

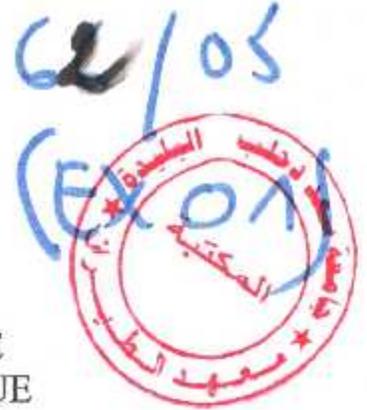
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université « SAAD DAHLEB » de BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Aéronautique



PROJET DE FIN D'ETUDES

**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE**

OPTION : PROPULSION

Thème :

**Approche numérique des écoulements au sein
d'une tuyère convergente divergente par la
méthode des différences finies**

Fait par :

M^r. BOUKHERROUBI Mokrane

M^r. SOUALAH Mustapha

Promoteur: M^r KALI El-Hadi

Co-promoteur: M^r AISSANI Mouloud

Promotion : 2004/2005

RESUME

Cette étude représente une contribution au domaine de simulation numérique des écoulements stationnaires bidimensionnels axisymétriques dans les tuyères en utilisant la méthode des différences finies technique de MacCormack de deuxième ordre en temps et en espace, appliquée à la résolution des équations d'Euler. Donc le but principal est de réaliser un programme de calcul permettant de simuler les différents paramètres de l'écoulement.

Après avoir écrit la formulation mathématique qui exprime les schémas aux différences finies pour les équations d'Euler en coordonnées généralisées avec une génération de maillage. Les résultats obtenus sont comparés avec le code VNAP2.

ABSTRACT

This study represents a contribution to the field of numerical simulation of the axisymmetric two-dimensional steady flows in the nozzles using finite difference method's and McCormack's technique of second order in time and space, applied to the resolution of Euler's equations. Therefore the main purpose is to realise a calculation program making the simulation of various flow parameters after having written mathematical formulation which expresses the finite difference scheme for Euler's equations in generalized coordinates with a generation of grid. The obtained results are compared with Vnap2 code.

REMERCIEMENTS

C'est une étape très délicate que celles des remerciements, il ne faut oublier personne, ne citer personne qui ne veuille l'être (pour une raison ou une autre), ne faire ni trop ni trop peu . . .

Tout d'abord, merci à *Dieu* le tout puissant de nous avoir donnés la force pour réaliser ce modeste travail.

Mes plus intenses remerciements vont bien entendu à **M^R KALI EL HADI** Magister à l'Institut d'aéronautique, qui a accepté d'encadrer notre travail, et qui a toujours su nous intéresser au plus haut point avec ses questions et ses commentaires, tout en nous laissant énormément de liberté, il a aussi beaucoup de mérite de nous avoir supporté tout ce temps, et sans oublier **M^R AISSANI Mouloud** notre co-promoteur pour son aide et conseils qui nous a prodigués.

Nous tenons à exprimer notre gratitude aux membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous témoignons notre sincère amitié à toutes les personnes qui nous ont aidé de près ou de loin et qui nous ont apporté leurs encouragements à la réalisation de cette thèse.

Merci...

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux êtres qui me sont très chers au monde mon père Arab et ma mère Fatma, je les remercie de tout mon cœur pour leurs amour, sacrifices et leurs encouragement.

A mon cher frère Hammimi qui m'a aidé et qui a toujours présent par ses conseils et ses orientations depuis mon petite enfance.

A ma sœur Azziza, son mari Belkacem ainsi qu'à la petite Yasmine et Rayane que j'aime énormément

A ma grande mère Bakhi et a mes oncles ainsi qu'a mes tantes

A la mémoire de ma grande mère Bakhi et mon oncle Dahmane et ma tante

A toute la promotion de propulsion 2005

A toute la famille Soualah

A mes cousins et amis Azziz, Samir, Hammouche, Mimoun, Khaled

A tous mes amis Abdenour, Bachir, Mustapha, Malek

,Antar, Ghani, Nacer, Karim, Zouhir, Karim chib, Kamel, laziz,

Hammouche Bouk

A la famille Boukhetroubi toute entière

FOR YOU AND FOR ME

Mokrane

Je dédie ce travail :

À mes très chers parents, mon père et ma mère, je les remercie pour leurs encouragements et leurs soutiens.

À ma très chère et unique sœur Karima.

À mes frères Arezki et son épouse Chahrazed, Hamid et sa femme Karima, Karim, Farid. Sans oublier les trois coucous Imene, Houda et Anis.

À toutes les Familles : Scualah, Messari, Fehetah, Chachoua, Meghzi, Temim, Ainsi que la Famille de mon ami Boukherroubi.

À mon très cher ami Kamel qui m'a aidé infiniment pendant tous mon cursus universitaire avec ses conseils très importants.

À tout mes amis de près ou de loin surtout Amina, Mokrane, Aziz, Abdesslam, Malek Madjid, B. Mouloud, Wahid, Meghzi, B. Mohamed, Yaficou Aek, Massinissa, Kahina, Yasmina, Bachir, Kenza, Samira, Nabila et Adel, Amel, Hayet.

À tout mes amis du bloc 2.

MUSTAPHA

SOMMAIRE

	<i>Page</i>
INTRODUCTION GENERALE	01
 CHAPITRE I : Généralités sur les tuyères de propulsion	
I.1 Introduction	03
I.2 Définition d'une tuyère	03
I.3 Forme géométrique d'une tuyère supersonique.....	05
I.4 Domaines d'utilisation des tuyères	07
I.5 Etude d'une tuyère CV-DV.....	09
I.6 Différents types de tuyères	10
I.6.1 La tuyère conique	10
I.6.2 Tuyère à contour profilé	11
I.6.3 Tuyère annulaire.....	12
I.6.4 Les tuyères auto-adjustables	12
a. La tuyère type bouchon	12
b. La tuyère type détente déviation.....	13
I.7 Principaux paramètres de performance	14
I.7.1 la poussée.....	14
I.7.2 Le coefficient de poussée	14
I.7.3 Le coefficient de décharge.....	15
I.7.4 la vitesse effective	15
I.7.5 l'impulsion spécifique	15
 CHAPITRE II : Formulations mathématiques	
II.1 Introduction.....	16
II.2 Hypothèses	17
II.3 Formulation mathématique des équations d'Euler	17
II.3.1 Formulation conservative des équations d'Euler.....	18
II.3.1.1 Système en coordonnées cartésiennes	18
II.3.1.2 Matrice jacobienne de variables conservatives.....	19
II.3.1.3 Matrice Jacobienne des variables primitives.....	21
II.3.1.4 Matrice de passage de la forme conservative à la forme primitive.....	24

II.3.2 Formulation caractéristique des équations d'Euler et les valeurs propres.....	26
II.3.2.1 Détermination des valeurs propres de la matrice Jacobienne \vec{A}	26
a. Pour le cas monodimensionnel	27
b. Pour le cas bidimensionnel	27
II.3.2.2 Détermination des vecteurs propres \vec{t} de la matrice jacobienne \vec{A}	28
II.4 Transformation des équations en coordonnées généralisées.....	30
II.5 Conditions aux limites	32
II.5.1 A l'infini amont (entrée subsonique).....	33
II.5.2 A la paroi	34
II.5.3 L'axe de symétrie de la tuyère.....	36
II.5.4 La sortie supersonique.....	36

CHAPITRE III : Discrétisation et résolution numérique

III.1 Introduction.....	38
III.2 Technique de MacCormack.....	38
III.3 Schéma de MacCormack au cas bidimensionnel (2D).....	39
III.4 Analyse linéaire de la stabilité du schéma	40
III.5 Traitement des noeuds internes	42
III.5.1 Méthode par prédiction.....	42
III.5.2 Méthode par correction.....	44
III.6 Traitement des noeuds externes.....	45
III.6.1 Entrée de la tuyère	46
III.6.2 Axe de la tuyère.....	47
a- Etape predicteur.....	47
b- Etape correcteur	48
III.6.2 Paroi de la tuyère	49
a- Etape predicteur.....	50
b- Etape correcteur	50
III.6.3 Sortie de la tuyère.....	51
III.7 Génération du maillage	51
III.7.1 Technique des deux parois.....	52

CHAPITRE IV : Résultats et interprétations

IV.1 Introduction.....	53
------------------------	----

	<i>Page</i>
IV.2. Description du code vnap2.....	53
IV.2.1 L'algorithme du code VNAP2.....	53
IV.3 Description du programme de calcul.....	54
IV.3.1 Donnés du programme de calcul	54
IV.3.1.a Données thermodynamiques	54
IV.3.1.b Données géométriques.....	54
IV.3.3 Résultats.....	55
IV.3.3.1 Maillage	55
IV.3.3.2 Répartition du nombre de Mach sur l'axe de symétrie et la paroi	57
IV.3.3.3 Répartition de la pression sur l'axe de symétrie et sur la paroi	59
IV.3.3.4 Graphes des iso-machs et des isobares	60
IV.3.3.5 Performances de la tuyère	62

CONCLUSION GENERALE..... 63

LES ANNEXES

ANNEXE A..... 66

ANNEXE B..... 73

ANNEXE C..... 80

REFERENCES

LISTE DES FIGURES

	<i>Page</i>
Fig. 1.1 Profils des tuyères.....	04
-a : tuyère simplement convergente.....	04
-b : tuyère convergente divergente (de-laval).....	04
Fig. 1.2 Différentes formes géométriques des tuyères.....	04
-a tuyère plane.....	04
-b tuyère axisymétrique.....	04
Fig. 1.3 Ecoulement quasi-dimensionnel.....	06
Fig. 1.4 Volume de contrôle pour un écoulement quasi-linéaire.....	06
Fig. 1.5 Contour d'une tuyère supersonique.....	07
Fig. 1.6 les tuyères d'un avion de combat.....	07
Fig. 1.7.1 les tuyères d'une fusée.....	08
Fig. 1.7.2 Les tuyères d'orientations dans une navette spatiale.....	08
Fig. 1.8 Courbe Aire -nombre de mach.....	10
Fig. 1.9 Tuyère conique.....	11
Fig. 1.10 Tuyère à contours profilés.....	11
Fig. 1.11 Tuyère annulaire.....	12
Fig. 1.12 Tuyère type bouchon.....	13
Fig. 1.13. Tuyère type détente déviation.....	13
Fig. 2.1 Domaine de calcul.....	31
Fig. 2.2 représentation des lignes caractéristiques à l'entrée subsonique.....	33
Fig. 2.3 Surface frontière : entrée subsonique dans le cas bidimensionnel.....	34
Fig. 2.4 Surface frontière : la paroi solide dans le cas bidimensionnel.....	35
Fig. 2.4.a Direction des vitesses de l'onde acoustique à la paroi.....	35
Fig. 2.4.b Propagation des caractéristiques à la paroi.....	35
Fig. 2.5 Surface frontière : sortie supersonique dans le cas bidimensionnel.....	37
Fig. 3.1 Cellule d'intégration C_i pour le schéma de MacCormack.....	40
Fig. 3.2 Grille des différences finies pour les points frontières.....	50
Fig. 3.3 Canal bidimensionnel courbé.....	52
Fig. 4.1 Géométrie d'une tuyère conique CV-DV axisymétrique.....	55

Fig. 4.2 Le maillage simple de la tuyère (N=21, M=8)	56
Fig. 4.3 Maillage raffiné au col et à la paroi (N=41, M=15)	56
Fig. 4.4 Le domaine de calcul pour un maillage non raffiné (N=21, M=8).....	57
Fig. 4.5 Le nombre de mach sur l'axe	58
Fig. 4.6 Le nombre de Mach sur la paroi.....	58
Fig. 4.7 La pression sur l'axe de symétrie	59
Fig. 4.8 La pression sur la paroi.....	60
Fig. 4.9 Champ des isoMachs à l'intérieur d'une tuyère	61
Fig. 4.10 Champ des isobares à l'intérieur d'une tuyère	62
Tableau 4.1 Comparaison des principaux paramètres de performance de la tuyère avec le code vnap2.....	62

NOMENCLATURE

1. Système de coordonnées

- x : Coordonnée axiale
 y : Coordonnée radiale
 ξ, η : Coordonnées généralisées

2. Lettres latines

- \vec{A} : Vecteur Matrice jacobienne des variables conservatives
 A, B : Composantes de la matrice vecteur \vec{A}
 \tilde{A} : Vecteur Matrice jacobienne des variables primitives
 \tilde{A}, \tilde{B} : Composantes de la matrice vecteur \tilde{A}
 A, A^* : Section circulaire, section critique
 A_c : Section au col
 C : Célérité du son
 C_+, C_-, C_0 : Caractéristique montante, descendante, ligne du courant
 C_D : Coefficient de décharge
 C_F : Coefficient de poussée
 c_p, c_v : Chaleur spécifiques à pression et à volume constant
 E : Energie interne totale par unité de masse
 H : Enthalpie
 S : Entropie
 F : La poussée
 \vec{F} : Vecteur flux
 f, g : Composantes de vecteur flux
 g : Accélération de la pesanteur
 I : matrice unité
 I_s : Impulsion spécifique

- K : Matrice jacobienne des variable conservatives
 \tilde{K} : Matrice jacobienne des variables primitives
 \vec{k} : Normale à la surface caractéristique
 k_x, k_y : Composantes de vecteur k
 M : Matrice de passage des variables conservatives aux variables primitives
 M^{-1} : Matrice inverse de M
 L : Matrice de passage des variables primitives aux variables caractéristiques
 L^{-1} : Matrice inverse de L
 P : Matrice de passage des variables conservatives aux variables caractéristiques
 P^{-1} : Matrice inverse de P
 \vec{i} : La tangente
 M : Nombre de Mach
 \dot{m} : Débit massique
 \vec{n} : Normale dirigé à l'intérieur du domaine de calcul
 P : Pression statique
 P_0 : Pression ambiante
 P_t : Pression totale
 T : Température statique
 T_0 : Température ambiante
 T_t : Température totale
 ρ : Densité
 \vec{Q} : Vecteur regroupant les sources extérieurs
 r : Constante des gaz parfaits
 r_{AB}, r_{DC} : Abscisses curvilignes
 r_i : Rayon de la section d'entrée

- r_e : Rayon de la section de sortie
- r_t : Rayon de la section au col
- r_{ci} : Rayon de courbure à l'entrée
- r_{ct} : Rayon de courbure au col
- S : Fonction de condensation
- t : Temps
- \vec{V} : Vecteur vitesse
- u : Composante axiale de la vitesse
- v : Composante radiale de la vitesse
- U : Ensemble des variables conservatives
- V : Ensemble des variables primitives
- u^e, v^e : Composantes contra variantes de la vitesse
- V_n : Vitesse normale
- V_{eff} : Vitesse effective
- W : Ensemble des variables
- Y_w : Polynôme définissant la paroi de la tuyère

3. Lettres grecques

- α, β, w : Paramètres métriques de la transformation du domaine physique
- Γ : Frontière du domaine du calcul
- λ : Valeurs propres
- \vec{l} : Vecteurs propres

4. Indices

- $0, a$: Ambient
- t : Totale
- S : Sortie
- i, j : Indices d'un nœud de maillage

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les progrès rapides observés durant ces dernières années dans le domaine de la propulsion en général, et plus spécialement de la propulsion aérothermique sont étroitement associés aux efforts effectués pour rendre toujours plus précise l'analyse des phénomènes aérothermodynamiques dans le circuit moteur. Cette remarque s'applique particulièrement à l'étude de l'écoulement dans des tuyères et à leurs sorties.

Les tuyères constituent un des éléments les plus importants dans les turbomachines. Avec le développement du domaine aéronautique et le besoin d'atteindre des vitesses supersoniques, le calcul des caractéristiques aérodynamiques des tuyères est devenu primordial. Celles-ci sont très importantes dans la conception et l'analyse du régime de fonctionnement des turbomachines. Diverses méthodes sont utilisées pour le calcul des caractéristiques aérodynamiques :

- méthodes analytiques
- méthode expérimentale
- méthode numérique CFD (computational fluid dynamics)

Pendant longtemps la tuyère a été considérée, principalement à cause de sa simplicité comme un organe annexe dont le rôle consiste essentiellement à assurer le fonctionnement du moteur à un régime donné grâce à une adaptation convenable de sa forme géométrique. Au fur du temps, ces méthodes de calcul avaient évoluées permettant actuellement de répondre à cette condition avec une précision satisfaisante. L'événement du vol supersonique ajouté à d'autres demandes a provoqué un changement d'attitude conséquent chez les constructeurs dont l'introduction de formes de tuyères assurant des détentes supersoniques des gaz de combustion (forme CV-DV dite De Laval) contrairement au début des vols supersoniques où l'emploi d'une section divergente était pratiquement proscrit à cause des régimes de sur détente qu'il provoque aux vitesses modérées.

Le présent travail est consacré à l'étude des écoulements dans des tuyères supersoniques CV-DV, il est initié grâce à une présentation de la théorie, des applications et des paramètres de performance inhérents à ce genre de géométrie qui est intégrée au premier chapitre.

Le second chapitre est consacré à la modélisation des écoulements au niveau d'une tuyère CV-DV

Pour cela l'obtention du modèle mathématique nous amène à la résolution des équations qui décrivent cet écoulement. La détente des gaz de combustion au sein d'une tuyère De Laval se réalise en trois étapes. La première en régime subsonique, la seconde en régime sonique et la dernière en régime supersonique.

Une solution directe pour les trois types d'écoulement est difficile à obtenir du fait de leur comportement qui diffère d'un type à l'autre, ce dernier étant directement lié à la nature du modèle mathématique ainsi qu'aux schémas numériques.

Une solution intéressante pour ce type de problème consisterai à l'introduction du facteur temps dans les équations qui leurs permettent de prendre une forme hyperbolique. Cette manière de procéder entraîne certaines restrictions d'ordre numériques telle que le choix du pas dont dépend la stabilité du processus numérique. Un autre désavantage de cette approche est représenté par l'obtention de la convergence vers l'état stationnaire après un important nombre d'itération entraînant une augmentation des temps du calcul et nécessitant malgré un choix judicieux du vecteur initial. Le développement de cette procédure ainsi que son application sont présentées dans le chapitre III

Le 4^{ème} chapitre s'intéressera à l'application de ces approches citées aux chapitres II et III à une tuyère supersonique de-laval, ainsi que l'interprétation des résultats obtenus par le programme de calcul.

Finalement une conclusion générale sur cette étude.

Chapitre I

Généralités sur les tuyères de propulsion

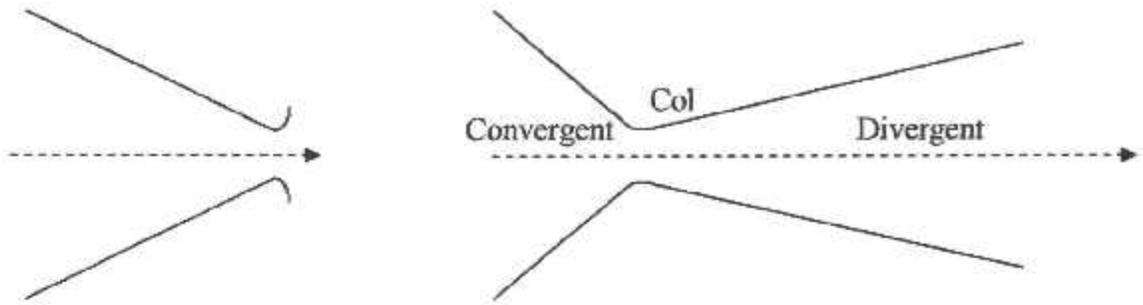
I.1 Introduction

La poussée d'un moteur à réaction dépend essentiellement de la quantité de mouvement impartie aux produits de combustion par leurs décharges à travers une tuyère d'éjection. Durant leurs passages à travers cette dernière, les gaz sont continuellement accélérés à partir des vitesses faiblement subsoniques à des vitesses fortement supersoniques. Le débit massique traversant la tuyère est déterminé par l'aire de la section d'entrée et les conditions de fonctionnement de la chambre de combustion. La vitesse subsonique atteinte par les gaz est fixée par les conditions de la chambre de combustion. Elle peut être davantage augmentée par la détente des gaz dans les parties convergente divergente de la tuyère. Cette vitesse additionnelle, et par conséquent le taux d'augmentation de la poussée dépend uniquement de la configuration de la tuyère.

