

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

Département Construction



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du Master en Aéronautique
Option : Structures Aéronautiques

THEME :

**Solutions analytiques de flexion et flambage d'une
plaque FGM basées sur la théorie de déformation en
cisaillement du premier ordre.**

❖ *Présenté par :*

✓ **Chaouki MAROUANI & Sohaib KHODJA**

❖ *Encadré par :*

✓ **Dr Amale MAHI (MC Université Blida 1)**

Blida 09/2016

Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel ou à gradient de propriétés (FGM) sont de nouveaux matériaux qui s'inscrivent dans la gamme des matériaux composite, ayant une variation graduelle en continue des fractions volumiques de chaque un des constituants (en général métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en céramique des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. Ils ont vu le jour dans les années 1984-1986. L'un des principaux avantages que présentent ces matériaux est la possibilité de réduire les contraintes résiduelles et les contraintes thermiques, ce qui permet d'augmenter la résistance et la ténacité des structures ou des éléments structuraux constitués par cette nouvelle gamme de matériaux composite. Ces caractéristiques ont trouvé leur application dans les éléments des structures aéronautiques et spatiales qui sont sujets à des environnements de fonctionnements thermiques et mécaniques sévères. Le but recherché dans cette étude est tout d'abord, se familiariser et comprendre la nature et les caractéristiques des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), puis déterminer leurs propriétés en fonction des coordonnées du point considéré de la fonction de distribution choisie. La modélisation de ces matériaux est faite grâce à la théorie 2-D du premier ordre pour décrire le champ des déplacements et les rotations applicable aux plaques minces et moyennement épaisses. En se servant de l'énergie de déformation, ainsi que le travail des charges externes, le principe de Hamilton est utilisé pour établir les équations de mouvement. Suite à cela, et grâce aux relations fondamentales de flexion et de flambage, on a déterminé les deux systèmes d'équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FGM sur appuis simple. Ces deux derniers sont résolus par la méthode analytique de Navier. La comparaison des résultats obtenus avec ceux qui sont publiés est faite pour démontrer la validité du code de calcul élaboré. Les résultats représentant les contraintes normales et longitudinales planes, ainsi que la charge critique de flambage sont commentés, et des graphes appropriés sont tracés pour montrer l'influence des paramètres considérés dans cette étude.

ملخص

المواد ذات التدرج الوظيفي أو ذات الخصائص المادية المتغيرة بالتدرج (FGM) هي مجموعة جديدة من المواد التي تقع ضمن مجموعة من المواد المركبة ، مع تغيير تدرجي في كسور حجم مستمرة في كل واحد من المكونات (عادة المعادن والسيراميك) عبر سمك الهيكل، مما يؤدي الى إحداث تغييرات في الخصائص الميكانيكية-الحرارية الإجمالية للعضو الهيكلي الذي يتكون منها. وهي مصممة للتغلب على المشاكل الناجمة عن بيئات حرارية الشديدة . ولدت في السنوات 1984-1986، واحدة من المزايا الرئيسية لهذه المواد هو القدرة على الحد من الضغوط المتبقية والإجهاد الحراري، مما يزيد من قوة وصلابة الهياكل او العناصر الهيكلية التي تشكلها هذه المجموعة الجديدة من المواد المركبة. وقد وجدت هذه الميزات تطبيقاتها في مكونات هياكل الطيران التي تخضع لبيئات حرارية و ميكانيكية شديدة. والهدف من هذه الدراسة هو أولاً، تعريف وفهم طبيعة وخصائص المواد ذات التدرج الوظيفي FGM وتحديد خصائصها وفق إحدائيات النقطة المعتمدة و دالة التوزيع المحددة. يتم اجراء نمذجة هذه المواد من خلال نظرية 2D من الدرجة الاولى لوصف مجال التحرك و التشريد التي تنطبق على لوحات رقيقة و معتدلة السماكة . باستخدام الطاقة الكامنة وعمل الأحمال الخارجية ، يتم استخدام مبدأ Hamilton لتحديد معادلات الحركة. وفي أعقاب ذلك، وبفضل أساسيات الانحناء والإلتواء، نتحصل على اثنين من معادلات تفاضلية لحالة لوحة FGM على دعم بسيط . ويتم تحديدهذه المعادلات التفاضلية عن طريق المنهج التحليلي Navier . مقارنة النتائج مع تلك التي نشرت في هذا الصدد لإثبات صحة رمزالحساب المطور، وستمثل نتائج الترددات الطبيعية والضغوطات الهوائية الحرجة وتردد الررفرفة الحرج ، ويتم رسمها في منحنيات بيانية مناسبة و النقاش عليها لإظهار تأثير المعلمات المعتمدة في هذه الدراسة .

Summary

Functionally graded materials or gradient properties FGM are new materials that fall within the range of composite materials. having a gradual variation in continuous volume fractions of each one of the components (usually metal and ceramic) through the thickness, inducing changes in ceramic aggregate thermo-mechanical properties of the structural member which they constitute. They were designed to overcome the problems caused by severe thermal environments. They were born in the years 1984-1986. One of the main advantages of these materials is the ability to reduce the residual stresses and thermal stress, which increases the strength and toughness of structures or structural elements comprise this new range of composite materials. These features have found their application in components of aerospace structures that are subject to severe thermal and mechanical workings of environments. The aim in this study is first, familiarize and understand the nature and characteristics of functional gradient materials and determine their properties according to the coordinates of the point considered the selected distribution function. The modeling of these materials is made through the first shear deformations plate theory, which is a 2-D theory, to describe the field of displacements and rotations applicable to thin and moderately thick plates. By using the strain energy and the work of external loads, Hamilton's principle is used to determine the equations of motion. Following this, and thanks to the fundamentals of bending and buckling, the two systems of differential coupled equations was determined to the case of FGM plate upon support. These last two are determined by the analytical method of Navier. The results are compared with those published in order to demonstrate the validity of the developed computational algorithm. The results representing the natural frequencies, critical aerodynamic pressures and critical flutter frequency are discussed and appropriate graphs are drawn to show the influence of the parameters considered in this study.

Remerciements :

Nous adressons nos remerciements aux personnes qui nous ont aidés dans la réalisation de ce mémoire. En préambule, on veut dresser tous nos remerciements aux personnes avec lesquelles on a pu échanger et qui nous ont aidés pour la rédaction de ce mémoire.

Plus particulièrement, nous tenons à remercier :

- ❖ Dr. Amel MAHI, promotrice de ce mémoire.
- ❖ Merci à l'institut d'aéronautique et des études spatiales, pour nous avoir accordés sa confiance pour la réalisation de ce projet, pour ses précieux conseils, et sa disponibilité, et pour nous avoir guidés tout au long de cette étude.
- ❖ Tous les membres de jury de notre mémoire.
- ❖ Quelques professeurs et responsables de l'institut d'aéronautique et des études spatiales de BLIDA, pour leurs précieuses connaissances.

Je souhaite personnellement remercier mon frère HICHEM BEZZOU, celui qui m'a aidé pour réaliser ce travail en m'offrant pas mal de documents. Ainsi, je remercie tous mes amis surtout le petit AMINE, car on a formé une belle équipe, je vous remercie donc pour tout ce que vous m'avez apporté au cours de ces cinq années. J'aimerais remercier ma famille pour leur soutien, et surtout mon oncle maternel M. BRAHIM SAOU, qui m'a aidé beaucoup à surmonter toutes les pentes que j'ai rencontré dans ma vie, je ne serai jamais en mesure de rembourser vos actes innombrables de gentillesse et d'amour, ni de vos sacrifices personnels. Enfin, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Chaouki

Je remercie tout particulièrement MAROUANI CHAOUKI, mon partenaire de mémoire, mon binôme et mon meilleur ami. Cette année fut riche en émotions et je tiens à te remercier pour ton soutien et ce lien tout particulier qui s'est créé entre nous. Je remercie aussi ma famille, mes parents et mes frères et ma sœur pour leurs précieux appuis et leurs conseils tout au long de mon cursus, sans leur soutien et leur amour rien n'aurait été possible. Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux enseignants de cet institut pour leurs efforts à nous guider à travers ces années. Et enfin, je remercie tous mes amis sans exception.

Sohaib

Table des matières

RESUME.

REMERCIEMENT.

TABLE DES MATIERES.

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.

Introduction générale.....	Error!
Bookmark not defined.	
Chapitre 1: généralités sur les matériaux composite.....	3
1.1 DEFINITION :	4
1.1.1 Les composites à grande diffusion :	4
1.1.2 Les composites à haute performance :.....	5
1.2 CARACTERISTIQUES GENERALES :	5
1.3 Constituants des matériaux composites :	7
1.3.1 Les renforts :.....	7
1.3.1.1 Fibres de verre :.....	8
1.3.1.2 Fibres de Carbone :	8
1.3.1.3 Fibres aramides :	8
1.3.1.4 Fibres céramiques :.....	8
1.3.1.4 Caractéristiques mécaniques des fibres :	9
1.3.2 Les matrices :	10
1.3.2.1 Les différentes natures des matrices :	10
1.3.2.2 Charges et additifs :	10
1.4 Classification des matériaux composites :.....	12
1.4.1 Classification suivant la forme des constituants :	12
1.4.1.1 Composites à particules :.....	12
1.4.1.2 Les composites à fibres :	13

Table des matières

1.4.2 Classification suivant la nature des constituants :	13
1.4.2.1 Composites à matrice organique.....	14
1.4.2.2 Composites à matrice métallique	14
1.4.2.3 Composites à matrice minérale.....	14
1.5 Conclusion :	14
Chapitre 2: généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM.....	15
2.1 Prologue :	16
2.2 Recherche bibliographique :	17
2.3 Définition d'un matériau à gradient fonctionnel FGM :	18
2.4 Caractéristiques des matériaux à gradient fonctionnel :	20
2.5 Applications :	22
2.6 Conclusion :	24
Chapitre 3: théories des plaques.....	25
3.1 Introduction :	26
3.2 Modélisation d'une plaque FGM :	26
3.2.1 Les propriétés matérielles des P-FGM :	27
3.2.2 Les propriétés des E-FGM :	29
3.2.3 Les propriétés des S-FGM :	30
3.3 Théories de déformations des plaques FGM :	31
3.3.1 Théorie classique des plaques minces (CPT) :	32
3.3.2 Théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses (FSDPT) : ..	34
3.3.3 Formulation théorique :	36
3.3.3.1 Champ des déplacements du premier ordre :	37
3.3.3.2 Détermination du champ des déformations :	37
3.3.3.3 Détermination du champ des contraintes :	39
3.3.4 Modélisation des charges externes :	47
3.4 Conclusion :	49
Chapitre 4: énergie totale du système et équations mouvement.....	50
4.1 INTRODUCTION :	51
4.2 Energie de déformation :	51
4.3 Travail des charges externes :	55
4.4 Formulation variationnelle :	56
4.4.1 Variation de l'énergie de déformation :	56

Table des matières

4.4.2 La variation du travail :	57
4.5 Application du principe d'Hamilton :.....	58
4.6 Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :.....	61
4.7 Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :	62
4.8 Conclusion :.....	62
Chapitre 5: résolutions, résultats et interprétations.....	64
5.1 Introduction :.....	65
5.2 Solutions analytiques pour les plaques FGM :.....	65
5.2.1 Résolution des équations de flexion par la méthode de Navier :.....	66
5.2.2 Résolution des équations de flambage par la méthode de Navier :.....	68
5.3.1 L'analyse de la flexion :	71
5.3.1.1 Résultats et interprétations :	71
5.3.1.2 Conclusion :.....	82
5.3.2 L'analyse du flambage :.....	83
5.3.2.1 Résultats et interprétations :	83
5.3.2.2 Conclusion :.....	95
5.4 Conclusion :.....	96
Organigramme du programme de calcul.....	97
Conclusion générale.....	98
Référence.....	99

LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

A_{ij} : Matrice de rigidité en membrane.

B_{ij} : Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

D_{ij} : Matrice de rigidité en flexion.

E : Module de Young.

λ : Type de charge de flambage.

h : Épaisseur du matériau suivant l'axe z .

K_{ij} : Matrice de rigidité.

M_x, M_y : Moments de flexion.

M_{xy} : Moment de torsion.

N_x, N_y : Résultantes des efforts normaux suivant x et y respectivement.

N_{xy} : Résultante de cisaillement dans le plan.

$q(x, y)$: Chargements transversaux de la plaque.

Q_{ij} : Matrice de rigidité réduite.

Q_{xz}, Q_{yz} : Résultantes des efforts de cisaillement.

U, V, W : Déplacements suivant x, y et z .

U_d : Énergie de déformation.

V_m : Fraction volumique du matériau.

V_p : Travail des charges externes.

Liste des symboles et abréviations

ν : Coefficient de poisson.

σ_i : Contrainte normale.

ε_i : Déformation normale.

ε_m : Déformation en membrane.

ε_f : Déformation en flexion.

σ_{ij} : Contrainte en cisaillement.

ψ_x : Angle de rotation suivant l'axe x.

ψ_y : Angle de rotation suivant l'axe y.

FSDT : théorie de déformation des plaques du premier ordre.

FGM : matériau à gradient fonctionnel.

P-FGM : matériau à gradient fonctionnel en puissance.

E-FGM : matériau à gradient fonctionnel en exponentiel.

S-FGM : matériau à gradient fonctionnel en sigmoïde.

Liste des figures

Liste des figures

Figure	page
Figure (1.1) : Matériau composite.....	6
Figure (1.2) : Types de renfort.....	9
Figure (1.3) : Exemples de charges utilisées dans les CMO	11
Figure (2.1) : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	20
Figure (2.2) : Un squelette microstructure d'un matériau FGM.....	21
Figure (2.3) : FGM colonnaire : TBC traité par un faisceau d'électrons physique en phase vapeur technique de dépôt.....	22
Figure (2.4) : Les différents domaines d'applications des FGM.....	24
Figure (3.1) : Les deux types de représentation des structures en matériau FGM....	27
Figure (3.2) : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur.....	28
Figure (3.3) : Variation du module de Young suivant la fonction exponentielle.....	29
Figure (3.4) : Lois de variation des propriétés S-FGM.....	30
Figure (3.5) : Déformation de la section normale par rapport Au plan moyen.....	32
Figure (3.6) : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.....	34
Figure (3.7) : Description de la plaque FGM.....	36
Figure (3.8) : Cinématique des déformations d'après la théorie de Mindlin-Reissner.....	37
Figure (3.9) : Composantes du vecteur des contraintes.....	39
Figure (3.10) : Schématisation des résultantes en membrane.....	42
Figure (3.11) : Représentation schématique des résultantes de cisaillement.....	44
Figure (3.12) : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	46
Figure (3.13) : Équilibre d'un élément plaque.....	48
Figure (3.14) : Les forces distribuées de pré-flambage.....	49
Figure (5.1) : Variation de la déflexion verticale adimensionnelle \bar{W} d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	77
Figure (5.2) : Variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	78

Liste des figures

Figure (5.3) : Variation de la contrainte adimensionnelle dans le plan $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	80
Figure (5.4) : Variation de la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	82
Figure (5.5) : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) rectangulaire (a/b = 0,5 et n = 1) soumise à différents types de charges de compression en fonction de b/h.....	85
Figure (5.6) : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Sic) soumise à une charge de compression uni-axiale en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b.....	90
Figure (5.7) : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Sic) soumise à une charge de compression bi-axiale en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b.....	91
Figure (5.8) : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Sic) soumise à des charges de compression et de tension en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b.....	92
Figure (5.9) : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage \bar{P}_{cr} d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) carrée soumise à une compression uni-axiale en fonction de n et b/h.....	95
Figure (5.10) : Organigramme du programme de calcul (Maple).....	97

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Tableaux	page
Tableau (1.1) : Types de composites, ainsi que leurs constituants et domaines d'application.....	7
Tableau (1.2) : Caractéristiques mécaniques des fibres.....	10
Tableau (5.1) : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles obtenues par différentes théories de déformation (Plaque FGM Al/Al ₂ O ₃ , a/b = 1, a/h=10).....	73
Tableau (5.2) : Effet de l'index de la fraction volumique sur les contraintes et les déplacements adimensionnels d'une plaque FGM carrée (Al/Al ₂ O ₃ , a/h=10) en présence d'une charge transversale uniforme et sinusoïdale.....	75
Tableau (5.3) : Variation de la déflexion verticale adimensionnelle \bar{W} d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	76
Tableau (5.4) : Variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	77
Tableau (5.5) : Variation de la contrainte adimensionnelle dans le plan $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	79
Tableau (5.6) : Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) en fonction de n, b/h et a/b.....	81
Tableau (5.7) : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) rectangulaire soumise à des charges de compression (a/b = 0,5 et n = 1).....	84
Tableaux (5.8) : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Sic) soumise à des charges de compression.....	89
Tableau (5.9) : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al ₂ O ₃) carrée soumise à une compression axiale selon x ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$).....	94

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau. L'industrie moderne de la mécanique de construction, de l'automobile, du génie civil et plus spécialement de l'aéronautique et de l'aérospatial, est à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels telles que la légèreté et la rigidité [1]. Lorsque les matériaux métalliques ont commencé à montrer leurs limites, les matériaux composites sont venus y apporter quelques solutions. Cependant, les matériaux composites classiques, généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces, où les propriétés matérielles subissent un changement soudain qui provoque de fortes concentrations de contraintes, ce qui entraîne le décollement ou la rupture aux interfaces [2].

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), pour lesquels des propriétés matérielles, tel que le module de Young, la masse volumique et le coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux composites stratifiés. Donc les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux dont la microstructure varie graduellement ou continument avec la position. Ils sont conçus pour une performance ou une fonction spécifique. Ils ne sont techniquement une classe séparée de matériaux, mais ils font partie de la famille des matériaux composites et représentent plutôt une approche de l'ingénierie pour modifier la structure et l'arrangement chimique des matériaux. Cette approche est plus bénéfique lorsqu'elle répond parfaitement aux exigences conçus dans le cahier des charges. Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup

Introduction générale

d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques [2].

C'est à partir de l'An 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement étudier les performances de ces matériaux.

Le but recherché dans cette étude, est d'abord de comprendre la nature des caractéristiques des matériaux FGM, puis de déterminer leurs propriétés en fonction des coordonnées du point considéré et de la fonction mathématique de la distribution choisie. Ensuite, apprendre à modéliser ces matériaux pour pouvoir analyser leurs comportements en flexion et flambage statique.

Cette étude inclut cinq chapitres, chaque chapitre contient une introduction et une conclusion. Des généralités sur les matériaux composites sont incluses dans le premier chapitre. Suivi d'un deuxième chapitre « généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel ». Le troisième chapitre est consacré pour l'étude des théories des plaques. L'énergie totale du système et les équations de mouvement sont introduites dans le quatrième chapitre. Et en fin, des résolutions, interprétations et résultats sont présentés dans le cinquième et le dernier chapitre. Le mémoire se terminera en fin par une conclusion générale dans laquelle une synthèse du travail réalisé sera présentée.

CHAPITRE 1 :
GENERALITES SUR LES MATERIAUX
COMPOSITES

1.1 DEFINITION :

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». Au fait, l'appellation « *matériau composite* » ou « *composite* » est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l'instant la définition générale suivante :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble Des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [3].

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- légèreté
- grande résistance à la fatigue
- liberté de formes
- maintenance réduite
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone)
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.
- Une bonne isolation électrique.

On distingue deux types de composites : « les composites à grande diffusion » et « les composites à haute performance » [3].

1.1.1 Les composites à grande diffusion :

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont :

Optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration du matériau (moulage par contact, SMC et injection).

1.1.2 Les composites à haute performance :

Les matériaux composites à hautes performances (tel que **les matériaux à gradient fonctionnel FGM**) sont utilisés dans le domaine d'aéronautique, l'Aerospace, la médecine...etc. où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées.

1.2 CARACTERISTIQUES GENERALES :

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue est appelée le *renfort* ou *matériau renforçant* (figure 1.1). Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants,
- de leur distribution géométrique,
- de leurs interactions, etc.

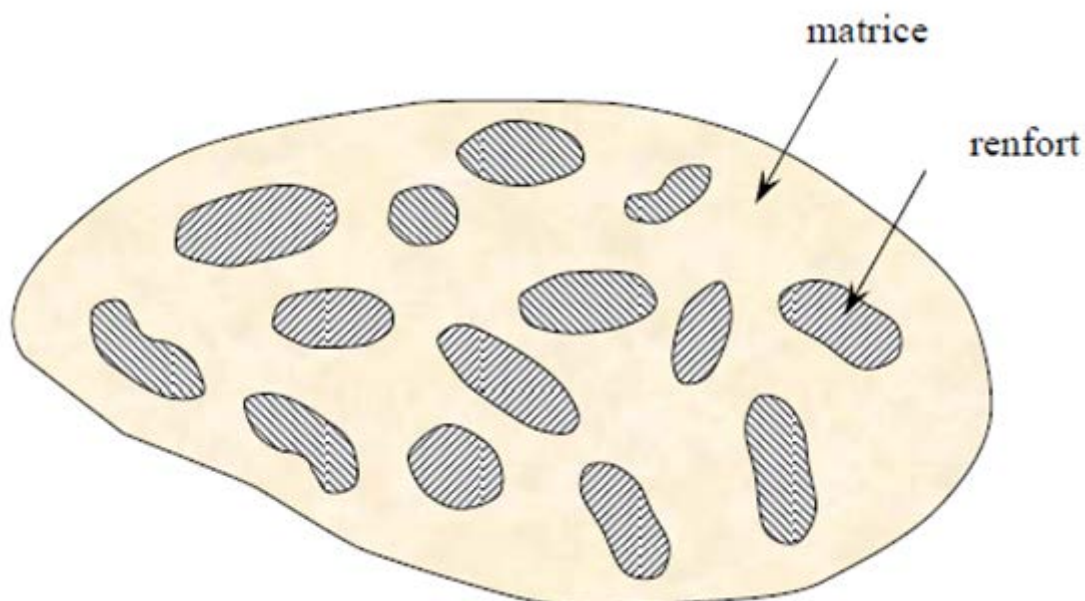


FIGURE1.1. Matériau composite

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces

Ch.1 Généralités sur les matériaux composites

Composite carbone-carbone Composite céramique		thermomécaniques
3. <i>Composites à matrice Métallique</i>	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. <i>Sandwiches</i> Peaux Ames	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples
5. Matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded material)	Métaux/céramique	Aérospatial, ingénierie, l'énergie nucléaire, optique, chimique, électronique, conversion d'énergie, matières biologique, produits...

