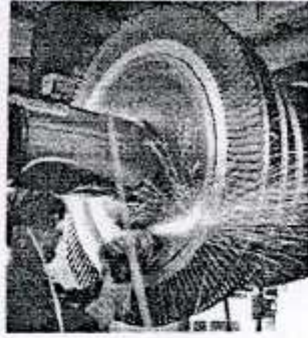
- [1]. D. DIMAROGANOS & S. A. PAIPETTIS, Analytical Methods in Rotor Dynamics, ASP , 1983, Pages 144-166
- [2]. Chong-Won LEE, Vibration Analysis of Rotor., KAP, 1993,
- [3]. S. TIMOSHENKO, Résistance des matériaux. Dunod
- [4]. GHOUL, Mécanique de Rupture, cours DPGS, 1990.
- [5]. M. DOUGDAG & D. SAAD, Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de la mécanique de la rupture, Thèses de DPGS, 1990

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Amar Telidji
Laghouat

Institut de Génie Mécanique



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المركز الجامعي عمار تليدجي الأغواط

معهد الهندسة الميكانيكية

RNT'2001

Rencontre Nationale sur les Turbomachines

10 - 11 Avril 2001, Laghouat, ALGERIE

Attestation de Participation

Nous attestons que Monsieur : **DOUGDAG MOURAD**

a présenté la communication orale suivante : *Calcul de la rigidité d'un arbre en présence d'une fissure transversale (cas d'un arbre cylindrique creux).*

lors de la première Rencontre Nationale sur les Turbomachines organisée par l'Institut de Génie Mécanique du Centre Universitaire de Laghouat, ALGERIE les 10 et 11 Avril 2001.

Le Président du comité scientifique
du RNT 2001

A. Benmohamed

Le Directeur de L'Institut de
Génie Mécanique

Modélisation d'un roulement à billes (calcul de rigidité)

N.E. Titouche¹, M. Dougdag¹, A.Ouali², M. Djaoui¹

¹Laboratoire des Etudes Mécaniques et Matériaux Nucléaires,
DEMEM, DTN, CRNB BP 180 Ain Oussera 17200 Djelfa.

²Institut de Mécanique, Université de Blida.

Résumé :

Dans le but de valider expérimentalement un modèle théorique développé au niveau du laboratoire un certain nombre d'essais de compression a été conduit sur deux roulements de référence FLT ISKRA 6203Z. La mesure expérimentale de la rigidité de ces roulements n'a pu se faire d'une manière simple. En effet, les essais ont été réalisés en deux temps, dans un premier temps, la rigidité du roulement et du système d'amarrage combiné est mesurée et dans un second temps la rigidité du système d'amarrage seul est retranchée pour obtenir celle du roulement. Ces mesures ont nécessité l'adaptation d'un système d'amarrage. Ce système combine à la fois un accessoire COD, un mors pour essais de traction-compression à chaud et la réalisation d'un axe de pression adapté à la forme du roulement. Les résultats d'essais qui sont conduits en charge imposée ont été confrontés aux résultats du modèle théorique.

Introduction

Le travail présenté ici s'inscrit dans le cadre de l'étude des défauts mécaniques des machines tournantes. Il fait partie d'un ensemble de travaux de modélisation touchant différents organes de machines.

L'objectif visé par ces travaux est l'élaboration d'une modélisation mathématique du comportement dynamique des principaux organes constituant une machine. Modélisation obéissant au critère de souplesse afin d'introduire les effets des défauts caractéristiques.

Parmi les défauts qui peuvent exister dans les machines tournantes on trouve ceux liés aux roulements. La modélisation du roulement nécessite impérativement la connaissance de sa rigidité. Ce paramètre qui est déjà fait l'objet d'un calcul analytique fait dans ce travail l'objet d'une validation expérimentale.

Modèle théorique

Pour obtenir la rigidité radiale d'un roulement à billes, on procède, en premier lieu par le calcul des déformations locales et globales. En deuxième lieu, on utilise la relation liant les efforts appliqués et le déplacement résultant pour déterminer la rigidité.