I.2 Définition d'une tuyère

Une tuyère est un organe mécanique passif qui met en communication deux réservoirs à des pressions différentes, elle constitue un des éléments les plus importants dans les turbomachines et les turboréacteurs ; d'ailleurs 40 % de la poussée totale de ces derniers est produite par les tuyères.

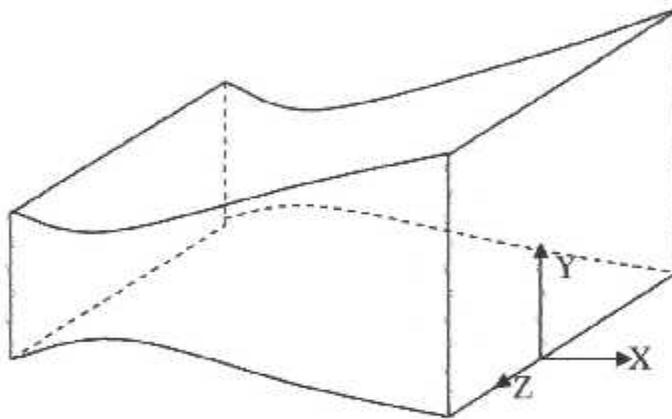
Selon le taux de détente, les tuyères seront soit simplement convergente (Fig. 1.1.a) pour les taux de détente élevés, sinon seront convergente divergente (Fig. 1.1.b), selon la géométrie on trouve des tuyères à géométrie plane (Fig. 1.2.a) ou axisymétrique (Fig. 1.2.b).



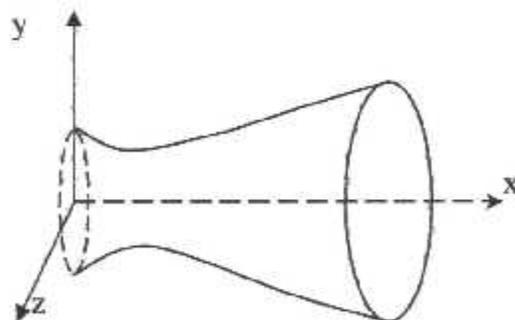
-a : tuyère simplement convergente

-b : tuyère convergente divergente (de-laval)

Fig. 1.1 profils des tuyères



-a- tuyère plane



-b- tuyère axisymétrique

Fig.1.2 Différentes formes géométriques des tuyères.

I.3 Forme géométrique d'une tuyère supersonique

Considérons l'écoulement au sein d'un conduit ayant une variation de la section telle qu'on peut simuler que la vitesse n'a qu'une composante axiale (**fig.1.3**). Cet écoulement est appelé écoulement quasi unidimensionnel.

L'application des équations de conservation à l'élément de volume de ce conduit représenté en (**fig. 1.4**) permet d'aboutir à la relation suivante:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) reliant les variations de la section « dA » et de la vitesse « du » est appelée la relation aire vitesse. Elle nous informe que :

a- pour $0 \leq M \leq 1$ correspondant à un régime subsonique, toute diminution de la vitesse résulte en une augmentation de la section et vis versa. Il en résulte donc que pour un écoulement subsonique, l'augmentation de la vitesse est assujettie à l'utilisation d'un convergent.

b- Pour $M = 1$ correspondant à un régime sonique, l'équation (1.1) montre que $dA=0$ pour « du » finie. Mathématiquement, $dA=0$ correspond à un extremum représenté dans ce cas par la section minimale.

c- Pour $M > 1$ correspondant à un régime supersonique, une augmentation de la vitesse entraîne une augmentation de la section et réciproquement. Il en résulte que l'accélération d'un écoulement supersonique est inhérente à l'utilisation d'un divergent et sa décélération à un convergent.

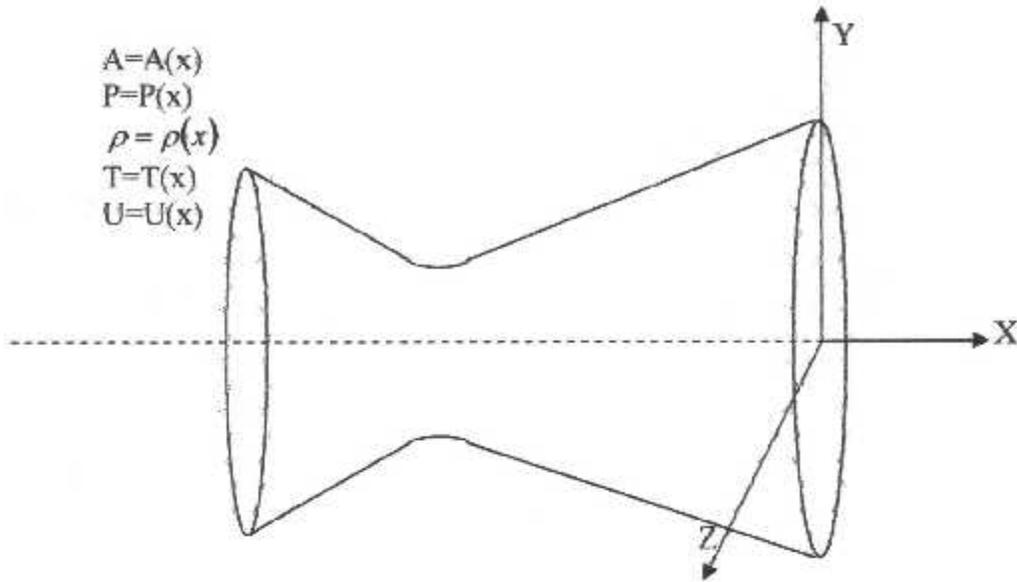


Fig. 1.3 : Ecoulement quasi-dimensionnel

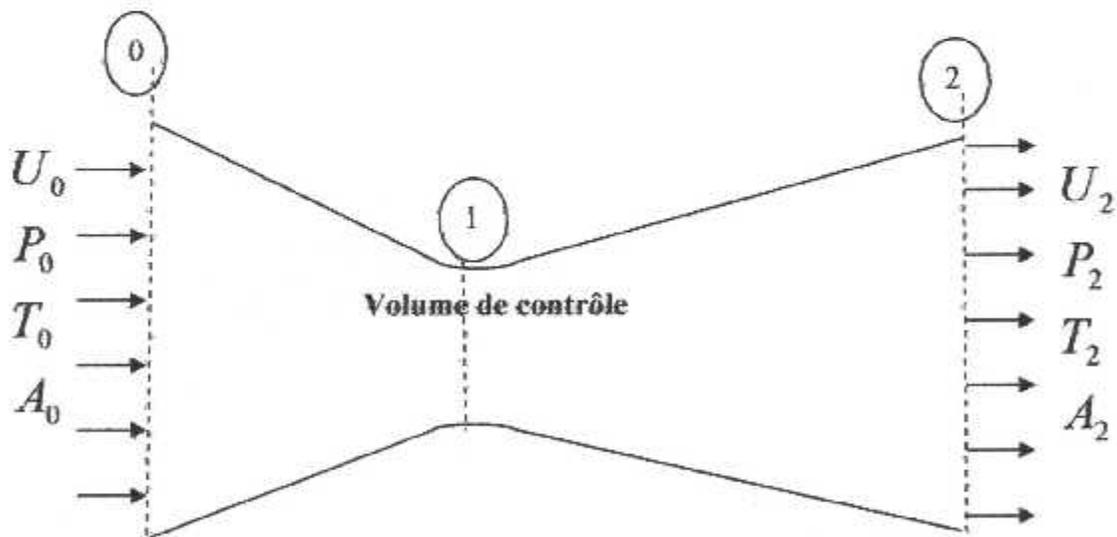


Fig. 1.4 : Volume de contrôle pour un écoulement monodimensionnel

Finalement, les remarques précédentes nous amènent à conclure que la forme géométrique d'une tuyère conçue pour détendre un gaz d'un régime subsonique à des régimes supersoniques possède obligatoirement une géométrie convergente divergente telle que celle représentée en (fig.1.5)

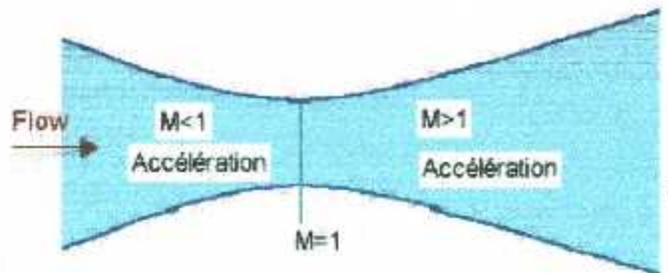


Fig.1.5 Contour d'une tuyère supersonique

I.4 Domaines d'utilisation des tuyères

Les tuyères sont généralement utilisées dans deux importants secteurs l'aéronautique et l'aérospatial, pour le premier cette utilisation s'est renforcée après le développement des moteurs à réactions **fig. 1.6** et pour le deuxième on distingue deux types : les tuyères de grandes dimensions qui servent à propulser les fusées **fig. 1.7** et celles de petites dimensions qui permettent la correction de l'orbite ou pour contrôler leurs orientations dans l'espace **fig. 1.8**, cette utilisation ne se résume pas la ,mais elle s'élargit aussi dans le domaine militaire tels que les missiles.



Fig.1.6 Tuyères d'un avion de combat

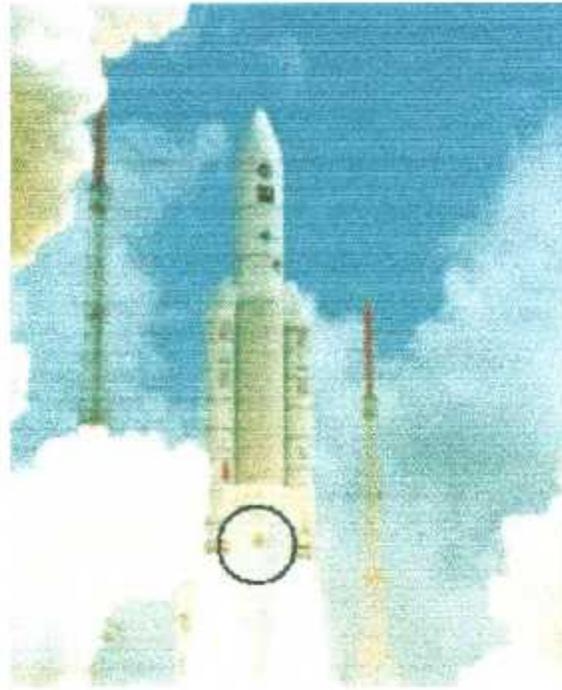


Fig.1.7.1 Les tuyères d'une fusée

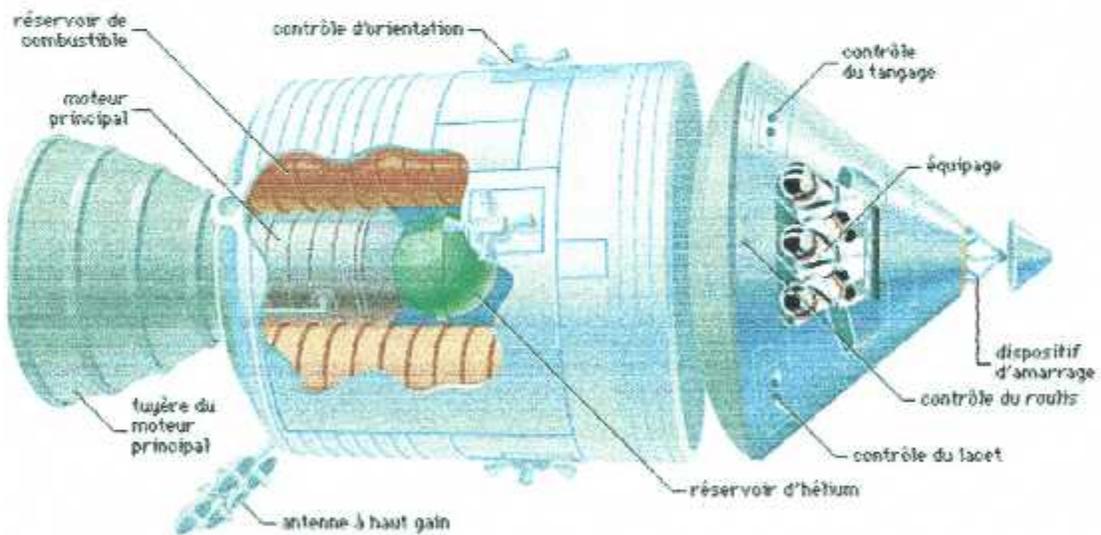


Fig.1.7.2 Les tuyères d'orientations dans une navette spatiale

1.5 Etude d'une tuyère CV-DV

Considérons une tuyère convergente- divergente (**fig. 1.5**)

Nous admettons que la section d'entrée est d'aire assez grande pour qu'on puisse supposer qu'il existe encore, dans cette section les conditions de réservoir P_t, T_t, ρ_t

A la section de sortie d'aire A_s , la pression est désignée par P_s .

L'écoulement ne peut qu'être subsonique dans le convergent. Si au col la vitesse encore inférieure à la célérité du son, l'écoulement est encore subsonique dans le divergent. En effet pour que l'écoulement devienne supersonique, il faudrait diminuer la pression régnante en amont de la tuyère. La vitesse est donc inférieure à la célérité du son dans la tuyère, la valeur maximale de cette vitesse étant la vitesse au col.

Le débit au col est donné par la relation suivante :

$$\dot{m} = \rho^* u^* A^* \quad (1.2)$$

Tel que (*) désigne le col

La relation qui relie le nombre de mach avec le rapport des sections de la tuyère à la section au col A^* (dans la théorie monodimensionnelle), est une relation très importante:

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (1.3)$$

L'allure de cette relation est représentée dans la (**fig. 1.8**), montre qu'il y a un minimum au col.

(Pour $\frac{A}{A^*} = 1, M=1$), ce minimum sépare le régime subsonique de régime supersonique

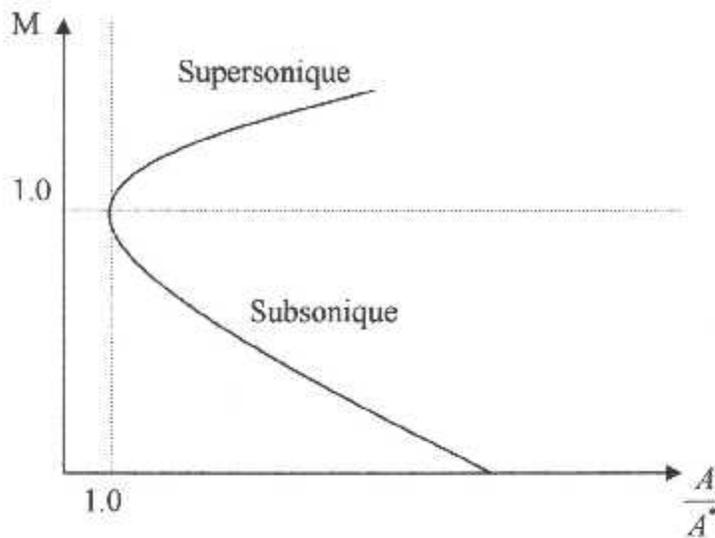


Fig. 1.8 Courbe Aire -nombre de mach

1.6 Différents types de tuyères

Le choix approprié d'une tuyère pour un moteur dépend essentiellement des méthodes de la fabrication de ses parois, des limites dimensionnelles de son poids et de l'influence de ce dernier sur les performances globales du moteur etc....

Les différents types des tuyères les plus utilisées sont :

1.6.1 la tuyère conique

Du point de vue construction, ce type de tuyère est le plus simple. Il est représenté en (Fig. 1.9). Étant donné que l'obtention d'une poussée maximale est conditionnée par un écoulement axial à la section de sortie, cette tuyère conique ne peut répondre à cette condition. Des pertes de poussée dues à la divergence de l'écoulement à la sortie sont toujours présentées. Elles sont plus importantes si l'angle du divergent est important.

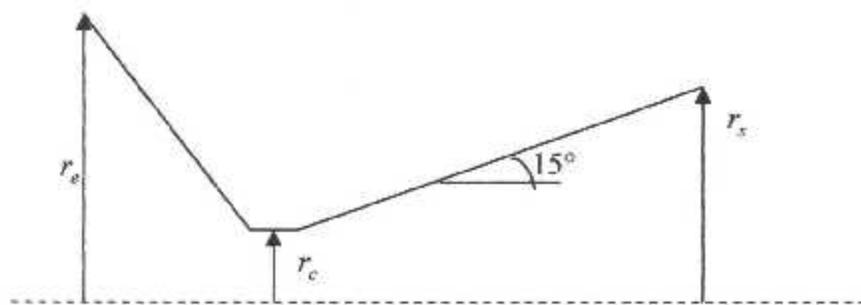


Fig. 1.9 Tuyère conique

I.6.2 Tuyère à contour profilé

Dans le cas d'une telle géométrie, il est possible de donner une valeur relativement importante à l'angle de divergent situé près du col permettant ainsi la réalisation d'une importante détente (Fig. 1.10).

La seconde partie du divergent due à sa forme courbée tend à faire suivre l'écoulement en une direction axiale limitant ainsi les pertes de poussée dues à la divergence rencontrée avec la tuyère conique.

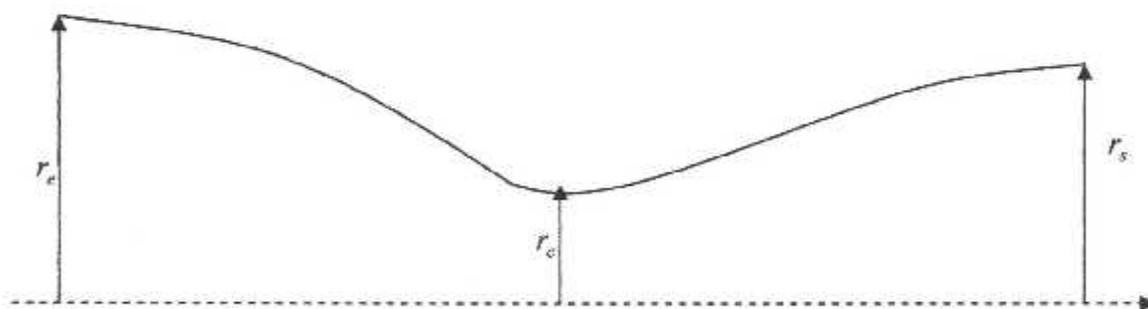


Fig. 1.10 Tuyère à contours profilés

1.6.3 Tuyère annulaire

Dans les deux types de tuyères cités précédemment, les formes de sections au col et à la sortie circulaire sont normales à l'axe. La tuyère annulaire diffère de ces contours en présentant des sections au col en forme d'anneau. Les gaz de combustion en aval de ce col se détendent au sein de ces anneaux et le long de la section divergente (Fig. 1.11).