Tableau 1.1. Types de composites, ainsi que leurs constituants et domaines d'application

1.3 Constituants des matériaux composites :

1.3.1 Les renforts :

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri-directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure (1.2).

1.3.1.1 Fibres de verre :

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction des structures composites.

1.3.1.2 Fibres de Carbone :

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres *précurseurs* utilisées sont des *fibres acryliques* élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur. Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

1.3.1.3 Fibres aramides :

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

1.3.1.4 Fibres céramiques :

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés

Ch.1 Généralités sur les matériaux composites

notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbone de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium

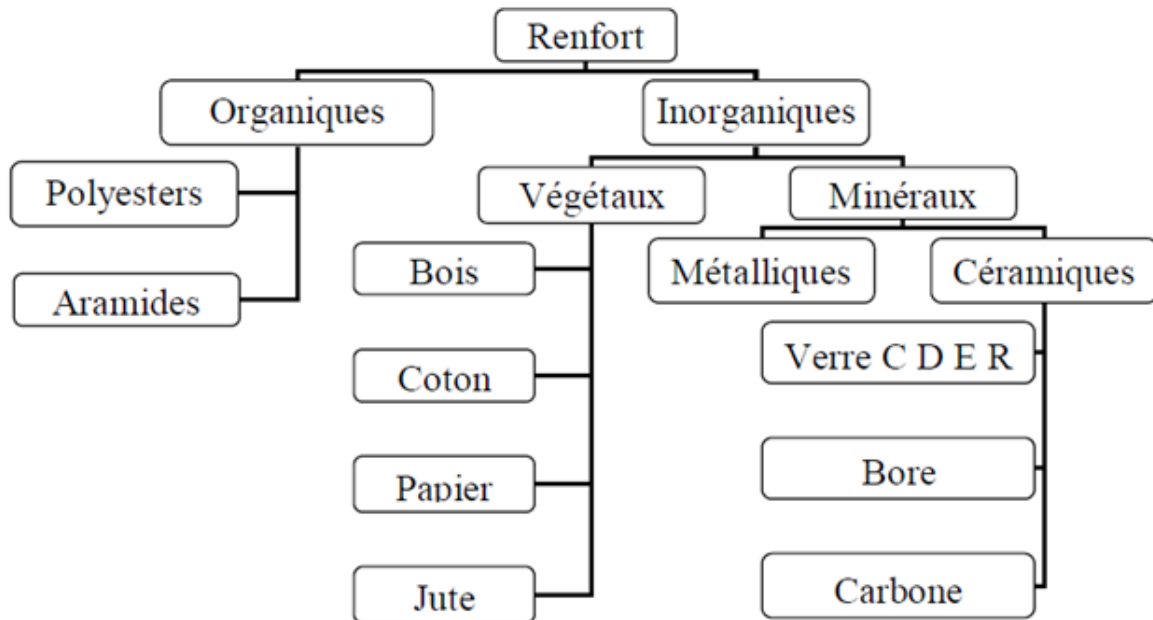


FIGURE 1.2. Types de renfort

1.3.1.4 Caractéristiques mécaniques des fibres :

Il existe différents types de fibres, elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

renforts	ρ (Kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
AS4	1 800		3 599	235
T300	1700	1,2	3 654	231
IM6		0,88	1 460	
IM8	1 800		5 171	310
kevlar 49	1 440	2,5	3 620	124
verre E	2 580	3,5	3 450	69

Tableau 1.2. Caractéristiques mécaniques des fibres

1.3.2 Les matrices :

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes.

1.3.2.1 Les différentes natures des matrices :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche.

1.3.2.2 Charges et additifs :

Enfin, des charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir davantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Ch.1 Généralités sur les matériaux composites

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques « traditionnels ». On peut par exemple rencontrer (figure 1.3) :

- Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant ;
- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.3. Exemples de charges utilisées dans les CMO :

(a) : microbilles de verre, (b) : noir de carbone, (c) : silice

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- Des stabilisants, qui retardent les dégradations dues à l'oxygène, aux UV ou encore à l'ozone
- Des ignifugeants ou retardateurs de flamme (la plupart des polymères sont inflammables !)
- Des agents de démoulage
- Des colorants...

Il est ainsi possible de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite, et d'adapter finement ses propriétés aux besoins du concepteur.

1.4 Classification des matériaux composites :

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

1.4.1 Classification suivant la forme des constituants :

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

1.4.1.1 Composites à particules :

Un matériau composite est un composite à particules (tel que **les matériaux à gradient fonctionnel FGM**) lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporées dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées. Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités, ce type de matériaux ne sera pas étudié dans le cadre de cet ouvrage.

1.4.1.2 Les composites à fibres :

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- la nature des constituants,
- la proportion des constituants,
- l'orientation des fibres,

Suivant le cahier des charges imposées.

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent ouvrage sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de ce type de matériaux.

1.4.2 Classification suivant la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

1.4.2.1 Composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

1.4.2.2 Composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métal-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (Bor SiC).

1.4.2.3 Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

1.5 Conclusion :

Un matériau composite est un matériau hétérogène, formé d'au moins deux matériaux constituants non miscibles, disposé selon une organisation géométrique particulière. Alors, on distingue deux types de composites :

1. Les composites à grande diffusion : peu coûteux, et présentant près de 95% des composites à matrices organiques fabriquées, utilisés pour toutes les sortes de pièces faiblement sollicitées.
2. Les composites à haute performance : plus onéreux, mais présentant des qualités mécaniques supérieures, notamment employés dans

Ch.1 Généralités sur les matériaux composites

l'aéronautique, le nautisme, les sport et loisirs ou encore la construction industrielle.

Quasiment tous les composites sont constitués :

- de renforts, prenant généralement la forme de fibres ou de particules, assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite ;
- D'une matrice dans laquelle sont noyés les renforts, assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.
- De charges et additifs, L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre.

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants. En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres. Mais Selon la nature de la matrice, ils sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

CHAPITRE 2 :
GENERALITE SUR LES MATERIAUX
A GRADIENT FONCTIONNEL (FGM)

2.1 Prologue :

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie civile, mécanique et spatiale grâce à leur grande rigidité et résistance. Par exemple ; une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à haute température [4].

Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface [4].

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure. Un tel fonctionnement leur permet d'être fabriqués comme des structures différentes dans l'accord aux exigences de services divers [4].

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) représentent une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position d'une manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la manière. A chaque interface le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, la tenue à la fatigue, la résistance à la corrosion, la bonne conductivité thermique, en plus d'avoir une gradation des propriétés

permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales, ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

2.2 Recherche bibliographique :

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [7].

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas [7].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

Ch.2 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D, le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches. Dans la seconde étape (1990-1999), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... [7].

2.3 Définition d'un matériau à gradient fonctionnel

FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués, appelés FGM (Functionally Graded Material), sont des composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à l'autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs matériaux tels que le nouveau matériau possède les propriétés désirées suivant la direction désirée. Cette graduation dans la distribution matérielle réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes dans les stratifiés [8].

Ch.2 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple : la face supérieure est exposée à une haute température, alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux [1].

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles :

- faible réactivité chimique, et bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermique) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

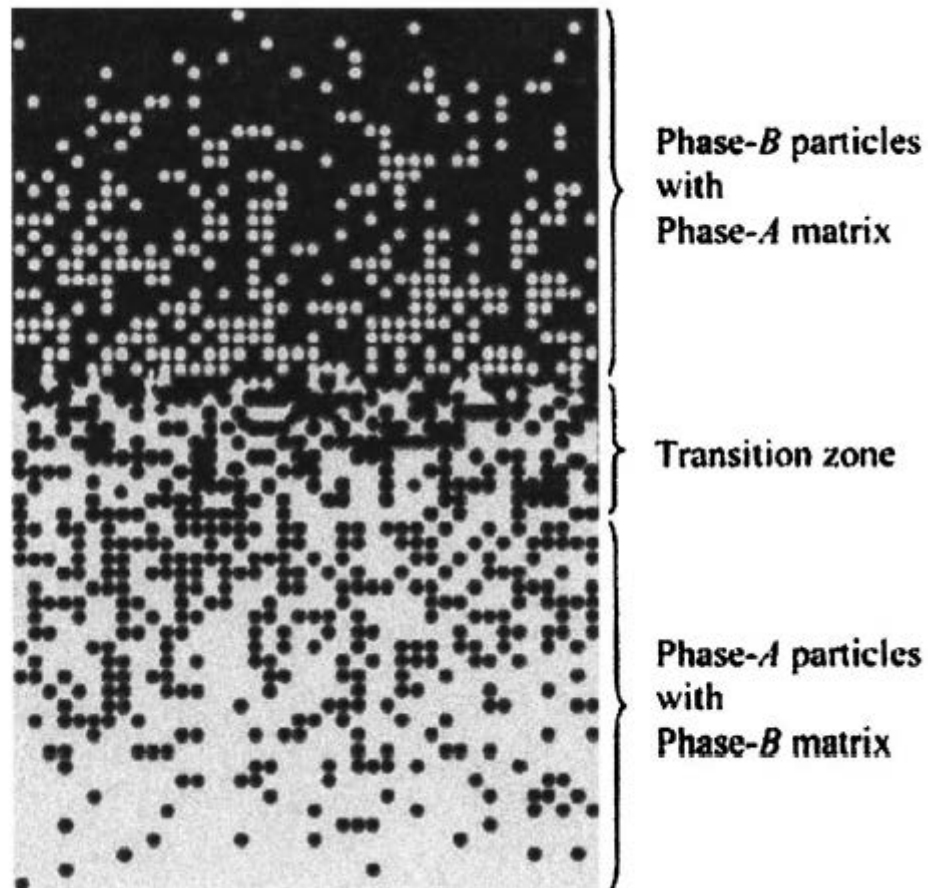


FIGURE 2.1. Variation continue de la microstructure (schématisée)

2.4 Caractéristiques des matériaux à gradient fonctionnel :

A l'heure actuelle, les FGM sont associés aux composites particulaires, où la fraction volumique des particules varie dans une ou plusieurs directions. L'un des avantages d'une variation monotone de la fraction volumique des phases constitutives, est l'élimination de la discontinuité, qui est souvent rencontrée dans les composites stratifiés et en conséquence, ce qui évite les problèmes liés à la délimitation. Un FGM peut être également élaboré, en utilisant des couches de tissu renforcé par des fibres, avec une fraction de volume des fibres, qui est dépendante de coordonnées. Les distributions des propriétés sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules, qui doivent être assez

Ch.2 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM

dures à l'intérieur pour résister à la rupture, mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure [9]

Un FGM peut également avoir un squelette microstructure, tel que représenté sur la figure (2.2). Outre la microstructure ressemblante à des composites particuliers typiques représentés dans les figures (2.1) et (2.2), un FGM peut avoir une architecture différente qui se traduit par un comportement orthotrope. Des exemples typiques ont orthotrope lamellaire et microstructure colonnaire obtenus par pulvérisation de plasma et des procédés de fabrication de dépôt physique en phase vapeur par faisceau d'électrons, Respectivement, ce dernier cas représenté sur la figure (2.3). Un FGM peut comprendre plus de deux phases constitutives [7].

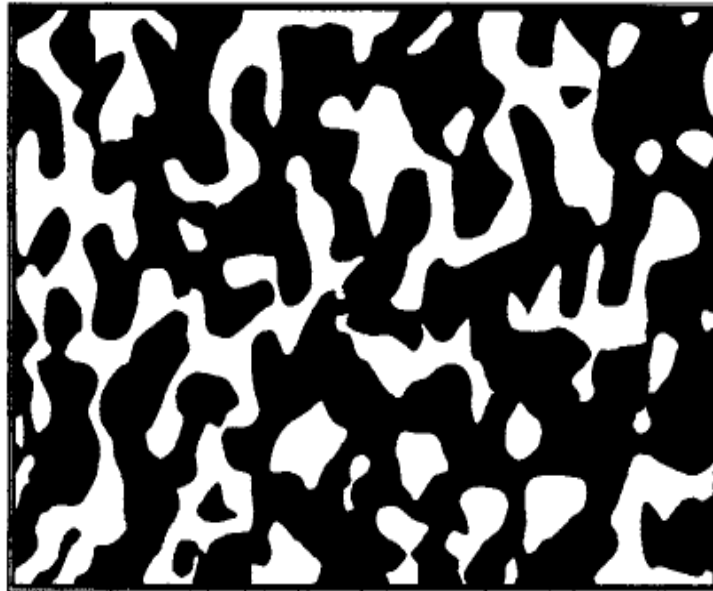


FIGURE 2.2. Un squelette microstructure d'un matériau FGM

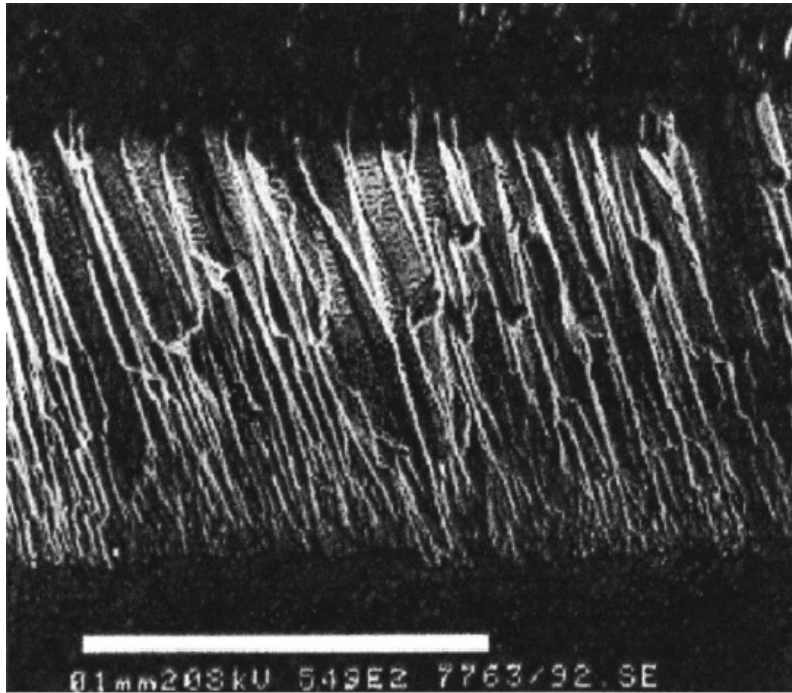


FIGURE 2.3. FGM colonnaire : TBC traité par un faisceau d'électrons physique en phase vapeur technique de dépôt
($ZrO_2_Y_2O_3$, avec une porosité calibrée)

Donc c'est inadéquat d'attribuer une propriété unique pour un matériau à gradient fonctionnel tant que les propriétés varient à travers le matériau. Au lieu de ça, l'approche requise est de superposer les diverses propriétés des matériaux constituants dans les FGM pour prédire un type spécifique de comportement. Ainsi, l'utilisation des FGM s'appuie sur le contrôle de la variation spatiale des propriétés physiques des composants de telle sorte qu'elles atteignent les performances désirées. Le défi est de concevoir des modèles qui prédisent les caractéristiques, le comportement, et les performances du matériau gradué comme une fonction des propriétés des constituants et de l'architecture graduée. De nos jours, il n'existe qu'une poignée de tels modèles spécifiques [2].

2.5 Applications :

Un large nombre d'applications requièrent une protection des composants des températures élevées ou d'un environnement corrosif. Ceci inclut les véhicules

Ch.2 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM

aérospatiaux, pour la protection du revêtement pour la rentrée à l'atmosphère terrestre et les composants du moteur tel que les ailettes de turbine et les tuyères pour les processus industriels du verre et du métal fondus, les composants des réacteurs nucléaires et tous outils de coupe subissant des conditions d'environnement dur [10].

Les revêtements de barrières thermiques sont fréquemment utilisés dans les ailettes des turbines de moteurs pour les protéger contre les gazes corrosifs à haute température. Une large variété de composition, de microstructure et de morphologie de revêtements sont possible, bien que tous changement de conception des ailettes de turbine existantes n'est pas trivial du point de vu des ingénieurs concepteurs. Les exigences de performances des revêtements sont en elles même multifonctionnelles à travers l'épaisseur, et il est donc logique d'essayer d'utiliser les matériaux à gradient fonctionnel [10].

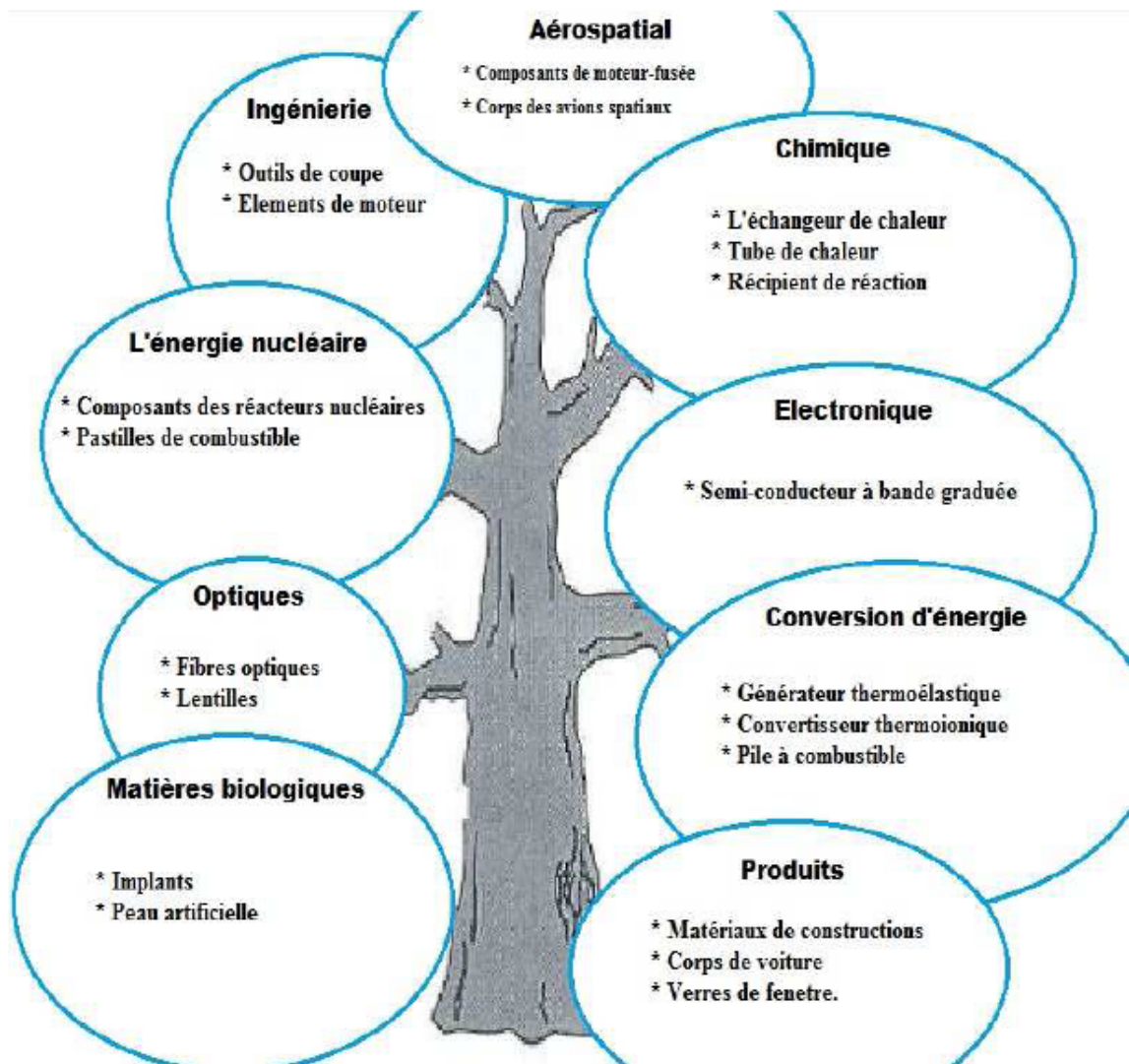


FIGURE 2.4. Les différents domaines d'applications des FGM

2.6 Conclusion :

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded material FGM), ont été proposés en 1984 au Japon par M. Niino et M. Maeda, et depuis ont inspiré des chercheurs de partout dans le monde la possibilité de combiner les propriétés et fonctionnalités introuvables dans les classiques structures matériaux. Ont été initialement proposés pour le génie aérospatial. Mais aujourd'hui, ils trouvent des applications dans des domaines aussi divers que le constructeur automobile et le génie tissulaire (cela implique d'implants osseux par exemple).

