

MINISTÈRE AUX UNIVERSITÉS ET LA RECHERCHE  
UNIVERSITÉ DE BLIDA  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de magistère  
Spécialité : Mathématiques  
Option : Modélisations mathématiques et  
Techniques de décision

RECHERCHE  
DE NOYAUX DANS LES GRAPHEES ORIENTES ET  
GRAPHES MUNIS D'UNE ORIENTATION  
ETUDE ALGORITHMIQUE

Par  
Zoham BLIDIA (née ZEMIR)

Blida, Algérie  
1996

MINISTÈRE AUX UNIVERSITÉS ET LA RECHERCHE  
UNIVERSITÉ DE BLIDA  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de magistère  
Spécialité : Mathématiques  
Option : Modélisations mathématiques et  
Techniques de décision

RECHERCHE  
DE NOYAUX DANS LES GRAPHS ORIENTÉS ET  
GRAPHS MUNIS D'UNE ORIENTATION  
ÉTUDE ALGORITHMIQUE

Par  
Zoham BLIDIA (née ZEMIR)

Présenté devant le Jury constitué de:

Président: ABBAS M. (Maître de conférence à l'U.S.T.H.B).

Rapporteurs: BLIDIA M. (Chargé de cours à l'U.S.T.B)

KHELLADI A. (Professeur à l'U.S.T.H.B).

Examineurs: AIDER M. (Chargé de recherche à l'U.S.T.H.B)

BERRACHEDI A. (Chargé de recherche à l'U.S.T.H.B).

## REMERCIEMENTS

Tous mes remerciements vont d'abord à mes professeurs Messieurs M. Blidia et A. Khelladi, qui m'ont initié, encouragé et orienté tout au long de ma recherche en me communiquant toute information concernant mon travail et en m'enseignant l'essentiel de la théorie des graphes.

Je tiens à remercier Messieurs les professeurs P. Duchet et F. Maffray qui m'ont aidé à rejoindre leur laboratoire (L. S. D) où ils m'ont accueilli et m'ont permis d'assister à leurs nombreuses séances de travail qui m'ont été très bénéfiques.

Je suis reconnaissante à Madame Jana du laboratoire L. S. D. de Grenoble qui a contribué à l'élaboration des programmes informatiques, et à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près.

Je remercie vivement Monsieur M. Abbas pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury.

Que Messieurs M. Aider et A. Berrachedi trouvent ici tous mes remerciements pour avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse.

## Résumé de la thèse

Dans cette thèse, nous avons naturellement reconsidéré la question d'existence de noyaux dans les graphes orientés d'une part et d'autre part dans les graphes non orientés qu'on munit d'une orientation.

Nous connaissons à présent trois manières de démontrer qu'un digraphe est noyau parfait.

La première celle établie par P. Duchet; et qui consiste à réorienter les arcs symétriques dans les circuits de manière à se ramener aux conditions d'existence du noyaux de V. Neuman et Morgenstern et ceux de Richardson; et donc lui permettent de conclure.

La seconde manière de procéder; est celle de raisonner par induction en supposant que tout sous-digraphe est noyau parfait puis arriver à construire un noyau du digraphe entier.

Et enfin la troisième manière est celle d'utiliser les opérations de composition de digraphes noyaux parfaits.

En fait nous citons les résultats essentiels qui conduisent à la détermination du noyau dans un digraphe tout en les améliorant.

Nous considérons le problème d'existence de noyaux dans les digraphes sans circuits et ceux sans circuits impairs dont nous établirons un algorithme polynomial dans chacun des cas.

Nous étudions ensuite l'existence de noyaux dans les graphes triangulés, munis de l'orientation normale dont nous donnons un algorithme de recherche de noyaux dans cette classe de graphes qui sont parfaits.

Nous procéderons ensuite à la programmation de chacun des algorithmes à la fin des chapitres; ce qui nous permettra de déterminer facilement le noyau dans de tels graphes.

Par ailleurs; les résultats obtenus par Boros et Gurvich concernant la conjecture générale "un graphe parfait est solvable"; dépendent entièrement de ceux tirés de la théorie des jeux; ce qui nous a amené à en faire une étude complète.

## TABLE DES MATIERES

### -RESUME DE LA THESE

### -INTRODUCTION

### -CHAPITRE I : Notions préliminaires de la théorie des graphes et complexité algorithmique.

#### A/ Notions fondamentales.

a/ Graphes et graphes orientés.

b/ Chaînes et chemins.

c/ Puits et sources.

d/ Graphes spéciaux.

e/ Connexité et forte connexité.

f/ Graphes parfaits et noyaux.

#### B/ Complexité des algorithmes.

a/ Problèmes faciles et problèmes difficiles.

b/ Problèmes NP-complets.

### -CHAPITRE II : Noyaux dans les graphes orientés.

#### A/ Etude des noyaux dans certains graphes orientés.

a/ Graphes orientés sans circuits et graphes orientés tels que tout circuit possède un arc symétrique.

b/ Graphes orientés sans circuits impairs, graphes orientés tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques et graphes orientés tels que tout circuit impair est symétrique.

c/ Travaux élaborés par H. Galeana Sanchez et V. Neuman Lara et conjecture de P. Duchet.

d/ Graphes orientés et " poisson game ".

#### B/ Etude algorithmique.

a/ Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les graphes orientés sans circuit.

b/ Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les graphes orientés sans circuit impair.

### -CHAPITRE III : Noyaux dans les graphes parfaits munis d'une orientation

#### A/ Certains graphes parfaits.

a/ Graphes triangulés.

b/ Graphes i-triangulés.

c/ Graphes de parité.

d/ Graphes de Meyniel.

e/ Graphes de comparabilité.

f/ Graphes parfaitement ordonnables et parfaitement ordonnables généralisés.

g/ Méthode de réorientation.

B/ Recherche algorithmique.

Cas des graphes parfaits triangulés.

**-CHAPITRE IV : Noyaux dans la classe des graphes planaires parfaits et certaines de leurs sous classes.**

A/ Graphes planaires.

a/ Définitions.

b/ Reconnaissance des graphes planaires.

B/ Etude de la solvabilité des graphes planaires parfaits.

**-CHAPITRE V : Solvabilité des graphes parfaits à partir des résultats de la théorie des jeux.**

A/ Forme de jeux, fonction d'effectivité.

a/ Forme de jeux.

b/ Fonction d'effectivité et stabilité d'un jeu.

B/ Solvabilité des graphes parfaits.

a/ Fonction d'effectivité dans les graphes, sous-orientation et solvabilité.

b/ Perfection et g-stabilité.

**CONCLUSION**

**BIBLIOGRAPHIE**

**ANNEXES**

- Annexe (I)/ Algorithme de recherche d'un noyau dans un digraphe sans circuits
- Annexe (II)/ Algorithme de recherche d'un noyau dans un digraphe sans circuits impairs.
- Annexe (III)/ Algorithme de recherche d'un noyau dans un graphe triangulé muni d'une orientation admissible.

## INTRODUCTION

Un graphe est la donnée, d'un ensemble de points appelés sommets et un ensemble de liaisons entre ces sommets appelés arcs dans le cas de graphes orientés et arêtes si le graphe n'est pas orienté.

En 1944, Von-Neumann et O. Morgenstern introduisent pour la première fois la notion de noyau d'un graphe orienté comme solution d'un jeu (ou conflits) à  $n$  joueurs.

Ils font remarquer qu'un graphe sans circuit admet un noyau. Puis par ses multiples résultats Richardson montre que l'existence de noyau dans un graphe orienté dépend de la structure des circuits impairs dans de tels graphes.

Un noyau est un ensemble de sommets non reliés entre eux, où tout sommet extérieur à ce sous ensemble est absorbé par au moins un sommet de celui-ci.

Plusieurs travaux ont été réalisés depuis, notamment par H. Meyniel, P. Duchet, V. Neumann Lara, H. G. Sanchez et autres qu'on précisera par la suite.

Par ailleurs, C. Berge introduit en 1961 la notion de graphes parfaits à partir du concept de coloration, où il les définit comme des graphes tels que l'on puisse colorer ses sommets sans que deux sommets adjacents aient la même couleur et tel que le nombre de couleurs utilisées soit égal à la taille maximale d'une clique (ensemble de sommets reliés deux à deux).

Il les caractérise par suite, il y a maintenant plus de 30 ans par l'énoncé, connu sous le nom de conjecture forte des graphes parfaits suivant : un graphe est parfait si et seulement si il ne contient ni trou ni anti-trou, qui reste toujours sans solution. Jusqu'à présent, une des plus grandes classes de graphes parfaits connue est celle de Claude Berge et Pierre Duchet, dites classe des graphes fortement parfaits qui contient celle de Meyniel (graphes tels que tout cycle impair a deux cordes).

Par suite Claude Berge et Pierre Duchet établissent un parallèle entre deux notions importantes dans la théorie des graphes: la notion de graphe parfait et celle de noyau.

Pour cela ils imposent l'orientation normale (orientation telle que toute clique possède un puits; sommet qui est successeur de tout autre sommet de la clique) au graphe. Nous dirons qu'un graphe non orienté est solvable si toute orientation normale  $D$  de  $G$  est noyau parfaite (i.e : admet un noyau), d'où la conjecture de Claude Berge et Pierre Duchet :  $G$  est parfait si et seulement si  $G$  est solvable.

Ainsi dans le premier chapitre on définit tous les termes utilisés dans la thèse.

Le chapitre deux comportera une étude théorique sur les graphes noyaux parfaits en améliorant certaines preuves et on fera à la fin du chapitre une étude algorithmique de certains résultats qui sera par la suite programmée.

Dans le chapitre trois nous parlerons de la notion de graphe parfaits et certaines de leurs sous classes, nous étudierons particulièrement l'existence de noyau dans la classe des graphes triangulés, qui sont parfaits, munis de l'orientation normale et

nous donnerons un algorithme de recherche de noyau dans de tels graphes que nous programmerons à la fin du chapitre .

Dans le chapitre quatre; nous étudierons les graphes planaires qui sont parfaits, et l'éventuelle existence de noyaux dans ce type de graphes.

Dans ce cadre; nous exposerons l'algorithme polynomial de Hsu pour reconnaître les graphes planaires parfaits, qui est basé sur la décomposition du graphe essentiellement en trois classes spéciales facilement reconnaissables. Les graphes de comparabilité planaires, les line graphes de graphes bipartis ; qui sont parfaits planaires et une classe de graphes formée de graphes faciles à construire.

Comme; les line graphes de bipartis sont solvables (en particulier M-Solvables) et les graphes de comparabilité sont M-Solvables (forme faible de la conjecture citée), on a tenté de montrer moyennant ce type de décomposition la solvabilité des graphes parfaits planaires, en effet il suffit de montrer la solvabilité des graphes de comparabilité et que les types d'opérations utilisées dans la décomposition préservent le noyau perfection.

Dans le chapitre cinq, nous insisterons sur la conjecture de Pierre Duchet et Claude Berge, en notant que plusieurs recherches ont été faites dans le but de résoudre la conjecture des graphes parfaits solvable à savoir : "un graphe est parfait si et seulement si il est solvable", mais sans résultat.

Récemment Endre Boros et Vladimir Gurvich (mai 1994) trouvent dans la théorie des jeux un terrain de résolution partielle (implication dans le sens directe), en fait la théorie des jeux occupe au sein des mathématiques une place prépondérante et fût introduite par Von Neuman en 1956 sous forme de conflit et de coopération, actuellement elle est définie comme étude formelle des situations où plusieurs personnes ont à prendre des décisions dont dépend un résultat qui les concerne puis en tire des modèles mathématiques de situations concrètes pour permettre des conclusions intéressantes.

Nous avons fait une étude complète sur cette théorie qu'on résumera dans cette thèse.

Il est à signaler qu'une autre preuve de ce même résultat a été trouvée dernièrement (janvier 1995) par R. Aharouni.



## CHAPITRE I NOTIONS PRELIMINAIRES DE LA THEORIE DES GRAPHES ET COMPLEXITE ALGORITHMIQUE

### A/ Notions fondamentales:

#### a/Graphes et graphe orientés:

Les graphes utilisés sont des graphes simples (orientés ou non), sans bouclés et sans arêtes multiples, se reporter à la terminologie de C. Berge [2].

Un graphe  $G$  non orienté est la donnée d'un couple  $(X,E)$  où  $X$  est l'ensemble des sommets et  $E$  est formé de paires de sommets distincts de  $X$  appelées arêtes de  $G$ .

Dans un graphe orienté  $D$ , si toutes les arêtes sont orientées, on les appellera arcs, l'ensemble des arcs sera noté  $U$ .

Un arc de  $D$ , orienté du sommet  $x$  vers le sommet  $y$ , sera noté  $(x, y)$ , l'arc symétrique qui lui correspond, s'il existe est noté  $(y, x)$ .

Si l'arc  $(y, x)$  n'existe pas nous dirons que l'arc  $(x, y)$  est antisymétrique et pour un arc  $(x, y)$  de  $D$  on dira que  $x$  est l'extrémité initiale de l'arc  $(x, y)$  et que  $y$  est son extrémité finale.

Si l'arc  $(x, y)$  existe dans  $U$ , les sommets  $x$  et  $y$  sont dits adjacents,  $y$  est dit successeur de  $x$ , et  $x$  est dit prédécesseur de  $y$ .

On note par  $\Gamma^+(x)=\{y \in X / (x, y) \in U\}$ , l'ensemble des successeurs de  $x$  et  $\Gamma^-(x)=\{y \in X / (y, x) \in U\}$ , l'ensemble des prédécesseurs de  $x$ .

Les sommets voisins de  $x$ , sont les sommets de  $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

Un sommet est dit terminal s'il n'a aucun successeur.

Un sous graphe  $D=(X,U)$  induit par  $A \subseteq X$  est défini par  $(A, U_A)$  où  $U_A$  est l'ensemble des arcs dont les extrémités sont dans  $A$ .

Un graphe est partiel si l'ensemble de ses arcs est inclus dans  $U$ .

#### b/Chaînes et chemins:

Un chemin du graphe  $D=(X,U)$  est défini par une suite de sommets deux à deux disjoints  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  telle que l'extrémité terminale de l'arc  $(x_{i-1}, x_i)$  coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc  $(x_i, x_{i+1})$  pour  $i=1, \dots, p-1$ .

Un circuit est un chemin fermé (i.e  $x_0=x_p$ ).

Une chaîne est la donnée d'une suite de sommets  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  telle que  $(x_i, x_{i+1})$  pour  $i = 0, \dots, p-1$  soit une arête de  $E$ . Un cycle est une chaîne fermée.

Le nombre d'arcs (resp. d'arêtes) d'un chemin (resp. chaîne)  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$  est la longueur du chemin (resp. chaîne).

Une corde dans un cycle  $(x_0, x_1, \dots, x_p, x_0)$  est une arête  $(x_i, x_j)$  qui n'appartient pas à l'ensemble des arêtes du cycle et où  $x_i \neq x_j$ .

Une corde courte dans un cycle est de la forme  $(x_i, x_{i+2})$ .

Un pôle est l'extrémité terminale d'une corde.

La parité d'une chaîne (resp. chemin) est la parité du nombre d'arêtes (resp. arcs) de cette chaîne (resp. chemin).

Une chaîne (resp. chemin) est dite minimale (resp. minimal) si l'arête (resp. arc)  $(x_i, x_j)$  n'appartient pas à  $E$  pour  $|i-j| \neq 1$  (resp.  $(x_i, x_j)$  n'appartient pas à  $U$  pour  $j-i > 1$ ).

### **c/ Puits et Sources:**

Un puits est un sommet qui est successeur de tous ses voisins, c-à-d qui reçoit tout sommet qui lui est adjacent.

Une source est un sommet qui est prédécesseur de tout sommet qui lui est adjacent.

### **d/ Graphes spéciaux:**

Un graphe est dit complet si tous ses sommets sont reliés deux à deux.

Une clique est un ensemble complet maximal.

Un stable est un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés deux à deux.

Un graphe est dit biparti s'il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe et ses sommets peuvent être répartis en deux sous ensembles stables.

Un graphe est triangulé s'il ne contient pas de cycle de longueur supérieure ou égale à quatre.

Un graphe est dit  $i$ -triangulé si tout cycle impair de celui-ci, de longueur supérieure ou égale à cinq possède deux cordes non croisées.

Un graphe est dit de parité si pour tout couple de sommets non reliés de celui-ci, les chaînes minimales les reliant sont de même parité, on peut aussi le définir comme étant un graphe tel que tout cycle impair de longueur supérieure ou égale à cinq possède deux cordes croisées.

La classe des graphes parfaits est une classe importante de graphes, les définitions et détails concernant cette classe seront étudiés au chapitre III.

### **e/ Connexité et forte connexité:**

Pour un graphe non orienté la relation  $x R y$  définie par: " il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$  " est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes du graphe. Un graphe est dit connexe s'il contient une seule composante connexe.

Pour un graphe orienté, la relation  $x R y$  définie par: " il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$  " est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes. Un graphe est dit fortement connexe s'il est réduit à une seule composante fortement connexe. Une composante terminale d'un graphe orienté est une composante fortement connexe ne contenant pas de sommets extrémités initiales d'un arc sortant de celle-ci vers

les autres composantes fortement connexes, autrement dit c'est un sommet terminal du graphe orienté réduit (graphe des composantes fortement connexes).

### f/Graphes parfaits et noyaux :

Soit  $G=(X,E)$  un graphe, notons:

$\alpha(G)$ , la cardinalité d'un stable maximum.

$\theta(G)$ , nombre minimum de cliques qui partitionnent  $X$ .

$\gamma(G)$ , nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les sommets d'un graphe sans que deux sommets adjacents aient la même couleur (nombre chromatique).

$\omega(G)$ , nombre maximum de sommets formant une clique.

$G=(X,E)$ , est dit  $\alpha$ -parfait si  $\alpha(G[A])=\theta(G[A])$ , pour tout  $A\subset X$ .

$G=(X,E)$ , est dit  $\gamma$ -parfait si  $\omega(G[A])=\gamma(G[A])$ , pour tout  $A\subset X$ .

En 1970, E. Lovasz avait montré un résultat connu sous le nom de théorème des graphes parfaits à savoir : "un graphe est  $\alpha$ -parfait si et seulement s'il est  $\gamma$ -parfait", ces graphes sont simplement appelés graphes parfaits.

Un trou est défini par un cycle impair de longueur au moins cinq et sans corde, un anti-trou est le complémentaire d'un trou.

### **Conjecture de C. Berge [2] (1960):**

Un graphe est dit parfait si et seulement si il est sans trou ni anti-trou.

Un absorbant dans un graphe orienté est un sous ensemble de sommets tel que tout sommet qui lui est extérieur est absorbé par au moins un sommet de ce sous-ensemble (i.e: il existe un arc de ce sommet vers un sommet du sous ensemble).

Dans un graphe orienté  $D=(X,U)$  un noyau est un ensemble  $K$  de sommets de  $X$  qui est stable et absorbant (i.e:  $K\cap\Gamma^-(K)=\emptyset$  et  $K\cup\Gamma^-(K)=X$ ).

Un graphe orienté est noyau parfait si et seulement si tout sous graphe admet un noyau. Et il est dit noyau imparfait critique si tout sous graphe orienté propre admet un noyau et le graphe orienté n'admet pas de noyau.

On dit qu'une orientation d'un graphe  $G=(X,E)$  est admissible si et seulement si toute clique possède un puits (elle est dite aussi orientation normale).

Une orientation d'un graphe  $G=(X,E)$  est dite M-admissible si et seulement si tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques (elle est dite aussi orientation de Meyniel).

Une orientation d'un graphe  $G=(X,E)$  est M'-admissible si et seulement si tout circuit de longueur trois possède trois arcs symétriques.

Un graphe  $G=(X,E)$  non orienté est dit solvable si et seulement si toute orientation à puits possède un noyau ( $G$  est dit aussi noyau perfectible).

Un graphe non orienté est dit M-solvable (resp. M'-admissible) si et seulement si toute orientation M-admissible (resp. M'-admissible) admet un noyau.

**Conjecture 1:**(C. Berge et P. Duchet) [3].

Un graphe est parfait si et seulement s'il est solvable.

**Conjecture 2:**(H. Meyniel)

Un graphe parfait est M-solvable.

Ces deux conjectures restent ouvertes pour un grand nombre de graphes parfaits.

F. Jaeger a proposé une reformulation de la conjecture de H. Meyniel.

**Conjecture 2':**(F. Jaeger et H. Meyniel)

G est parfait si et seulement si G et son complémentaire sont M-solvables.

**Conjecture 3 :** Un graphe parfait est M'-solvable.

La conjecture 3 est une conséquence de la conjecture 2, de plus elle est équivalente à l'énoncé suivant : Si un graphe parfait est orienté sans circuit de longueur trois et antisymétrique alors il admet un noyau.

### **B/Complexité des algorithmes:**

#### **a/Problèmes faciles et problèmes difficiles:**

Tout problème pouvant être résolu par un algorithme déterministe dont le temps d'exécution est borné par un polynôme (qui est fonction du nombre de données) est dit polynomial, on dit qu'il s'agit d'un problème facile.

Les problèmes pouvant se résoudre par un algorithme polynomial (on dit aussi efficace), appartiennent à une classe notée par P.

Un problème sera dit difficile si on ne connaît pas d'algorithme déterministe polynomial qui le résoud (cela ne veut pas dire qu'un tel algorithme n'existe pas).

Les chercheurs se sont intéressés aux problèmes dont les algorithmes les résolvant ont un temps d'exécution qui croît en exponentiel, par conséquent ils ont introduit la classe des problèmes NP.

#### **Définitions:**

La classe NP comporte les problèmes pouvant être résolus en temps polynomial non déterministe qui serait la donnée d'une combinaison d'instructions pouvant être exécutées en parallèle (algorithme pouvant se trouver dans plusieurs états à la fois, chose qui ne peut-être réelle), contrairement à un algorithme déterministe qui exécute une seule instruction à la fois puis fait un retour pour exécuter le reste des instructions.

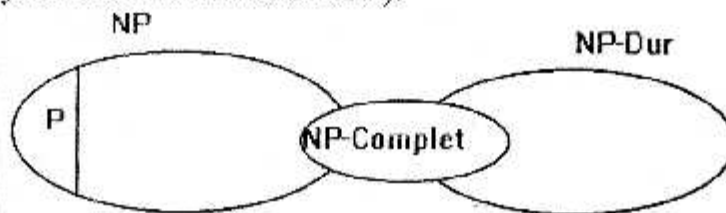
La classe des problèmes polynomiaux est incluse dans celle de NP.

Un problème p est dit NP-dur si tout problème q de NP lui est faiblement réductible (i.e : il existe une fonction g calculable en un temps polynomial tel que pour toute solution x de p,  $y=g(x)$  est solution de q).

On note par  $P \leq Q$  : le problème  $P$  est faiblement réductible au problème  $Q$ .

**b/Problèmes NP-complets:**

Un problème  $P$  est dit NP-complet si  $P$  est à la fois NP-dur et NP. Les problèmes NP-complets sont les problèmes difficiles de NP. Si nous arrivons à résoudre un problème quelconque de la classe des problème NP-complets en un temps polynomial alors on pourra résoudre tout problème de NP en un temps polynomial, puisque tout problème de NP est faiblement réductible à un problème NP. ( on dit aussi polynomialement réductible ).



**Problème de satisfabilité:**

Soient  $x_1, x_2, \dots$  des variables booléennes et  $x'_1, x'_2, \dots$  leurs complémentaires. On se donne l'expression booléenne suivante formée par la conjonction de clauses  $S = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ , où toute clause  $C_i$  est définie par la disjonction de variables booléennes  $x_j$  et  $x'_j$  ie:  $C_i = (y_i^1 \vee y_i^2 \vee \dots \vee y_i^k)$  avec  $y_i^j \in \{ x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots \}$ .

Une expression booléenne est dite satisfaisable s'il existe une attribution des valeurs "vrais ou faux" aux variables  $x_j$  telle que expression booléenne soit vraie (i.e: SAT).

Nous définissons les différents problèmes de satisfabilité de la manière suivante:

Pour SAT1, le problème de satisfabilité où les clauses contiennent chacune une variable booléenne ( $|C_i| = 1; (i=1, \dots, m)$ ), il existe un algorithme polynomial simple résolvant ce problème, et donc SAT1 appartient à la classe P.