Calcul des déplacements

Déformation locale : Pour obtenir la déformation radiale, on considérera la déformation radiale d'une rangée de billes ainsi que celle des bagues intérieure et extérieure. En utilisant la loi de HERTZ, on a :

$$\text{Pour une Sphère, on a : } \alpha = \sqrt[3]{\frac{3F [(1-\nu_1^2)/E_1] + [(1-\nu_2^2)/E_2]}{8 (1/d_1) + (1/d_2)}}$$

$$\text{La hauteur de déformation } h \text{ est : } h = R - \sqrt{R^2 - \alpha^2}$$

La déformation locale totale sera : $h_{LT} = h_{sup} + h_{inf}$

Déformation globale : sur la base de la loi de HOOK on détermine la déformation globale en compression (u) par :

$$u = \frac{F}{\pi E d_b} \ln \left[\frac{d_b}{h} - 1 \right]$$

On remarque que la déformation globale dépend de l'aire résultant de la déformation locale et par conséquent de la déformation locale.

La déformation globale totale est : $h_{GT} = u_{inf} + u_{sup}$

La déformation totale de la bille est alors : $h_T = h_{LT} + h_{GT} = h_{sup} + h_{inf} + u_{inf} + u_{sup}$
ou encore $h_T = h_T(E_i, d_b, d_b, F)$

Avec :

- h_T : Fonction mathématique non linéaire,
- E_i : modules d'élasticité,
- d_i : diamètre au niveau des zones de contact,
- d_b : diamètre de la bille,
- F : force radiale appliquée,
- i : indice désignant bague extérieure (ext. ou 1) et intérieure (int ou 2).

Détermination de la rigidité

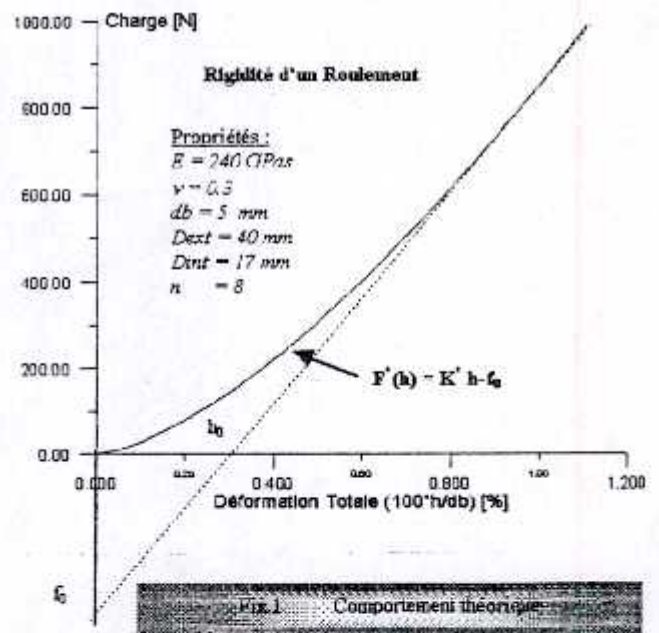
La rigidité du roulement est tirée à partir du graphe reliant la variation du déplacement total (h_T) en fonction de la force radiale appliquée. Cette variation qui est présentée sur la figure 1 présente deux allures l'une curviligne au niveau des faibles forces et l'autre qui s'approche du linéaire pour des grandes forces. Dans notre cas, nous considérons que le domaine d'intérêt est celui des grandes sollicitations et sachant d'autre part qu'un roulement est généralement sollicité par des forces élevées, nous pouvons considérer que le comportement du roulement s'approche de la droite décrite par l'asymptote d'équation :

$$F^*(h) = K^* h_T + h_0$$

Avec

K^* : la rigidité équivalente (définie par $= f_0/h_0$),
 h_0 : déformation résiduelle équivalente.

La partie qui suit traitera de la validation expérimentale du présent modèle.



Validation expérimentale du modèle

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental qui a servi à la réalisation des essais sur roulements est une machine d'essai universelle. Elle est constituée d'un bâti mécanique d'une capacité de 100KN, commandé par une unité électronique.

Cette installation permet d'imposer un effort donné sur un corps pris entre deux mors au niveau du bâti et de contrôler la vitesse avec laquelle cet effort est appliqué à l'aide d'une unité de commande électronique.

1. Le Bâti

Le bâti de l'installation est constitué d'une traverse guidée et montée sur une vis sans fin qui lui communique un déplacement contrôlé à des vitesses qui peuvent être à la fois basses et stables.

2. Le Système d'amarrage

Pour maintenir les roulements dans leur position de sollicitation, un système d'amarrage a été spécialement conçu. Ce système combine trois parties distinctes :

- **un mors pour essais de fatigue oligocyclique** : ce mors possède des dimensions importantes et par conséquent une rigidité également importante. En statique, il peut tester des éprouvettes jusqu'à 100KN.
- **Un mors d'essai COD** : usiné dans un acier spécial (maraging steel), il possède une capacité de charge statique de 100KN et de 60KN en dynamique.
- **Un axe de pression** avec extrémité concave épousant la forme externe du roulement et une **bague** au centre du roulement. Ces éléments qui sont usinés à partir d'un acier ordinaire, sont traités thermiquement pour réduire leur ductilité.