Un FGM peut être produit en faisant varier en continu les constituants des matériaux à phases multiples selon un profil prédéterminé. Alors, c'est un produit à

Ch.2 Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel FGM

haute performance, matériau anti-chaueur, capable à résister à des à des gradients thermiques extrêmement grands.

L'un des avantages d'une variation monotone de la fraction volumique des phases constitutives, est l'élimination de la discontinuité, qui est souvent rencontrée dans les composites stratifiés et en conséquence, ce qui évite les problèmes liés à la délimitation.

Et on sait que, dans le cas d'un FGM, on a une distribution améliorée de contraintes résiduelles, et la cause c'est par ce que ces dernières sont dues beaucoup plus au soudage ou rivetage...etc.

CHAPITRE 3 :
THEORIES DES PLAQUES

3.1 Introduction :

Les plaques et les coques constituent une partie essentielle de la construction civile, militaire, aérospatial, aéronautique, marine et automobile. Ces composants structurels, dans de nombreux cas, sont soumis à des vibrations. Il est maintenant bien connu que pour l'analyse des vibrations des plaques, les effets de déformation de cisaillement sont importants en particulier pour les plaques épaisses ou même pour les plaques minces vibrant à des modes plus élevés [11].

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par sa microstructure variable dans l'espace, conçu pour optimiser l'exécution des éléments de la structure par la distribution des propriétés correspondantes [11].

Les distributions des propriétés sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules, qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, mais doivent également être assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure [12].

On utilise souvent la théorie des stratifiés pour les applications des plaques FGM. De même la prise en compte de l'effet de cisaillement exige une bonne description des champs de contrainte et de déformation. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque simplement appuyée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées [13].

3.2 Modélisation d'une plaque FGM :

Les plaques reposant sur des fondations élastiques ont été largement adoptées par nombreuses études pour modéliser divers problèmes d'ingénierie au cours des dernières décennies. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles [14].

Dans la plus part des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lequel la fraction volumique varie sous interruption par l'épaisseur. Il y en a généralement deux types de distribution pour

Ch.3 Théories des plaques

modéliser ce type de matériaux, la première est une représentation discrète de la variation des propriétés de celui-ci dans la direction du gradient (figure 3.1), il s'agit d'un empilement de couches quasi-homogène constituées d'au moins deux matériaux dont la fraction volumique de chacun des deux varie en fonction de l'autre, et ceux d'une couche à l'autre. L'autre représentation est une variation continue de la fraction volumique des deux matériaux constituant, elle est définie par une fonction dépendant de l'espace (typiquement l'épaisseur) et de la température. Il existe plusieurs fonctions qui décrivent le gradient de distribution des deux matériaux constituants, les fonctions de puissances (P-FGM) et les fonctions exponentielles (E-FGM) sont les plus fréquemment utilisé par les chercheurs. Cependant, ces deux types de loi présentent une concentration de contraintes dans l'une des interfaces de la structure là où la variation de la distribution est très rapide. Par conséquent, la fonction sigmoïde (S-FGM) est faite pour décrire la distribution des propriétés du matériau, cette fonction se décompose en deux fonctions de puissance chacune définit sur le mi- intervalle de l'épaisseur [2].

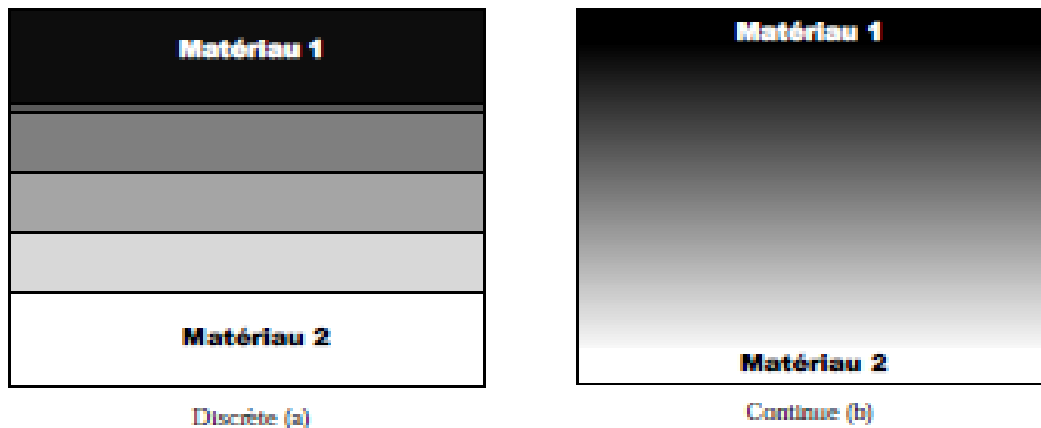


FIGURE 3.1. Les deux types de représentation des structures en matériau FGM

3.2.1 Les propriétés matérielles des P-FGM :

La fraction volumique dans les **P-FGM** est assurée par une loi de puissance sous la forme :

Ch.3 Théories des plaques

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^N \quad (1)$$

- N : index de la fraction volumique, ça peut être variée pour donner une infinité de distribution de composition, la figure (3.2) présente ces distributions pour différentes valeurs de l'exposant de la fraction volumique N.
- h : l'épaisseur de la plaque ;
- z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

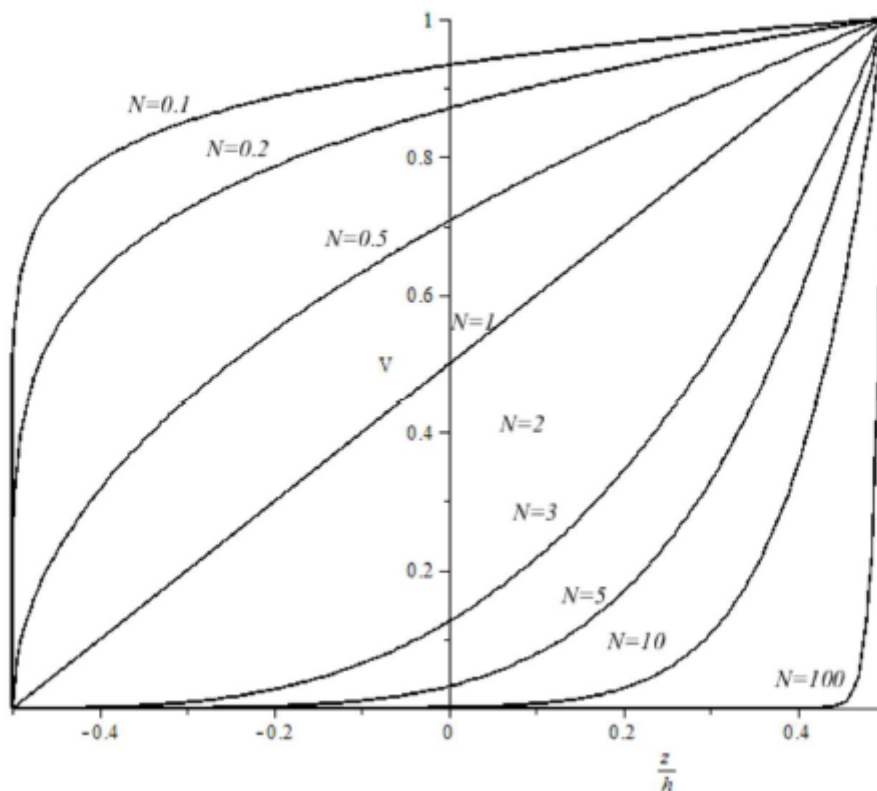


FIGURE 3.2. Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur

Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM sont définies comme suit :

- $E(z) = V(z).E_t + [1 - V(z)].E_b$ (2)

- $\nu(z) = \nu_0$ (3)

- $\alpha(z) = V(z).\alpha_t + [1 - V(z)].\alpha_b$ (4)

E_t, E_b , sont les modules de Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour $z = h/2, z = -h/2$, respectivement.

α_t, α_b , sont coefficients d'expansions thermiques des matériaux constituant la plaque P-FGM pour $z = h/2, z = -h/2$, respectivement.

Bao et Wang, ont indiqué que l'influence du coefficient de poisson sur la déformation des plaques est beaucoup moins importante que l'influence du module de Young.

3.2.2 Les propriétés des E-FGM :

La propriété d'un E-FGM s'écrit comme suit :

$$V(z) = P_b \cdot e^{B\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad (5)$$

$$\text{Avec : } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{P_t}{P_b}\right)$$

Et P_t, P_b sont respectivement les propriétés des matériaux régnant sur la face supérieure et la face inférieure de la plaque.

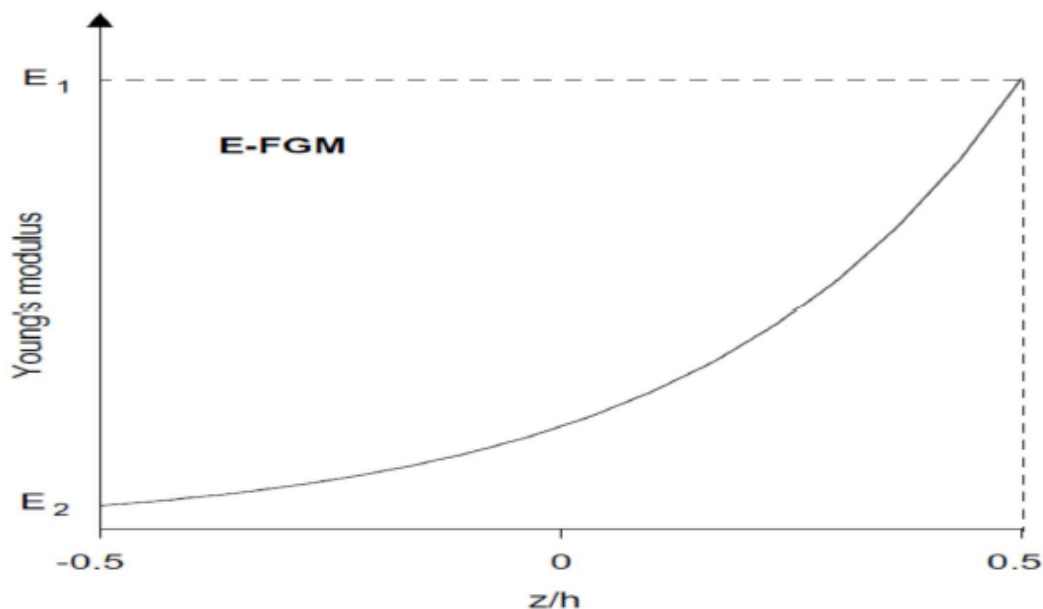


FIGURE 3.3. Variation du module de Young suivant la fonction exponentielle

3.2.3 Les propriétés des S-FGM :

La fraction volumique d'un S-FGM est définie par :

$$V(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-z}{\frac{h}{2}} \right)^N \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (6)$$

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h+z}{\frac{h}{2}} \right)^N \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (7)$$

Et la propriété du S-FGM s'écrit en fonction de la fraction volumique comme suit :

$$P_m = P_t.V_m(z) + [1 - V_m(z)].P_b \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$P_m = P_t.U_m(z) + [1 - U_m(z)].P_b \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

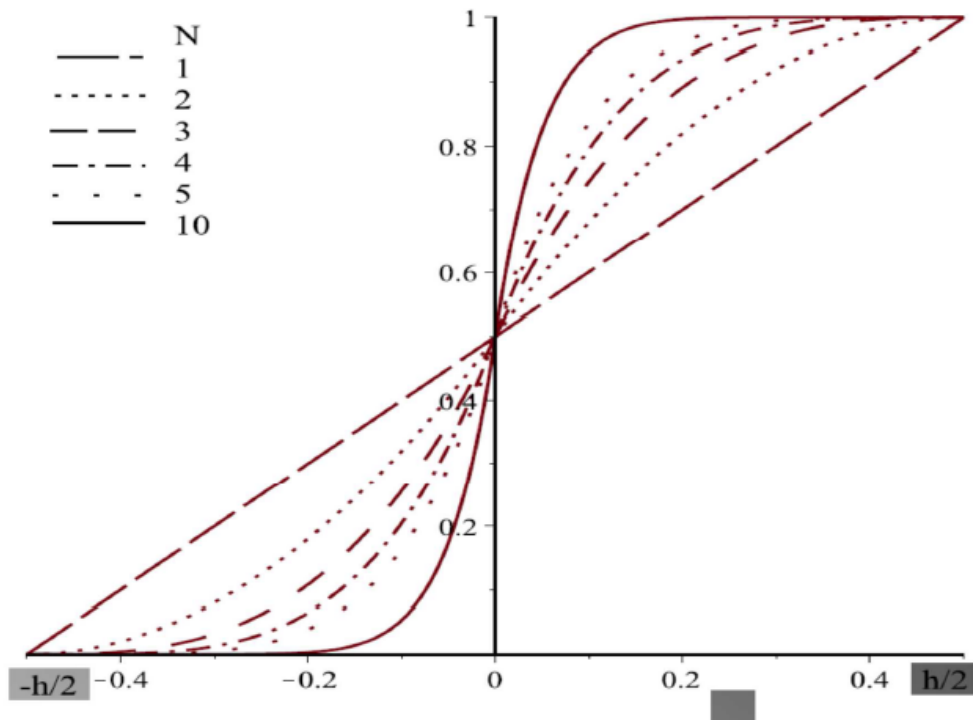


Figure 3.4. Lois de variation des propriétés S-FGM

3.3 Théories de déformations des plaques FGM :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie dérivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) [15].

Ces théories, sauf celle de l'élasticité tridimensionnelle, sont basées sur le principe qui suppose une fonction décrivant les déplacements de la section normale à travers l'épaisseur de la plaque. Par exemple, la théorie du premier ordre suppose que la normale au plan moyen se déplace linéairement par rapport à sa position initiale. La figure (3.5) montre les différents cas de déplacements de la section normale. Cependant, la différence entre ces théories ne se résume pas à la fonction qui décrit les déplacements, mais aussi, les autres hypothèses qui les décrivent [1].

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural [1].

Ch.3 Théories des plaques

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques FGM, seront exposées [15].

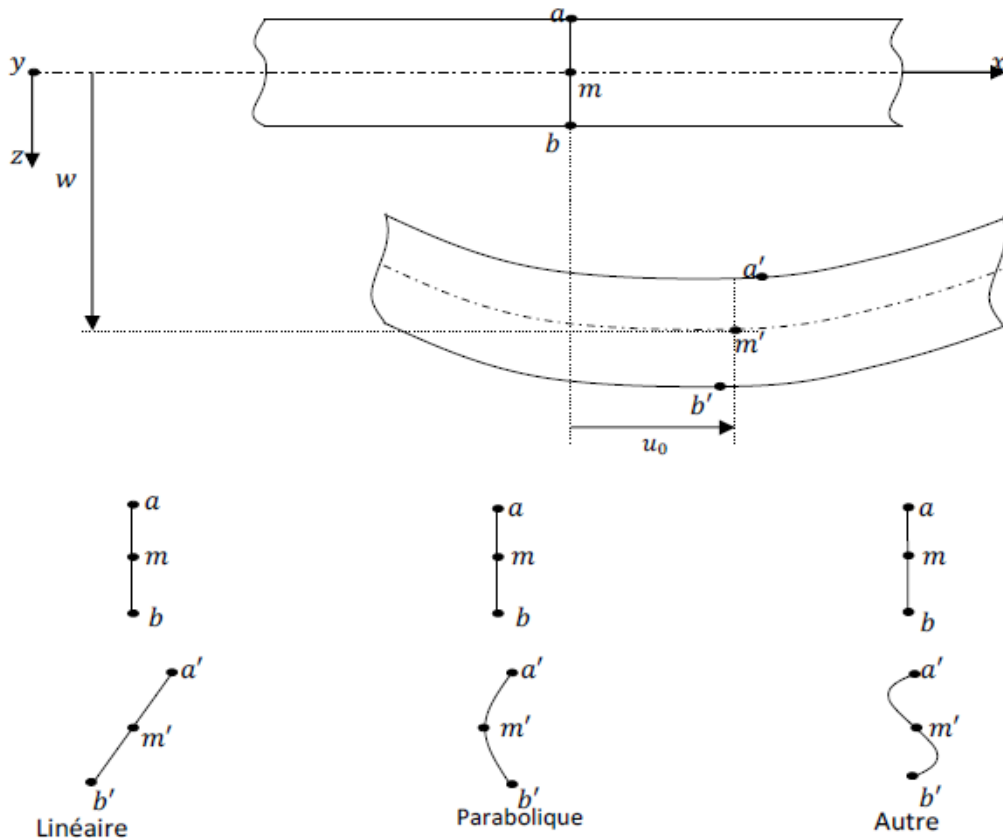


FIGURE 3.5. Déformation de la section normale par rapport
Au plan moyen

3.3.1 Théorie classique des plaques minces (CPT) :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love [5] sont suivantes :

Ch.3 Théories des plaques

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement $\frac{h}{a}$ ou $\frac{h}{b} \leq 0.05$). elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligeable.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0,05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements [15].

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaque ». Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant (t) s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, y, z, t) &= U(x, y, t) - z \frac{\partial W}{\partial x} \\ \bar{V}(x, y, z, t) &= V(x, y, t) - z \frac{\partial W}{\partial y} \\ \bar{W}(x, y, z, t) &= W(x, y, t)\end{aligned}$$

Ou U, V, W sont des déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z=0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en

plan (figure 3.6), ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney, Timoshenko et Woinowsky-Krieger) [1].

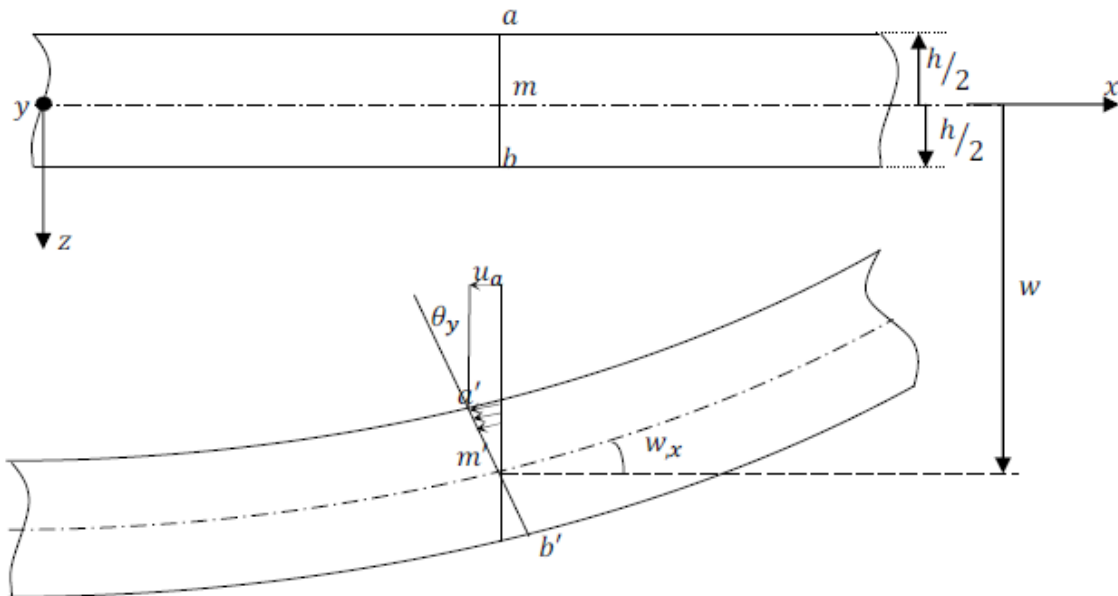


FIGURE 3.6. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

3.3.2 Théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses (FSDPT) :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (Rayleigh). En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de Timoshenko, montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonance calculées, en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des

Ch.3 Théories des plaques

plaques quant au cisaillement transverse est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié trois ans plus tard qui fera date. Vers 1970, Whitney, Whitney et Sun, Pagano et Srinivas et Rao ont montré, grâce à leurs travaux respectifs, que les effets du cisaillement sont plus importants pour les plaques stratifiées que pour les plaques isotropes [1].

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature, trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin, Reissner, Narasimhamurthy, Schmidt, Levinson, Ambartsumyan). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées [1].

La théorie des déformations du premier ordre des plaques moyennement épaisses (FSDT) décrite par Mindlin est une forme développée de la théorie classique de Kirchhoff, les deux théories représentent le même champ de déplacements linéaire en fonction de l'épaisseur, en plus, les deux théories nécessitent l'introduction d'un facteur de correction pour rectifier les déformations en cisaillement. Cependant, la différence réside dans les hypothèses de base. La théorie de Mindlin prend en considération les déformations en cisaillement transversal qui sont responsables des rotations autour des axes du plan, ce qui n'est pas le cas de la théorie de Kirchhoff. Par conséquent la théorie de Mindlin peut être utilisée pour les

Ch.3 Théories des plaques

plaques moyennement épaisses et non pas celle de Kirchhoff. L'expression des déplacements suit une fonction linéaire qui dépend de l'épaisseur et s'exprime par les relations suivantes :

$$\bar{U}(x, y, z, t) = U(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t)$$

$$\bar{V}(x, y, z, t) = V(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t)$$

$$\bar{W}(x, y, z, t) = W(x, y, t)$$

Les déplacements U, V, W représentent les déplacements du plan moyen de la plaque et ψ_x, ψ_y sont les rotations de la normale au plan moyen par rapport aux axes x, y respectivement, $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ représentent les déplacements à tout point de la plaque à un instant t [1].

