MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

------------------o------------------

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS

SÉTIF

MÉMOIRE

Présenté par

NASSER HIMOUN

Pour obtenir le titre de **Magister**

de l'Institut de Mathématiques

Option

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE D'ADOMIAN

Date de soutenance : 02/07/1998

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. H. MEKIAS	M. C.	Université de Sétif
Rapporteur :	Mr. K. ABBAOUI	M. C.	Université de Sétif
Examinateurs :	Mr. N. BENHAMIDOUCHE	M. C.	Université de M'sila
	Mr. A. KERAGUEL	C. C.	Université de Sétif
	Mr. D. BENTERKI	C. C.	Université de Sétif

Année 1997/98

بسم الله الرحمن الرحيم

DEDICACES

A celui qui m'est le plus cher

REMERCIEMENTS.

Le premier a qui je dois le plus de remerciements est ***DIEU*** tout puissant et tout compatissant ,car c'est grâce a lui seulement que je suis arrivé là ou je suis en me prêtant vie, capacité intellectuelle et goût de faire la mathématique. Bien entendu les paroles ne suffirons jamais pour reconnaître a ***DIEU*** tous les biens dont il nous a comblés.

Après ***DIEU*** ce sont ***mes parents*** auxquels je dois des remerciements pour leurs sacrifices sans réserve a mon égard pour que je poursuive mes études .Sachant que cela compte pour eux plus que toute autre chose .

Mes remerciements vont aussi a tous ceux qui nous ont appris de façon directe où indirecte l 'amour de la science et du bien.

Je n'oublierais pas de mentionner en particulier mes professeurs vietnamiens : messieurs ***Do Hang THAN*** ,***Nguyen Xuan LIEM*** ,***QUET*** **et** ***LIM*** avec lesquels j'ai souvent parlé sur les mathématiques et qui m'ont ,par leurs encouragements ,donné confiance en moi.

Je suis aussi redevable a des mathématiciens tels que:messieurs ***R.GODEMENT*** , ***A.DONEDDU*** , ***L .SCHWARTZ*** , ***S.LANG*** , ***L.LUSTERNIK*** , ***V.SMIRNOV*** ,

J.DIEUDONNE ,***R.WALTER*** **et** tant d'autres dont les livres ont étés pour moi les vrais professeurs.

Je remercie monsieur ***Karim ABBAOUI*** d'avoir accepter d'être mon encadreur. Je le remercie aussi pour sa gentillesse et sa modestie a mon égard ce qui m 'a permis de travailler à mon aise.

Je remercie monsieur ***H. MEKIAS*** d'avoir accepter de présider ce jury et messieurs ***A. BENHAMIDOUCHE*** , ***A. KERAGUEL*** et ***D. BENTERKI*** d 'avoir accepter d 'être les membres de ce jury et monsieur ***M. ACHACHE*** pour sa présence au jury.

Je remercie aussi messieurs ***Benyattou BENABDERRAHMANE***, ***Brahim NOUIRI*** pour m'avoir héberger durant toute une année avec le sourire sur le visage et ***Karim GOUADFEL*** pour me les avoir présentés .

Je remercie messieurs ***Boubakeur MEROUANI***, ***Hocine MEKIAS***, ***Abdeltatif benchérif MADANI*** **et** ***Salah DRABLA*** pour leur gentillesse, leur modestie très rares de nos jours et tout ce qu'ils ont faits pour moi.

Nasser HIMOUN

Table des matières .... **Pages**

1.Introduction :

Depuis toujours , l'étude de problèmes pratiques découlant de diverses sciences mettaient les mathématiciens devant des problèmes (en général des équations) auxquels ils doivent apporter des solutions numériques. Cela a fait que les mathématiciens ont été sans cesse obligés d'étudier des équations de plus en plus générales et difficiles et d'élaborer des méthodes de plus en plus efficaces .

On peut dire que la résolution d 'équations a constitué le pain journalier du mathématicien d'avant **(1900)** et c'est de là que sont nés beaucoup de domaines des mathématiques ; en voici quelques exemples:
de l'étude des équations algébriques sont nés : les nombres complexes; groupes et corps, de l'étude des systèmes linéaires sont nés: algèbre linéaire et multilinéaire, théorie des déterminants et matrices, l'étude des équations fonctionnelles a donné naissance a l 'analyse fonctionnelle.

Jadis, résoudre une équation signifiait trouver ses solutions sous forme explicite en fonction des paramètres du problème. Cette idée était opérationnelle pour des systèmes linéaires de petits ordres, pour les équations algébriques de degrés 1,2, 3 ,4 et pour les équations fonctionnelles **(EDO,EDP et EI)**de formes simples.

La résolution des équations de degrés (**3 et 4**) par les algébristes italiens (**CARDAN ; DEL FERRO ETC...**) a incité les mathématiciens à étudier des équations de degrés supérieurs. Ils leurs a fallu deux siècles de recherche vaine pour décider d 'abandonner les vieilles méthodes de changement de variables en vogue chez les Italiens et qui ont si bien marché pour les degrés 2,3 et 4.

Les nouvelles méthodes initiées par **LAGRANGE** ont permis a **RUFFINI** de prouver, quoique de façon incomplète, que pour des équations de degrés supérieurs a **4** il n'est plus possible de donner les solutions a l'aide de formules explicites, a l 'instar des équations de degrés inférieurs . **ABEL** a complété le résultat de **RUFFINI**. **GALOIS** (à **21ans !**)a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu 'une équation de degré supérieur à **4** soit résoluble par radicaux, ses travaux ont constitué les fondements de la théorie des groupes et corps. Nous ne pouvons donc espérer résoudre de façon explicite de équations générales. Ce fait rend indispensable le développement de méthodes efficaces pour approcher les solutions des équations impossibles a résoudre exactement. A cette entreprise ont participée de très grands mathématiciens tels que: **EULER, FOURIER, LAPLACE ,LAGRANGE, GAUSS etc...**

Il ne faut pas penser que cette situation soit propre aux équations algébriques ou transcendantes. En effet même pour les équations différentielles une situation similaire se présente. **LIOUVILLE** a démontré avec une méthode semblable a celle de **RUFFINI**! qu'il n'est pas possible de résoudre au moyen de fonctions élémentaires toutes les équations différentielles .Le développement de méthodes approchées pour traiter chaque type d 'équation devient impérieux.

Une autre situation qui rend indispensable le développement de méthodes approchées est que dans certains cas les formules exactes même existantes sont inexploitables en pratiques ! . Situation paradoxale mais caractéristique des mathématiques. Comme exemple suggestif un système linéaire de d'ordre **100** demanderait à un ordinateur faisant un million d 'opérations par seconde !**20** siècles ! pour être résolu au moyen des belles formules de **CRAMER.** <u>Il y a un grand fossé entre théorie et application .</u>

Dans chaque domaine existent plusieurs méthodes, malheureusement où (heureusement ?) il n 'ya aucune méthode universelle qui puisse résoudre tous les types d'équations avec de très bonnes performances. Ce qui fait que toute nouvelle méthode est la bienvenue si elle a de bonnes performances.

C'est à l'une de ces méthodes que sera consacré ce présent mémoire : **la méthode d'ADOMIAN. D**éveloppée vers **1983** par **GEORGE ADOMIAN** cette méthode a le mérite de pouvoir résoudre, dans des conditions souvent réalisables en pratique, toute sorte d'équations. Grâce aux résultats obtenus et aux applications de cette méthode faites par **ADOMIAN, CHERRUAULT RACH, GABET, ABBAOUI, SENG, AMMAR, NDOUR, SACCOMANDI SOME et** tant d'autres. Cette méthode mérite d'être considérée comme membre a part entière de la famille des méthodes numériques respectables.

2.Qui est GEORGE ADOMIAN ?

C'est un savant américain né en**1923.** IL a eu son **PHD** en physique théorique en **1963** à l'université de **MICHIGAN.** Il a occupé le poste de professeur distingué de mathématiques à l'université de **GEORGIE** depuis**1966,** directeur du centre de mathématiques appliquées à partir de **1976** et a aussi occupé des postes importants dans d 'autres institutions scientifiques. **Il** s 'est intéressé surtout aux équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles stochastiques où déterministes ainsi qu' aux systèmes dynamiques stochastiques.

Ses contributions en mathématiques portent sur :

1- modélisation et analyse des systèmes dynamiques,

2-méthodes de résolution d'équations fonctionnelles.

Dans le domaine technique **ADOMIAN** a participé à des recherches en armement et à certains programmes de recherches spatiales.

Pour ses contributions aux équations stochastiques non linéaires il a reçu le prix (**RICHARD BELLMAN**) en **1989.I**l est décédé en **1996.**

3.Position du problème :

Vers **1983** **GEORGE ADOMIAN** a developpé une méthode pour résoudre des équations du type :

$$U = N(U) + C$$

Ou :

$$N : D \to H$$

Avec **D** domaine de **H** ; **H** un espace de **BANACH et C∈D.**

Dans ce qui suit, nous étudierons de façon approfondie la méthode **d 'ADOMIAN** tant du point de vue théorique que du point de vue des applications. **Nos résultats montreront non seulement que la méthode demeure très mal connue mais aussi quelle n'est pas aussi nouvelle qu'on le pense .**

CHAPITRE 1:

NOUVELLE PRESENTATION DE LA METHODE D 'ADOMIAN:

1.1.Présentation classique de la méthode :

Avant de donner la nouvelle façon de présenter cette méthode il est nécessaire de savoir comment la présente les autres auteurs . Nous suivrons pour cette présentation l'exposé de [2] qui est considérée comme l'une des étapes les plus importantes dans le développement de la méthode **d 'ADOMIAN.**

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$U - N(U) = C \tag{1.1.1}$$

où N est un opérateur d'un espace de **BANACH H** dans lui même et C est un élément connu de **H**. Supposons que (1.1) admet au moins une solution X dans H.

La méthode décompositionnelle consiste à chercher la solution sous la forme:

$$U = \sum_{i=o}^{\infty} U_i \tag{I.1.2}$$

L'opérateur N est décomposé en série:

$$N(U) = \sum_{n=o}^{\infty} A_n \tag{1.1.3}$$

où les A_n sont appelés polynômes **d'ADOMIAN** et sont obtenus à partir des relations :

$$Y = \sum_{i=o}^{\infty} \lambda^{i^i} U_i \quad , \quad N(V) = N(\sum_{i=o}^{\infty} \lambda^{i^i} U_i) = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n A_n \tag{1.1.4}$$

Ces relations sont formelles et rien n'est prouvé quant à la convergence des séries

$\sum_{i=o}^{\infty} U_i$ et $\sum_{n=o}^{\infty} A_n$.

Remplaçant (1.1.2) et (1.1.3) dans (1.1.1) , nous obtenons :

$$\sum_{i=o}^{\infty} U_i = \sum_{i=o}^{\infty} A_i + C \tag{1.1.5}$$

Les U_i sont identifiés en utilisant les formules:

$$\begin{cases} U_o = C \\ U_1 = A_0 \\ . \\ . \\ U_n = A_{n-1} \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

nous allons prouver après que les A_n dépendent uniquement de U_o, U_1 ,..,U_n et la formule (1.1.6) détermine de proche en proche tous les termes de la série solution.(1.1.2).

l'objection peut être la plus sérieuse qu'on peut porter a cette présentation est la suivante le paramètre λ apparaît de façon assez mystérieuse et rend la méthode assez floue ,ce a quoi nous allons y remédier.

Maintenant nous donnerons une nouvelle présentation pour la méthode d'**ADOMIAN** (**1923 - 1996**). Nous verrons que notre manière de faire rend la méthode très naturelle et montre clairement ce qu'il ya de nouveau dans le travail d'**ADOMIAN .** Nous donnerons aussi une justification théorique pour la méthode asymptotique [**3**]. L'élégance de la méthode **d'ADOMIAN** est due à sa relation avec des domaines variés et intéressants des mathématiques tels que l'analyse combinatoire,calcul différentiel dans les espaces de **BANACH,** théorie des séries et avec tous les types d'équations .

