

**M**

**PHYSIQUE-LMD**  
Universités-Écoles d'ingénieurs



# Introduction à la Relativité générale

2<sup>e</sup> édition

Jean Hladik



**La côte de l'ouvrage : 2-530-274**

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b> .....	<b>3</b>
<b>1. L'ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE</b> .....	<b>13</b>
1.1 Fondements de la relativité restreinte .....	13
1.1.1 Postulats de Poincaré-Einstein .....	14
1.1.2 Transformation de Lorentz-Poincaré .....	14
1.1.3 Formule de composition des vitesses .....	15
1.2 Invariants de l'espace-temps .....	15
1.2.1 Espace-temps plat .....	15
1.2.2 Vitesse de propagation des interactions .....	16
1.2.3 Intervalle entre deux événements .....	16
1.2.4 Durée propre .....	16
1.3 Structure de l'espace-temps plat .....	17
1.3.1 Intervalle du genre lumière .....	17
1.3.2 Intervalle du genre temps .....	18
1.3.3 Intervalle du genre espace .....	18
1.3.4 L'espace-temps euclidien de Poincaré .....	19
1.4 Métrique de l'espace-temps plat .....	19
1.4.1 Quadri-vecteurs .....	20
1.4.2 Produit scalaire .....	20
1.4.3 Espace-temps de Poincaré-Minkowski .....	20
1.4.4 Tenseur fondamental de l'espace-temps plat .....	21
1.5 Énergie .....	21
1.5.1 Quadri-vecteur vitesse unitaire .....	21
1.5.2 Quadri-vecteur impulsion-énergie .....	22
1.5.3 Invariance de la norme du quadri-vecteur impulsion-énergie .....	22
1.6 Exercices .....	23
<b>2. ÉLÉMENTS DE CALCUL TENSORIEL</b> .....	<b>27</b>
2.1 Conventions .....	27
2.1.1 Convention de sommation .....	27
2.1.2 Convention de notation d'indice primé .....	28
2.2 Vecteurs contravariants et covariants .....	29
2.2.1 Vecteurs contravariants .....	29
2.2.2 Espace vectoriel dual .....	29
2.2.3 Vecteurs covariants .....	30
2.3 Espaces vectoriels préhilbertiens .....	31
2.3.1 Produit scalaire .....	31
2.3.2 Identification d'un espace vectoriel préhilbertien avec son dual .....	31
2.3.3 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur .....	31
2.3.4 Relations entre composantes contravariantes et covariantes .....	32
2.3.5 Expression du produit scalaire en fonction des composantes covariantes .....	32

2.4	Espaces ponctuels .....	33
2.4.1	Définition d'un espace ponctuel .....	33
2.4.2	Repères d'un espace ponctuel préhilbertien .....	33
2.4.3	Notations indicielles des dérivées partielles .....	34
2.4.4	Coordonnées curvilignes .....	34
2.4.5	Repère naturel d'un système de coordonnées curvilignes .....	34
2.4.6	Élément linéaire d'un espace ponctuel .....	35
2.5	Définition des tenseurs .....	35
2.5.1	Changement de base naturelle d'un espace vectoriel .....	35
2.5.2	Transformation des composantes d'un vecteur lors d'un changement de base ..	36
2.5.3	Définition des tenseurs d'ordre deux .....	37
2.5.4	Tenseurs d'ordre quelconque .....	37
2.5.5	Un tenseur d'ordre deux : le tenseur métrique .....	38
2.6	Opérations sur les tenseurs .....	38
2.6.1	Espace vectoriel de tenseurs .....	38
2.6.2	Produit scalaire .....	39
2.6.3	Contraction des indices .....	39
2.6.4	Critères de tensorialité .....	40
2.7	Analyse tensorielle .....	40
2.7.1	Variations des repères naturels .....	41
2.7.2	Comparaison des vecteurs entre eux .....	41
2.8	Symboles de Christoffel .....	41
2.8.1	Définitions .....	41
2.8.2	Propriétés des symboles de Christoffel .....	42
2.9	Dérivée covariante .....	43
2.9.1	Dérivée covariante d'un vecteur .....	43
2.9.2	Composantes covariantes du tenseur dérivée covariante d'un vecteur .....	43
2.9.3	Dérivée covariante d'un tenseur .....	44
2.10	Équations des droites en coordonnées curvilignes .....	45
2.11	Opérateurs différentiels .....	46
2.11.1	Gradient d'une fonction scalaire .....	46
2.11.2	Rotationnel d'un champ de vecteurs .....	47
2.11.3	Divergence d'un champ de vecteurs .....	47
2.12	Exercices .....	48
<b>3.</b>	<b>ÉLECTROMAGNÉTISME ET DYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS .....</b>	<b>49</b>
3.1	Covariance des lois de la physique .....	49
3.1.1	Quadrivecteurs .....	49
3.1.2	Tenseurs covariants d'ordre quelconque .....	50
3.1.3	Composantes covariantes et contravariantes .....	50
3.2	Le tenseur champ électromagnétique .....	51
3.3	Les équations de Maxwell-Lorentz .....	53
3.3.1	Quadrivecteur densité de courant électrique .....	53
3.3.2	Premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz .....	53
3.3.3	Second groupe des équations de Maxwell-Lorentz .....	55
3.3.4	Loi de conservation de l'électricité .....	56
3.4	Dynamique classique des milieux continus .....	56
3.4.1	Dérivées partielle et totale par rapport au temps .....	56
3.4.2	Équation de conservation .....	57
3.4.3	Forces de masse et forces superficielles .....	57
3.4.4	Tenseur des contraintes .....	58
3.4.5	Équations générales de la dynamique des milieux continus .....	59
3.4.6	Autre expression des équations générales .....	60

