



Jean-Christophe Cuillière

# **Introduction à la méthode des éléments finis**

**Cours et exercices corrigés**

**2<sup>e</sup> édition**

**DUNOD**

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 • Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 La méthode des éléments finis	1
1.2 La pratique de la MEF	3
1.3 Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF	3
1.4 L'enseignement de la pratique de la MEF	4
1.5 Organisation de l'ouvrage	5
<b>Chapitre 2 • Rappels</b>	<b>7</b>
2.1 Notations utilisées	7
2.2 Rappels en élasticité linéaire	8
2.2.1 Tenseurs fondamentaux	8
2.2.2 Relations entre déplacements et déformations	9
2.2.3 Relations entre déformations et contraintes	10
2.2.4 Cas de l'élasticité plane	10
2.2.5 Formalisation d'un problème d'élasticité tridimensionnel	12
2.2.6 Énergie de déformation élastique	16
2.2.7 Théorème des travaux virtuels (déplacements virtuels)	16
2.2.8 Contraintes principales	17
2.2.9 Contrainte de Von-Mises	17
2.2.10 Rupture	18
2.3 Les transformations entre espaces de coordonnées	19
2.3.1 Principe	19
2.3.2 Matrice Jacobienne	19
2.3.3 Utilisation de la matrice Jacobienne	20
<b>Chapitre 3 • Approche directe-élément de barre</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction	29
3.2 Élément de barre	30
3.3 Modélisation matricielle	30
3.4 Applications	31
3.4.1 Première application	31
3.4.2 Deuxième application	34
3.5 Conclusion	35
<b>Chapitre 4 • Notions générales et interpolation nodale</b>	<b>37</b>
4.1 Notions générales	37
4.1.1 Introduction	37
4.1.2 Formulation intégrale	38



## Table des matières

4.1.3	Maillage	38
4.1.4	Utilité du maillage	39
4.1.5	Transformation en un système linéaire	39
4.1.6	Résolution du système linéaire	40
4.2	Types d'éléments finis	40
4.2.1	Introduction	40
4.2.2	Éléments à une dimension	42
4.2.3	Éléments à deux dimensions	42
4.2.4	Éléments à trois dimensions	43
4.3	Règles de maillage et raffinement de maillages	44
4.3.1	Règles générales	44
4.3.2	Raffinement de maillages	47
4.3.3	Raffinement adaptatif de maillages	47
4.4	Interpolation nodale sur l'élément réel	49
4.4.1	Introduction	49
4.4.2	Interpolation nodale	50
4.4.3	Extension de l'interpolation nodale à deux et trois variables	51
4.5	Interpolation nodale sur l'élément de référence	52
4.5.1	Principe des éléments de référence	52
4.5.2	Éléments de référence	53
4.5.3	Fonctions de forme	54
4.5.4	Interpolation sur l'élément de référence	58
4.5.5	Exemple d'un élément à une dimension linéaire	59
4.5.6	Éléments isoparamétriques	60
4.6	Interpolation nodale en base complète	61
4.6.1	Convergence de la solution de calcul par EF	61
4.6.2	Illustration par un exemple	62
4.6.3	Continuité de la solution	63
4.6.4	Continuité et convergence de la solution en EF	63
4.6.5	Continuité et convergence en élasticité	65
4.7	Forme particulière de la matrice Jacobienne	67
<b>Chapitre 5 • Intégration numérique</b>		<b>77</b>
5.1	Introduction	77
5.2	Intégration à une dimension	78
5.2.1	Introduction	78
5.2.2	Méthode de Gauss (Gauss-Legendre)	78
5.3	Intégration à deux dimensions	80
5.3.1	Introduction	80
5.3.2	Méthode produit	81
5.3.3	Méthode directe	82
5.4	Intégration à trois dimensions	84
5.4.1	Introduction	84
5.4.2	Méthode produit	84
5.4.3	Méthode directe	85
5.4.4	Intégration sur le pentaèdre de référence	86

<b>Chapitre 6 • Formulations intégrales</b>	<b>95</b>
6.1 Introduction	95
6.2 Schéma général de la MEF	96
6.3 Méthode des résidus pondérés - forme intégrale forte	97
6.3.1 Résidu	97
6.3.2 Forme intégrale forte	98
6.3.3 Forme intégrale forte en élasticité	98
6.4 Forme intégrale faible	99
6.4.1 Intégration par parties (une dimension)	99
6.4.2 Formules de Green à deux dimensions	99
6.4.3 Formules de Green à trois dimensions	100
6.4.4 Forme intégrale faible	101
6.5 Hypothèse de Galerkin	104
6.5.1 Introduction	104
6.5.2 Hypothèse de Galerkin	104
6.5.3 Propriétés de l'opérateur variation	104
6.5.4 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	105
6.5.5 Prise en compte des forces ponctuelles	106
6.6 Application à l'élément de barre	108
6.6.1 Introduction	108
6.6.2 Equation d'équilibre	109
6.6.3 Conditions aux limites	110
6.6.4 Forme intégrale forte	110
6.6.5 Forme intégrale faible	111
6.6.6 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	111
6.6.7 Forces ponctuelles : utilisation directe du théorème des travaux virtuels	112
<b>Chapitre 7 • Matrices de rigidité locales et vecteurs force locaux</b>	<b>119</b>
7.1 Découpage de la forme intégrale faible	119
7.2 Discrétisation de la forme intégrale faible (cas général)	120
7.2.1 Introduction de l'interpolation nodale	120
7.2.2 Matrice [B]	122
7.2.3 Matrice de rigidité locale et vecteur force local (cas général)	122
7.3 Discrétisation de la forme intégrale faible (élément de barre)	124
7.3.1 Découpage de la forme intégrale faible	124
7.3.2 Passage sur l'élément de référence	125
7.3.3 Introduction de l'interpolation nodale	126
7.3.4 Matrice de rigidité et vecteur force	127
7.3.5 Forme des matrices et vecteurs locaux sans passer par l'élément de référence	127
7.3.6 Forme particulière de l'équation (7-30)	129
<b>Chapitre 8 • Expansion assemblage résolution</b>	<b>131</b>
8.1 Représentation du maillage	131
8.1.1 Introduction	131
8.1.2 Table des nœuds	132