Dans le chapitre 5 nous donnerons une méthode plus générale que celle d'**ADOMIAN.**

1.2.Nouvelle présentation de la méthode :

la méthode d'**ADOMIAN** résout des équations du type :

$$U = f(U) + C \qquad (1.2.1)$$

La forme (1.2.1) est dite forme canonique d '**ADOMIAN. L**es équations qu'on rencontre dans la pratique peuvent ne pas être sous la forme (1.2.1). Cette question sera étudiée à la fin de ce chapitre. **P**our développer la méthode d'**ADOMIAN** de façon naturelle nous considérerons une équation plus générale que (1.2.1).Soit l'équation :

$$U=\lambda N(U)+C \tag{1.2.2}$$

Ou λ est un paramètre dans le corps **K(=R** où **C).**Pour $\lambda=1$on retrouve l'équation (12.1).Avec la forme (1.2.2) nous pouvons donner une condition suffisante d'existence de solutions pour (1.2.1):

$$U=\lambda N(U)+C \Leftrightarrow \lambda N(U)-U+C=0.$$

On pose :

$$\Phi(U,\lambda)=\lambda N(U)-U+C. \tag{1.2.3}$$

Alors : $$\Phi(U,\lambda)=0\ . \tag{1.2.4}$$

On utilise le théorème des fonctions implicites pour étudier l'existence des solutions pour (1.2.2).

Si N est différentiable en C alors :

$$\Phi'_u(C,0)=I$$

inversible. Donc :

$\exists\delta>0,\varepsilon>0$ tels que :

pour$|\lambda|\leq\delta$ il existe une fonction : $U:[-\delta\ ,\ \delta]\to H$.

$$\lambda\to U(\lambda).$$

Telle que : $$\Phi(U(\lambda),\lambda)=0 \quad (\forall\lambda\in[-\delta\ ,\ \delta]).$$

Si de plus la fonction est indéfiniment différentiable en (C ,0) par rapport à U , il en sera de même de la fonction $U(\lambda)$ au point $\lambda=0$. Si $(\delta>1)$ notre équation admet au moins une solution qui est U(1). Avec notre formulation nous avons pu donner une condition impossible à trouver en usant seulement de la forme (1.2.1).

I.2.Recherche des solutions de l'équation (1.2.2) :

Le cas le plus régulier est quand N est indéfiniment diffrentiable en C. Dans ce cas le moyen le plus naturel pour résoudre (1.2.8) set de chercher la solution $U(\lambda)$ sous la forme :

$$U(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \, . \lambda^n \tag{1.2.5}$$

En remplaçant dans (1.2.2) nous devons avoir :

$$U(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \; \lambda^n = \lambda . \mathrm{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \; \lambda^n\right) + \mathrm{C}. \tag{1.2.6}$$

0n développe $\mathrm{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda\right)$ en série entière ce qui est possible, pour λ suffisamment petit , si l'on suppose N est développable en série en U_0 on aura :

$$N\left(\sum_{n}^{\infty} U_n \lambda^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \lambda^n . \tag{1.2.7}$$

les termes A_n seront déterminés après. De (1.2.6) et (1.2.7) on en déduit que :

$$\begin{cases} U_0 = C \\ U_1 = \mathrm{A}_0 \\ . \\ . \\ . \\ U_n = \mathrm{A}_n etc \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Ces égalités déterminent les (U_0) $(n \geq 0)$ de façon unique .En effet supposons que f soit développable en série entière au point C de rayon de convergence R>0 d'où :

$$N(u)=\sum_{n=0}^{\infty} N^{(n)}_{(u_0)}\ (u-u_0\ ,u-u_0,........,u-u_0)/\ \ n\,! \tag{1.2.9}$$

Où la différentiation se fait au sens de **FRECHET.**

En remplaçant U par (1.2.6) dans (1.2.9) et en développant la série entière suivant les puissances de λ on peut se rendre facilement compte que les termes A_n vérifient bien la propriété énoncée. Or (1.2.8) n'est autre que le schéma d'**ADOMIAN** qui sort de façon naturelle. Nous venons de voir que l'on peut développer la méthode d'une façon tout a fait naturelle. Cette façon de faire élimine les cercles vicieux qui caractérisent la méthode classique de présentation.

I.2.1.Remarques :

1-On vient de voir qu'en fait la méthode d'**ADOMIAN** peut être déduite de celle de **TAYLOR.**

2-La méthode qu'on vient d'utiliser pour développer la méthode d'**ADOMIAN** n'est pas du tout nouvelle on l'utilise entre autres pour résoudre les équations de **FREDHOLM** linéaires.

3-Il ne faut pas penser que le travail **d'ADOMIAN** est sans valeur car il a mis en évidence une méthode qui comme nous le verrons est très efficace.

1.3.Etude des polynômes D 'ADOMIAN :

Par définition même les polynômes d'**ADOMIAN** sont donnés par la formule :

$$A_n\{N(u)\}=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}N\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda u_i\right)\Bigg|_{\lambda=0}.(1)_{|n|},\ n\in IN \tag{1.3.1}$$

Dans ABBAOUI [2] on trouve les résultats suivants :

Théorème 1.3.1

Les A_n sont donnés par les formules:

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0) \\ A_n = \sum_{|np|=n} \dfrac{1}{p!} N^{(|p|)}(u_0)\,(u_{1[p_1]},\dots,u_{n[p_n]}) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

où:
$$u_{i[p_k]} := \underbrace{(u_i,\dots,u_i)}_{p_k\ fois}.$$

dans **[2]** on trouve aussi les résultats intéressants suivants :

Théorème. 1.3.2: si f es t une fonction scalaire les A_n sont donnés par la formule **:**

$$\begin{cases} A_0(u_0) = f(u_0) \\ A_n(u_0,\dots,u_n) = \sum_{|nk|=n} f^{(|k|)}(u_0)\dfrac{u^k}{k!} \quad , \ n \neq 0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

L'utilisation des formules (1.3.3) est délicate car il est difficile de trouver les k_i pour $i \geq 3$ solution de l'équation $|nk| = n$. Le corollaire suivant permet de surmonter cet obstacle et nous permet de calculer les k_i solutions de l'équation $|nk| = n$, pour tout n.

Corollaire.1.3.1:

$$\begin{cases} A_0(u_0) = f(u_0) \\ A_n(u_0,\dots,u_n) = \sum_{|\alpha|=n} f^{(\alpha_1)}(u_0)\dfrac{u_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\dfrac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!}\cdot\dfrac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Démonstration:

En posant :

$$\begin{cases} k_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ . \\ . \\ k_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ k_n = \alpha_n \end{cases} \tag{1.3.5}$$

nous obtenons :

$$|nk| = |\alpha| = n$$

et

$$|k| = \alpha_1$$

Cas particulier

Si f est linéaire, alors les A_n se réduisent à :

$$A_n = f(u_n),\ \forall n \in IN \tag{1.3.6}$$

Théorème.1.3.3.:

Dans (1.3.3), si on pose $u_i = a_i t^i$

alors:

$$A_n(u_0,\dots,u_n) = t^n A_n(a_0,\dots,a_n) \tag{1.3.7}$$

les polynômes d'**ADOMIAN** possèdent des propriétés intéressantes que voici elles se trouvent toujours dans (3).

Théorème .1.3.4 *:*

$$1)\ \frac{\partial}{\partial u_0} A_{n-k} = \frac{\partial}{\partial u_k} A_n,\quad \forall n, k, n \geq k \tag{1.3.8}$$

En particulier pour n = k, nous obtenons:

$$f'(u_0) = \frac{\partial}{\partial u_n} A_n \tag{1.3.9}$$

$$2)\ A_{n+1} = \tfrac{1}{n+1} K_n A_n$$

où

$$K_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1) u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k}$$

$$3)\ A_n = \frac{1}{n!} K_{n-1}\left[K_{n-2}\left[\dots\left[K_0 A_0\ \right]\right.\right. \tag{1.3.10}$$

où

$$\begin{cases} K_n = K_{n-1} + (n+1) u_{n+1} \dfrac{\partial}{\partial u_n} \\ K_0 = f'(u_0) \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Théorème.1.3.5 :

Si f est C^{∞} au voisinage de u_0 alors les A_n sont donnés par la formule:

$$A_n = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} (f(U_o))^{n+1-\alpha_1} (f'(U_o))^{\alpha_1-\alpha_2} \ldots (f^{(n-1)}(U_o))^{\alpha_n-\alpha_{n-1}} (f^{(n)}(U_o))^{\alpha_n}$$

$$n \geq$$

où :

$$C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-1} 2\alpha_n)!\alpha_n!(1!)^{\alpha_1-\alpha_2}\ldots((n-1)!)^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}(n!)^{\alpha_n}(n+1-\alpha_1)!}$$

il n'est pas inutile de donner les formules des premiers polynômes d **'ADOMIAN** dans le cas scalaire.

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 f^{(1)}(u_0)$$

$$A_2 = u_2 f^{(1)}(u_0) + \tfrac{1}{2} f^{(2)}(u_0) u_1^2$$

$$A_3 = u_3 f^{(1)}(u_0) + (u_1u_2) f^{(2)}(u_0) + \tfrac{1}{6} f^{(3)}(u_0) u_1^3$$

$$A_4 = u_4 f^{(1)}(u_0) + (u_1u_3 + \tfrac{1}{2}u_2^2) f^{(2)}(u_0) + \tfrac{1}{2}u_1^2u_2 f^{(3)}(u_0) + \tfrac{1}{24} f^{(4)}(u_0) u_1^4$$

$$A_5 = u_5 f^{(1)}(u_0) + (u_1u_4 + u_2u_3) f^{(2)}(u_0) + \tfrac{1}{2}(u_1^2u_3 + u_1u_2^2) f^{(3)}(u_0) + \tfrac{1}{2}u_1^3u_2 f^{(4)}(u_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{120} f^{(5)}(u_0) u_1^5.$$

$$A_6 = u_6 f^{(1)}(u_0) + (u_1u_5 + u_2u_4 + \tfrac{1}{2}u_3^2) f^{(2)}(u_0) + (\tfrac{1}{2}u_1^2u_4 + u_1u_2u_3 + \tfrac{1}{6}u_2^3) f^{(3)}(u_0) +$$
$$+(\tfrac{1}{6}u_1^3u_3 + \tfrac{1}{4}u_1^2u_2^2) f^{(4)}(u_0) + \tfrac{1}{24}u_1^4u_2 f^{(5)}(u_0) + \tfrac{1}{720}u_1^6 f^{(6)}(u_0)$$

$$A_7 = u_7 f^{(1)}(u_0) + (u_1u_6 + u_2u_5 + u_3u_4) f^{(2)}(u_0) + (\tfrac{1}{2}u_1^2u_5 + u_1u_2u_4 + \tfrac{1}{2}u_1u_3^2 + \tfrac{1}{2}u_2^2u_3) f^{(3)}(u_0) +$$
$$(\tfrac{1}{6}u_1^3u_4 + \tfrac{1}{2}u_1^2u_2u_3 + \tfrac{1}{6}u_1u_2^3) f^{(4)}(u_0) + (\tfrac{1}{24}u_1^4u_3 + \tfrac{1}{24}u_1^3u_2^2) f^{(5)}(u_0) + \tfrac{1}{120}u_1^5u_2 f^{(6)}(u_0) + \tfrac{1}{504}u_1^7 f^{(7)}(u_0)$$

Remarques: 1- des résultats qu'on vient de citer nous avons une autre preuve du fait que les polynômes A_n dépendent en fait de $U_0, U_1, \ldots, U_n$ seulement .Ce qui est essentiel pour résoudre le problème par la méthode d'**ADOMIAN.**

2- les termes U_n sont en fait fonctions de U_0. il est donc tentant de chercher cette dépendance. Il est intéressant de savoir que **LAGRANGE** a résolu ce problème vers (1740) dans le cas des fonctions scalaires. En effet en étudiant l'équation :

$$U = \lambda \cdot f(U) + C .$$

IL a démontré que la solution est la fonction :

$$X(\lambda) = C + \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1)! \cdot \left(f^{[n+1]}(C)\right)^{(n)} \cdot \lambda^{n+1} .$$

De cette formule on déduit que les polynômes d'**ADOMIAN** sont donnés par les formules :

$$A_n = 1/(n+1)! \cdot (f^{[n+1]}(C \quad))^{(n)} \; n \geq 1.$$

Cette formule est démontrée dans **[4]** pour ce qui est des fonctions a variables complexes. Malheureusement on ne peut pas la généraliser au cas fonctionnel pour des raisons évidentes. Nous remarquons une fois de plus que la méthode n'est pas tout à fait nouvelle et que **ADOMIAN** n'est pas sans prédécesseur dans son travail.On peut dire que le mérite d'**ADOMIAN** est d'avoir généraliser au cas fonctionnel ce qui était fait avant que dans le cas scalaire.

