

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

Département Construction



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du Master en Aéronautique
Option : Structures Aéronautiques

THEME :

**Détermination des fréquences propres d'un support
moteur d'un avion léger.**

- ❖ *Présenté par :* ✓ MAHDADI Naceredinne
- ❖ *Encadré par :* ✓ Dr KIRAD Abdelkader

Blida, octobre 2016

Résumé

Le choix d'une suspension efficace, augmente le rendement d'un appareil, assure une plus grande longévité, améliore le confort. Ce présent travail a pour objectif l'étude et la mise en place d'une suspension d'un groupe motopropulseur dans un avion léger, qui revient généralement à connaître les différents paramètres, statiques et dynamiques du motopropulseur et choisir le type de matériel (caractéristiques des supports). Le travail présenté consiste à élaborer un programme de calcul numérique, permettant de positionner et de choisir notre suspension.

Mots clés :

Transmissibilité, Fréquence propre, Moment cinétique, Moment dynamique, Couplage.

ملخص

اختيار نظام التعليق فعال، يزيد من كفاءة الجهاز، ويوفر قدرا أكبر من طول العمر، ويحسن من الراحة. ويهدف هذا العمل الحالي لدراسة وتنفيذ نظام تعليق المحرك في الطائرات الخفيفة، التي عادة ما تستلزم معرفة عدة خصائص، الساكنة والديناميكية للمحرك واختيار نوع المادة (خصائص الدعم). هذا العمل هو تطوير برنامج الحساب العددي، لوضع واختيار نظام تعليق لدينا. مفاتيح:

قابلية التحويل، التردد الطبيعي، العزم الحركي، العزم الديناميكي، الاقتران.

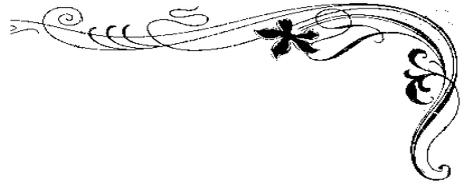
Summary

The choice of an effective suspension increases the output of a device, has Ensures Greater longevity, Improves comfort. This present work aims the study and implementation of a suspension of a power unit in a light aircraft, which generally returns to know the various parameters, statics, and dynamic of the power unit and to choose the kind of equipment (characteristics of the supports. This work is to develop a numerical calculation program, to position and to choose our suspension.

Key words:

Transmissibility, Natural frequency, Angular momentum, Dynamic moment, coupling.

Remerciements



Je Tiens À Remercier En Premier Lieu Le Bon Dieu De M'avoir Donné Le Courage, La Patience Et La Capacité De Mener Ce Travail À Terme.

J'adresse Mes Remerciements à Mon Promoteur Mr KIRAD Abdelkader De M'avoir Encadré Malgré La Charge Du Travail Et À Exprimer Mon Profonde Gratitude Pour M'avoir Proposé Ce Sujet.

*Je Remercie Également Les Membres De Jury Pour L'honneur Qui M'ont Accordé En Acceptant De Juger Mon Travail.
Ce Travail Est Pour Moi L'occasion De Vous Témoigner
Ma Profonde Gratitude.*

*Je Tiens À Témoigner Ma Gratitude À Toutes Personnes Ayant Contribué De Près Ou De Loin À Ce Travail Et Pour Leurs Soutient. Ainsi Que
Tous Les Amis De L'institut et de l'université.*



Naceredinne



Dédicaces



Je dédie ce mémoire

À mes parents Smail et Naima....

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eue pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation. Recevez à travers ce travail, toute ma gratitude et mes profonds sentiments.

Qu'Allah le tout puissant soit à vos côtés et vous accorde une meilleure santé et vous garde dans son vaste paradis.

À ma petite et grande famille

*Pour m'avoir donné la vie et la joie de vivre, mes frères et mes sœurs, **Noureddine, Bilal,***

***Khadidja et Rayane,** Vous m'avez aidé à construire les bases de ma vie*

*Je Le Dédie Également à tous les membres de ma chère famille maternelle et paternelle, et surtout mon oncle **Abdallah.***

À mes amis

*Je Le Dédie Également À Mes chers amis **Chaouki, Habib, Hamza, Azzou, Noufel, Sofiane, Ghafour, Nazim, Yasser, Erref** et tout le reste (Primaire, Moyen et lycée)*

Une Dédicace Spéciale

Spécialement à mon grand-père Qu'Allah le tout puissant lui accorde son paradis éternel.

À mes chères collègues

La branche Structure spécialement et toute la promo Aéro 2011 en général

Je ne peux pas trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur qui je peux compter.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour.



Naceredinne



SOMMAIRE

RESUME.

REMERCIEMENT.

DEDICACES.

SOMMAIRE.

LISTE DES SYMBOLES.

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.

Chapitre I

INTRODUCTION GENERALE.....	01
1. GENERALITES SUR LES AVIONS LEGERS :	04
1.1 INTRODUCTION :	04
1.2 Éléments de base d'un avion :	04
1.3 Généralités sur les moteurs :	10
1.4 COUPLE MOTEUR :	12
1.4.1 Préliminaires :	12
1.4.2 Détermination du couple moteur en fonction des pressions :	13
1.5 DEVELOPEMENT DU COUPLE MOTEUR EN SERIE DE FOURIE :	14
1.6 IMPORTANCE DES DIFFERENTES HARMONIQUES :	14
1.7 COUPLES D'INERTIE DU AU MOTEUR :	17
1.8 UTILISATION DES RESULTATS POUR L'EXCITATION SUR LES MANETONS :	18
1.9 BATI DE MOTEUR D'UN AVION :	18
1.9.1 Divers Bâtis :	18
1.9.2 Bâtis coniques :	19
1.9.3 Bâtis de Dynafocal :	19
1.9.4 Bâti de lit :	20
1.9.5 Compensation de force de poussée :	20
1.9.6 Bâtis de choc :	21
1.10 CONCLUSION :	21

Chapitre II

2.	DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UN SUPPORT :	23
2.1	INTRODUCTION :	23
2.1.1	Rôle statique	23
2.1.2	Rôle dynamique	23
2.2	CARACTERISTIQUES DES SUPPORTS ELASTIQUES	23
2.2.1	Propriétés des supports élastiques :	23
2.2.2	Propriétés des élastomères :	24
2.3	SCHEMATISATION D'UN SUPPORT ELASTIQUE EN CAOUTCHOUC.	25
2.4	ETUDE DE LA RAIDEUR :	25
2.4.1	Matrice de raideur :	25
2.4.2	Importance relative des moments de torsion.	27
2.4.3	Matrice de raideur dans des axes quelconques :	29
2.5	ETUDE DE L'AMORTISSEMENT :	32
2.6	ETUDE DE L'IMPLANTATION D'UN GROUPE MOTOPROPULSEUR DANS UN AVION	32
2.6.1	Définition des repères	33
2.6.2	Schématisation du système à étudier	33
2.6.3	Mise en place de l'étude	35
2.6.4	Enoncé des théorèmes généraux	36
2.6.5	Hypothèses complémentaires simplificatrices	36
2.6.6	Calcul du torseur des actions des supports élastiques	37
2.6.7	Calcul de la résultante dynamique : $\vec{\gamma}^0(\Sigma, t)$	42
2.6.8	Calcul du moment dynamique : $\vec{\delta}^0(\Sigma, \mathbf{G}, t)$	44
2.6.9	Application des théorèmes généraux de la dynamique	49
2.6.10	Résolution du système des 6 équations de la mécanique	51
2.7	INTERPRETATION DES RESULTATS :	61
2.7.1	Pulsation propres et amplitudes de vibration	61
2.7.2	Etude des efforts sur les supports élastiques	61
2.8	NOTION DE TRANSMISSIBILITE :	63
2.9	CONCLUSION :	66

Chapitre III

3.	ETUDES DES COUPLAGES :	68
3.1	ETUDES DES COUPLAGES :	68
3.1.1	Introduction :	68
3.1.2	Origine des couplages :	68
3.1.3	Conditions de découplage :	68
3.1.4	Considérations géométriques :	70
3.2	ETUDE DES CHARGES STATIQUE EN FONCTION DES CONDITIONS DE VOL :	73
3.2.1	Mise en place des éléments d'étude :	73
3.2.2	Application des théorèmes généraux de la mécanique :	74
3.3	METHODE DE CALCUL :	79
3.4	ETUDE DU CAS PARTICULIER :	80
3.4.1	Suspension type ORION :	80
3.4.2	Suspension type ROBIN 3000 :	83
3.5	CONCLUSION :	88

Chapitre IV

4.	RESULTATS ET INTERPRETATIONS :	90
4.1	INTRODUCTION	90
4.2	PROGRAMME DE CALCUL	90
4.3	ORGANIGRAMME DE CALCUL	90
4.4	RESULTATS OBTENUS :	93
4.4.1	Suspension type ORION :	93
4.4.2	Suspension type ROBIN 3000 :	97
4.5	INTERPRETATION :	101
4.6	CONCLUSION :	101
	CONCLUSION GENERALE	102
	Bibliographie :	103

Liste des symboles

<i>Symboles</i>	<i>signification</i>	<i>unité</i>
A_3, B_3, C_3	moment d'inertie du moteur suivant ses axes principaux	kg. m ²
a, b	coordonnées de l'hélice suivant Y_3 et Z_3	m
c_i, d_i, e_i	coordonnées du support élastique i suivant les axes X_3, Y_3 et Z_3	m
$\lambda \ \mu \ \nu$	Positions angulaires des directions de raideur principales du support élastique i par au repère (3)	
A_4, B_4, C_4	moments d'inertie de l'hélice suivant ses axes principaux	kg. m ²
\vec{R}_d	Résultante dynamique dans son mouvement par rapport au repère(o)	
$N \vec{M}_G(d)$	moment dynamique de pris en G dans son mouvement par rapport au repère(o)	N.m
$\vec{\omega}$	Pulsation de l'excitation sur le groupe motopropulseur	rd
$\vec{\omega}_0$	Pulsation propre	rd
λ	transmissibilité	

Liste des figures

Figure 1.1-les différents éléments d'un avion léger	4
Figure 1.2- la structure générale d'une aile d'avion	5
Figure 1.3- la structure d'une aile d'avion	6
Figure 1.4- structure en treillis	6
Figure 1.5- les trois axes de mouvement d'un avion.....	8
Figure 1.6- les différents parties mobiles d'un avion.....	9
Figure 1.7- représentation du couple.....	12
Figure 1.8- représentation du couple en fonction des pressions.....	13
Figure 1.9- représentation des couples harmoniques de chaque cylindre	16
Figure 1.10- les trois harmoniques dangereuses.....	17
Figure 1.11- forme d'un bâti conique	19
Figure 1.12- forme d'un bâti Dynafocal.....	20
Figure 1.13- forme d'un bâti de lit.....	20
Figure 1.14- forme d'un bâti de choc	21
Figure 2.1-le modèle KELVIN.....	25
Figure 2.2-courbe de la zone d'utilisation du support	26
Figure 2.3-le comportement du support.....	27
Figure 2.4-le comportement du support (cas de 2 supports)	28
Figure 2.5-courbe du couple de torsion	29
Figure 2.6-les trois repères du mouvement	30
Figure 2.7-position du centre de gravité du moteur	33
Figure 2.8-schematisation du groupe motopropulseur.....	35
Figure 2.9-Schema de transmissibilité.....	64
Figure 3.1-position du centre de gravité de l'avion Ga.....	73
Figure 3.2-Position des supports (type ORION)	80
Figure 3.3-Position des supports (type ROBIN 3000)	83
Figure 4.1-L'organigramme	92
Figure 4.2-transmissibilité pour une excitation du type F_x (ORION)	94
Figure 4.3- transmissibilité pour une excitation du type F_y (ORION)	94
Figure 4.4- transmissibilité pour une excitation du type F_z (ORION)	95
Figure 4.5- transmissibilité pour une excitation du type M_x (ORION).....	95
Figure 4.6- transmissibilité pour une excitation du type M_y (ORION).....	96

Figure 4.7- transmissibilité pour une excitation du type Mz (ORION).....	96
Figure 4.8- transmissibilité pour une excitation du type Fx (ROBIN 3000)	98
Figure 4.9- transmissibilité pour une excitation du type Fy (ROBIN 3000)	98
Figure 4.10- transmissibilité pour une excitation du type Fz (ROBIN 3000)	99
Figure 4.11- transmissibilité pour une excitation du type Mx (ROBIN 3000)	99
Figure 4.12- transmissibilité pour une excitation du type My (ROBIN 3000)	100
Figure 4.13- transmissibilité pour une excitation du type Mz (ROBIN 3000)	100

Liste des tableaux

Tableau 1.1-les valeurs du déphasage φ pour les différentes valeurs de q	15
Tableau 3.1-les raideurs en fonction de l'angle β	86
Tableau 3.2-les raideurs correctes en fonction de β	87
Tableau 4-1– caractéristiques d'une suspension (type ORION)	93
Tableau 4-2– caractéristiques d'une suspension (type ROBIN 3000)	97

INTRODUCTION GENERALE

La suspension élastique permet une répartition mieux équilibrée des charges statique. Les supports élastiques absorbent sans difficultés les petites différences d'entre-axes ou de conformation, moyennant des efforts négligeables, permettant ainsi des tolérances plus larges et de montages plus faciles. La suspension élastique absorbe, sans difficulté et sans introduire de contrainte dangereuse, de petits déplacements relatifs de la machine par rapport à son support fixe, résultant par exemple des efforts de la dilatation thermique ou des déformations des châssis. Le rôle essentiel des suspensions élastiques, notamment ce qui nous intéresse c'est le cas des vibrations qui vont être spécialement étudiées. Une machine suspendue élastiquement est soumise à une vibration lorsqu'elle subit des sollicitations périodiques alternées qui se traduisent par des oscillations plus ou moins importantes. Le but de la suspension élastique est d'atténuer la transmission des vibrations et non pas d'empêcher la machine de vibrer [5]. Pour montrer l'importance de ces différents effets, on a adopté des modèles mathématiques de suspension. Le plus classique est le modèle de KELVIN composé d'un ressort pur et d'un amortisseur monté en parallèle. Le plan de ce mémoire se présente de la façon suivante :

- Le premier chapitre est consacré à connaître les différents éléments de base constituant un avion léger, le groupe motopropulseur, le couple moteur, les différentes harmoniques qui influent sur le moteur ainsi que les divers bâtis moteur.
- Dans le deuxième chapitre, on détermine les différentes caractéristiques des supports élastiques tels que la résultante dynamique, le moment dynamique et la matrice de raideur du groupe motopropulseur.
- Le troisième chapitre est réservé pour l'étude des couplages, l'étude des charges statiques en fonction des conditions de vol et l'étude de deux cas particuliers (suspension type ORION et type ROBIN 3000).

- En fin, dans le dernier chapitre, nous avons développé un programme numérique pour le calcul des efforts sur les appuis et des coefficients de transmissibilité, et discussion des résultats et des graphes obtenus.

CHAPITRE I :

GENERALITES SUR LES AVIONS LEGERS

I. GENERALITES SUR LES AVIONS LEGERS :

I.1 INTRODUCTION :

Avant même de voler, le premier problème qui s'est posé à l'homme désireux d'imiter les oiseaux a été de quitter le sol. Vers 1500, Léonard de Vinci, le premier, étudia scientifiquement le problème. Voler est le plus vieux rêve de l'homme. Il est devenu réalité avec l'apparition de l'avion. Au fur et à mesure des découvertes, des formes et des structures ont été développées en vue d'adapter l'avion à des besoins [9].

I.2 Éléments de base d'un avion :

L'avion est un assemblage d'éléments qui, lorsqu'ils sont combinés, permettent le vol.

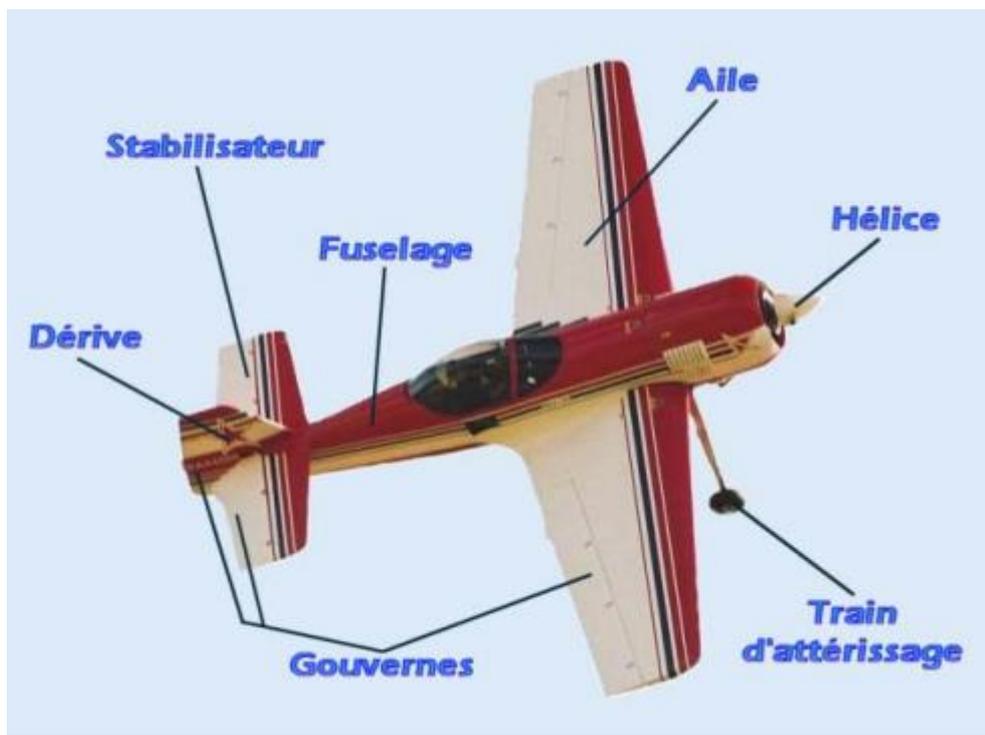


Figure I.1-les différents éléments d'un avion léger [9].

1) L'aile :

C'est l'élément de base de tout avion : elle a une forme et un profil permettant à l'appareil de voler. Elle est munie d'organes importants qui permettent de contrôler l'avion.

Voici la structure générale d'une aile d'avion :

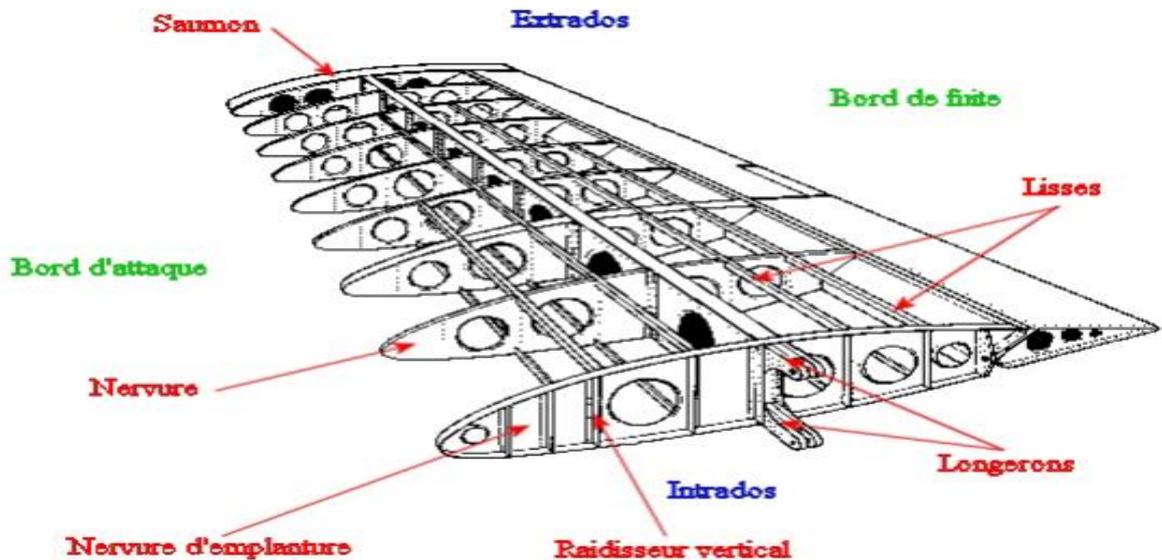


Figure I.2- la structure générale d'une aile d'avion [9].

Cette structure permet de créer un volume de forme bien déterminée avec un minimum de matière. Ainsi l'aile a une masse relativement faible par rapport à son volume du fait que ce dernier soit principalement constitué d'air. La structure est néanmoins étudiée pour garantir la solidité de l'ensemble.

Elle est constituée d'éléments clés qui ont tous une fonction bien précise :

- Les nervures donnent à l'aile une forme très spécifique : son profil.

Ces dernières sont plus ou moins allégées et renforcées dans les parties soumises à de fortes contraintes mécaniques.

- Les longerons sont les pièces les plus solides d'une aile. Les nervures viennent s'y fixer et les fixations de l'aile au fuselage y sont incorporées, au niveau de l'implanture. Les lisses sont semblables aux longerons mais n'ont qu'un rôle de renfort.

Par-dessus cette structure, l'aile est soit recouverte directement d'une toile soit coffrée puis entoilée.



Figure I.3- la structure d'une aile d'avion [9].

2) Le fuselage :

Il comprend le poste de pilotage (verrière), la ou les cabine(s) pour les passagers, les soutes à bagages. C'est sur le fuselage que viennent se fixer les autres parties de l'avion.

En effet, bien que plus lourds que l'air, l'avion comme le planeur se doivent d'être relativement légers. En plus de cela, ils doivent faire preuve en même temps de robustesse et de souplesse pour absorber les efforts inhérents au vol.

Suivant l'utilisation que l'on a d'un appareil, ce dernier répond à certaines exigences, comme par exemple être stable, avoir une faible consommation en carburant, pouvoir embarquer une charge conséquente, être adapté à la voltige, à la vitesse ...

D'une manière générale, en aéronautique, la masse est la principale contrainte.