3.5	Dynamique relativiste des milieux continus .....	61
3.5.1	Équations relativistes dans un système de repos .....	61
3.5.2	Équations relativistes sous forme tensorielle .....	62
3.6	Tenseur impulsion-énergie .....	63
3.6.1	Tenseur impulsion-énergie d'un milieu continu .....	63
3.6.2	Quadri vecteur densité de force de Lorentz .....	63
3.6.3	Tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique .....	64
3.7	Exercices .....	66
<b>4.</b>	<b>IDÉES DE BASE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE .....</b>	<b>69</b>
4.1	Il faut modifier la loi de la gravitation .....	69
4.2	Gravitation et accélération équivalentes .....	70
4.2.1	Principe d'équivalence de Newton .....	70
4.2.2	Mesures dans des champs de gravitation et d'accélération .....	71
4.2.3	Principe d'équivalence d'Einstein .....	71
4.2.4	Équivalence locale entre gravitation et accélération .....	72
4.3	Systèmes de référence équivalents .....	72
4.3.1	Critique des fondements de la mécanique classique .....	72
4.3.2	Principe de relativité généralisée .....	73
4.3.3	Une idée audacieuse .....	73
4.4	Nécessité d'une géométrie non euclidienne .....	74
4.4.1	Système de référence en rotation .....	74
4.4.2	Décalage gravitationnel .....	75
4.4.3	Courbure des rayons lumineux .....	75
4.4.4	Systèmes de référence non inertiels .....	76
4.5	Principe de relativité généralisé .....	76
4.5.1	Espace non euclidien : surface sphérique à deux dimensions .....	77
4.5.2	Coordonnées curvilignes de Gauss .....	77
4.5.3	Covariance des lois de la nature .....	77
4.6	La matière-énergie déforme l'espace-temps .....	78
4.6.1	Le contenu de l'espace pourrait déterminer sa métrique .....	78
4.6.2	L'espace non euclidien de Poincaré .....	79
4.6.3	Chronogéométrie de l'espace-temps .....	79
4.6.4	La matière-énergie détermine la chronogéométrie de l'espace-temps .....	80
4.7	L'espace-temps riemannien .....	80
4.7.1	Courbure de l'espace-temps .....	81
4.7.2	Principe des géodésiques .....	81
4.8	Les équations d'Einstein .....	82
4.9	Exercices .....	83
<b>5.</b>	<b>ESPACES RIEMANNIENS .....</b>	<b>85</b>
5.1	Définition des espaces riemanniens .....	85
5.1.1	Notion de variété .....	85
5.1.2	Définition des espaces de Riemann .....	86
5.1.3	Métriques euclidienne et riemannienne .....	86
5.1.4	Propriétés des espaces de Riemann .....	87
5.2	Équation des géodésiques .....	87
5.2.1	Mouvement sans accélération .....	87
5.2.2	Transport parallèle .....	88
5.2.3	Extremum des chemins entre deux points .....	89