## Table des matières

8.1.3	Table de connectivité	132
8.2	Matrices de rigidité et vecteurs force locaux expansés	133
8.2.1	Principe	133
8.2.2	Vecteurs de localisation	135
8.2.3	Utilisation des vecteurs de localisation	136
8.2.4	Utilisation des matrices et vecteurs expansés	136
8.3	Matrice de rigidité globale et vecteur force global	137
8.3.1	Principe	137
8.3.2	Caractéristiques de la matrice globale	138
8.3.3	Minimisation de la largeur de bande	139
8.3.4	Exemple d'illustration (expansion et assemblage)	139
8.4	Résolution du système final – calcul des réactions	142
8.4.1	Système final	142
8.4.2	Particularités du système final	143
8.4.3	Méthode directe	144
8.4.4	Méthode du terme diagonal pénalisé	144
8.4.5	Méthode du terme diagonal unité	145
8.4.6	Cas particulier : déplacements imposés nuls	146
8.5	Expansion-assemblage-résolution (éléments de barre)	147
8.5.1	Introduction	147
8.5.2	Application à un cas pratique	147
	<b>Chapitre 9 • Application à l'élasticité linéaire</b>	<b>165</b>
9.1	Application de la forme générale à un élément de barre	165
9.1.1	Introduction	165
9.1.2	Calcul de la matrice [H]	166
9.1.3	Calcul de la matrice [B]	166
9.1.4	Calcul de la matrice [N]	167
9.1.5	Calcul des matrices de rigidité locales et vecteurs force locaux	167
9.2	Éléments de poutre	168
9.2.1	Élément de poutre en flexion uniquement	168
9.2.2	Élément de poutre en tension et flexion combinées	187
9.3	Extension des formulations en 2D et en 3D	190
9.3.1	Introduction	190
9.3.2	Passage en 2D	191
9.3.3	Passage en 3D	193
9.3.4	Exemple d'application	194
9.4	Élément triangulaire linéaire en contraintes planes	198
9.4.1	Introduction	198
9.4.2	Calcul de la matrice [H]	199
9.4.3	Calcul de la matrice [B]	200
9.4.4	Calcul de la matrice [N]	202
9.4.5	Calcul de la matrice de rigidité locale	202
9.5	Élasticité tridimensionnelle	204
9.5.1	Introduction	204
9.5.2	Maillage et discrétisation de la forme intégrale	205
9.5.3	Introduction de l'élément de référence	205
9.5.4	Matrice [B]	206

9.5.5	Matrice de rigidité locale et vecteur force local	208
9.5.6	Application à l'élément tétraédrique linéaire	209
9.6	Calcul d'extrapolation des efforts répartis aux nœuds	211
9.6.1	Introduction	211
9.6.2	Force volumique sur un élément 1D	211
9.6.3	Pression sur un triangle linéaire en 2D	213
9.6.4	Pression sur plusieurs triangles linéaires en 2D	215
9.6.5	Extrapolation d'une pression pour des éléments de degré plus élevé	217
<b>Chapitre 10</b>	<b>Utilisation pratique de la méthode des éléments finis</b>	<b>239</b>
10.1	La pratique de la MEF	239
10.1.1	Introduction	239
10.1.2	Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF	240
10.1.3	Les sources d'erreur dans l'utilisation pratique de la MEF	240
10.2	Le processus d'utilisation pratique de la MEF	241
10.2.1	Les étapes d'un calcul pratique par EF	241
10.2.2	L'analyse préliminaire	242
10.2.3	L'adaptation du modèle CAO de produit	243
10.2.4	La détermination d'un modèle EF	251
10.2.5	Calcul	256
10.2.6	Analyse des résultats	256
10.2.7	Raffinement et modification du modèle EF	259
10.2.8	Utilitaires divers	261
<b>Annexe 1</b>		<b>263</b>
<b>Annexe 2</b>		<b>277</b>
<b>Annexe 3</b>		<b>283</b>
<b>Index</b>		<b>285</b>