3.3.3 Formulation théorique :

Considérons une plaque en FGM, ayant les dimensions représentées en figure (3.7), qui est composée de N couches élastiques orthotropes, de longueur « a », la largeur « b », et d'épaisseur uniforme totale « h ».

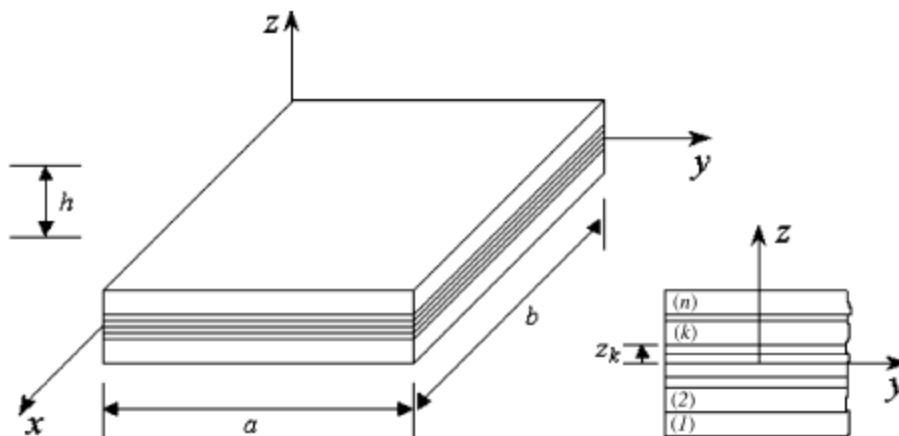


FIGURE 3.7. Description de la plaque FGM

Le système de coordonnées (x, y, z) , est choisi et placé au milieu de la plaque.

3.3.3.1 Champ des déplacements du premier ordre :

Basés sur la théorie des plaques moyennement épaisses décrite par Mindlin, les déplacements résultants peuvent être définis sous forme unifiée suivante :

$$\begin{cases} \bar{U}(x, y) = U(x, y) + z \cdot \psi_x(x, y) \\ \bar{V}(x, y) = V(x, y) + z \cdot \psi_y(x, y) \\ \bar{W}(x, y) = W(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

Ou :

- U, V et W sont les déplacements dans les directions x, y et z ;
- ψ_x, ψ_y sont des rotations des normales de la surface neutre par rapport à x, y ;
- z est la cote (position le long de l'épaisseur de la plaque).

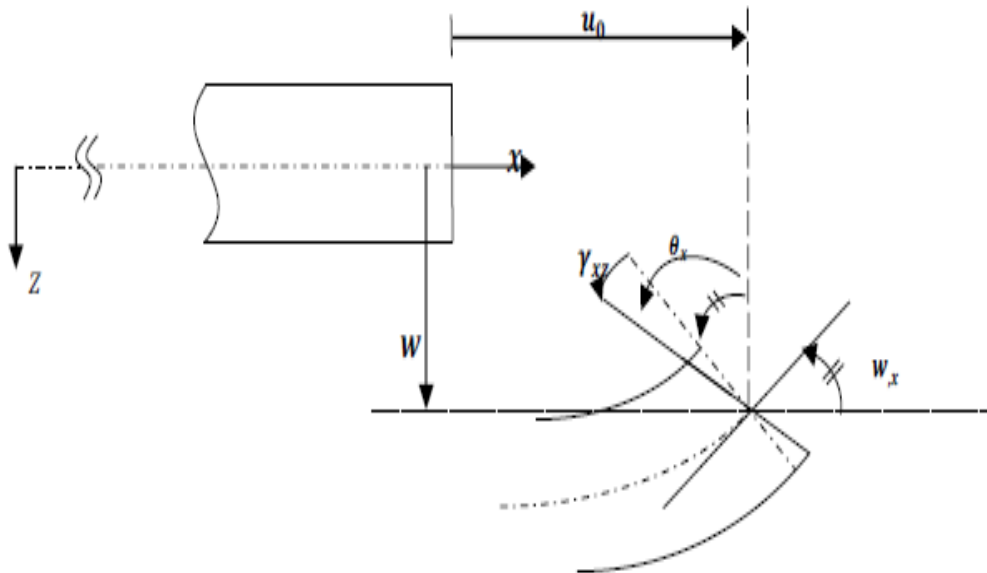


FIGURE 3.8. Cinématique des déformations d'après la théorie de Mindlin-Reissner

3.3.3.2 Détermination du champ des déformations :

La déformation est la variation relative de la longueur d'un solide lorsque ce dernier est soumis à une action extérieure.

Ch.3 Théories des plaques

Dans le cas général, les relations déformations-déplacements (de Green Lagrange) sont données par (Reddy) :

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.2)$$

Dans le cadre d'une théorie linéarisée (petites déformations), la relation (3.2) se réduit (en négligeant les termes du 2^{ème} degré) à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

Et sous forme explicite, l'équation devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = 2 \cdot \varepsilon_{xz} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} = \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2 \cdot \varepsilon_{yz} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} = \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

L'écriture des déformations sous forme condensée donne :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \cdot \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Avec : ε_m les déformations en membrane, ε_f les déformations en flexion et ε_c les déformations en cisaillement.

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

3.3.3.3 Détermination du champ des contraintes :

Les différentes contraintes agissant sur un point matériel sont représentées sur la figure (3.9) suivante :

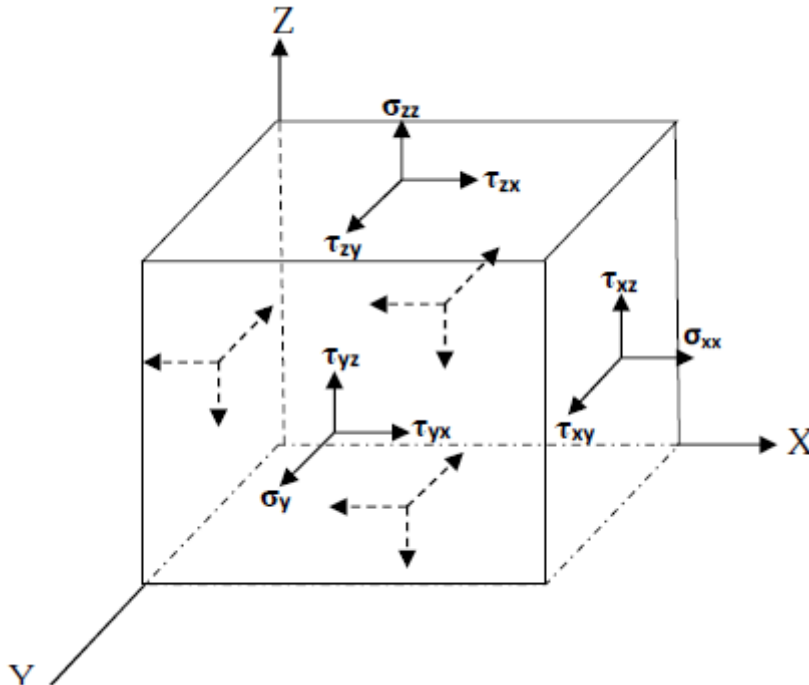


FIGURE 3.9. Composantes du vecteur des contraintes

$$\sigma_x = Q_{11} \cdot \varepsilon_x + Q_{12} \cdot \varepsilon_y \quad (a)$$

$$\sigma_y = Q_{12} \cdot \varepsilon_x + Q_{22} \cdot \varepsilon_y \quad (b)$$

$$\sigma_z = Q_{13} \cdot \varepsilon_x + Q_{23} \cdot \varepsilon_y \quad (c)$$

$$\sigma_{xz} = Q_{55} \cdot \gamma_{xz} \quad (d)$$

Ch.3 Théories des plaques

$$\sigma_{yz} = Q_{44} \cdot \gamma_{yz} \quad (e)$$

$$\sigma_{xy} = Q_{66} \cdot \gamma_{xy} \quad (f)$$

Ou : $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}), (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans les équations 2 et 3, les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être écrits de la manière suivante :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z) \cdot E(z)}{1-\nu^2(z)}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

Ces coefficients sont dépendants des propriétés telle que le module de Young, du module de cisaillement $G(z)$, du coefficient de poisson en un point (z) de la plaque.

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + Q_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= Q_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + Q_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yz} &= Q_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xz} &= Q_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xy} &= Q_{66} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donc en fonction des déplacements et rotations, la forme matricielle que nous obtenons est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Mais en fonction des déformations, on peut obtenir celle-ci :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

3.3.3.4 Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque

FGM :

3.3.3.4.1 Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(x, y) dz,$$

Où $\sigma(x, y)$ est la matrice des contraintes en membrane σ_x, σ_y et σ_{xy} , donc :

Ch.3 Théories des plaques

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz$$

Les composantes N_x , N_y , N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des efforts normaux (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure (3.10) [3].

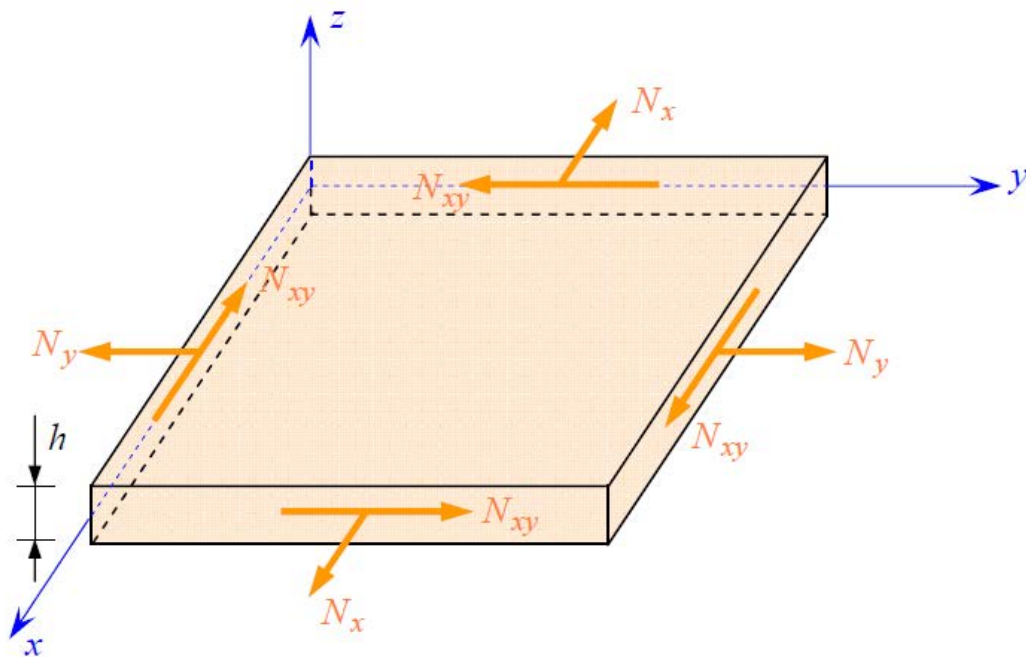


FIGURE 3.10. Schématisation des résultantes en membrane

Alors, en remplaçant σ_x , σ_y et σ_{xy} par leurs valeurs, on trouve :

Ch.3 Théories des plaques

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
 N_y &= A_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
 N_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Avec :

- A_{ij} : représente le coefficient de rigidité en membrane par unité de longueur.
- B_{ij} : est le coefficient de rigidité de couplage flexion-torsion par unité de longueur.

Et :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz \\
 A_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz \\
 A_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz \\
 B_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z dz \\
 B_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z dz \\
 B_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \cdot z dz
 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Donc la forme matricielle est :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

3.3.3.4.2 Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

Ch.3 Théories des plaques

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur. Elles sont schématisées sur la figure (3.11).

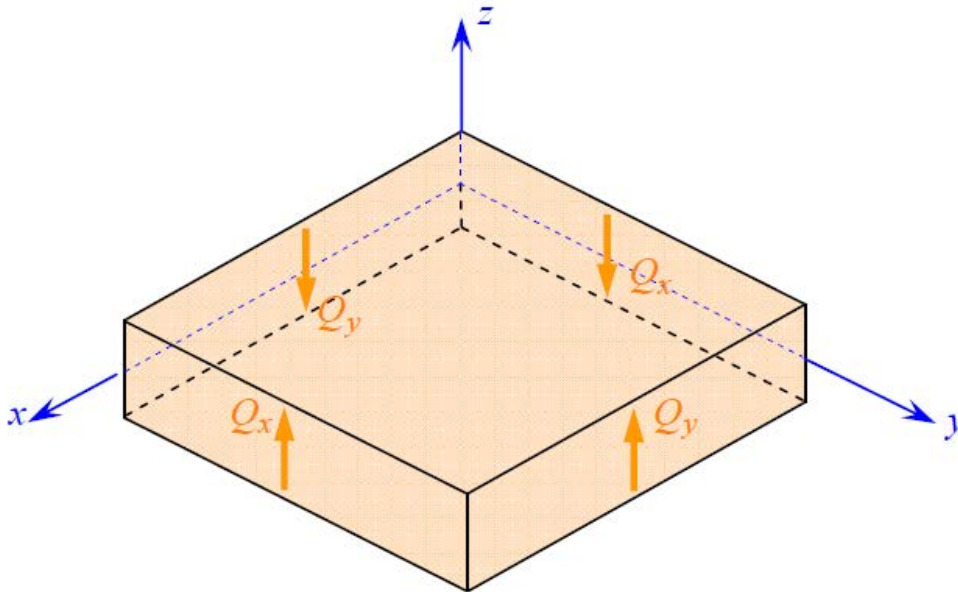


FIGURE 3.11. Représentation schématique des résultantes de cisaillement

Ou :

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ Q_{yz} &= A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{44} &= k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz \\ A_{55} &= k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} dz \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

K_s : représente le coefficient de correction du cisaillement transverse 5/6.

Ch.3 Théories des plaques

A_{44} et A_{55} sont des coefficients de rigidité de cisaillement par unité de longueur.

Donc, la forme matricielle qu'on peut obtenir est :

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

3.3.3.4.3 Moments de flexion et de torsion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément FGM. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (3.12).

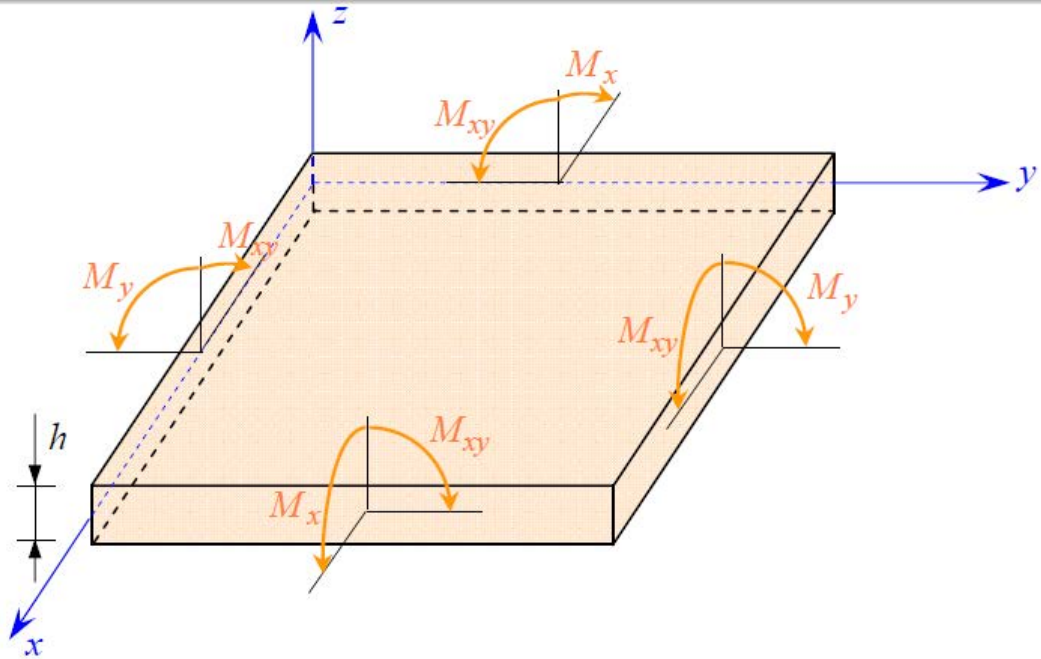


FIGURE 3.12. Schématisation des moments de flexion et de torsion

En remplaçant chaque contrainte par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned}
 M_x &= B_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
 M_y &= B_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
 M_{xy} &= B_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Avec :

B_{ij} : sont des coefficients de rigidité de couplage par unité de longueur.

D_{ij} : représentent les coefficients de rigidité de flexion par unité de longueur.

Et :

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z \, dz \\
 B_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z \, dz \\
 B_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} \cdot z \, dz \\
 B_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \cdot z \, dz \\
 D_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z^2 \, dz \\
 D_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z^2 \, dz \\
 D_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} \cdot z^2 \, dz \\
 D_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} \cdot z^2 \, dz
 \end{aligned} \tag{3.9.1}$$

En fin, la matrice qu'on obtienne est :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

3.3.4 Modélisation des charges externes :

Dans le cas de l'étude des plaques en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des plaques constituées d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion.

Dans un problème d'élasticité, une plaque subissant des chargements transversaux au milieu (selon x et y) que ces charges peuvent être sinusoïdales ou ayant toute autre forme de distribution d'intensité $q(x, y)$ doit pouvoir supporter ces chargements, autrement dit, la plaque réagit d'une telle manière qu'elle puisse créer l'équilibre dans chacun de ses éléments. La figure (3.13) montre le cas général d'un élément d'une plaque en équilibre.

Ch.3 Théories des plaques

Ainsi, dans certains procédés de mise en forme, l'apparition des contraintes résiduelles est inévitable, et peut engendrer le flambage, qui se traduit en défauts géométriques.

Le phénomène de flambage apparait ainsi comme le processus qui produit un écart infiniment petit avec la position d'équilibre. Ceci exige la modélisation de ce phénomène d'instabilité mécanique afin de bien définir la forme de l'amplitude de ces présents articles.

On présente un modèle de flambage (figure 3.14) possédant la faculté de détecter la charge critique de flambage d'une plaque FGM sous forces distribuées de pré-flambage (P_x et P_y), sachant que :

$$P_x = \lambda_1 \cdot P_{cr}$$

$$P_y = \lambda_2 \cdot P_{cr}$$

λ_1, λ_2 sont des paramètres de flambage.