Pour SAT2, le problème de satisfabilité où les clauses contiennent chacune deux variables booléennes au plus ( $|C_i| \leq 2; (i=1, \dots, m)$ ), il existe un algorithme polynomial résolvant ce problème. Il suffit de réduire polynomialement SAT2 en SAT1, pour cela soit  $S = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ ; où chaque clause contient au plus deux variables prises dans l'ensemble  $\{ y_1, y_2, \dots, y_k, y'_1, y'_2, \dots, y'_k \}$ ; on peut former avec ces variables

au plus  $\binom{2k}{2}$  clauses différentes.

On passe de  $S$  à  $S' = C'_1 \wedge C'_2 \wedge \dots \wedge C'_m$  où ( $|C'_i| = 1; (i=1, \dots, m')$ ) en utilisant des opérations simples et d'une manière polynomiale.

Soit l'exemple suivant:

$S=(p \vee q') \wedge (p' \vee q) \wedge (q \vee v') \wedge (q' \vee v')=1$ ,  $p'$ ,  $q'$  et  $v'$  sont successivement les complémentaires des variables  $p$ ,  $q$  et  $v$ .

$S=1 \Leftrightarrow \{S'=(p \vee q') \wedge (p' \vee q)=1 \text{ et } v'=1$

$\Leftrightarrow \{S''=p \wedge q, q'=0, p=1, v'=1$  ; qui est un problème SAT1.

Pour toute solution de  $S'=1$  correspond une solution de  $S=1$  et inversement.

Cook, un des nombreux chercheurs a contribué au développement de la théorie de la complexité et a conjecturé  $N=NP$ .

**Théorème 1:**(Cook, 1970)

$NP=P$  si et seulement si  $SAT \in P$ , qui peut être déduit du théorème suivant:

**Théorème 2:**(Cook, 1972)

Soit  $L$  un problème de la classe  $NP$ , alors  $L < SAT$ .

Donc  $SAT$  appartient à  $NP$ -Complet car il appartient à  $NP$ , l'algorithme polynomial non déterministe le prouvant est simple:

Pour  $i=1$  à  $n$  faire  $x_i \leftarrow \text{choix}(\text{vrai}, \text{faux})$

si  $E(x_1, \dots, x_n)$  alors succès sinon échec.

**Théorème 3:**

$SAT < SAT3$ .

**Corollaire:**

$SAT3 \in NP$ -Complet (d'après le théorème 2 de Cook et vu que  $SAT3 \in NP$ ).

La démonstration du théorème 3 se fait en exhibant une transformation qui permet de réduire  $SAT$  en  $SAT3$ .

## CHAPITRE II NOYAUX DANS LES GRAPHEES ORIENTEES

### A/ Etude des noyaux dans certains graphes orientés:

Vu que dans un graphe orienté un noyau n'existe pas toujours, une question se pose de manière naturelle: quelles conditions doit vérifier un graphe donné pour qu'il y ait un noyau?. Tout au long de ce chapitre on essaiera de donner quelques éléments de réponse à cette question en parcourant les différents travaux qui ont été fait sur la question. On appellera digraphe un graphe orienté, emprunté au mot anglais "directed graph".

### a/ Graphes orientés sans circuits et graphes orientés tels que tout circuit possède un arc symétrique :

**Proposition 1:** Soit  $D$  un digraphe simplé, si  $S$  est un noyau alors  $S$  est aussi un stable maximal et un absorbant minimal (par rapport à l'inclusion).

**Preuve:**

Considérons  $S$  un noyau du digraphe  $D$  et  $a \notin S$  alors  $\{a\} \cup S$  ne peut être un ensemble stable car  $a$  est absorbé par  $S$ , donc  $S$  est un stable maximal.

Si  $b \in S$ ,  $S - \{b\}$  ne peut être absorbant car il n'absorbe pas  $b$ , donc  $S$  est absorbant minimal.

**Proposition 2 :** ([2])  $D$  est un digraphe formé d'arcs symétriques, alors  $D$  admet un noyau. De plus  $S$  est un noyau si et seulement si  $S$  est un stable maximal.

**Preuve:**

Si  $S$  est un stable maximal il est aussi absorbant automatiquement (vu que tout arc est symétrique) et donc  $S$  est noyau. Inversement, si  $S$  est un noyau, il est stable maximal (sinon  $S$  ne serait pas absorbant).

**Définition 1:** Un digraphe est transitif si et seulement si chaque fois qu'on a l'arc  $(x, y)$  et on a l'arc  $(y, z)$ , on a aussi l'arc  $(x, z)$ .

**Proposition 3 :** ([3]) Si  $D$  est un digraphe transitif, tout ensemble absorbant minimal est de cardinalité  $\beta(D)$  (i.e : nombre minimum de sommets du digraphe qui absorbent tous les sommets). En outre un ensemble  $S$  est noyau si et seulement si il est absorbant minimal.

**Preuve:**

Nous considérons les composantes fortement connexes terminales de  $D$ , qu'on notera par  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , ceux sont des sous ensembles complets et symétriques à cause de la transitivité dans le digraphe  $D$ .

a/ Si  $A$  est un ensemble absorbant minimal arbitraire, il contient un élément dans chacune des composantes terminales. Donc tout ensemble absorbant minimal

contient le même nombre de sommets qui est égal au nombre de composantes fortement connexes terminales.

b/ Si  $S$  est un noyau,  $S$  est aussi un absorbant minimal. Inversement, tout ensemble absorbant dans un digraphe transitif est un stable, puisque il n'y a aucun arc qui sort des composantes fortement connexes terminales. (voir fig.1)

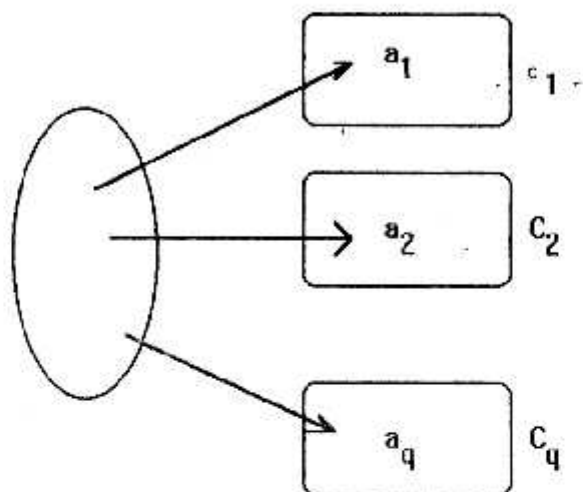


Fig. 1

### Théorème 1 : ([32])

Tout digraphe sans circuit admet un noyau unique.

**Preuve:**

On construit les sous ensembles de sommets suivants:

$$X(0) = \{x \in X / \Gamma^-(x) = \emptyset\}$$

$$X(1) = \{x \in X - X(0) / \Gamma^+(x) \subset X(0)\}$$

etc...

on définira ainsi

$$X(k) = \{x \in X - X(0) \cup X(1) \cup \dots \cup X(k-1) / \Gamma^+(x) \subset X(0) \cup X(1) \cup \dots \cup X(k-1)\}$$

Ce procédé est appelé la mise en ordre des sommets du digraphe. On termine ainsi jusqu'à épuisement de tous les sommets. Puis on forme le noyau à partir de cette construction, de manière unique et de proche en proche. On prend dans le noyau  $N$  les sommets de  $X(0)$ , on remarque que  $X(0)$  est non vide car le digraphe est non vide, de plus  $X(0)$  est stable car  $\Gamma^+(x)$  pour  $x \in X(0)$  est vide, puis on supprime les sommets appartenant à  $X(0)$  et leurs prédécesseurs, et dans le digraphe restant on refait la même procédure, on complète ainsi le noyau  $N$  d'une manière unique et jusqu'à épuisement de tout les sommets.

Le sous ensemble  $N$  est un noyau du digraphe et il est unique par construction (voir fig. 2).



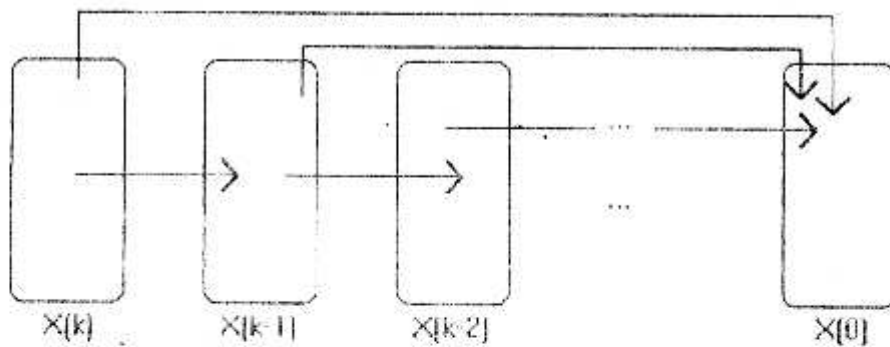


Fig.2

**Théorème 2:** ([13]) Un digraphe tel que tout circuit possède un arc symétrique admet un noyau.

**Preuve:**

Dans  $D$ , nous considérons tous les sommets non adjacents et nous les relions par des arcs symétriques, nous obtenons une clique, ainsi nous mettons en évidence un sommet puits noté  $x_1$  (sinon, il existerait un circuit sans arc symétrique ce qui contredirait l'hypothèse du théorème).

Puis dans le sous digraphe  $D - \{x_1 \cup \Gamma^-(x_1)\}$ , nous refaisons la même opération jusqu'à épuisement de tous les sommets, et le noyau  $N$  serait donné par l'union de ces puits.

**b/Graphes orientés sans circuits impairs, graphes orientés tels que tout circuit impair possède deux arcs symétriques et graphes orientés tels que tout circuit impair est symétrique:**

**Théorème :** ([35])

Un digraphe sans circuit de longueur impair admet un noyau (non nécessairement unique).

**Preuve:**

La preuve se fait par induction sur les sommets.

Décomposons le digraphe en composantes fortement connexes puis on montre les énoncés suivants:

(a) Toute composante fortement connexe  $C_j$  admet un noyau  $N_j$

(b) On considère les composantes fortement connexes terminales  $C_j$  et leurs noyaux  $N_j$  pour  $j=1, \dots, k$ , dans le sous digraphe engendré par les sommets de  $X - [\cup \{C_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k\}]$ , il existe un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera  $N$  et puis on montre que  $N \cup \{\cup (N_j / j=1, \dots, k)\}$  est un noyau du digraphe.

a- On montre à présent que chacune des composantes fortement connexes admet un noyau. Pour cela on partitionne les sommets de  $C_j$  en deux classes, on choisit un sommet quelconque  $x$  de  $C_j$ , puis nous formons la classe  $C_j'$  des sommets atteints à partir de  $x$  par des chemins pairs et la classe  $C_j''$  des sommets atteints à

partir de  $x$  par des chemins impairs, cette partition est toujours possible, sinon il existerait dans  $C_j$  un sommet  $y$  atteint à la fois, à partir de  $x$  par un chemin pair et un chemin impair, ceci formerait avec l'un ou l'autre des chemins de  $x$  à  $y$ , un circuit impair, ce qui contredirait l'hypothèse du théorème. Cette partition fait de la composante fortement connexe  $C_j$  un digraphe biparti dont  $C_j'$  et  $C_j''$  sont des noyaux, en effet un arc dans  $C_j'$  ne peut exister car sinon on aurait un circuit impair. De même pour la classe  $C_j''$  ce qui vérifie la stabilité. De plus la forte connexité du digraphe donne l'absorption de l'un et de l'autre.

b- Entre un sommet de  $N_j$  et un sommet  $N_j'$  il ne peut exister un arc vu que les composantes fortement connexes  $C_j$  et  $C_j'$  sont des composantes terminales. De même entre un sommet de  $N$  et un sommet de  $N_j$  par construction. L'absorption de tous les sommets découle d'une simple vérification.

**Théorème 4 :** ([13]) Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques admet un noyau.

**Preuve :**

Dans  $D$  nous enlevons tous les arcs symétriques. On décompose le digraphe en composantes fortement connexes, puis on le met en ordre.

On montre les propriétés suivantes :

a/ Toute composante fortement connexe  $C_j$  est bipartie et donc admet un noyau  $N_j$ .

b/ On considère les composantes fortement connexes terminales  $C_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) et par induction, dans le digraphe engendré par  $X - \{\cup(N_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k)\}$ ,  $N$  est un noyau et donc  $N \cup [\cup(N_j \cup \Gamma^-(N_j) / j=1, \dots, k)]$  du graphe tout entier.

En effet,

a/ On choisit  $x_0$  dans la composante fortement connexe  $C_j$  et on partitionne ses sommets en deux parties, l'une  $C_j'$  formée de sommets atteints par des chemins pairs à partir de  $x_0$ ,  $x_0$  en fait partie, et l'autre  $C_j''$  formée des sommets atteints à partir de  $x_0$  par des chemins impairs et nous montrons que cette composante est bipartie dans le digraphe  $D$  entier (après avoir remis les arcs symétriques).

$C_j'$  est un stable car deux sommets de  $C_j'$  ne peuvent être reliés, autrement on aura un circuit impair admettant au plus un arc symétrique ce qui contredit les hypothèses du théorème, de plus  $C_j'$  est un absorbant à cause de la forte connexité du graphe  $D$ , de même pour  $C_j''$ . Cette décomposition est donc possible,  $C_j'$  et  $C_j''$  sont des noyaux. Considérons  $N_j$  un noyau de  $C_j$ .

b/ Entre un sommet de  $N_{j1}$  et un sommet de  $N_{j2}$  il n'y a pas d'arcs car  $C_{j1}$  et  $C_{j2}$  sont des composantes terminales. Entre un sommet de  $N_j$  et un sommet de  $N$  il n'y a pas d'arcs car  $C_j$  est terminale. L'absorption de tous les sommets de

$D - N \cup \{\cup(N_j / j=1, \dots, k)\}$  est vérifiée à cause de la forte connexité du digraphe  $D$ .

Alors  $N \cup \{\cup(N_j / j=1, \dots, k)\}$  est un noyau du graphe  $D$ .

c/Travaux élaborés par H. Galeana Sanchez et V. Neuman Lara et conjecture de P. Duchet :

**Théorème 5 :** ([20])

Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau parfait.

**Méthode constructive** ([5])

Cette méthode est inspirée des travaux de construction de noyau, élaborée par P. Duchet, H. Jacob et H. Meyniel et mise en oeuvre par M. Blidia, elle a permis de montrer beaucoup de théorèmes. Elle consiste à construire un noyau dans un digraphe  $D$  vérifiant certaines conditions.

A partir du noyau  $N'$  du digraphe  $D-x_0$ , où  $x_0$  est un sommet quelconque de  $D$ , on détermine un noyau  $N$  du digraphe  $D$ .

On construit ainsi les sous graphes suivants:

$$B_0 = \Gamma^+(x_0) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0))]$$

$$N_0 = \Gamma^+(B_0) \cap N'$$

$$B_1 = \Gamma^+(N_0) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0) \cup \Gamma^-(N_0) \cup B_0)]$$

$$N_1 = \Gamma^+(B_0) \cap (N - N_0)$$

...

$$B_k = \Gamma^+(N_{k-1}) \cap [V - (x_0 \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (\Gamma^-(N_i) \cup B_i), i=0, 1, \dots, k-1\})]$$

$$N_k = \Gamma^+(B_k) \cap [N - (\cup N_i, i=0, 1, \dots, k-1)]$$

$k$ , est le plus petit indice tel que  $B_{k+1} = \emptyset$ . (voir fig. 3)

Nous utilisons cette construction pour montrer le théorème 5:

Nous montrons que:

$N = \{x_0\} \cup \{\cup N_i, i=0, 1, \dots, k-1\} \cup N''$  est le noyau de  $D$ , où  $N''$  est le noyau de  $D[V - (\{x_0\} \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (N_i \cup \Gamma^-(N_i); i=0, 1, \dots, k)\})]$ .

Il est à remarquer que:

1°/  $x_0$  n'a pas de successeur dans  $N'$ ; sinon  $N'$  serait le noyau de  $D$ .

2°/  $B_0$  n'est pas vide, sinon on cherche le noyau  $N''$  dans  $D[V - \{x_0 \cup \Gamma^-(x_0)\}]$  et  $N = N'' \cup \{x_0\}$  serait le noyau de  $D$ .

3°/  $N$  est un absorbant par construction, en effet tout sommet est absorbé soit par  $x_0$ , soit par  $(\cup N_i), i=0, \dots, k$ , sinon par  $N''$ .

4°/ Par définition, les  $N_i$  et  $N''$  sont des stables.

5°/  $x_0$  ne peut être relié à  $N''$ , puisque les seuls sommets adjacents à  $x_0$  sont ceux de  $\Gamma^-(x_0)$  ou alors ceux de  $B_0$ . Ces derniers ne sont pas inclus dans

$D[V - (\{x_0\} \cup \Gamma^-(x_0) \cup \{\cup (N_i \cup \Gamma^-(N_i); i=0, 1, \dots, k)\})]$ .

6°/Aucun sommet de  $N_i$  n'est relié à un sommet de  $N'$ .

Pour la démonstration du théorème 5, il reste à montrer que  $x_0$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$   $i=0,1,\dots,k$ .

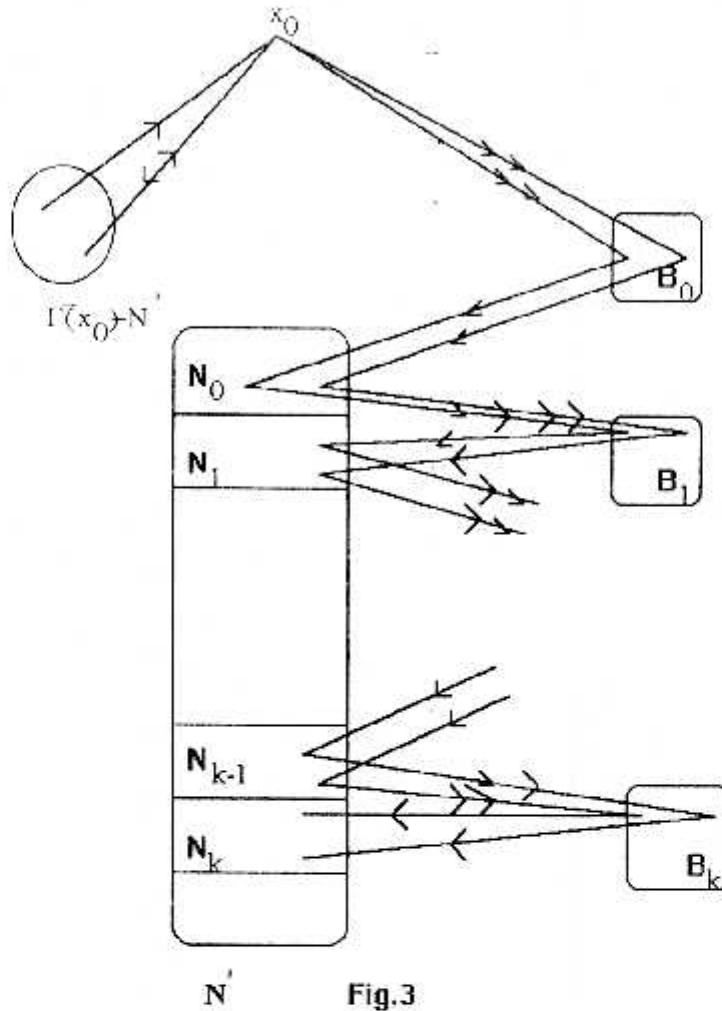


Fig.3

### Preuve du théorème 5:

En effet  $x_0$  n'est relié à aucun sommet de  $N_i$  ;  $i=0,1,\dots,k$  ; pour cela nous considérons les hypothèses imposées par G. Sanchez pour démontrer le résultat. Nous raisonnons par induction sur les sommets de  $N_i$ .

Soit  $x'_0$  un sommet de  $N_0$ ,  $x'_0$  ne peut être relié à  $x_0$  sinon nous créons un circuit de longueur trois avec au plus un arc symétrique, donc sans qu'il y est deux pôles consécutifs. Supposons que  $x_0$  n'est relié à aucun des sommets des  $N_i$ ,  $i=0,\dots,k-1$  et montrons qu'il ne peut être relié aux sommets de  $N_k$ .

Supposons au contraire qu'il existe un sommet  $x'_k$  de  $N_k$  tel que  $x'_k$  soit relié à  $x_0$ , d'après la construction, il existe un chemin de  $x_0$  à  $x'_k$  empruntant alternativement les sommets de  $B_i$  et les sommets de  $N_i$ . Ainsi en rajoutant l'arc  $(x'_k, x_0)$  on obtient un circuit impair  $C=(x_0, b_0, x'_0, b_1, x'_1, \dots, x'_{k-1}, b_k, x'_k, x_0)$  avec  $x'_i$  dans  $N_i$ . Par définition des  $N_i$  et des  $B_i$ , dans  $C$  il ne peut y avoir d'arcs qui ont pour extrémités terminales  $\{x_0, x'_0, x'_1, \dots, x'_{k-1}, x'_k\}$  autres que ceux du circuit  $C$ . Dès lors, on ne

peut jamais avoir deux arcs de la formes  $(v_i, v_k)$  et  $(v_i, v_{k+1})$  où  $i \neq k-1$  et  $j \neq k$ .  
d'où la contradiction avec les hypothèses du théorème.

**Théorème 6 :** ([21] )

Soit  $D$  un digraphe tel que toute composante fortement connexe de  $Asym(D)$  (sous digraphe partiel de  $D$  dont les arcs sont tous non symétriques) est un digraphe biparti, si tout circuit impair  $\gamma$  de  $D$  satisfait l'une au moins des deux propriétés suivantes

a/ $\gamma$  possède deux arcs symétriques

b/ $\gamma$  possède trois cordes courtes;

alors  $D$  est noyau parfait.

**Lemme:**

Dans un digraphe imparfait critique  $D$ , le digraphe partiel  $Asym(D)$  est fortement connexe.

**Preuve :**

Supposons que  $Asym(D)$  n'est pas fortement connexe on peut le décomposer en au moins deux composantes fortement connexes dont chacune, après avoir remis les arcs symétriques, admet un noyau car le digraphe est imparfait critique. Maintenant en rajoutant les arcs symétriques entre les composantes fortement connexes, il est simple de trouver un noyau dans le digraphe  $D$ . En effet on prend une composante fortement connexe terminale, elle admet un noyau  $N'$  et on cherche un noyau dans  $D-(N' \cup I^{-1}(N'))$  qui existe car le digraphe est noyau imparfait critique.

**Preuve du théorème 6:**

Supposons au contraire que  $D$  n'est pas noyau parfait, alors il existera  $H$  sous digraphe induit de  $D$  qui est noyau imparfait critique, or tout digraphe noyau imparfait critique est tel que  $Asym(D)$  est fortement connexe, et donc par hypothèse  $Asym(H)$  est un digraphe biparti. Notons par  $V_1$  et  $V_2$  une partition de  $Asym(H)$ , les sommets de  $Asym(H)$  sont ceux de  $H$ .

1°/Montrons que  $V_i$  est stable dans  $V(H)$ .

Supposons le contraire, alors il existe deux sommets  $x$  et  $y$  tels que l'arc  $(x, y)$  existe, soit  $T=(x=x_0, x_1, \dots, y=x_{2n})$  un chemin pair reliant  $x$  et  $y$  dans  $Asym(H)$ ,

$\gamma=T \cup (y, x)$  est circuit impair avec un seul arc symétrique, comme tout triangle possède deux arcs symétriques et que tout arc possédant ses deux extrémités dans  $V_i$  ( $i=1,2$ ) est symétrique, les seules cordes courtes possibles sont :

$(x_0, x_{2n-1})$  et  $(x_1, x_{2n})$ , contradiction avec le fait que tout circuit impair possède trois cordes courtes.

2°/Montrons que  $V_i$  est absorbant dans  $V(H)$ .

Comme  $\text{Asym}(H)$  est fortement connexe, tout sommet de  $V_i$  est absorbé par un sommet de  $V_j$   $i \neq j$ .

Alors le sous digraphe  $H$  admet un noyau ce qui contredit qu'il est noyau imparfait critique.

Les travaux qu'on présente ont été motivés par la conjecture posée par P. Duchet.

**Conjecture** ([16]) : Si tout circuit impair d'un digraphe  $D$  possède deux cordes courtes, alors  $D$  est noyau parfait.

**Définition de la classe des arcs  $\gamma$ -normal:**

Soit  $\gamma=(z_1, z_2, \dots, z_m, z_1)$  un circuit de  $D$ , quand les sommets  $x_1, x_2, \dots, x_k$  de  $\gamma$ , pour  $k \geq 3$  sont dans le bon ordre relativement au circuit  $\gamma$ , on écrit  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ .

Les arcs  $\gamma$ -normaux sont définis récursivement comme suit:

1°/Les arcs de  $\gamma$  sont les arcs  $\gamma$ -normaux de  $D$ .

2°/Si  $a < b < c$  avec  $(a, b)$  et  $(b, c)$  des arcs  $\gamma$ -normaux de  $D$  et  $(a, c)$  est un arc de  $D$  alors  $(a, c)$  est aussi un arc  $\gamma$ -normal de  $D$ .

La longueur d'un arc  $f^-(u, v)$  dans un circuit  $\gamma$ , est la longueur du chemin induit du circuit qui part de l'extrémité initiale de l'arc vers son extrémité terminale,

$L(f) = L(u, \gamma, v)$ .

**Théorème 7 :** ([16])

Soit  $D$  un digraphe tel que tout circuit de longueur trois est symétrique, si tout circuit impair possède deux cordes courtes alors tout circuit impair possède deux pôles consécutifs et donc  $D$  est noyau parfait.

**Idée sur la preuve :** La démonstration se fait par l'absurde.

Soit  $D=(X, U)$  un contre exemple, supposons que tout circuit impair de  $D$  possède au moins deux cordes courtes, tout circuit de longueur trois est symétrique et que la propriété: tout circuit impair possède deux pôles consécutifs, n'est pas vérifiée, c-à-d il existe un circuit impair  $\gamma$  sans deux pôles consécutifs. Il suffit de montrer :

1) Soit  $\Pi=(y_1, \dots, y_D, y_1)$  un circuit  $\gamma$ -normal et le plus court en longueur, alors pour tout arc  $y_i y_{i+1}$  de  $\Pi$  qui est une corde de  $\gamma$ , le sommet  $y_{i+2}$  est un pôle de  $\gamma$ .

2) Les sommets du circuit  $\gamma$ -normal le plus court sont des pôles de  $\gamma$ .

3) Il existe un plus court circuit  $\gamma$ -normal contenant au moins un arc de  $\gamma$ .

2) et 3) impliquent que  $\gamma$  a deux pôles consécutifs, ce qui donne la contradiction.

**Théorème 8 :** ([21])

Soit  $D$  un digraphe tel que tout triangle est symétrique, et  $\gamma$  un circuit de  $D$  tel que sa longueur est supérieur ou égale à trois.

S'il existe un arc  $\gamma$ -normal symétrique, noté  $f^-(u, v)$  tel que  $f \notin \text{Asym}(\gamma)$  alors  $\gamma$  possède deux arcs symétriques qui se suivent.

**Preuve:**

Raisonnons par induction sur la longueur  $L(\gamma)$  de  $\gamma$ . Si  $f \notin \text{Asym}(\gamma)$  alors  $L(f) \geq 2$ .

Si  $L(f)=2$ ; forcément les arcs  $(u, z)$  et  $(z, v)$  sont deux arcs symétriques qui se suivent (puisque tout triangle dans  $D$  est symétrique). Supposons que pour tout arc  $\gamma$ -normal symétrique  $f=(u', v') \notin$  aux arcs de  $\gamma$  tel que  $L(f)<n$ ,  $\gamma$  possède deux arcs symétriques consécutifs. Soit alors  $f=(u, v) \notin$  arcs de  $\gamma$ , un arc  $\gamma$ -normal symétrique de  $D$  tel que  $L(f)=n>2$ . Comme  $(u, v)$  est un arc  $\gamma$ -normal n'étant pas dans  $\gamma$ , alors il existe  $z \in V(\gamma)$  avec  $u<z<v$  et  $(u, z)$  et  $(z, v)$  sont des arcs  $\gamma$ -normal de  $D$ . On obtient le triangle  $(u, z, v, u)$  avec  $(u, z)$  et  $(z, v)$  qui ne sont pas des arcs de  $\gamma$ . Supposons sans perdre de généralité que  $(u, z)$  n'est pas un arc de  $\gamma$ ,  $f=(u, z)$  est un arc  $\gamma$ -normal symétrique de  $D$  tel que  $L(f)<n$  et donc  $\gamma$  possède deux arcs symétriques qui se suivent.

**Théorème 9 :** ([21] )

Soit  $D$  un graphe tel que tout triangle est symétrique et tel que tout circuit impair contenu dans  $Asym(D)$  possède deux cordes courtes, si tout circuit impair  $\gamma$  satisfait l'une au moins des deux propriétés suivantes:

1-  $\gamma$  possède deux pôles consécutifs où alors

2-  $\gamma$  possède deux cordes courtes ,

alors tout circuit impair possède deux pôles consécutifs et donc  $D$  est noyau parfait.

**Preuve:**

Il suffit de raisonner par l'absurde; en effet si nous supposons qu'il existe dans  $D$  un circuit  $\gamma$  ne possédant pas deux pôles consécutifs, notons  $H$  le sous digraphe de  $D$  tel que les sommets de  $H$  sont ceux de  $\gamma$  et les arcs de  $H$  sont les arcs  $\gamma$ -normal de  $D$ , il suffit de montrer que:

1-  $H$  n'a pas de triangles, supposons au contraire que  $T(u_1, u_2, u_3, u_1)$  est un triangle de  $H$ ,  $T$  est symétrique et  $\gamma$  n'a pas de pôles consécutifs donc les arcs de  $T$  ne sont pas contenus dans les arcs de  $\gamma$ , donc l'un des arcs  $(u_i, u_{i+1})$  qui est symétrique n'est pas dans  $\gamma$ , les hypothèses du théorème 8 impliquent que  $\gamma$  possède deux arcs symétriques qui se suivent et donc  $\gamma$  possède deux pôles consécutifs, ce qui fournit une contradiction .

2- Tout circuit impair contenu dans  $H$  possède deux cordes courtes qui découle directement de la définition d'un circuit  $\gamma$ -normal, du choix de  $H$ , et des hypothèses du théorème .

D'après 1 et 2 et le théorème 7, tout circuit impair contenu dans  $H$  possède deux pôles consécutifs; ce qui contredit le choix de  $\gamma$ .

**Théorème 10 :**( [21] )

Soit  $D$  un digraphe tel que tout triangle est symétrique, si tout circuit  $\gamma$  impair de  $D$  satisfait au moins l'une des deux conditions suivantes:

1- $\gamma$  possède deux arcs symétriques consécutifs où alors

2- $\gamma$  possède deux cordes courtes,

alors tout circuit impair possède deux pôles consécutifs et donc  $D$  est noyau parfait.

**Preuve :** découle du théorème 9

**Théorème 11 :**( [21] )

Soit  $D$  un digraphe tel que tout triangle possède deux arcs symétriques et  $\gamma$  un circuit de  $D$ , s'il existe un arc  $\gamma$ -normal de  $D$ , qui soit symétrique, alors  $\gamma$  possède un arc symétrique.

**Preuve:**

Soit  $\gamma$ , un circuit de  $D$  tel qu'il existe un arc  $\gamma$ -normal de  $D$ , il suffit de montrer que,  $k = \min\{L(f) \text{ tel que } f \text{ est } \gamma\text{-normal-arc symétrique de } D\} = 1$ .

Supposons le contraire, soit  $f = (u, v)$  un arc  $\gamma$ -normal symétrique tel que  $L(f) = k > 1$ , dans ce cas  $f \notin \gamma$  et donc il existera  $z$  un sommet de  $\gamma$  tel que  $u < z < v$ ,  $(u, z)$  et  $(z, v)$  sont des arcs  $\gamma$ -normaux de  $D$ ,  $(u, z, v, u)$  est un triangle, donc possède deux arcs symétriques et donc la longueur serait plus petite que celle de  $f$ , ce qui contredit le choix de  $f$ .

**Théorème 12 :**( [21] )

Soit  $D$  un digraphe tel que tout circuit impair avec au moins un arc symétrique et possédant deux pôles consécutifs, si tout circuit impair contenu dans  $\text{Asym}(D)$  possède deux cordes courtes, alors tout circuit impair possède deux pôles consécutifs et donc  $D$  est noyau parfait.

**Preuve:**

Les hypothèses de ce théorème impliquent que tout triangle possède deux arcs symétriques, supposons qu'il existe un circuit impair  $\gamma$  ne possédant pas deux pôles consécutifs, alors  $D$  n'a pas d'arc  $\gamma$ -normal symétrique dans  $D$ , d'après les hypothèses et le théorème 11.

Reprenons le sous graphe  $H$  défini dans le théorème 9, comme il n'y a pas d'arcs  $\gamma$ -normaux dans  $D$ ,  $H$  n'a pas de triangles et  $H \subseteq \text{Asym}(D)$ , tout circuit impair contenu dans  $H$  possède deux cordes courtes dans  $H$  et le théorème 7 implique que  $\gamma$  possède deux pôles consécutifs, contradiction.



#### **d/ Graphes orientés et "poison game" :**

Un noyau du digraphe  $D^{-1}$  (les arcs sont inversés) est souvent dit solution de  $D$  comme c'était introduit par Von Neumann et Morgenstern dans la notion de la théorie des jeux.

Un semi-noyau de  $D$  est un sous ensemble stable  $L$  de  $D$  tel que tout élément de  $\Gamma^+(L)$  possède un successeur dans  $L$ .

Le théorème de H. Galeana Sanchez et V. Neuman Lara " un digraphe est noyau parfait si et seulement si tout sous digraphe admet un semi noyau " a été redémontré par P. Duchet et H. Meyniel en utilisant le " jeu de poison ", nous donnons pour cela les éléments essentiels qui nous permettent d'établir la démonstration.

Les graphes considérés sont tels que tout sommet n'a qu'un nombre fini de successeurs (localement fini) et aucun sommet n'est l'origine d'un chemin élémentaire infini (progressivement fini).

#### **Définition:**

Nous définissons "le jeu de poison" comme un jeu à deux joueurs  $A$  et  $B$  jouant alternativement où chaque joueur choisit un sommet qui est successeur d'un sommet précédemment choisi par son adversaire.

Le joueur  $A$  commence, en sélectionnant un sommet de son choix, le joueur  $B$  "empoisonne" les sommets sur lesquels il joue (le joueur  $B$  peut repasser par les sommets "empoisonnés", de même que le joueur  $A$  peut repasser par les sommets non "empoisonnés").

P. Duchet et H. Meyniel montrent le théorème 13, dans un digraphe localement et progressivement fini,  $A$  n'est pas empoisonné si et seulement si le digraphe a un semi-noyau.

Le joueur  $A$  survit si le joueur  $B$  est incapable de jouer à une certaine étape du jeu. Le théorème est faux si les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées.

#### **Théorème 13 :**( [18])

Soit  $D$  un digraphe localement et progressivement fini, le joueur  $A$  peut survivre au "jeu de poison" dans  $D$  si et seulement si  $D$  possède un semi-noyau.

#### **Preuve:**

$\Leftarrow$ ) Si  $D$  possède un semi-noyau alors le joueur  $A$  commence le jeu en choisissant un sommet du semi-noyau, aucun sommet du semi-noyau ne peut être empoisonné, donc le joueur  $A$  peut jouer indéfiniment dans le semi-noyau et donc il survivra.

$\Rightarrow$ ) soit  $\Sigma$  une stratégie de survie du joueur  $A$ , nous supposons que

$\Gamma^+(x)$  est non vide pour tout sommet  $x$  dans  $D$  (sinon  $x$  serait le semi-noyau dans  $D$ ).

Supposons que le joueur B applique la stratégie S suivante, à chaque tour, B "empoisonne" les successeurs de tout sommet  $v$  joué par A. Si le sommet  $v$  a été visité  $k$  fois par le joueur A dans les mouvements précédents, alors le joueur B en se référant à l'ordre linéaire sur  $\Gamma^+(v)$ , "empoisonne" le  $k'$ ème successeur de  $v$ , où  $k' \equiv k \pmod{|\Gamma^+(v)|}$  et  $1 \leq k' \leq |\Gamma^+(v)|$ . Il est évident que le joueur A gagne si et seulement si il y a des sommets sur lesquels il peut repasser plusieurs fois (à remarquer qu'un chemin simple dans un digraphe progressivement fini contient des sommets qui se répètent plusieurs fois). Soit  $\tau$  l'ensemble des sommets sur lesquels A peut jouer plusieurs fois durant le jeu défini par les stratégies  $\Sigma$  et S, on montre que  $\tau$  est un semi-noyau de D.

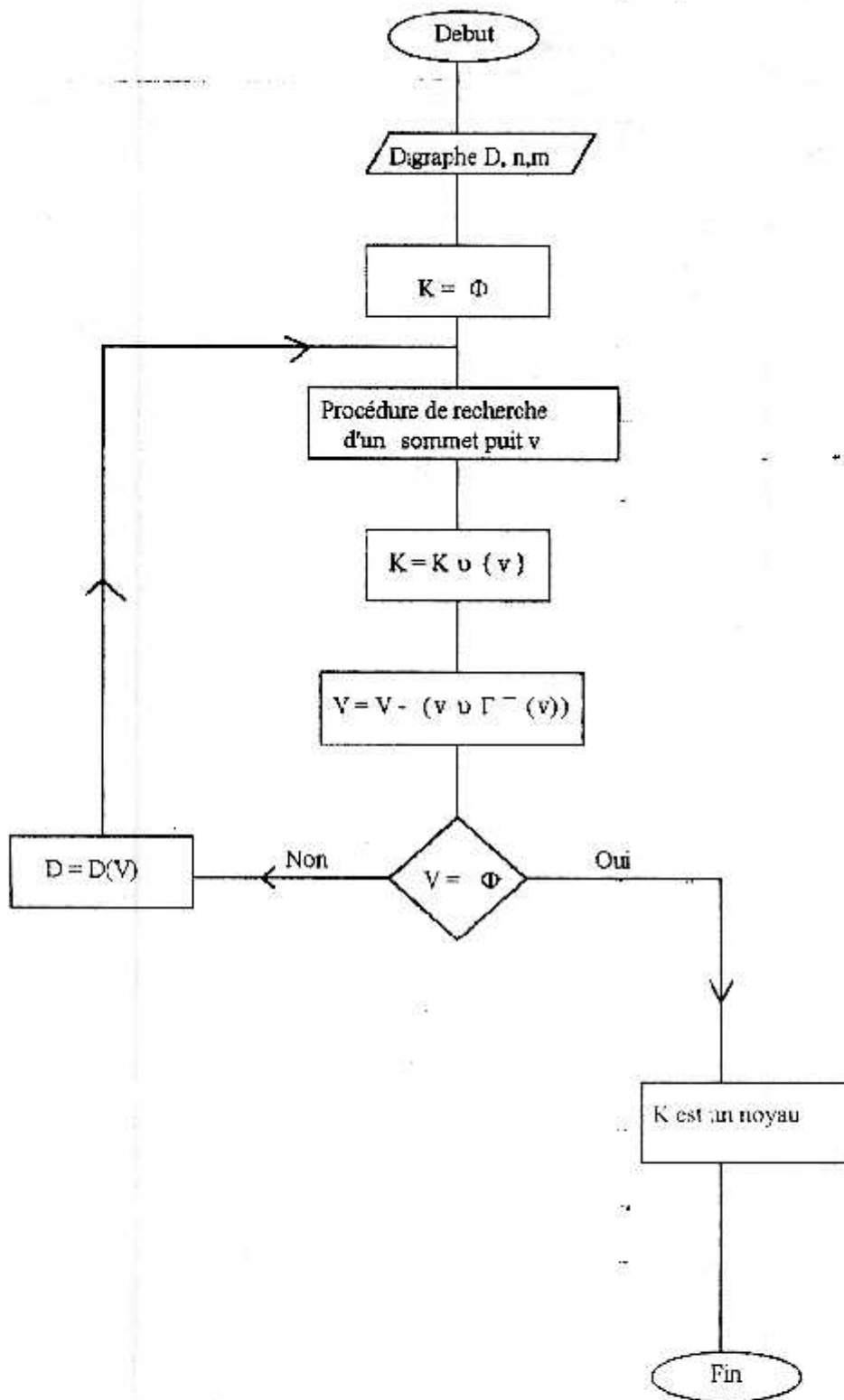
En effet  $\tau$  est stable puisque tout sommet successeur d'un sommet  $x$  de  $\tau$  est "empoisonné" par le joueur B à une certaine étape; d'autre part, si un sommet  $x$  est dans  $\tau$ , il existe forcément un sommet  $y$  de  $\Gamma^+(\Gamma^+(\tau))$ , qui est choisi plusieurs fois par le joueur A. Donc  $\tau$  est un semi noyau de D.

#### **A/Etude algorithmique.**

En général, le problème de la recherche d'un noyau dans un digraphe quelconque est un problème NP-Complet. On donne dans ce qui suit des algorithmes polynomiaux de recherche de noyau dans deux cas de digraphes.

a/Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les graphes orientés sans circuit:

Organigramme:



Algorithme :

Donnée:  $D=(V,A)$  graphe orienté sans circuit;  $|A|=m$  et  $|V|=n$ .

Résultat:  $K$  noyau de  $D$ .

Début

$K:=\emptyset$

Répéter

-soit  $x_1$ , un sommet puits de  $D$

- $K:=x_1 \cup K$

- $V:=V-(\{x_1\} \cup \Gamma^-(\{x_1\}))$

- $D:=D[V]$

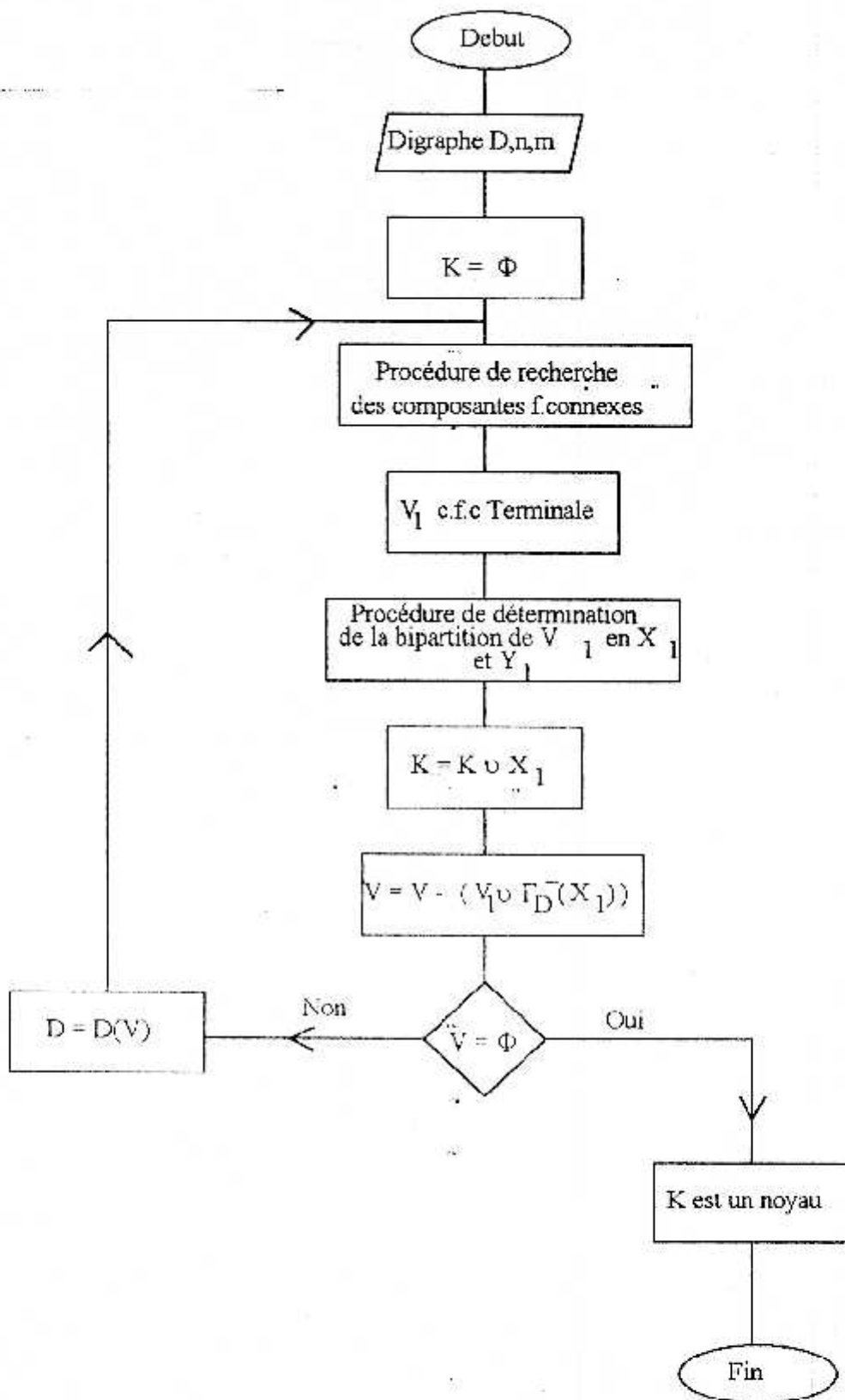
jusqu'à  $V=\emptyset$

fin.

La boucle répéter-jusqu'à est effectuée au plus  $n$  fois et la procédure de recherche d'un puits est de complexité au plus  $O(n)$ , donc le temps d'exécution est en  $O(n^2)$ .

b/Algorithme polynomial de recherche d'un noyau dans les graphes orientés sans circuit impair:

Organigramme :



Algorithme :

Donnée:  $D=(V,A)$  graphe orienté sans circuit impair ;  $|A|=m$  et  $|V|=n$ .

Résultat:  $K$  noyau de  $D$ .

Début

$K := \emptyset$

Répéter

-déterminer les composantes fortement connexes de  $D$

-soit  $V_1$  une composante fortement connexe terminale

-déterminer la bipartition  $V_1 = X_1 \cup Y_1$

$K := X_1 \cup K$

$V := V - (V_1 \cup \Gamma^-(X_1))$

$D := D[V]$

jusqu'à  $V = \emptyset$

fin.

La boucle répéter-jusqu'à est effectuée au plus  $n$  fois, et la procédure la plus coûteuse est la détermination des composantes fortement connexes qui est de complexité  $O(m+n)$ , donc le temps d'exécution est en  $O(m.n+n^2)$ .

**N.B :** Voir programmes informatiques traduisant ces deux cas de recherche de noyau en annexes (I) et (II), (écrits en langage Pascal).

### CHAPITRE III NOYAUX DANS LES GRAPHES PARFAITS MUNIS D'UNE ORIENTATION

Nous allons citer dans ce chapitre quelques graphes parfaits classiques et certaines de leurs propriétés, ainsi que leurs complémentaires.

#### A/ Certains graphes parfaits :

##### a/ Graphes triangulés :

La classe des graphes triangulés a été la première à être connue parmi les graphes parfaits, en effet en 1958, Hajnal et Suranyi dans [22], montrent que les graphes triangulés sont  $\alpha$ -parfaits, et à partir de là les chercheurs ont pensé à montrer l'équivalence entre les graphes  $\alpha$ -parfaits et les graphes  $\gamma$ -parfaits.

##### **Définition :**

Un graphe est dit triangulé si tout cycle de longueur strictement plus grande que trois possède une corde.

Les graphes d'intervalles (graphes tels que les sommets représentent des intervalles et tels que deux sommets sont adjacents si et seulement si les intervalles correspondants s'intersectent), forment une classe spéciale de graphes triangulés.

Un graphe triangulé est caractérisé par l'existence d'un sommet simplicial (sommet dont le voisinage induit une clique, qu'on appelle clique simpliciale), de plus d'après Dirac dans [22] en 1961, si  $G$  n'est pas une clique, alors  $G$  possède deux sommets simpliciaux non adjacents.

Un graphe est dit cotriangulé si son complémentaire est triangulé.

La perfection des graphes triangulés est équivalente à celle des graphes cotriangulés, ceci résulte du fait que, dans un graphe triangulé un ensemble d'articulation minimal est une clique [Dirac, 1960], en effet; si  $G$  possède un ensemble d'articulation  $A$  qui est une clique, et si chacune des pièces relatives à  $A$  est  $\gamma$ -parfaite, alors  $G$  est  $\gamma$ -parfait.

**Théorème :** Un graphe triangulé est  $\gamma$ -parfait.

Par hypothèse d'induction, un graphe triangulé d'ordre 1,2,3 est  $\gamma$ -parfait, si nous supposons que la propriété est vraie pour un graphe d'ordre inférieur à  $n$ , donc toute pièce est  $\gamma$ -parfaite et nous montrons que la propriété reste vraie à l'ordre  $n$ .