5.3	Transport parallèle .....	89
5.3.1	Transport parallèle dans l'espace euclidien .....	90
5.3.2	Transport parallèle dans l'espace riemannien .....	90
5.3.3	Transport parallèle infinitésimal .....	90
5.4	Tenseur de courbure .....	91
5.4.1	Détermination du tenseur de courbure .....	91
5.4.2	Composantes covariantes du tenseur de courbure .....	92
5.5	Propriétés du tenseur de courbure .....	93
5.5.1	Systèmes de coordonnées normales .....	93
5.5.2	Symétries du tenseur de courbure .....	94
5.5.3	Première identité de Bianchi .....	94
5.5.4	Composantes indépendantes .....	94
5.6	Courbure riemannienne scalaire .....	95
5.6.1	Tenseur de Ricci et scalaire de courbure .....	95
5.6.2	Seconde identité de Bianchi .....	96
5.6.3	Tenseur d'Einstein .....	96
5.7	Exercices .....	97
<b>6.</b>	<b>ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE .....</b>	<b>99</b>
6.1	Espace-temps à courbure riemannienne .....	99
6.1.1	La variété espace-temps $V_4$ .....	99
6.1.2	Métrique spatiale non euclidienne .....	100
6.1.3	Temps propre .....	100
6.1.4	Élément de distance spatiale .....	101
6.2	Principe d'équivalence .....	102
6.2.1	Métrique euclidienne tangente .....	102
6.2.2	Système inertiel local .....	103
6.3	Principe des géodésiques .....	103
6.3.1	Système différentiel des géodésiques .....	104
6.3.2	Approximation newtonienne .....	104
6.3.3	Propagation d'un rayon lumineux .....	106
6.4	Équations d'Einstein .....	106
6.4.1	Déformation de l'espace-temps de la relativité restreinte .....	106
6.4.2	Contraintes imposées aux équations d'Einstein .....	107
6.4.3	Les équations de la gravitation relativiste .....	108
6.4.4	« Rigidité » de l'espace-temps .....	109
6.4.5	Limite newtonienne .....	110
6.5	Champ de gravitation central symétrique .....	111
6.5.1	Champ à symétrie centrale dans le vide .....	112
6.5.2	Singularité de Schwarzschild .....	113
6.5.3	Champ à symétrie centrale à l'intérieur de la matière .....	113
6.6	Ondes gravitationnelles .....	114
6.6.1	Équations d'Einstein linéarisées .....	114
6.6.2	Propagation dans le vide .....	115
6.7	Exercices .....	117
<b>7.</b>	<b>VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES .....</b>	<b>119</b>
7.1	Avance du périhélie de Mercure .....	119
7.1.1	Insuffisance de la théorie newtonienne .....	119
7.1.2	Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild .....	120
7.1.3	Avance du périhélie des planètes .....	121

7.2	Déviatiion des rayons lumineux .....	122
7.2.1	Équation de la déviatiion d'un rayon lumineux .....	122
7.2.2	Déviatiion d'un rayon lumineux passant au voisinage du Soleil .....	124
7.2.3	Retards d'échos radar renvoyés par une planète .....	124
7.2.4	Mirages gravitationnels .....	125
7.3	Décalage gravitationnel de la fréquence d'un rayonnement .....	126
7.3.1	Décalage théorique d'une fréquence .....	126
7.3.2	Mesures du décalage gravitationnel .....	128
7.3.3	Système de positionnement GPS .....	128
7.4	Déclin de l'orbite d'un pulsar double .....	129
7.4.1	Émissions radio d'un pulsar .....	129
7.4.2	Pulsars binaires .....	130
7.4.3	Pulsar binaire PSR 1913+16 .....	130
7.5	Exercices .....	131
<b>8.</b>	<b>COSMOLOGIE .....</b>	<b>133</b>
8.1	La révolution cosmologique relativiste .....	133
8.1.1	L'Univers statique d'Einstein .....	133
8.1.2	Les univers non statiques .....	134
8.2	Espace homogène et isotrope .....	135
8.2.1	Hypothèse de l'espace homogène et isotrope .....	135
8.2.2	Métrique de l'espace isotrope .....	136
8.2.3	Espace isotrope à courbure positive .....	136
8.2.4	Espace isotrope à courbure négative .....	138
8.3	Univers isotrope fermé .....	138
8.3.1	Hypothèses simplificatrices .....	138
8.3.2	Métrique spatio-temporelle d'un univers fermé .....	139
8.3.3	Modèle d'univers fermé .....	140
8.4	Univers isotrope ouvert .....	140
8.5	Univers isotrope euclidien .....	141
8.6	Cosmographie d'univers en expansion .....	142
8.6.1	Des univers en expansion .....	142
8.6.2	La fuite des amas de galaxies .....	142
8.6.3	La constante de Lemaître-Hubble .....	143
8.7	Cosmogonie du « Gros Boum » .....	144
8.7.1	La création de l'Univers par Monseigneur Lemaître .....	144
8.7.2	Le scénario du « Gros Boum » .....	144
8.8	Une cosmologie en devenir .....	145
8.8.1	Topologie de l'Univers .....	145
8.8.2	Par delà l'au-delà .....	146
	<b>CORRIGÉS DES EXERCICES .....</b>	<b>149</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>173</b>
	<b>INDEX .....</b>	<b>175</b>