Pour pallier à ce problème, l'homme a élaboré des structures robustes, évidées au maximum et se réduisant au strict nécessaire pour lui garantir un vol sain mais en toute sécurité. Ainsi les ailes sont constituées de nervures et les premiers fuselages sont en treillis de bois.

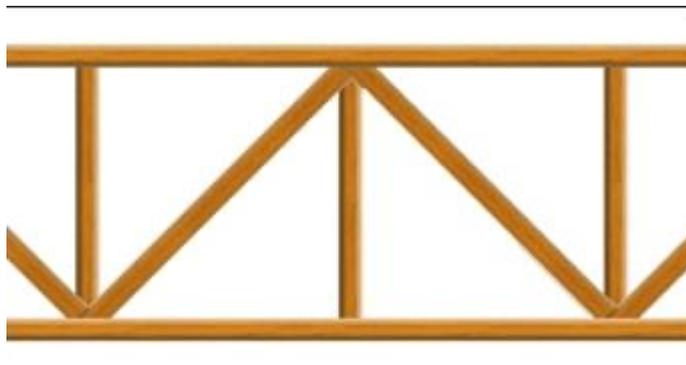


Figure I.4- structure en treillis [9].

Ce mode de construction en treillis est conçu pour contrer les efforts et les déformations des structures. La technique consiste à fabriquer un parallélogramme et à raccorder les angles opposés entre eux. De cette manière la structure créée ne peut se déformer.

Au fur et à mesure de nouvelles matières sont apparues et ont été utilisées dans l'aéronautique.

Aux tous débuts, les avions étaient constitués de bois et de toile. Très vite, vers 1911, l'acier et l'aluminium ont fait leur entrée dans la composition des structures. De nos jours, une multitude de matériaux se prêtent à la construction aéronautique. L'arrivée des matières composites a été une révolution.

En effet, ces matières composées d'une résine et de fibres de verre, de carbone ou de kevlar présentent des qualités supérieures aux autres matériaux traditionnels, notamment du point de vue mécanique par leur solidité et leur souplesse. En contrepartie, à volume égal, elles sont généralement plus lourdes que les matières traditionnelles comme le bois.

3) L'empennage :

Il se trouve à l'arrière du fuselage et se compose de la dérive et du stabilisateur, comprenant chacun une gouverne. Les parties fixes servent à la stabilisation tant verticale qu'horizontale de l'appareil.

Le coffrage consiste simplement à fermer la structure avec une plaque, pour la rendre plus robuste mais aussi plus lourde.

Vers 1900, aux débuts de l'aviation, les premiers avions utilisaient le bois et des tissus d'origine naturelle comme principaux matériaux.

Très vite, dès 1911, nous voyons apparaître le métal dans la construction aéronautique : peu à peu les fuselages sont revêtus d'acier et les voilures d'aluminium.

Depuis, avec l'évolution des techniques, de nouveaux matériaux ont été développés, améliorant sans cesse les performances en matière de solidité et de légèreté au niveau des structures.

Durant le vol, l'avion peut effectuer des mouvements dans les trois dimensions, selon trois axes différents :



Figure I.5- les trois axes de mouvement d'un avion [9]

Il s'agit de lignes imaginaires dont le tracé dépend de la forme de l'appareil. Ces trois axes se recoupent perpendiculairement en un point que l'on considère comme le centre de gravité de l'avion.

L'axe longitudinal traverse le fuselage de part en part dans sa longueur, depuis l'hélice jusqu'à l'empennage. Les mouvements affectant l'avion autour de cet axe s'appellent le roulis.

L'axe transversal va d'une extrémité à l'autre des ailes. Les mouvements affectant l'appareil autour de cet axe s'appellent le tangage.

L'axe vertical est le seul qui ne longe pas un des composants essentiels de la forme de l'appareil. Les mouvements affectant l'avion autour de cet axe sont appelés des lacets.

Pour diriger un avion, il faut un certain nombre d'organes construits de façon à influencer le vol de l'appareil selon ses trois axes.



Figure I.6- les différents parties mobiles d'un avion [9]

4) Les ailerons :

Ce sont des gouvernes situées sur le bord de fuite (bord arrière) des ailes. Ils provoquent un mouvement autour de l'axe de roulis.

Les ailerons sont manœuvrés à l'aide du manche. En tirant ce dernier vers la droite, nous provoquons deux mouvements combinés des ailerons : l'aileron de l'aile gauche bascule vers le bas pendant que celui de l'aile droite se relève. En tirant le manche vers la gauche, le résultat est exactement inverse : l'aileron gauche se relève tandis que le droit s'abaisse. L'aileron abaissé accroît la portance s'exerçant sur l'aile concernée qui se relève. Le résultat est une rotation autour de l'axe longitudinal de l'avion qui s'incline.

5) La gouverne de profondeur :

Elle se trouve sur le stabilisateur, à l'arrière du fuselage. Elle provoque la rotation de l'avion autour de son axe transversal. La gouverne de profondeur est constituée de deux ailerons.

En manœuvrant le manche, le pilote accentue la courbure de ces derniers dans un sens ou dans l'autre, ce qui engendre une portance accrue ou diminuée. En poussant le manche vers l'avant, on abaisse la gouverne de profondeur, ce qui a pour effet de faire piquer l'avion. En tirant sur le manche, la gouverne se relève et l'appareil se cabre.

6) La gouverne de direction :

La gouverne de direction provoque des mouvements en lacets autour de l'axe vertical de l'avion. C'est la partie articulée de la dérive. Elle est actionnée de la cabine à partir d'une paire de pédales. Son principe de fonctionnement est le même que celui des autres gouvernes que nous venons de décrire : en pivotant, elle accentue la courbure dans un sens ou dans l'autre, ce qui augmente la force du vent du même côté et fait donc tourner l'appareil selon l'axe vertical. En appuyant sur la pédale de droite, la gouverne pivote vers la droite, la queue de l'avion se déplace vers la gauche tandis que son nez et le restant de l'appareil se déplacent vers la droite.

La gouverne a été inventée par les frères Wright vers 1903. Leurs premiers ailerons consistaient en un système de gauchissement des ailes, c'est à dire que le pilote jouait sur la souplesse des ailes en les déformant pour faire pencher l'avion d'un côté ou de l'autre. Les autres gouvernes étaient semblables à celles que l'on connaît aujourd'hui. Aux débuts de l'aviation, vers 1900, de nombreuses contraintes ont ralenti le développement des aéronefs.

I.3 Généralités sur les moteurs :

a) Le principe du GMP :

Le moteur d'avion léger est en général un moteur à pistons à quatre temps, de 4 ou 6 cylindres à plat (Flat-four, Flat-six) et à refroidissement par air.

Le moteur est monté sur un "bâti - moteur" fixé à la cellule. Il est isolé de l'habitacle par une "**cloison pare-feu**" métallique destinée à le protéger des risques d'incendie.

La différence essentielle avec les moteurs de voitures porte sur l'allumage. En effet, sauf pour quelques types de moteurs à allumage par bobine ou Delco, le moteur d'avion possède un allumage par magnéto. En outre, par mesure de sécurité et pour assurer une meilleure combustion du mélange, les moteurs d'avion comportent deux circuits d'allumage indépendants et chaque cylindre compte deux bougies reliées chacune à une magnéto [7].

En outre, le moteur d'avion tourne à un régime maximum de l'ordre de 2500 t/m. Il est donc plus lent que le moteur de voiture. De plus, le volant d'inertie du moteur de voiture n'existe pas pour le moteur d'avion car l'hélice en tient lieu.

b) Les caractéristiques du GMP :

Parmi les diverses caractéristiques des GMP, on peut distinguer les principes généraux suivants [7] :

- La consommation horaire en litre est égale à 1/4 de la puissance en CV et 1/3 en Kw.
- La mise en puissance se fait d'abord par la richesse puis le pas et ensuite l'admission.
- La mise en réduction se fait d'abord par l'admission puis le pas et ensuite la richesse.
- Les bougies ont une température de fonctionnement entre 200 et 500°.
- Le carburant : 80 (rouge) - 100/130 (verte) - 115/145 (violette) - 100/130 (bleue).
- Parmi les organes de contrôle et de conduite, on trouve : la pression d'essence et d'huile, la pression d'admission, la richesse, le débitmètre, le jaugeur, le nombre de tours RPM, la température culasse, la température carburateur, la température extérieure, l'EGT (température de gaz à l'échappement).
- La possibilité d'auto-allumage qui est en fait un allumage se produisant contacts coupés à la suite de points rouges dans la culasse (électrodes de bougie, calamine, etc...) résultant bien souvent d'un mauvais refroidissement lors du retour au parking [7].
- La possibilité de détonation qui est une explosion spontanée des gaz avant le point mort haut. Dans ce cas, la température critique est atteinte par compression, les cylindres étant mal refroidis au cours de la mise en vitesse. Pour y remédier, il est nécessaire de régler sur plein riche.
- La possibilité du givrage du carburateur qui peut survenir jusqu'à + 20°C.
- L'effet de température donne pour une augmentation de 1° une diminution de la puissance de 0,3%
- La richesse 1 correspond à un mélange carburé de 1/15.
- La consommation spécifique Csp est exprimée en kg/CV/h.

Dans notre cas d'étude, on a choisi le moteur PRV V6 à 90°.

I.4 COUPLE MOTEUR :

I.4.1 Préliminaires :

L'étude du couple moteur peut être conduite de deux manières distinctes :

1) Mesure de couple directe sur un tronçon de la ligne d'arbre au moyen d'un couple-mètre.

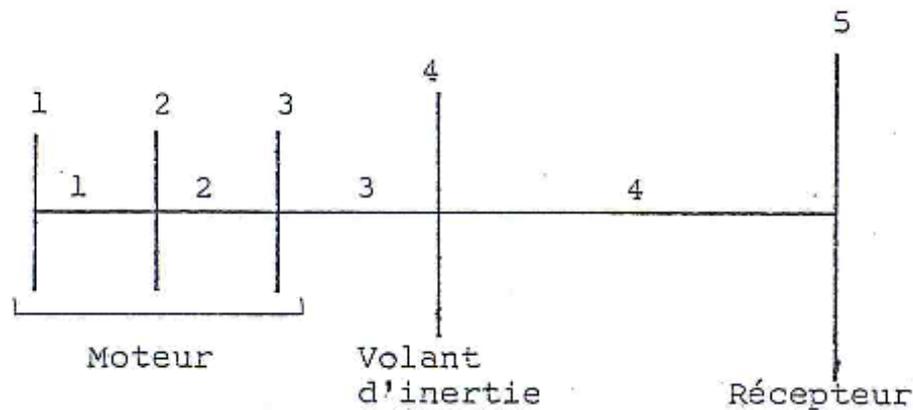


Figure I.7- représentation du couple

L'installation d'un couple-mètre ne peut se faire qu'à l'intérieur du moteur sur le tronçon 4. On a ainsi l'allure du couple moteur instantané sur le récepteur. Avec un tel procédé, on ne peut pas définir l'excitation de torsion réelle sur chaque élément constituant le moteur à cause des inerties qui filtrent les couples moteur de chaque cylindre. Or, nous avons vu que pour étudier une ligne d'arbre en torsion, il était nécessaire de connaître les excitations sur chaque élément de la ligne d'arbre.

Cette méthode d'analyse du couple ne peut pas convenir pour l'étude en vibration forcée d'un ensemble composé d'un moteur à explosion et d'un récepteur, mais servira de vérification aux calculs effectués avec pour base une autre méthode d'estimation du couple moteur.

2) Pour connaître l'excitation de torsion sur chaque élément du moteur, on peut déterminer les efforts sur les pistons par l'intermédiaire de mesures expérimentales de pression instantanée dans les chambres de combustion.

I.4.2 Détermination du couple moteur en fonction des pressions :

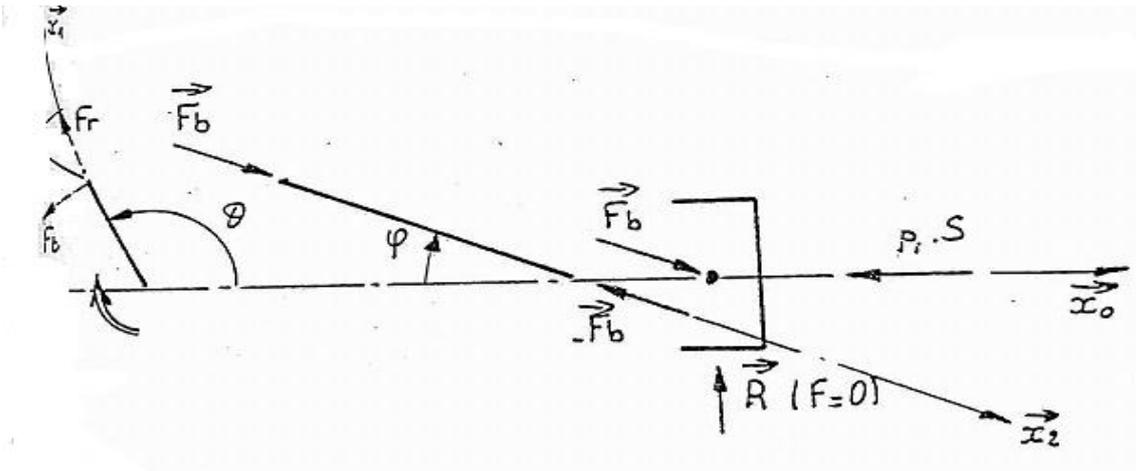


Figure I.8- représentation du couple en fonction des pressions

La force qui s'exerce sur la tête du piston est en fonction de la pression des gaz de combustion et a pour valeur $P_i S$

Nous pouvons en déduire la force dans la bielle $F_b = P_i S / \cos \varphi$ d'où $F_t = \frac{P_i S \sin(\varphi + \theta)}{\cos \varphi}$

Le couple instantané correspondant à ce piston est de la forme :

$$c = \frac{P_i S \sin(\varphi + \theta) r}{\cos \varphi}$$

Nous pouvons remarquer que : $r \sin \theta = \ell \sin \varphi$

$$\text{D'où : } \sin \varphi = \frac{r}{\ell} \sin \theta \text{ et } \cos \varphi = \left[1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

$\sin(\varphi + \theta)$ prend la forme :

$$\sin(\varphi + \theta) = \frac{r}{\ell} \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \left[1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

D'où le couple instantané pour un piston est de la forme :

$$C_i = \frac{P_i S r \left[\frac{r}{\ell} \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \left[1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2} \right]}{\left[1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}}$$

Du relevé de la courbe de pression en fonction de θ . Nous pouvons donc déduire le couple moteur à tout instant. Pour que celui-ci soit utilisable pour des calculs de vibration, il est intéressant de le développer en série de fourrier.

I.5 DEVELOPEMENT DU COUPLE MOTEUR EN SERIE DE FOURIER :

Le couple moteur peut être mis sous la forme :

Les coefficients A_q et B_q peuvent être calculés pour une période T par les expressions :

$$A_q = \frac{2}{T} \int_0^T C(\theta) \sin q\theta d\theta$$

$$B_q = \frac{2}{T} \int_0^T C(\theta) \cos q\theta d\theta$$

Les coefficients A_q et B_q peuvent être déterminés par planimétrage de la courbe précédemment définie.

Si la longueur $0,4\pi$ est divisée en p segments égaux, on a : $\Delta\theta = \frac{4\pi}{p}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2}$ ($\alpha \in 0, 2\pi$)

)

$$D'où A_q = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} C(\alpha) \sin q\alpha d\alpha = \frac{2}{p} \sum_0^p C(\alpha) \sin q\alpha$$

$$B_q = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} C(\alpha) \cos q\alpha d\alpha = \frac{2}{p} \sum_0^p C(\alpha) \cos q\alpha$$

Soit en revenant à la variable θ :

$$A_q = \frac{2}{p} \sum_0^p C(\theta) \sin \frac{q\theta}{2} \text{ et } B_q = \frac{2}{p} \sum_0^p C(\theta) \cos \frac{q\theta}{2}$$

D'où les harmoniques 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2 ; 2.5...

De plus, les coefficients A_q et B_q sont influencés par le régime moteur et l'état de charge, il faut donc calculer ces coefficients dans différentes cas de fonctionnement.

I.6 IMPORTANCE DES DIFFERENTES HARMONIQUES :

L'ordre d'allumage du moteur PRV est 6, 3, 5, 2, 4, 1.

Les intervalles d'allumage représentent soit 90° , soit 150° de rotation du vilebrequin.

Les harmoniques du couple des différentes cylindres se composent avec des déphasages égaux à $90 \times q$ et $150 \times q$, q étant l'ordre de l'harmonique

Tableau I.1-les valeurs du déphasage φ pour les différentes valeurs de q

Ordre d'allumage	calage vilebrequin	intervalle d'allumage	Valeurs du déphasage φ pour les différentes valeurs de q												
			q=0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	
6	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	90	15	45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	495	540	
5	240	90	120	240	360	480	600	720	840	960	1080	1200	1320	1440	
2	330	150	165	330	495	660	825	990	1155	1320	1485	1650	1815	1980	
4	480	90	240	480	720	960	1200	1440	1680	1920	2160	2400	2640	2880	
1	570	150	285	570	855	1140	1425	1710	1995	2280	2565	2850	3135	3420	
6	720		360	720	1080	1440	1800	2160	2520	2880	3240	3600	3960	4320	

Si nous représentons les harmoniques du couple moteur par des vecteurs tournants, nous obtiendrons les diagrammes en étoile de la page suivante avec un déphasage de $90 \times q$ et $150 \times q$ entre les vecteurs correspondants à chaque cylindre.

Représentation des couples harmoniques de chaque cylindre (construction de Fresnel)

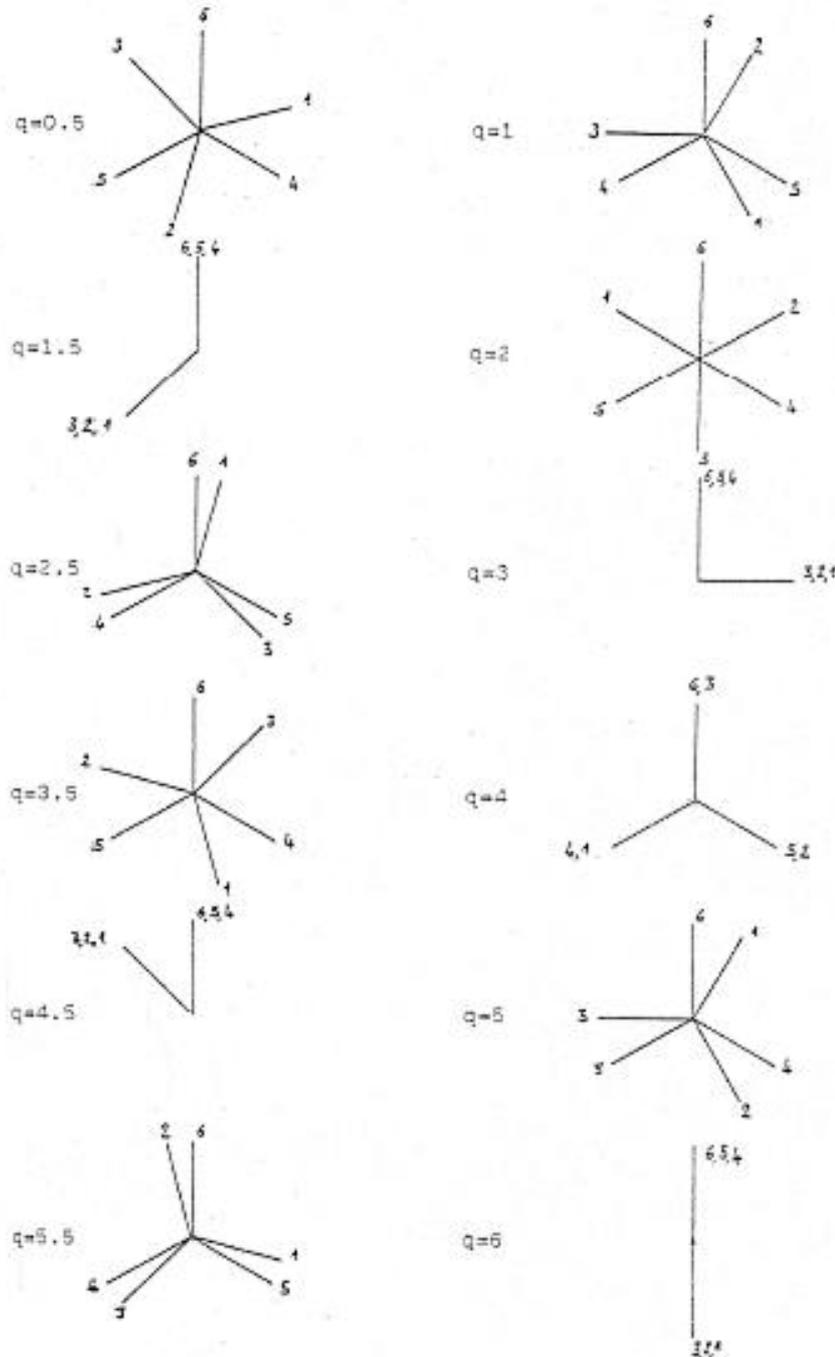


Figure I.9- représentation des couples harmoniques de chaque cylindre

Pour les harmoniques supérieures à 6, on retrouve les mêmes diagrammes que précédemment.

Nous pouvons remarquer que seuls 3 diagrammes présentent une résultante vectorielle non nulle, trois harmoniques seulement seront dangereuses pour les vibrations de torsion du moteur : ce sont les harmoniques 1.5, 3 et 4.5.