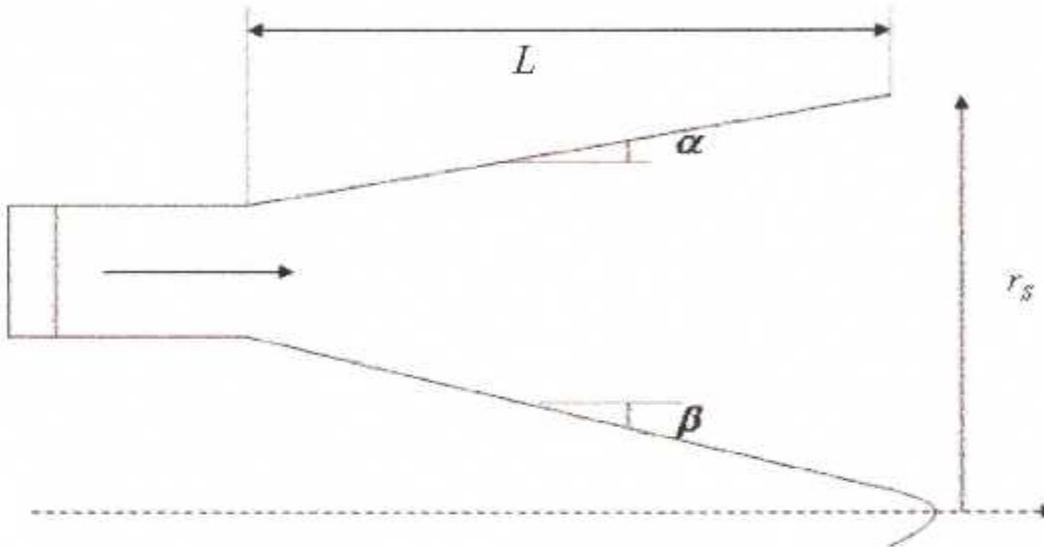


Fig. 1.11 Tuyère annulaire

1.6.4 Les tuyères auto-adjustables

Dans tous les cas de tuyères citées, le paramètre pression ambiante n'a pas d'influence directe sur le processus de détente des gaz. Dans le cas des tuyères auto-adjustables, le processus de détente est régulé par la pression ambiante. Ce type de tuyères est généralement classé en deux catégories : les tuyères type bouchon et les tuyères type détente déviation

a- La tuyère type bouchon

Le col de ce type de tuyère possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur (fig. 1.12). L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression dans la chambre de combustion jusqu'à la pression ambiante.

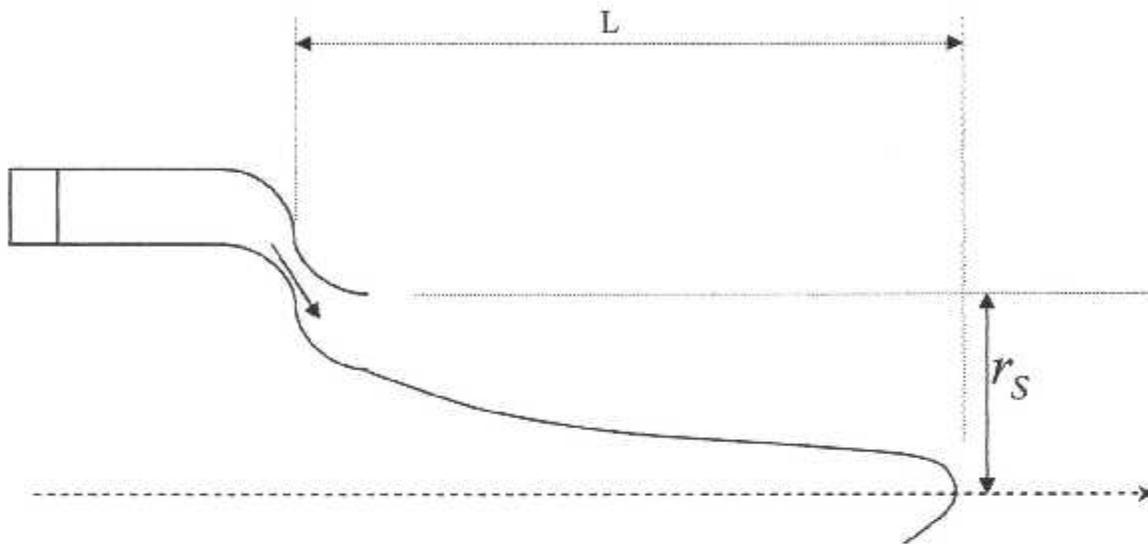


Fig. 1.12 Tuyère type bouchon

b- La tuyère type détente déviation

Ce type de tuyère est caractérisé par la présence d'un obstacle situé près du col et obligeant l'écoulement des gaz de combustion qui sont en train de se détendre à des vitesses supersoniques à dévier sa direction vers l'extérieur (fig. 1.13).

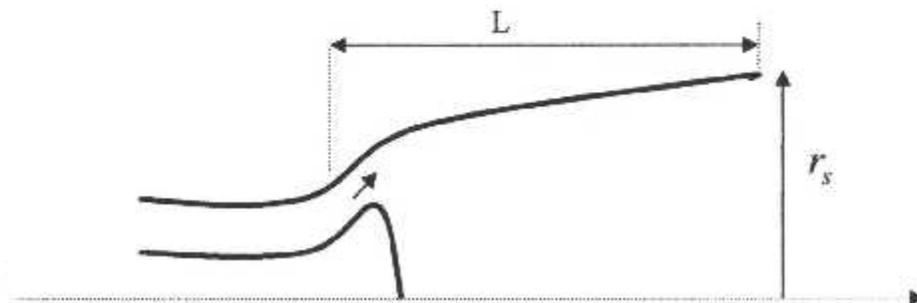


Fig. 1.13 tuyère type détente déviation

1.7 Principaux paramètres de performance

1.7.1 la poussée

La poussée délivrée par une tuyère est fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion mais de la différence entre la pression à la sortie et celle ambiante. L'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvement permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire de rayon dy

$$df = [\rho V_s + (p_s - p_0)] 2\pi \cdot y \, dy \quad (1.4)$$

La poussée totale est déterminée par intégration de l'équation précédente sur la section de sortie de la tuyère, il en résulte :

$$F = \pi \cdot \sum_i [\rho V_{S_i} + (P_{S_i} - P_0)] [Y_{S_{i+1}}^2 - Y_{S_i}^2] \quad (1.5)$$

1.7.2 Le coefficient de poussée

Ce paramètre sans dimension s'exprime

$$C_f = \frac{F}{P_t \cdot A_e} \quad (1.6)$$

Le dénominateur de l'équation est composé par le produit de P_t qui est la pression totale à la sortie de la chambre de combustion et de A_e qui est l'aire de la section à l'entrée. Ces deux paramètres représentent respectivement la chambre de combustion et l'écoulement subsonique. Ce rapport peut donc être considéré comme représentatif de la performance du contour de la tuyère.

1.7.3 Le coefficient de décharge

A cause principalement des effets de viscosité, les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celles déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique idéal. Le coefficient de décharge exprime cette différence et s'écrit ;

$C_d = \text{Le débit actuel réel} / \text{Débit isentropique}$

1.7.4 la vitesse effective

La vitesse effective V_{eff} est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie par comme le rapport de la poussée par le débit massique :

$$V_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (1.7)$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

1.7.5 L'impulsion spécifique I_s

Est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique et de l'accélération de la pesanteur :

$$I_s = \frac{F}{\dot{m} g} \quad (1.8)$$

C'est un paramètre généralement utilisé pour comparer les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

Chapitre II

Formulations mathématiques

II-1 Introduction

La description mathématique d'un fluide compressible en mouvement se fait à l'aide des fonctions donnant la distribution du vecteur vitesse (ayant trois composantes dans le cas 3D) et de deux quantités thermodynamique quelconque telle que la pression P et la densité ρ . Donc l'état thermodynamique d'un fluide compressible se caractérise en chaque point de l'espace, et à tout instant par quatre fonctions; la pression P , la densité ρ , le vecteur vitesse \vec{V} et l'énergie E .

Ces quatre fonctions sont des solutions du système d'équation formé par des lois classiques de **conservation de masse**, de **quantité de mouvement** et de **l'énergie** E.

Les modèles mathématiques des différentes approximations de l'écoulement d'un fluide peuvent être classés en deux catégories; les systèmes dits de premier ordre et ceux dits de deuxième ordre. Les propriétés mathématiques de ces systèmes sont directement liées aux propriétés physiques. Cependant, il est généralement considéré que chaque configuration est le résultat d'un bilan entre les flux convectifs et les flux diffusifs ainsi que les sources internes et externes, une approximation de l'écoulement n'étant qu'une estimation réalisée a priori relativement aux effets de ces différents flux et sources. D'un point de vue mathématique, les flux diffusifs sont représentés par des termes de dérivées de second ordre, conséquence de la loi générale de diffusion établie par Fick; d'autre part les flux convectifs apparaissent comme des termes dérivatifs du premier ordre exprimant la propriété de transport du système d'écoulement. Cependant chacune de ces contributions va influencer sur la nature mathématique des équations, particulièrement la forme elliptique, parabolique ou hyperbolique du système d'équation décrivant ce niveau d'approximation avant de présenter une description mathématique rigoureuse, il peut être utile pour illustrer ces liaisons.

II.2 Hypothèses

La forme la plus générale régissant les écoulements conservatifs des fluides non visqueux est décrite par l'ensemble des équations d'Euler, ceci est fait en admettant les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait (fluide non visqueux)
- Le fluide est assimilé à un gaz parfait
- Écoulement bidimensionnel (2D)
- Écoulement sans ondes de choc
- Le transfert de chaleur est négligeable
- Les forces de gravités négligeables
- le fluide est calorifiquement parfait
- Les gaz d'éjection sont à très haute température de l'ordre de 2000°K et on peut donc assurer qu'il n'y aura pas de réactions chimiques de dissociation des molécules.

II.3 Formulation mathématique des équations d'Euler

Le système d'équation de conservation des fluides non visqueux appelé équation d'Euler forme un système d'équation non linéaire couplée de premier ordre qui peut être écrit sous différentes formes. En effet la base physique de ce système est l'expression des lois universelles (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie).

Différentes formulations algébriques peuvent être définies selon le choix des variables dépendantes. Le vecteur des variables formé par la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale définit la forme conservative des équations. Ces paramètres sont par conséquent appelés les variables conservatives. Les variables telles que la densité, la vitesse et la pression sont appelées primitives, elles sont contrôlées expérimentalement et sont généralement imposées comme conditions aux limites physiques. En plus, sachant que le système d'équation d'Euler possède une nature hyperbolique par rapport au temps, des quantités se propageant le long des

caractéristiques peuvent être définies. Le système d'équation peut ainsi être transformé en une forme dite caractéristique.

II.3.1 Formulation conservative des équations d'Euler

Les lois de conservation d'un écoulement d'un fluide non visqueux à travers un volume de contrôle Ω entouré par une surface S sous forme intégrale [1].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.a).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} \, d\Omega + \oint_S (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p) \, d\vec{s} = \int_{\Omega} \rho \cdot \vec{f}_e \, d\Omega \end{array} \right. \quad (2.1.b).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E \, d\Omega + \oint_S \rho H \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \rho \cdot \vec{f}_e \cdot \vec{v} \, d\Omega \end{array} \right. \quad (2.1.c).$$

Avec \vec{f}_e : forces extérieures

$$H = E + \frac{p}{\rho}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{l} \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \vec{v} u = \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{l} \\ \rho \vec{v} H \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} \end{pmatrix}$$

Sous une forme condensée:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q \quad (2.2)$$

II.3.1.1 Système en coordonnées cartésiennes

L'équation (2.2) devient en coordonnées cartésiennes et en éliminant les forces extérieures.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Les composantes f, g de flux de tenseur \vec{F} sont

$$f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}$$

Les composantes cartésiennes de U sont :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}$$

Et l'équation (2.3) devient explicitement

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

II.3.2.1 Matrice jacobienne de variables conservatives

La forme quasi-linéaire des équations (2.2) et (2.4) sera écrite sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \right) \vec{\nabla} U = 0 \quad (2.5.a)$$

Où

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{A} \vec{\nabla} U = 0 \quad (2.5.b)$$

Ou sous forme explicite

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Ou A,B sont les deux matrices jacobiniennes de vecteur flux \vec{F} , qui peuvent être condensés en $\vec{A}(A, B)$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \quad (2.6.1)$$

Ayant des composantes A, B tel que

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} \quad B = \frac{\partial g}{\partial U}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v \\ -uv & v & u \\ -\gamma u E + (\gamma-1)\vec{v} & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv \end{vmatrix} \quad (2.6.2)$$

Et

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v \\ -\gamma v E + (\gamma-1)v\vec{v} & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) \end{vmatrix} \quad (2.6.3)$$

II.3.2.2 Matrice Jacobienne des variables primitives

Il est facile d'obtenir les valeurs propres du système d'équation d'Euler quant elle sont écrites sous la forme non conservative en fonction des variables primitives ρ , \vec{v} et P .

Donc on peut écrire les équations d'écoulement non visqueux en absence des sources de chaleur Q sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right. \quad (2.7.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2.7.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})E + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}p) = 0 \end{array} \right. \quad (2.7.3)$$

La dernière équation va être transformée à une équation qui est en fonction de la pression P et pour cela on a $e = e(p, s)$ (2.7.4)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 \quad (2.7.5)$$

Avec c : célérité du son.

Si l'écoulement est *isentropique* on peut écrire pour chaque variation δe

$$\delta e = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right)_s \delta p \quad (2.7.6)$$

et la dérivée isentropique $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right)_s$ peut être déduite de la relation

$$\text{thermodynamique : } T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.7.7)$$

Introduisons la condition isentropique $dS = 0$

$$dh - \frac{dp}{\rho} = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad (2.7.8)$$

Donc

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho} \quad (2.7.9)$$

Et

$$\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s - \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p}{\rho^2 c^2} \quad (2.7.10)$$

Multiplions l'équation de quantité de mouvement (2.7.2) par \vec{v} et faisant la soustraction avec l'équation de l'énergie (2.7.3) et on introduit la définition de E ;

$$E = e + \frac{\vec{v}^2}{2}$$

On trouve l'équation :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p + \rho c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.8)$$

Donc le système d'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \vec{0} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p + \rho c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Désignant par V le vecteur des variables primitives

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

La forme primitive des équations d'Euler en coordonnées cylindriques s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{v}{y} \right] = 0 \quad (2.9.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.9.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.9.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - c^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.9.4)$$

Avec c représente la célérité du son d'un fluide parfait $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ et $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ est

le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants ; δ est un switch qui prend les valeurs :

$\delta = 0$: -Pour un écoulement plan

$\delta = 1$: -Pour un écoulement axisymétrique

Dans notre étude on prend $\delta = 1$

Le système d'équation d'Euler devient sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\tilde{A} \cdot \tilde{V})V = \tilde{Q} \quad (2.10)$$

Où sous l'autre forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = \tilde{Q} \quad (2.10^*)$$

Avec \tilde{A} , \tilde{B} sont les composantes de la matrice Jacobienne

\tilde{A} Comparer avec l'expression de la matrice Jacobienne \tilde{A} il est évident que \tilde{A} a une forme plus simple.

Explicitement on obtient les composantes

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

II.2.3.3 Matrice de passage de la forme conservative à la forme primitive

La matrice jacobienne de passage de la forme conservative vers la forme primitive

est définie par : $M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (2.13)$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vec{v} & \rho \bar{I} & 0 \\ \frac{\vec{v}^2}{2} & \rho \vec{v}^T & \frac{1}{\gamma-1} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Puisque le déterminant de M est égale à $\frac{\rho}{\gamma-1}$ qui est différent de zéro

Donc on peut trouver la matrice inverse M^{-1} qui est égale à :

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\vec{v}}{\rho} & \frac{1}{\rho} \bar{I} & 0 \\ (\gamma-1)\frac{\vec{v}^2}{2} & -(\gamma-1)\vec{v}^T & \gamma-1 \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

a- Pour le cas monodimensionnel la matrice de passage se réduit à :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{vmatrix} \quad (2.14 .1)$$

Et la matrice inverse M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & \gamma-1 \end{vmatrix} \quad (2.15 .1)$$

B- Pour un écoulement bidimensionnel la matrice de transformation se réduit à :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{\vec{v}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma - 1} \end{vmatrix} \quad (2.14 .2)$$

Et la matrice inverse est :

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{vmatrix} \quad (2.15.2)$$

Ainsi que pour les matrices Jacobiennes \tilde{A}, \tilde{B}

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1} A M \\ \tilde{B} = M^{-1} B M \end{cases} \quad \text{Où} \quad \begin{cases} A = M \cdot \tilde{A} \cdot M^{-1} \\ B = M \cdot \tilde{B} \cdot M^{-1} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\tilde{K} = \tilde{A} \vec{k} \quad \text{et} \quad K = \tilde{A} \vec{k}$$

$$\tilde{K} = M^{-1} K M \quad (2.17)$$

II.2.4 Formulation caractéristique des équations d'Euler et les valeurs propres

II.2.4.1 détermination des valeurs propres de la matrice jacobienne \tilde{A}

Les valeurs propres de la matrice $\tilde{K} = \tilde{A} \vec{K}$, associées à une direction arbitraire de propagation $\vec{K} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix}$ définies par une large partie de comportement des solutions des équations d'Euler, il est ainsi essentiel de mieux comprendre les propriétés

caractéristiques, donc elles représentent un aspect essentiel des écoulements non visqueux, appelé la propagation des perturbations.

a- Pour le cas monodimensionnel

Les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

Si λ désigne les valeurs propres de la matrice \tilde{A} obtenues à partir de

$$\det \left[\tilde{A} - \lambda I \right] = 0 \quad (2.19)$$

donc:

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

On trouve les valeurs propres suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad (2.21)$$

b- Pour le cas bidimensionnel :

$$\det \left[\tilde{K} - \lambda I \right] = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{v} \cdot \vec{K} - \lambda K \right)^2 \left[\left(\vec{v} \cdot \vec{K} - \lambda K \right)^2 - c^2 K^2 \right] = 0$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \vec{V} \cdot \vec{k} \\ \lambda_3 = \vec{V} \cdot \vec{k} + cK \\ \lambda_4 = \vec{V} \cdot \vec{k} - cK \end{cases} \quad (2.22)$$

II.2.4.2 Détermination des vecteurs propres \tilde{l} de la matrice jacobienne \tilde{A}

Les vecteurs propres $\tilde{l}^{(j)}$ sont définis par

$$\tilde{l}^{(j)} \tilde{A} = \lambda_j \tilde{l}^{(j)} \quad (2.23)$$

Ou sous une forme explicite:

$$(l_1, l_2, l_3) \begin{vmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{vmatrix} = \lambda (l_1, l_2, l_3) \quad (2.23.1)$$

Pour la 1^{ère} valeur propre $\lambda = u$

$$\begin{aligned} u l_1 &= u l_1 \\ \rho l_1 + u l_2 + \rho c^2 l_3 &= u l_2 \\ \frac{1}{\rho} l_2 + u l_3 &= u l_3 \end{aligned} \quad (2.23.2)$$

l_1 est une valeur arbitraire, on pose $l_1 = \alpha$ On trouve $l_3 = -\frac{\alpha}{c^2}$ et $l_2 = 0$

Le vecteur propre correspondant à $\lambda = u$ est

$$\tilde{l}^{(1)} = \left(\alpha \quad 0 \quad -\frac{\alpha}{c^2} \right) \quad (2.23.3)$$

Pour la 2^{ème} valeur et la 3^{ème} valeur propre respectivement $\lambda = u + c$ et $\lambda = u - c$

On trouve respectivement

$$\tilde{l}^{(2)} = \left(0 \quad \beta \quad -\frac{\beta}{\rho c} \right) \quad (2.23.4)$$

$$\tilde{I}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\frac{\gamma}{\rho c} \end{pmatrix} \quad (2.23.5)$$

On prend $\alpha = \beta = \gamma = 1$

Donc

$$L^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{vmatrix} \quad (2.24.1)$$

et

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{vmatrix} \quad (2.24.2)$$

On remarque que les colonnes de L sont les vecteurs propre à droite de \tilde{A} .