En effet; soit  $\omega(G)=k$ , il existe alors une  $k$ -clique dans au moins une pièce  $G'$ , relativement à la clique  $A$ , alors  $\omega(G')=\gamma(G')=k$ , toute autre pièce  $G''$  vérifie  $\omega(G'')=\gamma(G'')\leq k$ , on peut alors colorier chaque pièce avec  $k$  couleurs et donner le même nom aux  $|A|$  couleurs utilisées pour la clique, ce qui donne une coloration en  $k$  couleurs pour le graphe  $G$  tout entier, et donc  $G$  est parfait.

## **b/ Graphes i-triangulés :**

### **Théorème 1 :** ([25] )

Si  $D$  est une orientation du graphe  $G$  et  $A$  une clique d'articulation de  $D$  telle que  $D \setminus A$  possède  $p$  composantes connexes  $B_1, B_2, \dots, B_p$  ( $p \geq 2$ ), alors  $D$  est noyau parfait si et seulement si toutes les pièces d'articulation  $D_{B_1 \cup A}, \dots, D_{B_p \cup A}$  sont noyau-parfaites.

Nous définissons le joint  $G$  de  $n$  graphes  $G_1, G_2, \dots, G_n$  de la manière suivante : l'ensemble des sommets de  $G$  est la réunion disjointe des ensembles des sommets de tous les  $G_i$  et deux sommets de  $G$  sont adjacents s'ils se trouvent dans deux  $G_i$  différents où alors, ils sont adjacents dans un même  $G_i$ .

Une étude particulière a été faite sur l'opération ainsi définie par P. Duchet et F. Maffray à savoir:

### **Théorème 2 :** ([7] )

$H=(V,E)$  est un graphe solvable, et  $S$  un ensemble stable tel que l'intersection de  $S$  et de  $V$  est vide, soit  $G$  le joint de  $H$  et de  $S$ ,  $G$  est alors solvable.

D'où découle le corollaire suivant :

### **Corollaire :**

$H$  est un graphe solvable et  $K$  un graphe complet alors le joint de  $H$  et de  $K$  est solvable.

### **Définition :**

Un graphe est dit i-triangulé si tout cycle impair de longueur au moins cinq, possède deux cordes non croisées.

La classe des graphes i-triangulés généralise celle des graphes triangulés, et celle des graphes bipartis, elle est introduite par T. Gallai qui établit le résultat suivant:

### **Théorème 3 :**

$G$  est un graphe i-triangulé connexe, alors l'une des trois conditions suivantes est satisfaite.

- 1-  $G$  possède un ensemble d'articulation qui induit un sous graphe complet.
- 2-  $G$  est le joint d'un graphe complet et d'un graphe biparti.
- 3-  $G$  est un multi-parti complet (i.e :  $G$  est le joint de plusieurs stables)

### **Théorème 4 :** ([25])

Soit  $G$  un graphe i-triangulé muni de l'orientation de Meyniel (tel que tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques), alors  $G$  est noyau parfait.

Le problème de la solvabilité implique celui de la  $M$ -solvabilité, voir la démonstration du théorème 5 suivant qui généralise celui du théorème 4 de H.Jacob.



**Théorème 5 :** ([29] )

Soit  $G$  un graphe  $i$ -triangulé, alors  $G$  est solvable.

**Preuve :** Nous démontrons par induction sur le nombre de sommets  $n$  de  $G$ , que toute orientation à puits  $D$  de  $G$  admet un noyau.

La propriété étant vraie pour  $n=1,2$ , nous supposons qu'elle reste vraie pour  $n \geq 3$ .

Si  $G$  n'est pas un graphe connexe, le noyau de  $D$  sera la réunion des noyaux des différentes composantes connexes.

Si  $G$  est connexe, nous appliquerons le théorème 3 de T. Gallai, en considérant les trois cas cités dans son théorème.

$G$  possède un ensemble d'articulation qui induit un ensemble complet, les pièces correspondantes sont noyau parfaites, par hypothèse de récurrence et donc d'après le corollaire du théorème 2,  $D$  est noyau parfait.

Si  $G$  est le joint d'un graphe biparti et d'une clique, comme toute orientation d'un biparti est sans circuit impair, d'après le théorème de Richardson, elle est noyau parfaite.

Ce graphe biparti est un graphe solvable et le joint de ce graphe avec la clique donne un graphe noyau parfait (en appliquant toujours le corollaire du théorème 2).

$G$  est le joint de plusieurs stables  $S_1, S_2, \dots, S_D$ , et  $S_1$  est solvable, et d'après le théorème 2, le joint de  $S_1$  et de  $S_2$  est solvable. On procédera de la même manière pour tous les  $S_i$  tel que  $i \geq 3$ ; d'où la solvabilité du graphe  $G$ .

Nous faisons remarquer que pour montrer la perfection des graphes  $i$ -triangulés on considérera tous les cas du théorème 3 de T. Gallai.

**c/ Graphes de parité :****Définition :**

Un graphe  $G$  est dit de parité si pour toute paire de sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , toutes les chaînes minimales joignant  $x$  et  $y$  ont la même parité. H. Sachs [17]; a montré que les graphes de parité sont parfaits.

Une caractérisation des graphes de parité a été donnée par S. Olaru et H. Sachs à savoir:

**Théorème 1 :** ([33])

un graphe est dit de parité si et seulement si tout cycle élémentaire impair a deux cordes croisées.

H. Sachs a démontré aussi que les graphes de parité sont parfaits.

**Théorème 2 :** ([5,15] )

Toute orientation de Meyniel d'un graphe de parité, est noyau parfaite (Ce résultat sera par la suite généralisé pour les graphes de Meyniel).

**Remarque :**

Les graphes sans  $P_4$  (chaîne de sommets de longueur quatre) sont des graphes de parité, et donc sont  $M$ -solvable.

**d/ Graphes de Meyniel :**

**Définition :**

Si tout cycle impair d'un graphe  $G$  possède deux cordes alors il est dit de Meyniel.

H. Meyniel a démontré que de tels graphes sont parfaits, dans le but de généraliser la classe des graphes  $i$ -triangulés, ceux de parité et en particulier les graphes bipartis, et enfin les graphes sans  $P_4$ .

De plus G. Ravindra [34] a montré que tout graphe de Meyniel est fortement parfait ;

M. Burlet et J. Funlupt [10] ont établi un algorithme qui reconnaît en temps polynomial les graphes de Meyniel.

**Théorème 1 :** ([5,28])

Un graphe est dit de Meyniel si et seulement si toute orientation  $D$  de  $G$ , tel que  $D$  ne contienne pas de circuit de longueur trois, vérifie la condition suivante :

tout circuit impair de  $D$  a deux pôles consécutifs.

D'où le résultat suivant :

**Corollaire:**

Si  $D$  est une orientation sans circuit de longueur trois d'un graphe de Meyniel alors  $D$  est noyau parfait.

La preuve du théorème utilise le lemme suivant :

**Lemme :**

Dans un graphe de Meyniel  $G$  tout cycle impair  $C=(o,1,\dots,2p, o)$  ( $p \geq 2$ ) contient l'une des deux configurations suivantes:

1/  $(i, j)$  et  $(i+1, j+1)$  telles que  $i+1$  et  $j$  soient reliés (soit par une corde, soit par une arête du cycle si  $j=i+2$ ; ce dernier donne lieu à deux cordes courtes croisées).

2/ il existe deux cordes courtes  $(i, i+2)$  et  $(j, j-2)$  non croisées.

**Corollaire :**

Soit  $D$  un graphe de Meyniel orienté tel que tout circuit de longueur trois possède trois arcs symétriques alors  $D$  est noyau parfait.

**Théorème 2** ([6]):

Soit  $D$  un graphe de Meyniel orienté tel que tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques, alors  $D$  est noyau parfait.

**Lemme :**

Dans un graphe de Meyniel tout cycle impair  $C=(0,1,2,\dots,2p-1, 2p, 0)$  ( $p \geq 2$ ) possède au moins l'une des deux propriétés suivantes:

1- Il existe une corde  $(i, j)$  telle que  $i$  et  $j$  aient la même parité:

2- La corde  $(0, 2p-1)$  existe.

**Remarque :**

Il serait donc intéressant de montrer la conjecture 1 pour les graphes de Meyniel à savoir:

Soit  $D$  une orientation admissible d'un graphe de Meyniel, alors  $D$  est noyau parfait.

**e/ Graphes de comparabilité :**

**Définitions :**

Un graphe  $G$  est de comparabilité s'il existe une orientation transitive et antisymétrique  $D$  de  $G$  (celle-ci définit une relation d'ordre sur les sommets de  $G$ ).

Le complémentaire d'un graphe de comparabilité est dit de cocomparabilité.

C. Berge a démontré qu'un graphe de comparabilité est parfait.

Un graphe est dit fortement parfait si tout sous graphe induit  $G'$  de  $G$  contient un stable rencontrant toutes les cliques maximales de  $G'$ .

La notion de graphes fortement parfaits fut introduite par C. Berge et P. Duchet qui énoncent le résultat suivant:

**Théorème 1 :** ([2] )

Tout graphe fortement parfait est parfait.

**Remarque :**

Les graphes triangulés, cotriangulés et de comparabilité sont aussi fortement parfaits, mais pas les graphes de cocomparabilité, il suffit de considérer les complémentaires des cycles pairs d'ordre au moins six.

**Théorème 2 :** ([7] )

Le complémentaire d'un graphe fortement parfait est solvable.

**Preuve :**

Soit  $D$  une orientation à puits de  $G$  et raisonnons par induction sur le nombre de sommets de  $G$ . Le théorème est vraie pour les graphes à un ou deux sommets. Le complémentaire de  $G$  noté  $G'$  étant fortement parfait,  $G$  admet une clique qui rencontre tous les stables maximaux de  $G$ . Cette clique notée  $A$  possédera une source  $x$  dans l'orientation à puits  $D$  de  $G$ .

Comme  $D \setminus \{x\}$  possède un noyau  $N$ , par hypothèse d'induction et que ce noyau est stable maximal dans  $D \setminus \{x\}$ .

Si  $N$  est stable maximal dans  $D$  donc il rencontre la clique  $A$  en un sommet et alors la source  $x$  serait absorbée par le noyau, donc  $N$  est noyau de  $D$  tout entier.

Sinon  $N$  n'est stable maximal dans  $D$  on peut alors le compléter par  $x$  sommet source, et donc  $N \cup \{x\}$  est stable maximal et il est noyau dans  $D$ .

**Remarque :**

Les graphes triangulés, cotriangulés et de cocomparabilité sont solvables.

Le théorème 2 ne peut impliquer la solvabilité des graphes de comparabilité car leurs complémentaires ne sont pas tous parfaits, comme on l'a déjà fait remarquer, par contre on a le résultat suivant.

**Théorème 3 :**( [28])

Soit  $G$  un graphe de comparabilité et  $D$  une orientation de  $G$  telle que tout circuit de longueur trois de  $D$  est symétrique, alors  $D$  est noyau parfait.

Nous utiliserons pour cela le résultat suivant :

**Lemme :**( [36] )

Soit  $D$  un graphe orienté dont les arcs sont colorés en deux couleurs et tel que  $D$  ne contient pas de chemin infini monochromatique, alors il existe un ensemble stable  $S$  de sommets de  $D$  tel que pour tout sommet  $x$  en dehors de  $S$ , il existe un chemin monochromatique reliant  $x$  à un sommet de  $S$  et deux sommets quelconques de  $S$  ne sont pas reliés par un chemin monochromatique.

**Preuve du théorème 3:**

Nous rappelons auparavant que, l'énoncé du théorème 2 est équivalent à l'énoncé suivant : Toute orientation  $D$  de  $G$  (graphe de comparabilité) sans circuit de longueur trois et anti-symétrique est noyau parfaite .

L'hypothèse nous donne une orientation transitive et anti-symétrique du graphe  $G$ , noté par  $T$ , son inverse noté  $T^{-1}$  est aussi une orientation transitive et anti-symétrique de  $G$ . Puis on colore en rouge les arcs de  $U \cap T$  et en bleu ceux de  $U \cap T^{-1}$  une telle coloration est conforme avec les hypothèses du théorème, de plus le critère de transitivité donne que l'ensemble des sommets  $S$  défini dans le lemme, est le noyau du graphe  $G$ .

**f/Graphes parfaitement ordonnables et parfaitement ordonnables généralisés:**

**Définitions :**

- Un graphe est dit parfaitement ordonnable généralisé (ou quasi-parfaitement ordonnable) s'il admet une orientation stricte qui est noyau parfaite et sans fourche (voir figure suivante)



- Un graphe est dit parfaitement ordonnable, si on peut l'orienter sans circuit et sans fourche.

**Remarque :**

Un graphe parfaitement ordonnable est parfaitement ordonnable généralisé; puisque d'après le théorème de V. Neumann et Morgenstern, toute orientation sans circuit est noyau parfaite.

V. Chvatal fût le premier à avoir introduit les graphes parfaitement ordonnables et il montre qu'ils sont parfait [11], résultat qui a été généralisé par P. Duchet et S. Olariu :

**Théorème 1 :** ([19]):

Tout graphe parfaitement ordonnable généralisé est fortement parfait.

Pour la preuve; il suffit de montrer que tout noyau d'une orientation noyau parfaite stricte et sans fourche d'un graphe parfaitement ordonnable généralisé rencontre toutes les cliques maximales.

Nous rappelons que C. Champetier a montré que les graphes de comparabilité sont noyau M-solvable, ce résultat a été généralisé par M. Blidia et K. Engel montrant la conjecture 2 de Meyniel pour les graphes parfaitement ordonnables qui contiennent les graphes de comparabilité.

**Théorème 2 :** ([8])

Un graphe parfaitement ordonnable est M-solvable.

Idée sur la preuve :

Soit  $G=(X,E)$  un graphe parfaitement ordonnable et  $D=(X,U)$  une orientation M-admissible de G, il suffit de construire un digraphe  $\Delta=(M,\chi)$  dont les sommets forment des stables de D satisfaisant la propriété de prékernel, avec des arcs les reliant définis d'une certaine manière. Ils montrent que le digraphe ainsi construit est sans circuit donc contient au moins un sommet puits et que ce sommet est noyau dans le digraphe D.

**Problème :**

Les graphes parfaitement ordonnables généralisés sont-ils M-solvables?

**g/ Méthode de réorientation :**

On s'est demandé, durant notre étude sur les noyaux dans les graphes parfaits munis d'une orientation, s'il est possible d'appliquer les résultats existants sur les noyaux dans les graphes orientés définis dans le chapitre II d'une part et les résultats connus sur les graphes munis d'une orientation d'autre part pour arriver à la preuve de certains problèmes. L'idée de base vient du théorème de P. Duchet "un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques est noyau parfait", où il montre en utilisant la réorientation du digraphe qu'il peut-être obtenu à partir du théorème de Richardson. En effet il peut réorienter le digraphe de telle manière à obtenir un digraphe sans circuit impair.

**Définition :**

Une réorientation  $D'$  d'un digraphe  $D$  est une orientation induite de  $D$  dont certains arcs symétriques deviennent des arcs antisymétriques.

**Remarque :**

Il est clair qu'un noyau de  $D'$  est un noyau de  $D$ .

La méthode de réorientation a été introduite pour la première fois par P. Duchet [13]

**Théorème :** ( M. Blidia et Z. Zémir)

Un graphe  $i$ -triangulé  $G$  muni de l'orientation  $M$ -admissible  $D$  peut être réorienté tel qu'il soit sans circuit impair.

**Preuve :**

En effet, on montre que tout circuit impair possède deux arcs symétriques, et par le théorème de P. Duchet, il peut être réorienté sans circuit impair.

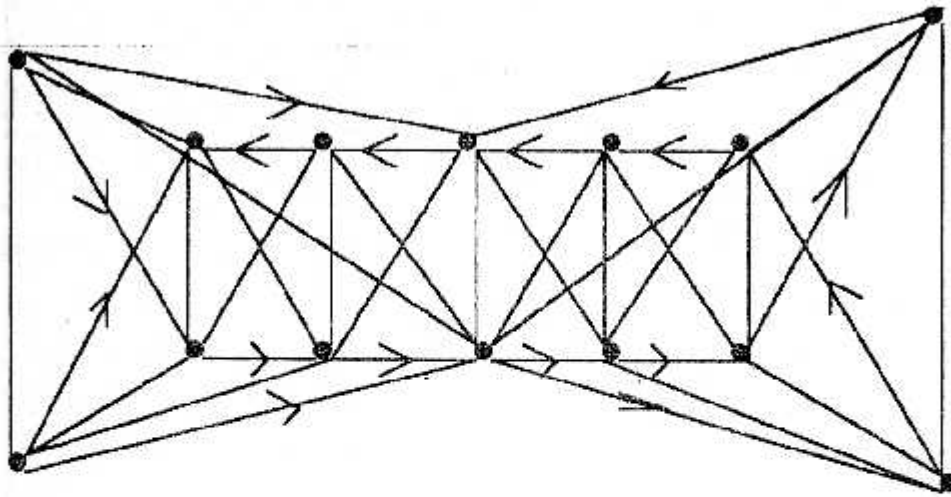
Il suffit donc de montrer que tout circuit impair dans un graphe  $i$ -triangulé  $G$  avec l'orientation  $M$ -admissible  $D$  possède deux arcs symétriques. Pour cela, on fait la démonstration par induction sur la longueur des circuits impairs.

C'est vraie pour les circuits de longueur trois vu que l'orientation est  $M$ -admissible (tout circuit de longueur trois "triangle" a deux arcs symétriques).

Supposons que la propriété est vraie, pour tout circuit impair de longueur inférieure à  $k$  et montrons que la propriété reste vraie pour les circuits impairs de longueur  $k$ . Soit donc  $C$  un circuit impair de longueur  $k$ , il lui correspond dans  $G$  un cycle impair qui admet deux cordes non croisées, et l'orientation de ces cordes dans  $D$  induirait des circuits impairs de longueur inférieure à  $k$  et donc vérifient l'hypothèse d'induction, les différents cas possibles donnent la propriété énoncée, c-à-d, le circuit impair initial a deux arcs symétriques.

**Remarque :**

Les graphes de comparabilité munis de l'orientation  $M$ -admissible, ne peuvent être réorientés d'une manière antisymétrique et sans circuit de longueur trois ; le contre exemple suivant le prouve :

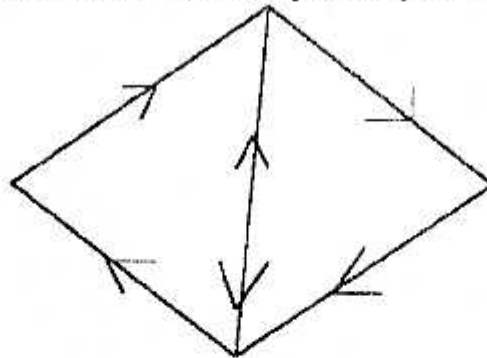


les arcs sans orientation sont symétriques

### Problèmes :

- Les graphes de parité et les graphes de Meyniel munis de l'orientation M-admissible peuvent-ils être réorientés d'une manière antisymétrique et sans triangle.
- Est-il possible de réorienter les digraphes tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes, de manière antisymétrique et tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes. (Une réponse positive à cette question fournirait une preuve à la conjecture de P. Duchet citée au chapitre II)

Pour l'orientation admissible, le contre exemple simple suivant le prouve :



### B/ Recherche algorithmique :

L'existence d'un noyau dans un graphe triangulé a été mise au point dans ce qui précède, nous donnons à présent une méthode de recherche de ce noyau, qui sera résumée par un algorithme.

En effet, dans un graphe triangulé  $G=(V,E)$  tel que  $|V|=n$  et  $|E|=m$  il existe au moins un sommet simplicial qui nous permet d'identifier la clique simpliciale, et cette dernière va rencontrer tous les stables maximaux.

Pour identifier le sommet simplicial, il suffit de vérifier si le voisinage de chaque sommet du graphe est une clique, ce qui nécessite  $n^2$  opérations.

En effet le voisinage de  $x$ , noté  $V(x)$  contient au plus  $n-1$  sommets, on considère tous les couples de sommets de  $V(x)$ , et on vérifie s'ils sont reliés, ceci consiste à faire une combinaison de deux éléments parmi  $n-1$  éléments, i.e.  $n^2$  opérations.

Comme l'opération se répète pour tous les sommets du graphe, donc la détermination de la clique rencontrant tous les stables maximaux se fait en au plus  $n^3$  étapes.

#### Etape 1

On pose  $D_0=D$ , soient  $x_0$  un sommet simplicial et  $K_0 \cup x_0$  la clique simpliciale qui lui correspond, soit  $y_0$  le sommet source correspondant à cette clique (qui existe forcément dans toute clique sinon tout sommet sera extrémité terminale d'un certain arc, ce qui conduit à un circuit).

#### Etape 2

On pose  $D_1=D_0-y_0$ ,  $D_1$  est sous graphe de  $D_0=D$ , donc il est triangulé, soit  $x_1$  un sommet simplicial de  $D_1$ ,  $K_1 \cup x_1$  la clique simpliciale qui lui correspond et  $y_1$  le sommet source qui lui correspond.

En itérant ce procédé pour chaque  $D_k$ , on aura:

#### Etape k

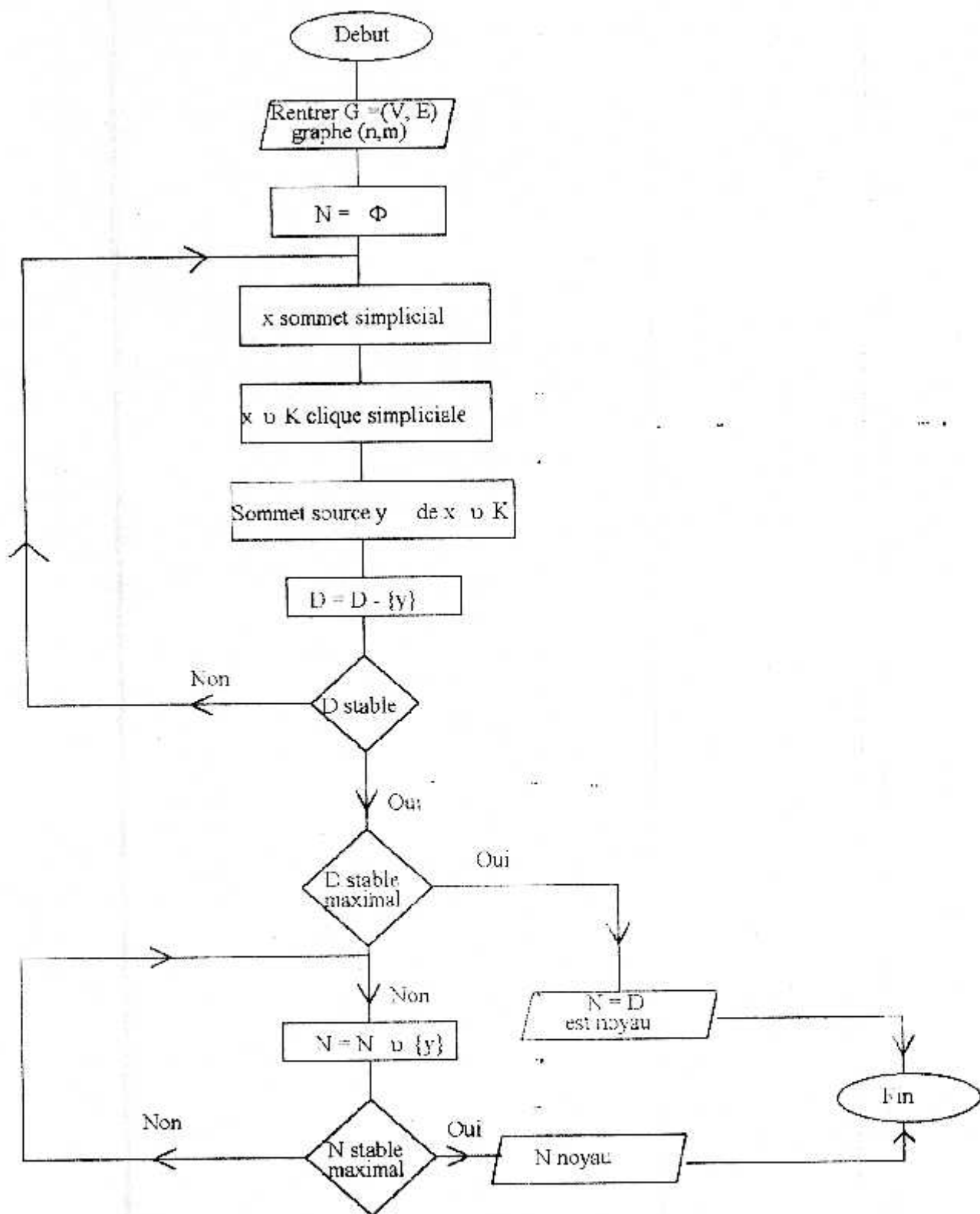
On pose  $D_k=D_{k-1} \setminus \{y_i; i=0, \dots, k-1\}$ , soit  $x_k$  le sommet simplicial de  $D_k$ ,  $K_k \cup x_k$  la clique correspondante et  $y_k$  le sommet source qui lui correspond.