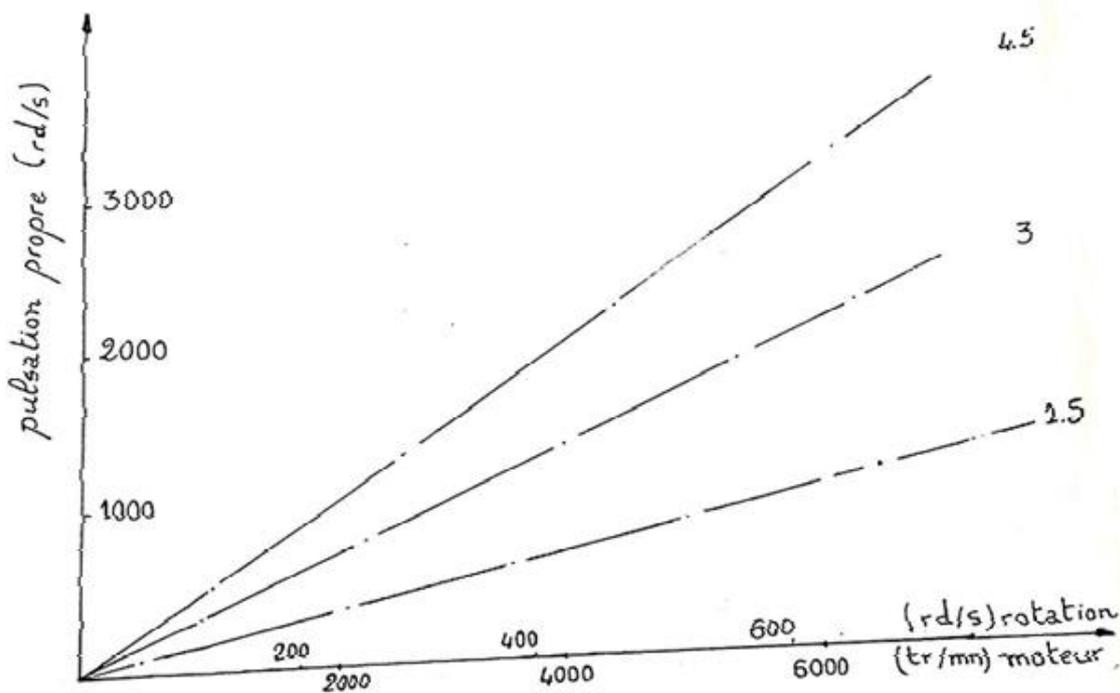


Figure I.10- les trois harmoniques dangereuses

I.7 COUPLES D'INERTIE DU AU MOTEUR :

Le couple d'inertie dû aux masses alternatives est égal à :

$$C = m_a \Omega^2 r^2 \left(\frac{\lambda}{4} \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{3\lambda}{4} \sin 3\theta - \frac{\lambda^2}{4} \sin 4\theta \right)$$

(En se limitant au 4^{ème} ordre et en négligeant les puissances de λ supérieures ou égales à 3)

Il faut noter que ces couples d'inertie sont très faibles à bas régime, mais deviennent importantes à haute vitesse (proportionnels au carré de la vitesse)

C correspond aux couples d'inertie sur chaque cylindre. Nous pouvons remarquer que la résultante des couples des 6 cylindres n'a une composante que pour l'harmonique 3, les autres harmoniques ne seront donc pas dangereuses.

Valeur de la résultante pour cette harmonique :

Pour $\Omega = 1000 \text{ tr/min}$; $C_3 = 9.3 \text{ mN}$

Pour $\Omega = 5700 \text{ tr/min}$; $C_3 = 302 \text{ mN}$

I.8 UTILISATION DES RESULTATS POUR L'EXCITATION SUR LES MANETONS :

Pour une harmoniques d'ordre q , le couple crée par un cylindre sur le vilebrequin est de la forme $C_q = A_q \sin q\Omega t + B_q \cos q\Omega t$

Les cylindres vont par paires et toutes les harmoniques se trouvent simultanément, de plus entre la première paire de cylindre et les deux autres, il existe un déphasage de $4\pi/3$ et $8\pi/3$

Le couple sur les manetons prend donc la forme :

$$\text{Maneton 1 : } C_1 = \sum_{2q=0}^{\infty} A_q \left[\sin q\Omega t + \sin q(\Omega t - \pi/2) \right] + B_q \left[\cos q\Omega t + \cos q(\Omega t - \pi/2) \right]$$

$$\text{Maneton 2 : } C_2 = \sum_{2q=0}^{\infty} A_q \left[\sin q(\Omega t - 4\pi/3) + \sin q(\Omega t - 11\pi/6) \right] + B_q \left[\cos q(\Omega t - 4\pi/3) + \cos q(\Omega t - 11\pi/6) \right]$$

$$\text{Maneton 3 : } C_3 = \sum_{2q=0}^{\infty} A_q \left[\sin q(\Omega t - 8\pi/3) + \sin q(\Omega t - 19\pi/6) \right] + B_q \left[\cos q(\Omega t - 8\pi/3) + \cos q(\Omega t - 19\pi/6) \right]$$

I.9 BATI DE MOTEUR D'UN AVION :

Le bâti relie le moteur au fuselage. D'autres caractéristiques secondaires importantes sont de distribuer le poids du moteur, tout en écartant le couple et la vibration produits par le moteur. Et tout le faire cela sous des forces de gravité de turbulence et de tout autre pilote a induit des indices de charge.

La plupart des avions avec exactement le mêmes type du moteur peuvent habituellement utiliser le même bâti, et pour Lycoming et modèles continentaux ses un bâti conique ou dynafocal. La plupart des diesel et moteurs de Rotax ont leurs propres moyens les bâtis et le type spécifiquement conçus d'installation [8].

I.9.1 Divers Bâtis :

La plupart des bâtis sont faits à partir du Chrome-molybdène en acier tubulaire (4130) et ils sont soudés ensemble. C'est un poids léger et une construction très forte. Après

soudure la structure est sablée et la poudre est enduite dans une couleur lumineuse, qui le rend facile de repérer toutes les fissures si elles se développent.

La plupart des moteurs à quatre cylindres utilisent aujourd'hui les bâtis qui regardent à peu près la même chose. Le moteur est boulonné au bâti au fond ou au-dessous du carter.

I.9.2 Bâtis coniques :

C'est le bâti de loin le plus facile à fabriquer. Il a quatre points d'attache pour le moteur et habituellement quatre points pour boulonner le bâti au pare-feu. Les points de montage sont parallèles avec le pare-feu, tellement il n'y a aucun angle maladroit en installant les boulons et les bâtis de choc avec le moteur. Son tout le plutôt simple et vraiment facile à faire.

Un inconvénient est que des vibrations et le couple moteur sont transmis par le cadre ainsi que ce n'est pas idéal comparé à un bâti dynafocal.



Figure I.11- forme d'un bâti conique [8]

I.9.3 Bâtis de Dynafocal :

Ce sont les meilleurs et réalisent un travail parfait d'amortir les vibrations et les mouvements du moteur. Le bruit inférieur d'habitacle est le résultat avec moins de fatigue de pilote/équipage. Un inconvénient est qu'ils doivent construire (chère) plus difficile à construire et installer. Comme vous pouvez voir de l'image que le moteur est tenu à quatre points d'attache (situés dans un anneau) et ceux-ci sont sous un certain pèchent et indiquent le centre de la gravité du moteur.

Pendant la soudure cet angle doit être tenu en alignement parfait ou bien les quatre boulons ne s'adapteront pas quand installant le moteur dans le bâti [8].



Figure I.12- forme d'un bâti Dynafocal [8]

Il y a deux types de bâtis dynafocal : 1 et 2. Le type 1 est employé aux moteurs de Lycoming jusqu'à 180 puissances en chevaux et le type - 2 est employés dans des moteurs du modèle IO-320 et IO-360 de Lycoming.

I.9.4 Bâti de lit :

Ce sont très différents comparés aux bâtis coniques et dynafocal. Avec ce modèle le moteur est monté utilisant quatre points sous le carter et puis accroche sur le pare-feu. Vous verrez ceci parfois avec Rotax ou moteurs diesel.



Figure I.13- forme d'un bâti de lit [8].

I.9.5 Compensation de force de poussée :

Les conceptions de quelques avions réclament un bâti de moteur qui donne un de haut en bas ou pousse vers le haut relativement à la ligne de flottaison des avions où d'autres compensent le moteur vers le droit ou gauche. Le concepteur d'avions décidé combien pendant des calculs aérodynamiques et prend en considération à la puissance de moteur et à d'autres facteurs.

I.9.6 Bâtis de choc :



Figure I.14- forme d'un bâti de choc [8].

Le moteur n'est pas boulonné directement sur le bâti, ceci aurait comme conséquence les vibrations du moteur aux avions. À la place, des bâtis de choc en caoutchouc des forces variables et les épaisseurs sont employés. Ceci amortit la vibration et le mouvement, donnant un vol beaucoup plus doux et un moteur courant. N'importe quelle fatigue due à la vibration n'est également aucun facteur avec ce type de construction.

I.10 CONCLUSION :

Nous avons vu dans ce chapitre tous les différents éléments constituant un avion léger, Le principe de fonctionnement d'un GMP et certains de ces caractéristiques, tel que le couple et les différents harmoniques influant sur le moteur, ainsi que les divers bâtis existent dans le domaine.

CHAPITRE II :
DETERMINATION DES CARACTERISRIQUES
D'UN SUPPORT

2. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UN SUPPORT :

2.1 INTRODUCTION :

2.1.1 Rôle statique

Une suspension élastique permet une meilleure répartition des charges statique : Si une machine repose sur ses assises par des contacts "solides" en plus des trois points, il est très difficile de prévoir les charges imposées sur chaque point (montage hypers-tatique ou les raideurs de la machine ainsi que du support interviennent dans le calcul des réactions).

Avec des supports élastiques dont les caractéristiques de rigidité sont connues, on peut déterminer (par le calcul ou par mesure directe) les déformations de chacun d'eux, en déduire les charges et en corriger les éventuelles anomalies de répartition de celle-ci.

Une suspension élastique absorbe sans difficulté de petites différences d'entraxes de fixation ou de petits déplacements sans entrainer de contraintes dangereuses contrairement aux assemblages rigides [5].

2.1.2 Rôle dynamique

C'est le rôle essentiel des suspensions élastiques, dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire de filtration des vibrations.

Une machine suspendue élastiquement est soumise à une vibration lorsqu'elle subit des sollicitations périodiques alternées qui se traduisent par des oscillations plus ou moins importantes.

Le but de la suspension élastique est d'atténuer la transmission des vibrations et non pas d'empêcher la machine de vibrer [5].

2.2 CARACTERISTIQUES DES SUPPORTS ELASTIQUES

2.2.1 Propriétés des supports élastiques :

Les supports élastiques sont des organes possédant à la fois et à des degrés divers des propriétés d'élasticité et d'amortissement.

- L'élasticité est la propriété de se déformer avec une amplitude fonction de la charge et de manière réversible.
- L'amortissement est la faculté qu'a le support élastique de dissiper de l'énergie et ainsi de diminuer les amplitudes.

On distingue essentiellement deux types d'amortissement :

- Amortissement de frottement (frottement solide) qui crée des efforts constants et indépendants du mouvement.
- Amortissement visqueux qui crée des efforts fonction de la vitesse relative de l'ensemble suspendu par rapport au support. L'amortissement visqueux a un caractère essentiellement dynamique et ne modifie pas la position d'équilibre.
- Pour faire office de support élastique, on pourrait utiliser des éléments mécaniques à base de ressorts et d'amortisseur, ou des servo-mécaniques ; mais pour un prix modique et une grande facilité de montage, il est préférable d'utiliser des supports en caoutchouc (ou élastomère) qui ont des caractéristiques satisfaisant les buts recherchés [6].

2.2.2 Propriétés des élastomères :

Un élastomère possède deux caractéristiques principales :

- Une élasticité multidirectionnelle permet à un bloc de caoutchouc de se déformer suivant ses divers degrés de liberté, le rappel élastique (caractérisé par la rigidité ou raideur étant variable suivant la direction.
- Un amortisseur lié à la nature même du matériau qui se traduit par une dissipation de l'énergie sous forme calorifique au sein de la matière, provoquant l'échauffement de celle-ci.

Ces deux propriétés sont caractéristiques des corps viscoélastique. Divers modèles mathématiques ont été proposés pour les représenter. Le plus classique est le modèle KELVIN composé d'un ressort pur et d'un amortisseur monté en parallèle.

(C'est ce modèle que nous adopterons) [6].

Dans l'hypothèse de la linéarité, l'effort F transmis par l'ensemble ressort amortisseur est donc : $F = Kx + c \frac{dx}{dt}$ Les coefficients k et c étant pris constants.

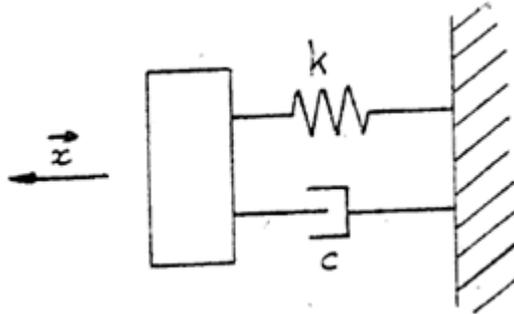


Figure 2.1-le modèle KELVIN [5].

Malheureusement, cette loi linéaire ne représente qu'imparfaitement le comportement des élastomères. Les coefficients k et c variant en fonction de la fréquence des excitations et des amplitudes. La rigidité statique devra être corrigée pour correspondre aux caractéristiques dynamiques de l'élastomère (coefficient multiplicateur variant de 1,2 à 2 suivant les élastomères utilisés).

2.3 SCHEMATISATION D'UN SUPPORT ELASTIQUE EN CAOUTCHOUC.

Nous avons vu que l'effort F transmis par l'ensemble ressort-amortisseur peut être mis sous la forme :

$$F = Kx + c \frac{dx}{dt}$$

(Hypothèse de comportement linéaire : modèle de kelvin)

2.4 ETUDE DE LA RAIDEUR :

2.4.1 Matrice de raideur :

La loi liant les efforts aux déformations n'est pas une loi linéaire, mais on peut définir dans la zone d'utilisation du support, un coefficient de proportionnalité entre les

charges et déplacement qui permettra de calculer le comportement vibratoire de la machine bien que la position d'équilibre statique soit définie par d'autres raideurs.

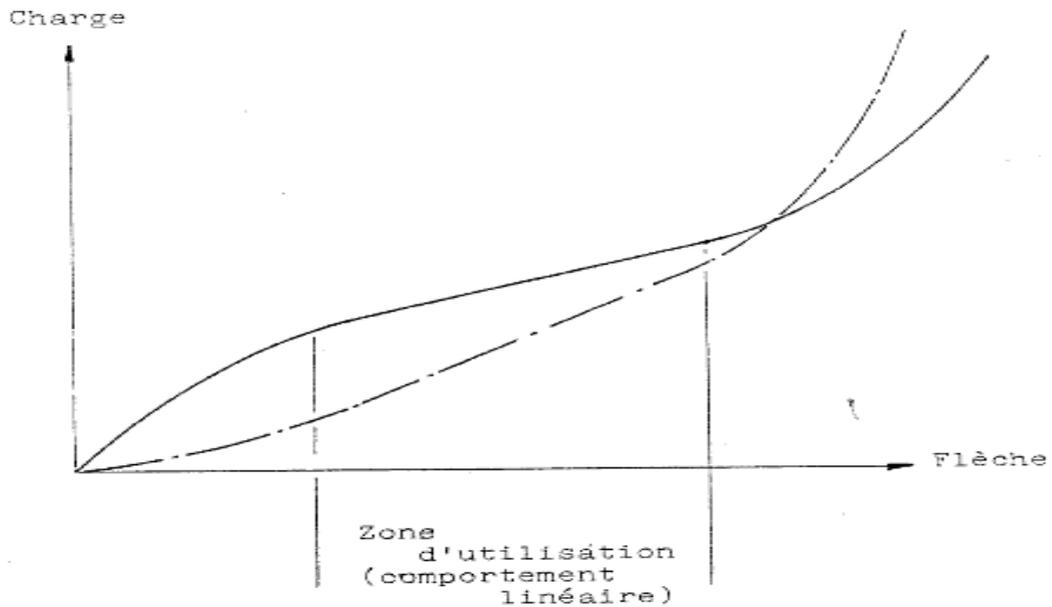


Figure 2.2-courbe de la zone d'utilisation du support [6]

Pour un support élastique en caoutchouc, on peut définir trois axes pour lesquels une déformation suivant l'un de ces axes n'entraîne pas d'efforts suivant les deux autres directions. On pourra appeler ces axes "axes de raideurs principaux".

On définit également les rigidités de torsion ou "couples de rappel" autour des trois axes précédemment précisés comme étant le rapport des couples sur les angles de torsion correspondants.

Soient k_x , k_y , k_z , C_x , C_y , C_z les différentes raideurs suivant les axes principaux de raideurs ; x_s , y_s , z_s , α_s , β_s , γ_s , les déplacements linéaire et angulaire du support considéré et F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z , les forces et les couples appliqués au support ; on a la relation suivante dans les axes principaux de raideurs.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_s = \begin{bmatrix} K_x & & & & & 0 \\ & K_y & & & & \\ & & K_z & & & \\ & & & C_x & & \\ & & & & C_y & \\ 0 & & & & & C_z \end{bmatrix}_s * \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_s$$

2.4.2 Importance relative des moments de torsion.

Une suspension de machine étant toujours constitué par plus de 1 support élastique, on peut comparer les moments M_x, M_y, M_z , par rapport aux moments des forces agissant sur les supports.

Soit k la constante de raideur en compression d'un support élastique.

Hypothèse : la répartition de raideur suivant l'axe x est constante, c'est-à-dire que la raideur de l'élément dx peut être mise sous la forme $\frac{k}{a} dx$.

Le couple nécessaire pour créer l'angle α peut être défini par :

$$c = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{k}{a} \cdot x^2 \cdot \alpha \cdot dx \cdot c = \frac{kx\alpha a^2}{12}$$

$$c_x = \frac{kx\alpha^2}{12}$$

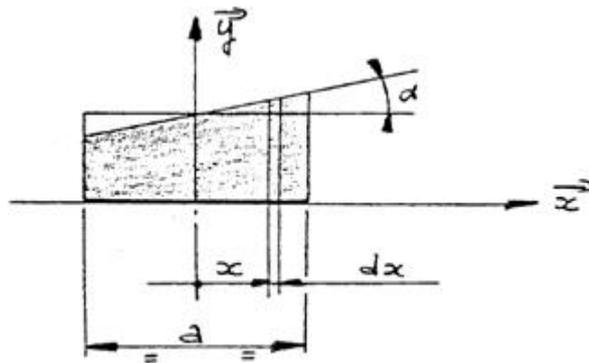


Figure 2.3-le comportement du support [5]

Remarque :

Cette schématisation du comportement du support pour un α petit, bien que très sommaire, correspond aux résultats obtenus sur des supports réels avec un faible pourcentage d'erreur. (Support Paulstra)

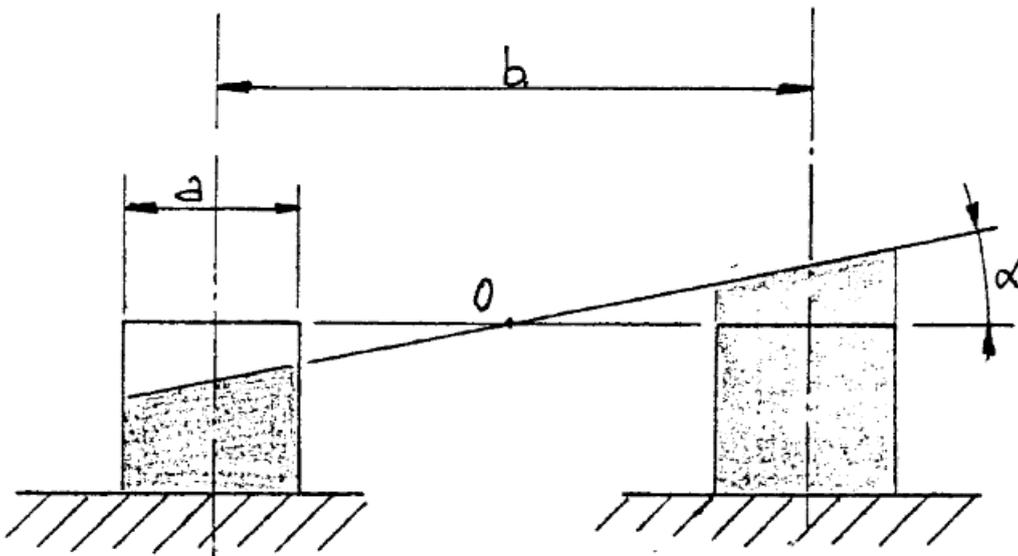
Problème plan a 2 supports :

Figure 2.4-le comportement du support (cas de 2 supports) [5]

La rotation d'angle α entraîne un effort sur les supports égal à : $F = \frac{b}{2} \cdot k \cdot \alpha$

D'où un moment par rapport à 0 : $M = \frac{b^2 \cdot k \cdot \alpha}{4}$ (pour 1 support)

Le couple de torsion du support est égal à : $c = \frac{kx\alpha^2}{12}$

Etude de $\frac{C}{M}$:

$$\frac{C}{M} = \frac{a^2}{3b^2}$$

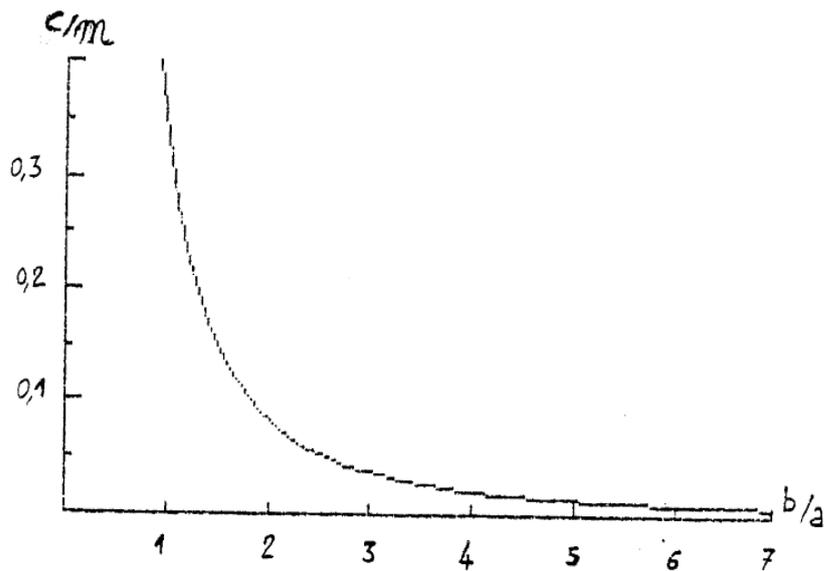


Figure 2.5-courbe du couple de torsion [2]

b ne peut être inférieur à a, d'où $\frac{C}{M}$ est inférieur à $1/3$.