Les matrices « P » et « P^{-1} » en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui respectivement de « L » et « L^{-1} » en variables primitives elles diagonalisent la matrice $[A \ (A = P\Lambda P^{-1})]$

$$P^{-1} = L^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{y-1}{2} \frac{u^2}{c^2} & (y-1) \frac{u}{c^2} & -\frac{y-1}{c^2} \\ \left(\frac{y-1}{2} u^2 - uc \right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} [c - (y-1)u] & \frac{y-1}{\rho c} \\ -\left(\frac{y-1}{2} u^2 + uc \right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c [c + (y-1)u]} & -\frac{y-1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$P=ML=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c}[u+c] & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c}\left[\frac{u^2}{2}+uc+\frac{c^2}{y-1}\right] & -\frac{\rho}{2c}\left[\frac{u^2}{2}-uc+\frac{c^2}{y-1}\right] \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Le vecteur des variables caractéristiques (ou variables de Riemann) s'écrit :

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta W_1 \\ \delta W_2 \\ \delta W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\rho - \frac{1}{c^2} \\ \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta\rho \\ \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta\rho \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

II.3 Transformation des équations en coordonnées généralisées

Vu la forme convergente –divergente de la tuyère. Un maillage uniforme dans le système de coordonnées (x, y, t) n'est pas possible. Et pour simplifier l'application des algorithmes de résolution. Une transformation mathématique est proposée pour passer d'un domaine physique en (x, y, t) complexe à un domaine beaucoup plus simple en coordonnées généralisées (ξ, η, τ)

Les transformations sont :

$$\begin{cases} \xi(x, y) = x \\ \eta(x, y) = \frac{y}{y_w(x)} \\ \tau = t \end{cases} \quad (2.28)$$

Ou'

$y_w(x)$: est la fonction définissant la paroi de la tuyère.

$$0 < \eta < 1$$

D'après la définition de la dérivée d'une fonction composée à plusieurs variables, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = w \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\text{Avec } \left\{ \begin{array}{l} w = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \\ \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{y_w(x)} \frac{dy_w(x)}{dx} \\ \beta = \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Après le changement en coordonnées généralisées, le domaine de calcul devient :

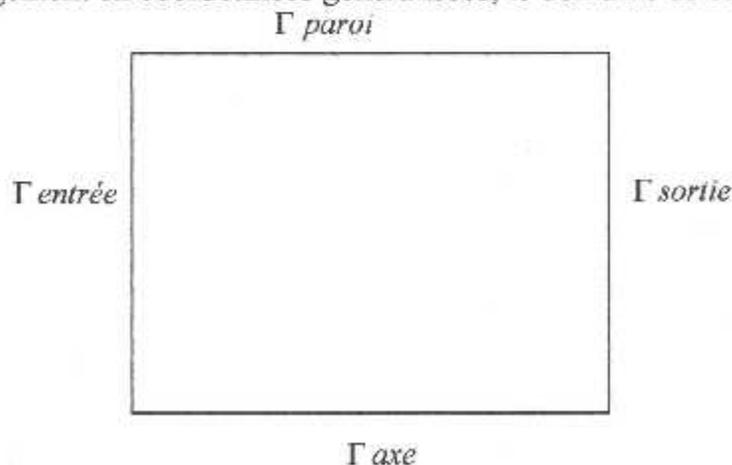


Fig.2.1 Domaine de calcul

Le système d'équation d'Euler (2.9) en coordonnées généralisées devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \omega \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \delta \frac{v}{\eta y_w} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0 \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0 \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} - u^c c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} u^c = uw \\ v^c = u\alpha + \beta v \end{cases}$$

II.4 Conditions aux limites :

Les valeurs propres du système d'équation d'Euler sont simples et facile à les déterminer à partir des matrices jacobiniennes des variables primitives.

Dans tous les cas, le nombre de conditions limites physiques peuvent être imposées aux frontières est déterminé par les propriétés caractéristiques c'est à dire par le signe des valeurs propres de la matrice.

$$K = \vec{A} \cdot \vec{I}_n = A \hat{n}_x + B \hat{n}_y \tag{2.32}$$

Avec I_n est le vecteur unitaire normal à la surface de composantes (n_x, n_y) dans le système de coordonnées cartésiennes.

Dans le cas bidimensionnel et A et B sont les matrices jacobiniennes des variables conservatives de composantes x et y du vecteur flux

$$\text{Ou bien } K = \vec{A} \cdot \vec{I}_n = \vec{A} \hat{n}_x + \vec{B} \hat{n}_y \tag{2.33}$$

\tilde{A} et \tilde{B} sont les matrices jacobienes des variables primitives. Dans le présent travail le domaine est représenté par un convergent –divergent d’une tuyère de–Laval où nous allons chercher les conditions aux limites dans quatre frontières

- Entrée subsonique
- Sortie supersonique
- Axe de symétrie de la tuyère
- Et en fin sur la paroi solide.

II.4.1 A l’infini amont (entrée subsonique)

L’écoulement à l’entrée est subsonique donc trois valeurs propres sont positives et une négative. Cependant trois conditions physiques à imposer et la condition restante sera déterminée numériquement.

Deux variables thermodynamique sont généralement déterminées par la condition de stagnation en amont, actuellement la pression de stagnation et la température de stagnation peuvent être imposées, la 3^{ième} variable physique sera définie par une composante de vecteur vitesse et la condition restante résulte du traitement numérique

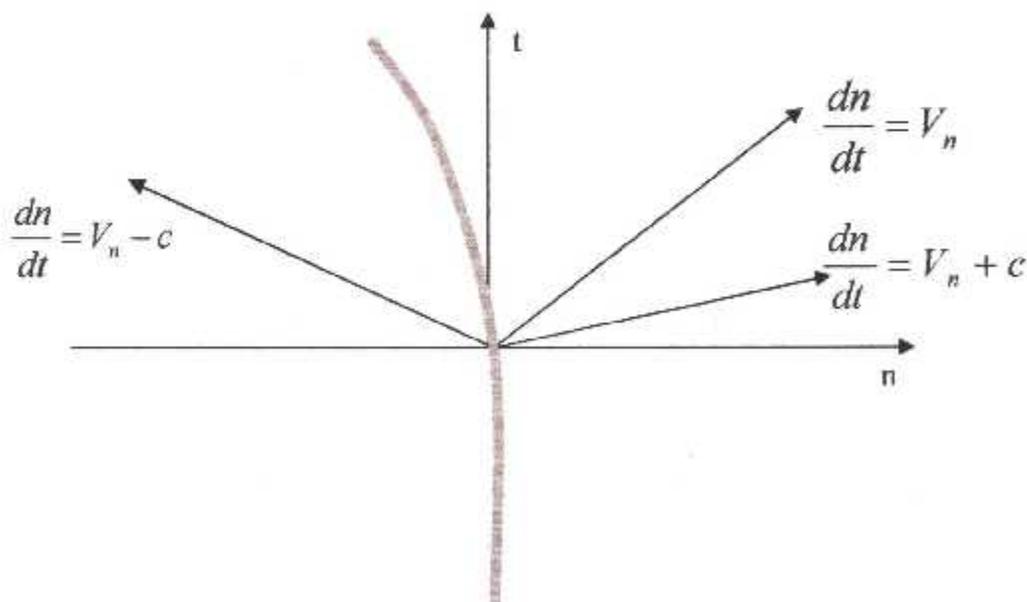


Fig. 2.2 représentation des lignes caractéristiques à l'entrée subsonique

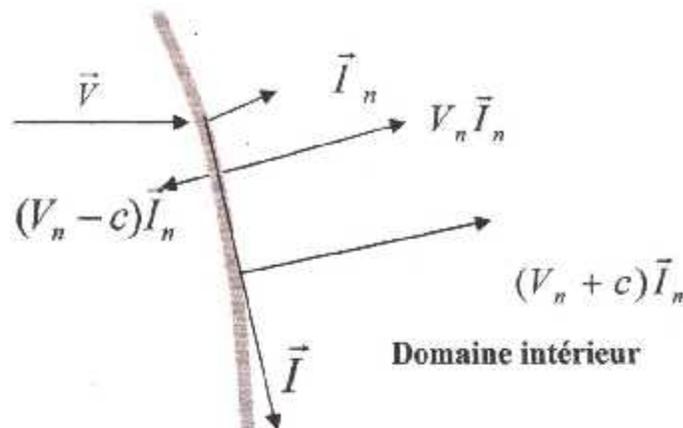


Fig 2.3 Surface frontière : entrée subsonique dans le cas bidimensionnel

II-4-2 A la paroi

A la paroi le vecteur normal de la vitesse est nul $V_n=0$, d'où aucune masse ni d'autre flux convectif ne peut pénétrer la paroi solide. Autrement dit, une seule valeur propre est positive et une condition physique peut être imposée ($V_n=0$) les autres valeurs à la paroi en particulier la vitesse et la pression peuvent être déterminées par l'extrapolation de l'intérieur à la frontière.

L'état de l'écoulement sur cette frontière est influencé par l'écoulement interne (condition limite numérique) est obtenue grâce à la résolution des équations liant l'écoulement interne à la paroi. Ces dernières seront représentées par les équations caractéristiques et de compatibilité comme suit :

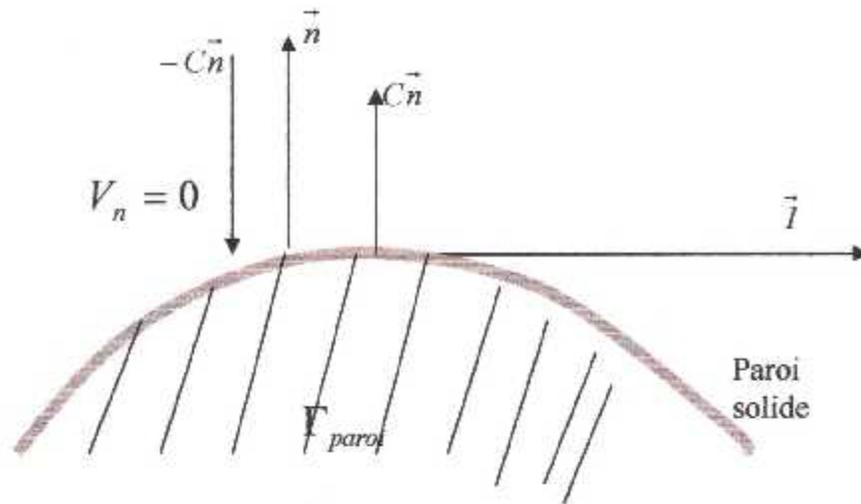


Fig.2.4.a Direction des vitesses de l'onde acoustique à la paroi

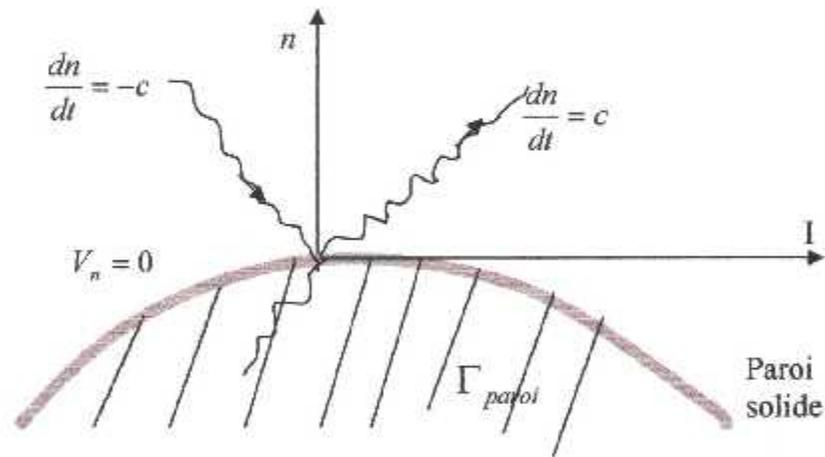


Fig.2.4.b Propagation des caractéristiques à la paroi

Fig.2.4 surface frontière : la paroi solide dans le cas bidimensionnel

$$\begin{cases} \beta du - \alpha dv = (\beta \psi_2 - \alpha \psi_3) dt \\ dp - c^2 d\rho = \psi_4 dt \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \frac{d\eta}{dt} = v^f \quad (234)$$

$$d\eta = (v^c + \alpha^* c) dt$$

$$dp + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha du + \beta dv) = \left[\psi_4 + c^2 \psi_1 + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha \psi_2 + \beta \psi_3) dt \right] \quad (2.35)$$

II.4.3 L'axe de symétrie de la tuyère

L'axe de la tuyère est un axe de symétrie auxquelles seront associées les conditions de symétrie de l'écoulement.

- $v = 0$ (on force l'écoulement à être parallèle à l'axe de la tuyère).
- $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ (à cause de la symétrie)
- $\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0$ (à cause de la symétrie).
- $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ (à cause de la symétrie).
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{v}{y} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (règle de l'hôpital).

L'introduction des conditions précédentes permet l'écriture des équations d'Euler (2.31) sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \left[\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + (1 + \delta) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} + c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

II.4.4 La sortie supersonique

Dans ce cas toutes les lignes caractéristiques se dirigent de l'intérieur vers la surface frontière (toutes les valeurs propres sont négatives) d'où on aura 4 conditions numériques, et on impose aucune condition physique.

L'état de l'écoulement sur la sortie est lié numériquement aux états des mailles internes adjacentes.

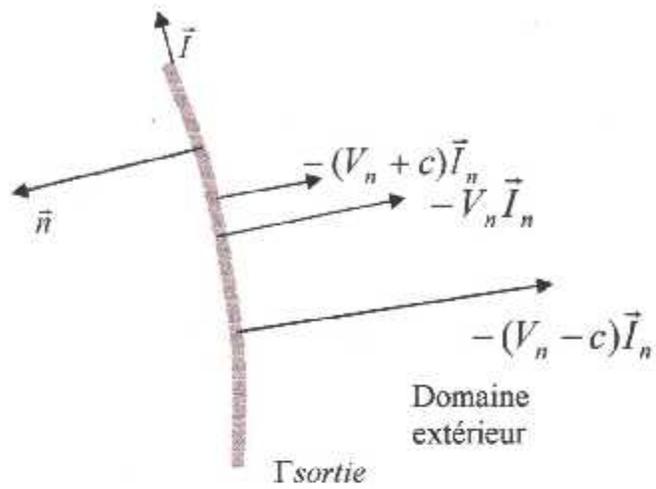


Fig.2.5 surface frontière : sortie supersonique dans le cas bidimensionnel

Chapitre III

Discrétisation et résolution numérique

III.1 Introduction :

Les configurations dans lesquelles les écoulements supersoniques sont étudiés sont telles que ces écoulements présentent des zones subsonique et des zones supersoniques. De ce fait les équations stationnaires ne sont pas partout hyperboliques et leurs traitements numériques nécessitent la construction d'une méthode itérative par l'intermédiaire d'une approche instationnaire [8].

Différentes études ont été réalisées pour la résolution numérique des équations de Navier stocks et d'Euler, l'une des première résolution pour un problème transitoire d'un écoulement non visqueux bidimensionnel a été formulée par LAX et WENDEROFF [1-5-6] et étendu à un problème axisymétrique par BURSTEINE [6]

La résolution du système d'équation d'Euler régissant un écoulement supersonique par l'utilisation de la méthode des différences finies, consiste principalement à remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations algébriques aux différences finies.

On écrit donc les équations d'Euler sous leurs forme instationnaire, et la résolution numérique s'effectue en fonction du temps qui sert alors de paramètre itératif. Toutefois, seule la solution stationnaire obtenue à convergence nous intéresse

III.2 Technique de MacCormack :

Historiquement cette technique est développée par Robert MacCormack dans un centre de recherche à la NASA publiée la première fois en 1969, cette technique s'applique aussi pour les écoulements supersoniques stables.

Le schéma de Mac Cormack est l'un des schémas les plus populaires parmi ceux qui font partie de la famille des schémas de LAX-WENDEROFF à deux étapes, sa précision est de second ordre en temps et en espace, cette technique utilise deux étapes distinctes le prédicteur et le correcteur

Première étape : c'est l'étape prédicteur, dans ce cas, les équations de mouvement sont discrétisées en utilisant la différence directe pour les dérivées partielles.

On note :

i : l'indice suivant ζ

j : l'indice suivant η .

n : l'indice suivant t .

($\bar{\quad}$) Indique la valeur calculée lors de l'étape de prédiction.

($\overline{\overline{\quad}}$) Indique la valeur calculée lors de l'étape de correction.

Pour l'étape prédicteur, la différence progressive appliquée pour l'exemple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (3.1)$$

Permet d'obtenir :

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (3.2.a)$$

Deuxième étape : c'est l'étape correcteur au cours de laquelle les équations du mouvement sont discrétisées en utilisant la différence inverse pour les dérivées partielles.

$$\overline{\overline{U}}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_i^{n+1} - \bar{F}_{i-1}^{n+1}) \quad (3.2.b)$$

Et la solution finale de U_i^{n+1} est donné

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i^{n+1} + \overline{\overline{U}}_i^{n+1}) \quad (3.3)$$

III.3 Schéma de MacCormack au cas bidimensionnel (2D) :

Ce schéma est le plus populaire de ceux de LAX-WENDEROFF et nécessite sept point pour construire une cellule d'intégration C_i (**fig. 3.1**) le schéma de MacCormack est une combinaison de deux version de discrétisation (progressive et régressive) dans les étapes prédicteur et correcteur ^[1-4].

Quatre différents schémas peuvent être définis dans le cas bidimensionnel en combinant les diverses discrétisations.

Le schéma de MacCormack appliqué à un système d'équation 2-D s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \\ \overline{\bar{U}}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (\bar{F}_{i,j}^{n+1} - \bar{F}_{i-1,j}^{n+1}) - \tau_y (\bar{G}_{i,j}^{n+1} - \bar{G}_{i,j-1}^{n+1}) \\ U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{n+1} + \overline{\bar{U}}_{i,j}^{n+1}) \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec $\tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$

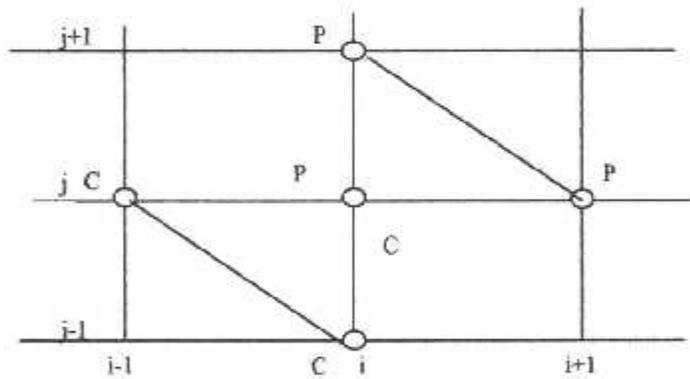


Fig. 3.1 : cellule d'intégration C_i pour le schéma de MacCormack

P : points prédits

C : points corrigés

III.4 Analyse linéaire de la stabilité du schéma

La stabilité des schémas explicites selon l'analyse de Von Newman [3] est déterminée par le nombre de COURANT - FRIEDRICH - LEWY (CFL) [2].

La valeur de Δt ne peut pas être prise arbitrairement mais elle doit être inférieure ou égale à une valeur maximale, cette dernière est estimée à partir de l'analyse de la stabilité; la signification physique du critère de CFL est que Δt doit être inférieure ou égale à un temps exigé pour une onde sonore de se propager entre deux points voisins de la grille.

Pour le schéma de MacCormack, l'analyse de stabilité selon Von Newman se fait par l'étude d'évolution de la perturbation ou bien par l'étude de la matrice d'amplification.