Opération qui se fait en  $n^4$  étapes au plus. Si  $D_{k+1}$  est un ensemble de sommets isolés, alors on le prendra comme noyau du graphe  $D_k$  (sinon, on continue l'itération), si  $D_k$  est stable maximal dans le graphe entier  $D$ , alors il serait absorbant donc on le prendra comme noyau du graphe, sinon on ajoute à  $D_k$  les sommets source un à un en commençant par  $y_{k-1}$  et en remontant jusqu'à  $y_0$ , en vérifiant à chaque fois s'ils sont absorbés ou pas.

Ainsi on aura trouvé le noyau du graphe entier en au plus  $n^4 + n$  opérations.

#### Organigramme :





Algorithme :

Données:  $G=(V,E)$  graphe triangulé avec orientation admissible,  
 $|V|=n$ ,  $|E|=m$ .

résultat: un noyau  $N$  dans  $G$ .

début

$N=\emptyset$

répéter

-déterminer  $x$  sommet simplicial de  $D$ ,  $x \cup K$  clique simpliciale qui correspond à  $x$ .

-déterminer le sommet source  $y$  dans  $x \cup K$

- $D=D \setminus y$

-jusqu'à  $D$  stable

-si  $D$  est stable maximal alors  $N=D$ . stop

sinon

répéter

- $N=N \cup \{y\}$

- jusqu'à  $N$  stable maximal

Fin.

**N.B:** Voir programme informatique traduisant la recherche d'un noyau dans de tel graphe en annexe (III),(écrit en Language C).

## CHAPITRE IV NOYAUX DANS LA CLASSE DES GRAPHES

### PLANAIRES ET CERTAINES DE LEURS SOUS CLASSES

#### A/ Graphes planaires :

##### a/ Définitions :

- Un graphe est dit **planaire topologique**, s'il est situé dans  $\mathbb{R}^2$  tel que les sommets sont des points distincts et les arêtes des courbes simples; les arêtes ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités.
- Un graphe est dit **planaire** s'il est isomorphe à un graphe planaire topologique (i.e : sommets et arcs des deux graphes se correspondent par des bijections).
- Une **face** dans un graphe planaire est une région du plan limitée par des arêtes et qui ne contient ni sommet ni arête en son intérieur.  
Deux faces sont dites **adjacentes** si leurs frontières ont au moins une arête en commun.
- Il est possible d'ajouter une nouvelle arête dans un graphe simple donné  $G$  telles que les propriétés de planarité soient préservées et lorsqu'on ne peut plus ajouter d'arêtes on dit que le graphe est **planaire maximal**.
- Toute représentation de graphes est contenue dans un graphe planaire maximal tel que l'ensemble des sommets soit le même.
- Un graphe planaire est dit **triangulaire** si toutes ses faces ont trois sommets.

#### **Théorème 1:**

Un graphe planaire est dit maximal si et seulement si il est triangulaire.

#### **Preuve :**

Si certaines faces ont au plus trois sommets alors on peut ajouter les arêtes; donc le graphe ne serait pas maximal.

Inversement, si  $G$  est triangulaire alors toute face de  $G$  possède trois sommets et si nous ajoutons une arête, nous créons une boucle où une arête double; contradiction.

#### **Théorème 2 :**(Euler dans [2])

Dans un graphe topologique à  $p$  composantes connexes; à  $n$  sommets;  $m$  arêtes, et  $f$  faces, on a :  $n-m+f=p+1$ .

D'où découle directement le résultat suivant connu sous le nom de formule d'Euler.

#### **Corollaire :**(formule d'Euler)

Dans un graphe planaire topologique, connexe; possédant  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $f$  faces, on a :  $n-m+f=2$ .

**Preuve:**

Nous procédons par induction, soit un graphe topologique et ses faces sont a,b,c,...,h

1- le sous graphe partiel G(a), contenant les sommets et arêtes de la frontière f(a) de la face a vérifie,  $n-m+f=2$  puisqu'il possède autant d'arêtes que de sommets et deux faces, l'une d'elles a et l'autre la face infinie.

2- Soit b, une des faces adjacentes à la face a, f(b) contient une chaîne qui appartient a, f(a) et une autre chaîne f(b)-f(a). Ajoutons à G(a) les sommets et arêtes de f(b)-f(a) le sous graphe obtenu est noté G(a,b), celui-ci est planaire topologique et connexe et vérifie  $n-m+f=2$  puisqu'on a ajouté une face .

En répétant cette opération autant de fois qu'il existe de faces; on parvient puisque G est connexe a G tout entier qui vérifie la formule d'Euler.

Si nous considérons à présent; un graphe topologique ayant p composantes connexes nous écrivons la formule pour chacune des composantes et nous obtenons;

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2$$

$$n_p - m_p + f_p = 2$$

dont la somme membre a membre donne  $n-m+(f+p-1)=2p$ ; puisque la face infinie est comptée pour chaque composante connexe; et donc  $n-m+f=p+1$ .

**Corollaire 2 :**

Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à cinq.

**Preuve :**

Dans un graphe planaire une face est formée au moins de trois arêtes; et pour toute face, une arête est comptée deux fois; car deux faces voisines ont toujours une arête en commun; on a alors:  $2m \geq 3f$ ; donc  $2m \geq 3(m-n+2)$ ; d'après la formule d'Euler; d'où  $3n \geq m+6$  (1)

d'autre part; si d(x) désigne le degré d'un sommet x; alors :  $\Sigma(d(x); x \in X) = 2m$ .

Soit  $x \in G$ , supposons que pour tout x de X, le degré de x est supérieur strictement à cinq autrement dit, le degré de x est supérieur ou égal à six donc:

$$\Sigma(d(x); x \in X) \geq \Sigma(6; x \in X) = 6n, \text{ d'où } 2m \geq 6n \quad (2)$$

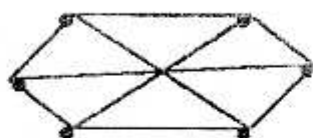
les résultats (1) et (2) donnent  $6n \geq 6n+12$  contradiction.

**Remarque :**

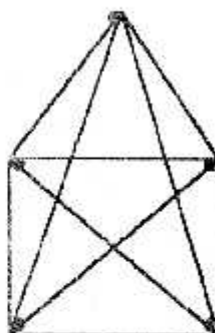
- Les graphes planaires à une seule face sont nécessairement sans cycle
- Dans les graphes planaires maximaux:  $3f \equiv 2m$ .

**b/ Reconnaissance des graphes planaires :**

Les graphes les plus petits en terme de cardinalité (simples) qui sont non planaires sont présentés ci-dessous:



$K_{3,3}$



$K_5$

**Théorème 3 :** (Kuratowski dans [2])

Un graphe fini 3-connexe, est dit planaire si et seulement s'il ne contient aucun sous graphe conforme (ou des subdivisions) aux graphes ci-dessus ( $K_{3,3}$ ,  $K_5$ ).

Dans les graphes planaires parfaits, la conjecture forte des graphes parfaits se traduit de la manière suivante :

Un graphe planaire est parfait si et seulement s'il ne contient aucun trou.

Soit  $G$  un graphe planaire parfait. W. L. Hsu [24] associe à ce graphe, un arbre de décomposition telle que la racine de l'arbre soit  $G$ .

En effet il (définit) caractérise les graphes planaires sans trou; en les décomposant en sous-graphes connexes qui constituent les classes de graphes planaires parfaits suivantes :

- 1/ La classe  $C$  des graphes de comparabilité planaires
- 2/ La classe  $L$  des line-graphes (graphes des arêtes) des graphes bipartis de degré maximum inférieur à trois
- 3/ La classe  $S$  comportant quelques graphes particuliers.

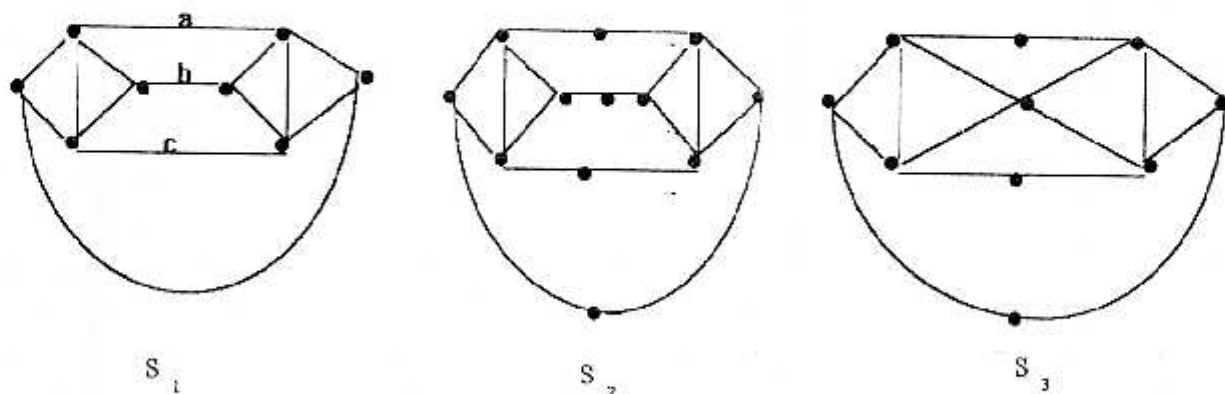
L'imperfection des graphes planaires peut-être détectée durant la décomposition définie auparavant.

Soit  $H$  un nœud de cet arbre tel que  $H$  admet un ensemble d'articulation  $Q$ .

Il sera appelé feuille de l'arbre et on montre que H doit nécessairement appartenir à l'une des trois classes S, L ou C avec  $S = S^*_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

$S^*_1$  est déduit à partir de  $S_1$  en remplaçant l'une au moins des trois arêtes a, b ou c par une chaîne induite de longueur au moins trois.

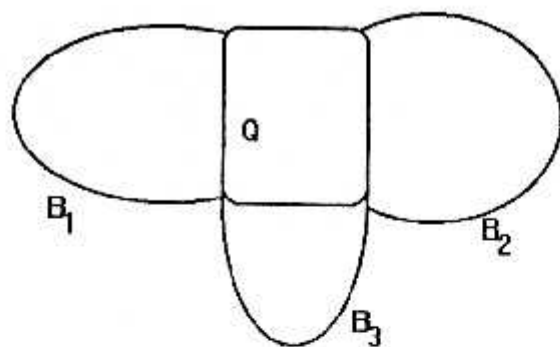
$S_1, S_2$  et  $S_3$  sont des graphes définis comme suit



Nous définissons à présent quatre types d'ensembles d'articulation; qui conduisent à la décomposition du graphe planaire.

Soit Q un ensemble d'articulation de H, et  $B_1, B_2, \dots, B_k$  les composantes connexes de  $H \setminus Q$ .

Décomposition de type 1 : Q est une clique d'articulation

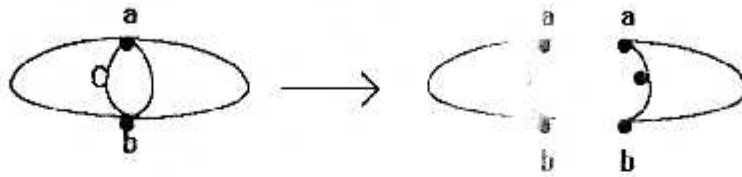


Où les enfants de H sont les sous graphes de H, définis par  $H(B_i \cup Q)$ .

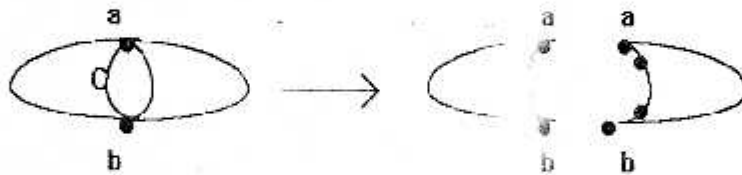
Décomposition de type 2 :  $Q = \{a, b\}$ ; où a et b sont non adjacents, sinon on se retrouve dans la décomposition de type 1; de plus toutes les chaînes minimales joignant a et b sont de même parité, sinon le graphe ne serait pas parfait.

Le  $i^{\text{ème}}$  enfant de H, est le sous graphe  $H(B_i \cup Q)$ , auquel on ajoute entre a et b une chaîne minimale sans cordes de longueur deux si la longueur de la chaîne est paire; et de longueur trois si elle est impaire; les sommets a et b sont dits artificiels.

**Chaîne paire (C)**



**Chaîne impaire (C)**

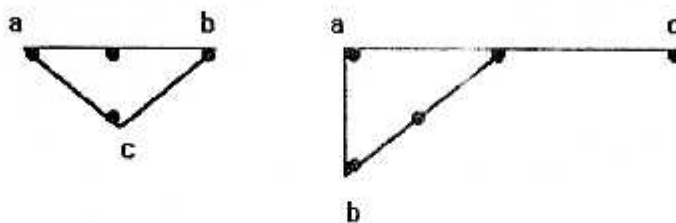


Décomposition de type 3 :

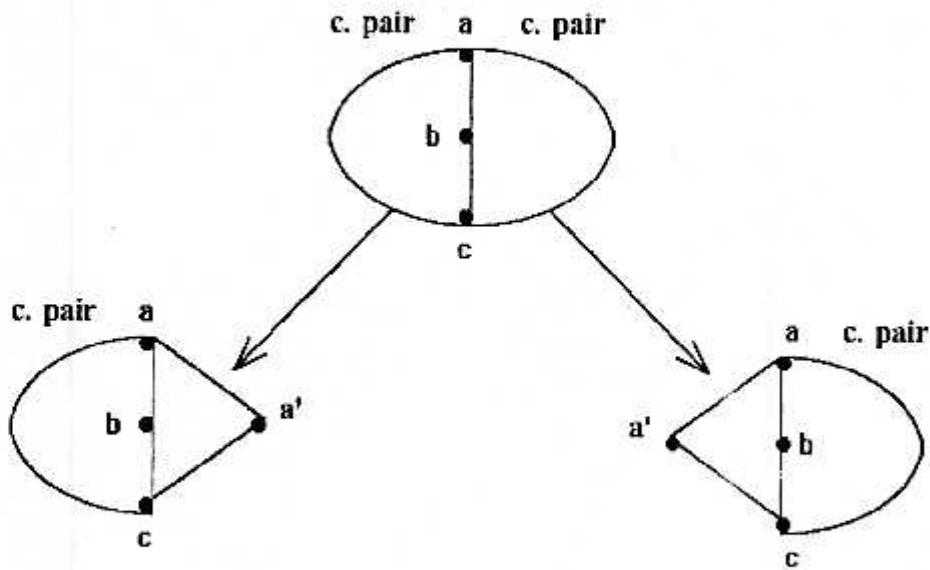
$Q = \{a, b, c\}$  ; où  $(a, b)$  est une arête,  $(b, c)$  peut être une arête et enfin  $(a, c)$  et où il existe des chaînes minimales joignant  $a$  et  $c$ , qui sont toutes de même parité (même dans le cas où  $(b, c)$  n'est pas une arête).

Ce type de décomposition ne peut pas donner plus de deux composantes connexes, sinon cela voudrait dire que  $H$  contient une subdivision de  $K_{3,3}$ , et donc le graphe ne serait pas planaire, contradiction.

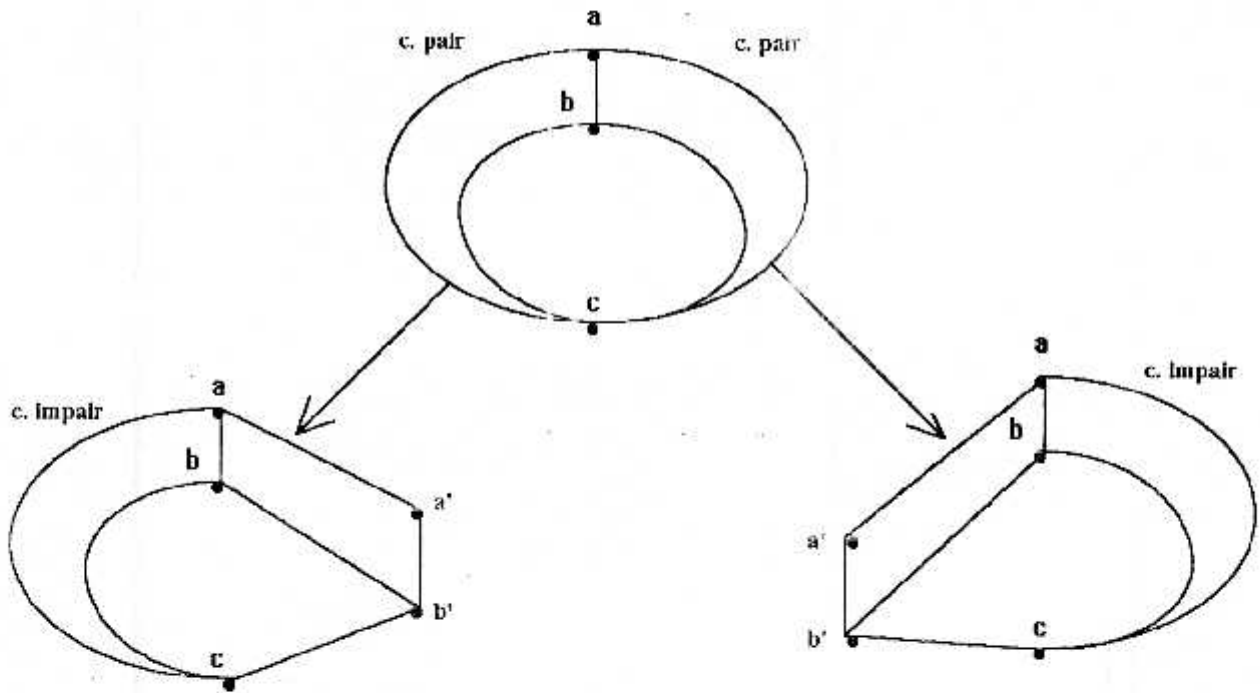
Le  $i^{\text{ème}}$  enfant de  $H$  est défini par  $H(B_i \cup Q)$ , auquel on ajoute un sommet artificiel  $a'$ , avec les arêtes  $(a', a)$  et  $(a', c)$  ; et si  $(b, c)$  n'est pas une arête, un sommet artificiel  $b'$  est ajouté avec les arêtes telles que  $a$  et  $c$  ne soient reliés par aucune des configurations suivantes :



cas où b et c sont reliés par une arête :



cas où b et c ne sont pas reliés par une arête :

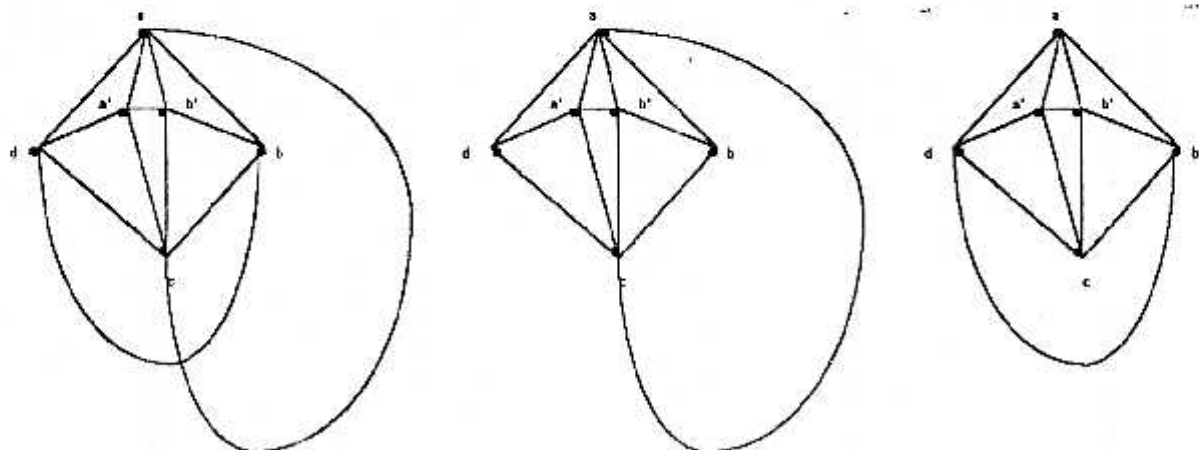




### Décomposition de type 4

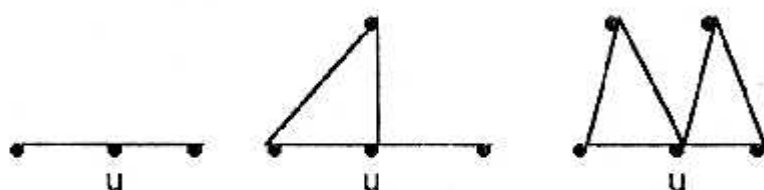
$Q = \{a, b, c, d\}$  induisant un  $C_4$  dans  $H$ , avec les arêtes  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ ,  $(c, d)$  et  $(d, a)$ .

Il existe un chemin sans cordes joignant  $a$  et  $c$  dans chacune des composantes  $H(B_i \cup \{b, d\})$ ; le  $i^{\text{ème}}$  enfant obtenu est le sous graphe  $H(B_i \cup Q)$  auquel on ajoute deux sommets artificiels  $a'$  et  $b'$ , avec les arêtes  $(a, a')$ ,  $(a', b')$ ,  $(a', c)$ ,  $(b', a)$ ,  $(b', b)$  et  $(b', c)$ .



Arrivé par la décomposition à un enfant  $H$  ne contenant aucun ensemble d'articulation  $Q$  du type 1,2,3, ou 4, cet enfant est un sommet pendent de l'arborescence, il est indécomposable et doit appartenir forcément à l'ensemble  $L \cup C$ , où la classe  $L$  est formée de graphes qui sont deux-inséparables (i.e : qui ne sont pas séparables par des ensembles d'articulation à un ou deux sommets mais seulement par un ensemble formé par plus de trois sommets) et vérifie les conditions suivantes :

i) le voisinage de chaque sommet  $u$ , est conforme avec l'une des figures ci-dessous;



(fig.4)

( $u$  est appelé un F-sommet)

ii) la frontière de chaque face non triangulaire est un trou pair

W.L. Hsu, a montré que la classe  $L$  est parfaite.

De plus il est clair que la classe  $S$  définie auparavant est parfaite.

Dans chacune des décompositions: Hsu a démontré l'énoncé suivant :

$G$  planaire est parfait si et seulement si toutes les feuilles obtenues à partir de la décomposition appartiennent à  $L \cup S \cup C$ .

Le temps d'exécution de l'algorithme de décomposition établi par W. L. Hsu est de l'ordre  $O(n^3)$ .

### **B/ Etude de la solvabilité des graphes planaires parfaits :**

La  $i$ -composition ( $i=1,2,3,4$ ) peut être considérée comme l'opération inverse de la  $i$ -décomposition ( $i=1,2,3,4$ ), en recollant les pièces au niveau des sommets de l'ensemble d'articulation qui figure dans toutes les pièces.

Nous avons par la même occasion pensé à vérifier si ces types de décomposition préservent la perfection.

**Conjecture 1 :**  $G$  planaire parfait alors  $G$  est solvable.

**Conjecture 2 :**  $G$  planaire parfait alors  $G$  est  $M$ -solvable.

Il est facile de voir que la classe des graphes appartenant à  $L$  est solvable établi par F. Maffray dans [30]

Les graphes qui sont dans  $S$  sont solvables (la vérification est simple).

Pour prouver la conjecture 1 il faut montrer d'une part que les graphes qui sont dans la classe  $C$  sont solvables et d'autre part montrer que les quatre types de décomposition conservent la solvabilité.

Ainsi on établit un algorithme de recherche de noyau dans cette classe de graphes.

Pour la conjecture 2 comme la classe des graphes inclus dans  $C$  est  $M$ -solvable [12], il reste à montrer que les différentes opérations de l'algorithme de W. L. Hsu, préservent la  $M$ -solvabilité.