I.4.Justification de la méthode asymptotique:

Dans ce qui suit nous donnerons une justification théorique à la méthode asymptotique a l'instar de celle d'**ADOMIAN.** La méthode est basée sur le même principe. Soit l'équation :

$$N(U) = U + C \qquad (1.4.1)$$

qui est la forme asymptotique de la méthode **d'ADOMIAN.**

Considérons a sa place une équation plus générale :

$$N(U)=\lambda U+C \tag{1.4.2}$$

si N est développable en série entière en U_0 le moyen le plus naturel pour résoudre (1.4.2)est de chercher sa solution en fonction deλ sous la forme :

$$U(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n$$

On doit avoir :

$$N(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n)=\lambda(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n)+C$$

en développant

$$N(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n)$$

en série on aura :

$$N(\sum_{n}^{\infty} U_n \lambda^n)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n .==\lambda(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n)+C$$

où les A_n ne sont autres que les polynômes **d'ADOMIAN** déjà développés.

En identifiant les coefficients on trouve :

$$\begin{cases} A_0 = C \\ A_1 = U_0 \\ \\ A_{n+1} = U_n \end{cases} \tag{1.4.3}$$

ce qui détermine de proche en proche les termes U_n ($n \geq 0$). Nous pouvons constater ici que la méthode est très naturelle car le paramètre est présent dans l'équation dès le départ.

CHAPITRE 2 :

ETUDE DE LA CONVERGENCE DE LA METHODE D'ADOMIAN

2.1.Introduction.

Dans ce chapitre nous étudierons de façon approfondie la convergence de la méthode d **ADOMIAN** déjà entamée par **ABBAOUI** dans**[2]** et d'autres auteurs avant lui. Le résultat le plus général que nous ayons est :

Théorème.2.1.1 .[2]Une condition suffisante de convergence de la méthode d **ADOMIAN** est que :

$$\left\| f^{(n)}(X_0) \right\| \leq M < .1 / e$$

Ce résultat trop restrictif sera généralisé après .

Dans tout ce qui suit ,nous userons des notations suivantes :

Pour $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in IN^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in IR^n$ et f une fonction Nous posons :

$$\begin{cases} |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n. \\ |\beta \cdot n| = \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + ... + n \cdot \beta_n \\ \beta ! = \beta_1 ! \cdot \beta_2 ! \cdots \beta_n !. \\ u^\beta = u_1^{\beta_1} \cdot u_2^{\beta_2} \cdots u_n^{\beta_n} \\ f^{(\beta)}(x) = f^{(\beta_1)}(x) \cdot f^{(\beta_2)}(x) \cdots f^{(\beta_n)}(x) \end{cases}$$

Nous aurons besoin de la formule de **LEIBNITZ** généralisée que voici .

Lemme.2.1.1.

Soient $f_k, k = 1..........m$ de classe C^n en x_0

Alors :

$$\left(\prod_{k=1}^{m} f_k(x_0) \right)^{(n)} = \sum_{|\beta|=n} n! \cdot f_1^{(\beta_1)}(x_0) \cdots \cdots f_m^{(\beta_m)}(x_0) / \beta! \qquad (2.1.1).$$

De plus nous avons:

$$\sum_{|\beta|=n} n! / \beta! = m^n \qquad (2.1.2)$$

Preuve :

Pour (2.1.1) on la démontre par récurrence.

Pour (2.1.2) on prend $f_k(x) = e^x, k = 1.....m, x_0 = 0$ et le résultat en découle.

L'étude de la convergence se fera en deux étapes nous commencerons par étudier le cas scalaire puis nous généraliserons les résultats au cas fonctionnel par un raisonnement par récurrence .

Nous donnerons deux conditions suffisantes très générales pour la convergence de la méthode ; la première est une généralisation de la condition sus citée.

2.2.Résultats de convergence :

2.2.1.Premier résultat de convergence de la méthode d 'ADOMIAN:

Nous avons le :

Théorème : 2.2.1: Si pour ($n \geq 0$) nous avons :

$$\left\| f^{(n)}(x_0) \right\| \leq \mathrm{M} \cdot \alpha^n \qquad \text{avec} \quad (\mathrm{M} > 0, \alpha > 0) \qquad (2.2.1)$$

Alors une condition suffisante de convergence est :

$$\mathrm{M} \cdot \alpha \leq 1/e \qquad (2.2.2)$$

Preuve :nous démontrerons le théorème en deux étapes :

Première étape : cas scalaire :dans ce cas nous avons :

$$\mathrm{A}_n = 1/(n+1)! \cdot \left(f^{[n+1]}(x_0)\right)^{(n)} = (1/(n+1)!) \cdot \sum_{|\beta|=n} (n!/\beta!) \cdot f^{(\beta)}(x_0)$$

(d'après la formule de **LEIBNITZ**).Où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})$.

De la condition (2.2.1) nous déduisons que :

$$\left|\mathrm{A}_n\right| \leq 1/(n+1)! \cdot \sum_{|\beta|=n} (n!/\beta!) \cdot \left|f^{(\beta)}(x_0)\right| \leq$$

$$1/(n+1)! \cdot \sum_{|\beta|=n} (n!/\beta!) \cdot \left|\mathrm{M}\alpha^{\beta_1}\right| \cdot \left|\mathrm{M}\alpha^{\beta_2}\right| \ldots \left|\mathrm{M}\alpha^{\beta_{n+1}}\right|$$

$$= (\mathrm{M}^{(n+1)} \alpha^n / (n+1)!) \cdot (\sum_{|\beta|=n} n!/\beta!)$$

$$= (\mathrm{M}^{(n+1)} \alpha^n (n+1)^n) / (n+1)!$$

$$\sim (\mathrm{M}^{(n+1)}\ \alpha^{n}(n+1)^{n}/(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{(n)}e^{-(n+1)}$$

$$=(\mathrm{M}^{(n+1)}\ \alpha^{n}\cdot e^{n+1}/(\sqrt{2\cdot\pi\cdot}(n+1)^{3/2}(n\to\infty)$$

(formule de **STIRLING).**

La série :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ (\mathrm{M}^{(n+1)}\ \alpha^{n}e^{(n+1)})/\sqrt{2\pi}(n+1)^{3/2}$$

est convergente si et ssi nous avons :

$$\mathrm{M}\cdot\alpha\cdot e\leq 1$$

qui est la condition cherchée ;pour achever la démonstration il faut le généraliser au cas fonctionnel.

Il suffit de démontrer le :

Lemme : 2.2.1.si : f :D→H D domaine de H un espace de **BANACH** ,C∈D

$\|f^{(n)}(C)\|\leq \mathrm{M}\cdot\alpha^{n}\ (\forall n\geq 0)$

alors nous avons :

$$\|X_{n+2}\|=\|\mathrm{A}_{n+1}\|\leq (\mathrm{M}^{(n+1)}\ \alpha^{n}(n+1)^{n})/(n+1)! \qquad (2.2.3)$$

Preuve :

On raisonne par récurrence

Pour n=0 la relation est vraie.

Hypothèse de récurrence : supposons que la relation (2.2.3) soit vraie jusqu'à l'ordre n .Montrons la pour l'ordre (n+1).

Nous avons :

$$\mathrm{A}_{n+1}=\sum_{|(n+1)\beta|=n+1} f^{(|\beta|)}(x_0)(\mathrm{A}_{0_{[\beta_1]}},\ldots\ldots\ldots\ldots,\mathrm{A}_{n_{[\beta_{n+1}]}})/\beta!$$

D où :

$$\|X_{n+2}\|=\|\mathrm{A}_{n+1}\|\leq \sum_{|(n+1)\beta|=n+1}\|(f^{(|\beta|)}(x_0)\|\cdot\ \|\mathrm{A}_0\|^{\beta_1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\|\ \mathrm{A}_n\ \|^{\beta_{n+1}})/\beta!$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence nous avons :

$$\|X_{n+2}\| = \|A_{n+1}\| \leq$$

$$\sum_{|(n+1)\beta|=n+1} \|(f^{(|\beta|)}(x_0)\ \| \cdot M^{\beta_1} \ ....((n+1)^n M^{n+1} \alpha^n / (n+1)!)^{\beta_{n+1}}) / \beta! \quad (2.2.4)$$

Or le terme $(M^{(n+1)}\ \alpha^n (n+1)^n)/(n+1)!$ n'est autre que le polynôme d '**ADOMIAN** d'ordre n de la fonction :

$$g : x \rightarrow g(x) = M \cdot e^{(M\alpha x)} \qquad \text{en } x=0 \ ;$$

l'expression (2.2.4) est donc le polynôme d **ADOMIAN** d'ordre (n+1)de g il est donc égal à :

$$(M^{(n+2)}\ \alpha^{(n+1)} (n+2)^{(n+1)})/(n+2)!$$

d'où nous avons :

$$\|X_{n+2}\| = \|A_{n+1}\| \leq (M^{(n+2)}\ \alpha^{(n+1)} (n+2)^{(n+1)})/(n+2)!$$

ce qui prouve la relation (2.2.3) pour n+1 ***CQFD.***

Du lemme découle la démonstration du théorème (2.2.1).

Corollaire .2.2.1.du théorème précédent nous déduisons que si :

$\|f^{(n)}(X_0)\ \| \leq M$ pour $(n \geq 0)$.i e $\alpha = 1$

Alors la condition suffisante de convergence est que :

$$M \leq 1/e \ .$$

Nous obtenons ainsi une condition de convergence plus large que celle de **[2].**

Remarque:

Si $\alpha > 1, M \neq 0$ alors le terme $M \cdot \alpha^n$ tend vers ∞ ; ce qui rend le résultat très général par rapport a celui de **[2]**.

Application du résultat: posons $f(\ x) = M \cdot e^{\alpha \cdot x}$

$$f^{(n)}(c) = M \cdot \alpha^n e^{\alpha \cdot c} \qquad (n \geq 0)$$

d'où :

$$f^{(n)}(c) \leq |\ M\ | \cdot |\ \alpha\ |^n e^{\alpha \cdot c} = |\ M\ | \cdot e^{\alpha \cdot c} |\ \alpha\ |^n$$

d'après le théorème une condition suffisante de convergence de la méthode pour f est :

$$| \text{M} | \cdot e^{\alpha \cdot c} . | \alpha | \leq 1/e.$$

Notons qu ' ici nous pouvons étudier la convergence directement car les formules des polynômes d **ADOMIAN** sont connues et simples.

<u>2.2.2.Deuxième résultat de convergence de la méthode d 'ADOMIAN :</u>

Nous allons maintenant donner un autre résultat de convergence qui est lui aussi très général .Le travail est un peu plus astucieux et plus élégant que le précédent. Ici il faut tenir compte du rayon de convergence de la série de **TAYLOR** de N au point x_0. Dans **[5] CHERRUAULT, SACCOMANDI ET SOME** ont donné le théorème suivant :

<u>Théorème :2.2.2.</u> Si f *est* analytique en x_0 dans $]x_0 - R, x_0 + R[$ avec R fini,

La série :

$$X_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \lambda^n$$

est majorée par :

$$m' /(1+\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty} (1/(1+\varepsilon))^n \cdot (\lambda / \rho)^n$$

Où : $m' \geq m = \sup|x_n|$, $\varepsilon > m/R$ et $\rho \leq 1$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \text{A}_n \cdot \lambda^n = f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \lambda^n)$ admet un rayon de convergence ($r \geq 1$).

Donc la $x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \text{A}_n$ est solution de notre équation.

De ce théorème nous concluons que quand le rayon R est fini il n'est plus suffisant de démontrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \| \text{A}_n \|$ est convergente pour affirmer que :

$$c + \sum_{n=0}^{\infty} \text{A}_n$$

est solution de l'équation (1.1.1). Il faut des conditions plus sévères sur les polynômes A_n .Nous allons donner un résultat plus simple à utiliser.

Théorème :2.2.3. Si la fonction f est analytique en x_0 pour $|x - x_0| < R$

Si la suite $\{x_n$ vérifie $|x_n| \leq \alpha/(1+\varepsilon)^n \qquad (\forall n \geq 0); \ (\ \varepsilon > 0\ )$ (2.2.5)

Avec $R > \alpha$ et $\varepsilon \geq \alpha/(R-\alpha)$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \lambda^n = f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \lambda^n)$ est convergente pour $|\lambda| \leq \rho, (\rho \geq 1)$; ce qui permet donc d'utiliser la méthode en prenant $\lambda = 1$.