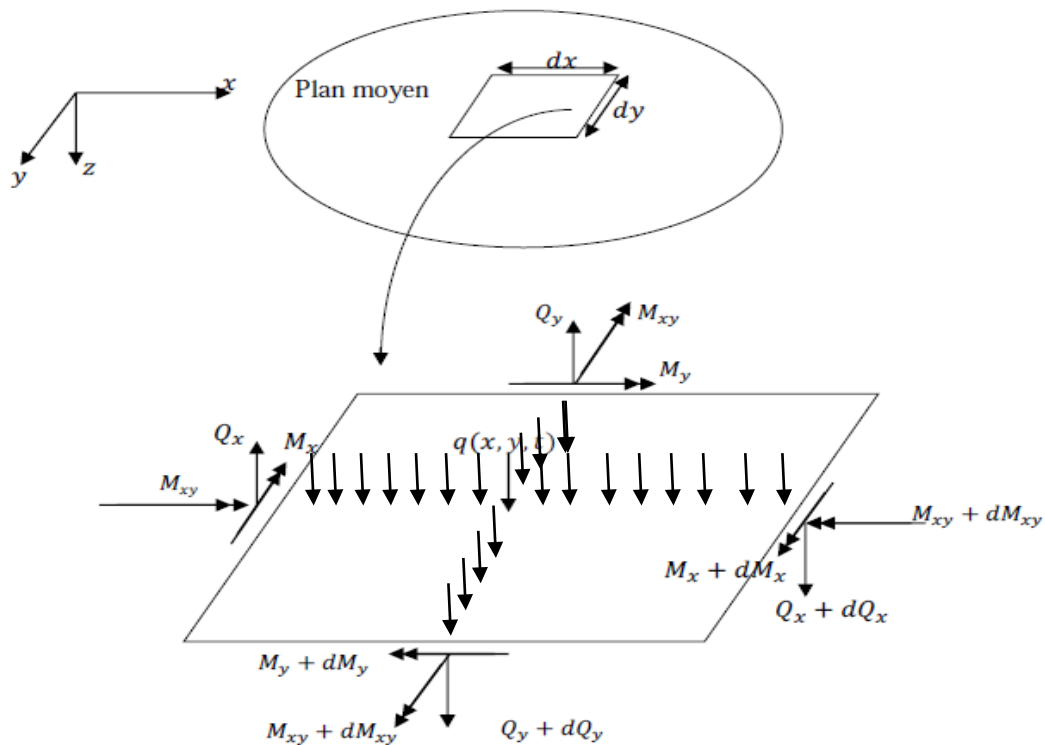


FIGURE 3.13. Équilibre d'un élément plaque

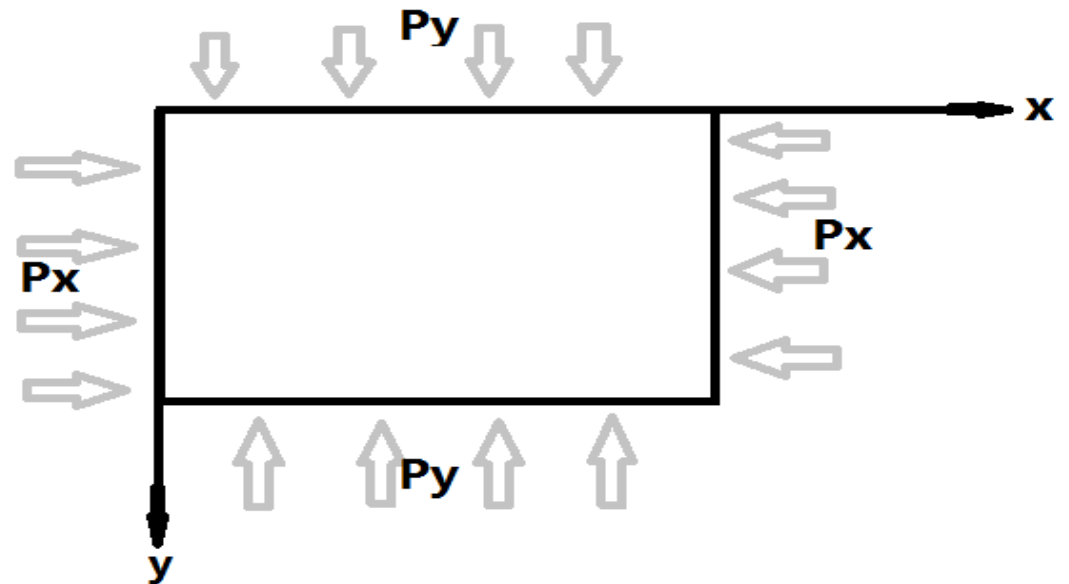


FIGURE3.14. Les forces distribuées de pré-flambage

3.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, la modélisation d'une plaque FGM de différentes propriétés a été faite avec des présentations graphiques de chaque modèle, nous avons donc constaté qu'il existe plusieurs fonctions qui décrivent le gradient de distribution des deux matériaux constituants ou plus. Suite à cela, on a présenté la théorie classique des plaques minces, puis la théorie du premier ordre des plaques moyennement épaisses. Ensuite, et en se basant sur la théorie du premier ordre de Mindlin, nous avons déterminé le champ de déformations et de contraintes, ainsi les efforts et moments appliqués à la plaque FGM. A la fin de chapitre, on a modélisé les charges qu'une plaque FGM peut subir.

CHAPITRE 4 :
ENERGIE TOTALE DU SYSTEME
ET EQUATIONS DU MOUVEMENT

4.1 INTRODUCTION :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des FGM. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des FGM. Donc le présent chapitre a pour objectif d'établir les équations de mouvement de notre système, en se basant sur l'étude théorique faite au chapitre précédent.

4.2 Energie de déformation :

L'énergie de déformation (énergie potentielle) d'un solide élastique s'écrit comme suit :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv = \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\} [Q])^T \{\varepsilon\} dv \quad (4.1)$$

Nous avons :

$$[Q]^T = [Q] \text{ et } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \cdot \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}$$

Et donc :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon_m + z \cdot \varepsilon_f\}^T \cdot [Q]^T) \{\varepsilon_m + z \cdot \varepsilon_f\} dv$$

Nous développons, nous obtenons :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon_m\}^T [Q] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_f\}^T [Q] z^2 \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_m\}^T [Q] z \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_f\}^T [Q] z \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_c\}^T [Q]^T \{\varepsilon_c\}) dv \quad (4.2)$$

Ch.4 Energie totale du système et équations du mouvement

Or :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\{\varepsilon_m\}^T [Q] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_f\}^T [Q] z^2 \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_m\}^T [Q] z \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_f\}^T [Q] z \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_c\}^T [Q] \{\varepsilon_c\}) dA dz \quad (4.3)$$

En intégrant suivant z, on obtient :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_A (\{\varepsilon_m\}^T [A] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_f\}^T [D] \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_m\} [B] \{\varepsilon_f\} + \{\varepsilon_f\}^T [B] \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_c\} [A] \{\varepsilon_m\}) dA \quad (4.4)$$

D'où, [A], [B] et [D] sont des matrices de rigidité.

Ou :

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \int_A & \left(\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \right. \\
 & + \left. \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{array} \right\} \\
 & + \left(\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \right. \\
 & + \left. \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \\
 & + \left. \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} + \psi_x \quad \frac{\partial W}{\partial y} + \psi_y \right\} \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \psi_y \end{array} \right\} dA
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Donc, on peut déduire que :

$$\begin{aligned} & (N_x \frac{\partial U}{\partial x} + N_y \frac{\partial V}{\partial y} + N_{xy} (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x})) \\ U_d = & \frac{1}{2} \int_A + M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} (\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}) \\ & + Q_{xz} (\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}) + Q_{yz} (\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y}) dA \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3 Travail des charges externes :

Le travail fait par q est :

$$V_q = - \int_A q W dA \quad (4.8)$$

Sachant que q est la charge transversale appliquée au milieu de la plaque (selon x ou y).

Ainsi, le travail effectué par les forces externes est emmagasiné par la plaque sous forme d'énergie potentielle :

$$V_p = \frac{1}{2} \int_A (P_x (\frac{\partial W}{\partial x})^2 + P_y (\frac{\partial W}{\partial y})^2 + 2.P_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}) dxdy \quad (4.9)$$

Avec :

$$P_{xy} = 0, P_y = \alpha.P_x$$

Et :

$$\begin{aligned} P_x &= \lambda_1 \cdot P_{cr} \\ P_y &= \lambda_2 \cdot P_{cr} \end{aligned}$$

P_x, P_y sont des forces de compression.

Donc :

$$V = -\int_A qWdA + \frac{1}{2} \int_A (P_x \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + P_y \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2) dA \quad (4.10)$$

4.4 Formulation variationnelle :

4.4.1 Variation de l'énergie de déformation :

La variation de l'énergie de déformation est :

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int_A (N_x \frac{\partial \delta U}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta V}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \delta V}{\partial x}\right) \\ &+ M_x \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial x}\right) \\ &+ Q_{xz} \left(\delta \Psi_x + \frac{\partial \delta W}{\partial x}\right) + Q_{yz} \left(\delta \Psi_y + \frac{\partial \delta W}{\partial y}\right)) dA \end{aligned} \quad (4.11)$$

Par intégration par partie, en identifiant les termes à 0, sachant que le principe des énergies requiert que les termes entre crochets soient identiquement nuls, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_A N_x \frac{\partial \delta U}{\partial x} dA &= -\int_A \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta U dA \\ \int_A N_y \frac{\partial \delta V}{\partial y} dA &= -\int_A \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta V dA \\ \int_A N_{xy} \frac{\partial \delta U}{\partial y} dA &= -\int_A \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta U dA \\ \int_A N_{xy} \frac{\partial \delta V}{\partial x} dA &= -\int_A \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta V dA \end{aligned}$$

$$\int_A M_x \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial x} dA = - \int_A \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \Psi_x dA$$

$$\int_A M_y \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial y} dA = - \int_A \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \Psi_y dA$$

$$\int_A M_{xy} \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial y} dA = - \int_A \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta \Psi_x dA$$

$$\int_A M_{xy} \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial x} dA = - \int_A \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \Psi_y dA$$

$$\int_A Q_{xz} \frac{\partial \delta W}{\partial x} dA = - \int_A \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta W dA$$

$$\int_A Q_{yz} \frac{\partial \delta W}{\partial y} dA = - \int_A \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \delta W dA$$

Donc, les termes associés à chaque déplacement sont :

$$\delta U : - \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right)$$

$$\delta V : - \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right)$$

$$\delta W : - \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right)$$

$$\delta \Psi_x : - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_{xz}$$

$$\delta \Psi_y : - \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + Q_{yz}$$

4.4.2 La variation du travail :

Le travail sous forme virtuelle :

$$\delta \mathcal{V} = - \int_A q \cdot \delta W dA + \frac{1}{2} \int_A (P_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \delta W}{\partial x} + P_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \delta W}{\partial y}) dA \quad (4.12)$$

Et par intégration par partie, on trouve :

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \delta W}{\partial x} dA = - \int_A \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta W dA$$

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \delta W}{\partial y} dA = - \int_A \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta W dA$$

Alors, les termes associés à chaque déplacement sont :

$$\delta U : 0$$

$$\delta V : 0$$

$$\delta W : - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + q \right)$$

$$\delta \psi_x : 0$$

$$\delta \psi_y : 0$$

4.5 Application du principe d'Hamilton :

Le principe d'HAMILTON est un principe général pouvant être appliqué à une large classe de problèmes de mécanique des solides déformables et se traduit par :

$$\delta \left[\int_A (U_d + V) dA \right] = 0 \quad (4.13)$$

Il permet de trouver l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites. Pour l'appliquer, il est nécessaire de déterminer la variation de chaque terme de l'énergie.

Donc, en remplaçant chaque variation par sa valeur, on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_A \left(N_x \frac{\partial \delta U}{\partial x} + M_x \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial x} + Q_{xz} \delta \psi_x + Q_{xz} \frac{\partial \delta W}{\partial x} \right. \\ & + N_y \frac{\partial \delta V}{\partial y} + M_y \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial y} + Q_{yz} \delta \psi_y + Q_{yz} \frac{\partial \delta W}{\partial y} \\ & + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \delta V}{\partial x} \right) + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial x} \right) \\ & \left. - q \delta W + P_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \delta W}{\partial x} + \alpha \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \delta W}{\partial y} \right) \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

En réunissant l'ensemble des contributions des termes de chaque variation d'énergie, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta U &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta V &: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \delta W &: \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q + P_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha P_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ \delta \Psi_x &: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \\ \delta \Psi_y &: \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0 \end{aligned}$$

Les résultantes des efforts et moments sont :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ N_y &= A_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ N_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ M_x &= B_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ M_y &= B_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ M_{xy} &= B_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ Q_{xz} &= A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ Q_{yz} &= A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

En dérivant ces équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} &= A_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Ch.4 Energie totale du système et équations du mouvement

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = A_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = A_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = A_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = A_{44} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = B_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = B_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = B_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = B_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right)$$

Et donc :

$$A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} = 0 \quad (4.15)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = 0 \quad (4.16)$$

$$(P_x + A_{55}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (P_y + A_{44}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + q_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) = 0 \quad (4.17)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.19)$$

4.6 Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :

En tenant compte de la charge transversale, les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations suivantes :

$$q \neq 0, P_x = P_y = 0$$

Les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations (4.15) à (4.19), les coefficients A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} étant définis à partir des relations (3.7.1), (3.8.1) et (3.9.1) évoquées précédemment, associés à (4.15) à (4.19). Les relations sont définies comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} = 0 \quad (4.15)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = 0 \quad (4.16)$$

$$(A_{55}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (A_{44}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + q_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) = 0 \quad (4.17.1)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
 & -A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.7 Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :

Les relations fondamentales de flambage sont données par :

$$\begin{aligned}
 q &= 0 \\
 P_x &= \lambda_1 \cdot P_{cr} \\
 P_y &= \lambda_2 \cdot P_{cr}
 \end{aligned}$$

λ_1, λ_2 sont les paramètres de flambage :

- Flambage unidirectionnel (selon l'axe x): $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$
- Flambage unidirectionnel (selon l'axe y): $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$
- Flambage bidirectionnel (selon les axes x et y): $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$

Les équations fondamentales des plaques FGM permettant de formuler le flambage sont constituées des équations (15), (16), (17), (18) et (19), la relation (17) étant modifiée suivant :

$$\left(\lambda_1 \cdot P_{cr} + A_{55} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\lambda_2 \cdot P_{cr} + A_{44} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \tag{4.17.2}$$

4.8 Conclusion :

Le but de ce chapitre est de trouver la formulation de l'énergie de déformation d'une part, et celle du travail des charges externes d'une autre part. Ensuite, on a déterminé les équations de mouvement en se servant du principe d'Hamilton. Suite à cela, nous avons déterminé des deux systèmes d'équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FGM sur appuis simple. La résolution du système de dimensions 5.5 est de la forme $[K] \cdot \{d\} = \{q\}$ pour le cas de la flexion. Mais pour le

Ch.4 Energie totale du système et équations du mouvement

cas de flambage, on forme la matrice K, aussi la matrice de charge, et dans ce cas le système à résoudre est de la forme $([k] - P_{cr}[C])\{d\} = \{0\}$.

Chapitre 05 :
Résolutions, résultats et interprétations

5.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter les méthodes utilisées pour la résolution des équations de flexion et de flambage. Ensuite, l'ensemble des résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul, par ce que en développant ces étapes sous forme algorithmique, on va élaborer un programme de calcul en se servant du logiciel Maple. Cet outil est un système de calcul symbolique et numérique très puissant permettant de résoudre aisément une variété impressionnante de problèmes mathématiques et physiques. Donc nous présentons d'abord les étapes des méthodes analytiques de résolution des équations de flexion et de flambage, et par la suite, nous allons résoudre les deux systèmes d'équations différentielles couplées. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés. Les résultats représentant les contraintes normales et transverses ainsi que la charge critique de flambage seront commentés et des graphes appropriés seront tracés pour montrer l'influence des paramètres considérés (dimensions géométriques, épaisseur relative et index de la fraction volumique) dans cette étude.

5.2 Solutions analytiques pour les plaques FGM :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en conformité avec le support de type utilisé. Nous sommes ici concernés par les solutions exactes des équations de flexion et de flambage pour la plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords latéraux :

$$N_x = V = W = M_x = P_x = Q_y = 0, \text{ pour } x = 0, a$$

$$N_y = U = W = M_y = P_y = Q_y = 0, \text{ pour } y = 0, b$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la force extérieure sous forme d'une série double trigonométrique :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (5.1.1)$$

Où : $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta = \frac{n\pi}{b}$;

m et n sont des nombres naturels et « a », « b » sont des dimensions de la plaque suivant les directions x et y , respectivement [16].

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2} & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Où q_0 est l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Si la plaque est soumise à un chargement sinusoïdal, on aura :

$$m = n = 1, \text{ et } q_{11} = q_0$$

Le déplacement des fonctions qui satisfont les conditions aux limites sont choisies comme la série suivante de Fourier :

$$\begin{cases} U(x, y) \\ V(x, y) \\ W(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} A_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ B_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ C_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ D_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ E_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \end{cases} \quad (5.2.2)$$

5.2.1 Résolution des équations de flexion par la méthode de Navier :

Substituant les équations de Navier dans les équations (4.15), (4.16), (4.17.1), (4.18) et (4.19), on obtient :

$$A_{mn} (\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) + B_{mn} \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) + D_{mn} (\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + E_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) = 0 \quad (5.1)$$

$$A_{mn} \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) + B_{mn} (\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) + D_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) + E_{mn} (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) = 0 \quad (5.2)$$

$$C_{mn} (\alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44}) + D_{mn} (\alpha A_{55}) + E_{mn} (\beta A_{44}) - q_0 = 0 \quad (5.3)$$

$$A_{mn}(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + B_{mn} \alpha \beta (B_{12} + B_{66}) + C_{mn}(\alpha A_{55}) + D_{mn}(\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) + E_{mn} \alpha \beta (D_{12} + D_{66}) = 0 \quad (5.4)$$

$$A_{mn} \alpha \beta (B_{12} + B_{66}) + B_{mn}(\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) + C_{mn}(\beta A_{44}) + D_{mn} \alpha \beta (D_{12} + D_{66}) + E_{mn}(\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}) = 0 \quad (5.5)$$

En regroupant les termes devant les amplitudes $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$, nous obtenons la matrice de rigidité suivante :

$$k_{11} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66},$$

$$k_{12} = \alpha \beta (A_{12} + A_{66}),$$

$$k_{13} = 0,$$

$$k_{14} = \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66},$$

$$k_{15} = \alpha \beta (B_{12} + B_{66});$$

$$k_{21} = k_{12},$$

$$k_{22} = \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66},$$

$$k_{23} = 0,$$

$$k_{24} = \alpha \beta (B_{12} + B_{66}),$$

$$k_{25} = \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}$$

$$k_{31} = 0,$$

$$k_{32} = 0,$$

$$k_{33} = \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44},$$

$$k_{34} = \alpha A_{55},$$

$$k_{35} = \beta A_{44}$$

$$k_{41} = k_{14},$$

$$k_{42} = k_{24},$$

$$k_{43} = k_{34},$$

$$k_{44} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55},$$

$$k_{45} = \alpha \beta (D_{12} + D_{66}),$$

$$k_{51} = k_{15},$$

$$k_{52} = k_{25},$$

$$k_{53} = k_{35},$$

$$k_{54} = k_{45},$$

$$k_{55} = \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}$$

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2.2 Résolution des équations de flambage par la méthode de Navier :

En remplaçant les équations de Navier dans les équations (4.15), (4.16), (4.17.2), (4.18) et (4.19), on obtient :

$$A_{mn} (\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}) + B_{mn} \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) + D_{mn} (\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + E_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) = 0 \quad (5.1)$$

$$A_{mn} \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) + B_{mn} (\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}) + D_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) + E_{mn} (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\left[\alpha^2 (A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2 (A_{44} + \lambda_2 P_{cr}) \right] C_{mn} + (\alpha A_{55}) D_{mn} + (\beta A_{44}) E_{mn} = 0 \quad (5.3)$$

$$A_{mn} (\alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66}) + B_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) + C_{mn} (\alpha A_{55}) + D_{mn} (\alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}) + E_{mn} \alpha\beta (D_{12} + D_{66}) = 0 \quad (5.4)$$

$$A_{mn} \alpha\beta (B_{12} + B_{66}) + B_{mn} (\alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}) + C_{mn} (\beta A_{44}) + D_{mn} \alpha\beta (D_{12} + D_{66}) + E_{mn} (\alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}) = 0 \quad (5.5)$$

En regroupant les termes devant les amplitudes $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$, nous obtenons la matrice suivante du système :

$$k_{11} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66},$$

$$k_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}),$$

$$k_{13} = 0,$$

$$k_{14} = \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66},$$

$$k_{15} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66});$$

$$k_{21} = k_{12},$$

$$k_{22} = \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66},$$

$$k_{23} = 0,$$

$$k_{24} = \alpha\beta(B_{12} + B_{66}),$$

$$k_{25} = \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22}$$

$$k_{31} = 0,$$

$$k_{32} = 0,$$

$$k_{33} = \alpha^2 (A_{55} + \lambda_1 P_{cr}) + \beta^2 (A_{44} + \lambda_2 P_{cr}),$$

$$k_{34} = \alpha A_{55},$$

$$k_{35} = \beta A_{44}$$

$$k_{41} = k_{14},$$

$$k_{42} = k_{24},$$

$$k_{43} = k_{34},$$

$$k_{44} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55},$$

$$k_{45} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66}),$$

$$k_{51} = k_{15},$$

$$k_{52} = k_{25},$$

$$k_{53} = k_{35},$$

$$k_{54} = k_{45},$$

$$k_{55} = \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44}$$

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

Le système d'équations algébriques ainsi obtenu peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} + k & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Avec :

$$k = \lambda P_{cr}, \quad \lambda = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$$

Pour trouver la charge de flambage critique P_{cr} (la plus petite charge qui provoque le flambage), le système doit être écrit sous la forme canonique suivante (on divise l'équation (5.7) par $(\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)$) :

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} - P_{cr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Avec :

$$\bar{k}_{33} = k_{33} / \lambda, \quad \bar{k}_{34} = k_{34} / \lambda, \quad \bar{k}_{35} = k_{35} / \lambda,$$

5.3 Présentation et interprétation des résultats :

Divers exemples numériques sur l'analyse statique des déformations et du flambage sont étudiés pour vérifier la performance de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin. L'effet de l'indice de puissance, de l'épaisseur relative, du rapport d'aspect et des conditions de chargement est déterminé pour deux types de plaque FGM. La variation des propriétés des matériaux de la plaque fonctionnellement graduée obéit à une loi de puissance (P-FGM).