Par la même occasion, pour certaines sous classes de graphes planaires on a essayé d'établir les conjectures 1 et 2.

### **Définitions :**

-a/  $G$  est dit outer-planaire si on peut plonger  $G$  dans le plan tel que les arêtes ne se croisent pas et que tous les sommets sont sur la même face.

Une des caractérisations des graphes outer-planaires est :

$G$  est dit outer-planaire si et seulement si  $G$  ne contient aucun sous graphe homéomorphe à  $K_4$  ou à  $K_{2,3}$  (un homéomorphisme à  $K_4$  ou  $K_{2,3}$  est obtenu par subdivision des arêtes de ces derniers).

-b/  $G$  est dit  $K$ -outer planaire si pour  $K=1$ ,  $G$  est outer planaire ; et pour  $K>1$ ,  $G$  est prolongeable dans le plan tel que si tous les sommets de la face extérieure sont supprimés ; les composantes connexes du graphe restant sont tous  $(K-1)$ -outer-planaires.

-c/ Un graphe est dit serie-parallèle s'il ne contient pas de sous-graphe partiel homéomorphe à  $K_4$ .

propriété d'un graphe série-parallélé : un graphe série-parallèle, sans sommet d'articulation peut toujours se construire par subdivision et doublement d'arête à partir d'une arête double.

Problèmes ouverts :

1/ Les graphes de comparabilités sont solvables.

2/ Les quatre types de decompositions des graphes planaires parfaits (établi par W. L. Hsu [24]) préservent la solvabilité.

3/ Les  $K$ -outer planaires parfaits sont  $M$ -solvables (resp.solvable).

4/ Les graphes série-parallèles sont  $M$ -solvables (resp.solvable).

## -CHAPITRE V SOLVABILITE DES GRAPHS PARFAITS A PARTIR DES RESULTATS DE LA THEORIE DES JEUX

### A/ Forme de jeux et fonction d'effectivité :

#### a/ Forme de jeux :

Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  les  $n$  stratégies (politiques) adoptées par  $n$  joueurs (l'évolution du jeu ne dépend pas de sa nature).

Un jeu formel est défini par un quadruplet  $(I, A, \Sigma, g)$  où  $I$  est l'ensemble des joueurs,  $A$  l'ensemble des résultats,  $\Sigma = \prod \Sigma_i$ , l'ensemble de toutes les stratégies adoptées par les joueurs et enfin  $g$  est la fonction résultat et est définie sur

$\Sigma = \prod (\Sigma_i, i=1, \dots, n)$  en fait un jeu est défini par deux fonctions :

1-  $g$  est surjective et non injective, spécifiant le résultat du jeu pour n'importe quelle stratégie choisie par les joueurs.

2-  $U = u_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , fonction d'utilité représentant la valeur d'un résultat pour un joueur donné. Un joueur  $i$  de  $I$  préfère un résultat  $a_1$  de  $A$  à un résultat  $a_2$  de  $A$  si  $u(i, a_1) > u(i, a_2)$ . On note que  $u_i[g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)] = U_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . Nous définissons deux types de jeux :

#### **1-Jeux non coopératifs :**

Chaque joueur choisira sa politique sans connaître celle de ses adversaires.

Définition : Les stratégies  $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*$  sont dites en équilibre si

$U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n^*) \leq U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*)$  pour tout  $i$  de  $I$  et pour tout  $\sigma_i$  de  $\Sigma_i$ . C'est une situation où tout joueur se trouve avoir joué au mieux

même si les stratégies de ses adversaires lui sont révélées. Etant donné l'état initial  $s_0$ , la règle du jeu précise que pour tout état  $s_1$  de l'ensemble des états possibles  $S_1$ , le joueur  $i$  choisira l'état suivant  $s_2$  parmi  $S_2$  possibilités, ainsi de suite jusqu'à atteindre une situation finale notée  $F_i$  de l'ensemble des situations finales  $F$ , où un gain  $u_i(s)$  est attribué à chacun des joueurs pour chaque situation finale  $s$  de  $F$  et le jeu est arrêté, on aurait ainsi abouti à une situation finale  $S_F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  de  $F$  telle que :  $u_i[S_F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)] = U_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .

#### **Théorème 1 :**

Tout jeu à information complète (où tous les joueurs ont choisi leurs stratégies) admet un équilibre (point d'équilibre).

Ces jeux sont finis et relèvent de la théorie des graphes.

## **Théorème 2 :** ( W. NASH )

Supposons que les  $\Sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ; ensemble de toutes les stratégies, soient des convexes compacts et que les  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , soient d'une part continues sur  $\prod \Sigma_i$ , et que pour tout  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  et pour tout  $\Sigma_i$ , où la fonction qui à  $\tau_i$  associe  $U_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tau_i, \dots, \sigma_n)$  atteint son maximum est convexe alors le jeu  $\{(\Sigma_i, U_i) (1 \leq i \leq n)\}$  admet au moins un point d'équilibre.

## **2-Jeux coopératifs :**

Ici les gains sont évalués dans une unité commune à tous les joueurs et chacun a le droit de transférer une partie de son gain sur un ou plusieurs partenaires (se trouvant placés dans une position clé) dont l'action conjuguée lui permet de gagner plus que par lui même. Nous dirons qu'on a formé une coalition  $K$ , incluse dans  $P(I)$  ensemble de tous les sous-ensembles de joueurs, dont on tire après la partie, un ensemble de résultats appelé bloc qui est inclus dans  $P(A)$  ensemble des sous-ensembles de résultats  $A$ . Si deux coalitions  $S$  et  $T$  s'associent pour augmenter le gain de chacun des joueurs des deux coalitions, alors la coalition  $S \cup T$  peut s'assurer au moins le gain  $V(S)+V(T)$ ; (i.e :  $V(S)+V(T) \leq V(S \cup T)$ );

$$V(S) = \text{MAX}_{\sigma_i, i \in S} (\text{MIN}_{\sigma_j, j \notin S} [ \sum U_i; i \in I ] )$$

Dans les jeux coopératifs il est nécessaire de parler de procédure d'arbitrage consistant à rassembler  $n$  joueurs sous la présidence d'un arbitre qui leur propose à chacun un gain  $U_i$  (pour tout  $i$  de  $I$ ) sous réserve que  $u_i \geq V(\{i\})$

Nous faisons remarquer que si  $S$  et  $T$  sont deux coalitions disjointes, la coalition  $S \cup T$  peut s'assurer au moins le gain  $V(S)+V(T)$  puisque  $V(S \cup T) \geq V(S)+V(T)$ .

### **Définition :**

-un vecteur  $U=(U_1, \dots, U_n)$  tel que  $\forall i \in I U_i \geq V(\{i\})$  et  $\sum_{i \in I} U_i = V_I$  est appelé

imputation.

-On dit qu'une imputation  $U \in \mathbb{R}^n$ , est bloquée par la coalition  $S$  s'il existe un vecteur  $U^S \in \mathbb{R}^S$ , tel que  $U_i^S > U_i$  et  $\sum_{i \in I} U_i^S = V(S)$

On appelle coeur du jeu, l'ensemble des imputations qui ne sont bloquées par aucune coalition.

**Proposition :** Une imputation  $U$  appartient au coeur du jeu si et seulement si

$$\forall S \in P(I) \sum_{i \in I} U_i \geq V(S)$$

### **Solution de V. Neumann et Morgenstern :**

Il ne s'agit pas de savoir si la coalition  $S$  bloque l'imputation  $U$ , mais de proposer une autre imputation à la place de  $U$ . On est amené à constituer un catalogue d'imputations bloquantes et chercher à le rendre le plus petit possible. Considérons pour cela un jeu coopératif.

#### **Définition:**

On dit qu'une imputation  $w$  bloque une imputation  $u$  s'il existe une coalition  $S$  dans  $I$  telle que  $u_i < w_i$  pour tout  $i$  de  $S$  et  $\sum_{i \in S} w_i \leq V(S)$

**Définition :** On appelle solution de V. Neumann et Morgenstern toute famille  $M$  d'imputations telle que toute imputation du jeu soit bloquée par un élément de  $M$  et de deux imputations de  $M$  aucune ne bloque l'autre.

Depuis l'ouvrage de V. Neumann et Morgenstern (1944), la question restant en suspens; était de savoir si tout jeu possède une solution  $M \neq \emptyset$ , Lucas (1968) y a répondu par la négative en construisant un contre exemple à 10 joueurs.

La difficulté réside dans le fait que la relation de blocage entre imputations n'est ni antisymétrique ni transitive.

### **b/ Fonction d'effectivité et stabilité d'un jeu :**

La fonction d'effectivité consiste en la représentation du pouvoir des coalitions en termes d'efficacité sur un ensemble d'alternatives. L'étude principale est centrée sur la stabilité des fonctions d'effectivité qui nous permettra de conclure en ce qui concerne la conjecture sur la solvabilité des graphes parfaits.

#### **Définition :**

Un préordre total sur un ensemble  $X$  est une relation totale et transitive ( $R(X)$  est l'ensemble des préordres totaux sur  $X$ ).

Un préordre total sur  $A$  (ensemble des résultats) sera dit relation de préférence (notée  $a R b$  et interprétée "a est préféré ou équivalent à b").

Si  $R \in R(A)$ , on désigne par  $P$  le préordre strict associé à  $R$  et est défini par :

$$\forall a, b \in A \quad a P b \Leftrightarrow a R b \text{ (et non } b R a)$$

Un profil est une famille  $(R^i, i \in I)$  où  $R^i$  est une relation de préférence du joueur  $i$ , dans  $R(A)$  et peut remplacer la fonction gain dans un jeu défini précédemment.

#### **Définition :**

Soit  $R$  un préordre sur  $X$  et  $f$  une application de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $U$  est une fonction d'utilité représentant le préordre  $R$  si:  $\forall (x, y) \in X^2; U(x) \leq U(y) \Leftrightarrow x R y$

**Définition :**

Une coalition  $K \subseteq I$  est dite effective dans le bloc  $B \subseteq A$ , si les joueurs  $K$  peuvent garantir un résultat du jeu dans l'ensemble  $B$ . Cette relation peut être représentée par une application booléenne  $E: P(I) \times P(A) \rightarrow \{0,1\}$  dite fonction d'effectivité, telle que  $E(K,B)=1$  si et seulement si la coalition  $K$  est effective dans le bloc  $B$ , et peut être vue comme arêtes d'un graphe biparti  $(P(I), P(A), E)$ ; et donc à tout jeu formel  $\Gamma = (I, A, \Sigma, g)$  on peut faire correspondre une fonction d'effectivité unique.

Le quadruplet  $(I, A, E, g)$  est appelé jeu formel dans une fonction d'effectivité.

Une caractérisation de la fonction d'effectivité a été donnée par E. Moulin et E. Peleg en 1982, qu'on énonce dans le résultat suivant:

**Théorème 3 :** ([26])

Une application booléenne  $E: P(I) \times P(A) \rightarrow \{0,1\}$  est dite fonction d'effectivité d'un jeu formel si et seulement si  $E$  satisfait les conditions suivantes:

monotonie :  $K \subseteq K' \subseteq I, B \subseteq B' \subseteq A$ , et  $E(K, B)=1$  implique que  $E(K', B')=1$

super-additivité :  $E(K', B')=1, E(K'', B'')=1$  et  $K' \cap K'' = \emptyset$  implique que  $E(K' \cup K'', B' \cup B'')=1$

conditions de borne :  $E(I, B)=1$  pour tout  $B \subseteq A$ ,  $E(I, \emptyset)=0$ , et  $E(K, A)=1$  pour toute coalition  $K$  de  $I$ , et  $E(\emptyset, I)=0$ .

**Définition :**

Une fonction d'effectivité est jouable s'il existe un jeu formel  $\Gamma$  pour lequel  $E \leq E_\Gamma$  (i.e :  $E(K, B)=1$  implique que  $E_\Gamma(K, B)=1$ ).

**Théorème 4 :** ([23])

une fonction d'effectivité définie par une liste  $T = \{(K_j, B_j) / j \in I\}$  est jouable si et seulement si pour tout sous ensemble d'indices  $J' \subseteq J$  pour lesquels les coalitions correspondantes sont deux à deux disjointes ( $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$  pour  $j \neq j'$ ), les blocs correspondants ont une intersection non vide  $\bigcap B_j \neq \emptyset$ .

**Définition :**

Une coalition  $K$  de  $I$  peut rejeter une alternative  $a$  de  $A$  s'il existe un bloc  $B$  tel que  $E(K, B)=1$  et  $U(k, b) > U(k, a)$  pour tout joueur  $k$  de  $K$  et pour toute alternative  $b$  de  $B$ . Posons  $R(K, B) = \{a \in A / \forall k \in K \forall b \in B, U(k, b) > U(k, a)\}$ , l'ensemble des alternatives rejetées par les coalitions; et  $C(E, U, K) = A \setminus \bigcup [R(k, B); k \in K; B \subseteq A \text{ et } E(K, B)=1]$ , est l'ensemble des alternatives qui ne sont rejetées par aucune coalition et qu'on appelle  $K$ -coeur d'un jeu formel  $(I, A, E, g)$  dans une fonction d'effectivité.

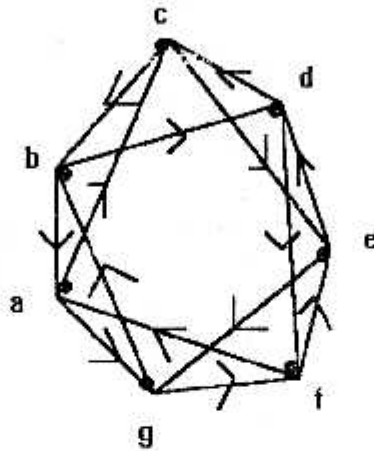
On note aussi qu'une fonction d'effectivité est stable si  $C(E, U, K) \neq \emptyset$  pour toute fonction d'utilité  $U$ .

**Définition :**

**Définition :**

-Pour une fonction d'effectivité  $E$ , on appelle table rejetante tout triplet  $R = \{(K_j, B_j, R_j) \mid j \in J\}$  telque  $E(K_j, B_j) = 1$  et  $R_j \cap B_j = \emptyset$  pour tout  $j$  de  $J$ , et  $\Lambda = \cup \{R_j \mid j \in J\}$ .

-Le sous-ensemble ordonné  $\{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subseteq J$  d'indices est dit cycle de joueurs commun d'une table rejetante  $R$  si:  $R_{j_l} \cap B_{j_{l+1}} \neq \emptyset$  pour  $l=1, \dots, s-1$  et  $R_{j_s} \cap B_{j_1} \neq \emptyset$  et  $\cap (K_{j_l}, l=1, \dots, s) \neq \emptyset$ , nous illustrons cela par l'exemple suivant: soit le graphe  $G=(V,E)$  où  $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ .



les cliques maximales sont:

$C_1 = \{a, b, c\}$ ;  $C_2 = \{b, c, d\}$ ;  $C_3 = \{c, d, e\}$ ;  $C_4 = \{d, e, f\}$ ;  $C_5 = \{e, f, g\}$ ;  $C_6 = \{f, g, a\}$ ;  $C_7 = \{g, a, b\}$ .

les stables maximales sont :

$S_1 = \{a, d\}$ ;  $S_2 = \{a, e\}$ ;  $S_3 = \{b, e\}$ ;  $S_4 = \{b, f\}$ ;  $S_5 = \{c, f\}$ ;  $S_6 = \{c, g\}$ ;  $S_7 = \{d, g\}$ .

$K_a = \{C_1, C_6, C_7\}$ ;  $K_b = \{C_1, C_2, C_7\}$ ;  $K_c = \{C_1, C_2, C_3\}$ ;  $K_d = \{C_2, C_4, C_3\}$ ;  $K_e = \{C_5, C_4, C_3\}$ ;  $K_f = \{C_5, C_4, C_6\}$ .

On note par  $I_G = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$ ; l'ensemble des joueurs;

et par  $A_G = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ ; l'ensemble des résultats;

par  $K_G = \{K_a, K_b, K_c, K_d, K_e, K_f, K_g\}$ ; l'ensemble des coalitions

les blocs sont donnés par :

$B_a = \{S_1, S_2\}$ ,  $B_b = \{S_3, S_4\}$ ,  $B_c = \{S_5, S_6\}$ ,  $B_d = \{S_1, S_7\}$ ,  $B_e = \{S_2, S_3\}$ ,

$B_f = \{S_4, S_5\}$ ,  $B_g = \{S_6, S_7\}$ .

ainsi on constitue la table rejetante suivante:

$T_G = \{(K_a, B_a), (K_b, B_b), (K_c, B_c), (K_d, B_d), (K_e, B_e), (K_f, B_f), (K_g, B_g)\}$ .

soient :

$R_a = \{S_5, S_4\}$ ;  $R_b = \{S_1, S_6\}$ ;  $R_c = \{S_1, S_2\}$ ;  $R_d = \{S_3, S_4\}$ ;  $R_e = \{S_5, S_6\}$ ;

$R_f = \{S_1, S_7\}$ ;  $R_g = \{S_2, S_4\}$ .



$A_G = \cup \{ R_i / i \in (a, b, c, d, e, f) \} = \{ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 \}$ ; ce qui veut dire que:  
 $R = \{ (K_i, B_i, R_i) / i \in (a, b, c, d, e, f) \}$  est une table rejetante  
de plus:  $R_a \cap B_b \neq \emptyset, R_b \cap B_c \neq \emptyset, R_c \cap B_d \neq \emptyset, R_d \cap B_e \neq \emptyset, R_e \cap B_f \neq \emptyset,$   
 $R_f \cap B_a \neq \emptyset, R_g \cap B_a \neq \emptyset.$

D'où :  $K_a \cap K_b \cap K_c = \{ C_1 \} \neq \emptyset$ ;  $C_1$  est un cycle de joueurs commun.

**Théorème 5 :** ([26] )

une fonction d'effectivité est stable si et seulement si toute table rejetante contient un cycle de joueurs commun.

**Preuve :**

Dans un sens, supposons que  $R = \{ (K_j, B_j) / j \in J \}$ ; est une table rejetante d'une fonction d'effectivité  $E$ , ne contenant pas de cycle de joueur commun.

Soit  $i \in I$ :

si  $i \notin \cup (K_j, j \in J)$ , considérons  $U_i$  associé à  $R^i$  la relation de préférence du joueur  $i$ .

si  $i \in \cup (K_j, j \in J)$ , soit  $D_i \subseteq J$ , l'ensemble des indices  $j$  tel que  $i \in K_j$ .

On définit une relation binaire  $P^i$  sur  $D_i$  par  $h P^i j$  si  $R_h \cap B_j \neq \emptyset, h, j \in D_i$ .

Nous allons montrer que la relation  $P^i$  est sans cycle:

en effet supposons que  $h_1 P^i h_2, h_2 P^i h_3, \dots, h_{s-1} P^i h_s; h_1, h_2, \dots, h_s \in D_i$

ce qui veut dire que :  $R_{h_1} \cap B_{h_2} \neq \emptyset; R_{h_2} \cap B_{h_3} \neq \emptyset; \dots; R_{h_{s-1}} \cap B_{h_s} \neq \emptyset;$

comme  $\cap (K_j / j = 1, \dots, s) \neq \emptyset$ ; c'est donc  $R_{h_1} \cap B_{h_s} \neq \emptyset$ ; puisque la table rejetante ne contient pas de cycle de joueurs commun ; donc on ne peut avoir:  $h_s P^i h_1$

Comme  $P^i$  est une relation acyclique (relation qui possède un nombre fini d'éléments maximaux), on peut la considérer comme un ordre linéaire  $P^i$  sur  $D_i$ ; posons:

$d_1 P^i d_2 P^i d_3 P^i \dots P^i d_m$ ; avec  $D_i = \{ d_1, \dots, d_m \}$  avec  $d_1$  élément maximal pour  $D_i$ , et pour  $h \in D_i$  est un élément maximal de  $P^i$  dans  $D_i - \{ d_1, \dots, d_{h-1} \}$ ; il est clair que  $d P^i d' \Rightarrow d P^i d'$  pour tout  $d$  et  $d'$  de  $D_i$ .

Considérons la fonction d'utilité associée à la relation de préférence  $R^i$  telle que pour tout  $h$  et  $j$  de  $D_i$ ; si on a :  $h P^i j$  alors  $U_i(x) > U_i(y)$  ( $x R^i y, x \in R_h, y \in R_j$ ); donc pour tout  $h$  de  $D_i$ ,  $U_i(x) > U_i(y)$  ( $x \in B_h, y \in R_h$ ); puisque pour  $j \in D_i$ ,  $B_h \cap R_j \neq \emptyset$ ; sinon  $B_h \cap R_j = \emptyset$  pour un  $j \in D_i$ , donc  $j P^i h$  ce qui donne :  $U_i(x) > U_i(y)$  pour tout  $x \in R_j, y \in R_h$ . On en conclut que pour tout  $j$  de  $J$ , tout élément  $x$  de  $R_j$  est dominé par tout  $y$  de  $B_j$  relativement à la coalition  $K_j$ , comme les  $R_j$  recouvrent  $A$ , alors le coeur  $C(E, U, P(I)) = \emptyset$ ,  $U$  associé à  $R^I = (R^i, i \in I)$ .

(b) Si le coeur  $C(E, U, P(I)) = \emptyset$  pour un certain profil  $R^I$  (ie:  $U_i$ ), alors il existe  $K_j$  de  $P(I)$  et  $B_j$  de  $E(K_j)$ ,  $j=1, \dots, r$  tel que chaque  $x$  de  $A$  est dominé par  $B_j$  relativement à  $K_j$ , pour un certain  $j$ , par suite on choisit pour  $i \in \{ 1, \dots, r \}$

$R_j \subseteq \{ x \in A / x \text{ est dominé par } B_j \}$  telque  $A = \cup \{ R_j / j \in J \}, R_h \cap R_k = \emptyset, h \neq k.$

Si  $\{k_1, \dots, k_s\} \subseteq \{1, \dots, r\}$  est un sous ensemble d'indices tels que :

$B_{k_i} \cap R_{k_{i+1}} \neq \emptyset, j=1, \dots, s-1$  et  $\bigcap_{j \in J} (K_{k_j}, j \in J) \neq \emptyset$  alors on choisit  $x_j \in B_{k_j} \cap R_{k_{j+1}}, j=1, \dots, s-1$ , on aura alors :  $x_1 R^i x_2 R^i \dots R^i x_{s-1}$  pour  $i \in \bigcap_{j \in J} (K_{k_j}, j \in J)$

Si  $B_{k_s} \cap R_{k_1} \neq \emptyset$ , soit  $x' \in B_{k_s} \cap R_{k_1}$ , alors  $x_{s-1} R^i x'$ , et comme  $x' \in B_{k_s} \cap R_{k_1}, x' \in B_{k_s}$  et  $x' \in R_{k_1}$ , on a alors :  $x' R^i x_1$ , ce qui contredit le fait que  $R^i$  est un ordre; donc le fait que  $R^i$  soit cyclique, par conséquent  $B_{k_s} \cap R_{k_1} = \emptyset$

De cette manière nous aurons construit une table  $R = \{(K_j, B_j, R_j) / j \in J\}$  qui ne contient pas de cycle de joueurs commun.

**Définition :**

Une famille de coalitions  $K \subseteq P(I)$  est dite g-stable ( jeu-stable) si le coeur  $C(E_\Gamma, U, P(I))$  n'est pas vide pour tout jeu sous forme normale  $(I, A, \Sigma, g, U)$ .

Considérons la fonction poids non négative et entière sur l'ensemble des coalitions  $K$ , dite encore pondération équilibrée sur  $K$  avec la multiplicité  $\sigma$

définie par :  $W: K \rightarrow Z^+$ ; elle est dite pondération équilibrée sur  $K$  avec la multiplicité  $\sigma$  si pour tout joueur  $i$  de  $I$ , l'équation suivante:  $\sum_{k \in K, i \in I} W(k) = \sigma$ , est

vérifiée.

La sous famille  $K_w = \{k \in K / w(k) = 1\}$  est dite support de  $w$ .

Une pondération équilibrée  $w$  avec une multiplicité  $\sigma = 1$  est dite pondération de partition de  $I$ .

$K$  possède la propriété **BSP** (i.e : toute sous famille équilibrée de  $K$  est partitionnable) si toute pondération équilibrée de  $K$  est une combinaison entière de partitions; autrement dit,  $K$  possède la propriété BSP si et seulement si pour toute pondération équilibrée  $W : K \rightarrow Z^+$ , il existe des partitions  $W^i: K \rightarrow \{0, 1\}$  et des entiers  $\alpha_i \in Z^+, i=1, \dots, l$  tels que  $W = \sum \alpha_i W^i$ .