$g = \frac{\bar{g} + \bar{\bar{g}}}{2}$ en posant $\bar{U} = \bar{g}U^n$ et $\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{g}}U^n$, cela conduit à écrire

$$\bar{g} = 1 - \tau_x A(e^{i\phi_x} - 1) - \tau_y B(e^{i\phi_y} - 1)$$

$$\bar{\bar{g}} = 1 - \bar{g} [\tau_x A(e^{i\phi_x} - 1) + \tau_y B(e^{i\phi_y} - 1)]$$

$$g = 1 - i(\tau_x A \sin \phi_x + \tau_y B \sin \phi_y) - \left[\tau_x^2 A^2 (1 - \cos \phi_x) + \tau_y^2 B^2 (1 - \cos \phi_y) + 4\tau_x \tau_y AB \sin \frac{\phi_x}{2} \cdot \sin \frac{\phi_y}{2} \cdot \cos \frac{\phi_x - \phi_y}{2} \right] \quad (3.5)$$

Où $i = \sqrt{-1}$

La complexité de l'expression (3.5) rend très difficile de trouver analytiquement une condition sur la stabilité du schéma. Cependant il a été trouvé expérimentalement par MacCormack que la condition de type CFL est :

$$\tau_x |\lambda(A)_{\max}| + \tau_y |\lambda(B)_{\max}| \leq 1$$

$$\Delta t \leq \left[\frac{|\lambda(A)_{\max}|}{\Delta x} + \frac{|\lambda(B)_{\max}|}{\Delta y} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

$\lambda(A)_{\max}$ et $\lambda(B)_{\max}$ Sont les rayons spectraux des matrices Jacobienne A et B

Pour le système d'équation d'Euler [1-5] :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|+c}{\Delta x} + \frac{|v|+c}{\Delta y}} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x \Delta y}{|u| \Delta y + |v| \Delta x + c \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (3.7)$$

C'est la forme courante de la stabilité

III.5 Traitement des noeuds internes :

Le calcul se fait comme on l'a déjà précisé antérieurement en deux étapes :

* **Méthode par prédiction**

* **Méthode par correction**

Pour appliquer le schéma numérique de MacCormack, on va réécrire les équations d'Euler de la manière suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \delta \frac{\rho v}{\eta y_w} \quad (3.8.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.8.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.8.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - \rho c^2 \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \delta \frac{\rho v}{\eta y_w} \quad (3.8.4)$$

III.5.1 Méthode par prédiction

- Calcul de la densité :

L'équation de continuité (3.8.1) sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n+1} = & \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + \rho_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + v_{i,j}^{cn} \left(\frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) \right] + \\ & - \Delta t \rho_{i,j}^n \left[\alpha_{i,j} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \delta \left(\frac{v}{\eta y_w} \right)_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Calcul de la composante axiale de la vitesse :

L'équation (3.8.2) de la quantité du mouvement axiale, après discrétisation on trouve

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + \frac{\omega}{\rho_{i,j}^n} \left(\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + v_{i,j}^{cn} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right] + \\ & - \Delta t \left[\frac{\alpha_{i,j}}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Calcul de la composante radiale de la vitesse :

L'équation (3.8.3) de la quantité du mouvement radiale, après discrétisation on aura :

$$\bar{v}_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + v_{i,j}^{cn} \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) + \frac{\beta_{i,j}}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right] \quad (3.11)$$

- Calcul de la pression :

Après discrétisation de l'équation (3.8.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^{n+1} = & p_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + (\rho c^2 \omega)_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) \right] \\ & + \Delta t \left[v_{i,j}^{cn} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} + (\rho c^2)_{i,j}^n \left(\alpha_{i,j} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) \right] \\ & + \Delta t \left[\delta \gamma \left(\frac{pv}{\eta y_\omega} \right)_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

III.5.2 Méthode par correction

Dans cette étape les valeurs prédites ci-dessus seront corrigées

- Calcul de la densité :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = & \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \rho_{i,j}^n \left(\frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{v}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) \right] + \\ & - \Delta t \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \left[\alpha_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \delta \left(\frac{v}{\eta y_\omega} \right)_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Calcul de la vitesse axiale :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \frac{\omega}{\bar{\rho}_{i,j}^n} \left(\frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{v}_{i,j}^{cn+1} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] + \\ & - \Delta t \left[\frac{\alpha_{i,j} \bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \Delta \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Calcul de la vitesse radiale :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j}^{n+1} = & v_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{v}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) \right] \\ & - \Delta t \left[\left(\frac{\beta_{i,j} \bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \Delta \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

- Calcul de la pression :

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{i,j}^{n+1} = & p_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + (\bar{\rho} \bar{c}^2 \omega)_{i,j}^{n+1} \left(\frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) \right] \\
 & - \Delta t \left[\bar{v}_{i,j}^{cn+1} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + (\bar{\rho} \bar{c}^2)_{i,j}^{n+1} \left(\alpha_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) \right] \\
 & - \Delta t \left[\delta \gamma \left(\frac{\bar{p} \bar{v}}{\eta y_w} \right)_{i,j}^{n+1} \right] \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Finalement les valeurs des variables dépendantes ρ, u, v et p au niveau $(n+1)$, c'est-à-dire à $(t + \Delta t)$ aux nœuds internes (i, j) sont calculées respectivement comme suit :

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} + \overline{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1}) \tag{3.17.1}$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \overline{\bar{u}}_{i,j}^{n+1}) \tag{3.17.2}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{i,j}^{n+1} + \overline{\bar{v}}_{i,j}^{n+1}) \tag{3.17.3}$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{p}_{i,j}^{n+1} + \overline{\bar{p}}_{i,j}^{n+1}) \tag{3.17.4}$$

III.6 Traitement des nœuds externes

Le traitement des conditions aux limites est un problème important ^[6], il existe différentes catégories des conditions aux limites:

- Conditions aux limites arbitraires (ou les paramètres sont lus ou calculés).
- Conditions aux limites le long de la paroi

La détermination des paramètres de l'écoulement aux frontières nécessite alors un traitement particulier, il diffère complètement de celui des nœuds internes.

On distingue 4 types de nœud frontière tels que :

- * nœuds d'entrée (inlet)
- * nœuds sur la paroi (wall)
- * nœuds sur l'axe de la tuyère (axis)
- * nœuds de sortie (outlet)

III.6.1 Entrée de la tuyère

A l'entrée nous avons trois conditions aux limites physique, ceci entraîne d'imposer trois paramètres d'écoulement dans la surface d'entrée comme nous l'avons déjà démontré dans le chapitre précédent (chapitre II), la condition restante calculée numériquement.

Dans notre cas on va imposer la température totale T_t , la pression totale P_t et l'angle d'entrée d'écoulement θ . La procédure de calcul est la suivante :

- 1- on suppose un nombre de mach initial.
- 2- on calcule la pression absolue P et la température absolue T en utilisant les équations classiques de la gazodynamique :

$$\frac{P_t}{P} = \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.18)$$

$$\frac{T_t}{T} = \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right] \quad (3.19)$$

- 3- la densité ρ est calculée à partir de l'équation des gaz parfaits

$$\rho = \frac{P}{r T} \quad (3.20)$$

- 4- on calcule la vitesse axiale u en intégrant l'équation de la caractéristique et celle associée de compatibilité qu'on a obtenu dans l'annexe B (voir annexe B).

$$d\xi = w(u - c) dt \quad (3.21)$$

$$dp + \rho c du = (c^2 \psi_1 + \rho c \psi_2 + \psi_4) \quad (3.22)$$

5- on calcule la vitesse radiale v par la relation :

$$v = u \cdot \operatorname{tg} \theta$$

6- un nouveau nombre de mach est calculé à partir des valeurs de u, v, p et ρ obtenues préalablement. Dans notre travail on a utilisé la méthode de Newton-Raphson.

7- le processus de 2 à 7 est refait jusqu'à la convergence c-à-d

$$|M_{i+1} - M_i| \leq \epsilon ps$$

III.6.2 Axe de la tuyère

En appliquant la méthode de prédiction et correction de MacCormack aux équations (2.35) de chapitre précédent (chapitre II) pour le calcul des conditions limites sur l'axe [5].

a- Etape predicteur

$$\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + \rho_{i,j}^{cn} \left(\omega \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} + (1+\delta) \beta_{i,j} \frac{4 \cdot v_{i,2}^n - v_{i,3}^n}{2 \cdot \Delta \eta} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$\bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + \frac{\omega}{\rho_{i,j}^n} \left(\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) \right] \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} \left(\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + c^{2n}_{i,j} \left(\frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \right] \\ + \Delta t \left[u_{i,j}^{cn} c^2_{i,j} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

b- Etape correcteur

$$\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{\rho}_{i,j}^{cn+1} \left(\omega \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + (1+\delta) \beta_{i,j} \frac{4\bar{v}_{i,2}^{n+1} - \bar{v}_{i,3}^n}{2\Delta \eta} \right) \right] \quad (3.26)$$

$$\bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn} \left(\frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \frac{\omega}{\rho_{i,j}^n} \left(\frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) \right] \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{cn+1} \left(\frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) - \bar{c}_{i,j}^{2n+1} \left(\frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \right] \\ + \Delta t \left[\bar{c}_{i,j}^{2n+1} \bar{u}_{i,j}^{cn+1} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Finalement les paramètres de l'écoulement sur l'axe de symétrie de la tuyère sont ;

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1}) \quad (3.29.1)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{u}}_{i,j}^{n+1}) \quad (3.29.2)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{p}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{p}}_{i,j}^{n+1}) \quad (3.29.3)$$

III.6.2 Paroi de la tuyère

A la paroi nous avons une seule caractéristique dirigée vers l'intérieur du domaine. C-à-d une condition physique à imposée, c'est la composante normale de la vitesse qui est nulle ($V_n=0$) (condition de glissement). Les autres variables telles que la vitesse tangentielle, la pression et les autres paramètres thermodynamiques (densité, température) sont déterminées par extrapolation directement à partir de leurs valeurs aux points adjacents à la paroi [5].

Le calcul des paramètres de l'écoulement aux points pariétaux dans le présent travail est réalisé par la résolution des équations caractéristiques développées précédemment dans le chapitre II (eq.2.34 et 2.35).

Considérons la (fig.3.2) dans laquelle le nœud 4 représente le point solution (point pariétal), à partir de ce dernier les lignes caractéristiques sont projetées en arrière pour déterminer les points des données initiales (pt 1, 2,3). dans ce qui suit on présente les étapes de résolution pour la première équation caractéristique (2.35) car on a les même étapes pour la 2^{ème} équation.

L'équation de la courbe caractéristique (2.35)

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c + c\alpha^c \quad (3.30)$$

L'équation de compatibilité (caractéristique) correspondant est :

$$dp + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha du + \beta dv) = \left[\psi_4 + c^2 \psi_1 + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha \psi_2 + \beta \psi_3) \right] dt \quad (3.31)$$

L'intégration de (3.30) entre les points 4 et 1 nous donne

$$\eta_4 - \eta_1 = (\bar{v}^c + \bar{c}\alpha^*)\Delta t \quad (3.32)$$

\bar{v}^c et \bar{c} Sont les valeurs moyennes prises entre les points 1 et 4.

a. Etape predicteur

Des valeurs moyennes \bar{v}^c et \bar{c} , η_1 sont déterminées à partir de (3.32)
 \bar{v}_1^c et \bar{c}_1 sont calculées alors par interpolation, on itère jusqu'à aboutir à la solution
 (η_1). Cependant tous les paramètres (ρ, p, u, v, c et $\psi_{1,2,3,4}$) sont calculés à ce point.

b. Etape correcteur

Les valeurs prédites dans la première étape sont réutilisées pour déterminer avec le même processus précédent le nouveau (η_1) et ainsi tous les paramètres restants.
 Finalement et après la résolution de l'équation (2.34) par la même méthode pour calculer ρ_4, u_4, v_4 l'équation (3.31) est résolue pour déterminer P_4 comme suit

$$P_4 - P_1 + \frac{\bar{\rho}_{41} \bar{c}_{41}}{\alpha^*} [\alpha(u_4 - u_1) + \beta(v_4 - v_1)] = \left[\bar{\psi}_{41} + \bar{c}_{41}^2 \bar{\psi}_{14} + \frac{\bar{\rho}_{41} \bar{c}_{41}}{\alpha^*} (\alpha \bar{\psi}_{24} + \beta \bar{\psi}_{34}) \right] \Delta t \quad (3.33)$$

N.B La barre () signifie que ces termes sont moyennés entre deux points 1 et 4.

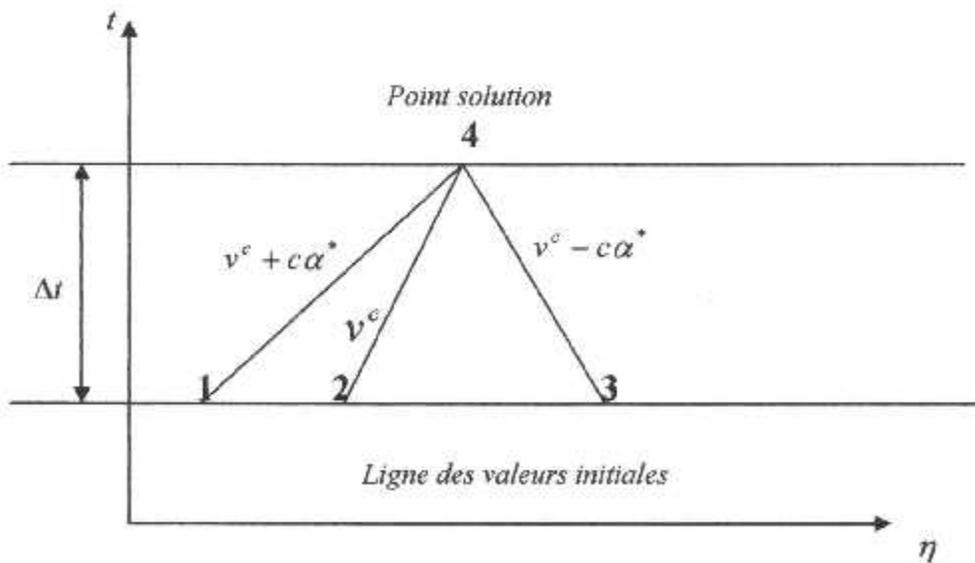
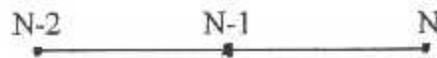


Fig. 3.2 Grille des différences finies pour les points frontières

III.6.3 Sortie de la tuyère

L'écoulement à la sortie de la tuyère est supersonique, nous avons montré dans le chapitre II que toutes les caractéristiques se dirigent de l'intérieur du domaine vers la sortie. Cependant toutes les conditions limites sont numériques d'où tous les paramètres de l'écoulement dans la surface de sortie sont déterminés par extrapolation linéaire.

Les paramètres à déterminer sont la vitesse axiale u , la vitesse radiale v , la pression P , la densité ρ .



$$u_{N-1} = \frac{u_N + u_{N-2}}{2}$$

D'où

$$u_N = 2.u_{N-1} - u_{N-2} \quad (3.34)$$

$$v_N = 2.v_{N-1} - v_{N-2} \quad (3.35)$$

$$p_N = 2.p_{N-1} - p_{N-2} \quad (3.36)$$

$$\rho_N = 2.\rho_{N-1} - \rho_{N-2} \quad (3.37)$$

III-7 Génération du maillage

La discrétisation des équations par la méthode des différences finies nécessite en premier lieu le maillage du domaine de résolution (tuyère convergente/divergente) pour le calcul, la méthode utilisée pour la génération du maillage est la technique des deux parois^[2]. Cette technique est avantageuse dans le cas des écoulements internes et elle fait partie des techniques algébriques.

III.7.1 Technique des deux parois

On considère la figure ci-dessous,

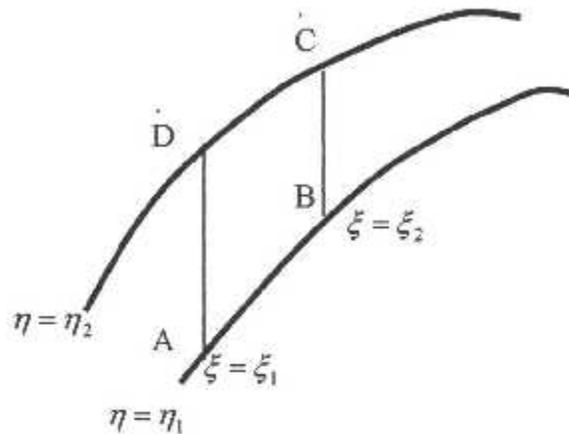


Fig.3.3 canal bidimensionnel courbé

On commence la distribution des nœuds sur les frontières du domaine, c'est-à-dire AB, BC, CD et DA. Cette distribution des nœuds est contrôlée par l'utilisation des fonctions de condensation (STRETCHING FUNCTIONS). La forme proposée par [2] de ces fonctions est donnée par :

$$s = P \eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh [Q(1 - \eta^*)]}{\tanh Q} \right] \quad (3.38)$$

Avec P, Q sont des paramètres de contrôle

$$\text{Et } \eta^* = \frac{\eta - \eta_{AB}}{\eta_{DC} - \eta_{AB}} \Rightarrow 0 \leq \eta^* \leq 1$$

Une fois ces nœuds sont localisés aux frontières du domaine, les nœuds intérieurs sont déterminés par la technique des deux parois, soit donc

$$X(\xi, \eta) = (1 - S)x_{AB}(r_{AB}) + Sx_{DC}(r_{DC}) \quad (3.39.a)$$

$$Y(\xi, \eta) = (1 - S)y_{AB}(r_{AB}) + Sy_{DC}(r_{DC}) \quad (3.39.b)$$

Chapitre IV

Résultats et interprétations

IV.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus par le programme de calcul, ce dernier est élaboré pour résoudre les équations d'Euler qui gouvernent l'écoulement au sein d'une tuyère convergente-divergente axisymétrique **Fig. (4.1)**.

La méthode de résolution de ce système d'équation d'Euler qui a été développée dans les chapitres précédents utilise la technique de MacCormack.

Nous nous sommes intéressés aux variations le long de l'axe de symétrie et de la paroi des paramètres suivant :

- Pression
- Nombre de mach

Ainsi que de la présentation des isobares et des iso-machs, en effet ces paramètres sont en général les plus significatifs pour la caractérisation d'un écoulement et aussi les principaux paramètres de performance décrits dans le chapitre I.

Finalement, nos résultats sont validés en les comparant avec ceux obtenus par le code **VNAP2**

IV.2. Description du code VNAP2

Le **vnap2** est un code de calcul établi par **LOS -ALAMOS NATIONAL LABORATORY** au new mexico ^[3], ce code est utilisé pour l'étude des écoulements internes, bidimensionnels, laminaires ou turbulents, transitoires ou permanents.

Le **vnap2** comprend un programme principal faisant appel à une fonction et à 15 sous-routines.

IV.2.1 L'algorithme du code VNAP2

- 1-Initialisation de certains paramètres.
- 2-Lecture des données.
- 3-Calcul des différents paramètres géométriques.
- 4-Calcul de la solution monodimensionnelle qui sert comme initialisation.
- 5-Calcul de Δt_{\min} à partir de la condition de stabilité CFL.
- 6-Calcul de la solution bidimensionnelle par prédiction.

- 8- Calcul de la solution bidimensionnelle par correction.
- 9-Determination du nouveau Δt_{\min} .
- 10-si la condition de convergence est vérifiée, sortir et imprimer les résultats, sinon reprendre les calculs à partir de l'étape 6.

IV.3 Description du programme de calcul :

Notre programme est constitué d'un programme principal ainsi que six (6) sous-routines qui sont les suivantes :

- Subroutine qui calcule la solution monodimensionnelle (onedim)
- Subroutine de génération de maillage (mapping).
- Subroutine qui calcule les paramètres de l'écoulement juste à l'entrée de la tuyère (inlet).
- Subroutine qui calcule les paramètres de l'écoulement à la paroi (wall).
- Subroutine qui calcule les paramètres de l'écoulement à l'axe de la tuyère (axis).
- Subroutine qui calcule les paramètres de l'écoulement dans les nœuds internes de la tuyère (interne)

L'organigramme de ce programme est présenté dans l'annexe C.

IV.3.1 Données du programme de calcul :

On distingue deux types de données thermodynamiques et géométriques.

IV.3.1.a Données thermodynamiques :

$P_t=482.188 \text{ Kpa}$: la pression totale de stagnation (sortie de chambre de combustion)

$T_t=300 \text{ }^\circ\text{K}$: la température totale de stagnation (sortie de la chambre de combustion)

$\gamma = 1.4$: le rapport des chaleurs spécifiques

$r=287.14 \text{ j/Kg }^\circ\text{K}$: la constante des gaz parfaits.