3. L'Unité de commande

La charge à appliquer et la vitesse de chargement ainsi que tous les paramètres concernant les conditions d'essai et la réponse du système sont programmés sur le pupitre de l'unité de commande.

4. L'Acquisition des données

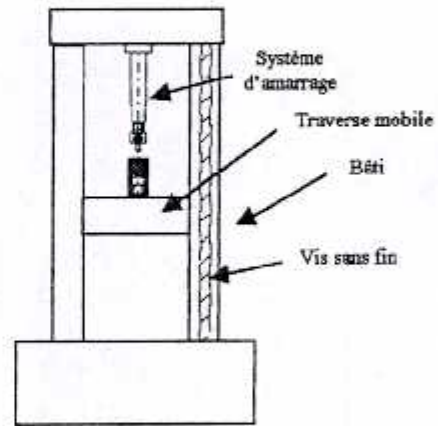


Fig.2 Schéma de l'installation

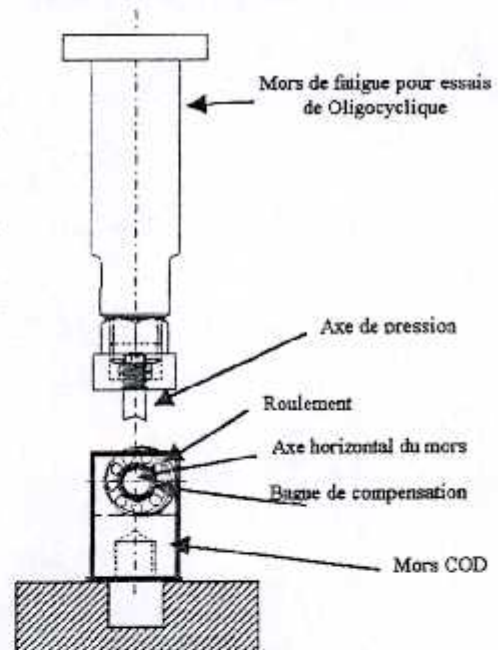


Fig.3 Amarrage du roulement

La réponse du système est recueillie au niveau de la table traçante, qui porte en abscisse la déformation du système et en ordonnée la charge qui lui est appliquée. Ces données sont également et simultanément transférées à un micro-ordinateur, où elles y seront stockées sous forme de fichier DAT.

Expérience

1. Conditions d'expérimentation

La mesure de la rigidité du roulement qui constitue un système composé (bagues, billes) nécessite une sollicitation comprise dans les limites des charges qu'il peut supporter, de plus, la vitesse de chargement doit être la plus faible possible. Dans le cas des présents essais la charge est limitée selon les références SKF à 4000N et la vitesse de chargement est prise égale à 0.05 mm/min (cette vitesse est traduite en terme de déplacement de la traverse).

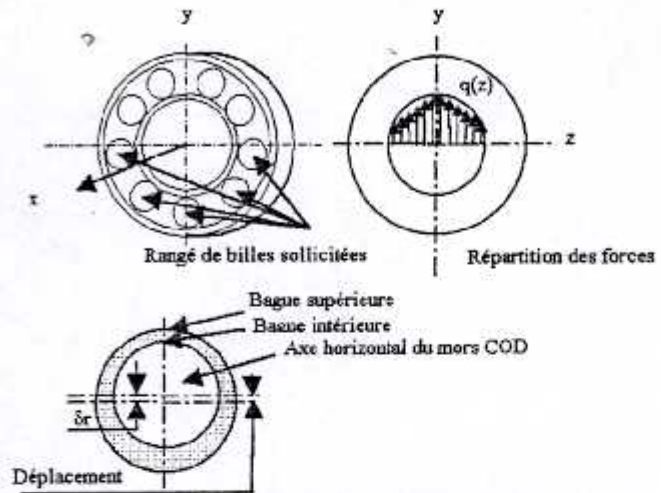


Fig. 2 Représentation schématisée de la sollicitation et la déformation totale d'un roulement sur une traverse encastrée

Le roulement est donc bridé entre l'axe de pression et la bague de compensation (fig. 3), et l'essai est lancé au moment où le contact entre l'ensemble des pièces est réalisé.