**Théorème 6 :** ([23])

Une famille de coalitions  $K$  est g-stable si et seulement si  $K \cup \{i / i \in I\}$  a la propriété BSP.

**Définitions :**

-Une fonction d'effectivité  $E: P(I) \times P(A) \rightarrow \{0, 1\}$  est dite B-monotone si :

$E(K, B) = 1$  et  $B \subseteq B'$ , implique que  $E(K, B') = 1$

-E est dite équilibrée si pour toute partition  $A = \cup [D_i, i \in I]$  et pour toute pondération équilibrée  $W : K \rightarrow Z^+$ , il existe une coalition  $k$  de  $K$  telle que  $E(k, \cup [D_i, i \notin k]) = 0$

**Théorème 7 :** (Danilov et Sotskov, 1978)

Les fonctions d'effectivité B-monotones et équilibrées sont stables.

## **B/ Solvabilité des graphes parfaits :**

### **a/ Fonction d'effectivité dans les graphes, Sous orientation et solvabilité :**

Un digraphe  $D=(V,A)$  est dit sous-orientation d'un graphe simple  $G=(V,E)$ , et on note  $D^-(V,A^-)$ , si  $D$  est obtenu à partir de  $G$  en orientant certaines arêtes de  $G$  (anti-symétriquement). Par contre une super-orientation, notée  $D^+(V,A^+)$ , de  $G$ , les arcs symétriques sont permis. Les arcs d'une sous orientation qui ne sont pas orientés sont orientés symétriquement dans une super-orientation.

Dans  $D^-(V,A^-)$ , on dit qu'un sommet  $v$  rejette un stable  $S \subseteq V$ , si l'arc  $(u,v) \in A$ , pour toute arête  $(u,v) \in E$  telle que  $u \in S$ . Une sous-orientation  $D$  de  $G$  est rejetante si tout stable de  $G$  est rejeté (dans  $D$ ) par un sommet.

-Une sous-orientation  $D$  de  $G$  est clique acyclique si elle ne contient pas de circuit induisant une clique dans  $G$ .

#### **Lemme 1 :**

Soient  $D^+(V,A^+)$  et  $D^-(V,A^-)$  la super-orientation et la sous-orientation respectivement correspondantes au graphe  $G=(V,E)$  alors :

(i)  $D^-$  est rejetante si et seulement si  $D^+$  n'a pas de noyau.

(ii)  $D^-$  est clique acyclique si et seulement si toute clique de  $G$  a un noyau dans  $D^+$ .

#### **Définition :**

Un graphe est dit coeur-solvable s'il ne possède pas de sous-orientation clique acyclique et rejetante.

#### **Corollaire :**

Un graphe est soluble si et seulement si il est coeur-solvable.

Dans  $G=(V,E)$ , considérons le jeu suivant :

Les joueurs  $(I_G)$  sont les cliques maximales, et les alternatives  $(A_G)$  sont les stables maximaux du graphe  $G$ .

Pour tout sommet  $v$  de  $G$ ,  $K_v \subseteq I_G$  est l'ensemble des cliques maximales contenant  $v$ , et  $B_v \subseteq A_G$  est l'ensemble des stables maximaux de  $G$  contenant  $v$ .

Notons  $K_G = \{K_v / v \in V\}$ , et  $T_G = \{(K_v, B_v) / v \in V\}$ , et  $E_G$  la fonction d'effectivité définie par  $T_G$ .

#### **Lemme 2 :**

Soit  $G$  un graphe et  $E_G$  la fonction d'effectivité qui lui est associée; alors  $E_G$  est jouable.

#### **Preuve :**

En effet les conditions du théorème de Gurvich et Vasin (citées plus haut) sont vérifiées, soit un sous ensemble de sommets  $W \subseteq V$  tel que les coalitions  $K_w, w \in W$  sont disjointes deux à deux. Il est clair que  $W$  est stable dans  $G$ , soit le stable maximal contenant  $W$ , alors  $W$  est contenu dans  $B_w$ , pour tout  $w \in W$  et par définition du bloc  $B_v, v \in V$ . Nous avons alors  $(\cap B_w, w \in W) \neq \emptyset$ .

La coeur-solvabilité de  $G$  est équivalente à la stabilité de  $E_G$ .

**Lemme 3 :**

Un graphe  $G$  est coeur-solvable si et seulement si la fonction d'effectivité est stable.

**Preuve :**

(a) Supposons que  $E_G$  n'est pas stable, d'après le théorème de Keiding il existe une table rejetante  $R = \{(K_j, B_j, R_j) / j \in J\}$  ( $J \subseteq V$ ) qui ne contient pas de cycle de joueurs commun, nous remarquons que  $E_G(K, B) = 0$  pour  $K \neq K_v$ , où  $B \neq B_v$ , pour  $v \in V$ , par définition de  $E_G$ . Si nous ajoutons à la table rejetante, les triplets  $(K_v, B_v, \emptyset)$ ;  $v \in J - V$ , elle restera toujours rejetante, on peut alors supposer que  $J = V$ .

On définit une orientation  $A$  de certaines arêtes de  $G$  comme suit :

pour tout stable  $S$  de  $R_v$ ,  $v \in V$  et pour tout  $u \in S$  tel que  $(u, v) \in E$ , l'arc  $(u, v) \in A$ .

-Il suffit de démontrer d'abord que  $D = (V, A)$  est clique acyclique, donc en particulier, aucune arête de  $G$  n'est orientée symétriquement dans  $D$ ,  $D$  est donc une sous-orientation clique acyclique de  $G$ . Soit au contraire  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ , un cycle induisant une clique, et  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subseteq V$  une clique de  $G$ . Considérons la clique maximale de  $G$  contenant les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_s$ . L'existence de l'arc  $(v_i, v_j) \in A$ , implique l'existence d'un stable maximal  $S \in R_{v_i}$  contenant  $v_i$ , et donc  $R_{v_i} \cap B_{v_j} \neq \emptyset$ . Comme  $C \in K_{v_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$  alors  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  est un cycle commun de joueurs dans la table  $R$ , contradiction, donc  $D$  est acyclique.

-On montre ensuite que  $D = (V, A)$  est une sous orientation rejetante de  $G$ , ce qui est évident puisque  $R$  est une table rejetante donc pour tout stable maximal  $S \in A_G$ , il existe un sommet  $v$  pour lequel  $S \in R_v$ , et par définition des arcs de  $D$ ,  $S$  est rejeté par le sommet  $v$ .  $D$  est donc bien une sous orientation, clique acyclique et rejetante  $G$  n'est donc pas coeur-solvable.

(b) Supposons que  $G$  n'est pas coeur-solvable, il existe donc une sous-orientation, clique acyclique et rejetante  $D = (V, A)$  de  $G$ . Soit  $R_v$ , la famille de tous les stables maximaux qui sont rejetés par  $v$ , il est clair que  $v \notin S$  pour tout  $S \in R_v$ , on a alors  $R_{v_i} \cap B_{v_j} = \emptyset$ ,  $v \in V$ , comme tout stable maximal est rejeté par  $D$ ,  $A_G = \cup (R_v, v \in V)$  est vérifiée, et donc  $\{(K_v, B_v, R_v) / v \in V\}$  est une table rejetante de  $E_G$ . On montre que cette table rejetante n'a aucun cycle de joueur commun et donc  $E_G$  n'est pas stable. Pour cela, supposons au contraire que  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  est un cycle de joueurs commun (i.e. :  $R_{v_i} \cap B_{v_{i+1}} \neq \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, s-1$ , et  $R_{v_s} \cap B_{v_1} \neq \emptyset$  et  $\cap (K_{v_i}, i \in \{1, \dots, s\}) \neq \emptyset$ ). L'existence des stables maximaux  $S \subseteq R_{v_i} \cap B_{v_j}$  montre que l'arc  $(v_i, v_j) \in A$ , et donc que  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  est un circuit dans  $D$ .

L'existence d'une clique maximale  $C \in \cap (K_{v_i}, i \in \{1, \dots, s\})$  montre que ce circuit induit une clique contradiction avec le fait que  $D$  n'est pas clique acyclique, et donc  $E_G$  n'est pas stable.

**Corollaire 1 :**

Un graphe est nouveau-solvable si et seulement si la fonction d'effectivité associée  $E_G$  est stable.

### b/ Perfection et g-stabilité :

Nous allons établir l'équivalence entre la perfection d'un graphe et la g-stabilité de la famille des coalitions  $K_G$  associée.

#### **Lemme 1 :**

Une famille  $K \subseteq \mathcal{P}(S)$  de sous ensembles de  $S$  a la propriété **BSP** si et seulement si pour toute pondération équilibrée  $w:K \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , de  $K$  le support  $K_w = \{k \in K / w(k) > 0\}$ , de  $w$  contient une partition de  $S$ .

#### **Lemme 2 :**

Un graphe est parfait si et seulement si la famille  $K \cup I(G)$  possède la propriété **BSP**.

#### **Preuve :**

→) supposons  $G$  parfait et montrons que  $K_G \cup I_G$  possède la propriété **BSP**, donc d'après le lemme 1, il suffit de montrer que le support de toute pondération équilibrée  $w$  contient une partition de  $I_G$ . Soit alors  $W = \{v \in V / w(k_v) > 0\}$ , et le graphe  $G' = (W, E')$  de  $G$ . Nous associons le poids  $z_v = w(k_v)$  à  $v \in W$ ,  $G'$  étant parfait il contient un stable  $S \subseteq W$  qui rencontre toutes les cliques de poids maximum de  $G'$ . Pour toute clique maximale  $C$  de  $I_G$  dans  $G$ , la clique  $W \cap C$  est ou bien une clique de poids maximum de  $G'$  et dans ce cas  $C \cap S \neq \emptyset$ , ou alors que  $w(\{C\}) > 0$  par définition de  $w$  comme pondération équilibrée.

Soit  $P = \{k_v / v \in W\} \cup \{\{C\} \in I_G / C \cap S = \emptyset\}$ ; il est clair que  $P$  est une partition de  $I_G$  et est incluse dans le support de  $w$ .

←) Supposons à présent que la famille  $K \cup I(G)$  possède la propriété **BSP**. Pour montrer que  $G$  est parfait, il suffit de montrer que pour tout sous graphe  $G' = (W, E')$  de  $G$  il existe un stable  $S \subseteq W$  qui rencontre toutes les cliques maximums (du point de vue cardinalité) de  $G'$ . Pour cela on définit une pondération  $w$  sur la famille  $K \cup I(G)$ , en posant  $w(k_v) = 1$  pour  $v \in W$ ,  $w(k_v) = 0$  pour  $v \in V - W$  et enfin

$\omega(\{C\}) = \omega(G') - |W \cap C|$  pour toute clique maximale  $C \in I_G$ , où  $\omega(G')$  est la taille maximum de la clique dans  $G'$ . Il est facile de voir que  $w$  est une pondération équilibrée de  $K \cup I(G)$  de multiplicité  $\omega(G')$ . Le lemme 1 montre que le support de  $w$  contient une partition  $P$  de  $I(G)$ . Soit  $S = \{v \in V / k_v \in P\}$ , il est clair que  $S$  est un stable maximal pour lequel,  $\omega(G') = |W \cap C|$  et donc  $\omega(\{C\}) = 0$  par définition de  $w$ , et donc  $C$  doit être couvert par un  $k_v \in P$ , de plus on a que  $v \in C \cap S$ ,  $S$  rencontre  $C$ .  $S$  rencontre donc toutes les cliques maximums de  $G'$  pour tout sous-graphe  $G'$  de  $G$ .  $G$  est donc parfait.

#### **Corollaire 2 :**

Un graphe est parfait si et seulement si  $K_G$  est g-stable.

**Définition :**

On dit que  $G'=(V',E')$  est un blow-up de  $G=(V,E)$ , s'il peut être obtenu à partir de  $G$  en remplaçant les sommets par des cliques, c'est à dire que s'il y a des sous-ensembles  $C_v \subseteq V'$  pour  $v \in V$ , tels que  $C_u \cap C_v = \emptyset$  si  $u \neq v$ ,  $V' = \cup (C_v, v \in V)$ , et  $(x,y) \in E'$  pour  $x \in C_u$  et  $y \in C_v$  si et seulement si  $u=v$  où  $(u,v) \in E$ .

On note que  $G$  est parfait alors tout blow up  $G'$  de  $G$  est parfait (V. Lovasz [26]).

**Lemme 3 :**

Soit  $G$  un graphe simple,  $E(G)$  la fonction d'effectivité et  $K_G$  la famille de coalitions associée. Si  $K_G$  est  $g$ -stable alors  $E(G)$  est stable.

Cependant si  $E(G')$  est stable pour tout blow-up  $G'$ , alors  $K_G$  est  $g$ -stable.

**Preuve:**

Supposons que  $K_G$  est  $g$ -stable, comme  $E(G)$  est jouable par le lemme 2, il existe alors un jeu formel  $\Gamma=(I_G, A_G, \Sigma, g)$  pour lequel la fonction d'effectivité  $E_\Gamma$  est un majorant de  $E_G$ , i.e:  $E_G \leq E_\Gamma$  et comme la fonction coeur est croissante on a :

$C(E_G, U, K_G) \supseteq C(E_\Gamma, U, K_G)$  pour toute fonction d'utilité  $U : I_G \times A_G \rightarrow \mathbb{R}$

Comme  $E_G(K, B) = 0$  pour  $K \notin K_G$  on a alors :  $C(E_G, U, P(I_G)) = C(E_G, U, K_G)$ , comme  $K_G$  est  $g$ -stable, le  $K_G$ -coeur  $C(E_\Gamma, U, K_G)$  de  $\Gamma$  n'est pas vide, donc

$C(E_G, U, P(I_G)) \neq \emptyset$ , pour toute fonction d'utilité  $U$ , ce qui prouve que  $E_G$  est stable.

Supposons à présent que  $K_G$  n'est pas  $g$ -stable alors on montre qu'il existe un blow-up  $G'$  de  $G$  pour lequel la fonction d'effectivité  $E_{G'}$  n'est pas stable. Comme  $K_G$  n'est pas  $g$ -stable, il existe un jeu formel  $\Gamma=(I_G, A_G, \Sigma, g)$ , pour lequel le  $K_G$ -coeur  $C(E_\Gamma, U, K_G)$  est vide. On définit une nouvelle fonction d'effectivité  $E$  en posant :  $E(K, B) = E_\Gamma(K, B)$  si  $K \in K_G$ ,  $B \subseteq A$  et  $E(K, B) = 0$  sinon. Il est clair que  $C(E_G, U, P(I_G)) = C(E_G, U, K_G) = \emptyset$  et donc  $E$  n'est pas stable, et d'après le théorème de Keiding il existe une table rejetante  $R = \{(K_j, B_j, R_j) / j \in J\}$  de  $E$  n'ayant aucun cycle de joueur commun, i.e :  $E(K_j, B_j) = 1$ , avec  $B_j \cap R_j = \emptyset$  pour  $j \in J$  et  $A = \cup (R_j, j \in J)$ .

Comme  $E(K, B) = 0$  pour  $k \notin K_G$ , toutes les coalitions  $K_j$  doivent appartenir à  $K_G$ .

Comme l'ajout des triplets  $(K_v, A, \emptyset)$  dans  $R$ , laisse la table, rejetante de  $E$ , nous pouvons supposer que  $K_v \cap K_j$  pour tout indice  $j \in J$  pour lequel  $v \in V$ .

Soit le graphe d'intersection  $G'=(J, E')$  de la famille  $\{K_j / j \in J\}$  i.e :  $(j_1, j_2) \in E'$  si  $K_{j_1} \cap K_{j_2} \neq \emptyset$ . Il est clair que  $G'$  est un blow up de  $G$ ; associons à tout stable maximal  $S$  de  $G'$  un résultat  $a(S) \in A$  tel que les coalitions  $K_j, j \in S$  sont disjoints deux à deux, car  $S$  est un stable de  $G'$ , et par le théorème 3 de Keiding et Vasin,  $K_j \cap B_j \neq \emptyset$ , puisque la fonction d'effectivité  $E$  est jouable. Choisissons pour cela  $a(S) \in \cap B_j$ , alors par définition tout  $B_j; j \in J$  contient tous les résultats  $a(S)$  associés

aux stables maximaux de  $G'$  qui contiennent  $j_i$  de plus  $a(S) \in R_j$ , pour un stable maximal  $S \subseteq J$  et  $j \in J, j \notin S$ ; on définit une orientation  $D' = (J, A')$  des arêtes de  $G'$ , en incluant tous les arcs  $(i, j) \in A'$  pour tout  $i \in S$  et  $j \in J$  pour lesquels  $a(S) \in R_j$ , et  $(i, j) \in E'$ . On montre que  $D'$  est une sous-orientation, clique acyclique et rejetante de  $G'$ . Ce qui prouve le théorème.

On montre qu'à tout cycle  $\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$  de  $D'$  correspond un cycle de joueurs commun de  $R$ . Comme  $R$  n'a pas de cycle de joueurs commun, alors  $D'$  est une clique acyclique en particulier ses arêtes ne sont pas orientées symétriquement, il s'agit donc d'une sous-orientation clique acyclique de  $G'$ .

Pour le voir, soit  $C'$  une clique maximale de  $G'$  contenant les sommets  $\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ ; comme  $G'$  est un blow-up de  $G$ , la clique maximale correspondante  $C$  de  $G$  doit appartenir à chaque coalition  $K_l, l=1, \dots, s$ , et donc il existe un cycle de joueurs commun. A partir de la définition des arcs de  $D'$  (s'il existe un arc  $(i, j)$  de  $A'$ ) l'existence d'un stable maximal  $S$  de  $G'$  pour lequel  $a(S) \in R_j \cap B_j$ ; ceci implique que  $\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$  est un cycle de joueurs commun.

On montre à présent que  $D'$  est une sous-orientation de  $G'$ ; (et comme dans la preuve du lemme 3 et à partir de la définition); pour tout stable maximal  $S$  de  $G'$  le résultat  $a(S)$  correspondant est rejeté par les coalitions  $K_l (a(S) \in R_l)$ ; puisque  $R$  est une table rejetante  $S$  est donc rejeté par le sommet  $j \in J$  de  $G'$  par définition des arcs de  $D'$ .

En conclusion, nous dirons que le blow-up  $G'$  de  $G$  n'est pas coeur-solvable puisqu'on peut construire une sous-orientation, clique acyclique et rejetante  $D'$  de  $G'$ ; et donc  $E_{G'}$  n'est pas stable à partir du lemme 3.

Comme il a déjà été signalé Berge et Duchet ont posé la conjecture:

Un graphe est parfait si et seulement si il est noyau solvable.

**Théorème 8 :** ([9])

Un graphe parfait est noyau solvable.

**Corollaire :** (immédiat)

Tout blow up d'un graphe parfait est noyau solvable.

Il ne peuvent pas montrer la réciproque, néanmoins ils montrent :

**Théorème 9 :** ([9])

Si le graphe  $G$  n'est pas parfait alors il existe un blow up  $G'$  de  $G$ , qui n'est pas noyau solvable.

Si  $G$  n'est pas parfait, alors  $K_G$  est  $g$ -stable par le corollaire 1, cependant il existe un blow up  $G'$  de  $G$  pour lequel  $E_{G'}$  n'est pas stable d'après lemme 3, et donc par le corollaire 2 le blow up n'est pas solvable.

### **Autre preuve du résultat de Boros et Gurvich :**

E. Boros et V. Gurvich ont fourni une preuve de la condition nécessaire de la conjecture "un graphe est parfait si et seulement si il est solvable", en la formulant en termes de fonction d'effectivité.

Suite à ce travail une preuve plus courte a été donnée par Ron Aharoni et Ron Holzman en 1995; et qui ne nécessite pas une familiarisation avec le concept de la théorie des jeux.

### **Définitions :**

-Un sous ensemble de  $V$  est dit dominant s'il rencontre le voisinage  $I(v)$  (constitué du sommet  $v$  et de tout sommet qui est extrémité initiale d'un arc ayant comme extrémité terminale  $v$ ) d'un sommet  $v$  de  $V$ , pour tout  $v$  de  $V$ .

-Un sous ensemble de  $V$  est dit indépendant, si pour tout couple de sommets dans ce sous ensemble, ils sont non adjacents.

-Une fonction non négative  $f$  définie sur  $V$ , est dite "fractionnaire dominante" si

$$\sum_{u \in I(v)} f(u) \geq 1 \text{ pour tout } v \text{ de } V,$$

elle sera dite fortement dominante si :  $\sum_{u \in K} f(u) \geq 1$ , pour tout  $v$  de  $V$ .

$$u \in K; K \subseteq I(v), \text{ où } K \text{ est une clique}$$

-Une fonction non négative définie sur  $V$  est dite fractionnaire indépendante si;

$$\sum_{u \in K} f(u) \leq 1 \text{ pour toute clique } K.$$

-Un noyau dans  $D$  est un ensemble de sommets dominant (absorbant) et indépendant (stable).

-Un noyau fractionnaire est une fonction sur  $V$  qui est à la fois fractionnaire indépendante et fractionnaire dominante; si de plus elle est fortement indépendante on l'appelle noyau fractionnaire fort.

La fonction caractéristique d'un noyau est un noyau fractionnaire fort, par abus de langage.

-Un cycle dans  $D$  est dit propre si tous ses arcs sont anti-symétriques.

-Un graphe dans lequel aucune clique ne contient de cycle propre est dit clique acyclique.

Il est à remarquer qu'une clique qui contient un cycle hamiltonien propre ne possède pas de noyau fractionnaire et ceci constitue le seul obstacle possible pour lequel le résultat suivant n'est pas vérifiée.

### **Théorème 10 : ([1])**

Tout digraphe qui est clique-acyclique possède un noyau fractionnaire fort.

Dont la preuve est basée sur le théorème de Scarf suivant :



**Théorème 11 :** ([37])

Soit  $n < m$  et  $B$  une matrice réelle  $n \times m$  telle que  $b_{ij} = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker), pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Soit  $b$  un vecteur non négatif de  $\mathbb{R}^n$  tel que l'ensemble  $\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^m; B\alpha = b \}$  est borné. Soit  $C$  une matrice  $n \times m$  telle que  $c_{ij} \leq c_{ik} \leq c_{jj}$  pour  $i, j \leq n$  et  $i \neq j$  et  $k > n$ . Alors il existe un sous ensemble  $J$  de taille  $n$  dans  $\{1, \dots, m\}$  tel que :

- (a)  $B\alpha = b$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ ; tel que  $\alpha_i = 0$  lorsque  $j \notin J$ , et
- (b) pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $c_{ik} \leq c_{jj}$  pour tout  $j \in J$ .

**Preuve du théorème 10 :**

Soit  $D=(V,A)$  un digraphe qui est clique-acyclique, et  $K_1, K_2, \dots, K_n$  des cliques maximales dans  $D$ .

On forme un nouveau digraphe  $D'$  en ajoutant à  $D$  les sommets  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ; et tous les arcs de la forme  $(u, z_i)$ ,  $u \in K_i$ , et on note par  $K'_i = K_i \cup \{z_i\}$  ( $i \leq n$ ).

On peut facilement voir que  $D'$  est clique-acyclique.

Dans chaque clique  $K'_i$  il existe un ordre linéaire, noté par  $>_i$ , compatible avec avec les arcs anti-symétriques de  $K'_i$ , ce qui signifie que; si  $u, v \in K'_i$  et  $(u, v)$  est un arc anti-symétrique dans  $D'$ , alors  $u >_i v$ .

Notons par :  $w_1 = z_1, \dots, w_n = z_n, w_{n+1}, \dots, w_m$  les sommets de  $D'$ .

On définit une matrice  $C$  ( $n \times m$ ) comme suit:

pour tout  $i, j$ ; tel que  $w_i \notin K'_i$  soit  $c_{ij} = M$ , où  $M$  est un nombre strictement plus grand que  $|V|$ .

et si  $w_i \in K'_i$ ; nous considérons  $c_{ij}$  comme étant la plus grande valeur attribuée au sommet  $w_i$  relativement à l'ordre  $>_i$ , autrement dit:  $c_{ij} = 0$  si  $w_i$  est minimal dans  $K'_i$  et  $c_{ij} = 1$  si on attribue à  $w_i$  la valeur suivante de  $K'_i$  correspondante à l'ordre. Ainsi de suite, jusqu'à épuisement de tous les sommets de  $K'_i$ .