Preuve: Nous avons :

$$\left| f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \lambda^n) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x(\lambda))^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x(\lambda)|^n .$$

mais d'après le théorème nous avons :

$$|x(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha/(1+\varepsilon)^n) \cdot |\ \lambda\ |^n = \alpha/(1 - |\lambda|/(1+\varepsilon))$$

si nous choisissons λ tel que : $|\lambda| < 1 + \varepsilon$

$$\left| f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \lambda^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (\alpha/(1 - (|\ \lambda\ |/(1+\varepsilon))^n$$

la série du second membre converge pour :

$$\alpha/(1 - |\lambda|/(1+\varepsilon)) \ < R$$

donc :

$$|\lambda| < (1+\varepsilon) \cdot (1 - \alpha/R) = \rho$$

nous avons :

$$\rho \geq 1 \Leftrightarrow (1+\varepsilon) \geq 1/(1-\alpha/R)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \geq 1 - 1/(1-\alpha/R) = \alpha/(R-\alpha).$$

Remarque: Nous avons travaillé avec la valeur absolue mais les résultats sont vrais même dans les espaces normés.Ce théorème est clairement plus simple que celui de **[5].**

Nous aurons aussi besoin du :

Lemme :2.2.2. Le nombre de m+1- uples d'entiers vérifiant :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1} = n$$

est égal à :

$$(n+m)!/n! \cdot m!$$

Preuve :Voir **[6] (chapitre 1**).

Nous pouvons maintenant démontrer notre second résultat de convergence qui est :

Théorème:2.2.4. si la fonction f est analytique en x_0 pour $\|x - x_0\| < R$;

$\|f^{(n)}(x_0)\| \leq n! \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha^n$ avec $(\mathrm{M} > 0, \alpha > 0)$

Alors une condition suffisante pour la convergence de la méthode est :

a): $4 \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha \leq 1$ **si R est infini,**

b) : $5 \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha \leq 1$ **si R est fini** ;

Preuve : on va utiliser la :

Proposition :2.2.2. si

$\|f^{(n)}(x_0)\| \leq n! \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha^n$ $(n \geq 0)$.

Les polynômes d **ADOMIAN** vérifient :

$$\|\mathrm{A}_n\| \leq [(2 \cdot n)!/((n+1)! \cdot n!)] \cdot \mathrm{M}^{n+1} \cdot \alpha^n$$

Preuve : la démonstration sera faite en deux étapes :**:**

1).cas scalaire :

$$|\mathrm{A}_n| \leq 1/(n+1)! \cdot \sum_{|\beta|=n} (n!/\beta!) \cdot |f^{(\beta)}(x_0)| \leq$$

$$1/(n+1)! \cdot \sum_{|\beta n|=n} (n!/\beta!) \cdot |\beta_1! \cdot \mathrm{M}\alpha^{\beta_1}| \cdot |\beta_2! \cdot \mathrm{M}\alpha^{\beta_2}| \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots |\beta_{n+1}! \cdot \mathrm{M}\alpha^{\beta_{n+1}}|$$

$$=(1/(n+)\cdot)\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n\cdot\sum_{|\beta\cdot n|=n}(1)=[(2\cdot n)!/(n+1)!\cdot n!]\cdot\mathrm{M}^{n+1}\alpha^n.$$

d'après le lemme précédent. ***CQFD.***

2.) cas fonctionnel :nous utiliserons une démonstration par récurrence. Nous omettrons cette démonstration car elle est très semblable a celle faite déjà dans le premier résultat de convergence a la différence près qu'ici il faut travailler avec la fonction :

$$x\to(1-x)^{-1}$$

au lieu de

$$\mathrm{g}:x\to g(x)=\mathrm{M}\cdot e^{(\mathrm{M}\alpha x)}\qquad \text{en x=0 .}$$

Si R est infini :

il suffit de prouver que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\ \mathrm{A}_n\ |<\infty.$$

On a : $\|\mathrm{A}_n\|\le[(2\cdot n)!/((n+1)!\cdot n!)]\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n\sim(4^n\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n)/(\sqrt{\pi}(n+1)^{3/2})$

Quand $(n\to\infty)$. Ce qui est facile a montrer par le biais de la formule de **STIRLING.**

Or la série : $\sum_{n=0}^{\infty}\ (4^n\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n)/(\sqrt{\pi}(n+1)^{3/2}$ converge si et s si : $4\cdot\mathrm{M}\cdot\alpha\le 1$

Ceci entraîne la condition 1 du théorème.

Si R est fini :

il faut utiliser le théorème (2.2.3).

$$.\|\mathrm{A}_n\|\le[(2\cdot n)!/((n+1)!\cdot n!)]\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n=\le[(2\cdot n)!/((n+1)!\cdot n!)]\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n$$

$$\le[(2\cdot n)!\cdot\mathrm{M}\cdot/(4^n(n+1)!\cdot n!)]\cdot(4^n\mathrm{M}^n\cdot\alpha^n).\le\mathrm{M}\cdot(4\cdot\mathrm{M}\cdot\alpha)^n$$

Car le terme $(2\cdot n)!/(4^n(n+1)!\cdot n!)$ est inférieur a 1.

En effet si nous posons :

$$\mathrm{X}_n=(2\cdot n)!/(4^n(n+1)!\cdot n!)$$

nous avons :

$$X_{n+1} / X_n = (2n+1)/(2n+4) < 1.$$

D'où :

$$\|A_n\| \leq M \cdot (4 \cdot M \cdot \alpha)^n = M/(1+\varepsilon)^n \quad \text{car } 4M\alpha < 1$$

$$\varepsilon = 1/(4M\alpha) - 1$$

il nous faut chercher quand :

$$\varepsilon \geq M/(R - M). \tag{2.2.6}$$

Car c'est une condition suffisante pour avoir la convergence de la méthode.

Nous avons :

$$\left\|f^{(n)}(x_0)\right\| \leq n! \cdot M \cdot \alpha^n \text{ d'où } R \geq 1/\alpha$$

$$4 \cdot M \cdot \alpha < 1 \text{ d'où } M < 1/4 \cdot \alpha \leq 1/4 \cdot R$$

Donc :

$$M/(R - M) \leq M/(1/\alpha - M)$$

(2.2.6) est en particulier vraie si :

$$\varepsilon = (1/4 \cdot M \cdot \alpha) - 1 \geq M/(1/\alpha - M)$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4 \cdot M\alpha) \cdot (1/\alpha - M) \geq 4 \cdot M^2 \cdot \alpha$$

en développant nous trouvons :

$$(4.M^2 \cdot \alpha) - 5M + 1/\alpha \geq 4 \cdot M^2 \cdot \alpha$$
$$\Leftrightarrow 1/\alpha \geq 5 \cdot M$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot M\alpha \leq 1$$

Nous avons donc démontrer totalement le théorème énoncé.

Remarques :

1. $M, \alpha \neq 0$ **alors :** $n! \cdot M \cdot \alpha^n \to \infty$ **quand** $n \to \infty$ **. Ce qui fait que le résultat est très général.**

2.Les deux résultats que nous venons de développer sont très pratiques.

Application du résultat :

Soit l'équation :

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \qquad \text{avec } (a_0 \neq 0),$$

Supposons que :

$$|a_i| \leq \mathrm{M} \qquad (\forall i = 0....n),$$

Si nous prenons $x_0 = 0$, une condition suffisante de convergence de la méthode est :

$$\mathrm{M} \leq 1/4.$$

En effet nous avons :

$$f^{(i)}(0) = i! \cdot a_i (\forall i \geq 0)$$

nous convenons que :

$$a_i = 0 (\forall i > n);$$

D'où :

$$| \ f^{(i)}(0) \ | \leq i! \cdot \mathrm{M} \quad \text{avec dans } R = \infty;$$

Remarques :

1.Avec le résultat général la condition suffisante est :

$$| \ a_i \ | \leq 1/(i! \cdot e) \quad \text{pour : } i = 0.....n.$$

Donc :

$$|a_1| \leq 1/e; |a_2| \leq 1/(2 \cdot e).etc$$

a partir de l'ordre 2 notre résultat est bien mieux que celui du cas général.

2:**Nous pensons que pour appliquer la méthode aux équations algébriques il est profitable de prendre 0 comme première approximation ,car cela va faciliter grandement les calculs.**

2.2.3.Convergence de la méthode d'ADOMIAN dans le cas d'une équation algébrique :

Nous venons de donner un résultat très pratique et très intéressant pour la convergence de la méthode pour une équation algébrique , mais ce résultat n'utilise pas le fait que les dérivées de la fonction s'annule a partir d'un certain rang .C'est cela que nous allons exploiter dans ce qui suit.

Proposition.2.2.3. Considérons une équation algébrique :

$$x=\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k + c = N(x)+c$$

Telle que :

$$\left|N^{(n)}(c)\right| \leq n! \cdot M \cdot \alpha^n$$

pour tout $(0 \leq n \leq m)$.

Alors une condition suffisante de convergence est que :

$$M.\alpha < 1$$

Preuve :

$$A_n = 1/(n+1) \cdot \sum_{|\beta|=n} N^{(\beta_1)}(c) \cdots N^{(\beta_{n+1})}(c) / \beta!$$

d'où :

$$|A_n| \leq 1/(n+1) \cdot \sum_{\substack{|\beta|=n \\ 0\leq \beta_k \leq m}} (\beta_1! \cdot M \cdot \alpha^{\beta_1}) \cdots\cdots (\beta_{n+1}! \cdot M \cdot \alpha^{\beta_{n+1}}) / \beta!$$

$$= 1/(n+1)\, M^{n+1} \cdot \alpha^n \sum_{\substack{|\beta|=n \\ 0\leq \beta_k \leq m}} (1)$$

Nous avons besoin du :

Lemme.2.2.3.

$$\sum_{\substack{|\beta|=n \\ 0\leq \beta_k \leq m}} (1) \leq (n+1)\cdot m \cdot (n+m-1)!/n!$$

Preuve : Nous avons :

$$\sum_{\substack{\beta_{11}+\beta_2+\dots\dots+\beta_{n+1}=n \\ 0\leq \beta_k \leq m}} (1) \leq (n+1)\cdot \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_n=n \\ 0\leq \beta_k \leq m}} (1) = (n+1)\cdot \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_m=n \\ 0\leq \beta_k \leq n}} (1)$$

$$\leq (n+1)\cdot m! \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2+.......+\beta_m=n \\ 0\leq\beta_k\leq n \\ 0\leq\beta_1\leq\beta_2\leq.........\leq\beta_m\leq n}} (1) \quad = (n+1)\cdot m!\cdot(n+m-1)!/(m-1)!\cdot n! =$$

$(n+1)\cdot m\cdot(n+m-1)!/n!$.

(Voir lemme.2.2.2) ***COFD.***

Du lemme .2.2.2. nous déduisons :

$$|A_n| \leq [m\cdot(n+m-1)!/n!]\cdot M^{n+1}\cdot\alpha^n .$$

La série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [m\cdot(n+m-1)!/n!]\cdot M^{n+1}\cdot\alpha^n$$

Est convergente pour la condition énoncée théorème (2.2.3). ***COFD.***

2.3.Convergence de la méthode de régularisation : **D**ans ce qui suit nous donnerons des conditions de convergence de la méthode de régularisation qui peut se révéler indispensable pour appliquer la méthode d **ADOMIAN.**

Soit donc l'équation :

$$X_\varepsilon = f(X_\varepsilon)/\varepsilon + C/\varepsilon \tag{2.3.1}$$

Position du problème :nous voulons savoir quand la méthode d **ADOMIAN** appliquée a (3.2.1) converge pour ε au voisinage de 0 et $X_\varepsilon \to X$ solution de

$$f(X) + C = 0$$

quand $(\varepsilon \to 0)$.

Pour la convergence , les résultats que nous venons d'établir sont bien sûr suffisants, le problème est donc de donner des conditions de convergence de $X\varepsilon$ vers $X(\varepsilon \to 0)$. Nous donnerons une condition de convergence pour chacun des deux résultats déjà établis.