Pour les suspensions moteur courantes, on a $b/a > 5$ d'où $\frac{C}{M} < 1/75$ on peut donc négliger les couples de torsion sur les supports élastiques.

On obtient donc une matrice de raideur ne tenant pas compte des déplacements angulaires de la structure étudiée.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_S = \begin{bmatrix} k_x & & 0 \\ & k_y & \\ 0 & & k_z \end{bmatrix}_S \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{Bmatrix}_S$$

2.4.3 Matrice de raideur dans des axes quelconques :

Cette matrice lie les efforts aux déplacements dans le repère des axes principaux de raideur. Les repères utiles au calcul sont rarement ceux-ci, car les supports élastiques peuvent être montés dans des dispositions angulaires diverses. Il faut donc déterminer la matrice de raideur dans des axes quelconques.

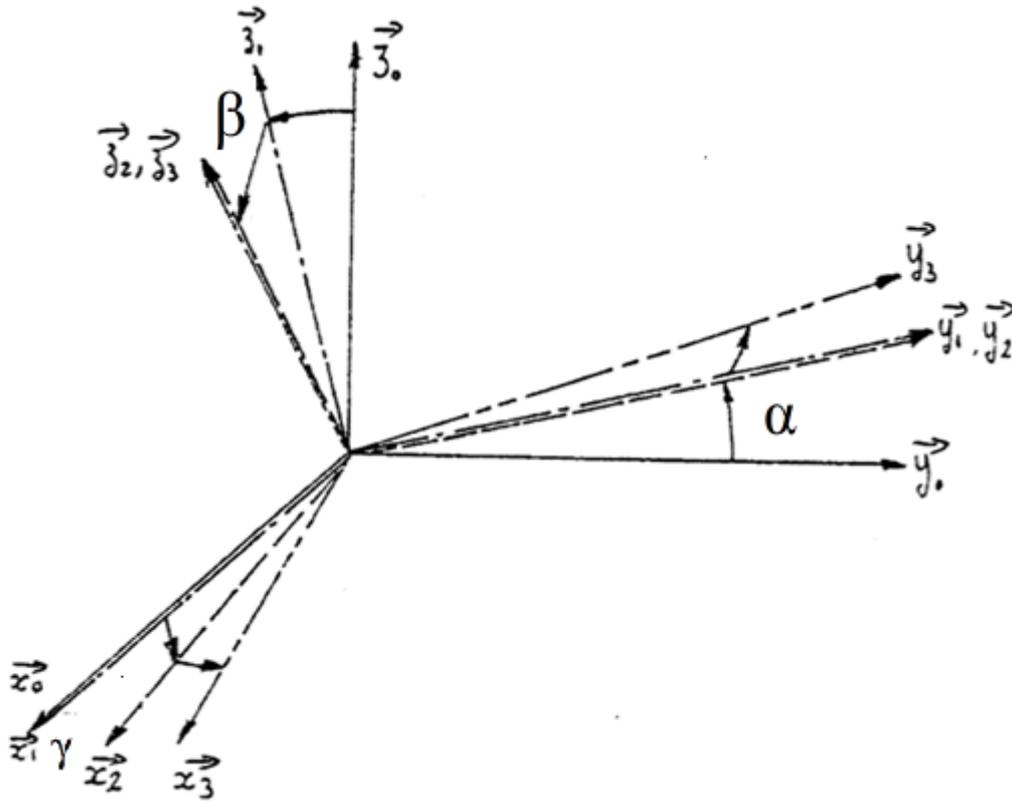


Figure 2.6-les trois repères du mouvement [4].

Soit le repère (0) repère dans lequel on doit faire les calculs.

Soit le repère (s) repère des axes principaux de raideur du support étudié.

Les rotations sont α suivant l'axe \vec{x}_0 , β suivant l'axe \vec{y}_0 et γ suivant l'axe \vec{z}_0 . la matrice de passage du repère 0 au repère s est :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta & \sin\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\sin\gamma\sin\beta & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Le but de calcul est de trouver la matrice K telle que :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{(0)} = K_{(0)} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)}$$

Notons $X_{(i)}$ =matrice uni colonne des déplacements exprimés dans le repère (i).

$K_{(i)}$ =matrice uni colonne des efforts exprimés dans le repère (i).

On a $X_{(S)} = P X_{(O)}$

$$F_{(S)} = \begin{bmatrix} k_x & & 0 \\ & k_y & \\ 0 & & k_z \end{bmatrix} X_{(S)}$$

$$F_{(O)} = [P^T] F_{(S)}$$

$$F_{(O)} = [P^T] \begin{bmatrix} k_x & & 0 \\ & k_y & \\ 0 & & k_z \end{bmatrix} P X_{(O)}$$

De (2.4) on tire :

$$K_{(O)} = [P^T] \begin{bmatrix} k_x & & 0 \\ & k_y & \\ 0 & & k_z \end{bmatrix} P$$

$$[P^T] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

D'où

$$K_{(O)} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$k_{xx} = k_x \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + k_y \cos^2 \beta \sin^2 \gamma + k_z \sin^2 \beta$$

$$k_{yy} = k_x (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma)^2 + k_y (-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma)^2 + k_z (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta)$$

$$k_{zz} = k_x (-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)^2 + k_y (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma)^2 + k_z (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta)$$

$$k_{xy} = k_{yx} = kx \cos \beta \cos \gamma (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) - ky \cos \beta \sin \gamma (-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) - kz \sin \beta \sin \alpha \cos \beta$$

$$k_{xz} = k_{zx} = kx \cos \beta \cos \gamma (-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) - ky \cos \beta \sin \gamma (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) + kz \sin \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$$k_{yz} = k_{zy} = kx (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) (-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) + ky (-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) + kz (-\sin \alpha \cos^2 \beta \cos \alpha)$$

2.5 ETUDE DE L'AMORTISSEMENT :

Si, partant d'une suspension non amortie, on augmente progressivement l'amortissement, tous les autres facteurs restant constants, on constate que les amplitudes des oscillations libres à partir d'un écart initial donné diminuent de plus en plus, et il vient un moment où il n'y a plus d'oscillations du tout : le retour à la position d'équilibre se faisant d'une manière asymptotique.

On arrive à l'amortissement critique : si C_c est l'amortissement critique (rapport entre l'effort de freinage et la vitesse relative), on appelle taux d'amortissement pour un amortissement C le rapport $\mathcal{E} = C/C_c$ dans une direction x , $C_c = 2\sqrt{k_x \cdot m}$

D'où : $C = 2\mathcal{E}\sqrt{k_x \cdot m}$ que l'on peut repartir sur chaque support en fonction de leur rayon pour pouvoir déterminer les actions de liaison.

Dans le cas d'un amortissement hydraulique, \mathcal{E} ne varie pas avec la fréquence, mais avec des élastomères, on a constaté que le produit $\mathcal{E} \cdot \omega$ est sensiblement constant et égal à $\mathcal{E}_0 \cdot \omega_0$ (\mathcal{E}_0 étant le taux d'amortissement à la pulsation de résonance ω_0) et \mathcal{E}_0 est une constante caractérisant l'élastomère utilisé.

De la même façon que l'on a obtenu la matrice de raideur, on obtiendra la matrice de dissipation suivante dans le repéré (0).

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix}_{(0)}$$

2.6 ETUDE DE L'IMPLANTATION D'UN GROUPE MOTOPROPULSEUR DANS UN AVION

Utilisation des théorèmes généraux.

2.6.1 Définition des repères

L'utilisation de la loi fondamentale de la mécanique nécessite le calcul du torseur dynamique de l'appareil dans son mouvement par rapport à un repère absolu. Dans le cas du vol d'un avion, nous pouvons prendre comme repère absolu, le repère local lié à la terre et noté (g).

- Soit le repère (0), lié à l'avion et déduit de (g) par des translations et des rotations.
- Soit le repère (3), lié au bloc moteur et déduit de (0) par trois translations et trois rotations.
- Soit le repère (4), lié à l'hélice et déduit de (3) par une rotation.
- Les repères (1) et (2) sont des repères intermédiaires.

2.6.2 Schématisation du système à étudier

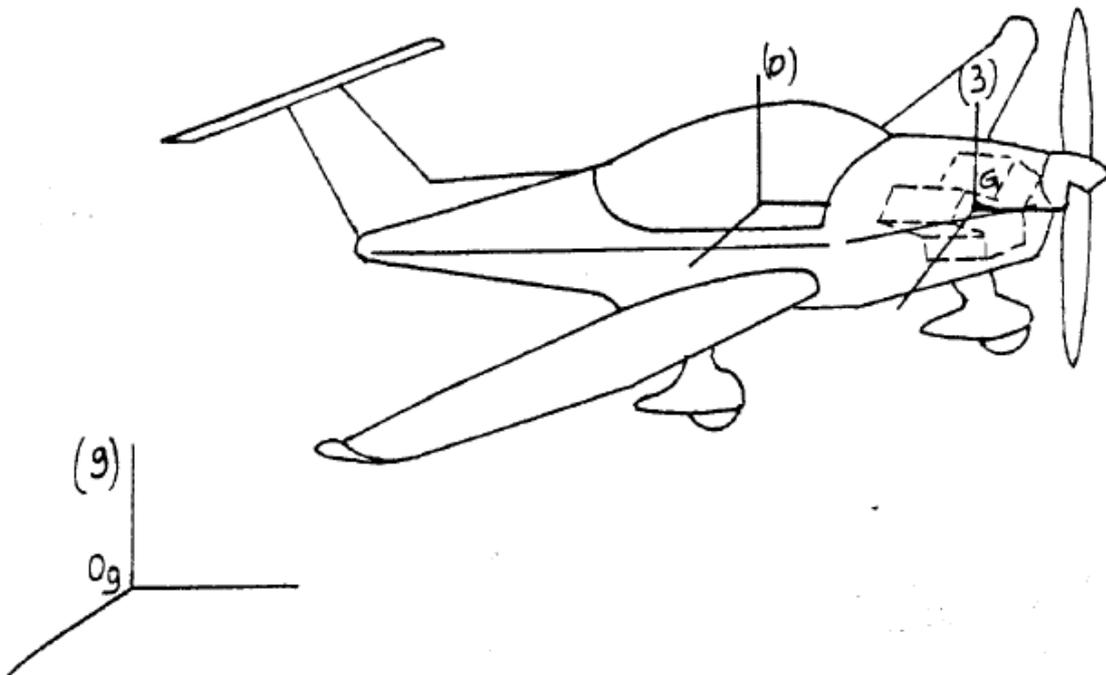


Figure 2.7-position du centre de gravité du moteur [4]

G est le centre de gravité du moteur.

Composition des accélérations :

$$\vec{\Gamma}^g(G) = \vec{\Gamma}_0^g(G) + \vec{\Gamma}^0(G) + 2\vec{\Omega}_0^g \wedge \vec{V}^0(G) \quad (2.1)$$

Compte tenu des vitesses et accélérations appliquées au moteur d'un avion en cours de vol, nous pouvons négliger les termes d'accélérations d'entraînement et d'accélérations de Coriolis par rapport à l'accélération absolue pour l'étude vibratoire.

$$\text{Nous pouvons écrire : } \vec{\Gamma}^g(G) \approx \vec{\Gamma}^0(G) \quad (2.2)$$

L'analyse vibratoire du groupe motopropulseur pourra être faite sans tenir compte des conditions de vol, le repère (0) étant considéré comme un repère absolu. Il faudra, par contre, en tenir compte pour déterminer les efforts statiques appliqués à la structure de l'avion.

Le moteur à une masse M et une matrice d'inertie

$$I_{(G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}^{(3)} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons définir deux plans de symétrie $\vec{y}_3 G \vec{z}_3$ et $\vec{x}_3 G \vec{z}_3$ pour le moteur, les produits d'inertie sont donc nuls.

Au moteur, est fixée une hélice de masse m, aux cotes a suivant l'axe \vec{y}_3 et b suivant l'axe \vec{z}_3 et de matrice d'inertie

$$I_{(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}^{(4)} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

Le groupe motopropulseur est suspendu par des supports élastiques définis par leur positions c_i, d_i, e_i suivant les axes $\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$, leur orientation angulaire $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et leur matrice de raideur

$$\begin{bmatrix} kx & 0 & 0 \\ 0 & ky & 0 \\ 0 & 0 & kz \end{bmatrix}_i$$

Et leur matrice d'amortissement déduite de la matrice de raideur, le taux d'amortissement étant pris constant pour tous les supports.

Hypothèses sur le châssis support dans l'avion :

En général, les bâtis support sont très rigides, on peut donc les négliger ; mais dans les petits avions le moteur est fixé sur un treillis tubulaire dont la souplesse sur certaines directions ne peut être négligée.

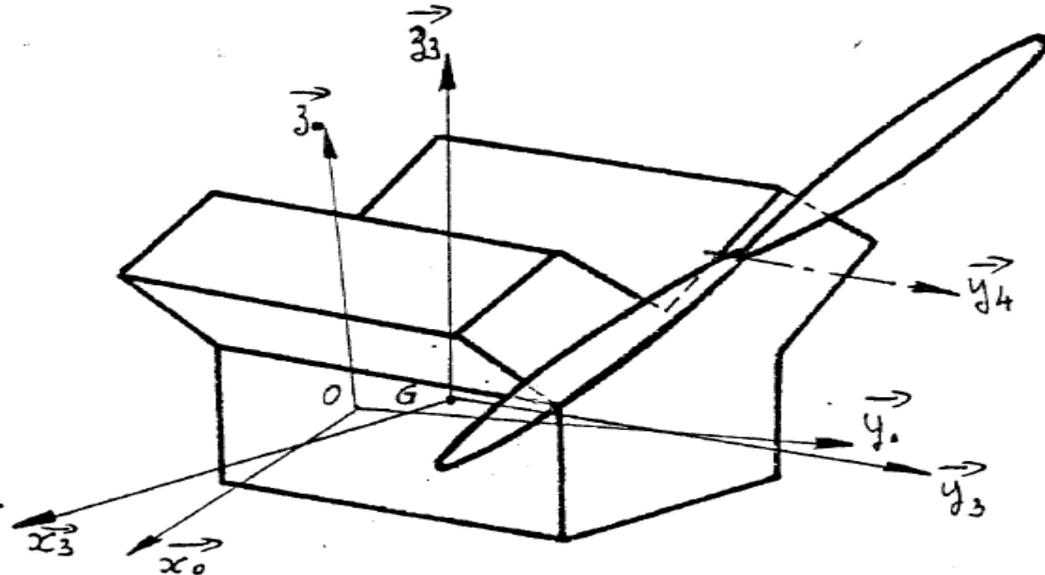
2.6.3 Mise en place de l'étude

Figure 2.8-schematisation du groupe motopropulseur [4]

Le groupe motopropulseur monté sur suspension élastique à 6 degrés de liberté.

Translation suivant x_0 : Mouvement transversal ou "ballant".

Translation suivant y_0 : Mouvement longitudinal ou "tamis".

Translation suivant z_0 : Mouvement vertical ou "pompage".

Rotation suivant x_0 : Mouvement de galop ou de tangage.

Rotation suivant y_0 : Mouvement de roulis.

Rotation suivant z_0 : Mouvement de lacet.

A ces six degrés de liberté correspondent trois variables linéaires, x , y et z . correspondent aux déplacements de G par rapport à sa position d'équilibre statique, et trois variables angulaires α, β, γ correspondent aux déplacements angulaires du groupe motopropulseur par rapport à sa position d'équilibre statique.

Forces appliquées en G :

- Le poids $-mg \vec{z}_0$ que nous pourrions négliger dans l'étude dynamique, car il ne crée que des réactions statiques (définit la position d'équilibre statique).
- Le torseur des actions des supports élastiques $\left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_G$.

Forces appliquées en A :

- Le couple sur l'hélice C. \vec{y}_4
- La traction de l'hélice F. \vec{y}_4

2.6.4 Enoncé des théorèmes généraux

Nous allons étudier le comportement dynamique du groupe motopropulseur avec les théorèmes généraux de la mécanique.

$$\text{Théorème de la résultante : } \sum \vec{F} = \vec{\gamma}^0(\Sigma, t) \quad (2.3)$$

$$\text{Théorème du moment dynamique : } \sum \vec{\mathcal{M}}_{pt} = \vec{\delta}^0(\Sigma, G, t) \quad (2.4)$$

2.6.5 Hypothèses complémentaires simplificatrices

Toutes les paramètres de configuration x , y , z , α , β et γ ainsi que leurs dérivés première et seconde sont des infiniment petits du premier ordre. Nous pourrions ainsi négliger dans les calculs tous les termes du second ordre.

De même α , β et γ étant petits nous pourrions poser :

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha \simeq 1 & \sin \alpha \simeq \alpha \\ \cos \beta \simeq 1 & \sin \beta \simeq \beta \\ \cos \gamma \simeq 1 & \sin \gamma \simeq \gamma \end{array}$$

Les linéarisations étant effectuées autour de la position d'équilibre $x = y = z$ et $\alpha = \beta = \gamma = 0$

2.6.6 Calcul du torseur des actions des supports élastiques

$$\vec{T} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_G$$

Soit B_0 la position à l'équilibre statique du point d'application des charges.

Soit B la position réelle de ce point.

$$\text{On a } \vec{\delta}_3^0(B) = \vec{\delta}_3^0(G) + \vec{\phi}_3^0 \wedge \vec{GB} \quad (2.5)$$

Avec : $\vec{\delta}_3^0(B)$ = déplacement du point B dans le repère (3) par rapport à (0).

$\vec{\phi}_3^0$ = vecteur rotation de (3) par rapport à (0).

$$\vec{\delta}_3^0(G) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)} ; \vec{\phi}_3^0 = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}_{(0)} ; \vec{GB} = \begin{Bmatrix} c \\ d \\ e \end{Bmatrix}_{(0)}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_3^0(G) &= \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}_{(0)} \wedge \begin{Bmatrix} c \\ d \\ e \end{Bmatrix}_{(0)} \\ &= \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} e\beta - d\gamma \\ c\gamma - e\alpha \\ d\alpha - c\beta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Après linéarisation :

$$\vec{\delta}_3^0(G) = \begin{Bmatrix} x + e\beta - d\gamma \\ y + c\gamma - e\alpha \\ z + d\alpha - c\beta \end{Bmatrix}$$

La vitesse du point B dans son mouvement par rapport à la cellule est de la forme :

$$\vec{V}^0(OB) = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = \frac{d^3 \vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{OB} \quad (2.6)$$

$$1. \quad \vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} c \\ d \\ e \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} x+c \\ y+d \\ z+e \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$2. \quad \vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_1^0 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_3^2 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(1)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \beta \\ -\cos \gamma \sin \beta & \cos \gamma & \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \begin{Bmatrix} \cos \gamma \cos \beta \dot{\alpha} \\ -\cos \gamma \sin \beta \dot{\alpha} \\ \sin \beta \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\vec{\Omega}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} \sin \gamma \dot{\beta} \\ \cos \gamma \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\vec{\Omega}_3^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\text{Soit : } \vec{\Omega}_3^0 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$\vec{\Omega}_3^0$ Une fois linéarisé, devient :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$3. \quad \frac{d^3 \vec{OB}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{V}^0(OB) = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x+c \\ y+d \\ z+e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} + \dot{\beta}(z+e) - \dot{\gamma}(y+d) \\ \dot{y} + \dot{\gamma}(x+c) - \dot{\alpha}(z+e) \\ \dot{z} + \dot{\alpha}(y+d) - \dot{\beta}(x+c) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Les efforts sur le support élastique sont de la forme :

$$F = K X + C \dot{X} \quad (2.7)$$

Avec K =Matrice de raideur $\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$

C =Matrice de dissipation $\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$

X =Vecteur déplacement du point B

\dot{X} =Vecteur vitesse de déplacement du point B

L'effort sur un support élastique devient :

$$F = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x+e\beta-d\gamma \\ y+c\gamma-e\alpha \\ z+c\beta-d\alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}+e\dot{\beta}-d\dot{\gamma} \\ \dot{y}+c\dot{\gamma}-e\dot{\alpha} \\ \dot{z}-c\dot{\beta}+d\dot{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Avec

$$F_x = xk_{xx} + yk_{xy} + zk_{xz} + \alpha(-ek_{xy} + dk_{xz}) + \beta(ek_{xx} - ck_{xz}) + \gamma(-dk_{xx} + ck_{xy}) + \dot{x}C_{xx} + \dot{y}C_{xy} + \dot{z}C_{xz} + \dot{\alpha}(-eC_{xy} + dC_{xz}) + \dot{\beta}(eC_{xx} - cC_{xz}) + \dot{\gamma}(-dC_{xx} + cC_{xy}) \quad (2.8)$$

$$F_y = xkyx + ykyy + zkzy + \alpha(-ekyy + dkyz) + \beta(ekyx - ckyz) + \gamma(-dkyx + ckyy) \\ + \dot{x}Cyx + \dot{y}Cyy + \dot{z}Cyz + \dot{\alpha}(-eCyy + dCyz) + \dot{\beta}(eCyx - cCyz) + \dot{\gamma}(-dCyx + cCyy) \quad (2.9)$$

$$F_z = xkyx + ykzy + zkzz + \alpha(-ekzy + dkzz) + \beta(ekzx - ckzz) + \gamma(-dkzx + ckzy) \\ + \dot{x}Czx + \dot{y}Czy + \dot{z}Czz + \dot{\alpha}(-eCzy + dCzz) + \dot{\beta}(eCzx - cCzz) + \dot{\gamma}(-dCzx + cCzy) \quad (2.10)$$