5.3.1 L'analyse de la flexion :

5.3.1.1 Résultats et interprétations :

La plaque est supposée simplement supportée. Les deux phases de la plaque fonctionnellement graduée sont en aluminium (Al) et alumine (Al₂O₃), et les propriétés du matériau sont : $E_m = 70GPa, E_c = 380GPa$ (le coefficient de poisson est égal à 0.3 pour les deux matériaux). Les paramètres adimensionnels suivant sont utilisés :

$$\begin{aligned}\bar{U}(z) &= \frac{100.E_c.h^3}{q_0.a^4} U\left(0, \frac{b}{2}, -\frac{h}{4}\right) \\ \bar{W}(z) &= \frac{100.E_c.h^3}{q_0.a^4} W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \\ \bar{\sigma}_x(z) &= \frac{h}{q_0.a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right) \\ \bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h}{q_0.a} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right) \\ \bar{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0.a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{6}\right)\end{aligned}\tag{5.9}$$

Dans cette section, la réponse à la flexion d'une plaque FGM est obtenue sous l'action d'une charge transversalement distribuée. Le tableau 5.1 montre la validation des résultats de flexion générée à partir de la théorie actuelle avec les différentes théories de déformation en cisaillement disponibles dans la littérature pour une plaque FGM carrée ($a/h=10$). Les résultats obtenus présentent une erreur maximale (33.64%) par rapport aux résultats publiés dans la référence. Toutefois, la méthode de résolution n'est pas la même, c'est ce qui explique cette différence entre les résultats. Le tableau montre les déplacements transversaux et les contraintes pour différentes valeurs d'indice de la fraction volumique n . Les résultats sont comparés avec ceux des théories quasi 3-D données de Carrera et al, Wu et Chiu et des théories d'ordre supérieur modifiées de Zenkour, Mantari et al, Wu et Li, Thai et Kim et Nguyen. La comparaison prouve la bonne performance de la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement pour le cas de plaques FGM considéré (moyennement épaisses). En effet, les résultats obtenus par cette théorie, sont presque identiques à ceux obtenus par les autres théories. Cependant, les écarts

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

observés au niveau de l'évaluation de la contrainte de cisaillement transversale viennent du fait que la théorie du premier utilise un coefficient de correction du cisaillement transverse constant le long de l'épaisseur alors que les théories d'ordre supérieur considère un profil de déformation parabolique et ne nécessitent donc pas un coefficient de correction du cisaillement [18].

N	Source	\bar{U}	\bar{W}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
1	Quasi 3-D	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.251
	TSDT	0.6414	0.589	1.4898	0.6111	0.2599
	HSDT	0.6398	0.588	1.4888	0.6109	0.2566
	présente	0.6444	0.5890	1.4968	0.6125	0.2348
	Erreur relative %	0.12	0.26	0.62	0.72	6.45
2	Quasi 3-D	0.9012	0.757	1.4147	0.5421	0.2496
	TSDT	0.8984	0.7573	1.396	0.5442	0.2721
	HSDT	0.8957	0.7564	1.394	0.5438	0.2741
	présente	0.9033	0.7552	1.4057	0.5459	0.2289
	Erreur relative %	0.23	0.24	0.64	0.70	8.29
4	Quasi 3-D	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	TSDT	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	HSDT	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	présente	1.0578	0.8736	1.1922	0.5693	0.1899
	Erreur	0.35	0.99	0.53	0.48	19.60

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

	relative %					
8	Quasi 3-D	1.083	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	TSDT	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	HSDT	1.0709	0.9737	0.9431	0.585	0.214
	présente	1.0856	0.9623	0.9608	0.5887	0.1501
	Erreur relative %	0.24	1.18	0.82	0.14	33.64

Tableau 5.1 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles obtenues par différentes théories de déformation

(Plaque FGM Al/Al₂O₃, a/b = 1, a/h=10)

Dans le tableau 5.2, l'effet de l'index de la fraction volumique sur les contraintes et les déplacements d'une plaque FGM carrée (a/h=10) est présenté. Ce tableau montre la comparaison entre les résultats pour les plaques soumises à des charges uniformes et sinusoïdales. Comme il est bien connu, la répartition uniforme de la charge surestime toujours les déplacements et les contraintes. Comme la plaque devient de plus en plus métallique, la différence augmente pour la déflexion et la contrainte longitudinale plane, tandis qu'elle diminue pour la contrainte normale. Il est important d'observer que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour une plaque en métal, et cela est expliqué par le fait que la plaque dans les deux cas est homogène, et les contraintes ne dépendent pas du module d'élastique [17].

N	Source	\bar{U}_x	\bar{W}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
Céramique	UL	0.3904	0.4665	2.8932	1.2850	0.5114
	SL	0.2309	0.2960	1.9955	0.7065	0.2462
	présente	0.2201	0.2961	1.9758	0.7092	0.1910
	Erreur relative %	4.677	0.034	0.987	0.382	22.42
1	UL	1.1153	0.9287	4.4745	1.1143	0.5114
	SL	0.6626	0.5889	3.0870	0.6110	0.2462
	présente	0.6444	0.5890	3.0562	0.6125	0.2348

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

	Erreur relative %	2.746	0.016	0.997	0.245	4.63
2	UL	1.5618	1.1940	5.2296	0.9907	0.4700
	SL	0.9281	0.7573	3.6094	0.5441	0.2265
	présente	0.9033	0.7552	3.5657	0.5459	0.2289
	Erreur relative %	2.672	0.277	1.21	0.33	1.059
3	UL	1.7593	1.3200	5.6108	1.0047	0.4367
	SL	1.0447	0.8377	3.8742	0.5525	0.2107
	présente	1.0138	0.8324	3.8217	0.5547	0.1408
	Erreur relative %	2.957	0.632	1.355	0.398	33.175
4	UL	1.8439	1.3890	5.8915	1.0298	0.4204
	SL	1.0941	0.8819	4.0693	0.5667	0.2029
	présente	1.0578	0.8796	4.0101	0.5693	0.1293
	Erreur relative %	3.317	0.26	1.454	0.458	36.274
5	UL	1.8820	1.4356	6.1504	1.0451	0.4177
	SL	1.1158	0.9118	4.2488	0.5755	0.2017
	présente	1.0752	0.9014	4.1848	0.5783	0.1251
	Erreur relative %	3.638	1.14	1.506	0.486	37.977
6	UL	1.9004	1.4727	6.4043	1.0536	0.4227
	SL	1.1261	0.9356	4.4244	0.5803	0.2041
	présente	1.0821	0.9238	4.3572	0.5833	0.1251
	Erreur relative %	3.907	1.261	1.518	0.517	38.707
7	UL	1.9100	1.5049	6.6547	1.0589	0.4310
	SL	1.1312	0.9562	4.5971	0.5834	0.2081
	présente	1.0847	0.9438	4.5280	0.5864	0.1272

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

	Erreur relative %	4.11	1.296	1.503	0.514	38.875
8	UL	1.9155	1.5343	6.8999	1.0628	0.4399
	SL	1.1340	0.9750	4.7661	0.5856	0.2124
	présente	1.0856	0.9623	4.6957	0.5887	0.1302
	Erreur relative %	4.268	1.302	1.477	0.529	38.7
9	UL	1.9191	1.5617	7.1383	1.0662	0.4481
	SL	1.1358	0.9925	4.9303	0.5875	0.2164
	présente	1.0859	0.9799	4.8591	0.5907	0.1335
	Erreur relative %	4.393	1.269	1.444	0.544	38.308
10	UL	1.9217	1.5876	7.3689	1.0694	0.4552
	SL	1.1372	1.0089	5.0890	0.5894	0.2198
	présente	1.0862	0.9966	5.0173	0.5926	0.1368
	Erreur relative %	4.484	1.219	1.408	0.542	37.761
Métal	UL	2.1194	2.5327	2.8932	1.2850	0.5114
	SL	1.2534	1.6070	1.9955	0.7065	0.2462
	présente	1.1949	1.6072	1.9982	0.7092	0.1910
	Erreur relative %	4.667	0.012	0.135	0.382	22.42

Tableau 5.2 : Effet de l'index de la fraction volumique sur les contraintes et les déplacements adimensionnels d'une plaque FGM carrée (Al/Al_2O_3 , $a/h=10$) en présence d'une charge transversale uniforme et sinusoïdale

a/b	a/h	\bar{W}			
		n			
		1	2	3	10
0,5	10	1.4821	1.9001	2.0919	2.4927
	5	1.6103	2.0664	2.2873	2.7863
1	10	0.5890	0.7552	0.8324	0.9966
	5	0.6691	0.8592	0.9546	1.1802
1,5	10	0.2294	0.2942	0.3249	0.3919
	5	0.2786	0.3582	0.4000	0.5048

Tableau 5.3 : Variation de la déflexion verticale adimensionnelle \bar{W} d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b.

La figure (5.1) représente la variation de la déflexion verticale adimensionnelle d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b. A partir de cette figure, nous remarquons que :

- La déflexion de la plaque \bar{W} augmente lorsque l'index de la fraction volumique n augmente, quel que soit le rapport (a/b) et (a/h) car la plaque devient plus riche en métal et donc plus souple.
- La déflexion adimensionnelle d'une plaque épaisse (a/h = 5) est supérieure à celle d'une plaque moins épaisse (a/h = 10). La déflexion non adimensionnelle d'une plaque moins épaisse est, quant à elle, supérieure à celle d'une plaque plus épaisse qui est plus rigide. Par exemple pour n=1 et a/b=0.5, la déflexion verticale W pour a/h=10 est environ 15 fois la valeur de W pour a/h = 5.

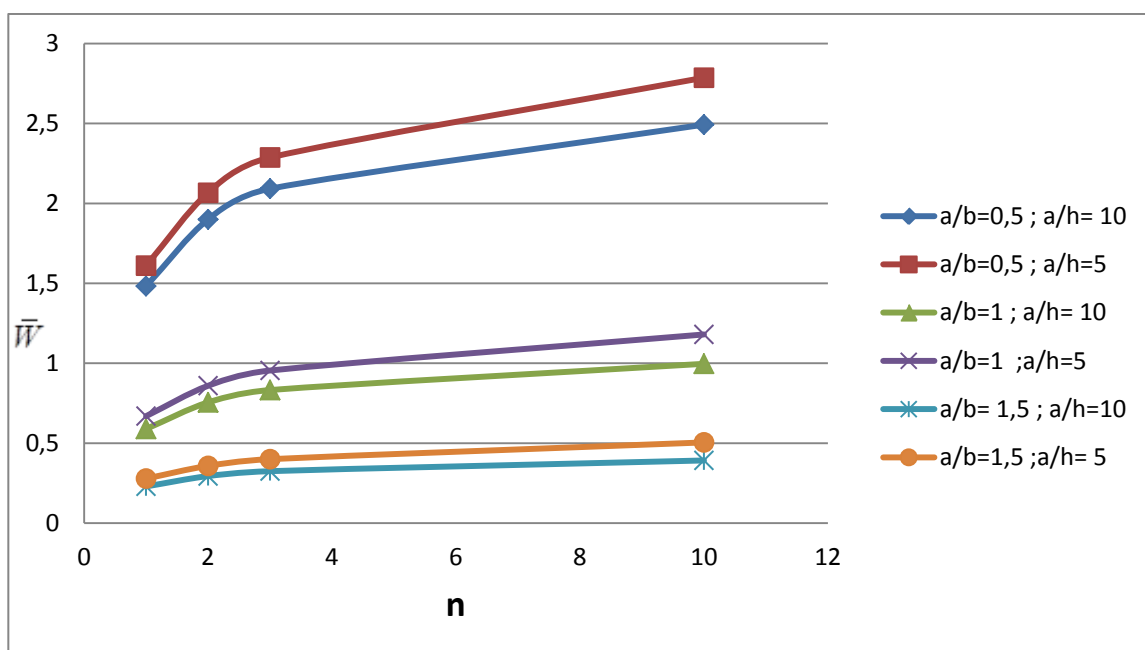


Figure 5.1 : Variation de la déflexion verticale adimensionnelle \bar{W} d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b.

a/b	a/h	$\bar{\sigma}_x$			
		n			
		1	2	3	10
0,5	10	3.1687	2.9757	2.7249	1.8856
	5	1.5843	1.4878	1.3625	0.9428
1	10	1.4968	1.4057	1.2872	0.8907
	5	0.7484	0.7028	0.6436	0.4454
1,5	10	0.7304	0.6859	0.6281	0.4346
	5	0.3652	0.3429	0.3140	0.2173

Tableau 5.4 : Variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b.

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

La figure (5.2) représente la variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b. A partir de cette figure, nous remarquons que :

- La contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ diminue en augmentant l'indice de la fraction volumique n quel que soit le rapport a/h ou bien a/b,
- La contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ diminue lorsque le rapport a/b augmente,
- La plaque moins épaisse (a/h=10) possède des contraintes adimensionnelles supérieures à celles d'une plaque épaisse (a/h=5). Par exemple, si n=1 et a/b = 0.5, la plaque la moins épaisse (a/h=10) voit sa contrainte axiale croître sous l'effet de la charge transversale et devient environ 15 fois supérieure à celle de la plaque épaisse (a/h=5).

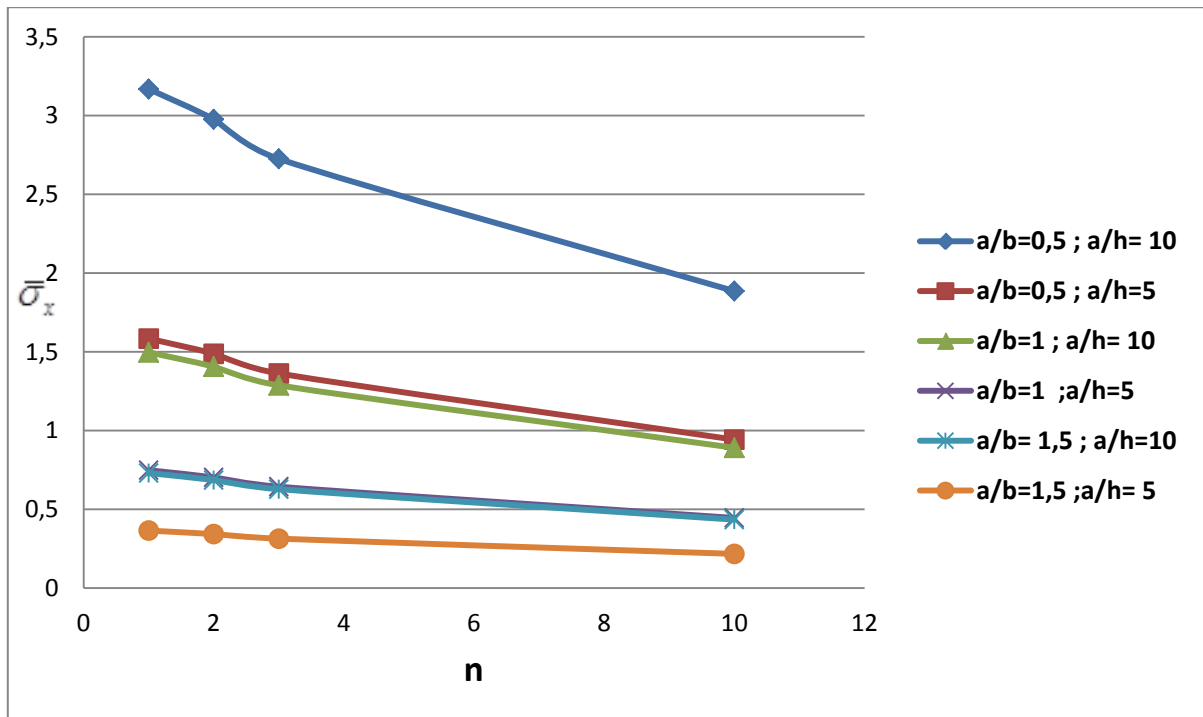


Figure 5.2 : Variation de la contrainte axiale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b

a/b	a/h	$\bar{\sigma}_{xy}$			
		n			
		1	2	3	10
0,5	10	0.7840	0.6988	0.7101	0.7585
	5	0.3920	0.3494	0.3550	0.3792
1	10	0.6125	0.5459	0.5547	0.5926
	5	0.3063	0.2730	0.2774	0.2963
1,5	10	0.3479	0.3101	0.3151	0.3366
	5	0.1740	0.1550	0.1576	0.1683

Tableau 5.5 : Variation de la contrainte adimensionnelle dans le plan $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b

La figure (5.3) représente la variation de la contrainte adimensionnelle dans le plan $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b. A partir de cette figure, nous remarquons que :

- La contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xy}$ diminue jusqu'à n = 2 et augmente au-delà quel que soit les valeurs des rapports a/b et a/h. Les contraintes $\bar{\sigma}_{xy}$ à n = 0 (céramique pure) et à n = ∞ (métal pur) sont identiques (plaques homogènes),
- La contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xy}$ diminue lorsque le rapport a/b augmente pour une plaque épaisse ou moins épaisse,
- Les contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque épaisse (a/h = 5) sont inférieures à celles d'une plaque moins épaisses (a/h = 10) pour un rapport a/b donné.

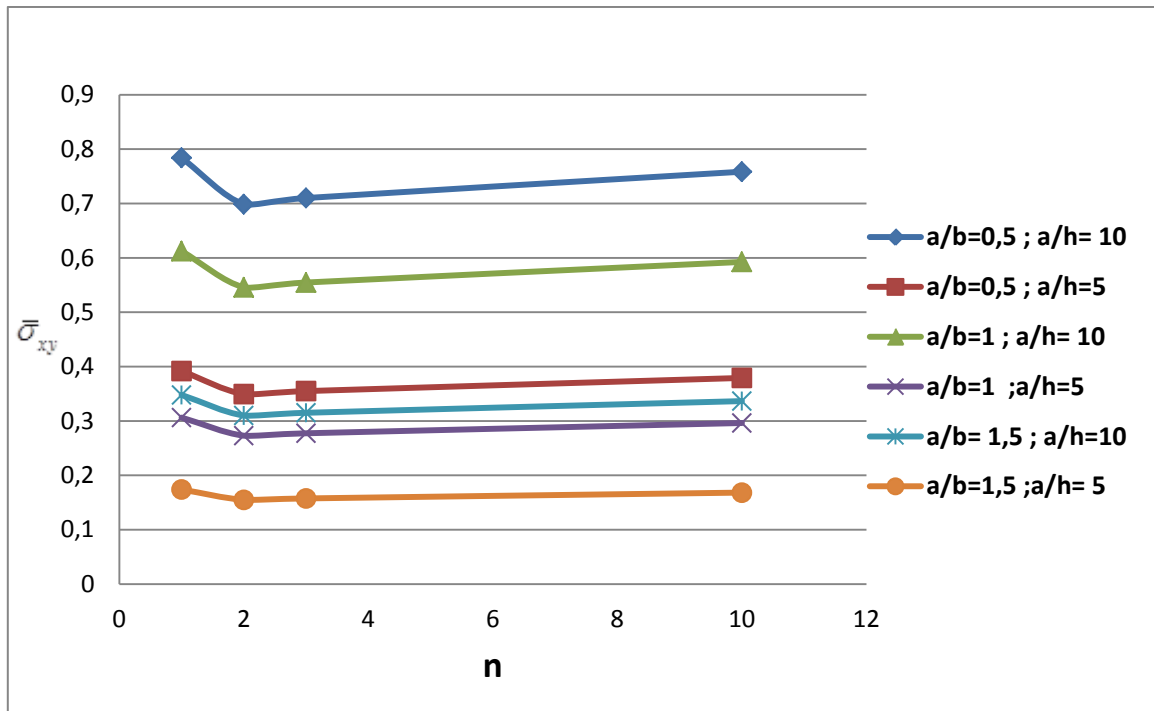


Figure 5.3 : Variation de la contrainte adimensionnelle dans le plan $\bar{\sigma}_{xy}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b

a/b	a/h	$\bar{\sigma}_{xz}$			
		n			
		1	2	3	10
0,5	10	0.3757	0.3663	0.3353	0.2346
	5	0.3757	0.3663	0.3353	0.2346
1	10	0.2348	0.2289	0.2096	0.1466
	5	0.2348	0.2289	0.2096	0.1466
1,5	10	0.1445	0.1409	0.1290	0.0902
	5	0.1445	0.1409	0.1290	0.0902

Tableau 5.6 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b

La figure (5.4) représente la variation de la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n, b/h et a/b. A partir de cette figure, nous remarquons que :

- La contrainte adimensionnelle en cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ diminue lorsque l'indice de la fraction volumique n augmente pour $n \geq 1$ et quelques soient les rapports a/h et a/b. Comme pour la contrainte $\bar{\sigma}_{xy}$, les contraintes $\bar{\sigma}_{xz}$ à $n = 0$ (céramique pure) et à $n = \infty$ (métal pur) sont identiques (plaques homogènes),
- Le rapport d'épaisseur (a/h) n'a d'apparence aucune influence sur les contraintes de cisaillement transverse car la présente théorie utilise un coefficient de cisaillement transverse constant le long de l'épaisseur (en réalité, plus la plaque est épaisse, plus l'influence du cisaillement transverse est important),
- Lorsque le rapport d'aspect (a/b) augmente, la contrainte adimensionnelle de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ diminue et ceci est valable pour la plaque épaisse et moins épaisse. Ainsi la plaque rectangulaire avec $a/b = 1.5$ possède la contrainte adimensionnelle de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ la plus faible quel que soit la valeur de

l'index de la fraction volumique n car elle possède la dimension la plus grande le long de l'axe x .