Théorème:2.3.1. Soit l'équation régularisée :

$$X_\varepsilon = f(X_\varepsilon)/\varepsilon + C/\varepsilon = f_\varepsilon(X_\varepsilon) + C/\varepsilon$$

alors si :

1) : $f_\varepsilon(C/\varepsilon) = -C/\varepsilon + O(1)$,

2): $\left\| f_\varepsilon^{(n)}(C/\varepsilon) \right\| \le \mathrm{M} \cdot \alpha^n \cdot \varepsilon^{a \cdot n}$ $\qquad ((a \ge 1), (\forall n \ge 1)$;

avec $m \cdot \alpha < 1/e$ $\qquad$ si $a = 1$, m= m a x $\{|C|, M\}$

alors :la méthode d **ADOMIAN** converge pour ε assez petit de plus nous avons $\mathrm{X}_\varepsilon \to \mathrm{X}$ quand $(\varepsilon \to 0)$. c 'est a dire nous avons le résultat souhaité.

Preuve : nous allons travailler dans la cas scalaire ; les résultats se généralisent au cas fonctionnel par induction.

Ici la formule de **LEIBNITZ** ne peut être appliquée nous utiliserons l'autre formule voir théorème (1.3.5). Nous avons :

$$\mathrm{A}_n(\varepsilon) = \sum_{|\beta n| = n} (f_\varepsilon(x_0))^{[n+1-|\beta|]} \cdot (f_\varepsilon(x_0))^{\beta_1} \ldots (f^{(n)}{}_\varepsilon(x_0))^{\beta_n}) / (\beta! \cdot n^\beta \cdot (n+1-|\beta|)!)$$

$x_0 = C/\varepsilon$,

nous avons :

$$f_\varepsilon(C/\varepsilon) = -C/\varepsilon + O(1),$$

d'où nous avons :

pour k>1 tel que : $m \cdot \alpha \cdot k \le 1/e$ $\exists (1 > \varepsilon_0 > 0) / |f_\varepsilon(x_0| \le k|C| / \varepsilon (\forall \varepsilon \le \varepsilon_0)$,

nous prenons m = m a x$(|C|, M)$ $\quad$ nous avons alors :pour $\varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$

$$| \mathrm{A}_n | \le \sum_{|\beta n| = n} (|f_\varepsilon(x_0)|^{[n+1-|\beta|]} \cdot | f_\varepsilon(x_0) |^{\beta_1} \ldots\ldots | f_\varepsilon(x_0) |^{\beta_n}) / (\beta! n^\beta \cdot (n+1-|\beta|)!)$$

$$\le (\sum_{|\beta \cdot n| = n} (m\alpha^{(n+1-|\beta|)} \varepsilon^a) \cdot (m^{\beta_1} k^{\beta_1} / \varepsilon^{\beta_1}) \cdot \quad (m \cdot \alpha^n \cdot \varepsilon^{a \cdot n})^{\beta_n} / (\beta! \cdot (n+1-|\beta|)!)$$

$$= m^{(n+1)} \cdot \alpha^n \cdot k^{n \cdot} \sum_{|\beta \cdot n| = n} ((\varepsilon^a) \cdot (1/\varepsilon^{\beta_{11}}) \cdot (\varepsilon^{a \cdot n})^{\beta_2} \cdot \quad (\varepsilon^{a \cdot n})^{\beta_n} / (\beta! \cdot (n+1-|\beta|)!)$$

$$\le [(n+1)^n / (n+1)!] \cdot m^{(n+1)} \cdot \alpha^n \cdot k^n \varepsilon^{a \cdot n} / \varepsilon^n$$

$$= [(n+1)^n / (n+1)!] \cdot m^{(n+1)} \cdot \alpha^n \cdot k^n \cdot \varepsilon^{(a-1) \cdot n}.$$

nous déduisons que :

pour a=1 :la convergence est assurée pour : $m \cdot \alpha \cdot k \le 1/e$ (Voir th (2.2.4))

pour a>1 :la convergence est assurée pour ε assez petit.

Dans les deux cas la série $(x_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\varepsilon))$ est absolument et uniformément converge par rapport à ε pour $(0<\varepsilon\leq\varepsilon'<\varepsilon_0)$, donc elle définit une fonction continue et bornée sur ce domaine. La limite quand $\varepsilon\to 0$ de X_ε existe. Notons par X cette limite ,nous avons alors :

$$\varepsilon\cdot X=f(X_\varepsilon)+C\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\cdot X_\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{(f(X_\varepsilon)+C\}=f(X)+C=0$$

car f est continue **_CQFD._**

Nous pouvons de même donner un théorème pour l'autre condition du th (2.2.4). Donnons seulement l'énoncé du théorème sans démonstration.

Théorème :2.3.2.si nous avons :

1 : $f_\varepsilon(C/\varepsilon)=-C/\varepsilon+O(1)$,

2 : $\left\|f_\varepsilon^{(n)}(C/\varepsilon)\right\|\leq n!\cdot M\cdot\alpha^n\cdot\varepsilon^{a\cdot n}$ $\quad a\geq 1,(\forall n\geq 1);$

avec :

a).$4\cdot m\cdot\alpha<1$ **pour R_ε infini**

b).$5\cdot m\cdot\alpha<1$ **pour R_ε fini,**

la méthode d '**ADOMIAN** converge pour ε assez petit.

CHAPITRE 3.

ROLE DE LA PREMIERE APPROXIMATION DANS LA METHODE D 'ADOMIAN

3.1.Introduction :

Dans la méthode d **ADOMIAN** la première approximation X_0 peut être choisie d'une infinité de manières. Dans ce qui suit nous étudierons le rôle de celle ci dans la méthode d '**ADOMIAN** . Puisqu'elle détermine tous les polynômes d **ADOMIAN** .En effet étant donnée une équation :

$$U = N(U) + C \tag{3.1.1}$$

Nous pouvons l'écrire de la façon suivante :

$$U = N(U) + C - C_1 + C_1 = N_1(U) + C_1 \tag{3.1.2}$$

Nous pouvons résoudre (3.1.1) en prenant $U_0 = C_1$.

3.2.Rôle de la première approximation dans la méthode :

Il y a deux questions importantes que nous devons se poser.

2.Question. a :

En faisant varier la première approximation obtiendrait on toutes les solutions de (3.1.1) ?

La réponse à la question est positive ; en effet supposons que U^* soit une solution de 1 en prenant dans (3.12) $U^* = C_1$ nous obtenons :

$A_0 = A_1 = \ldots = A_n = 0$ comme il est facile de s'en rendre compte par un petit calcul ; donc la méthode **d ADOMIAN** converge vers $\mathbf{U^*}$. Nous pouvons conclure donc que théoriquement nous peut obtenir toutes les solutions par **ADOMIAN.**

3.Question b :

Si la première approximation varie de peu trouvons nous la même solution ?

Ce n'est pas toujours vrai nous donnerons dans ce suit des conditions suffisantes pour que cela le soit.

Nous avons le :

Théorème : 3.2.1:Soit l'équation :

$$U = N(U) + C \tag{3.2.1}$$

où :

f :D→H D domaine de H un espace de **BANACH** ,C∈D soit (ε>0) tel que B[C ;ε]⊂D.

Alors si :

1 : $\|f(U_0)+C-U_0\| \le \mathrm{M}$ et

$$\left\|f^{(n)}(U_0)\right\| \le \mathrm{M}\cdot\alpha^n (\forall n\ge 1) \qquad \mathrm{M}\cdot\alpha \le 1 \tag{3.2.2}$$

$\forall U_0 \in$ B[C ;ε]

2 : si l'équation admet seulement des solutions isolées quand U_0 parcourt B[C,ε].Alors :

$\forall U_0 \in$ B[C ;ε] la méthode d **ADOMIAN** converge vers une même solution de l'équation.

Preuve: La condition (1) assure bien entendu la convergence de la méthode ($\forall U_0 \in$ B[C ;ε]).Pour $U_0 \in$ B[C ;ε] on pose $\Phi(U_0)$ la solution de (3.1.1) en prenant U_0 comme première approximation.

On a :

$$\Phi(U_0) = U_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n(U_0) \tag{3.2.3}$$

C' est donc une série de fonctions , on va montrer que cette fonction varie continûment avec U_0, il suffit pour cela de montrer que la série (3.2.3) converge uniformément dans B[C ;ε] .

Nous savons que :

$$\|\mathrm{A}_n(U_0)\| \le (n+1)^{(n)}\cdot \mathrm{M}^{(n+1)}\cdot\alpha^{(n)} /(n+1)!. \; (\forall n\ge 0) \tag{3.2.4}$$

Donc la série (3.2.3) converge uniformément dans B[C ;ε]. Cela montre que la fonction Φ est continue dans cette boule . On en déduit que Φ(B[C ;ε]) est un sous ensemble connexe et discret de H d'après la condition (2) du Théorème on conclut que Φ(B[C ;ε]) = {Φ(C) qui est la solution de l'équation quand la première approximation est C. ***CQFD.***

Corollaire 3.2.1 Si dans le théorème(3.2.1) on omet la condition(2) alors deux cas peuvent se produire quand U_0 parcourt B[C ;ε] :

1).l'équation (3.2.1) admet une seule solution quand U_0 parcourt B[C ;ε]

2).l'équation (3.2.1) admet un continuum de solutions.

Preuve :découle de celle du théorème (3.2.1)

Remarques.3.2.1:

1):pour chercher toutes les solutions de (3.2.1) il faut passer d'un domaine où le théorème est vrai à un autre .

2):dans le théorème précédent la condition 1 est bien sûr plus difficile à satisfaire.

3 :la condition 2 du théorème est aussi très importante ,pour le voir considérons l'équation :

$$X = X \qquad (X \in H) \tag{3.2.5}$$

l'équation (3.2.5) a pour solutions tous les éléments de H .

écrivons (3.2.5) de la manière suivante :

$$X = (X - C) + C \tag{3.2.6}$$

en prenant $X_0 = C$ et en appliquant la méthode d **DOMIAN** qui est visiblement convergente dans ce cas On obtient la solution X =C de (3.2.5)

Donc chaque première approximation donne une nouvelle solution de (3.2.1). Cela est du au fait que la condition (2) du théorème (3.2.1) n'est plus vraie pour (3.2.5). **P**our l'autre condition de convergence nous avons un résultat similaire dont nous allons seulement donner l'énoncé :

Théoreme.3.2.2. Si nous avons :

1) : $\|f(U_0) + C - U_0\| \leq M$ et (3.2.6)

$\|f^{(n)}(U_0)\| \leq n! \cdot M\alpha^n$ (n> 0)

où $5M\alpha \leq 1$;$\forall U_0 \in$ B[C ;ε] ;

2 :**L**'équation admet seulement des solutions isolées quand U_0 parcourt B[C,ε] , alors :

$\forall U_0 \in B[C\,;\varepsilon\,]$ la méthode d **ADOMIAN** converge vers une même solution de l'équation **(3.2.1).**

<u>Preuve:</u> Elle est identique a celle du théorème **(3.2.1).** Elle utilise l'inégalité obtenue au chapitre 2.

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA METHODE D 'ADOMIAN AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES

4.1.Introduction :

C'est au sein des équations différentielles que la méthode d'**ADOMIAN** a trouvé son champ d 'application le plus fertile. L'application de la méthode aux équations différentielles a été d'abord l'œuvre de **George ADOMIAN** et de certains de ses collaborateurs tels que **RACH** après ça c'est au laboratoire de mathématiques appliquées **MEDIMAT**(Université PARIS IV) sous la direction de **CHERRUAULT** que revient le mérite de cette application. Il est intéressant de noter que l'application de cette méthode aux **E.D.O** s'est confondue jusqu'à présent avec la méthode classique de **TAYLOR,** mais maintenant grâce aux travaux de nombreux chercheurs nous avons des résultats de convergence et des formules qu' il suffit d'appliquer de façon quasi mécanique pour résoudre les problèmes, alors qu'avec la méthode classique il faut refaire les mêmes calculs a chaque fois qu'on veut résoudre un problème. C'est donc une application de la méthode de TAYLOR sous un jour nouveau.

Nous donnerons dans ce qui suit les résultats connus les plus intéressants **[2]**.

4.2. Principe de la méthode :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u) + g \\ u(t)\big|_{t=0} = c \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où f et g sont des fonctions connues.