IV.3.1.b Données géométriques :

La fig. (4.1) représente la géométrie d'une tuyère conique

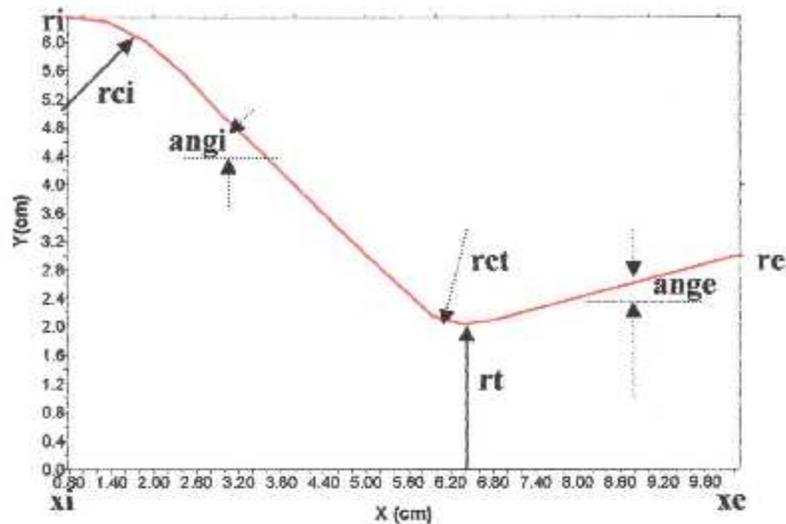


Fig. 4.1 Géométrie d'une tuyère conique CV-DV axisymétrique

- $X_i = 0.7874$ (cm) : l'abscisse d'entrée
- $X_e = 10.287$ (cm) : l'abscisse de sortie
- $R_t = 2.032$ (cm) : le rayon au col
- $R_i = 6.35$ (cm) : le rayon d'entrée convergent
- $R_{ci} = 2.032$ (cm) : rayon de cambrure à l'entrée
- $R_{ct} = 1.27$ (cm) : rayon de cambrure du col
- $Ang_i = 44.88^{\circ}$: l'angle du convergent
- $Ang_e = 15.0^{\circ}$: l'angle du divergent.

IV.3.3 Résultats

La convergence est un problème crucial et après plusieurs essais nous avons obtenu le CFL optimal (égal à 0.8) et qui nous a permis d'avoir les bons résultats à l'état stationnaire et cela après 570 itérations.

IV.3.3.1 Maillage

La figure (4.2) représente le maillage obtenu par le programme de calcul, ce dernier est effectué par l'application d'une technique algébrique de génération de maillage qui est la technique des deux parois décrite ultérieurement dans le chapitre III. Ce maillage est caractérisé par le pas constant dans les deux directions x et y (maillage uniforme). La région du col est une zone de fort gradient notamment dans la

direction axiale donc il est préférable de rétrécir ce maillage dans cet endroit et la figure (4.3) montre ce maillage raffiné.

La figure (4.4) représente le domaine du calcul dans le plan transformé (ξ, η) .

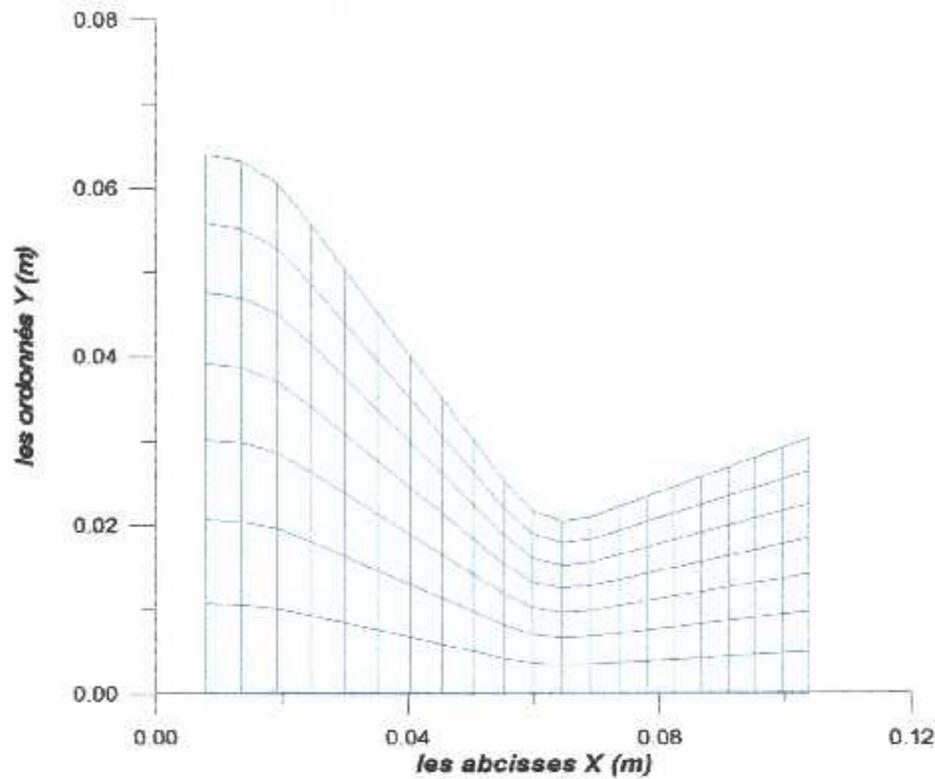


Fig. 4.2 Le maillage simple de la tuyère (N=21, M=8)

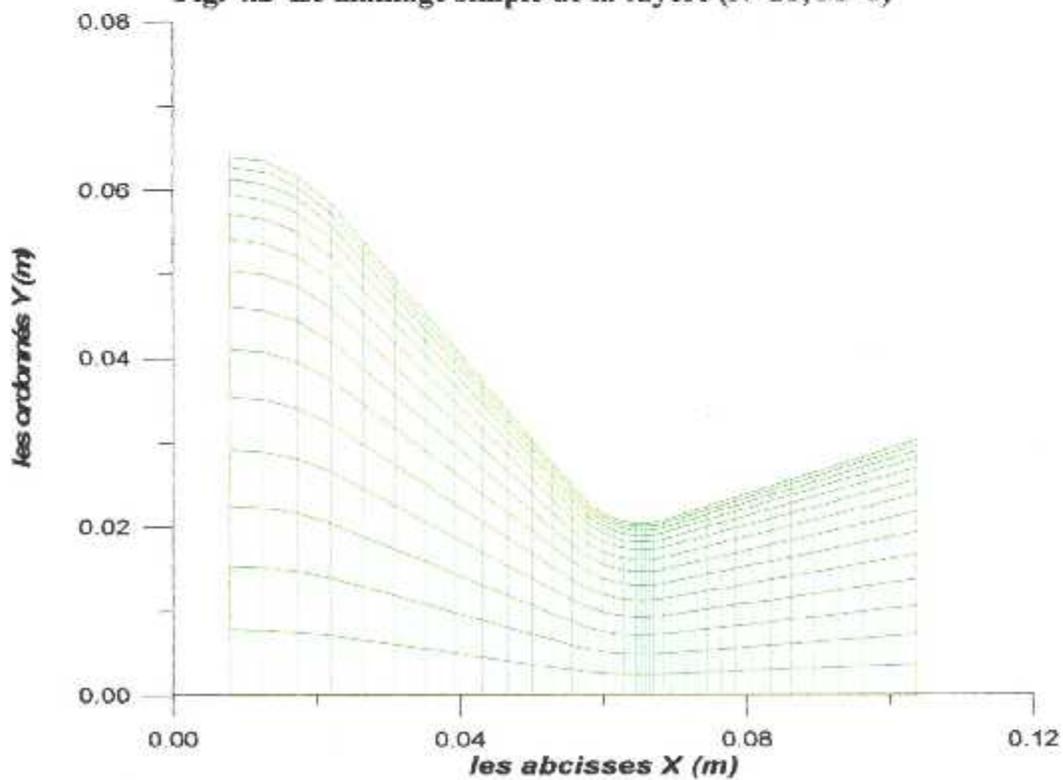


Fig. 4.3 maillage raffiné au col et à la paroi (N=41, M=15)

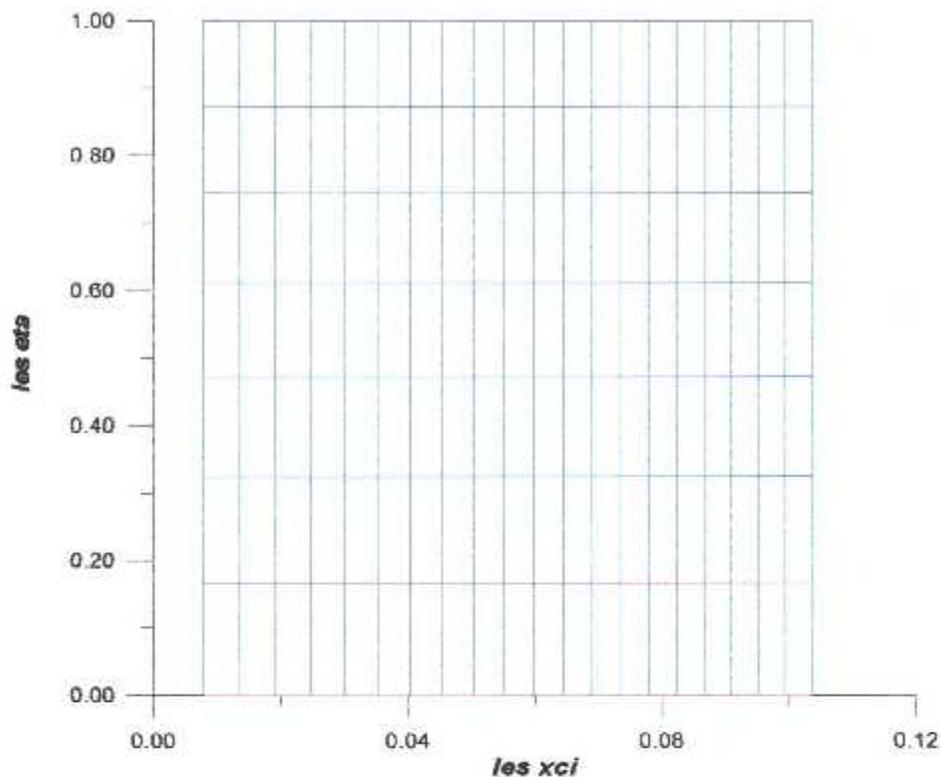


Fig. 4.4 Le domaine de calcul pour un maillage non raffiné
(N=21, M=8)

IV.3.3.2 Répartition du nombre de Mach sur l'axe de symétrie et la paroi

On remarque que l'évolution du nombre de Mach à l'axe dans la partie convergente est lente jusqu'à atteindre le col où cette augmentation devient très importante et continue progressivement jusqu'à la sortie, ceci est naturel car il s'agit d'une détente Fig. (4.5).

Même chose pour la courbe de l'évolution du nombre de Mach sur la paroi exceptant une légère différence par rapport à l'axe, nous constatons aussi que le nombre de Mach à la paroi est inférieur que celui dans l'axe de la tuyère Fig. (4.6). En comparant les courbes du programme avec celles du code VNAP2, nous constatons qu'elles ont presque la même allure à part une différence minime au niveau de la partie du col.

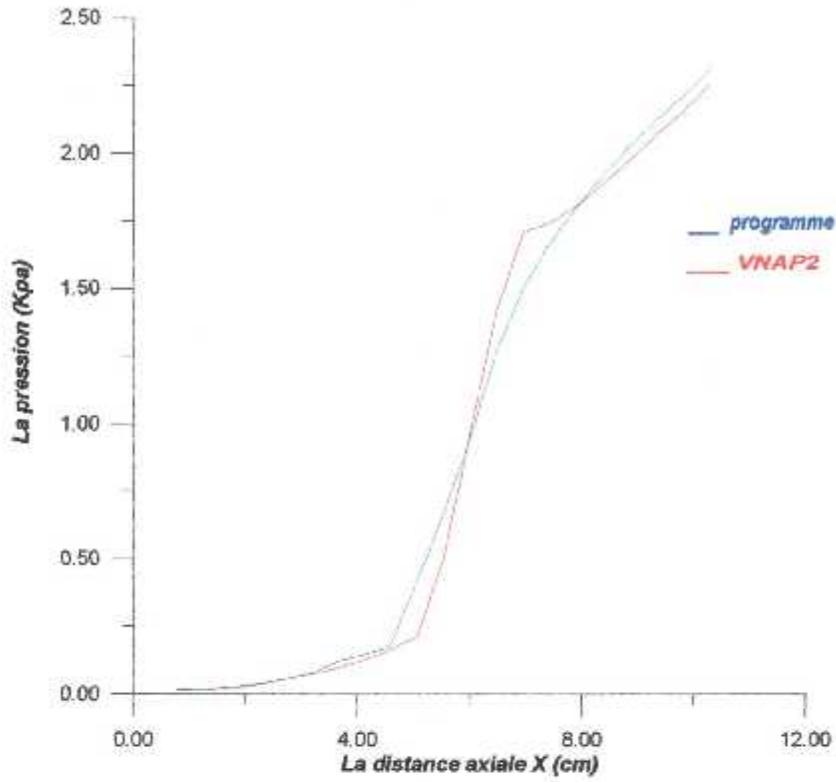


Fig. 4.5 Le nombre de mach sur l'axe

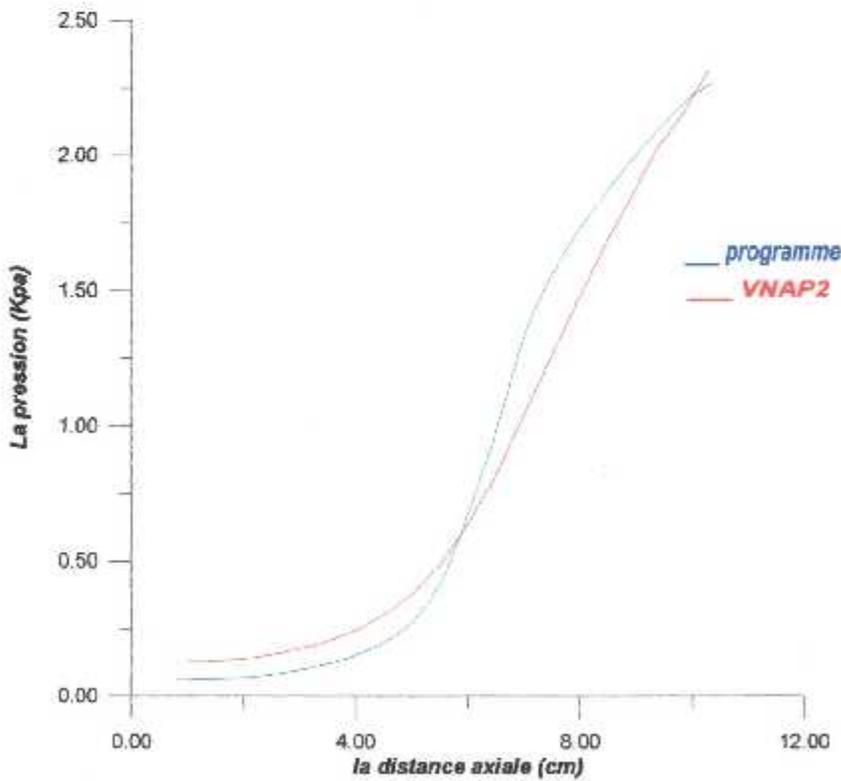


Fig. 4.6 Le nombre de Mach sur la paroi

IV.3.3.3 Répartition de la pression sur l'axe de symétrie et sur la paroi

Les figures (4.7) et (4.8) représentent la répartition des pressions sur l'axe et la paroi respectivement.

On remarque que la pression diminue légèrement dans le convergent jusqu'à l'entrée du col où elle subit une chute considérable et qui continue progressivement au niveau du divergent où elle est minimale à la section de sortie.

En comparant avec le code **VNAP2**, il existe une bonne concordance, les courbes presque confondues dans la partie convergente et s'éloignent de plus en plus jusqu'à certain point du divergent où elles se coïncident et continuent ainsi jusqu'à la section de sortie,

La figure (4.8) qui représente la répartition de la pression sur la paroi a une même allure que celle de la pression sur l'axe excepte une petite différence dans la partie du col où la pression chute d'une manière plus au moins lente par rapport à l'axe.

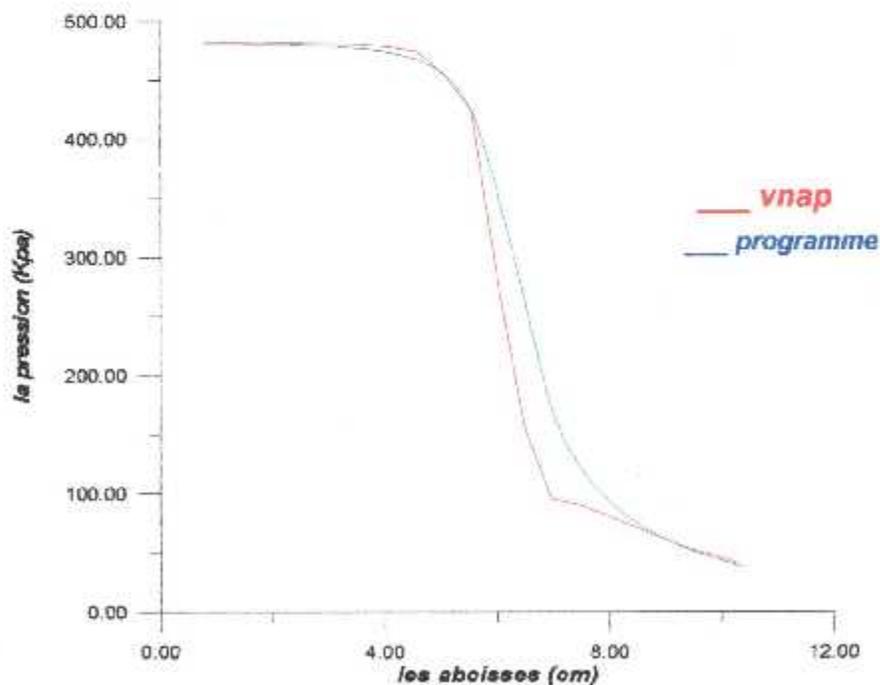


Fig.4.7 La pression à l'axe

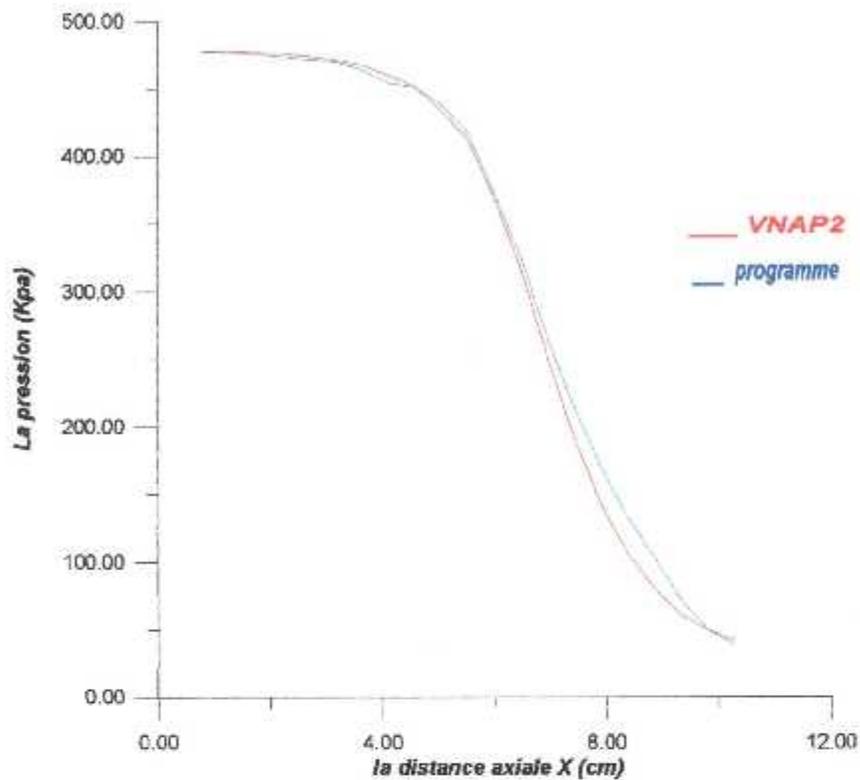


Fig.4.8 La pression sur la paroi

IV.3.3.4 Graphes des iso-machs et des isobares

La figure (4.9) représente la distribution des Iso-machs à l'intérieur d'une tuyère, nous remarquons que le nombre de mach augmente tout en se rapprochant de l'axe de la tuyère et cela jusqu'à atteindre le col, juste après ce dernier on se trouve dans la situation inverse autrement dit, le nombre de mach devient plus important sur la paroi que sur l'axe.