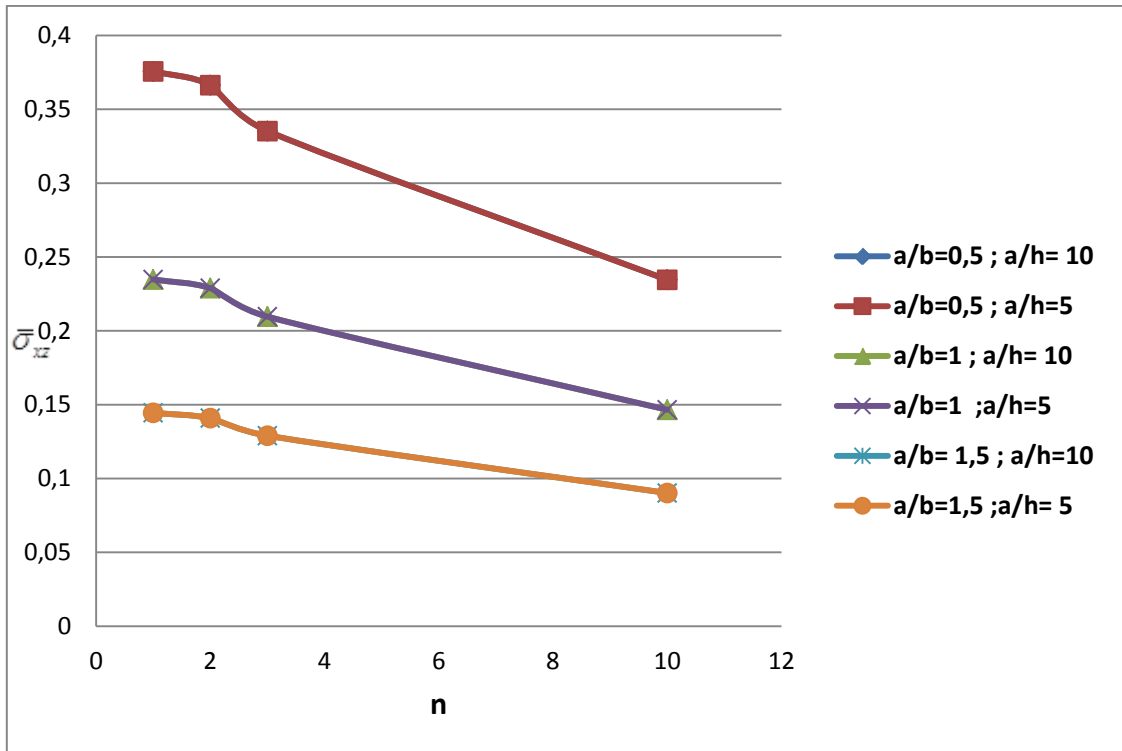


Figure 5.4 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle $\bar{\sigma}_{xz}$ d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) en fonction de n , b/h et a/b

5.3.1.2 Conclusion :

La réponse statique des plaques de matériau à gradient est étudiée en utilisant la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin. Des contraintes et des déplacements ont été calculés analysés sous une charge transversale sinusoïdale (SL). La gradation des propriétés à travers l'épaisseur est supposée être du type « loi de puissance », et des comparaisons ont été faites avec des plaques FGM et isotropes (homogènes). Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés pour des plaques avec un mélange céramique-métal. Nous avons constaté que la réponse de base des plaques qui correspondent aux propriétés intermédiaires à celle du métal et de la céramique, nécessairement se situe entre celle des deux constituants. Ainsi, les gradients dans les propriétés du

matériau et la géométrie (rapport a/h ou b/h) jouent un rôle très important dans la détermination de la réponse statique des plaques FGM.

5.3.2 L'analyse du flambage :

5.3.2.1 Résultats et interprétations :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision et l'efficacité de la présente théorie dans la prédiction de la charge critique de flambage d'une plaque FGM soumise à de différents types de charges de compression axiales. Dans le cas de sollicitation mécanique dans le plan, pour des valeurs données de rapport de charge λ , les valeurs de m et n dans l'équation (5.3.2) peuvent être choisies de telle façon à obtenir la plus petite valeur de \bar{P}_{cr} , appelée charge critique (adimensionnelle). Aux fins de vérifications, les résultats obtenus par la théorie actuelle sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

Exemple 1 : La première comparaison est effectuée pour une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a/b=0.5$) avec une variation linéaire des fractions en volume des constituants ($n=1$). La plaque est fabriquée à partir d'un mélange d'Aluminium (Al) et d'Alumine (Al_2O_3), et soumise à différents types de chargements dans le plan. Les valeurs des charges critiques adimensionnelles sont obtenues par le programme que nous avons élaboré, et sont définies par :

$$\bar{P}_{cr} = P_{cr} \cdot \frac{a^2 h^2}{100b^3} \quad (5.10)$$

Le tableau 5.7 montre les comparaisons des charges critiques de flambage obtenues par la présente théorie avec celles données par Javaheri et Eslami (CPT), Shiart et Eslami (FSDT) et Boghadi et Saidi (TSDT). La plaque est soumise à trois types de chargement : une charge de compression uni-axiale, une charge de compression bi-axiale et des charges de compression et de tension [20].

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

		b/h					
Charges	source	10	20	40	60	80	100
($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$)	CPT [1]	267,480	33,435	4,179	1,238	0,522	0,268
	FSDT [2]	243,410	32,628	4,154	1,235	0,522	0,267
	TSDT [3]	239,150	32,472	4,149	1,234	0,522	0,267
	Présente	239,102	32,472	4,149	1,234	0,521	0,267
	Erreur relative %	0.02	0	0	0	0.19	0
($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$)	CPT [1]	356,640	44,580	5,573	1,651	0,697	0,357
	FSDT [2]	324,540	43,505	5,538	1,647	0,966	0,356
	TSDT [3]	318,860	43,596	5,532	1,646	0,695	0,356
	Présente	318,803	43,296	5,531	1,646	0,695	0,356
	Erreur relative %	0.02	0.69	0.02	0	0	0
($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$)	CPT [1]	213,990	26,748	3,435	0,991	0,418	0,214
	FSDT [2]	194,730	26,103	3,323	0,988	0,417	0,214
	TSDT [3]	191,320	25,978	3,319	0,988	0,417	0,214
	Présente	191,282	25,977	3,319	0,987	0,417	0,214
	Erreur relative %	0.02	0.003	0	0.10	0	0

Tableau 5.7 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) rectangulaire soumise à des charges de compression (a/b = 0,5 et n = 1)

Nous remarquons que les résultats obtenus sont presque identiques à ceux obtenus par Boghadi et Saidi basé sur TSDT. La variation du P_{cr} dans les trois cas en fonction de l'épaisseur relative h/b est mise en évidence sur la figure (5.5). Nous constatons dans ces trois cas, que la charge de flambage décroît lorsque le rapport d'épaisseur b/h augmente. Ceci est dû au fait que la plaque devient de moins en moins rigide lorsque b/h augmente.

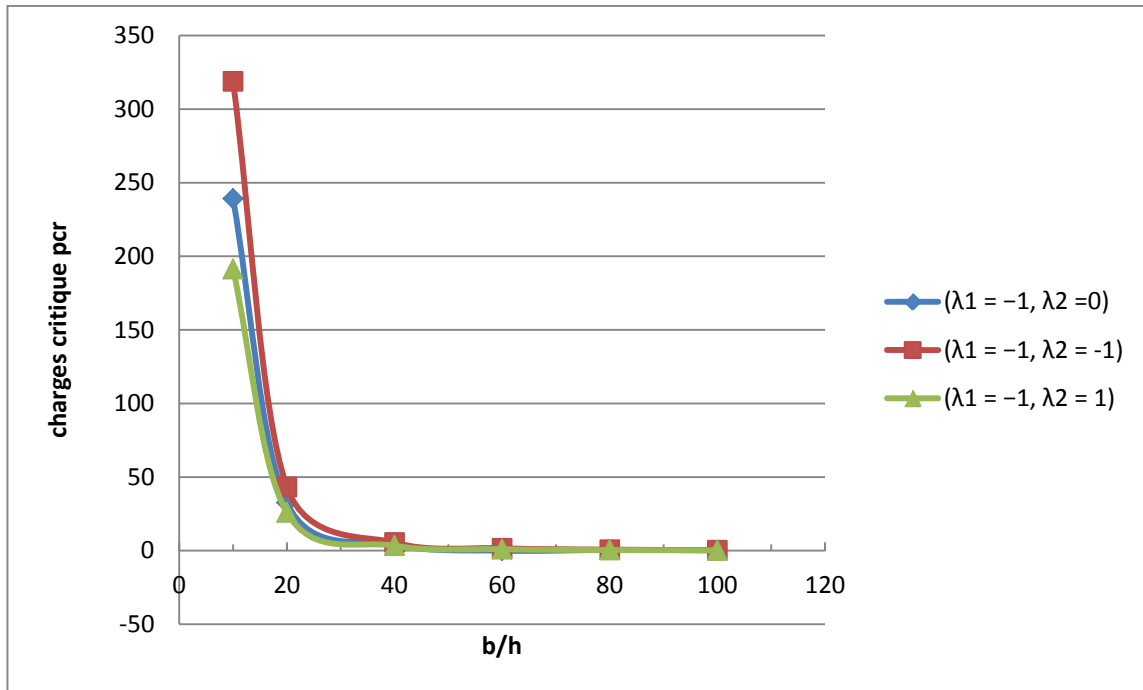


FIGURE 5.5. Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) rectangulaire (a/b = 0,5 et n = 1) soumise à différents types de charges de compression en fonction de b/h

Exemple 2 : La comparaison suivante est effectuée pour les plaques simplement appuyées, soumises à diverses conditions de chargements. La plaque est fabriquée à partir d'un mélange d'Aluminium (Al) et de carbure de silicium (SiC). Les charges critiques adimensionnelles de flambage de la plaque FGM simplement supportée pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur (b/h), rapport d'aspect (a/b) et de l'index de la fraction volumique n [19] sont présentées dans le tableau 5.8. Ces charges sont définies par :

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr}}{b \cdot 10^6} \quad (5.11)$$

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

Charges	a/b	b/h	Source	Pcr		
				N		
				0	1	2
Charge de compression uni-axiale	0,5	10	HSDT [1]	2079,721	1028,412	780,097
			HSDT [2]	2079,758	1028,449	780,023
			Présente	2079,3276	1028,2682	785,21608
			Erreur relative %	0.02	0.017	0.665
		5	HSDT [1]	12162,119	6270,298	4692,542
			HSDT [2]	12164,987	6272,425	4695,029
			Présente	12135,731	6259,0877	4777,0387
			Erreur relative %	0.24	0.212	0.746
	1	10	HSDT [1]	1437,361	702,304	534,441
			HSDT [2]	1437,389	702,251	534,835
			Présente	1437,3381	702,22997	536,32504
			Erreur relative %	0.003	0.002	0.278
		5	HSDT [1]	9915,62	4955,431	3746,054
			HSDT [2]	9916,193	4955,484	3746,732
			Présente	9911,3047	4953,3906	3782,0495
			Erreur relative %	0.049	0.042	0.942
	1,5	10	HSDT [1]	1527,903	748,92	569,751
			HSDT [2]	1527,994	748,988	569,825
			Présente	1527,8902	748,9452	571,97997

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

Charges de compression bi-axiales		5	Erreur relative %	0.006	0.005	0.378	
			HSDT [1]	10044,721	5067,219	3819,109	
			HSDT [2]	10044,962	5068,084	3820,079	
			Présente	10036,056	5064,1973	3866,1776	
			Erreur relative %	0.088	0.076	1.206	
	($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$)	0,5	10	HSDT [1]	1663,777	822,738	624,158
				HSDT [2]	1663,807	822,759	624,182
				Présente	1663,4621	822,61459	628,17287
				Erreur relative %	0.02	0.017	0.639
			5	HSDT [1]	9729,999	5016,384	3754,274
				HSDT [2]	9731,99	5017,941	3756,023
				Présente	9708,5846	5007,2702	3821,631
				Erreur relative %	0.24	0.212	1.746
1		10	HSDT [1]	718,692	351,124	267,416	
			HSDT [2]	718,695	351,125	267,418	
			Présente	718,66903	351,11498	268,1625	
			Erreur relative %	0.003	0.002	0.278	
	5	HSDT [1]	4957,888	2477,589	1873,19		
		HSDT [2]	4958,097	2477,742	1873,366		
		Présente	4955,6524	2476,6953	1891,0247		
		Erreur	0.049	0.042	0.942		

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

Charges de compression et de tension	1,5	10	relative			
			%			
			HSDT [1]	526,861	256,776	195,714
			HSDT [2]	526,862	256,776	195,714
		Présente	526,85179	256,77225	196,11464	
		Erreur				
		relative				
		%	0.001	0.001	0.204	
	5	HSDT [1]	3772,877	1871,038	1418,12	
		HSDT [2]	3772,964	1871,101	1418,193	
		Présente	3771,9406	1870,67	1425,4472	
		Erreur				
relative						
%	0.027	0.023	0.511			
($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$)	0,5	10	HSDT [1]	2772,98	1371,653	1040,519
			HSDT [2]	2773,011	1371,265	1040,304
			Présente	2772,4368	1371,0243	1046,9548
			Erreur			
		relative				
		%	0.02	0.017	0.639	
		5	HSDT [1]	16216,712	8360,541	6257,811
			HSDT [2]	16219,983	8363,233	6260,038
	Présente		16180,974	8345,4503	6369,385	
	Erreur					
	relative					
	%	0.24	0.212	0.746		
	1	10	HSDT [1]	2772,98	1371,653	1040,519
			HSDT [2]	2773,011	1371,265	1040,304
			Présente	2772,4368	1371,0243	1046,9548
			Erreur			
relative						
%	0.02	0.17	0.639			

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

		5	%				
			HSDT [1]	16216,712	8360,541	6257,811	
			HSDT [2]	16219,983	8363,233	6260,038	
			Présente	16180,974	8345,4503	6369,385	
		Erreur relative					
		%	0.24	0.212	1.746		
		1,5	10	HSDT [1]	2772,98	1371,653	1040,519
				HSDT [2]	2773,011	1371,265	1040,304
	Présente			2772,4368	1371,0243	1046,9548	
	Erreur relative						
	%		0.02	0.017	0.639		
	5		HSDT [1]	16216,712	8360,541	6257,811	
			HSDT [2]	16219,983	8363,233	6260,038	
			Présente	16180,974	8345,4503	6369,385	
		Erreur relative					
	%	0.24	0.212	1.746			

Tableau 5.8 Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Sic) soumise à des charges de compression

Nous pouvons constater que les charges critiques de flambage fournies par la théorie actuelle sont presque identiques à celles rapportées par Bodaghi et Saidi basées sur HSDT.

Dans le cas d'une plaque soumise à une charge de compression uni-axiale ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$), comme illustré dans la figure (5.6) :

- La charge critique de flambage diminue lorsque l'index de la fraction volumique augmente quelque soient les rapports b/h et a/b . Ceci est dû au fait que la plaque devient de plus en plus riche en métal (Aluminium) et donc de

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

moins en moins rigide (car le module de Young de l'Aluminium est inférieur à celui de la céramique (SiC)).

- Pour n'importe quelle valeur de l'index de la fraction volumique et du rapport b/h , la plaque carrée possède la charge critique de flambage la plus faible.
- La plaque la plus épaisse ($b/h = 5$) possède une charge critique de flambage supérieure à celle de la plaque la moins épaisse ($b/h = 10$) car cette dernière est moins rigide.

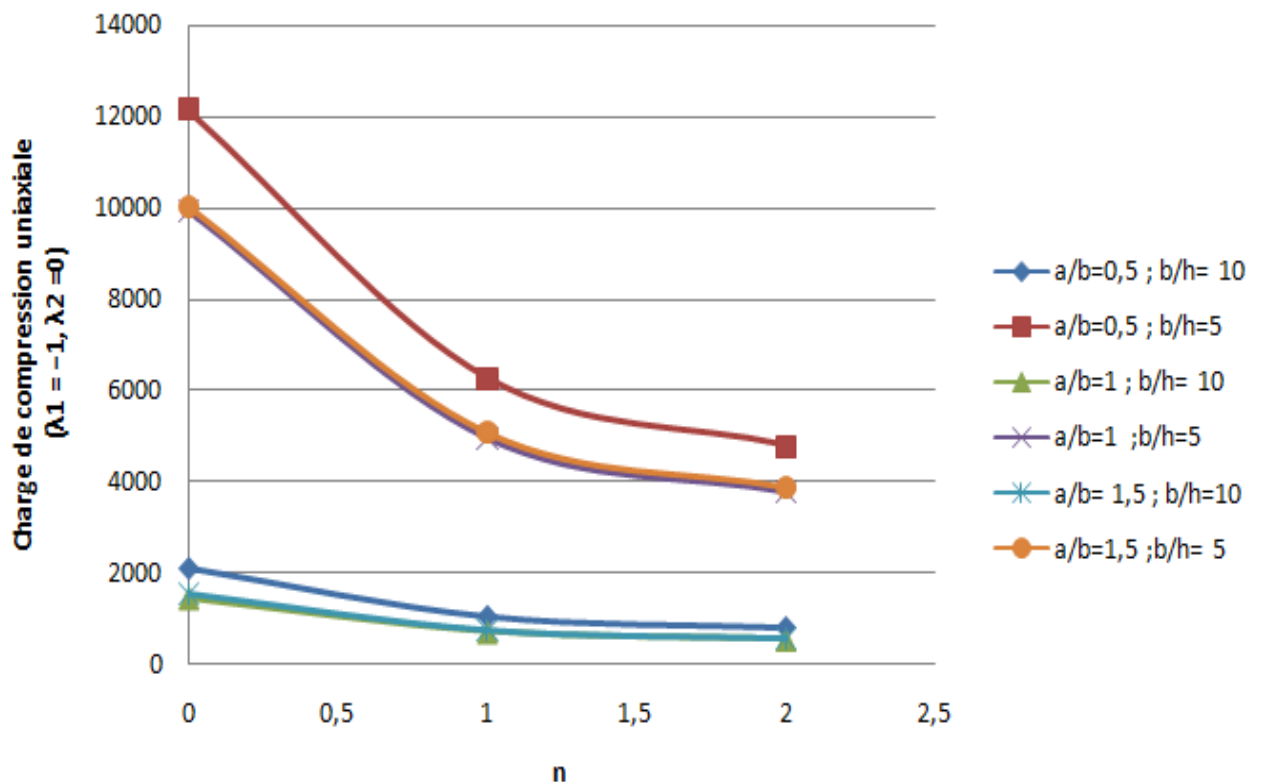


Figure 5.6. Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/SiC) soumise à une charge de compression uni-axiale en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b

Dans le cas d'une plaque soumise à une charge de compression bi-axiale ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$), comme illustré dans la figure (5.7) :

- La charge critique de flambage diminue lorsque l'index de la fraction volumique augmente quelque soient les rapports b/h et a/b . Ceci est dû au fait que la plaque devient de plus en plus riche en métal (Aluminium) et donc de

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

moins en moins rigide (car le module de Young de l'Aluminium est inférieur à celui de la céramique (SiC)).

- Pour n'importe quelle valeur de l'index de la fraction volumique et du rapport b/h , la plaque rectangulaire avec $a/b = 1.5$ possède la charge critique de flambage la plus faible.
- La plaque la plus épaisse ($b/h = 5$) possède une charge critique de flambage supérieure à celle de la plaque la moins épaisse ($b/h = 10$) car cette dernière est moins rigide

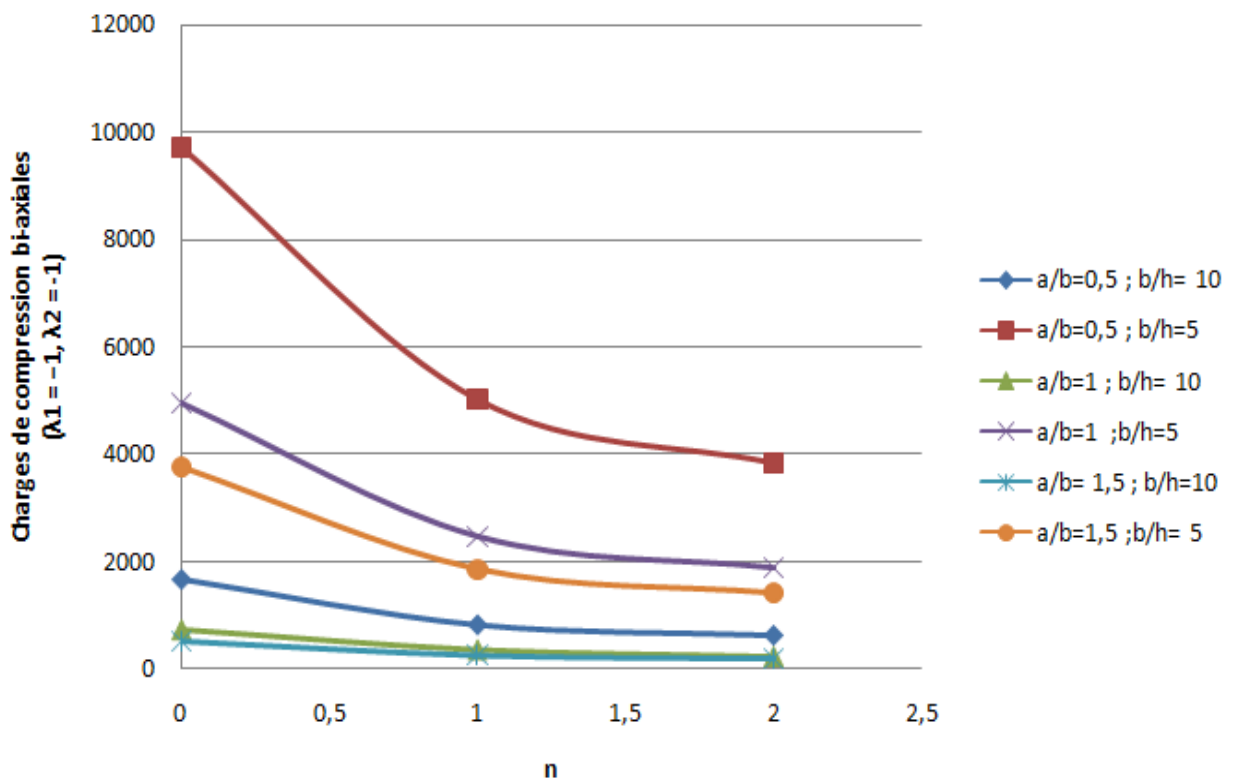


Figure 5.7. Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/SiC) soumise à une charge de compression bi-axiale en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b

Le troisième et le dernier cas, concerne une plaque soumise à des charges de compression et de tension ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$) comme montré dans la figure (5.8). Pour ce cas, on peut conclure que:

Dans le cas d'une plaque soumise à une charge de compression uni-axiale ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$), comme illustré dans la figure (5.2) :

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

- La charge critique de flambage diminue lorsque l'index de la fraction volumique augmente quelque soient les rapports b/h et a/b . Ceci est dû au fait que la plaque devient de plus en plus riche en métal (Aluminium) et donc de moins en moins rigide (car le module de Young de l'Aluminium est inférieur à celui de la céramique (SiC)).
- Pour n'importe quelle valeur de l'index de la fraction volumique et pour un rapport b/h donné, toutes les plaques considérées ($a/b = 0.5 ; 1 ; 1.5$) possèdent la même charge critique de flambage.
- La plaque la plus épaisse ($b/h = 5$) possède une charge critique de flambage supérieure à celle de la plaque la moins épaisse ($b/h = 10$) quel que soit le rapport a/b car cette dernière est moins rigide.