Le moment par rapport à G la force sur le support élastique a la forme :

$$\vec{\mathfrak{M}}_G(\vec{F}) = \vec{GB} \wedge \vec{F} \quad (2.11)$$

$$\text{Soit } \begin{Bmatrix} \mathfrak{M}_x \\ \mathfrak{M}_y \\ \mathfrak{M}_z \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} c \\ d \\ e \end{Bmatrix}_{(3)} \wedge \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_G(\vec{F}) = \left\{ \begin{array}{l} x(dkzx - ekyx) + y(dkzy - ekyy) + z(dkzz - ekyz) \\ + \alpha(-dekzy + d^2kzz + e^2kyy - dekyz) \\ + \beta(dekzx - dekzz - e^2kyx + cekyz) \\ + \gamma(-d^2kzx + dckzy + dekyx - cekyy) \\ + \dot{x}(deCzx - eCyx) + \dot{y}(dCzz - eCyy) + \dot{z}(dCzz - eCyz) \\ \dot{\alpha}(-edCzy + d^2Czz + eCyy - deCyz) \\ \dot{\beta}(deCzx - dcCzz - e^2Cyx + ceCyz) \\ \dot{\gamma}(-d^2Czx + dcCzy + deCyx - ceCyy) \\ x(ekxx - ckzx) + y(ekxy - ckxy) + z(ekxz - ckzz) \\ + \alpha(e^2kxy + edkxz + cekzy - cdkzz) \\ + \beta(-cekzx + c^2kzz + e^2kxx - cekxz) \\ + \gamma(cdkzx - c^2kzy - dekxx + cekxy) \\ + \dot{x}(eCxx - cCzx) + \dot{y}(eCxy - cCzy) + \dot{z}(eCxz - cCzz) \\ + \dot{\alpha}(-e^2Cxy + deCxy + ceCzy + cdCzz) \\ + \dot{\beta}(e^2Cxx - ecCxz - ceCzx + c^2Czz) \\ + \dot{\gamma}(-deCxx + ecCxy + cdCzx - c^2Czy) \\ x(ckyx - dkxx) + y(ckyy - dkxy) + z(ckyz - dkxz) \\ + \alpha(-cekyy + cdkyz + dekxy - d^2kxz) \\ + \beta(cekyx - c^2kyz - dekxx + cdkxz) \\ + \gamma(-cdkyz + c^2kyy + d^2kxx - cdkxy) \\ + \dot{x}(cCyx - dCxx) + \dot{y}(cCyy - dCxy) + \dot{z}(cCyz - dCxz) \\ + \dot{\alpha}(-ceCyy + cdCyz + deCxy + d^2Cxz) \\ + \dot{\beta}(ceCyx - c^2Cyz - deCxx + dcCxz) \\ + \dot{\gamma}(-cdCyx + c^2Cyy + d^2Cxx - dcCxy) \end{array} \right.$$

2.6.7 Calcul de la résultante dynamique : $\gamma^0(\vec{\Sigma}, t)$

Le système est constitué par le moteur (3) et l'hélice (4)

$$\gamma^0(\vec{\Sigma}, t) = \gamma^0(\text{moteur}, t) + \gamma^0(\text{hélice}, t) \quad (2.12)$$

a) Etude de $\gamma^0(\text{moteur}, t)$

Remarque : le moteur étant considéré comme un corps indéformable, l'influence des embiellages apparaîtra sous la forme d'excitation.

$$\gamma^0(\text{moteur}, t) = M\Gamma^0(\vec{G}) \quad (2.13)$$

$$\Gamma^0(\vec{G}) = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} ; \vec{OG} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\Gamma^0(\vec{G}) = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{D'où : } \gamma^0(\text{moteur}, t) = M(\ddot{x}x_3 + \ddot{y}y_3 + \ddot{z}z_3) \quad (2.14)$$

b) Etude de $\gamma^0(\text{hélice}, t)$

Le centre de gravité de l'hélice sera supposé confondu avec son axe de rotation. Un éventuel défaut d'équilibrage apparaîtra sous la forme d'excitation.

$$\gamma^0(\text{hélice}, t) = m\Gamma^0(\vec{A}) \quad (2.15)$$

$$\Gamma^0(\vec{A}) = \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} ; \vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} x \\ y+a \\ z+b \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\frac{d \vec{OA}}{dt} = \frac{d^3 \vec{OA}}{dt^3} + \vec{\Omega}_3 \wedge \vec{OA}$$

$$\frac{d\vec{OA}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{(3)} + \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)} \wedge \begin{Bmatrix} x \\ y+a \\ z+b \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\frac{d\vec{OA}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{(3)} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta}(z+b) - \dot{\gamma}(y+a) \\ \dot{\gamma}x - \dot{\alpha}(z+b) \\ \dot{\alpha}(y+a) - \dot{\beta}x \end{Bmatrix}_{(3)}$$

Après linéarisation

$$V^0(A) = \begin{Bmatrix} \dot{x} + b\dot{\beta} - a\dot{\gamma} \\ \dot{y} - b\dot{\alpha} \\ \dot{z} + a\dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\Gamma^0(A) = \frac{d^0 V^0(A)}{dt} = \frac{d^3 V(A)}{dt} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge V^0(A)$$

(2.16)

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge V^0(A) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\text{Soit : } \Gamma^0(A) = \begin{Bmatrix} \ddot{x} + b\ddot{\beta} - a\ddot{\gamma} \\ \ddot{y} - b\ddot{\alpha} \\ \ddot{z} + a\ddot{\alpha} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

D'où :

$$\vec{\gamma}^0(\text{hélice}, t) = m \left[(\ddot{x} + b\ddot{\beta} - a\ddot{\gamma}) \vec{x}_3 + (\ddot{y} - b\ddot{\alpha}) \vec{y}_3 + (\ddot{z} + a\ddot{\alpha}) \vec{z}_3 \right] \quad (2.17)$$

$$\text{Finalement : } \vec{\gamma}^0(\Sigma, t) = \begin{Bmatrix} \ddot{x}(M+m) + m(b\ddot{\beta} - a\ddot{\gamma}) \\ \ddot{y}(M+m) - mb\ddot{\alpha} \\ \ddot{z}(M+m) + ma\ddot{\alpha} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

2.6.8 Calcul du moment dynamique : $\vec{\delta}^0(\Sigma, G, t)$

$$\vec{\delta}^0(\Sigma, G, t) = \vec{\delta}^0(G, \text{moteur}, t) + \vec{\delta}^0(G, \text{hélice}, t) \quad (2.18)$$

a) Etude de $\vec{\delta}^0(G, \text{moteur}, t)$

En négligeant les parties mobiles du moteur dont l'influence apparaîtra sous la forme d'excitations.

$$\text{On a : } \vec{\delta}^0(G, \text{moteur}, t) = \frac{d^0 \vec{\mu}(G, \text{moteur}, t)}{dt} \text{ avec } \vec{\mu}^0 : \text{moment cinétique.} \quad (2.19)$$

$$\vec{\mu}^0(G, \text{moteur}, t) = I_G(\text{moteur}) \vec{\Omega}_3^0$$

$$\vec{\mu}^0(G, \text{moteur}, t) = I_{(G \vec{x}_3 \vec{y}_3 \vec{z}_3)}^{(3)} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(3)} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

Après linéarisation

$$\vec{\mu}^0(G, \text{moteur}, t) = \begin{Bmatrix} A_3 \dot{\alpha} \\ B_3 \dot{\beta} \\ C_3 \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

D'où :

$$\vec{\delta}^0(G, \text{moteur}, t) = \frac{d^0 \vec{\mu}(G, \text{moteur}, t)}{dt} = \begin{Bmatrix} A_3 \ddot{\alpha} \\ B_3 \ddot{\beta} \\ C_3 \ddot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

b) Etude de $\vec{\delta}^0(G, \text{hélice}, t)$

D'après la formule de changement de centre de moments

$$\vec{\delta}^0(G, \text{hélice}, t) = \vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) + \vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^0(G) \quad (2.20)$$

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) = \frac{d^0 \vec{\mu}(A, \text{hélice}, t)}{dt}$$

$$\vec{\mu}^0(A, \text{hélice}, t) = I_{(Ax_4 y_4 z_4)}^{(4)} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(4)} \vec{\Omega}_4^0$$

Dans le repère de calcul qui est le repère (3) :

$$I_{(Ax_4 y_4 z_4)}^{(4)} = \begin{bmatrix} \cos i\Omega t & 0 & \sin i\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin i\Omega t & 0 & \cos i\Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i\Omega t & 0 & -\sin i\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i\Omega t & 0 & \cos i\Omega t \end{bmatrix}$$

$$\text{Car } \vec{\Omega}_4^3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ i\Omega \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

Avec $i =$ rapport de réduction entre le moteur et l'hélice.

$$I_{(Ax_4 y_4 z_4)}^{(4)} = \begin{bmatrix} A_4 \cos i\Omega t & 0 & C_4 \sin i\Omega t \\ 0 & B_4 & 0 \\ -A_4 \sin i\Omega t & 0 & C_4 \cos i\Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i\Omega t & 0 & -\sin i\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin i\Omega t & 0 & \cos i\Omega t \end{bmatrix}$$

$$I_{(Ax_4 y_4 z_4)}^{(4)} = \begin{bmatrix} A_4 \cos^2 i\Omega t + C_4 \sin^2 i\Omega t & 0 & (C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t \\ 0 & B_4 & 0 \\ (C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t & 0 & A_4 \sin^2 i\Omega t + C_4 \cos^2 i\Omega t \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \vec{\Omega}_3^0 + \vec{\Omega}_4^3 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ i\Omega \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} + i\Omega \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}_{(3)}$$

Le moment cinétique de l'hélice en A :

$$\vec{\mu}^0(A, \text{hélice}, t) = \begin{bmatrix} A_4 \cos^2 i\Omega t + C_4 \sin^2 i\Omega t & 0 & (C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t \\ 0 & B_4 & 0 \\ (C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t & 0 & A_4 \sin^2 i\Omega t + C_4 \cos^2 i\Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} + i\Omega \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{\mu}^0(A, \text{hélice}, t) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}(A_4 \cos^2 i\Omega t + C_4 \sin^2 i\Omega t) + \dot{\gamma}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t \\ B_4(\dot{\beta} + i\Omega) \\ \dot{\alpha}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t + \dot{\gamma}(A_4 \sin^2 i\Omega t + C_4 \cos^2 i\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) = \frac{d^0 \vec{\mu}(A, \text{hélice}, t)}{dt} = \frac{d^3 \vec{\mu}(A, \text{hélice}, t)}{dt} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{\mu}^0(A, \text{hélice}, t) \quad (2.21)$$

Le moment dynamique de l'hélice en A :

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{\mu}^0(A, \text{hélice}, t) = \begin{Bmatrix} -iB_4 \Omega \dot{\gamma} \\ 0 \\ iB_4 \Omega \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{d^3 \vec{\mu}(A, \text{hélice}, t)}{dt} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}(A_4 \cos^2 i\Omega t + C_4 \sin^2 i\Omega t) + 2i \dot{\alpha} \Omega \sin i\Omega t \cos i\Omega t (C_4 - A_4) + \\ \ddot{\gamma}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t + (C_4 - A_4) i\Omega \dot{\gamma} (\cos^2 i\Omega t - \sin^2 i\Omega t) \\ B_4 \ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t + \dot{\alpha}(C_4 - A_4) i\Omega (\cos^2 i\Omega t - \sin^2 i\Omega t) + \\ \ddot{\gamma}(A_4 \sin^2 i\Omega t + C_4 \cos^2 i\Omega t) + 2i \Omega \dot{\gamma} \sin i\Omega t \cos i\Omega t (A_4 - C_4) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha}(A_4 \cos^2 i\Omega t + C_4 \sin^2 i\Omega t) + 2i \dot{\alpha} \Omega \sin i\Omega t \cos i\Omega t (C_4 - A_4) + \\ \ddot{\gamma}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t + (C_4 - A_4) i\Omega \dot{\gamma} (\cos^2 i\Omega t - \sin^2 i\Omega t) \\ -i \Omega \dot{\gamma} B_4 \\ B_4 \ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha}(C_4 - A_4) \sin i\Omega t \cos i\Omega t + \dot{\alpha}(C_4 - A_4) i\Omega (\cos^2 i\Omega t - \sin^2 i\Omega t) + \\ iB_4 \Omega \dot{\alpha} + \ddot{\gamma}(A_4 \sin^2 i\Omega t + C_4 \cos^2 i\Omega t) + \\ 2i \Omega \dot{\gamma} \sin i\Omega t \cos i\Omega t (A_4 - C_4) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Le moment dynamique $\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t)$ peut être mis sous la forme :

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} \left[A_4 \frac{1 + \cos 2i\Omega t}{2} + C_4 \frac{1 - \cos 2i\Omega t}{2} \right] - i \dot{\alpha} \Omega \sin 2i\Omega t (C_4 - A_4) + \\ \ddot{\gamma} (C_4 - A_4) \frac{\sin 2i\Omega t}{2} + \dot{\gamma} (C_4 - A_4) i \Omega \cos 2i\Omega t \\ - i \Omega \dot{\gamma} B_4 \\ \\ B_4 \ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} (C_4 - A_4) \sin 2i\Omega t + i \Omega \dot{\alpha} (C_4 - A_4) + \dot{\gamma} \left[A_4 \frac{1 - \cos 2i\Omega t}{2} + C_4 \frac{1 + \cos 2i\Omega t}{2} \right] + \\ \dot{\gamma} i \Omega (A_4 - C_4) \sin 2i\Omega t + i B_4 \Omega \dot{\alpha} \end{array} \right\} \quad (3)$$

c) Etude de l'influence des termes en $\sin 2i\Omega t$ et $\cos 2i\Omega t$:

Supposons le moteur vibre à la pulsation ω

On aura : $\alpha = a_1 \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{\alpha} = a_1 \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{\alpha} = -a_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

Les termes en $\ddot{\alpha} \cos 2i\Omega t$ seront de la forme $-a_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \cos 2i\Omega t$

Soit : $\frac{-a_1 \omega^2}{2} \sin(\omega t + \varphi + 2i\Omega) + \sin(\omega t + \varphi - 2i\Omega)$

De même en calculant $\ddot{\alpha} \sin 2i\Omega t$ ou $\dot{\alpha} \Omega \cos 2i\Omega t$ et $\dot{\alpha} \Omega \sin 2i\Omega t$, nous trouverons une excitation de pulsation $\omega + 2i\Omega$ ou $\omega - 2i\Omega$

Le travail d'une excitation de pulsation $k\omega$ sur une vibration de pulsation $m\omega$ est de la forme :

Vibration : $\alpha = a_1 \sin(m\omega t + \varphi)$

Excitation : $E = a_2 \sin(k\omega t)$

Le travail élémentaire est égal à : $dW = Ed\alpha$

$$dW = a_2 \sin(k\omega t) a_1 m \omega \cos(m\omega t + \varphi)$$

Intégrons dW sur une période de vibration soit $t = \frac{2\pi}{\omega}$

(m et k sont quelconques)

$$W = \int_0^{2\pi} a_1 a_2 m \omega \sin k\omega t \cos(m\omega t + \varphi) dt \quad (2.22)$$

$$W = \int_0^{2\pi} a_1 a_2 m \omega \sin \omega t(k+m) + \varphi + \sin \omega t(k-m) + \varphi dt \quad (2.23)$$

On peut remarquer que $W = \int_0^{2\pi/\omega} \sin(p\omega t + \varphi) dt = 0$; si $p \neq 0$

Donc si $k \neq m$, le travail de l'excitation de pulsation $k\omega$ sur la vibration de pulsation $m\omega$ est nul.

Compte tenu du fait que les termes en 2Ω sont sans influence pour une excitation en Ω , les seuls termes pris en considération dans l'expression dans du moment dyna-

miques de l'hélice $\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t)$ sont donc :

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\alpha} \frac{(A_4 + C_4)}{2} - i \Omega \dot{\gamma} B_4 \\ B_4 \ddot{\beta} \\ \dot{\gamma} \frac{(A_4 + C_4)}{2} + i B_4 \Omega \dot{\alpha} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\vec{\delta}^0(G, \text{hélice}, t) = \vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) + \vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^0(G) \quad (2.24)$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{\Gamma}^0(A) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ a \\ b \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} + b \ddot{\beta} - a \ddot{\gamma} \\ \ddot{y} - b \ddot{\alpha} \\ \ddot{z} + a \ddot{\alpha} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -mb \ddot{y} + ma \ddot{z} + m \ddot{\alpha} (a^2 + b^2) \\ mb \ddot{x} + mb^2 \ddot{\beta} - mab \ddot{\gamma} \\ -ma \ddot{x} - mab \ddot{\beta} + ma^2 \ddot{\gamma} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\vec{\delta}^0(A, \text{hélice}, t) + \vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^0(G) = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} \frac{(A_4 + C_4)}{2} - i \Omega \dot{\gamma} B_4 \\ B_4 \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \frac{(A_4 + C_4)}{2} + i B_4 \Omega \dot{\alpha} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -mb \ddot{y} + ma \ddot{z} + m \ddot{\alpha} (a^2 + b^2) \\ mb \ddot{x} + mb^2 \ddot{\beta} - mab \ddot{\gamma} \\ -ma \ddot{x} - mab \ddot{\beta} + ma^2 \ddot{\gamma} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Finalement, les termes du moment dynamique de l'hélice par rapport à G pris en compte sont :

$$\vec{\delta}^0(G, \text{hélice}, t) = \left\{ \begin{array}{l} -mb \ddot{y} + ma \ddot{z} + \ddot{\alpha} \left[\frac{(A_4 + C_4)}{2} + m(a^2 + b^2) \right] - i \Omega \dot{\gamma} B_4 \\ mb \ddot{x} + \ddot{\beta} (mb^2 + B_4) - mab \ddot{\gamma} \\ -ma \ddot{x} - mab \ddot{\beta} + \ddot{\gamma} \left[ma^2 + \frac{(A_4 + C_4)}{2} \right] + i B_4 \Omega \dot{\alpha} \end{array} \right\}$$

Le moment dynamique de l'ensemble motopropulseur est en fonction des parties mobiles du moteur. Il faut donc faire une étude particulière pour chaque type de moteur. Le moment dynamique des parties mobiles de moteurs alternatifs est de la forme

$$C_x \vec{x}_3 + C_y \vec{y}_3 + C_z \vec{z}_3 \text{ et entraîne une excitation de vibration de pulsation } \Omega, 2\Omega, \dots$$

Cette excitation n'est utile que pour la réponse en vibration forcée, on peut donc poursuivre l'étude sans la connaître plus précisément.