2. Essais

♦ Essai avec roulement :

La figure 5 présente le montage qui permet la mesure de la rigidité du système entier. Deux cas de figure sont envisagés. Dans le premier cas, la bille du roulement est placée dans l'axe du chargement. Dans le second cas, l'axe de chargement passe entre deux billes.

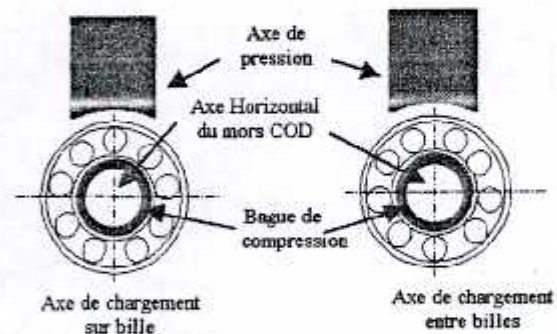


Fig. 5 Cas de chargement

♦ Essai sans roulement :

Dans cet essai, l'axe de pression vient directement buter sur la bague de compensation. Cet assemblage (fig. 6) permet donc la mesure de la rigidité du système sans roulement.

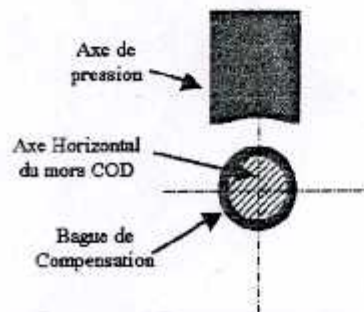


Fig. 6 Essai sans roulement

Résultats

Les deux premières figures représentent les résultats d'essais similaires conduits sur deux roulements. Dans ces essais l'axe de chargement passe par la bille du roulement sollicité (fig. 7). La figure 8 présente les essais où l'axe de chargement passe entre les billes du roulement.

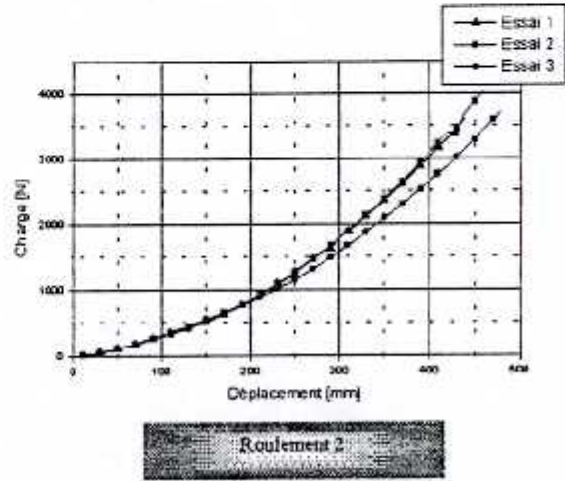
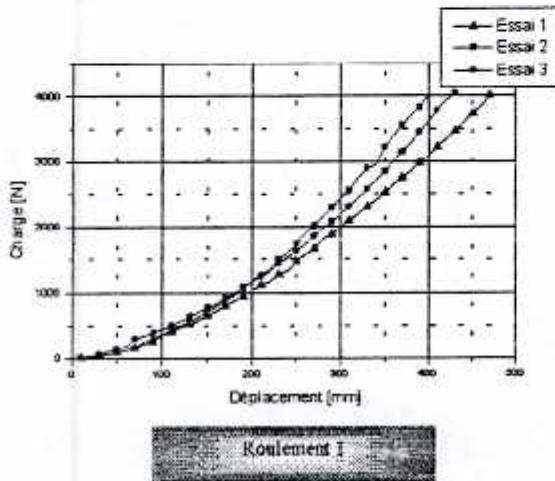