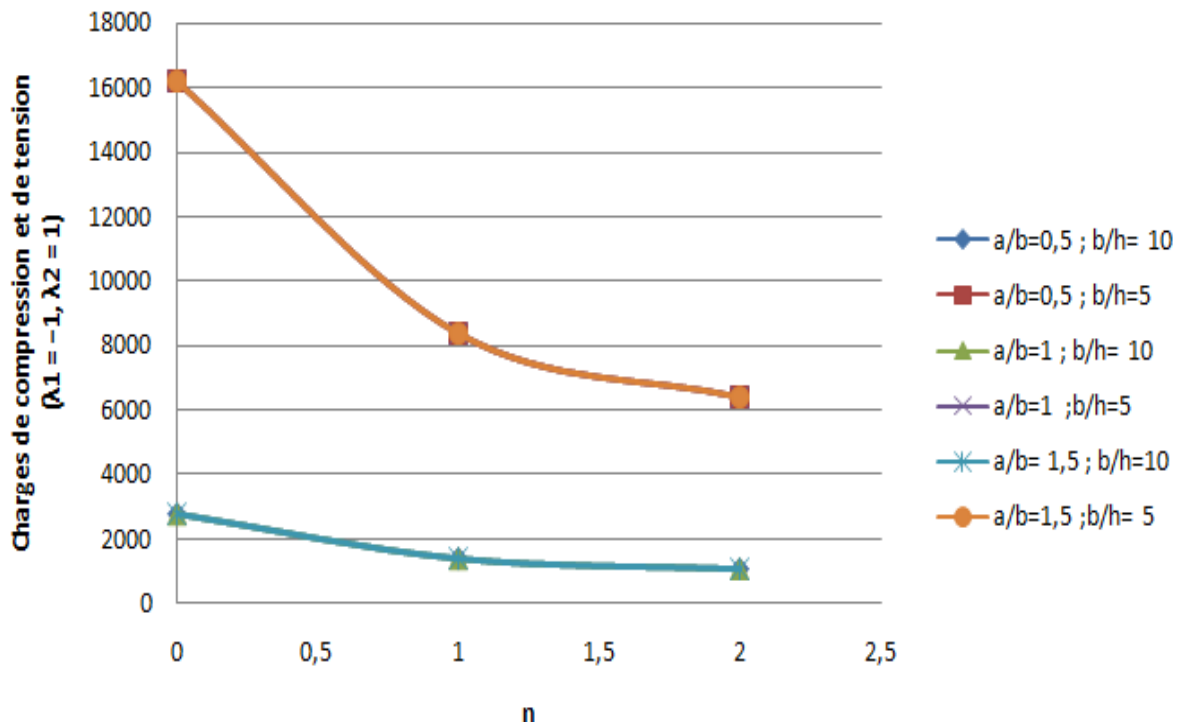


Figure 5.8. Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/SiC) soumise à des charges de compression et de tension en fonction de n et b/h et pour différents rapports a/b

La charge critique adimensionnelle de flambage de la plaque sous compression uni-axiale ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$) est supérieure à celle de la compression bi-axiale ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$), et inférieure à celle de la compression et de tension ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$).

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

Exemple 3 : Les charges de flambage sont calculées pour une plaque FGM carrée, fabriquée à partir d'un mélange d'Aluminium (Al) et d'Alumine (Al₂O₃). Les propriétés de la plaque sont: $E_m = 70GPa, E_c = 380GPa$, (le coefficient de poisson est de 0.3 pour les deux matériaux). La plaque est soumise à une compression axiale selon x ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$). [19] La charge critique adimensionnelle est définie par :

$$\bar{P}_{cr} = P_{cr} \frac{a^2}{E_m h^3} \quad (5.12)$$

a = b	Pcr					
	n = 0,1					
b/h	CPT [1]	FSDT [1]	HSDT [1]	HSDT [2]	Présente	Erreur relative %
10	17,68	16,76	16,72	16,74	16,76	0
20	17,68	17,40	17,40	17,41	17,44	0.229
40	17,68	17,62	17,50	17,59	17,62	0
50	17,68	17,64	17,60	17,61	17,65	0.056
100	17,68	17,67	17,67	17,64	17,67	0
a = b	Pcr					
	n = 1					
b/h	CPT [1]	FSDT [1]	HSDT [1]	HSDT [2]	Présente	Erreur relative %
10	9,78	9,33	9,21	9,29	9,34	0.107
20	9,78	9,66	9,46	9,64	9,67	0.103
40	9,78	9,75	9,72	9,73	9,75	0
50	9,78	9,76	9,74	9,74	9,76	0
100	9,78	9,77	9,77	9,75	9,78	0.102
a = b	Pcr					
	n = 10					
b/h	CPT [1]	FSDT [1]	HSDT [1]	HSDT [2]	Présente	Erreur relative

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

						%
10	5,87	5,66	5,53	5,42	5,52	2.473
20	5,87	5,78	5,65	5,75	5,79	0.173
40	5,87	5,85	5,85	5,83	5,86	0.170
50	5,87	5,86	5,86	5,84	5,86	0
100	5,87	5,87	5,88	5,86	5,87	0

Tableau 5.9 Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambage d'une plaque FGM (Al/Al₂O₃) carrée soumise à une compression axiale selon x ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$)

Le tableau 5.9 nous montre que les valeurs obtenues par la théorie actuelle sont presque identiques à celles obtenues par Shiart et Eslami sur la base de FSDT. D'après ce tableau et comme c'est illustré sur la figure 5.9, nous constatons que :

- Plus la plaque est riche en céramique et plus la charge critique de flambage est importante quel que soit l'épaisseur de la plaque car cette dernière devient plus rigide (le module de Young de la céramique est supérieur à celui du métal)
- Quel que soit la valeur de l'index de la fraction volumique, la charge critique de flambage adimensionnelle augmente lorsque b/h augmente, mais qu'à partir de b/h = 20, cette charge reste pratiquement la même pour une plaque mince et une plaque très mince.

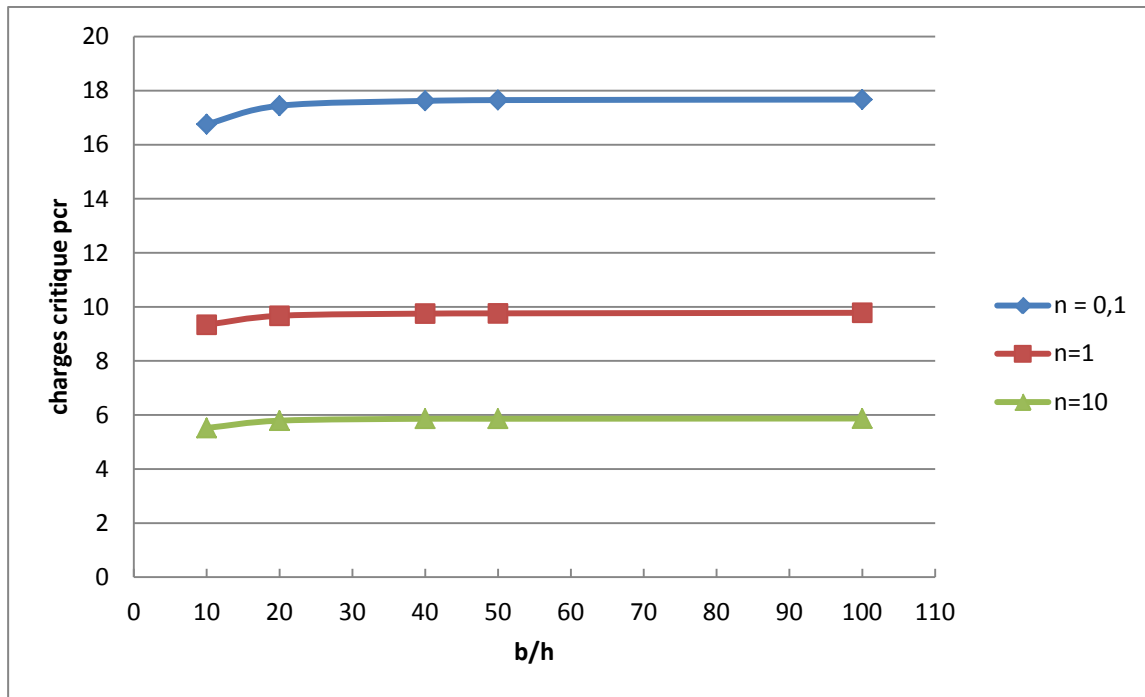


FIGURE 5.9. Variation de la charge critique adimensionnelle de flambage \overline{P}_{cr} d'une plaque FGM (Al/Al_2O_3) carrée soumise à une compression uni-axiale en fonction de n et b/h

5.3.2.2 Conclusion :

L'observation suivante peut être faite sur la base de la présente étude :

- L'influence de cisaillement transversal sur les charges de flambage est presque identique pour tous les types de plaques FGM. L'effet de la déformation par cisaillement diminue avec l'augmentation de la valeur de n (indice de la fraction volumique).
- Les caractéristiques du comportement de la plaque FGM se situent entre les caractéristiques du comportement métallique et celles en céramique. Lorsque n tend vers 0, le comportement de la plaque P-FGM a tendance à être celui de la plaque en céramique pure.
- Les P-FGM peuvent être conçus pour obtenir une charge critique de flambage plus importante lorsque n tend vers 0 (céramique).
- La charge de flambage diminue avec l'augmentation du rapport b/h quel que soit le type de charge de compression.

- La charge critique de flambage d'une plaque sous compression uni-axiale est supérieure à celle de la compression bi-axiale, et inférieure à celle de la compression-tension.
- La charge critique de flambage est plus basse pour une plaque carrée pour une compression uni-axiale quel que soit l'épaisseur de la plaque (b/h).
- La charge critique de flambage est plus basse pour une plaque rectangulaire lorsque $a/b > 1$ pour une compression bi-axiale quel que soit l'épaisseur de la plaque (b/h).
- La charge critique de flambage est la même pour une plaque mince ou très mince.

5.4 Conclusion :

Les résultats obtenus grâce à ce programme de calcul sont satisfaisants, ils ont été comparés avec des résultats publiés. La comparaison prouve la bonne performance de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et par conséquent, elle peut être utilisée avec succès pour les analyses structurelles des plaques FGM minces et moyennement épaisses. La solution de Navier assure qu'il n'y a pas d'erreur numérique, fournissant ainsi une plate-forme pour l'évaluation précise de la théorie actuelle. L'étude de la flexion et du flambage statique nous a permis de tirer quelques observations sur l'influence de quelques paramètres sur le comportement de ces plaques :

- La charge critique de flambage adimensionnelle décroît lorsque le rapport d'épaisseur (b/h) augmente.
- L'accroissement de l'indice de fraction volumique cause l'augmentation de la déflexion et de la contrainte longitudinale plane, mais aussi et la diminution de la contrainte normale pour le cas de la flexion, mais pour le cas de flambage, l'accroissement de ce dernier cause la diminution de l'effet de déformation par cisaillement.
- Les plaque épaisses et moyennement épaisses possèdent une charge critique de flambage plus importante que les plaque minces et très minces et ceci quel que soit l'index de la fraction volumique.

Ch.5 Résolutions, résultats et interprétations

- La charge critique de flambage d'une plaque riche en céramique est plus importante que celle d'une plaque riche en métal car plus rigide.

Organigramme du programme de calcul

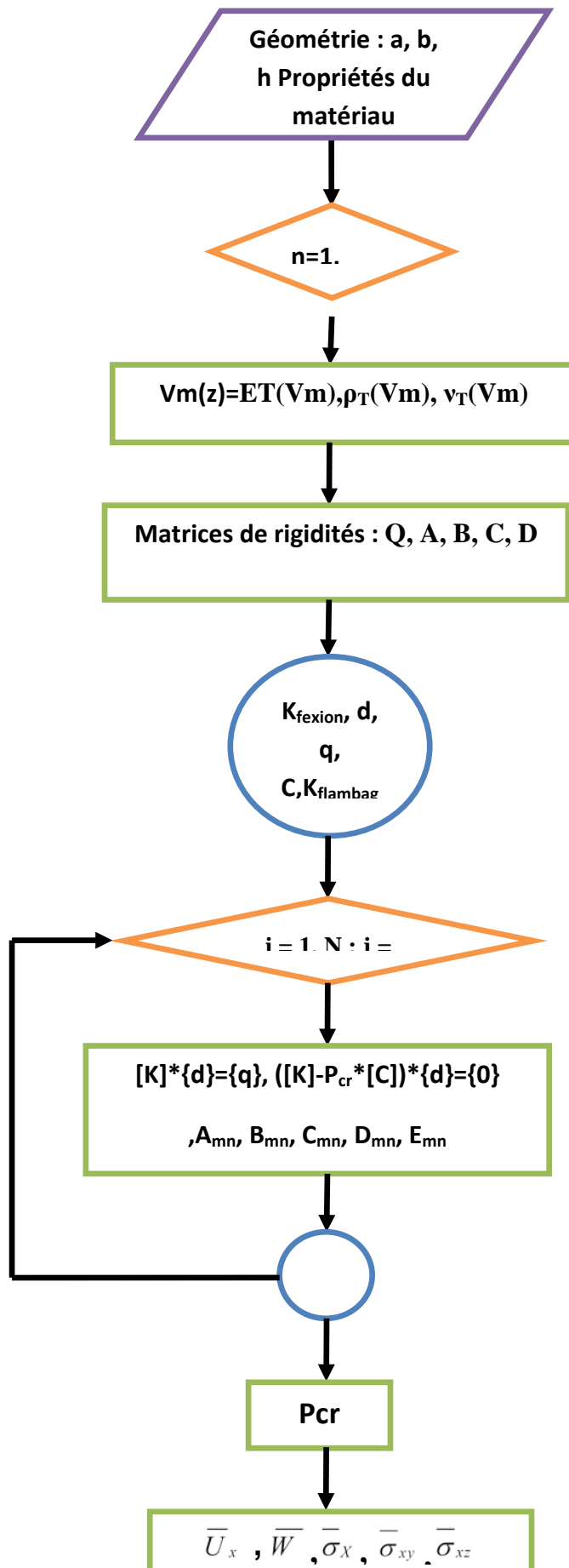


FIGURE 5.10: Organigramme du programme de calcul (Maple)

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, l'analyse des comportements en flexion (sous une charge transversale) et flambage (sous des charges axiales de compression) d'une plaque FGM a été étudiée en se basant sur la théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés des matériaux sont supposées être indépendantes de la température, et varient continuellement à travers l'épaisseur selon la loi de puissance de la fraction volumique des constituants. En se servant de l'énergie de déformation, ainsi que le travail des charges externes, le principe de Hamilton a été utilisé pour établir les équations de mouvement d'une plaque simplement appuyée. Suite à cela, une résolution des deux systèmes d'équations différentielles couplées par la méthode analytique de Navier afin de déterminer les contraintes normales et longitudinales planes, ainsi que les déplacements et la charge critique du flambage.

Des comparaisons ont été faites avec des résultats publiés afin de montrer la validité du code de calcul que nous avons élaboré. Une étude paramétrique, en fonction du type de matériau utilisé, de l'indice de la fraction volumique n , du rapport d'épaisseur relative b/h et du rapport d'aspect b/a ont été menés. Ainsi, nous avons pu tirer certaines conclusions :

- Les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour des contraintes d'une plaque entièrement en métal, car dans les deux cas les plaques sont homogènes.
- L'augmentation de l'indice de la fraction volumique cause l'augmentation de la déflexion et les contraintes longitudinales planes, et la diminution des contraintes normales pour le cas de flexion, et une diminution de l'effet de déformation en cisaillement pour le cas de flambage.
- L'augmentation du rapport d'épaisseur provoque l'augmentation de la charge de flambage.
- La plus petite charge critique du flambage est celle d'une plaque carrée.

Pour des travaux futurs, il est envisageable de poursuivre ce travail en analysant les comportements en flexion et flambage statique d'une plaque FGM.

Références

- ❖ [1] **Mahi, A.**, "Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres" [Dr], Blida: Université Saad Dahlab Blida, (2012)
- ❖ [2] **Bezzou, H & Ouari, K.**, "analyse du flottement supersonique d'une plaque FGM basée sur la théorie de déformation du premier ordre", Blida : Université Saad Dahlab Blida, juin 2015
- ❖ [3] **Berthelot, J-M.** "Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures", Les Clousures, Chemin des Horts, 05290 Vallouise, septembre 2013
- ❖ [4] **Ait Atmane.H**, "analyse des vibrations libres des plaques FGM posée sur appuis élastique en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement", Chlef : Université Hassiba Benbouali, novembre 2011
- ❖ [5] **Shyang-Ho Chi**, " Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load", International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 3657–3674
- ❖ [7] **FEKRAR .A** " CONCEPTION DES PLAQUES FGM AYANT UN COMPORTEMENT SIMILAIRE AUX PLAQUES HOMOGENES SOUS CHARGE THERMIQUE", Laboratoire des matériaux & Hydrologie, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Département de génie civil, Université Hassiba Benbouali de Chlef.
- ❖ [8] **Huu Thai Thai**, "Closed-form solutions for functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation under various boundary conditions",JCOMB-D-13-01398
- ❖ [9] **Poo_Hua Lee**, " Fabrication, Characterization and Modeling of Functionally Graded Materials"[Dr], Columbia University, (2013)
- ❖ [10] **Arnaldo Moreno .V.**, " application of fonctionnally graded materials in aircraft"
- ❖ [11] **Ait Yahia .S &Ait athman. H & Makhelouf.A.**, "Analyse de la stabilité et des vibrations libres d'une plaque épaisseen matériaux composites sur fondations élastiques", Chlef : Université Hassiba Benbouali,octobre 2010
- ❖ [12] **REZA .B** " FRACTURE IN FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS STATIC AND DYNAMICANALYSES", CALGARY, ALBERTA, APRIL, 1997.

Références

- ❖ [13] **Ait Atman.H&Tounsi.A &Adda Bedia.E**, " Etude analytique des plaques à caractéristiques matérielles aléatoires en utilisant une théorie raffinée ", Chlef, Université Hassiba Benbouali. Sidi Bel Abbes, Université Djilali Liabes. Sidi Bel Abbes, Laboratoire des matériaux et Hydrologie.

- ❖ [14] **Victor Birn** " Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures"

- ❖ [15] **Reddy, J.N.**, "Energy principles and variational methods in applied mechanics", 2nd ed, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. Inc., (2002).

- ❖ [16] **Attia.A** " Etude de la flexion des plaques FGM en utilisant une nouvelle théorie à ordre élevé", Université Djilali LIABES, Laboratoire des matériaux & Hydrologie.

- ❖ [17] **Zenkour, A.M.**, "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", Applied Mathematical Modelling, (2006), 30, 67-84.

- ❖ [18] **Song Xiang & Gui-wen Kang**, " A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates", Liaoning Key Laboratory of General Aviation, Shenyang Aerospace University, No. 37 Daoyi South Avenue, Shenyang, Liaoning 110136, People's Republic of China.

- ❖ [19] **Huu-Tai Thai & Dong-Ho Choi**, "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates, Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul 133-791, Republic of Korea.

- ❖ [20] **SamsamShariat B.A&Eslami M.R.** " Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, Mechanical Engineering Department, Amir kabir University of Technology, P.O. Box 15875-4413, 424 Hafez Avenue, Tehran 15914, Iran Available online 20 December 2005.

- ❖ [21] **KamleshKulkarni, B.N. Singh&D.K. Maiti**, " Analytical solution for bending and buckling analysis of functionally graded plates using inverse trigonometric shear deformation theory, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur, India.