2.6.9 Application des théorèmes généraux de la dynamique

$$\text{Théorème de la résultante : } \sum \vec{F} = \vec{\gamma}^0(\Sigma, t) \quad (2.25)$$

$$\text{Théorème du moment dynamique : } \sum \mathfrak{M}_G(\vec{F}) = \vec{\delta}^0(\Sigma, G, t) \quad (2.26)$$

Le théorème de la résultante nous donne trois équations :

$$\begin{aligned} & x \Sigma k_{xx} + y \Sigma k_{xy} + z \Sigma k_{xz} + \alpha (-\Sigma e_{kxy} + \Sigma d_{kxz}) + \beta (\Sigma e_{kxx} - \Sigma c_{kxz}) + \gamma (-\Sigma d_{kxx} + \Sigma c_{kxy}) \\ & + \dot{x} \Sigma C_{xx} + \dot{y} \Sigma C_{xy} + \dot{z} \Sigma C_{xz} + \dot{\alpha} (-\Sigma e_{Cxy} + \Sigma d_{Cxz}) + \dot{\beta} (\Sigma e_{Cxx} - \Sigma c_{Cxz}) + \dot{\gamma} (-\Sigma d_{Cxx} + \Sigma c_{Cxy}) + \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\Sigma (\text{Forces d'excitation suivant } \vec{x}_3) = \ddot{x}(M+m) + m(b \ddot{\beta} - a \ddot{\gamma})$$

$$\begin{aligned}
& x\Sigma k_{yx} + y\Sigma k_{yy} + z\Sigma k_{yz} + \alpha(-\Sigma e_{ky} + \Sigma dk_{yz}) + \beta(\Sigma e_{kyx} - \Sigma c_{kyz}) + \gamma(-\Sigma dk_{yx} + \Sigma c_{kyy}) \\
& + \dot{x}\Sigma C_{yx} + \dot{y}\Sigma C_{yy} + \dot{z}\Sigma C_{yz} + \dot{\alpha}(-\Sigma e_{Cyy} + \Sigma dC_{yz}) + \dot{\beta}(\Sigma e_{Cyx} - \Sigma cC_{yz}) + \dot{\gamma}(-\Sigma dC_{yx} + \Sigma cC_{yy}) + \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\Sigma(\text{Forces d'excitation suivant } \vec{y}_3) = \ddot{y}(M+m) - mb\ddot{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
& x\Sigma k_{yx} + y\Sigma k_{zy} + z\Sigma k_{zz} + \alpha(-\Sigma e_{kz} + \Sigma dk_{zz}) + \beta(\Sigma e_{kzx} - \Sigma c_{kzz}) + \gamma(-\Sigma dk_{zx} + \Sigma c_{kzy}) \\
& + \dot{x}\Sigma C_{zx} + \dot{y}\Sigma C_{zy} + \dot{z}\Sigma C_{zz} + \dot{\alpha}(-\Sigma e_{Czy} + \Sigma dC_{zz}) + \dot{\beta}(\Sigma e_{Czx} - \Sigma cC_{zz}) + \dot{\gamma}(-\Sigma dC_{zx} + \Sigma cC_{zy}) + \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\Sigma(\text{Forces d'excitation suivant } \vec{z}_3) = \ddot{z}(M+m) + ma\ddot{\alpha}$$

Le théorème du moment dynamique nous donne trois autres équations :

$$\begin{aligned}
& x(\Sigma dk_{zx} - e\Sigma k_{yx}) + y(\Sigma dk_{zy} - \Sigma e_{kyy}) + z(\Sigma dk_{zz} - \Sigma e_{kyz}) \\
& + \alpha(-\Sigma dek_{zy} + \Sigma d^2k_{zz} + \Sigma e^2k_{yy} - \Sigma dek_{yz}) \\
& + \beta(\Sigma dek_{zx} - \Sigma dck_{zz} - \Sigma e^2k_{yx} + \Sigma cek_{yz}) \\
& + \gamma(-\Sigma d^2k_{zx} + \Sigma dck_{zy} + \Sigma dek_{yx} - \Sigma cek_{yy}) \\
& + \dot{x}(\Sigma deC_{zx} - \Sigma eC_{yx}) + \dot{y}(\Sigma dC_{zy} - \Sigma eC_{yy}) + \dot{z}(\Sigma dC_{zz} - \Sigma eC_{yz}) \\
& \dot{\alpha}(-\Sigma edC_{zy} + \Sigma d^2C_{zz} + \Sigma e^2C_{yy} - \Sigma deC_{yz}) \\
& \dot{\beta}(\Sigma deC_{zx} - \Sigma dcC_{zz} - \Sigma e^2C_{yx} + \Sigma ceC_{yz}) \\
& \dot{\gamma}(-\Sigma d^2C_{zx} + \Sigma dcC_{zy} + \Sigma deC_{yx} - \Sigma ceC_{yy}) + \\
& \Sigma(\text{Couples d'excitation suivant } \vec{x}_3) = \\
& -mb\ddot{y} + ma\ddot{z} + \ddot{\alpha} \left[A_3 + \frac{(A_4 + C_4)}{2} + m(a^2 + b^2) \right] - B_4 i \Omega \dot{\gamma} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(\Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{zx}) + y(\Sigma ek_{xy} - \Sigma ck_{zy}) + z(\Sigma ek_{xz} - \Sigma ck_{zz}) \\
& + \alpha(\Sigma e^2k_{xy} + \Sigma edk_{xz} + \Sigma cek_{zy} - \Sigma cdk_{zz}) \\
& + \beta(-\Sigma cek_{zx} + \Sigma c^2k_{zz} + \Sigma e^2k_{xx} - \Sigma cek_{xz}) \\
& + \gamma(\Sigma cdk_{zx} - \Sigma c^2k_{zy} - \Sigma dek_{xx} + \Sigma cek_{xy}) \\
& + \dot{x}(\Sigma eC_{xx} - \Sigma cC_{zx}) + \dot{y}(\Sigma eC_{xy} - \Sigma cC_{zy}) + \dot{z}(\Sigma eC_{xz} - \Sigma cC_{zz}) \\
& + \dot{\alpha}(-\Sigma e^2C_{xy} + \Sigma deC_{xz} + \Sigma ceC_{zy} + \Sigma cdC_{zz}) \\
& + \dot{\beta}(\Sigma e^2C_{xx} - \Sigma ecC_{xz} - \Sigma ceC_{zx} + \Sigma c^2C_{zz}) \\
& + \dot{\gamma}(-\Sigma deC_{xx} + \Sigma ecC_{xy} + \Sigma cdC_{zx} - \Sigma c^2C_{zy}) + \\
& \Sigma(\text{Couples d'excitation suivant } \vec{y}_3) = \\
& mb\ddot{x} + \ddot{\beta}(mb^2 + B_3 + B_4) - mab\ddot{\gamma} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x(\Sigma ckyx - \Sigma dkxx) + y(\Sigma ckyx - \Sigma dkxy) + z(\Sigma ckyz - \Sigma dkxz) \\
 & + \alpha(-\Sigma cekyy + \Sigma cdkyz + \Sigma dekxy - \Sigma d^2kxz) \\
 & + \beta(\Sigma cekyx - \Sigma c^2kyz - \Sigma dekxx + \Sigma cdkxz) \\
 & + \gamma(-\Sigma cdkyx + \Sigma c^2kyy + \Sigma d^2kxx - \Sigma cdkxy) \\
 & + \dot{x}(\Sigma c Cyx - \Sigma dCxx) + \dot{y}(\Sigma c Cyy - \Sigma dCxy) + \dot{z}(\Sigma c Cyz - \Sigma dCxz) \\
 & + \dot{\alpha}(-\Sigma ceCyy + \Sigma cdCyz + \Sigma deCxy + \Sigma d^2Cxz) \\
 & + \dot{\beta}(\Sigma ce Cyx - \Sigma c^2Cyz - \Sigma deCxx + \Sigma dcCxz) \\
 & + \dot{\gamma}(-\Sigma cdCyx + \Sigma c^2Cyy + \Sigma d^2Cxx - \Sigma dcCxy) + \\
 & \Sigma(\text{Couple } s \text{ d'excitation suivant } \vec{z}_3) = \\
 & -ma \ddot{x} - mab \ddot{\beta} + \dot{\gamma} \left[C_3 + ma^2 + \frac{(A_4 + C_4)}{2} \right] + B_4 i \Omega \dot{\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma \text{ Forces ext} \\ \Sigma \text{ Couples ext} \end{Bmatrix}$$

2.6.10 Résolution du système des 6 équations de la mécanique

Les solutions d'un tel système sont de la forme :

$$q_i = \sum_{j=1}^6 A_j (\sin \omega_j t + \varphi_j) + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Avec ω_j = Pulsations propres de la suspension. Dans notre cas, il y a six degrés de liberté d'où six pulsations propres.

Et ω = Pulsation de l'excitation.

La vibration en ω_j , n'étant pas excitée, n'est qu'une vibration transitoire et devient très rapidement négligeable à cause des divers amortissements appliqués sur la suspension.

Pour résoudre le système des six équations différentielles, on peut donc prendre comme solutions particulières des solutions de la forme :

$$\begin{aligned}
x &= A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t ; \quad \dot{x} = \omega(A_{11} \cos \omega t - A_{12} \sin \omega t) ; \quad \ddot{x} = -\omega^2(A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t) \\
y &= A_{21} \sin \omega t + A_{22} \cos \omega t ; \quad \dot{y} = \omega(A_{21} \cos \omega t - A_{22} \sin \omega t) ; \quad \ddot{y} = -\omega^2(A_{21} \sin \omega t + A_{22} \cos \omega t) \\
z &= A_{31} \sin \omega t + A_{32} \cos \omega t ; \quad \dot{z} = \omega(A_{31} \cos \omega t - A_{32} \sin \omega t) ; \quad \ddot{z} = -\omega^2(A_{31} \sin \omega t + A_{32} \cos \omega t) \\
\alpha &= A_{41} \sin \omega t + A_{42} \cos \omega t ; \quad \dot{\alpha} = \omega(A_{41} \cos \omega t - A_{42} \sin \omega t) ; \quad \ddot{\alpha} = -\omega^2(A_{41} \sin \omega t + A_{42} \cos \omega t) \\
\beta &= A_{51} \sin \omega t + A_{52} \cos \omega t ; \quad \dot{\beta} = \omega(A_{51} \cos \omega t - A_{52} \sin \omega t) ; \quad \ddot{\beta} = -\omega^2(A_{51} \sin \omega t + A_{52} \cos \omega t) \\
\gamma &= A_{61} \sin \omega t + A_{62} \cos \omega t ; \quad \dot{\gamma} = \omega(A_{61} \cos \omega t - A_{62} \sin \omega t) ; \quad \ddot{\gamma} = -\omega^2(A_{61} \sin \omega t + A_{62} \cos \omega t)
\end{aligned}$$

En remplaçant les variables $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ par leurs expressions en fonction des A_{ij} , et en identifiant les termes en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$, on obtient un système linéaire de douze équations à douze inconnues A_{ij} que l'on peut mettre sous la forme :

$$\mathbf{B} \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{F} \quad (2.33)$$

Avec \mathbf{F} = ensemble des forces et couples d'excitation sue le système.

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 -(m+M) & 0 & 0 & 0 & -mb & ma \\
 0 & -(m+M) & 0 & mb & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -(m+M) & -ma & 0 & 0 \\
 0 & mb & -ma & -A_3 - \frac{(A_4 + C_4)}{2} - m(a^2 + b^2) & 0 & 0 \\
 -mb & 0 & 0 & 0 & -mb^2 - B_3 - B_4 & mab \\
 ma & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 - ma^2 - \frac{(A_4 + C_4)}{2}
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dots \\ x \\ \dots \\ y \\ \dots \\ z \\ \dots \\ \alpha \\ \dots \\ \beta \\ \dots \\ \gamma \end{array} \right\} +$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \Sigma C_{xx} & \Sigma C_{xy} & \Sigma C_{xz} & -\Sigma e C_{xy} + \Sigma d C_{xz} & \Sigma e C_{xx} - \Sigma c C_{xz} & -\Sigma d C_{xx} + \Sigma c C_{xy} \\
 \Sigma C_{yx} & \Sigma C_{yy} & \Sigma C_{yz} & -\Sigma e C_{yy} + \Sigma d C_{yz} & \Sigma e C_{yx} - \Sigma c C_{yz} & -\Sigma d C_{yx} + \Sigma c C_{yy} \\
 \Sigma C_{zx} & \Sigma C_{zy} & \Sigma C_{zz} & -\Sigma e C_{zy} + \Sigma d C_{zz} & \Sigma e C_{zx} - \Sigma c C_{zz} & -\Sigma d C_{zx} + \Sigma c C_{zy} \\
 \Sigma d e C_{zx} - \Sigma e C_{yx} & \Sigma d C_{zy} - \Sigma e C_{yy} & \Sigma d C_{zz} - \Sigma e C_{yz} & -\Sigma e d C_{zy} + \Sigma d^2 C_{zz} & \Sigma d e C_{zx} - \Sigma d c C_{zz} & -\Sigma d^2 C_{zx} + \Sigma d c C_{zy} \\
 & & & + \Sigma e^2 C_{yy} - \Sigma d e C_{yz} & -\Sigma e^2 C_{yx} + \Sigma c e C_{yz} & + \Sigma d e C_{yx} - \Sigma c e C_{yy} \\
 & & & & & + B_4 i \Omega \\
 \Sigma e C_{xx} - \Sigma c C_{zx} & \Sigma e C_{xy} - \Sigma c C_{zy} & \Sigma e C_{xz} - \Sigma c C_{zz} & -\Sigma e^2 C_{xy} + \Sigma d e C_{xz} & \Sigma e^2 C_{xx} - \Sigma e c C_{xz} & -\Sigma d e C_{xx} + \Sigma e c C_{xy} \\
 & & & + \Sigma c e C_{zy} + \Sigma c d C_{zz} & -\Sigma c e C_{zx} + \Sigma c^2 C_{zz} & + \Sigma c d C_{zx} - \Sigma c^2 C_{zy} \\
 \Sigma c C_{yx} - \Sigma d C_{xx} & \Sigma c C_{yy} - \Sigma d C_{xy} & \Sigma c C_{yz} - \Sigma d C_{xz} & -\Sigma c e C_{yy} + \Sigma c d C_{yz} & \Sigma c e C_{yx} - \Sigma c^2 C_{yz} & -\Sigma c d C_{yx} + \Sigma c^2 C_{yy} \\
 & & & + \Sigma d e C_{xy} + \Sigma d^2 C_{xz} & -\Sigma d e C_{xx} + \Sigma d c C_{xz} & + \Sigma d^2 C_{xx} - \Sigma d c C_{xy} \\
 & & & -B_4 i \Omega & &
 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix}
 \Sigma k_{xx} & \Sigma k_{xy} & \Sigma k_{xz} & -\Sigma ek_{xy} + \Sigma dk_{xz} & \Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{xz} & -\Sigma dk_{xx} + \Sigma ck_{xy} \\
 \Sigma k_{yx} & \Sigma k_{yy} & \Sigma k_{yz} & -\Sigma ek_{yy} + \Sigma dk_{yz} & \Sigma ek_{yx} - \Sigma ck_{yz} & -\Sigma dk_{yx} + \Sigma ck_{yy} \\
 \Sigma k_{yx} & \Sigma k_{zy} & \Sigma k_{zz} & -\Sigma ek_{zy} + \Sigma dk_{zz} & \Sigma ek_{zx} - \Sigma ck_{zz} & -\Sigma dk_{zx} + \Sigma ck_{zy} \\
 \Sigma dk_{zx} - \Sigma ek_{yx} & \Sigma dk_{zy} - \Sigma ek_{yy} & \Sigma dk_{zz} - \Sigma ek_{yz} & -\Sigma dek_{zy} + \Sigma d^2 k_{zz} & \Sigma dek_{zx} - \Sigma dck_{zz} & -\Sigma d^2 k_{zx} + \Sigma dck_{zy} \\
 & & & + \Sigma e^2 k_{yy} - \Sigma dek_{yz} & -\Sigma e^2 k_{yx} + \Sigma cek_{yz} & + \Sigma dek_{yx} - \Sigma cek_{yy} \\
 \Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{zx} & \Sigma ek_{xy} - \Sigma ck_{zy} & \Sigma ek_{xz} - \Sigma ck_{zz} & \Sigma e^2 k_{xy} + \Sigma edk_{xz} & -\Sigma cek_{zx} + \Sigma c^2 k_{zz} & \Sigma cdk_{zx} - \Sigma c^2 k_{zy} \\
 & & & + \Sigma cek_{zy} - \Sigma cdk_{zz} & + \Sigma e^2 k_{xx} - \Sigma cek_{xz} & -\Sigma dek_{xx} + \Sigma cek_{xy} \\
 \Sigma ck_{yx} - \Sigma dk_{xx} & \Sigma ck_{yy} - \Sigma dk_{xy} & \Sigma ck_{yz} - \Sigma dk_{xz} & -\Sigma cek_{yy} + \Sigma cdk_{yz} & \Sigma cek_{yx} - \Sigma c^2 k_{yz} & -\Sigma cdk_{yx} + \Sigma c^2 k_{yy} \\
 & & & + \Sigma dek_{xy} - \Sigma d^2 k_{xz} & -\Sigma dek_{xx} + \Sigma cdk_{xz} & + \Sigma d^2 k_{xx} - \Sigma cdk_{xy}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x \\
 y \\
 z \\
 \alpha \\
 \beta \\
 \gamma
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_x \\
 F_y \\
 F_z \\
 M_x \\
 M_y \\
 M_z
 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les variables $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ par leurs expressions :

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \begin{bmatrix}
 -(m+M) & 0 & 0 & 0 & -mb & ma \\
 0 & -(m+M) & 0 & mb & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -(m+M) & -ma & 0 & 0 \\
 0 & mb & -ma & -A_3 - \frac{(A_4 + C_4)}{2} - m(a^2 + b^2) & 0 & 0 \\
 -mb & 0 & 0 & 0 & -mb^2 - B_3 - B_4 & mab \\
 ma & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 - ma^2 - \frac{(A_4 + C_4)}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t \\
 A_{21} \sin \omega t + A_{22} \cos \omega t \\
 A_{31} \sin \omega t + A_{32} \cos \omega t \\
 A_{41} \sin \omega t + A_{42} \cos \omega t \\
 A_{51} \sin \omega t + A_{52} \cos \omega t \\
 A_{61} \sin \omega t + A_{62} \cos \omega t
 \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\omega \left[\begin{array}{cccccc}
 \Sigma C_{xx} & \Sigma C_{xy} & \Sigma C_{xz} & -\Sigma e C_{xy} + \Sigma d C_{xz} & \Sigma e C_{xx} - \Sigma c C_{xz} & -\Sigma d C_{xx} + \Sigma c C_{xy} \\
 \Sigma C_{yx} & \Sigma C_{yy} & \Sigma C_{yz} & -\Sigma e C_{yy} + \Sigma d C_{yz} & \Sigma e C_{yx} - \Sigma c C_{yz} & -\Sigma d C_{yx} + \Sigma c C_{yy} \\
 \Sigma C_{zx} & \Sigma C_{zy} & \Sigma C_{zz} & -\Sigma e C_{zy} + \Sigma d C_{zz} & \Sigma e C_{zx} - \Sigma c C_{zz} & -\Sigma d C_{zx} + \Sigma c C_{zy} \\
 \Sigma d e C_{zx} - \Sigma e C_{yx} & \Sigma d C_{zy} - \Sigma e C_{yy} & \Sigma d C_{zz} - \Sigma e C_{yz} & -\Sigma e d C_{zy} + \Sigma d^2 C_{zz} & \Sigma d e C_{zx} - \Sigma d c C_{zz} & -\Sigma d^2 C_{zx} + \Sigma d c C_{zy} \\
 & & & + \Sigma e^2 C_{yy} - \Sigma d e C_{yz} & -\Sigma e^2 C_{yx} + \Sigma c e C_{yz} & + \Sigma d e C_{yx} - \Sigma c e C_{yy} \\
 & & & & & + B_4 i \Omega \\
 \Sigma e C_{xx} - \Sigma c C_{zx} & \Sigma e C_{xy} - \Sigma c C_{zy} & \Sigma e C_{xz} - \Sigma c C_{zz} & -\Sigma e^2 C_{xy} + \Sigma d e C_{xz} & \Sigma e^2 C_{xx} - \Sigma e c C_{xz} & -\Sigma d e C_{xx} + \Sigma e c C_{xy} \\
 & & & + \Sigma c e C_{zy} + \Sigma c d C_{zz} & -\Sigma c e C_{zx} + \Sigma c^2 C_{zz} & + \Sigma c d C_{zx} - \Sigma c^2 C_{zy} \\
 \Sigma e C_{yx} - \Sigma d C_{xx} & \Sigma e C_{yy} - \Sigma d C_{xy} & \Sigma e C_{yz} - \Sigma d C_{xz} & -\Sigma c e C_{yy} + \Sigma c d C_{yz} & \Sigma c e C_{yx} - \Sigma c^2 C_{yz} & -\Sigma c d C_{yx} + \Sigma c^2 C_{yy} \\
 & & & + \Sigma d e C_{xy} + \Sigma d^2 C_{xz} & -\Sigma d e C_{xx} + \Sigma d c C_{xz} & + \Sigma d^2 C_{xx} - \Sigma d c C_{xy} \\
 & & & -B_4 i \Omega & &
 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l}
 A_{11} \cos \omega t \\
 -A_{12} \sin \omega t \\
 \\
 A_{21} \cos \omega t \\
 -A_{22} \sin \omega t \\
 \\
 A_{31} \cos \omega t \\
 -A_{32} \sin \omega t \\
 \\
 A_{41} \cos \omega t \\
 -A_{42} \sin \omega t \\
 \\
 A_{51} \cos \omega t \\
 -A_{52} \sin \omega t \\
 \\
 A_{61} \cos \omega t \\
 -A_{62} \sin \omega t
 \end{array} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix}
 \Sigma k_{xx} & \Sigma k_{xy} & \Sigma k_{xz} & -\Sigma e k_{xy} + \Sigma d k_{xz} & \Sigma e k_{xx} - \Sigma c k_{xz} & -\Sigma d k_{xx} + \Sigma c k_{xy} \\
 \Sigma k_{yx} & \Sigma k_{yy} & \Sigma k_{yz} & -\Sigma e k_{yy} + \Sigma d k_{yz} & \Sigma e k_{yx} - \Sigma c k_{yz} & -\Sigma d k_{yx} + \Sigma c k_{yy} \\
 \Sigma k_{yx} & \Sigma k_{zy} & \Sigma k_{zz} & -\Sigma e k_{zy} + \Sigma d k_{zz} & \Sigma e k_{zx} - \Sigma c k_{zz} & -\Sigma d k_{zx} + \Sigma c k_{zy} \\
 \Sigma d k_{zx} - \Sigma e k_{yx} & \Sigma d k_{zy} - \Sigma e k_{yy} & \Sigma d k_{zz} - \Sigma e k_{yz} & -\Sigma d e k_{zy} + \Sigma d^2 k_{zz} & \Sigma d e k_{zx} - \Sigma d c k_{zz} & -\Sigma d^2 k_{zx} + \Sigma d c k_{zy} \\
 & & & + \Sigma e^2 k_{yy} - \Sigma d e k_{yz} & -\Sigma e^2 k_{yx} + \Sigma c e k_{yz} & + \Sigma d e k_{yx} - \Sigma c e k_{yy} \\
 \Sigma e k_{xx} - \Sigma c k_{xz} & \Sigma e k_{xy} - \Sigma c k_{zy} & \Sigma e k_{xz} - \Sigma c k_{zz} & \Sigma e^2 k_{xy} + \Sigma e d k_{xz} & -\Sigma c e k_{zx} + \Sigma c^2 k_{zz} & \Sigma c d k_{zx} - \Sigma c^2 k_{zy} \\
 & & & + \Sigma c e k_{zy} - \Sigma c d k_{zz} & + \Sigma e^2 k_{xx} - \Sigma c e k_{xz} & -\Sigma d e k_{xx} + \Sigma c e k_{xy} \\
 \Sigma c k_{yx} - \Sigma d k_{xx} & \Sigma c k_{yy} - \Sigma d k_{xy} & \Sigma c k_{yz} - \Sigma d k_{xz} & -\Sigma c e k_{yy} + \Sigma c d k_{yz} & \Sigma c e k_{yx} - \Sigma c^2 k_{yz} & -\Sigma c d k_{yx} + \Sigma c^2 k_{yy} \\
 & & & + \Sigma d e k_{xy} - \Sigma d^2 k_{xz} & -\Sigma d e k_{xx} + \Sigma c d k_{xz} & + \Sigma d^2 k_{xx} - \Sigma c d k_{xy}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_{11} \sin \omega t \\
 + A_{12} \cos \omega t \\
 \\
 A_{21} \sin \omega t \\
 + A_{22} \cos \omega t \\
 \\
 A_{31} \sin \omega t \\
 + A_{32} \cos \omega t \\
 \\
 A_{41} \sin \omega t \\
 + A_{42} \cos \omega t \\
 \\
 A_{51} \sin \omega t \\
 + A_{52} \cos \omega t \\
 \\
 A_{61} \sin \omega t \\
 + A_{62} \cos \omega t
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_x \\
 F_y \\
 F_z \\
 \\
 M_x \\
 \\
 M_y \\
 \\
 M_z
 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix}
 (m+M)\omega^2 & -\omega\Sigma C_{xx} & \Sigma k_{xy} & -\omega\Sigma C_{xy} & \Sigma k_{xz} & -\omega\Sigma C_{xz} & -\Sigma e k_{xy} & \omega\Sigma e C_{xy} & \Sigma e k_{xx} & -\omega\Sigma e C_{xx} & -\Sigma d k_{xx} & \omega\Sigma d C_{xx} \\
 +\Sigma k_{xx} & & & & & & +\Sigma d k_{xz} & -\omega\Sigma d C_{xz} & -\Sigma c k_{xz} & +\omega\Sigma c C_{xz} & +\Sigma c k_{xy} & -\omega\Sigma c C_{xy} \\
 & & & & & & & +mb\omega^2 & & & -ma\omega^2 & \\
 \omega\Sigma C_{xx} & (m+M)\omega^2 & \omega\Sigma C_{xy} & \Sigma k_{xy} & \omega\Sigma C_{xz} & \Sigma k_{xz} & -\omega\Sigma e C_{xy} & -\Sigma e k_{xy} & \omega\Sigma e C_{xx} & \Sigma e k_{xx} & -\omega\Sigma d C_{xx} & -\Sigma d k_{xx} \\
 +\Sigma k_{xx} & & & & & & +\omega\Sigma d C_{xz} & +\Sigma d k_{xz} & -\omega\Sigma c C_{xz} & -\Sigma c k_{xz} & +\omega\Sigma c C_{xy} & +\Sigma c k_{xy} \\
 & & & & & & & & +mb\omega^2 & & -ma\omega^2 & \\
 \Sigma k_{yx} & -\omega\Sigma C_{yx} & (m+M)\omega^2 & -\omega\Sigma C_{yy} & \Sigma k_{yz} & -\omega\Sigma C_{yz} & \Sigma d k_{yz} & \omega\Sigma e C_{yy} & \Sigma e k_{yx} & -\omega\Sigma e C_{yx} & \Sigma c k_{yy} & \omega\Sigma d C_{yx} \\
 +\Sigma k_{yy} & & & & & & -\Sigma e k_{yy} & -\omega\Sigma d C_{yz} & -\Sigma c k_{yz} & +\omega\Sigma c C_{yz} & -\Sigma d k_{yx} & -\omega\Sigma c C_{yy} \\
 & & & & & & -mb\omega^2 & & & & & \\
 \omega\Sigma C_{yx} & \Sigma k_{yx} & \omega\Sigma C_{yy} & (m+M)\omega^2 & \omega\Sigma C_{yz} & \Sigma k_{yz} & -\omega\Sigma e C_{yy} & \Sigma d k_{yz} & \omega\Sigma e C_{yx} & \Sigma e k_{yx} & -\omega\Sigma d C_{yx} & \Sigma c k_{yy} \\
 +\Sigma k_{yy} & & & & & & +\omega\Sigma d C_{yz} & -\Sigma e k_{yy} & -\omega\Sigma c C_{yz} & -\Sigma c k_{yz} & +\omega\Sigma c C_{yy} & -\Sigma d k_{yx} \\
 & & & & & & -mb\omega^2 & & & & & \\
 \Sigma k_{zx} & -\omega\Sigma C_{zx} & \Sigma k_{zy} & -\omega\Sigma C_{zy} & (m+M)\omega^2 & -\omega\Sigma C_{zz} & -\Sigma e k_{zy} & \omega\Sigma e C_{zy} & \Sigma e k_{zx} & -\omega\Sigma e C_{zx} & -\Sigma d k_{zx} & -\omega\Sigma c C_{zy} \\
 +\Sigma k_{zz} & & & & & & +\Sigma d k_{zz} & -\omega\Sigma d C_{zz} & -\Sigma c k_{zz} & +\omega\Sigma c C_{zz} & +\Sigma c k_{zy} & +\omega\Sigma d C_{zx} \\
 & & & & & & +ma\omega^2 & & & & & \\
 \omega\Sigma C_{zx} & \Sigma k_{zx} & \omega\Sigma C_{zy} & \Sigma k_{zy} & \omega\Sigma C_{zz} & (m+M)\omega^2 & -\omega\Sigma e C_{zy} & -\Sigma e k_{zy} & \omega\Sigma e C_{zx} & \Sigma e k_{zx} & \omega\Sigma c C_{zy} & -\Sigma d k_{zx} \\
 +\Sigma k_{zz} & & & & & & +\omega\Sigma d C_{zz} & +\Sigma d k_{zz} & -\omega\Sigma c C_{zz} & -\Sigma c k_{zz} & -\omega\Sigma d C_{zx} & +\Sigma c k_{zy} \\
 & & & & & & +ma\omega^2 & & & & & \\
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_{11} \\
 A_{12} \\
 A_{21} \\
 A_{22} \\
 A_{31} \\
 A_{32}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_x(\sin\omega t) \\
 F_x(\cos\omega t) \\
 F_y(\sin\omega t) \\
 F_y(\cos\omega t) \\
 F_z(\sin\omega t) \\
 F_z(\cos\omega t)
 \end{bmatrix}$$