Nous constatons aussi que la ligne sonique est un peu décalée dans les nœuds internes ainsi que dans l'axe par rapport à la paroi

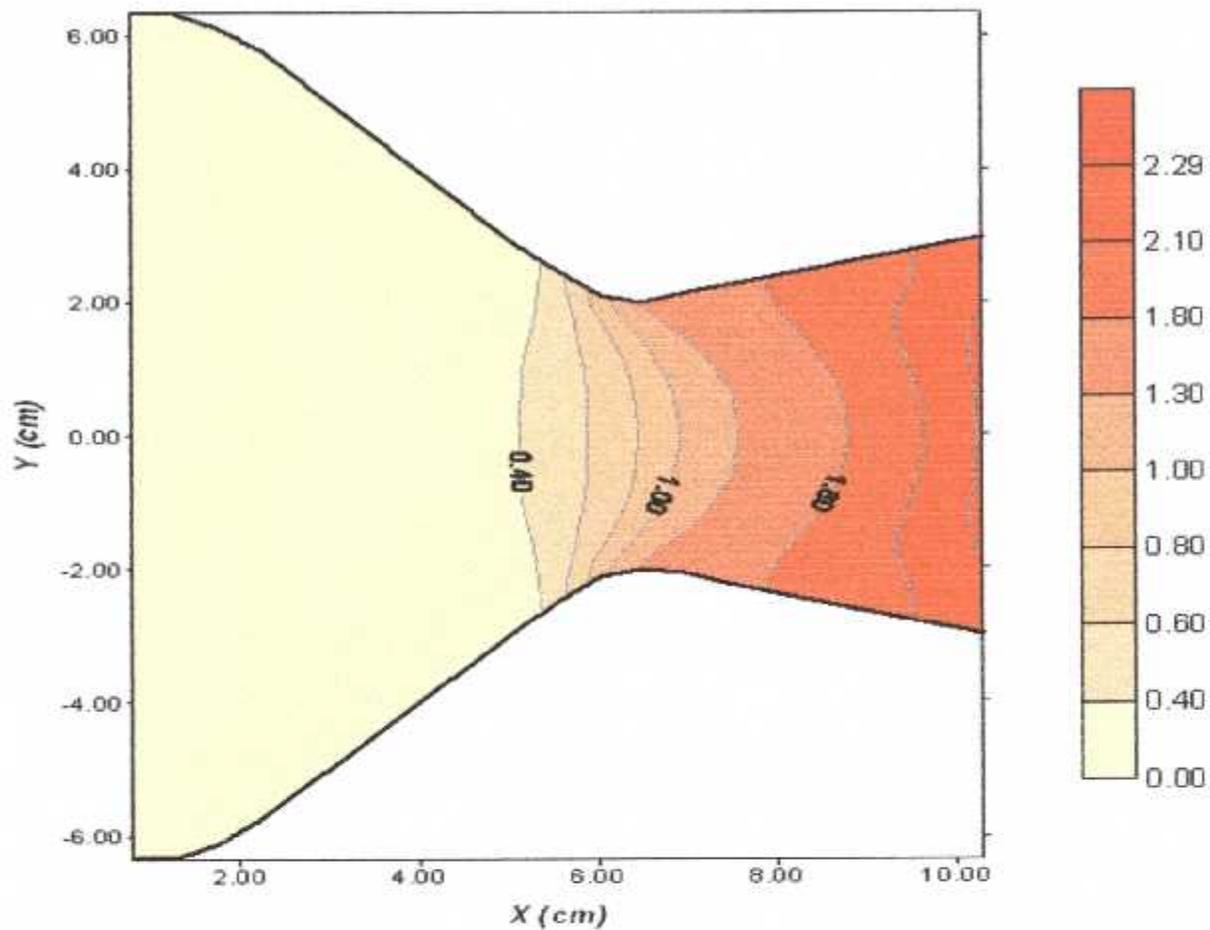


Fig.4.9 Champ des isoMachs à l'intérieur d'une tuyère

La figure (4.10) nous montre la répartition des isobares à l'intérieur de la tuyère, nous remarquons dans la partie convergente que la détente est plus importante sur l'axe et elle diminue tout en se rapprochant de la paroi, par contre dans la partie divergente nous nous retrouvons dans une situation inversée, c'est-à-dire la détente devient plus importante sur la paroi que sur l'axe de la tuyère.

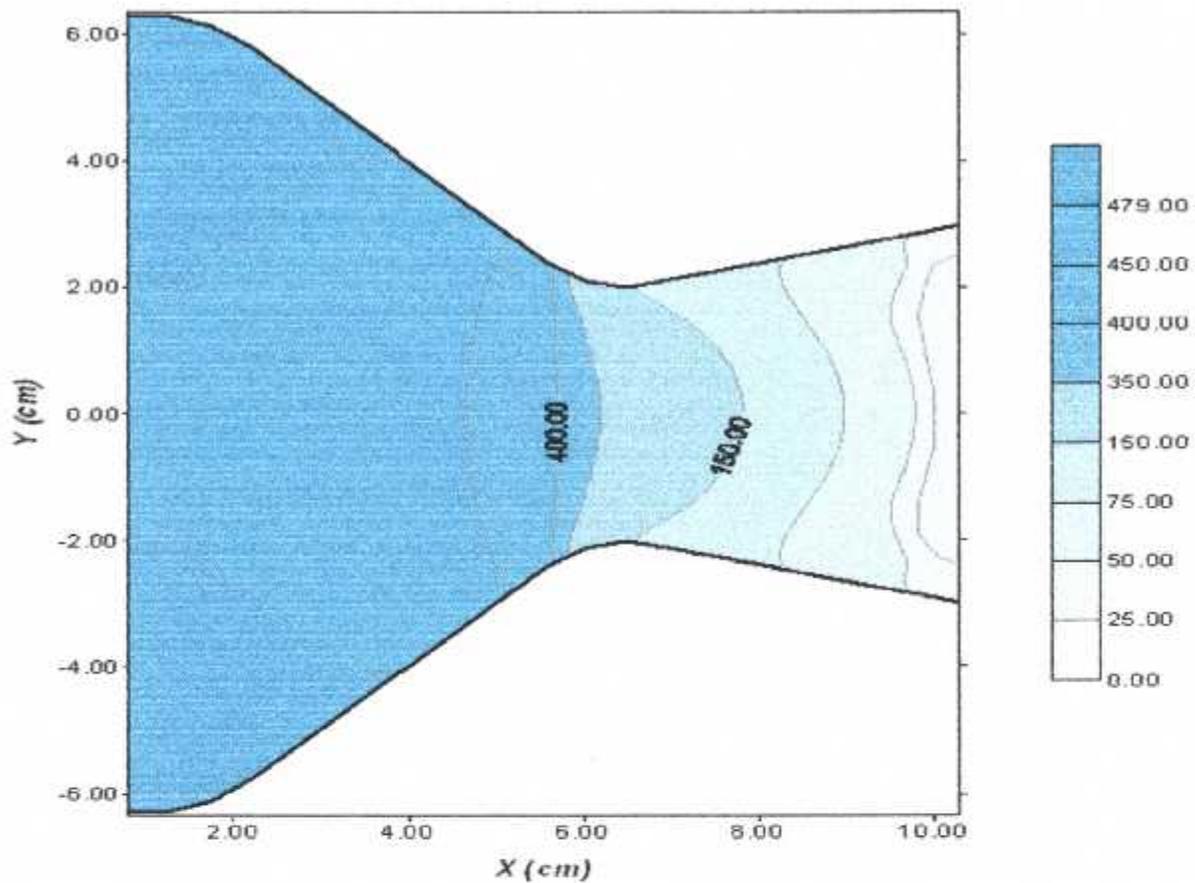


Fig. 4.10 Champ des isobares à l'intérieur d'une tuyère

IV.3.3.5 Performances de la tuyère :

Le tableau ci-dessous résume les différents paramètres de performance de la tuyère étudiée

	<i>Programme de calcul</i>	<i>Le code VNAP2</i>
DEBIT (Kg/s)	1.483	1.514
La poussée (N)	784.0	779.08
Coeff. de poussée	0.1287	0.1264
Vitesse effective (m/s)	529.491	514.582
Mach de sortie	2.311	2.256
Impulsion Spécifique (1/s)	53.97	52.47

Tableau 4.1 Comparaison des principaux paramètres de performance de la tuyère avec le code vnap2

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Le but essentiel de ce travail était de procéder à la simulation numérique de l'écoulement au sein des tuyères convergentes divergentes, le système d'équation d'Euler est pris comme modèle mathématique gouvernant cet écoulement, sa résolution est réalisée par l'utilisation de la méthode des différences finies, le schéma de MacCormack ^[1-2] est choisi pour les calculs dans les processus numériques.

Dans ce projet, la version explicite direct-inverse est utilisée respectivement dans les étapes prédicteur et correcteur induisant ainsi un schéma de précision d'ordre deux dans le temps et dans l'espace.

Malgré le choix strict du pas de calcul pour stabiliser le processus numérique, cependant on a montré dans le chapitre III que la stabilité d'un schéma en se basant sur l'analyse établie par Von Neumann est effectuée par l'étude de l'évolution de la matrice d'amplification de l'erreur, cette matrice est obtenue après avoir transformé le système d'équation d'Euler en formulation quasi-linéaire établie dans le chapitre II, cette étude a conduit à l'obtention d'une équation très compliquée pour trouver analytiquement le critère de stabilité. Dans ce cas la seule solution était l'utilisation du critère de Courant- Friedrich-Lewy (CFL).

Le programme de calcul qu'on a établi dans cette étude nous a permis le traitement d'une tuyère ayant une géométrie CV-DV. Les résultats obtenus concordent avec ceux obtenus par le code VNAP2 élaboré par LOS ALAMOS LABORATORY. En effet, ces résultats sont présentés en terme de courbes représentant les répartitions de la pression et le nombre de mach sur l'axe de symétrie et la paroi de la tuyère étudiée et aussi sous formes d'un tableau incluant les principaux paramètres de performances qu'on a discuté dans le chapitre I.

Cette étude nous a permis de mieux visualiser les champs de pression et de Mach au sein de la tuyère et on a constaté aussi que le col représente une zone de forts gradients.

Recommandations pour d'éventuels travaux futurs

L'actuelle étude pourrait recevoir d'intéressant développement. Nous en recommandons particulièrement aux futurs étudiants de tenir en compte de la formation d'onde de choc dans la partie divergente ainsi que la couche limite.

Nous souhaitons aussi que ce problème soit traité en faisant l'hypothèse que le fluide est calorifiquement imparfait.

Toutes fois, nous espérons que ce travail puisse servir de base pour un développement ultérieur progressif dans le domaine des écoulements supersoniques dans les tuyères de propulsion.

Les annexes

ANNEXE A

Schéma aux caractéristiques appliquées sur la paroi ($\xi = \text{Cte}$) plan de référence

1. Equations D'Euler :

Le plan de référence pour la paroi de la tuyère est $\xi = \text{Cte}$
Réécrivons alors le système sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = -\frac{\omega}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v^c \frac{\partial P}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) = -u^c \frac{\partial P}{\partial \xi} + c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

On pose :

$$\psi_1 = -\frac{\omega}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\psi_2 = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\psi_3 = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\psi_4 = -u^c \frac{\partial P}{\partial \xi} + c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

Le système d'équations s'écrira alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \psi_1 \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} = \psi_2 \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} = \psi_3 \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v^c \frac{\partial P}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) = \psi_4 \quad (A.4)$$

2. Détermination des courbes caractéristiques :

Soit la combinaison linéaire suivante :

$$(A-1) * I_1 + (A-2) * I_2 + (A-3) * I_3 + (A-4) * I_4 = 0$$

En remplaçant et on regroupe les même termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[(I_1 - c^2 I_4) \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v^c I_1 - c^2 v^c I_4) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right] + \left[I_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha \rho I_1 + v^c I_2) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \\ & \left[I_3 \frac{\partial v}{\partial t} + (\beta \rho I_3 + v^c I_3) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \left[I_4 \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\alpha}{\rho} I_2 + \frac{\beta}{\rho} I_3 + v^c I_4 \right) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 I_3 + \psi_4 I_4 \end{aligned} \quad (A-5)$$

Soit les vecteurs W_i tel que leurs composants sont :

$$W_1 = (v^c I_1 - c^2 v^c I_4, I_1 - c^2 I_4)$$

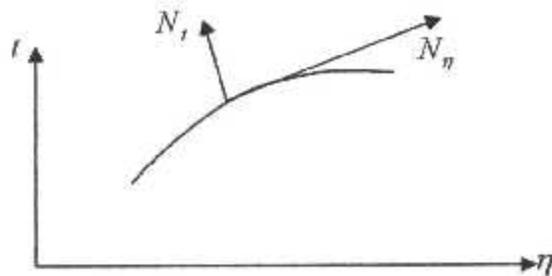
$$W_2 = (\rho \alpha I_1 + v^c I_2, I_2)$$

$$W_3 = (\rho \beta I_1 + v^c I_3, I_3)$$

$$W_4 = \left(\frac{\alpha}{\rho} I_2 + \frac{\beta}{\rho} I_3 + v^c I_4, I_4 \right)$$

Les vecteurs W_i sont tangents à la courbe caractéristique et perpendiculaire au vecteur normal

N tel que $N \begin{pmatrix} N_\eta \\ N_t \end{pmatrix}$.



Remarquons aussi que
$$\frac{N_\eta}{N_t} = -\frac{d\eta}{dt} \quad (A.6)$$

L'équation (A-5) sera réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla \rho \cdot W_1 + \nabla u \cdot W_2 + \nabla v \cdot W_3 + \nabla p \cdot W_4 = 0 \quad (A.7)$$

Avec
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Soit $\frac{d\rho}{W_1}$: dérivée de ρ dans la direction de W_1 . On peut écrire l'équation (A-7) sous la

forme suivante :
$$\frac{d\rho}{W_1} + \frac{du}{W_2} + \frac{dv}{W_3} + \frac{dp}{W_4} = 0 \quad (A-8)$$

Les vecteurs N et W_i sont perpendiculaires,

$$(N \cdot W_i = 0) : \begin{cases} N \cdot W_1 = 0 \\ N \cdot W_2 = 0 \\ N \cdot W_3 = 0 \\ N \cdot W_4 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant N et les W_i par leurs valeurs respectives on aura :

$$\begin{aligned} N_\eta (v^c I_1 - c^2 v^c I_4) + N_t (I_1 - c^2 I_4) &= 0 \\ N_\eta (\rho \alpha I_1 + v^c I_2) + N_t (I_2) &= 0 \\ N_\eta (\rho \beta I_1 + v^c I_3) + N_t (I_3) &= 0 \\ N_\eta (\alpha / \rho I_2 + v^c I_4 + \beta / \rho I_3) + N_t (I_4) &= 0 \end{aligned}$$

En regroupant les mêmes termes ; on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 (N_\eta + N_t) - c^2 I_4 (N_\eta v^c + N_t) &= 0 \\ I_1 (N_\eta \rho \alpha) + I_2 (N_\eta v^c + N_t) &= 0 \\ I_1 (N_\eta \rho \beta) + I_3 (N_\eta v^c + N_t) &= 0 \\ I_2 \left(N_\eta \frac{\alpha}{\rho} \right) + I_3 \left(N_\eta \frac{\beta}{\rho} \right) + I_4 (N_\eta v^c + N_t) &= 0 \end{aligned}$$

La forme matricielle nous donnera : $[A]I = 0$

$$\begin{bmatrix} N_\eta v^c + N_t & 0 & 0 & -c^2(N_\eta v^c + N_t) \\ N_\eta \rho \alpha & N_\eta v^c + N_t & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & c & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & N_\eta v^c + N_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il existe deux solutions à ce problème :

- 1) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0$ (solution triviale)
- 2) $\det(A) = 0$

$$\det(A) = (N_\eta + N_t)^4 - c^2(N_\eta v^c + N_t)^*$$

$$\begin{bmatrix} N_\eta \rho \alpha (N_\eta v^c + N_t)^* N_\eta \frac{\alpha}{\rho} + N_\eta \rho \beta (N_\eta v^c + N_t) N_\eta \frac{\beta}{\rho} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(N_\eta v^c + N_t)^2 - c^2 N_\eta^2 (\alpha^2 + \beta^2)] (N_\eta v^c + N_t)^2 = 0$$

Les solutions de cette dernière équation sont :

$$\begin{cases} N_\eta v^c + N_t = 0 & (A.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\eta v^c + N_t = \pm c N_\eta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & (A.10) \end{cases}$$

La première équation nous donne $\frac{N_t}{N_\eta} = -v^c$ or $-\frac{N_t}{N_\eta} = \frac{d\eta}{dt}$

On en déduit alors la première équation de la courbe caractéristique

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c \quad (A.11)$$

Les deux équations des deux courbes caractéristiques restantes sont déduites à partir de (A.10)

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c - c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (A.12)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c + c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (A.13)$$

3- Détermination des équations de compatibilité :

1^{er} cas : $\frac{d\eta}{dt} = v^c$

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c \Leftrightarrow N_\eta v^c + N_t = 0$$

En remplaçant dans le système matriciel, on aura

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \alpha & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution directe de ce système donne :

$$I_1 = 0$$

$$I_2 N_\eta \frac{\alpha}{\rho} + I_3 N_\eta \frac{\beta}{\rho} \Rightarrow I_2 = -\frac{\beta}{\alpha} I_3$$

I_3 et I_4 Sont les variables libres, on choisit alors :

$$I_1 = 0; I_2 = -\frac{\beta}{\alpha}; I_3 = I_4 = 1$$

L'équation (A.5) devient :

$$\begin{aligned} & -c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \end{aligned}$$

On aura :

$$-c^2 d\rho - \frac{\beta}{\alpha} du + dv + dp = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \right) dt$$

Finalement, les équations de compatibilité le long de la courbe caractéristique (A.11) qui n'est autre qu'une ligne de courant sont :

$$-\frac{\beta}{\alpha} du + dv = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 \right) dt \quad (A.14)$$

$$dp - c^2 d\rho = \psi_4 dt \quad (A.15)$$

$$2^{\text{eme}} \text{ et } 3^{\text{eme}} \text{ cas : } \frac{d\eta}{dt} = v^c \pm c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

On pose $\alpha^* = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Le système matriciel devient

$$\begin{bmatrix} \pm cN_\eta\alpha^* & 0 & 0 & -c^2(\pm cN_\eta\alpha^*) \\ N_\eta\rho\alpha & \pm cN_\eta\alpha^* & 0 & 0 \\ N_\eta\rho\beta & 0 & \pm cN_\eta\alpha^* & 0 \\ 0 & N_\eta\frac{\alpha}{\rho} & N_\eta\frac{\beta}{\rho} & \pm cN_\eta\alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\pm N_\eta\alpha^* I_1 \pm c^3 N_\eta\alpha^* I_4 = 0 \quad (A.16.a)$$

$$N_\eta\rho\alpha I_1 \pm cN_\eta\alpha^* I_2 = 0 \quad (A.16.b)$$

$$N_\eta\rho\beta I_1 \pm cN_\eta\alpha^* I_3 = 0 \quad (A.16.c)$$

$$N_\eta\frac{\alpha}{\rho} I_2 + N_\eta\frac{\beta}{\rho} I_3 \pm cN_\eta\alpha^* I_4 = 0 \quad (A.16.d)$$