La méthode d '**ADOMIAN** consiste à chercher la solution sous la forme d'une série :

$$\sum_{n=}^{\infty} u_n \tag{4.2.2}$$

puis à décomposer le terme non linéaire sous la forme :

$$f(u) = \sum_{n=}^{\infty} A_n \tag{4.2.3}$$

où les A_n sont des polynômes d '**ADOMIAN** de *f*. Il sont obtenus par l'expression :

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i, \quad f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \tag{4.2.4}$$

où λ est un paramètre introduit par convenance. Grâce à (4.2.4) on obtient les A_n par la formule :

$$n!\, A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \tag{4.2.5}$$

En remplaçant (4.2.2) et (4.2.3) dans (4.2.1) , nous trouvons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = c_0 + L^{-1} g(t) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{4.2.6}$$

les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont alors identifiés par les formules:

$$\begin{cases} u_0 = c_0 + L^{-1} g \\ u_1 = L^{-1} A_0 \\ . \\ . \\ u_{n+1} = L^{-1} A_n \end{cases} \tag{4.1.7}$$

La solution exacte de (4.2.1) est maintenant complètement déterminée. Mais en pratique il est difficile de calculer tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ c'est pour cela qu'on utilise une approximation de la solution sous la forme d'une série tronquée:

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \tag{4.2.8}$$

Donnons maintenant les résultats de convergence les plus importants qui soient connus. Nous suivrons pour l'essentiel l'exposé de **[2]**.

4.3. Convergence de la technique :

Théorème .4.3.1:

Considérons à nouveau l'équation différentielle (4.2.1)

Si f est indéfiniment dérivable en u_0 et si g est développable en série entière au voisinage de $t_0 = 0$, alors la solution de (4.2.1) est donnée par le schéma :

$$\begin{cases} u_0 = u(o) \\ u_{n+1} = L^{-1}A_n + L^{-1}\beta_n t^n \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où

$$\beta_n = \frac{g^{(n)}(o)}{n!} \tag{4.3.2}$$

coïncide avec la série ***entière:***

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \tag{4.3.3}$$

où les c_i sont donnés par les relations de récurrence:

$$\begin{cases} c_0 = u(0) \\ \\ c_1 = f(c_0) + g(0) \\ c_{n+1} = \sum\limits_{|nk|=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\dots(n!)^{k_n}} \cdot \frac{c^k}{k!} \cdot f^{(|k|)}(c_0) + g^{(n)}(0). \end{cases} \tag{4.3.4.}$$

Corollaire.4.3.1: ***Si g=0, alors :***

1) $A_n = \dfrac{u^{(n+1)}(0)t^n}{n!}$ (4.3.5)

2) Si $\left|f^{(k)}(u_0)\right| \leq M$, pour tout $k \in IN$, alors la série solution de (4.2.1) obtenu par le schéma (4.3.1) est absolument convergente dans l'intervalle $(\frac{-1}{M}, \frac{1}{M})$ et l'on a :

$$|u_n| \leq \frac{M^n t^n}{n} \tag{4.3.6}$$

Le résultat précédent peut être généralisé au cas où :

$$\left|f^{(k)}(u_0)\right| \leq M \cdot \alpha^i \tag{4.3.7}$$

dans ce cas la condition suffisante devient :

$$M \cdot \alpha \cdot |t| < 1 \tag{4.3.8}$$

Pour le voir il suffit de prouver par récurrence que :

$$|u_n| \leq M^n \cdot \alpha^n \cdot |t|^n / n \tag{4.3.9}$$

Une objection s'impose envers la précédante présentation, la méthode n'a pas été appliquée comme elle a été développée au chapitre 1 , c 'a d on a pas transformé l'équation a la forme canonique puis appliquer la méthode . Ce petit inconvénient nous allons le combler.

Dans ce qui suit nous donnerons nos contributions au sujet.

4.4.Cadre fonctionnel de la méthode d 'ADOMIAN appliquées aux équations différentielles ordinaires :

Soit l'équations différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) + g(t) \\ u(0) = c, t \in [a, b]; \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Où $f ; [a\, ,b] \times D \to H$ avec H un espace de BANACH et D un domaine de H.

Et $g : [a, b] \to H$ fonction connue.

L 'équations (4.4.1) est équivalente a l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^t f(s; u(s))ds + c + \int_0^t g(s)ds \tag{4.4.2}$$

Posons :

$$F(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds \tag{4.4.3}$$

Nous définissons ainsi une fonction :

$$F : C^1([a, b]; D) \to C^1([a, b]; H) \qquad (4.4.4.)$$

L 'équation (4.4.2) peut être écrite dans le langage fonctionnel comme suit :

$$u = F(u) + g_0 \tag{4.4.5}$$

Nous allons appliquer la méthode d '**ADOMIAN** a (4.4.5) en prenant $u_0 = g_0$

Nous aurons besoin du :

Théorème.4.4.1. Si la fonction

$$f ; [a, b] \times D \to H$$

est indéfiniment différentiable en $u_0 \in D$,uniformément pour $t \in [a, b]$,alors la fonction :

$$F(t, u) = \int_0^t f(s, u) ds$$

est indéfiniment differentiable en u_0 de plus nous avons :

$$F^{(n)}(t, u_0)(u, \ldots\ldots, u) = \int_0^t f^{(n)}(s, u_0)(u, \ldots\ldots, u) ds \tag{4.4.6}$$

Preuve : Voir **[8].**

Supposons maintenant que :

f est indéfiniment différentiable en $u_0 = g_0$ uniformément pour $t \in [a, b]$.**Alors** :

$$F^{(n)}(t, u_0(t))(\underbrace{u(t), \ldots\ldots, u(t)}_{n fois}) = \int_0^t f_u^{(n)}(s, u_0(s))(u(t), \ldots\ldots, u(t)). \tag{4.4.7}$$

Nous utiliserons dans ce qui suit la notation suivante :

$$\left\| f_{u_0}^{(n)} \right\| = \max_{\substack{\|u\|=1 \\ t \in [a,b]}} \left\| f_u^{(n)}(t, u_0(t))(u(t), \ldots\ldots, u(t)) \right\| \tag{4.4.8}$$

Par définition $\left\| f_{u_0}^{(0)} \right\| = \max_{t \in [a,b]} \left\| f(t, u(t)) \right\|$.

Maintenant donnons les polynômes d '**ADOMIAN** de la fonction F .

Par définition on a :

$$A_n = \sum_{|\beta \cdot n| = n} F_u^{(|\beta|)}(t, u_0(t))(u_{1[\beta_1]}(t), \ldots\ldots, u_{n[\beta_n]}(t)) / \beta!$$

$$= \sum_{|\beta \cdot n| = n} \int_0^t [f_u^{(|\beta|)}(t, u_0(t))(u_{1[\beta_1]}(t), \ldots\ldots\ldots, u_{n[\beta_n]}(t))] / \beta!$$

$$=\int_0^t \sum_{|\beta \cdot n|=n} f_u^{(|\beta|)}(t,u_0(t))(u_{1[\beta_1]}(t);........,u_{n[\beta_n]}(t))/\beta!\,ds$$

$$=\int_0^t A_n(f)ds \qquad (4.4.9)$$

On retrouve ainsi la formule donnée au (§4.2).Ceci rend rigoureuse l'application de la méthode aux **EDO.**

4.5.Résultats de convergence :

Nous allons donner deux résultats de convergence très intéressants.

Théorème.4.5.1. Si nous avons

$$\left\|f_{u_0}^{(n)}\right\| \le M\alpha^n (\forall \ge 0). \qquad (4.5.1)$$

Alors une condition suffisante de convergence de la méthode d'**ADOMIAN** appliquée a (4.4.1) est :

$$M \cdot \alpha \cdot t^2 < 2 \qquad (4.5.2)$$

Preuve :pour démontrer ce théorème nous démontrerons le :

Lemme.4.5.1. Si la fonction f vérifie (4.5.1) alors nous avons:

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \le M^{n+1}\alpha^n \cdot t^{2(n+1)}/2^{n+1}. \qquad (4.5.3)$$

Preuve :

Pour n=0 (4.5.3) est vraie, en effet :

$$u_1 = \int_0^t A_0 dt$$

$$A_0 = \int_0^t F(s,u_0(s))ds \Rightarrow \|A_0\| \le M \cdot |t| \Rightarrow \|u_1\| \le M \cdot t^2/2$$

supposons que (4.5.3) soit vraie jusqu'à l'ordre (n-1)

nous avons :

$$\|A_n\| \le \sum_{|kn|=n} \left\|F^{(|k|)}(t,u_0(t)\right\| \cdot \|u\|^k / k!$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence on trouve :

$$\|A_n\| \leq \sum_{|kn|=n} \left(M \cdot \alpha^{|k|} \cdot |t|\right)\left(\mathrm{M} \cdot |t|^2/2\right)^{k_1} \cdot (\mathrm{M}^2 \cdot \alpha \cdot t^4/2^2)^{k_2} \cdots (\mathrm{M}^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot t^{2n}/2^n)^{k_n}/k!$$

$$=(\mathrm{M}^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot |t|^{2n+1}/2^n) \cdot \sum_{|kn|=k} 1/k! \quad =\mathrm{M}^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot |t|^{2n+1}/2^n$$

$$\Rightarrow \quad \|u_{n+1}\| \leq \int_0^t \|A_n\| ds \leq \mathrm{M}^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot t^{2(n+1)}/2^{n+1}(n+1) \leq \mathrm{M}^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot t^{2(n+1)}/2^{n+1}$$

la relation est vraie pour n aussi elle est donc vraie pour tout n .

de (4.5.2) nous déduisons que la condition suffisante de convergence est :

$$\mathrm{M} \cdot \alpha \cdot t^2 < 2 \text{ .} \qquad \underline{\textit{CQFD}}$$

<u>Comparaison du résultat avec celui du corollaire(4.3.1) :</u>

La condition $|t| < 1/\mathrm{M} \cdot \alpha$ est remplacée par $|t| < \sqrt{2/\mathrm{M} \cdot \alpha}$

Nous avons :

$$\sqrt{2/\mathrm{M} \cdot \alpha} \leq 1/\mathrm{M} \cdot \alpha \Leftrightarrow \mathrm{M} \cdot \alpha \leq 1/2$$

donc dans la majorité des cas notre résultat est bien plus intéressant car il donne un domaine de convergence plus large que le résultat de (4.3.1).

<u>Exemple :</u>

Soit l'équation :

$$\begin{cases} U' = -U^2 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

Elle a pour solution la fonction :

$U(x) = (1+x)^{-1}$ elle admet un développement en série de rayon R=1 ici M=2 et $\alpha = 1$.Avec notre résultat nous trouvons le résultat exacte. Avec le résultat du (4.3.1) nous trouvons 0.5. qui est loin de la valeur exacte.

On peut aussi donner un théorème pour l'autre condition de convergence.

<u>Théorème.4.5.2.</u> Si la fonction f vérifie :

$$\left\|f_{u_0}^{(n)}\right\| \leq n! \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha^n \; (\forall n \geq 0), \tag{4.5.4}$$

alors une condition suffisante de convergence de la méthode est :

a). $2M \cdot \alpha \cdot t^2 \leq 1$ **<u>si *R* est infini.</u>**

b). $5 \cdot M \cdot \alpha \cdot t^2 \leq 2$ **si *R* est fini.**

Preuve :

Pour prouver le théorème nous allons d'abord prouver le :

Lemme.4.5.2. Si f vérifie la condition (4.5.4) ,alors nous avons :

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq (2n)! \cdot M^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot t^{2(n+1)} / \left(n! \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}\right) \quad (4.5.5)$$

Preuve :

Par récurrence :

Cela se fait comme au lemme (4.5.1) ,il suffit de remarquer que :

$(2n)!/n! \cdot (n+1)!$ est le polynôme d '**ADOMIAN** d'ordre (n-1) de la fonction

$x \rightarrow x^2$ au point x=1.

a. **Si *R* est infini** :

b. il suffit de prouver que : $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < \infty$ .D 'après (4.5.5) cela est vrai pour

c. $2 \cdot M \cdot \alpha \leq 1$ voir (théorème 2.2.2.)

b**. Si *R* est fini :**

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq (2n)! \cdot (M/2)^{n+1} \cdot \alpha^n \cdot t^{2(n+1)} / n! \cdot (n+1)!$$

D'après théorème (2.2.4) nous avons la convergence pour :

$$5 \cdot M \cdot \alpha \leq 2.$$

On pouvait appliquer directement les résultats que nous avons développés au chapitre 2.Nous aurons dans ce cas :

Théorème.4.5.3.