Fig. 7 Résultats d'essais avec Axe de chargement sur bille

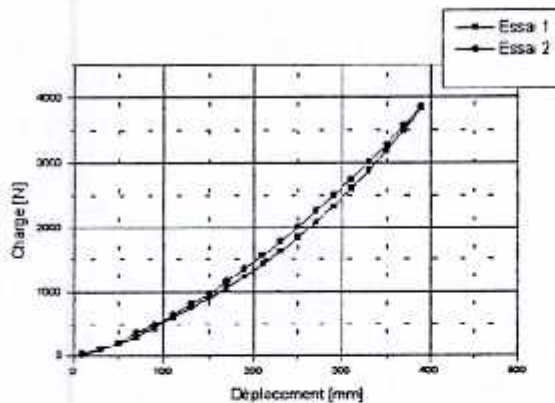


Fig. 8 Résultats d'essais avec Axe de chargement entre billes

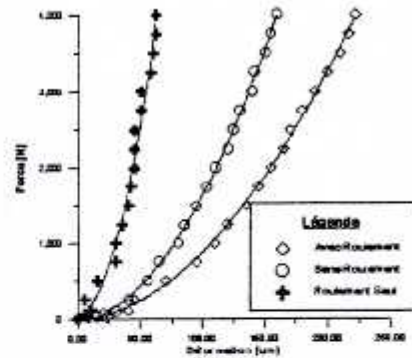


Fig. 9 Détection de la déformation du roulement

Roulement 1

Discussion des Résultats

Les constatations que nous pouvons directement tirer des résultats obtenus sont :

- i. La concordance entre les essais réalisés dans les mêmes conditions
- ii. La similitude qui existe entre les essais avec bille sur axe et bille hors axe
Cette similitude laisse croire que la rigidité du roulement ne varie pas sensiblement sur la circonférence.
- iii. Le passage d'un échantillon à l'autre ne fait apparaître aucune variation palpable dans la réponse du système.
Cette reproduction des résultats traduit la fidélité de production des roulements. Il faut noter que les roulements utilisés possèdent la même référence et sont de la même marque.
- iv. La comparaison des résultats expérimentaux avec ceux tirés du modèle théorique révèle :
 - ◆ Du point de vue allure des courbes, la modélisation reflète relativement l'expérience.
 - ◆ Du point de vue quantitatif, nous notons :
 - Un écart au départ des courbes qui peut être expliqué par le passage du système par une petite période d'adaptation, où les jeux fonctionnels sont rattrapés.
 - Une concordance entre les courbes dans la plage de fonctionnement du roulement
 - Une certaine divergence des valeurs au niveau des sollicitations extrêmes. Cette différence de rigidité peut être expliquée par le fait que le modèle développé ne tient pas compte des traitements thermiques et des traitements de surface que le matériau du roulement subit dans la réalité.

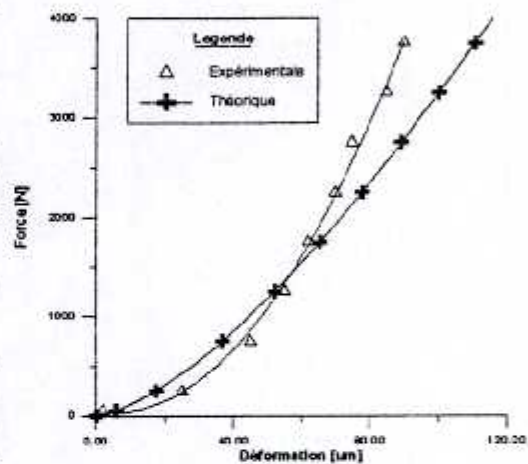


Fig. 10 : superposition des courbes théorique et expérimentale

Conclusion

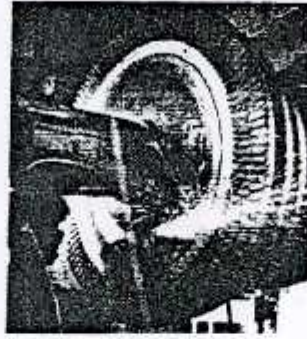
L'étude, ainsi investie, a donné entière satisfaction. Elle a permis avec une certaine tolérance la validation du modèle théorique développé au niveau du laboratoire, comme elle permet dans l'avenir d'apporter d'éventuelles améliorations. Par ailleurs, elle a permis la concrétisation de la mesure expérimentale de la rigidité d'un roulement jamais traité au niveau du laboratoire, comme elle a laissé apparaître les contraintes expérimentales liées aux équipements.



Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Amar Telidji
Laghouat

Institut de Génie Mécanique



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المركز الجامعي عمار تليجي الأغواط

معهد الهندسة الميكانيكية

RNT'2001

Rencontre Nationale sur les Turbomachines

10 - 11 Avril 2001, Laghouat, ALGERIE

Attestation de Participation

Nous attestons que Monsieur : **TITOUCHE NACER EDDINE**

a présenté la communication poster intitulée : *Modélisation d'un roulement à bille
(calcul de rigidité).*

lors de la première Rencontre Nationale sur les Turbomachines organisée par l'Institut de Génie Mécanique du Centre Universitaire de Laghouat, ALGERIE les 10 et 11 Avril 2001.

Le Président du comité scientifique
du RNT 2001

A. Benmhamet

Le Directeur de L'Institut de
Génie Mécanique