On déduit alors de

$$(A.16.a) \Rightarrow I_1 = c^2 I_4$$

$$(A.16.b) \Rightarrow I_2 = \pm \frac{\rho\alpha}{c\alpha^*} I_1$$

$$(A.16.d) \Rightarrow I_3 = \pm \frac{\rho\beta}{\rho\alpha^*} I_1$$

On déduit que I_4 est une variable libre ; on choisit alors la valeur de $I_4 = 1$, on tire alors les valeurs suivantes de I_i

$$\begin{cases} I_1 = c^2 \\ I_2 = \pm \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} \\ I_3 = \pm \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} \\ I_4 = 1 \end{cases}$$

Après injections de ces valeurs (I_i) dans l'équation (A.5) on obtiendra :

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (v^c \pm c\alpha^*) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \pm \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v^c \pm c\alpha^*) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (v^c \pm c\alpha^*) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = c^2\psi_1 \pm \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} \psi_2 \pm \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} \psi_3 + \psi_4 \end{aligned}$$

En regroupant les mêmes termes ensemble, on aura:

$$dp \pm \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} du \pm \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} dv = (c^2\psi_1 \pm \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} \psi_2 \pm \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} \psi_3 + \psi_4) dt$$

En fin les équations de comptabilités le long des courbes caractéristiques (machline)

($\frac{d\eta}{dt} = v^c - c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\frac{d\eta}{dt} = v^c + c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$) sont respectivement :

$$dp - \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} du - \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} dv = (c^2\psi_1 - \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*}\psi_2 - \frac{\rho\beta c}{\alpha^*}\psi_3 + \psi_4)dt \quad (A.17)$$

Et

$$dp + \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*} du + \frac{\rho\beta c}{\alpha^*} dv = (c^2\psi_1 + \frac{\rho\alpha c}{\alpha^*}\psi_2 + \frac{\rho\beta c}{\alpha^*}\psi_3 + \psi_4)dt \quad (A.18)$$

ANNEXE B

Schéma aux caractéristiques appliquées à l'entrée ($\eta = \text{Cte}$) plan de référence

1. Equations D'Euler :

Le plan de référence à l'entrée de la tuyère est $\eta = \text{Cte}$

Réécrivons alors le système sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} = -v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\rho \delta v}{y_w} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = -v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} - v^c \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u^c \frac{\partial P}{\partial \xi} - c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -v^c \frac{\partial P}{\partial \eta} + c^2 v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta}$$

On pose :

$$\psi_1 = -v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\rho \delta v}{y_w} \right]$$

$$\psi_2 = -v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\psi_3 = -\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} - v^c \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\psi_4 = -v^c \frac{\partial P}{\partial \eta} + c^2 v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta}$$

Le système d'équations s'écrira alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} = \psi_1 \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \psi_2 \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} = \psi_3 \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u^c \frac{\partial P}{\partial \xi} - c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi_4 \quad (B.4)$$

2. Détermination des courbes caractéristiques :

Soit la combinaison linéaire suivante :

$$(B.1) * I_1 + (B.2) * I_2 + (B.3) * I_3 + (B.4) * I_4 = 0$$

En remplaçant et on regroupe les même termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[(I_1 - c^2 I_4) \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u^c I_1 - c^2 u^c I_4) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] + \left[I_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho w I_1 + u^c I_2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \\ & \left[I_3 \frac{\partial v}{\partial t} + (u^c I_3) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \left[I_4 \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{w}{\rho} I_2 + u^c I_4 \right) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] = \psi_1 I_1 + \psi_2 I_2 + \psi_3 I_3 + \psi_4 I_4 \end{aligned} \quad (B.5)$$

Soit les vecteurs W_i tel que leurs composants sont :

$$W_1 = (u^c I_1 - c^2 u^c I_4, I_1 - c^2 I_4)$$

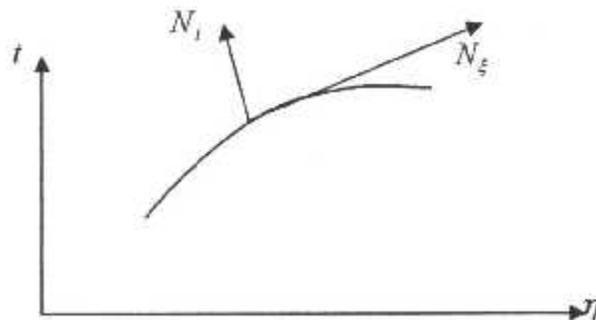
$$W_2 = (\rho w I_1 + u^c I_2, I_2)$$

$$W_3 = (u^c I_3, I_3)$$

$$W_4 = \left(\frac{w}{\rho} I_2 + u^c I_4, I_4 \right)$$

Les vecteurs W_i sont tangents à la courbe caractéristique et perpendiculaire au vecteur

normal N tel que $N \begin{pmatrix} N_\xi \\ N_t \end{pmatrix}$.



Remarquons aussi que
$$\frac{N_\xi}{N_t} = -\frac{d\xi}{dt} \quad (B.6)$$

L'équation (B-5) sera réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla \rho \cdot W_1 + \nabla u \cdot W_2 + \nabla v \cdot W_3 + \nabla p \cdot W_4 = 0 \quad (B.7)$$

Avec
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Soit $\frac{d\rho}{W_1}$: dérivée de ρ dans la direction de W_1 . On peut écrire l'équation (B.7) sous la

forme suivante :
$$\frac{d\rho}{W_1} + \frac{du}{W_2} + \frac{dv}{W_3} + \frac{dp}{W_4} = 0 \quad (B.8)$$

Les vecteurs N et W_i sont toujours perpendiculaires,

$$(N \cdot W_i = 0) : \begin{cases} N \cdot W_1 = 0 \\ N \cdot W_2 = 0 \\ N \cdot W_3 = 0 \\ N \cdot W_4 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant N et les W_i par leurs valeurs respectives on aura :

$$N_\xi (u^c I_1 - c^2 u^c I_4) + N_t (I_1 - c^2 I_4) = 0$$

$$N_\xi (\rho w I_1 + u^c I_2) + N_t (I_2) = 0$$

$$N_\xi (u^c I_3) + N_t (I_3) = 0$$

$$N_\xi (w/\rho I_2 + u^c I_4) + N_t (I_4) = 0$$

En regroupant les mêmes termes ; on obtient les équations suivantes :

$$I_1(N_\xi u^c + N_t) - c^2 I_4(N_\xi u^c + N_t) = 0$$

$$I_1(N_\xi \rho w) + I_2(N_\xi u^c + N_t) = 0$$

$$I_3(N_\xi u^c + N_t) = 0$$

$$I_2\left(N_\xi \frac{w}{\rho}\right) + I_4(N_\xi u^c + N_t) = 0$$

La forme matricielle nous donnera : $[A].I=0$

$$\begin{bmatrix} N_\xi u^c + N_t & 0 & 0 & -c^2(N_\xi u^c + N_t) \\ N_\xi \rho w & N_\xi u^c + N_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_\xi u^c + N_t & 0 \\ 0 & N_\xi \frac{w}{\rho} & 0 & N_\xi u^c + N_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il existe deux solutions à ce problème :

- 1) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0$ (solution triviale)
- 2) $\det(A) = 0$

$$\det(A) = (N_\xi + N_t)^4 - c^2(N_\xi u^c + N_t)$$

$$\left[N_\xi^2 w^2 (N_\xi u^c + N_t)(N_\xi u^c + N_t)^2 - c^2 N_\xi^2 w^2 \right] (N_\xi u^c + N_t)^2 = 0$$

Les solutions de cette dernière équation sont :

$$\begin{cases} N_\xi u^c + N_t = 0 & (B.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\xi u^c + N_t = \pm c N_\xi w & (B.10) \end{cases}$$

La première équation nous donne $\frac{N_t}{N_\xi} = -u^c$ or $-\frac{N_t}{N_\xi} = \frac{d\xi}{dt}$

On en déduit alors la première équation de la courbe caractéristique

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c \quad (B.11)$$

Les deux équations des deux courbes caractéristiques restantes sont déduites à partir de (B.10)

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c - c w \quad (B.12)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c + c w \quad (B.13)$$

3- Détermination des équations de compatibilité :

1^{er} cas :

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c$$

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c \Leftrightarrow N_{\xi} u^c + N_t = 0$$

En remplaçant dans le système matriciel, on aura

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{\xi} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{\xi} \frac{w}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution directe de ce système donne :

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = 0$$

I_3 et I_4 Sont les variables libres, on choisit alors :

$$I_1 = 0 ; I_2 = 0 ; I_3 = I_4 = 1$$

L'équation (B.5) devient :

$$-c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = \psi_3 + \psi_4$$

On aura :

$$-c^2 d\rho + dv + dp = (\psi_3 + \psi_4) dt$$

Finalement, les équations de compatibilité le long de la courbe caractéristique (B.11) qui n'est autre qu'une ligne de courant sont :

$$dv = \psi_3 \quad (B.14)$$

$$dp - c^2 d\rho = \psi_4 dt \quad (B.15)$$

2^{ème} et 3^{ème} cas :

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c \pm cw$$

Le système matriciel devient

$$\begin{bmatrix} \mp cN_\xi w & 0 & 0 & \pm c^2(cN_\xi w) \\ N_\xi \rho w & \mp cN_\xi w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp cN_\xi w & 0 \\ 0 & N_\xi \frac{w}{\rho} & 0 & \mp cN_\xi w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\mp N_\xi w I_1 \pm c^3 N_\xi w I_4 = 0 \quad (B.16.a)$$

$$N_\xi \rho w I_1 \mp cN_\xi w I_2 = 0 \quad (B.16.b)$$

$$cN_\xi w I_3 = 0 \quad (B.16.c)$$

$$N_\xi \frac{w}{\rho} I_2 \mp cN_\xi w I_4 = 0 \quad (B.16.d)$$

On déduit alors de

$$(B.16.a) \Rightarrow I_1 = c^2 I_4$$

$$(B.16.b) \Rightarrow I_2 = \pm \frac{\rho}{c} I_1$$

$$(B.16.d) \Rightarrow I_3 = 0_1$$

On déduit que I_4 est une variable libre ; on choisit alors la valeur de $I_4 = 1$, on tire alors les valeurs suivantes de I_i

$$\begin{cases} I_1 = c^2 \\ I_2 = \pm \rho c \\ I_3 = 0 \\ I_4 = 1 \end{cases}$$

Après injections de ces valeurs (I_i) dans l'équation (B.5) on obtiendra :

$$\pm \rho c \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u^c \mp cw) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (v^c \mp cw) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = c^2 \psi_1 \pm \rho c \psi_2 + \psi_4 \quad (B.17)$$

En regroupant les mêmes termes ensemble, on aura:

$$\begin{aligned} dp \pm \rho c du &= (c^2 \psi_1 \pm \rho c \psi_2 + \psi_4) dt \\ d\eta &= (v^c \mp wc) dt \end{aligned} \quad (B.18)$$

En fin les équations de comptabilités le long des courbes caractéristiques

***le long de la pathline**

$$\frac{d\xi}{dt} = u^c \quad (B.19)$$

$$dv = \psi_3 dt$$

$$dp - c dp = \psi_4 dt \quad (B.20)$$

***le long des machlines**

$$d\xi = (u^c - wc) dt$$

$$dp + \rho c du = (c^2 \psi_1 + \rho c \psi_2 + \psi_4) dt \quad (B.21)$$

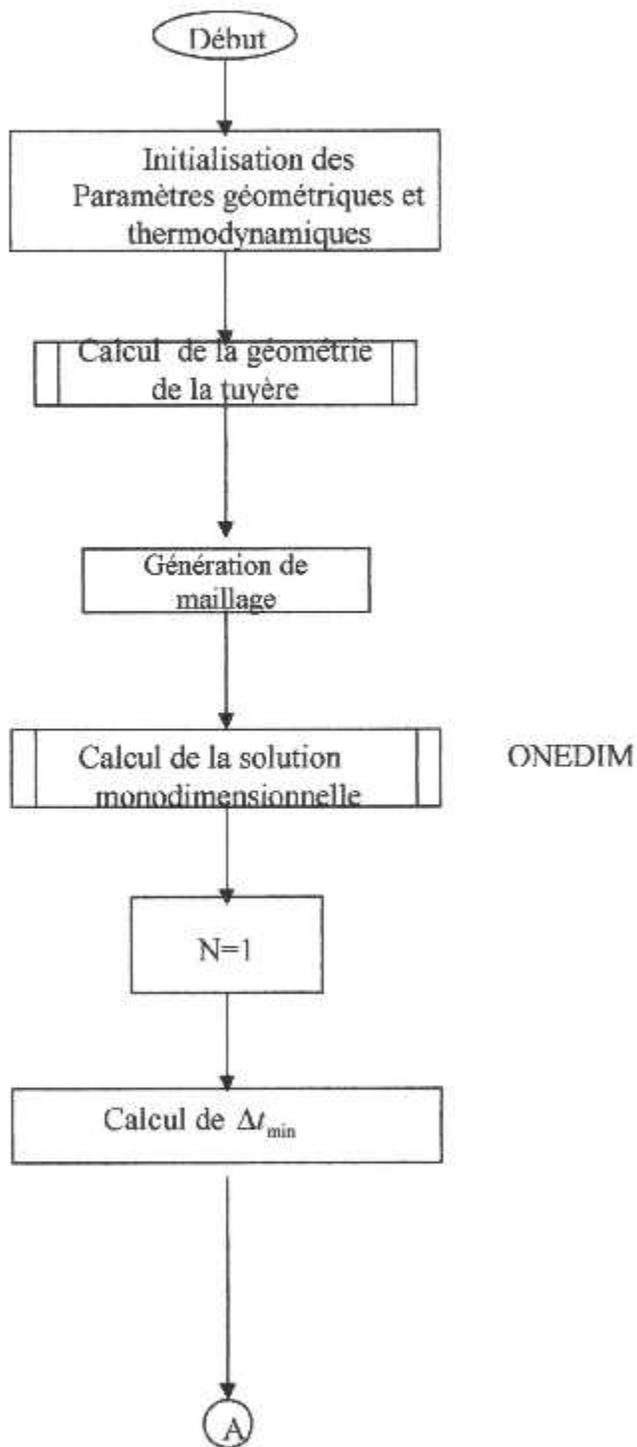
Et

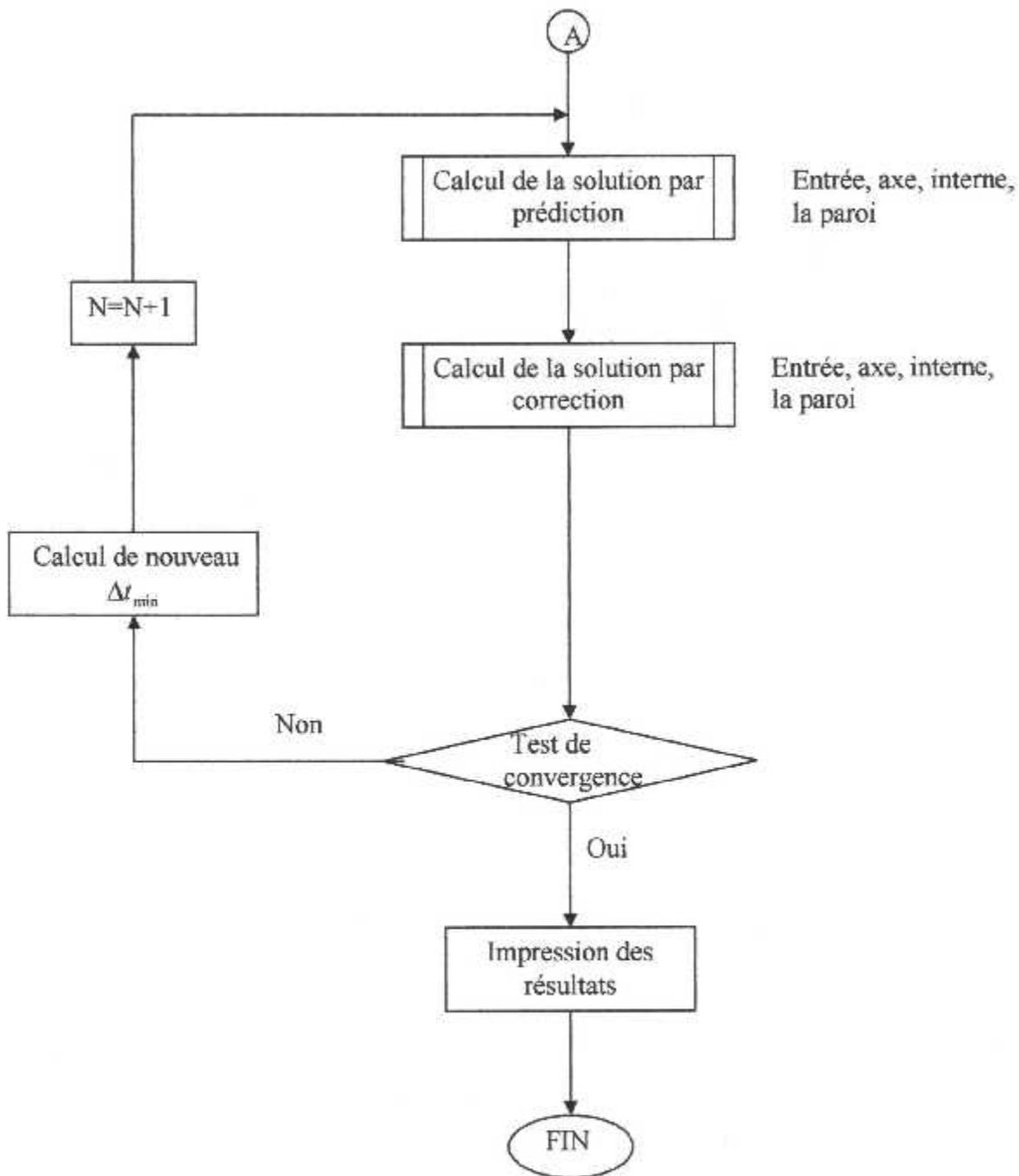
$$d\xi = (u^c + wc) dt$$

$$dp - \rho c du = (c^2 \psi_1 - \rho c \psi_2 + \psi_4) dt \quad (B.22)$$

ANNEXE C

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DU CALCUL





REFERENCES

Ouvrages

[1]. C. HIRSH

« Numerical computation of internal and external flows »

VOL I et II

[2]. C.A.J FLETCHER

“Computation Techniques for Fluid Dynamics”

VOL I ET II

[3]. MICHAEL C. CLINE, VNAP2:

“A computer program for computation of two dimensional, time dependent, Compressible, Turbulent Flow”

LOS ALAMOS NATIONAL LABORATORY, New Mexico 87545, August 1981

[4]. ANDERSON, JOHN DAVID

“Modern compressible flow, with historical perspective”

McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.

Thèses

[5]. KALI EL HADI,

« Comparaison des performances de Tuyères Supersoniques de Propulsion

Déterminées par la méthodes des caractéristiques et

des Différences finies »

Institut d'Aéronautique, Université de BLIDA, Thèse de Magister, 2002

[6]. KHELALFA NAWEL EL KAHINA,

« Application d'une procédure numérique et génération de maillage adaptée

pour les écoulements supersoniques interne »

Institut de Mécanique, Université de BLIDA, Thèse de Magister, Septembre

1993

[7]. GUERGADJ MOHAMED,

« Simulation Numérique des Ecoulements Compressibles Instationnaires,
à l'intérieur des Tuyères Supersoniques »

Institut de Mécanique, Université de BLIDA, Thèse de Magister, Octobre 2001

[8]. ZEBBICHE TOUFIK et YOUBI ZINEEDINE

« Fonction de Prandtl Mayer à haute température »

Séminaire CIMA'04, BOUMERDES (algerie) 30-10/2-11- 2004

SITES INTERNET :

www.onera.fr

www.limsi.fr

www.onecert.fr