Si :

$\left\|f_{u_0}^{(n)}\right\| \leq M\alpha^n (\forall \geq 0)$

une condition suffisante de convergence est :

$$\text{a)}.\ M\alpha \cdot |t| \leq 1/e$$

Si

$\left\|f_{u_0}^{(n)}\right\| \leq n! \cdot M \cdot \alpha^n (\forall n \geq 0),$

Une condition de convergence est :

$$\text{b).}\ 4 \cdot M \cdot \alpha \cdot |t| \leq 1 \ \underline{\textbf{si } \boldsymbol{R} \textbf{ est infini}}$$

$$\text{c.)}5 \cdot M \cdot \alpha \cdot |t| \leq 1 \ \underline{\textbf{si } \boldsymbol{R} \textbf{ est fini}}$$

<u>Preuve :</u> Il suffit de remarquer que :

$$\left\|F_{u_0}^{(n)}\right\| \leq \left\|f_{u_0}^{(n)}\right\| \cdot |t|. \leq n! \cdot M \cdot |t| \cdot \alpha^n$$

<u>Comparaison entre les résultats du théorème (4.5.3) et ceux des théorèmes (4.5.1) et (4.5.2).</u>

<u>Au théorème (4.5.1) on a</u> :

$$M \cdot \alpha \cdot t^2 \leq 2 \Leftrightarrow t^2 \leq 2 / M \cdot \alpha$$

de la condition (a) de (4.5.3) on a :

$$M^2 \cdot \alpha^2 \cdot t^2 \leq 1 / e^2 \quad \Leftrightarrow t^2 \leq 1/(M \quad \cdot \alpha)^2 \cdot e^2$$

On a donc :

$$2 / M\alpha \leq 1/(M\alpha)^2 \alpha^2 \Leftrightarrow M \cdot \alpha \leq 1/2 \cdot e^2 \sim 0.016$$

Le premier résultat est donc plus intéressant car il donne un domaine plus large.

<u>Au théorème (4.5.2) on a la condition :</u>

<u>Si *R* est infini</u> :

$$t^2 \leq 1/(2 \cdot M \cdot \alpha)$$

$$1/(2 \cdot M \cdot \alpha) \quad \leq 1/(4 \cdot M \cdot \alpha)^2 \Leftrightarrow M\alpha \leq 1/8.$$

<u>Si *R* est fini</u> :

$$t^2 \leq 2/(5 \cdot M \cdot \alpha)$$

$$2/(5 \cdot M \cdot \alpha) \leq 1/(5 \cdot M \cdot \alpha)^2 \Leftrightarrow M \cdot \alpha \leq 1/10 = 0.1$$

De ces résultats nous pouvons conclure que les théorèmes (4.5.1) et (4.5.2) donnent des résultats en général plus intéressants que ceux du théorème (4.5.3).

CHAPITRE 5 :

METHODE D 'ADOMIAN

GENERALISEE

5.1.Introduction :

Dans ce chapitre nous développerons une méthode plus générale que celle d 'ADOMIAN. Cette méthode, comme nous le verrons, introduit une véritable harmonie dans le domaine. Elle implique la méthode d'ADOMIAN , la méthode modifiée [2] utilisée pour la résolution des équations différentielles et le fait que la première approximation peut être choisie de différentes façons.

5.2.Principe de la méthode généralisée : Soit l'équation :

$$U=N(U)+C \tag{5.2.1}$$

Avec : $C=\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ et $(\sum_{n=0}^{\infty} \|C_n\|)<\infty$ (5.2.2)

L'équation (5.2.1) s'écrit :

$$U=N(U)+\sum_{n=0}^{\infty} C_n \tag{5.2.3}$$

Pour résoudre (5.2.3) nous considérons l'équation plus générale suivante :

$$U=\lambda \cdot N(U)+\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \lambda^n \tag{5.2.4}$$

Nous résolvons (5.2.4) en posant :

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n \tag{5.2.5}$$

nous développons $N(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n)$ en série entière au point : $\lambda=0$ .Ce qui est possible si N est développable en série entière en U_0.

Nous trouvons :

$$N(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \cdot \lambda^n \tag{5.2.6}$$

En utilisant (5.2.5) et (5.2.6) dans (5.2.4) elle devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{A}_n + C_{n+1}) \cdot \lambda^{n+1} \tag{5.2.7}$$

l'équation (5.2.7) entraîne :

$$\begin{cases} U_0 = C_0 \\ U_1 = A_0 + C_1 \\ . \\ . \\ . \\ U_{n+1} = A_n + C_{n+1} \end{cases} \tag{5.2.8}$$

Qui est le schéma de notre méthode. Le schéma (5.2.8) détermine de façon unique les termes $U_n (n \geq 0)$ car les termes A_n ne sont autres que les polynômes d '**ADOMIAN** de N et les C_{n} sont connus .

5.3.Cas particuliers du schéma précédent :

casa :Si C = C_0 +C_1: Le schéma précédent devient :

$$\begin{cases} U_0 = C_0 \\ U_1 = A_0 + C_1 \\ U_2 = A_1 \\ . \\ U_{n+1} = A_n \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Or ce schéma est le même que celui que nous obtenons en utilisant comme première approximation C_0 au lieu de C ce que nous avons étudié au chapitre.**3.**

Cas b : Si l'équation (5.2.1) est une équation différentielle ordinaire et C une fonction développable en série entière en t=0 ,donc :

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \tag{5.3.2}$$

dans ce cas notre schéma n'est autre que la méthode modifiée.

Nous concluons donc que la méthode d 'ADOMIAN est la méthode modifiée ne sont que des cas particuliers d'une seule méthode plus générale .

5.4.Convergence de la méthode d 'ADOMIAN généralisée :

La question la plus importante pour une méthode ápprochée est l'étude de la convergence .Nous l'étudierons en deux étapes .

A. convergence dans le cas scalaire :

Pour pouvoir étudier la convergence il faut chercher les termes U_n en fonction des termes C_0 ,..,C_{n+1} .Nous pouvons voir facilement que ces formules doivent être les mêmes pour les toutes fonctions scalaires car dans ce cas la dérivation admet les mêmes lois ; pour cela nous travaillerons seulement avec les fonctions analytiques complexes.

Dans ce qui suit l'équation (5.2.7) sera notée comme suit pour commodité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n = a + \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + b_n) \cdot \lambda^n \tag{5.4.2}$$

Théorème.5.4.1. Supposons que la fonction N soit holomorphe dans D

(a $\in$D);alors les termes U_{n+1} (n=0,1,2…etc). de (5.4.2) sont donnés

Par :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= N_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1/(n+1-k)! \cdot [\sum_{j=0}^{n+1-k} C^j{}_{n+1-k} \cdot B_k^j (N^{[n+1-k-j]}(a))^{(n-k)}] \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Démonstration ::Considérons pour cela l'équation :

$$z = \alpha \cdot (N(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \lambda^n) + a \tag{5.4.4}$$

le résultat de **LAGRANGE** implique que la solution est donnée par :

$$z= a+ \sum_{n=0}^{\infty}((N(a) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \lambda^n)^{[n+1]})^{(n)} /(n+1)! \cdot \alpha^{n+1} \qquad (5.4.5)$$

ou les coefficients de α^{n+1} ne sont que les polynômes d '**ADOMIAN** de la fonction :

$$z \to N(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_k \cdot \lambda^k \qquad (5.4.6)$$

au point $z = a$.

Maintenant si nous prenons $\alpha = \lambda$ et nous développons la série de (5.4.5) suivant les puissances de λ nous trouvons :

$$(N(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_k \cdot \lambda^k)^{[n+1]} = \sum_{j=0}^{n+1} C^j{}_{n+1} \cdot N^{[n+1-j]}(z) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k)^j \qquad (5.4.7)$$

Nous avons :

$$(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k)^j = \sum_{k=0}^{\infty} B_k{}^j \cdot \lambda^k \qquad (5.4.8)$$

Avec : $B_k{}^j$ est le polynôme **d'ADOMIAN** d'ordre k de la fonction :

$$x \to x^j \qquad (5.4.9)$$

des termes :$b_0, b_1, \ldots, b_k$;

$$B_k{}^j = \sum_{\substack{|ik|=k \\ |i| \le k}} k! \cdot b_0{}^{k-|i|} \cdot b_1{}^{i_1} \cdots b^{i_k}{}_k / |i|! \cdot i! \qquad (5.4.10)$$

en utilisant (5.4.10) dans (5.4.7) nous trouvons :

$$(N(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_k \cdot \lambda^k)^{[n+1]} = \sum_{j=0}^{n+1} C^j{}_{n+1} \cdot N^{[n+1-j]}(z) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} B_k{}^j \cdot \lambda^k) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{n+1}(C_{n+1}{}^j \cdot N^{[n+1-j]}(z) \cdot B_k{}^j) \cdot \lambda^k] \qquad (5.4.11)$$

en utilisant (5.4.11) dans (5.4.7) nous obtenons :

$$z= a+ \sum_{n=0}^{\infty}[\ \sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{n+1}(C_{n+1}{}^{j} \cdot N^{[n+1-j]}(z) \cdot B_k{}^{j}) \cdot \lambda^k\ ]\ \lambda^{n+1}\ /(n+1)! \quad (5.4.12)$$

en arrangeant la série multiple (5.4.12) suivant les puissances de λ nous aboutissons a la relation :

$$z= a+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}1/(n+1-k)!\cdot\sum_{j=0}^{n+1-k}C^{j}{}_{n+1-k}\cdot B_k^j(N^{[n-k-j+1]}(a))^{(n+1-k)}\right]\cdot\lambda^{n+1} \quad (5.4.13)$$

or nous avons aussi :

$$z= a+\lambda\cdot\sum_{n=0}^{\infty}N_n\cdot\lambda^n \quad (5.4.14)$$

d'où nous déduisons que les N_n sont donnés par la formule (5.4.3). ***CQFD***

Remarque.5.4.1 :1. Ce résultat est une généralisation du théorème bien connu de **LAGRANGE** déjà cité quand nous nous plaçons dans le cas scalaire.

2.Si $b_n=0$ pour tout n alors :$N_n = A_n$. pour tout n.

Avec ce résultat nous pouvons étudier la convergence.

Nous avons besoin de résultats préliminaires :

Lemme.5.4.1. Si nous avons :

$$\left|N^{(n)}(a)\right| \le \mathrm{M}\cdot\alpha^n\,(\forall n\ge 0) \quad (5.4.15)$$

alors :

$$\left|\ \left(N^{[n+1]}(a)\right)^{(m)}\ \right| \le n^m\cdot\mathrm{M}^n\cdot\alpha^m \quad (5.4.16)$$

Preuve : d'après la formule de **LEIBNITZ** nous avons:

$$(N^{[n]}(a))^{(m)} = \sum_{|k|=m}[m!\,N^{(k_1)}(a)\cdot\cdots\cdots\cdot N^{(k_n)}(a)]/k! \quad (5.4.17)$$

d'où :

$$| (N^{[n]}(a))^{(m)} | \leq \sum_{|k|=m} m![| N^{(k_1)}(a) | \cdots | N^{(k_n)}(a) |] / k! \quad (5.4.18)$$

En utilisant (5.4.15) dans (5.4.18) nous avons :

$$| (N^{[n]}(a))^{(m)} | \leq \mathrm{M}^n \cdot \alpha^m \cdot n^m \quad (5.4.19)$$

Lemme.5.4.2. Si nous avons :

$$|b_n| \leq \mathrm{M} \cdot \alpha^n \qquad (\forall n \geq 0) \qquad (5.4.20)$$

Alors :

$$\left|B_k{}^j\right| \leq j! \cdot \mathrm{M}^j \cdot \alpha^k \qquad (5.4.21)$$

Preuve :

$$B_k{}^j = \sum_{\substack{|ik|=k \\ |i| \leq j}} j! \cdot b_0{}^{j-|i|} \cdot b_1{}^{i_1} \cdots b^{i_k}{}_k / |i|! \cdot i!$$

d'où :

$$| B_k{}^j | \leq \sum_{\substack{|ik|=k \\ |i| \leq j}} j! \cdot | b_0 |^{j-|i|} \cdot | b_1 |^{i_1} \cdots | b_k |^{i_k}{}_k / |i|! \cdot i!$$

en utilisant (5.4.21) nous avons :

$$| B_k{}^j | \leq \sum_{\substack{|ik|=k \\ |i| \leq j}} j! \cdot M^{j-|i|} \cdot (M \cdot \alpha)^{i_1} \cdots (M \cdot \alpha^k)^{i_k} / |i|! \cdot i!$$

$$\leq j!\, \mathrm{M}^j \cdot \sum_{\substack{|ik|=k \\ |i| \leq j}} \alpha^{|ik|} / i! = k! \cdot \mathrm{M}^k \cdot \sum_{|ik|=k} \alpha^{|ik|} / i! = j! \mathrm{M}^j \alpha^n .$$

Car : $\sum_{|ik|=k} 1 / i! = 1$ (polynôme d'**ADOMIAN** de $(1\text{-}x)^{-1}$ en $x=0$).