On définit ensuite la matrice  $B$ ; la matrice d'incidence des cliques  $K'_i$ , par :

$$B = (b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{où} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } w_j \in K'_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant le théorème de Scarf aux matrices  $B$  et  $C$  et en prenant  $b = (1, \dots, 1)$ ; on peut vérifier que les conditions du théorème sont satisfaites, soit alors  $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ ; sous ensemble qui existe d'après le théorème et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ , pris comme dans (a) du théorème. Nous définissons une fonction  $f: V \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ ;  $f(w_i) = \alpha_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; il est clair que  $f$  est une fonction fractionnaire indépendante dans  $D$ . Pour finir la démonstration du théorème 10, il restera à montrer que  $f$  est fortement dominante.

Soit pour cela,  $w_k$  dans  $V$  ( $k > n$ ), par (b) du théorème de Scarf, il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $c_{ik} \leq c_{jj}$  pour tout  $j \in J$ .

Soit  $K_i^J = \{w_j \in K_i^j; j \in J\}$ , d'où il s'ensuit que  $K_i^J \subseteq I(w_k)$ , seulement si  $w_i \in K_i^j$  et  $w_i$  non relié à  $w_k$  ou alors  $(w_k, w_i)$  est un arc non symétrique dans  $D$ , alors  $c_{ik} > c_{ij}$ .  $K_i^J$  est donc une clique dans  $D$  contenue dans  $I(w_k)$ , satisfaisant d'après (a),  $\sum \alpha_i = 1$ .  $f$  est donc fortement dominante.

$$w_i \in K_i^J$$

D'où l'existence d'un noyau fractionnaire fort.

Nous rappelons qu'un graphe est dit solvable si toute orientation clique acyclique (admissible) dans ce graphe possède un noyau.

### **Théorème 12 :**

Une orientation d'un graphe parfait a un noyau si et seulement si elle possède un noyau fractionnaire fort.

Pour la preuve on utilisera un résultat de L. Lovasz.

**Lemme:** ([27])

Soit un graphe parfait, avec une fonction poids non négative ( $\neq 0$ ) sur les sommets, on peut trouver un ensemble stable dans le graphe qui rencontre toutes les cliques de poids maxima.

### **Preuve du théorème 12:**

Dans ce qui a précédé, on a fait remarquer que l'existence d'un noyau entraînait celle noyau fractionnaire fort.

Nous démontrons à présent que l'existence de noyau fractionnaire forte entraîne celle d'un noyau.

Soit  $D$  une orientation de graphe parfait  $G$  et  $f$  une fonction fractionnaire forte sur  $D$ . comme  $f$  est une fonction indépendante fractionnaire, le poids maximal sur les cliques de  $D$  est 1. Soit  $S$  le stable qui rencontre toutes les cliques de poids 1 (il existe d'après le lemme de Lovasz), comme  $f$  est fortement dominante, alors pour tout sommet  $v$ , il existe une clique  $K$  de poids 1 contenue dans  $I(v)$ ; comme  $S$  rencontre  $K$ ,  $S$  domine alors  $v$  et donc  $S$  est noyau dans  $D$ .

On déduit à partir des théorèmes 10, 12, le théorème de Boros et Gurvich à savoir : un graphe parfait est noyau solvable.

La preuve de la réciproque de ce résultat reste un problème ouvert.

## Conclusion

Le problème d'existence de noyaux dans les graphes orientés est un problème difficile en général puisqu'il est connu qu'il est NP-complet.

Néanmoins, si on impose aux digraphes certaines conditions, le digraphe devient noyau-parfait. Nous avons dans cette thèse étudié certains de ces digraphes et entre autre étudié le problème assez difficile posé par Pierre Duchet à savoir l'existence de noyau dans les digraphes tels que tout circuit impair possède deux cordes courtes.

La difficulté de la conjecture "un graphe parfait est solvable" posée par Claude Berge et Pierre Duchet, a été réduite; depuis l'introduction de la théorie des jeux pour sa résolution.

En effet, Endre Boros et Vladimir Gurvich ont réussi moyennant les résultats établis en théorie des jeux à montrer la solvabilité des graphes parfaits; quoi que la conjecture reste toujours irrésolue dans un sens.

R. Aharouni et R. Holzman est arrivé par la suite à démontrer le même résultat en utilisant seulement le théorème de Scarf; tiré de la théorie des jeux.

Il serait intéressant donc de penser à résoudre complètement cette conjecture.

Par ailleurs; dans le chapitre des graphes planaires parfaits nous avons exposé l'algorithme de décomposition des graphes planaires parfaits de Hsu, où il a été vérifié, qu'à chaque décomposition "G est parfait si et seulement si toutes ses composantes sont parfaites".

A chaque  $i$ -séparation ( $i=1,2,3,4$ ) la  $i$ -composition peut être définie comme l'opération inverse en recollant les pièces au niveau des sommets de l'ensemble d'articulation  $Q$  qui figure dans toutes les pièces; nous avons, à l'occasion pensé à vérifier la conjecture à savoir : G est planaire parfait alors G est solvable.

Il faudrait pour cela de montrer que les quatre types de décomposition conservent la notion de solvabilité, puis considérer la classe de graphe  $L$ ; où F. Maflray montre qu'ils sont solvables (en particulier ils sont M-Solvables); et la classe de graphes incluse dans  $S$ ; qui sont évidemment solvables puisque  $S_1, S_2$  et  $S_3$  le sont ( $S_1, S_2, S_3$  sont donc M-Solvables).

Il restera donc à montrer la solvabilité des graphes de comparabilité.

En fait; pour montrer que la conjecture est vraie pour la M-Solvabilité, il faudrait prouver que les opérations utilisées pour la décomposition du graphe conservent la M-Solvabilité; il est connu par C. Champetier d'une part et M. Blidia et K. Engel d'autre part que les graphes de comparabilité sont M-solvables.

## ANNEXES

# ANNEXE (I)

```

PROGRAM NOYEAUX;
uses crt;
label 1,2;
const nmax=30: {nombre max de sommets du graphe}

type sommet=0..nmax;
    ens_sommets=set of sommet;
    ens_suisvant=array[sommet] of ens_sommets;
    ens_precedent=array[sommet] of ens_sommets;
    deg=array[sommet] of integer;

var g:ens_suisvant;
    t:ens_precedent;
    degrep,degren:deg;
    n,j,k:integer;
    noyau,stack,vc,ct,vstable,vnstable,rg,sp,sz,vsp,vsm:ens_sommets;
    parif:text;
    car:char;
    nomfichier:string;

{*****}

procedure saisie(var n:integer;var g:ens_suisvant;var t:ens_precedent;var degrep,degren:deg);
var i,j,k:integer;
begin
    write('entrer le nombre de sommets du graphe n <= ',nmax,' '); readln(n);
    for i:=1 to n do
    begin
        write('entrer le degre plus du sommet: ',i,' '); readln(degrep[i]);
        write('entrer le degre moins du sommet: ',i,' '); readln(degren[i]);
        g[i]:=[];
        t[i]:=[];
        if (degrep[i]>0)
        then for j:=1 to degrep[i] do
            begin
                write('entrer le ',j,' -eme element de g[',i,'] : ');
                readln(k);
                g[i]:=g[i]+{k};
            end;
        writeln;
        if (degren[i]>0)
        then for j:=1 to degren[i] do
            begin
                write('entrer le ',j,' -eme element de t[',i,'] : ');
                readln(k);
                t[i]:=t[i]+{k};
            end;
        writeln;
    end;
end;

{*****}

procedure affichage_du_graphe(n:integer;g:ens_suisvant;t:ens_precedent;degrep,degren:deg);
var i,j:integer;

```

```

begin
write(perif,'ce graphe a n= ',n,' sommets'); writeln(perif);
write(perif,'pour chaque sommet i, g[i] est l'ensemble de ses suivants : ');
writeln(perif);
write(perif,'pour chaque sommet i, t[i] est l'ensemble de ses precedents : ');
writeln(perif);
for i:=1 to n do
begin
write(perif,'g['i'] = {');
if (degren[i]>0)
then for j:=1 to n do if (j in g[i]) then write(perif,' ',j);
write(perif,'}');
writeln(perif);
write(perif,'t['i'] = {');
if (degren[i]>0)
then for j:=1 to n do if (i in t[j]) then write(perif,' ',j);
write(perif,'}');
writeln(perif);
end;
end;

```

```

{*****}

procedure voisp(var rg:ens_sommets;gens_suivant:var sp,vsp:ens_sommets);
var
k:integer;
begin
vsp:=[];
for k:=1 to n do if (k in sg) then vsp:=vsp+[k]*rg+sp;
end;

```

```

{*****}

procedure voisp(var rg:ens_sommets;tens_precedent:var sp,vsp:ens_sommets);
var
k:integer;
begin
vsp:=[];
for k:=1 to n do if (k in sm) then vsp:=vsp+[k]*rg+sp;
end;

```

```

{*****}

procedure suc(var rg:ens_sommets;gens_suivant:var sp:ens_sommets;var vsp:ens_sommets);
var
ki:integer;
begin
voisp(rg,g,sp,vsp);
[for ki:=1 to n do if (ki in vsp) then write(perif,ki);
while (vsp<>[]) do begin for ki:=1 to n do begin
if (ki in vsp) then
sp:=sp+[ki]*rg;
voisp(rg,g,sp,vsp);
[write(perif,ki);]
end;
end;

```

```

{car:=readkey;}
end;

[*****]

procedure pred(var rg:ens_sonnets; trans precedent var sm, vs: ens_sonnets);
var
ki: integer;
begin
for ki:=1 to n do if (ki in vs) then write(perif, ki);
vs:=rg, t, sm, vs;
while (vs<>[]) do begin for ki:=1 to n do begin
if (ki in vs) then
sm:=sm, ki, rg;
vs:=rg, t, sm, vs;
write(perif, ki);
end;
end;
end;

{car:=readkey;}
end;

```

```

[*****]

procedure cfct(var rg:ens_sonnets; var sp, sm, ct:ens_sonnets);
label 2;
var
ki, ji: integer;
vct, vrg:ens_sonnets;
begin
rg:=rg;
ki:=0;
repeat ki:=ki+1 until (ki in vrg);
p:=ki; sm:=ki; vs:=[]; vsm:=[];
uc(vrg, g, sp, sp);
car:=readkey;
red(vrg, t, sm, vs);
t:=sp*sm;
write(perif, '(');
for ji:=1 to n do begin
if (ji in ct) then write(perif, ji, ',');
end;
write(perif, ')');
writeln;
disp(vrg, g, ct, vct);
write(perif, '(');
for ji:=1 to n do begin
if (ji in vct) then write(perif, ji, ',');
end;
write(perif, ')');
car:=readkey;
(vct<>[]) then begin
vrg:=vrg-ct;
write(perif, '(');
for ji:=1 to n do begin
if (ji in vct) then write(perif, ji, ',');
end;
end;
end;

```

```

write(perif, '');
vct:=[];
goto 2;
end;

```

```
end;
```

```

(*****

```

```

procedure biparivar ctens_somets; var stablectens_somets;
var
ki, l, j: integer;
vpstable, vnstable, rotctens_somets;
begin
ki:=0;
repeat ki:=ki+1; until (ki in ct);
stable:=[];
for l:=1 to n do begin
write(sp,rg,g,stable, vpstable);
write(sm,rg,t,stable,vnstable);
if (l in ct) and not(l in vpstable) and not(l in vnstable)
then stable:=stable+[l];
end;
[write(perif, '{');
for j:=1 to n do begin
if (j in stable) then write(perif, j, ', ');
end;
write(perif, ' ');
rot:=ct-stable;
for l:=1 to n do begin if (j[l]*rot) <> {} then if (l in rot) then stable:=[]; end;
end;

```

```

(*****

```

```

begin (principal);
clrscr;
writeln; writeln;
write('CONSTRUCTION D'UN NOYAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUITS IMPAIRS');
writeln; writeln;
write('Sortie sur Ecran (E) // sur Imprimante (I) // dans Fichier (F)');
repeat car:=readkey until car in ['i', 'I', 'a', 'E', 'F', 'F'];
if car in ['i', 'I']
then
begin
assign(perif, 'lpt:');
rewrite(perif);
writeln(perif); writeln;
end
else if car in ['a', 'E'] then
begin
assign(perif, 'con');
rewrite(perif);
writeln(perif);
writeln;
end
else
begin

```



```

writeln;
write('Entrer le nom du fichier resultat (ex a:resultat.dat : ');
readln(nomfichier);
assign(perif,nomfichier);
rewrite(perif);
writeln(perif);
writeln;
end;

writeln;
writeln;
saisie(n,g,t,degre,degre);
clrscr;
affichage_du_graph(n,g,t,degre,degre);
readln;
writeln;
writeln(perif,'le noyau est: ');
write(perif);
rg:=[];ct:=[];sp:=[];sn:=[];vsp:=[];vsn:=[];stable:=[];noyau:=[];vstable:=[];
repeat
  cfct(rg,sp,sn,ct);
  bipart(stable);
  if stable <> [] then begin
    noyau:=noyau+vstable;
    rg:=rg-ct;
    vsn(rg,t,stable,vstable);
    rg:=rg-vstable;
    (write(perif,' ');
    for j:=1 to n do begin
      if j in rg then write(perif,j,' ');
    end);
    write(perif,' ');
    end
  else begin
    write(perif,'La grapha est avec circuit impair');
    goto l;
  end;
until rg=[];
write(perif,' ');
for j:=1 to n do begin
  if j in noyau then write(perif,j,' ');
end;
write(perif,' ');
l:car:=readkey;
writeln(perif);
end.

```

# ANNEXE I,

PROGRAM NOYAU:

```

uses crt;
label 1;
const MAX=20; {nombre max de sommets du graphe}

type sommets=0..max;
    ens_sommets=set of sommets;
    ens_suivant=array[sommet] of ens_sommets;
    ens_precedent=array[sommet] of ens_sommets;
    noya=array[sommet] of sommets;
    deg=array[sommet] of integer;

var n:integer;
    g:ens_suivant;
    t:ens_precedent;
    degrep,degrex:deg;
    n,j,i,l,k:integer;
    p:ts,s:sommet;
    r:ens_sommets;
    per:array;
    car:array;
    nom:file:string;

{*****}
procedure saisie(var n:integer; var g:ens_suivant; var t:ens_precedent; var degrep,degrex:deg);
var i,j,k:integer;
begin
    write('entrer le nombre de sommets du graphe n <= ',max,' '); readln(n);
    for i:=1 to n do
    begin
        write('entrer le degre plus du sommet: ',i,' '); readln(degrep[i]);
        write('entrer le degre moins du sommet: ',i,' '); readln(degrex[i]);
        g[i]:=[];
        t[i]:=[];
        if (degrep[i]>0)
        then for j:=1 to degrep[i] do
            begin
                write('entrer le ',j,' -eme element de g['',i,''] : ');
                readln(k);
                g[i]:=g[i]+[k];
            end;
        write(' ');
        if (degrex[i]>0)
        then for j:=1 to degrex[i] do
            begin
                write('entrer le ',j,' -eme element de t['',i,''] : ');
                readln(k);
                t[i]:=t[i]+[k];
            end;
        write(' ');
    end;
end;
end;

```

```

|*****|
procedure affichage_du_graphe(n:integer; g:ens_suivant;g:ens_precedent; degrep,degreu:deg);
var i,j:integer;
begin
  write(perif,'ce graphe a n= ',n,' sommets'); writeln(perif);
  write(perif,'pour chaque sommet i, g[i] est l'ensemble de ses suivants : ');
  writeln(perif);
  write(perif,'pour chaque sommet i, t[i] est l'ensemble de ses precedents : ');
  writeln(perif);
  for i:=1 to n do
  begin
    write(perif,'g[',i,']= {');
    if (degrep[i]>0)
    then for j:=1 to n do if (j in g[i]) then write(perif,j,',');
    writeln(perif,')');
    writeln(perif);
    write(perif,'t[',i,']= {');
    if (degreu[i]>0)
    then for j:=1 to n do if (j in t[i]) then write(perif,j,',');
    writeln(perif,')');
    writeln(perif);
  end;
end;
|*****|
function trou(puits:sommet;rg:ens_sommet;g:ens_suivant):sommet;
var ki:sommet;
begin
for ki:=1 to n do begin
  if (g[ki]*rg={}) and (ki in rg) then puits:=ki;
end;
trou:=puits;
end;
|*****|
begin (principal:)
writeln;writeln;
write('CONSTRUCTION D'UN NOYAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUITS');
writeln;writeln;
write('Sortie sur Ecran (E) // sur imprimante (I) // dans Fichier (F)');
repeat car:=readkey until car in ['i','j','e','E','I','F'];
if car in ['i','j']
then
begin
  assign
  (perif,'lpt1');
  rewrite(perif);
  writeln(perif); writeln;
end
else if car in ['e','E'] then
begin
  assign(perif,'con');
  rewrite(perif);
  writeln(perif);
end
end;

```

```

        writeln;
    end
else
    begin
        writeln;
        write('Entrer le nom du fichier resultat sex a:resultat.dat : ');
        readln(nomfichier);
        assign(perif,nomfichier);
        rewrite(perif);
        writeln(perif);
        writeln;
    end;
writeln;
writeln;
saisie(n,g,t,degrep,degreu);
clrscr;
affichage_du_graphe(n,g,t,degrep,degreu);
readln;
writeln;
write(perif);
rg:=1..n;ii:=1;
while (rg<>[]) do
    begin
        y:=couv(puits,rg,g);
        if y<>0 then
            begin
                x[ii]:=y;
                ii:=ii+1;
                rg:=rg-{y};
                rg:=rg-t(y);
                writeln(perif);
            end
        else
            begin
                write(perif,'Le graphe est avec circuit');
                goto 1;
            end;
    end;
writeln(perif,'Le noyau est:');
write(perif,'{');
for k:=1 to ii-1 do
    write(perif,x[k],', ');
write(perif,'}');
l:=ar:=readkey;
writeln(perif);
end.

```



```
.....  
****/
```

```
int sonnet_stg; // int a;
```

```
int clique, nb_voisin;
```

```
k=0;  
for(i=0; i<N; i++) voisin[i]=0;  
for(j=0; j<N; j++)  
    if(g[0][j]==1)  
        voisin[j]++;  
k++;
```

```
nb_voisin=k;
```

```
if(nb_voisin==1)
```

```
    clique=FALSE;
```

```
else if(nb_voisin==2) clique=TRUE;
```

```
else {
```

```
    for(i=0; i<nb_voisin; i++)
```

```
        for(j=i+1; j<nb_voisin; j++)
```

```
            if(g[voisin[i]][voisin[j]]==0)
```

```
                clique=FALSE,
```

```
                i=j+nb_voisin;
```

```
            }
```

```
        else clique=TRUE;
```

```
    }
```

```
return(clique);  
.....  
****/
```

```
int sonnet_source(int a, {
```

```
int source, sonnet_actuel;
```

```
for(j=0; j<k; j++) {
```

```
    if(voisin[j]!=0) {
```

```
        sonnet_actuel=nb_voisin[j];
```

```
        if(d[a][sonnet_actuel]==0) {
```

```
            source=FALSE;
```

```
            j=k;
```

```
        }
```

```
    else source=TRUE;
```

```
    }
```

```
return(source);  
.....  
****/
```

```
int verifie_stable(int nb_elea)
```







1000  
1000

```
print('No. 1', 'Moyas')  
for i in range(10):  
    print('No. 1', 'Moyas')
```

```
else print('No. 1', 'Moyas')
```

## Références bibliographiques

- [1] R. Aharoni and R. Holzman, "Fractional kernel in digraphs", à paraître.
- [2] C. Berge, Graphs, Amsterdam, New York North Holland, 1985.
- [3] C. Berge and P. Duchet, "Perfect graphs and kernels", Bulletin of institute of mathematics Academia, Sinica 16, pp. 263-274, 1988.
- [4] C. Berge and P. Duchet, "Strongly perfect graphs", in Topics on perfect graphs (Berge and Chvatal) North holland Amsterdam, 1984.
- [5] M. Blidia, "Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes", Thèse d'Uni. Paris 6, 1984.
- [6] M. Blidia, P. Duchet and F. Maïffray, "On the orientation of Meyniel graphs", J. of Theory, vol 18, N°=7, pp 705-711, 1994.
- [7] M. Blidia, P. Duchet et F. Maïffray, "Note on kernels in perfect graphs", Combinatorica 13 (2), pp. 231-233, 1993.
- [8] M. Blidia and K. Engel, "Perfectly orderable graphs and almost all perfect graphs are kernel-M-solvable". Graphs and Combinatorics 8, pp. 103-108, 1992.
- [9] E. Boros and V. Gurvich, "Perfect graphs are kernel solvable", à paraître.
- [10] M. Burlet and J. Fourlupt, "Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph, in Topic on perfect graphs (Berge and Chvatal) North holland, Amsterdam, 1984.
- [11] V. Chvatal, "Perfectly ordered graphs", in Topics on perfect graphs (Berge and Chvatal) North Holland, Amsterdam 1984.
- [12] C. Champetier, "Sur l'existence d'un noyau dans les graphes de comparabilité", J. Comb. Theory (B) 47, pp. 111-113, 1989.
- [13] P. Duchet, "Représentation, noyaux en théorie des graphes", Thèse Paris 1979.
- [14] P. Duchet, "graphes noyaux parfaits", in Annals of discrete Mathematics, vol 9, pp. 93-101, North Holland, Amsterdam, 1980.
- [15] P. Duchet, Parity graphs are kernel M-solvable, J. Comb. Theory Ser. B 43, pp. 121-126, 1986.
- [16] P. Duchet, "A sufficient condition for a graph to be kernel perfect", J. of Graph Theory 11, pp. 81-86, 1987.
- [17] P. Duchet and H. Meyniel, "A note on kernel critical graphs", Disc. Maths, 33, pp. 103-105, 1981.
- [18] P. Duchet and H. Meyniel, "Kernels in directed graphs, a poison game", Disc. Maths 115, pp. 273-276, 1993.
- [19] P. Duchet, S. Olariu, "Graphes parfaitement ordonnables généralisés", Disc. Maths, 90, pp. 99-101, 1991.
- [20] H. Galeana Sanchez and V. Neumann-Lara, "On kernels and semi-kernels of digraphs", Disc. Maths, 48, pp. 67-76, 1984.

- [21] H. Galeana Sanchez and H. A. Rincon-Mejia, "Some Meyniel like conditions for a digraph to have a kernel", to appear.
- [22] M.G Golumbic, "Algorithmic graph theory and perfect graphs", Academic Press, New York, 1980.
- [23] V. Gurvich and A. Vasin, "Conciliabile sets of coalitions for normal form games", In *Comput. Method of Optimiz. Theory and Appli. Math.*, Irkutsk (in russian).
- [24] W. L. Hsu, "Recognizing planar perfect graphs", *J. Assoc. Comp. Mach.*, 34, pp. 255-288, 1987.
- [25] H. Jacob, "Etude théorique du noyau d'un graphe", Thèse d'Univ. Paris 6, 1979.
- [26] H. Keiding, "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivité functions", *Inetr. J. of Game Theory* 14, pp. 93-101, 1985.
- [27] L. Lovasz, "A characterization of perfect graphs", *J. Comb theory B*, 13, N°2, pp. 95-98, 1972.
- [28] F. Maffray, "Sur l'existence des noyaux dans les graphes parfaits", Thèse d'Univ. Paris 6, 1984.
- [29] F. Maffray, "On kernels in  $i$ -triangulated graphs", *Disc. Maths.* 61, pp. 247-251, 1986.
- [30] F. Maffray, "Kernels in perfect line-graphs", *J. of Combinatorial Theory B*, 55, N°1, pp. 1-8, 1992.
- [31] H. Moulin and B. Peleg, "Cores of effectivité functions and implementation theory", *J. of Math. Economics* 10, pp. 115-145, 1982.
- [32] J. V. Neumann and O. Morgenstern, "Theory of games and Economic behavior", Princeton univ. press, Princeton N. J., 1944.
- [33] H. Sachs, "On the Berge conjecture concerning perfect graphs", in *Combinatorial Structures and their Applications* (Gordon and Breach, New-York), pp. 377-384, 1970.
- [34] G. Ravindra, "Meyniel graphs are strongly perfect", *J. C. Theory B*, 33, pp. 187-190, 1982.
- [35] M. Richardson, "Solutions of irreflexive relation", *Ann. of Math.*, 58, pp. 573-580, 1953.
- [36] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, "On monochromatic paths in edges colored digraphs", *J. Comb. Theory B*, 33, pp. 271-275, 1982.
- [37] H. Scarf, "The cores of  $n$  person game", *Economica* 35, pp. 50-69, 1967.