$\Sigma dkzx$	$-\omega \Sigma dCzx$	$\Sigma dkzy$	$-\omega \Sigma dCzy$	$\Sigma dkzz$	$-\omega \Sigma dCzz$	$-\Sigma dekzy$	$\omega \Sigma deCzy$	$\Sigma dekzx$	$-\omega \Sigma deCzx$	$-\Sigma d^2kzx$	$\omega \Sigma d^2Czx$	A_{41}	$Mx(\sin \omega t)$
$-\Sigma ekyx$	$\omega \Sigma eCyx$	$-\Sigma ekyy$	$+\omega \Sigma eCyy$	$-\Sigma ekyz$	$+\omega \Sigma eCyz$	$+\Sigma d^2kzz$	$-\omega \Sigma d^2Czz$	$-\Sigma dckxz$	$+\omega \Sigma cdCzz$	$+\Sigma cdkzy$	$-\omega \Sigma cdCzy$		
		$-mb\omega^2$		$+ma\omega^2$		$+\Sigma e^2kyy$	$-\omega \Sigma e^2Cyy$	$-\Sigma e^2kyx$	$+\omega \Sigma e^2Cyx$	$+\Sigma dekyy$	$+\omega \Sigma deCyy$		
						$-\Sigma dekyz$	$+\omega \Sigma deCyz$	$+\Sigma cekeyz$	$-\omega \Sigma ceCyz$	$-\Sigma cekeyy$	$+\omega \Sigma ceCyy$		
						$+\omega^2(A_3$					$-iB_4\omega^2$		
						$+\frac{A_4+C_4}{2}$							
						$+(a^2+b^2)m)$							
$\omega \Sigma dCzx$	$\Sigma dkzx$	$\omega \Sigma dCzy$	$\Sigma dkzy$	$\omega \Sigma dCzz$	$\Sigma dkzz$	$-\omega \Sigma edCzy$	$-\Sigma dekzy$	$\omega \Sigma deCzx$	$\Sigma dekzx$	$-\omega \Sigma d^2Czx$	$-\Sigma d^2kzx$	A_{42}	$Mx(\cos \omega t)$
$-\omega \Sigma eCyx$	$-\Sigma ekyx$	$-\omega \Sigma eCyy$	$-\Sigma ekyy$	$-\omega \Sigma eCyz$	$-\Sigma ekyz$	$+\omega \Sigma d^2Czz$	$+\Sigma d^2kzz$	$-\omega \Sigma dcCzz$	$-\Sigma dckzz$	$+\omega \Sigma dcCzy$	$+\Sigma dckzy$		
			$-mb\omega^2$		$+ma\omega^2$	$+\omega \Sigma e^2Cyy$	$+\Sigma e^2kyy$	$-\omega \Sigma e^2Cyx$	$-\Sigma e^2kyx$	$+\omega \Sigma deCyx$	$+\Sigma dekyy$		
						$-\omega \Sigma deCyz$	$-\Sigma dekyz$	$+\omega \Sigma ceCyz$	$+\Sigma cekeyz$	$-\omega \Sigma ceCyy$	$-\Sigma cekeyy$		
						$+\omega^2(A_3$				$+B_4i\Omega\omega^2$			
						$+\frac{(A_4+C_4)}{2}$							
						$+m(a^2+b^2)$							
$\Sigma ekxx$	$-\omega \Sigma eCxx$	$\Sigma ekxy$	$-\omega \Sigma eCxy$	$\Sigma ekxz$	$-\omega \Sigma eCxz$	$-\Sigma e^2kxy$	$\omega \Sigma e^2Cxy$	$-\Sigma cekzx$	$-\omega \Sigma e^2Cxx$	$\Sigma cdkzx$	$\omega \Sigma deCxx$	A_{51}	$My(\sin \omega t)$
$-\Sigma ckzx$	$+\omega \Sigma cCzx$	$-\Sigma ckzy$	$+\omega \Sigma cCzy$	$-\Sigma ckzz$	$+\omega \Sigma cCzz$	$+\Sigma edkxz$	$-\omega \Sigma deCxz$	$+\Sigma c^2kzz$	$+\omega \Sigma ecCxz$	$-\Sigma c^2kzy$	$-\omega \Sigma ecCxy$		
$+mb\omega^2$						$+\Sigma cekzy$	$-\omega \Sigma ceCzy$	$+\Sigma e^2kxx$	$+\omega \Sigma ceCzx$	$-\Sigma dekxx$	$-\omega \Sigma cdCzx$		
						$-\Sigma cdkzz$	$+\omega \Sigma cdCzz$	$-\Sigma cekxz$	$+\omega \Sigma c^2Czz$	$+\Sigma cekxy$	$+\omega \Sigma c^2Czy$		
								$+\omega^2(mb^2$		$-mab\omega^2$			
								$+B_3+B_4)$					
$\omega \Sigma eCxx$	$\Sigma ekxx$	$\omega \Sigma ekxy$	$\Sigma ekxy$	$\omega \Sigma eCxz$	$\Sigma ekxz$	$-\omega \Sigma e^2Cxy$	$-\Sigma e^2kxy$	$\omega \Sigma e^2Cxx$	$-\Sigma cekzx$	$-\omega \Sigma deCxx$	$\Sigma cdkzx$	A_{52}	$My(\cos \omega t)$
$-\omega \Sigma cCzx$	$-\Sigma ckzx$	$-\omega \Sigma ckzy$	$-\Sigma ckzy$	$-\omega \Sigma cCzz$	$-\Sigma ckzz$	$+\omega \Sigma deCxz$	$+\Sigma edkxz$	$-\omega \Sigma ecCxz$	$+\Sigma c^2kzz$	$+\omega \Sigma ecCxy$	$-\Sigma c^2kzy$		
		$+mb\omega^2$				$+\omega \Sigma ceCzy$	$+\Sigma cekzy$	$-\omega \Sigma ceCzx$	$+\Sigma e^2kxx$	$+\omega \Sigma cdCzx$	$-\Sigma dekxx$		
						$-\omega \Sigma cdCzz$	$-\Sigma cdkzz$	$+\omega \Sigma c^2Czz$	$-\Sigma cekxz$	$-\omega \Sigma c^2Czy$	$+\Sigma cekxy$		
								$+\omega^2(mb^2$		$-mab\omega^2$			
								$+B_3+B_4)$					
$\Sigma ckyy$	$-\omega \Sigma cCyy$	$\Sigma ckyy$	$-\omega \Sigma cCyy$	$\Sigma ckyz$	$-\omega \Sigma cCyz$	$-\Sigma cekyy$	$\omega \Sigma ceCyy$	$\Sigma cekyx$	$-\omega \Sigma ceCyx$	$-\Sigma cdkyx$	$\omega \Sigma cdCyx$	A_{61}	$Mz(\sin \omega t)$
$-\Sigma dkxx$	$+\omega \Sigma dCxx$	$-\Sigma dkxy$	$+\omega \Sigma dCxy$	$-\Sigma dkxz$	$+\omega \Sigma dCxz$	$+\Sigma cdkyz$	$-\omega \Sigma cdCyz$	$-\Sigma c^2kyz$	$+\omega \Sigma c^2Cyz$	$+\Sigma c^2kyy$	$-\omega \Sigma c^2Cyy$		
$-ma\omega^2$						$+\Sigma dekxy$	$-\omega \Sigma deCxy$	$-\Sigma dekxx$	$+\omega \Sigma deCxx$	$+\Sigma d^2kxx$	$-\omega \Sigma d^2Cxx$		
						$-\Sigma d^2kxz$	$+\omega \Sigma d^2Cxz$	$+\Sigma cdkxz$	$-\omega \Sigma dcCxz$	$-\Sigma cdkxy$	$+\omega \Sigma dcCxy$		
							$+B_4i\omega^2$	$-mab\omega^2$		$(C_3+ma^2$			
										$+\frac{(A_4+C_4)}{2})\omega^2$			
$-\omega \Sigma cCyx$	$\Sigma ckyy$	$\omega \Sigma cCyy$	$\Sigma ckyy$	$\omega \Sigma cCyz$	$\Sigma ckyz$	$-\omega \Sigma ceCyy$	$-\Sigma cekyy$	$\omega \Sigma ceCyx$	$\Sigma cekyx$	$-\omega \Sigma cdCyx$	$-\Sigma cdkyx$	A_{62}	$Mz(\cos \omega t)$
$+\omega \Sigma dCxx$	$-\Sigma dkxx$	$-\omega \Sigma dCxy$	$-\Sigma dkxy$	$-\omega \Sigma dCxz$	$-\Sigma dkxz$	$+\omega \Sigma cdCyz$	$+\Sigma cdkyz$	$-\omega \Sigma c^2Cyz$	$-\Sigma c^2kyz$	$+\omega \Sigma c^2Cyy$	$+\Sigma c^2kyy$		
		$-ma\omega^2$				$+\omega \Sigma deCxy$	$+\Sigma dekxy$	$-\omega \Sigma deCxx$	$-\Sigma dekxx$	$+\omega \Sigma d^2Cxx$	$+\Sigma d^2kxx$		
						$-\omega \Sigma d^2Cxz$	$-\Sigma d^2kxz$	$+\omega \Sigma dcCxz$	$+\Sigma dckxz$	$-\omega \Sigma dcCxy$	$-\Sigma dckxy$		
						$+B_4i\omega^2$			$-mab\omega^2$		$(C_3+ma^2$		
											$+\frac{(A_4+C_4)}{2})\omega^2$		

2.7 INTERPRETATION DES RESULTATS :

Le calcul a été conduit jusqu'ici, avec pour point de départ, les caractéristiques de la suspension supposées connues. Le but de l'étude est de vérifier que celle-ci remplit bien son rôle, c'est-à-dire de filtrer les vibrations.

Pour cela, il est intéressant d'étudier les pulsations propres de la suspension, les amplitudes des différents mouvements linéaires et angulaires, ainsi que les efforts sur les supports élastiques.

2.7.1 Pulsation propres et amplitudes de vibration

Le calcul des termes A_{ij} que nous venons d'effectuer nous permet de connaître les amplitudes des différentes vibrations.

Les amplitudes admissibles sont en fonction du débattement de toutes les connexions fixées sur le moteur : commandement d'accélérateur, alimentation électrique, en carburant, ... Elles sont en fonction également des conditions de guidage de l'hélice par rapport à l'avion.

De plus des amplitudes de vibration trop importantes peuvent exciter des éléments mobiles du moteur suivant des directions inhabituelles pour ces éléments (par ex. butée latérale des arbres à came). Il faut donc limiter certaines amplitudes.

A un régime moteur correspondant au vol de croisière, les pulsations des excitations sont loin de la résonance, les amplitudes sont donc faibles.

Le critère amplitude de vibration ne sera donc pas le critère primordial.

2.7.2 Etude des efforts sur les supports élastiques

Nous avons vu que la force exercée sur un support élastique peut être mis sous la forme :

$$F = K X + C \dot{X}$$

Elle est donc en fonction des amplitudes de vibration, on peut l'exprimer en fonction des A_{ij} en distinguant deux termes : l'un qui correspond aux termes en $\sin \omega t$, ω étant la pulsation de l'excitation, l'autre correspondant aux termes en $\cos \omega t$

On a

$$x = A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t ; \dot{x} = \omega(A_{11} \cos \omega t - A_{12} \sin \omega t)$$

$$y = A_{21} \sin \omega t + A_{22} \cos \omega t ; \dot{y} = \omega(A_{21} \cos \omega t - A_{22} \sin \omega t)$$

$$z = A_{31} \sin \omega t + A_{32} \cos \omega t ; \dot{z} = \omega(A_{31} \cos \omega t - A_{32} \sin \omega t)$$

$$\alpha = A_{41} \sin \omega t + A_{42} \cos \omega t ; \dot{\alpha} = \omega(A_{41} \cos \omega t - A_{42} \sin \omega t)$$

$$\beta = A_{51} \sin \omega t + A_{52} \cos \omega t ; \dot{\beta} = \omega(A_{51} \cos \omega t - A_{52} \sin \omega t)$$

$$\gamma = A_{61} \sin \omega t + A_{62} \cos \omega t ; \dot{\gamma} = \omega(A_{61} \cos \omega t - A_{62} \sin \omega t)$$

Et

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

$$F(\sin \omega t) = \left. \begin{array}{l} A_{11}kxx + A_{21}kxy + A_{31}kxz \\ -A_{12}\omega Cxx - A_{22}\omega Cxy - A_{32}\omega Cxz \\ +A_{41}(-ekxy + dkxz) + A_{51}(ekxx - ckxz) + A_{61}(-dkxx + ckxy) \\ -A_{42}\omega(-eCxy + dCxz) - A_{52}\omega(eCxx - cCxz) - A_{62}\omega(-dCxx + cCxy) \\ \\ A_{11}kyx + A_{21}kyy + A_{31}kyz \\ -A_{12}\omega Cyx - A_{22}\omega Cyy - A_{32}\omega Cyz \\ +A_{41}(-ekyy + dkyz) + A_{51}(ekyx - ckyz) + A_{61}(-dkyx + ckyy) \\ -A_{42}\omega(-eCyy + dCyz) - A_{52}\omega(eCyx - cCyz) - A_{62}\omega(-dCyx + cCyy) \\ \\ A_{11}kzx + A_{21}kzy + A_{31}kzz \\ -A_{12}\omega Cz x - A_{22}\omega Cz y - A_{32}\omega Cz z \\ +A_{41}(-ekzy + dkzz) + A_{51}(ekzx - ckzz) + A_{61}(-dkzx + ckzy) \\ -A_{42}\omega(-eCzy + dCzz) - A_{52}\omega(eCzx - cCzz) - A_{62}\omega(-dCzx + cCzy) \end{array} \right\}$$

$$F(\cos \omega t) = \left\{ \begin{array}{l} A_{12}kxx + A_{22}kxy + A_{32}kxz \\ + A_{11}\omega Cxx + A_{21}\omega Cxy + A_{31}\omega Cxz \\ + A_{42}(-ekxy + dkxz) + A_{52}(ekxx - ckxz) + A_{62}(-dkxx + ckxy) \\ + A_{41}\omega(-eCxy + dCxz) + A_{51}\omega(eCxx - cCxz) + A_{61}\omega(-dCxx + cCxy) \\ \\ A_{12}kyx + A_{22}kyy + A_{32}kyz \\ + A_{11}\omega Cyx + A_{21}\omega Cyy + A_{31}\omega Cyz \\ + A_{42}(-ekyy + dkyz) + A_{52}(ekyx - ckyz) + A_{62}(-dkyx + ckyy) \\ + A_{41}\omega(-eCyy + dCyz) + A_{51}\omega(eCyx - cCyz) + A_{61}\omega(-dCyx + cCyy) \\ \\ A_{12}kzx + A_{22}kzy + A_{32}kzz \\ + A_{11}\omega Czx + A_{21}\omega Czy + A_{31}\omega Czz \\ + A_{42}(-ekzy + dkzz) + A_{52}(ekzx - ckzz) + A_{62}(-dkzx + ckzy) \\ + A_{41}\omega(-eCzy + dCzz) + A_{51}\omega(eCzx - cCzz) + A_{61}\omega(-dCzx + cCzy) \end{array} \right.$$

2.8 NOTION DE TRANSMISSIBILITE :

La suspension élastique d'une machine sert à filtrer les vibrations. Elle doit permettre une diminution des efforts transmis. Pour vérifier ce fait, il est intéressant d'étudier le rapport

$$\lambda = \frac{\text{effort supporté par la structure}}{\text{effort exciteur}} \quad (2.34)$$

$$\text{On a la vibration forcée : } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (2.35)$$

La solution particulière est de la forme :

$$x = A \sin \omega t + b \cos \omega t ; \dot{x} = \omega(A \cos \omega t - b \sin \omega t) ; \ddot{x} = -\omega^2(A \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

En identifiant les termes en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$, on arrivera à :

$$A = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2) + c^2\omega^2}, \quad B = \frac{-F_0\omega}{(k - m\omega^2) + c^2\omega^2}$$

On a l'amplitude du mouvement $\Omega = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\text{On pose } x_0 = \frac{F_0}{k} \text{ et } \varepsilon = \frac{c}{c_c}$$

Donc l'amplitude devienne :

$$\Omega = x_0 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2} \right]^{1/2}$$

L'effort transmis au bâti est de la forme : $F_t = Kx + c \dot{x}$ avec $x = A \sin \omega t + b \cos \omega t$.