CQFD.

Maintenant donnons le résultat de convergence .

Théorème.5.4.2 :supposons que :

$$\left|N^{(n)}(a)\right| \leq \mathrm{M}\cdot\alpha^n \qquad (\forall n \geq 0)$$

$$|b_n| \leq \mathrm{M}_1 \cdot \alpha_1{}^n$$

Alors les conditions suivantes sont suffisantes pour que nôtre méthode converge vers la solution de (5.2.1).

$$\begin{cases} \alpha_1 < M\cdot\alpha \\ M_1 < M \\ M\cdot\alpha \leq e \end{cases}$$

Démonstration :

Des lemmes (5.4.1) ,(5.4.2) et de (5.4.3) nous déduisons que :

$$|N_n| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n+1-k}[C^j_{n+1-k}(n+1-k-j)^{(n-k)}\cdot j!\cdot\mathrm{M}^{(n+1-k-j)}\cdot\alpha^{n-k}\cdot\mathrm{M}_1^j\cdot\alpha_1^k]/(n+1-k)!\Big)$$

$$= M^{n+1}\cdot\alpha^n\sum_{k=0}^{n}(\alpha_1/M\alpha)^k\left(\sum_{j=0}^{n+1-k}[(n+1-k-j)^{(n-k)}/(n+1-k-j)!](M_1/M)^j\right)$$

$$\leq (n+1)^n/(n+1)!\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n\cdot\sum_{k=0}^{n}(\alpha_1/\mathrm{M}\cdot\alpha)^k\left(\sum_{j=0}^{n+1-k}(M_1/M)^j\right)$$

$$\leq [1/(1-(\alpha_1/\mathrm{M}\cdot\alpha))\cdot(1-M_1/M)]\,(n+1)^n\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n/(n+1)!$$

(d'après les conditions 1 et 2 de (5.4.2)).

en utilisant la formule de **STIRLING** nous prouvons facilement que la condition 3 de (5.4.2) est suffisante pour la convergence de la méthode généralisée .

b. Cas fonctionnel. Pour généraliser le théorème (5.4.2) au cas fonctionnel il suffit de prouver par récurrence la relation :

$$|N_n| \leq$$

$$1/(1-(\alpha_1/\mathrm{M}\cdot\alpha))\cdot(1-M_1/M)\,(n+1)^n/(n+1)!\cdot\mathrm{M}^{n+1}\cdot\alpha^n \cdot (5.4.23)$$

en utilisant les conditions du théorème (5.4.2) au cas fonctionnel ce qui peut se faire sans difficulté.

Application du théorème.5.4.2. a la convergence de la méthode modifiée :

Soit l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u) + g \\ u(t)\big|_{t=0} = c \end{cases} \tag{5.4.24}$$

Qui est équivalente a :

$$u = \int_0^t f(u(s))ds + c + \int_0^t g(s)ds \tag{5.4.25}$$

Si g est développable en série entière en 0 et :

$$\left|g^{(n)}(0)\right| \le n!\cdot\mathrm{M}_1\cdot\alpha_1{}^n\,(\forall n \ge 0),$$

$$\int_0^t g(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0)\cdot t^{n+1}\cdot/(n+1)! \tag{5.4.26}$$

de (5.4.26) nous déduisons que :

$$b_n = g^{(h)}(0)\cdot t^{n+1}/(n+1)!\,(n \ge 0)$$

donc :

$$|b_n| \le \mathrm{M}_1\cdot\alpha_1{}^n \mathrm{t}^{\mathrm{n+1}}$$

si de plus on suppose que :

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \le \mathrm{M}\cdot\alpha^n\,(\forall n \ge 0),$$

alors les conditions suffisantes de convergence de la méthode

d 'ADOMIAN modifiée sont :

$$\begin{cases} \alpha_1 < M \cdot \alpha \\ M_1 < M \\ |t| \cdot \alpha \cdot M \leq 1/e \end{cases} \tag{5.4.27}$$

nous avons ainsi des condition de convergence pour la méthode modifiée.

Notons que jusqu'à présent ,bien qu'utilisée intensément , aucun auteur n'a donné de conditions de convergence pour la méthode modifiée d'**ADOMIAN !** ,on a donc comblé ce vide.

Pour développer l'autre résultat de convergence nous aurons besoin des:

Lemme5.4.3. Si nous avons :

$$\left|N^{(n)}(a)\right| \leq n! \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha^n \, (\forall n \geq 0) \tag{5.4.29}$$

alors :

$$\left|(N^{[n]}(a))^{(m)}\right| \leq (n+m-1)!\,\mathrm{M}^n \cdot \alpha^m \,/(n-1)!\,m! \tag{5.4.30}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la formule de **LEIBNITZ** et le lemme (2.2.2)

Lemme.5.4.4. Si nous avons :

$$\left|N^{(n)}(a)\right| \leq n! \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha^n \, (\forall n \geq 0)$$

$$|b_n| \leq \mathrm{M}_1 \cdot \alpha_1^n \, (\forall n \geq 0)$$

Avec :

$$\begin{cases} M_1 < M \\ \alpha_1 < M \cdot \alpha \end{cases}$$

Alors :

$$|N_n| \leq \beta \cdot (2n)!/(n!)^2 \cdot \mathrm{M}^n \cdot \alpha^n \tag{5.4.31}$$

Où :

$$\beta = \mathrm{M}/[(1-M_1/M)\cdot(1-\alpha_1/M\cdot\alpha)] \qquad (5.4.32)$$

<u>Preuve :</u> Il suffit d'utiliser dans la formule (5.4.3) les formules (5.4.21) et (5.4.31).

Nous avons le résultat de convergence suivant :

<u>Théorème5.4.3.</u> Si la fonction N vérifie :

$$\left|N^{(n)}(a)\right| \leq n!\cdot\mathrm{M}\cdot\alpha^n\,(\forall n \geq 0)$$

et les b_n n=0.1..etc vérifient :

$$|b_n| \leq \mathrm{M}_1\cdot\alpha_1^n\,(\forall n \geq 0) \qquad (5.4.31)$$

avec :

$$\begin{cases} M_1 < M \\ \alpha_1 < M\cdot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 < M \\ \alpha_1 < M\cdot\alpha \end{cases}$$

alors les conditions suivantes sont suffisantes pour la convergence de notre méthode :

<u>1.Si *R* est fini :</u>

$$a).\beta < 1/\alpha$$
$$b).1/(4\cdot M\cdot\alpha) - 1 \geq \alpha\beta/(1-\alpha\beta)$$

<u>2.Si *R* est infini</u> :

$$4\cdot\mathrm{M}\cdot\alpha\cdot R \leq 1$$

<u>Preuve :</u>

<u>1.Si *R* est fini</u> :

Dans ce cas nous utiliserons le théorème (2.2.4)

D'après (5.4.31) nous avons : $R \leq 1/\alpha$

D'après (2.2.4) si nous avons :

$\beta < R$ *et* $\varepsilon \geq \beta/(R-\beta)$ on a la convergence de notre méthode vers la solution de (5.1.1)

$\varepsilon \geq \beta/(R-\beta) \Leftrightarrow 1/4 \cdot \mathrm{M} \cdot \alpha - 1 \geq \beta/(R-\beta) \Leftrightarrow 1/4M\alpha - 1 \geq 1/(R/\beta - 1)$

On a $R \geq 1/\alpha$,donc :$1/(R/\beta - 1) \leq 1/(1/\alpha\beta - 1) = \alpha\beta/(1-\alpha\beta)$

l'inégalité précédante est vraie pour :

$$(1/4.M.\alpha - 1) \geq \alpha\beta/(1-\alpha\beta)$$

Ce qui démontre les conditions (1) du théorème .

2.Si *R* est infini :il suffit dans ce cas de prouver que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |N_n| < \infty$$

ce qui est vrai si la série de terme générale $\beta \cdot (2n)!/(n!)^2 \cdot \mathrm{M}^n \cdot \alpha^n$ est convergente .

En utilisant la formule de **STIRLING** nous trouvons que cela est vraie pour la condition 1 du th (5.4.3) exactement comme au th (2.2.2).

cas fonctionnel :les résultats précédants peuvent être généralisés au cas fonctionnel par induction ce que nous nous dispenserons de faire car c'est similaire a ce qui a été fait au chapitre 2. .

Remarques.5.4.2 Si dans les théorèmes (5.4.3) et (5.4.4) $\mathrm{M}_1 = \alpha_1 = 0$ nous retrouvons les conditions déjà développées dans le chapitre 2 .

5.Méthode asymptotique généralisée : Nous développerons dans ce qui suit une généralisation de la méthode asymptotique dont il a été question dans le chapitre .1.

Soit l'équation :

$$N(U) = U + C \qquad (5.5.1)$$

avec :

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| < \infty \tag{5.5.2}$$

Pour développer la méthode généralisée nous considérons l'équation plus générale suivante :

$$N(U) = \lambda \cdot U + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \lambda^n \tag{5.5.3}$$

nous cherchons la solution de (5.5.3) sous forme :

$$U(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n \tag{5.5.4}$$

En remplaçant U dans (5.5.1) par (5.5.4), développant en série tous les termes et en identifiant les termes ayant même puissance nous trouvons :

$$\begin{cases} A_0 = C_0 \\ A_1 = U_0 + C_1 \\ . \\ . \\ A_{n+1} = U_n + C_{n+1} \end{cases} \tag{5.5.5}$$

le système détermine de proche en proche les termes de la série (5.5.4) c' est la méthode asymptotique généralisée qui peut être très utile quand le terme C est très compliqué. Par exemple si C est une fonction développable en série de **FOURIER** il peut être profitable de travailler avec la méthode précédante .

Conclusion :

Et voilà nous arrivons au terme de notre mémoire, comme nous l'avions énoncé tout au début de cet exposé la méthode demeure très mal connue .

Pour le cadre théorique de la méthode , nous espérons lui avoir donner une forme presque définitive , qui non seulement rend la méthode très naturelle mais aussi très facile a étudier .

Pour la convergence , nous pensons avoir donner les situations les plus intéressantes et les plus générales qui puissent se présenter dans la pratique. Nos conditions de convergence sont certainement suffisantes pour les besoins pratiques.

En ce qui concerne l'application aux **EDO**, nos théorèmes sont très originaux et pratiques nous avons aussi dans ce cas donné une justification théorique a l'application de la méthode .

Nous avons introduit une véritable harmonie dans le domaine en donnant une généralisation intéressante de la méthode d '**ADOMIAN** avec une étude précise de sa convergence ,ce qui nous a permis pour la première fois d 'étudier la convergence de la méthode modifiée. Cette méthode m'a été inspirée par la méthode modifiée .

Nos résultats ne sont certainement pas de grandes découvertes scientifiques , mais dans le domaine de cette méthode ils méritent d'être placés au premier rang .

Bibliographie :

[1] :G. ADOMIAN :Stochastic Systems,Academic,**1983.**

[2] :K. ABBAOUI : Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'DOMIAN et application a la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine , Thèse de doctorat de l'université **Pierre et Marie CURIE** ,Paris VI.**(4.10.95).**

[3] :G. ADOMIAN : An investigation of asymptotic decomposition method for nonlinear equation physics, Applied mathematics and computation. **24 : 1-17(1987).**

[4] :MURRAY . R . SPIEGEL :Variables complexes ,Cours et problèmes ,Série **SCHAUM.**

[5] : Y. CHERRUAULT- G. SACCOMANDI- B. SOME : A new results for convergence of **ADOMIAN'S** method applied to integral equations . Math compter modelling .**16.(2) (1992).**

[6] :C. BERGE :Principes de combinatoire **(Chap.I).**

[7] :G. ADOMIAN :Solving Frontier problems of physics:The decomposition method , Kluwer,**(1994).**

[8] :L. LUSTERNIK-V. SOBOLEV : Précis d 'analyse fonctionnelle, Edition MIR, **(1989),[page 217].**