Le coefficient de transmissibilité $\lambda = \frac{F_t}{F_0}$

$$\lambda = \left[\frac{1 + 2\varepsilon \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right]^{1/2}$$

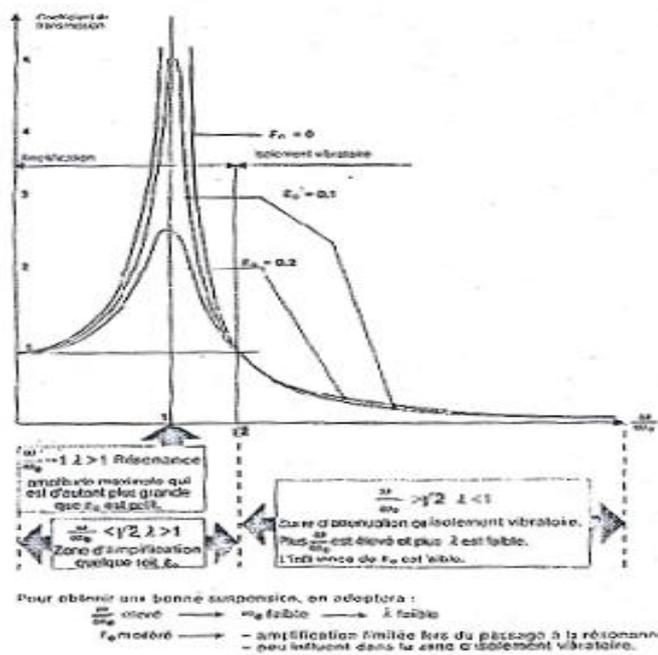


Figure 2.9-Schema de transmissibilité

Si l'on a une force d'excitation suivant une direction, il faut calculer les réactions de tous les supports dans cette direction, et le comparer à l'excitation.

D'après les résultats obtenus par le calcul, on se rend compte que λ est supérieur à 1 pour ω inférieur à la première résonance, qu'il peut être nul en l'absence d'amortissement entre deux résonance et qu'il est inférieur à 1 pour ω nettement supérieur à la dernière fréquence de résonance .

On se rend compte que la période d'excitation en fonctionnement ne doit pas être inférieure à la première résonance. ($\lambda > 1$)

Si les fréquences de résonance sont suffisamment espacées et la plage de fonctionnement réduite, on peut se placer entre deux fréquences de résonance ($\lambda < 1$ dans cette zone).

Dans le cas d'une suspension de moteur à régime variable, ces zones "d'antirésonance" sont trop réduites et il faut concevoir une suspension élastique de telle sorte que la plage de fonctionnement soit nettement au-dessus des fréquences de résonance

Pour un avion, l'excitation peut provenir :

a) De l'hélice :

- La vitesse de rotation de l'hélice est d'environ 2500tr/min. un balourd sur l'hélice entrainerait une excitation avec fréquence de 42 Hz.
- La variation de couple résistant de l'hélice est en fonction de la dissymétrie du nez du fuselage et amène une éventuelle excitation dont la fréquence est en fonction du nombre de pales de l'hélice. (plus ce nombre sera grand et moins l'excitation sera importante). Dans le cas d'une hélice bipale, la fréquence d'excitation est : $2 \cdot 2500 / 60 = 84 \text{ Hz}$.

b) Du moteur :

- Les moteurs alternatifs ont différentes sources d'excitation. Dans le cas qui nous intéresse, en l'occurrence le moteur PRV V6 à 90°, l'excitation la plus importante est un couple de lacet de pulsation 2Ω , Ω étant la vitesse de rotation du moteur.
- Le régime de ralenti étant de 900tr/min. (régime qui peut éventuellement être augmenté) amène une excitation de fréquence 30Hz.

- Le moteur amène également un couple de roulis dû à la l'irrégularité cyclique. Dans le cas du moteur PRV, les harmoniques les plus importantes sont les harmoniques 1,5 ; 3 ; 4,5 qui amène une première excitation à 22.5 Hz pour un régime de ralenti de 900tr/min.
- Il faudra donc veiller à ne pas avoir de fréquences de résonance supérieure à 15 Hz. Comme la raideur d'un support élastique est aussi lié à sa charge statique maximale, avec des supports durs on pourra plus facilement supporter les efforts statiques, mais cela entraine une augmentation des fréquences de résonance. Par contre, des supports élastiques souples abaissent les fréquences de résonance mais augmentent les amplitudes à la résonance, on ne recherchera donc pas des fréquences de résonance trop basses.

Influence de l'amortissement

- Pour des fréquences inférieures à la première fréquence de résonance, l'amortissement influe très peu.
- Il permet de passer les résonances avec une amplification modérée, mais en zone d'isolation ($\lambda < 1$), plus l'amortissement est grand, et plus la transmissibilité est importante. Il faudra donc rechercher l'amortissement le plus faible qui permette de passer les résonances sans problèmes.

2.9 CONCLUSION :

La suspension d'un groupe motopropulseur constitué du moteur PRV V6 90° et d'une hélice bipale, devra avoir des fréquences de résonance situées entre 10 et 15 HZ pour les degrés de libertés correspondant aux paramètres

CHAPITRE III :

ETUDES DES COUPLAGES

3. ETUDES DES COUPLAGES :

3.1 ETUDES DES COUPLAGES :

3.1.1 Introduction :

Dans le cas d'un problème à plusieurs degrés de liberté ; une excitation suivant un degré de liberté peut entraîner des réactions suivant un autre degré de liberté. Cela entraîne des réactions et des déplacements suivant des directions qui ne sont pas excitées. Il faudra donc, dans la conception d'une suspension, essayer de supprimer ces couplages.

Dans cette partie, l'influence de l'amortissement sera négligée.

3.1.2 Origine des couplages :

Nous avons déterminé précédemment une relation entre les A_{ij} qui sont les coefficients en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ des amplitudes de vibration et les efforts d'excitation.

$$B A_i = F_i \quad (3.1)$$

Les équations de ce système sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^{12} b_{ij} A_i = F_j \quad (3.2)$$

Si les coefficients b_{ij} avec $j \neq i$ ne sont pas nuls, l'excitation F_j aura une influence sur A_{ij} d'où un couplage des différents degrés de liberté.

Les coefficients de la matrice B sont en fonction de la géométrie de la suspension et de la raideur des supports élastiques. On peut essayer de déterminer des conditions physiques qui entraînent un couplage.

3.1.3 Conditions de découplage :

On obtient cinq conditions à remplir pour chaque degré de liberté.

a) Découplage des mouvements de translation sur x.

$$\sum kxy = 0 ; (x \rightarrow y) \quad (3.3)$$

$$\sum kxz = 0 ; (x \rightarrow z) \quad (3.4)$$

$$\Sigma dkxz - \Sigma ekxy = 0 ; (x \rightarrow \alpha) \quad (3.5)$$

$$\Sigma ekxx - \Sigma ckxz + mb\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \beta) \quad (3.6)$$

$$\Sigma ckxy - \Sigma dkxx - ma\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \gamma) \quad (3.7)$$

b) Découplage des mouvements de translation sur y.

$$\Sigma kyx = 0 ; (y \rightarrow x) \quad (3.8)$$

$$\Sigma kyz = 0 ; (y \rightarrow z) \quad (3.9)$$

$$\Sigma dkzy - \Sigma ekyy - mb\omega^2 = 0 ; (y \rightarrow \alpha) \quad (3.10)$$

$$\Sigma ekyx - \Sigma ckyz = 0 ; (y \rightarrow \beta) \quad (3.11)$$

$$\Sigma ckyy - \Sigma dkxy = 0 ; (y \rightarrow \gamma) \quad (3.12)$$

c) Découplage des mouvements de translation sur z.

$$\Sigma kzx = 0 ; (z \rightarrow x) \quad (3.13)$$

$$\Sigma kzy = 0 ; (z \rightarrow y) \quad (3.14)$$

$$\Sigma dkzz - \Sigma ekzy + ma\omega^2 = 0 ; (z \rightarrow \alpha) \quad (3.15)$$

$$\Sigma ekzx - \Sigma ckzz = 0 ; (z \rightarrow \beta) \quad (3.16)$$

$$\Sigma ckzy - \Sigma dkzx = 0 ; (z \rightarrow \gamma) \quad (3.17)$$

d) Découplage des mouvements de rotation sur x.

$$\Sigma dkzx - \Sigma ekyx = 0 ; (\alpha \rightarrow x) \quad (3.18)$$

$$\Sigma dkzy - \Sigma ekyy - mb\omega^2 = 0 ; (\alpha \rightarrow y) \quad (3.19)$$

$$\Sigma dkzz - \Sigma ekyz + ma\omega^2 = 0 ; (\alpha \rightarrow z) \quad (3.20)$$

$$\Sigma dekzx - \Sigma dckzz - \Sigma e^2 kyx + \Sigma cekyz = 0 ; (\alpha \rightarrow \beta) \quad (3.21)$$

$$-\Sigma d^2 kzx + \Sigma cdkzy + \Sigma dekxy - \Sigma cekyy = 0 ; (\alpha \rightarrow \gamma) \quad (3.22)$$

e) Découplage des mouvements de rotation sur y.

$$\Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{zx} + mb\omega^2 = 0 ; (\beta \rightarrow x) \quad (3.23)$$

$$\Sigma ek_{xy} - \Sigma ck_{zy} = 0 ; (\beta \rightarrow y) \quad (3.24)$$

$$\Sigma ek_{xz} - \Sigma ck_{zz} = 0 ; (\beta \rightarrow z) \quad (3.25)$$

$$-\Sigma e^2 k_{xy} + \Sigma dek_{xz} + \Sigma cek_{zy} - \Sigma cdk_{zz} = 0 ; (\beta \rightarrow \alpha) \quad (3.26)$$

$$-mab\omega^2 + \Sigma cdk_{zx} - \Sigma c^2 k_{zy} - \Sigma dek_{xx} + \Sigma cek_{xy} = 0 ; (\beta \rightarrow \gamma) \quad (3.27)$$

f) Découplage des mouvements de rotation sur z.

$$\Sigma ck_{yx} - \Sigma dk_{xx} - ma\omega^2 = 0 ; (\gamma \rightarrow x) \quad (3.28)$$

$$\Sigma ck_{yy} - \Sigma dk_{xy} = 0 ; (\gamma \rightarrow y) \quad (3.29)$$

$$\Sigma ck_{yz} - \Sigma dk_{xz} = 0 ; (\gamma \rightarrow z) \quad (3.30)$$

$$-\Sigma cek_{yy} + \Sigma cdk_{yz} + \Sigma dek_{xy} - \Sigma d^2 k_{xz} = 0 ; (\gamma \rightarrow \alpha) \quad (3.31)$$

$$-ma\omega^2 + \Sigma cek_{yx} - \Sigma c^2 k_{yz} - \Sigma dek_{xx} + \Sigma cdk_{xz} = 0 ; (\gamma \rightarrow \beta) \quad (3.32)$$

3.1.4 Considérations géométriques :

La majorité des groupes motopulseurs sont symétriques suivant un plan yGz. Pour des facilités de construction, il est intéressant de construire une suspension symétrique par rapport à ce plan.

Par symétrie par rapport au plan yGz, les termes des équations précédentes sont modifiés :

c devient -c

d devient d

e devient e

Les angles de positionnement des supports élastiques sont également modifiés :

α devient α

β devient $-\beta$

γ devient $-\gamma$

Les coefficients de raideurs k_{ij} deviennent donc : k_{xx} devient k_{xx}

k_{yy} devient k_{yy}

k_{zz} devient k_{zz}

k_{xy} devient $-k_{xy}$

k_{xz} devient $-k_{xz}$

k_{yz} devient k_{yz}

Avec ces neuf conditions supplémentaires, les équations de couplage se réduisent à :

$$\Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{xz} + mb\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \beta) \quad (3.33)$$

$$\Sigma ck_{xy} - \Sigma dk_{xx} - ma\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \gamma) \quad (3.34)$$

$$\Sigma k_{yz} = 0 ; (y \rightarrow z) \quad (3.35)$$

$$\Sigma dk_{yz} - \Sigma ek_{yy} - mb\omega^2 = 0 ; (y \rightarrow \alpha) \quad (3.36)$$

$$\Sigma dk_{zz} - \Sigma ek_{zy} + ma\omega^2 = 0 ; (z \rightarrow \alpha) \quad (3.37)$$

$$-mab\omega^2 + \Sigma cdk_{zx} - \Sigma c^2k_{zy} - \Sigma dek_{xx} + \Sigma cek_{xy} = 0 ; (\beta \rightarrow \gamma) \quad (3.38)$$

Nous obtenons deux groupes de mouvements couplés :

x, β, γ Et y, z, α

1) Etude du couplage x, β, γ :

Les équations qui créent un couplage entre x, β et γ sont :

$$\Sigma ek_{xx} - \Sigma ck_{xz} + mb\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \beta) \quad (3.39)$$

$$\Sigma ck_{xy} - \Sigma dk_{xx} - ma\omega^2 = 0 ; (x \rightarrow \gamma) \quad (3.40)$$

$$-mab\omega^2 + \Sigma cdk_{zx} - \Sigma c^2k_{zy} - \Sigma dek_{xx} + \Sigma cek_{xy} = 0 ; (\beta \rightarrow \gamma) \quad (3.41)$$

2) Etude du couplage y, z, α

$$\Sigma k_{yz} = 0 ; (y \rightarrow z) \quad (3.42)$$

$$\Sigma dk_{yz} - \Sigma ek_{yy} - mb\omega^2 = 0 ; (y \rightarrow \alpha) \quad (3.43)$$

$$\Sigma dk_{zz} - \Sigma ek_{zy} + ma\omega^2 = 0 ; (z \rightarrow \alpha) \quad (3.44)$$

Pour des raisons de facilité de construction, nous conviendrons de n'avoir qu'un seul angle d'inclinaison pour chaque support.

Soit l'angle α pour les supports appartenant au plan de symétrie et l'angle β pour les autres :

- Supports \in plan yGz :

$$c = 0, d \neq 0, e \neq 0$$

$$\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

D'où :

$$k_{xx} = kx \quad (3.45)$$

$$k_{yy} = ky \cos^2 \alpha + kz \sin^2 \alpha \quad (3.46)$$

$$k_{zz} = ky \sin^2 \alpha + kz \cos^2 \alpha \quad (3.47)$$

$$k_{xy} = 0 \quad (3.47)$$

$$k_{xz} = 0 \quad (3.48)$$

$$k_{yz} = (ky - kz) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.49)$$

- Supports \notin plan yGz :

$$c \neq 0, d \neq 0, e \neq 0$$

$$\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$$

D'où :

$$k_{xx} = kx \cos^2 \beta + kz \sin^2 \beta \quad (3.50)$$

$$k_{yy} = ky \quad (3.51)$$

$$k_{zz} = kx \sin^2 \beta + kz \cos^2 \beta \quad (3.52)$$

$$k_{xy} = 0 \quad (3.53)$$

$$k_{xz} = (-kx + kz) \sin \beta \cos \beta \quad (3.53)$$

$$k_{yz} = 0 \quad (3.55)$$

3) Etude du couplage entre y et z :

$$\Sigma k_{yz} = 0 \Rightarrow (ky - kz) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow ky = kz \quad (3.56)$$

Nous adopterons en première étude $\alpha = 0$

4) Couplage entre x et β :

$$\Sigma e(kx \cos^2 \beta + kz \sin^2 \beta) + \Sigma e kx - \Sigma c(-kx + kz) \sin \beta \cos \beta + mb \omega^2 = 0 \quad (3.57)$$

5) Couplage entre x et γ :

$$-\Sigma d(kx \cos^2 \beta + kz \sin^2 \beta) - \Sigma dkx - ma \omega^2 = 0 \quad (3.58)$$

6) Couplage entre β et γ :

$$-\Sigma de(kx \cos^2 \beta + kz \sin^2 \beta) - \Sigma c^2 (-kz + ky) \sin \alpha \cos \alpha - \Sigma dekx + \Sigma cd(-kx + kz) \sin \beta \cos \beta - mab\omega^2 = 0 \quad (3.59)$$

7) Couplage entre y et α :

$$-\Sigma eky + \Sigma d(ky - kz) \sin \alpha \cos \alpha - \Sigma e(ky \cos^2 \alpha + kz \sin^2 \alpha) - mb\omega^2 = 0 \quad (3.60)$$

8) Couplage entre z et α :

$$\Sigma d(kx \sin^2 \beta + kz \cos^2 \beta) + \Sigma d(ky \sin^2 \alpha + kz \cos^2 \alpha) - \Sigma e(ky - kz) \sin \alpha \cos \alpha + ma\omega^2 = 0 \quad (3.61)$$

3.2 ETUDE DES CHARGES STATIQUE EN FONCTION DES CONDITIONS DE VOL :

3.2.1 Mise en place des éléments d'étude :

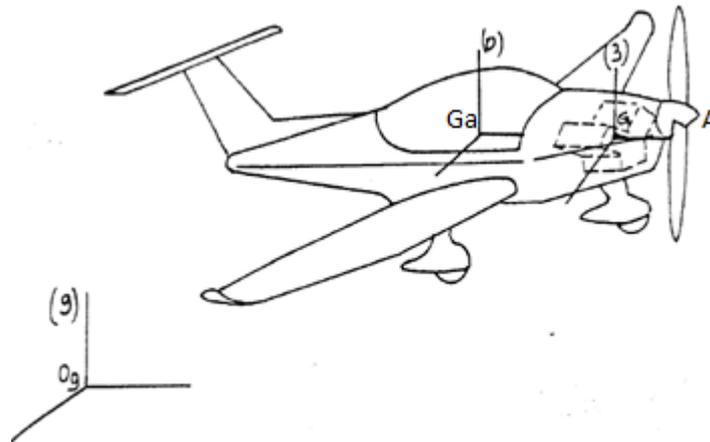


Figure 3.1-position du centre de gravité de l'avion Ga

- Les conditions de vol de l'avion seront supposées stabilisées.

Soit Ga le centre de gravité de l'avion.

$$\vec{V}^g(Ga) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Vh} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(g)} ; \text{ Avec } \frac{d^0 \mathbf{Vh}}{dt} = 0$$

La position angulaire de l'avion à l'instant $t = 0$:

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix}_{(g)}$$

Et $\Omega_0^g = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ avec $\frac{d^0 \omega_i}{dt} = 0$

La position du moteur de masse M dans l'avion est caractérisé par la position du centre de gravité G de celui-ci. $\vec{G}aG = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_h \\ \mathbf{g}_h \end{Bmatrix}_{(0)}$

3.2.2 Application des théorèmes généraux de la mécanique :

$$\Sigma \vec{F} = \gamma^0_{(\Sigma, t)} = M \vec{\Gamma}^g(G) + m \vec{\Gamma}^g(A) \quad (3.62)$$

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}} = \vec{\delta}^g(\Sigma, G, t) \quad (3.63)$$

Etude de l'accélération de G : $\vec{\Gamma}^g(G)$

$$\vec{O}_g G = \vec{O}_g Ga + GaG$$

$$= \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}_{(g)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}ht \\ 0 \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix}_{(0)}$$

Calcul de la vitesse $\vec{V}^g(G)$:

$$\vec{V}^g(G) = \vec{V}^g(Ga) + \Omega_0^g \wedge GaG \quad (3.64)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Vh} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_{(0)} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_h \\ \mathbf{g}_h \end{Bmatrix}_{(0)}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Vh} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_h \omega_y - \mathbf{F}_h \omega_z \\ -\mathbf{g}_h \omega_x \\ \mathbf{F}_h \omega_x \end{Bmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{V}^g(G) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_h \omega_y - \mathbf{F}_h \omega_z \\ -\mathbf{g}_h \omega_x + \mathbf{Vh} \\ \mathbf{F}_h \omega_x \end{Bmatrix}_{(0)}$$

Finalement $\vec{\Gamma}^g(G)$:

$$\vec{\Gamma}^g(G) = \frac{d^0 \vec{V}^g(G)}{dt} + \Omega_0^g \wedge \vec{V}^g(G) \tag{3.65}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(0)} + \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_{(0)} \wedge \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_h \omega_y - \mathbf{F}_h \omega_z \\ -\mathbf{g}_h \omega_x + \mathbf{Vh} \\ \mathbf{F}_h \omega_x \end{Bmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}^g(G) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_h \omega_x \omega_z + \mathbf{g}_h \omega_x \omega_z - \mathbf{Vh} \omega_z \\ \mathbf{g}_h \omega_y \omega_z - \mathbf{F}_h \omega_z^2 - \mathbf{F}_h \omega_x^2 \\ -\mathbf{g}_h \omega_x^2 + \mathbf{Vh} \omega_x - \mathbf{g}_h \omega_y^2 + \mathbf{F}_h \omega_y \omega_z \end{Bmatrix}_{(0)}$$

Ordre de grandeur des différents termes composants (pour le type d'avion étudiant).

$F_h \approx 2m$	$g_h \approx 0.3m$
$\omega_x, \omega_z \approx 0.63 \text{rd/s (1tr en 10s)}$	$\omega_x \approx 1.2 \text{rd/s (1tr en 5s)}$
$Vh \approx 50 \text{m/s}$	

$$\text{Matrice d'inertie du moteur : } I_{(G)}(3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

La position de l'hélice par rapport au centre de gravité de l'avion est :

$$\vec{G}_a \mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} + \mathbf{F}_h \\ \mathbf{b} + \mathbf{g}_h \end{array} \right\}_{(0)}$$

$$\text{La matrice d'inertie de l'hélice de masse } m \text{ est : } I_{(A)}(4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

Les efforts appliqués au moteur sont :

En A : la traction de l'hélice : $F \vec{y}_3$

Le couple résistant : $C \vec{y}_3$

Le poids de l'hélice : $-mg \vec{z}_g$

Les efforts sur les supports élastiques caractérisés par leur position par rapport au centre de gravité du moteur.

$$- \quad \vec{G}\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{array} \right\}_{(3)} \quad \text{qui donne le torseur en G : } \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{\mathfrak{M}} \end{array} \right\}_G$$

Le poids du moteur appliqué en G : $-Mg \vec{z}_g$

Les termes $Vh\omega_x$ et $Vh\omega_z$ sont de l'ordre de : $35m/s^2$

Des autres termes, le plus important est $g_h \omega_y^2$ qui est de l'ordre de $0.43 m/s^2$ soit un rapport de 1 à 80.

On peut donc négliger tous les termes ne comportant pas Vh dans l'expression de

$$\vec{\Gamma}^g(G).$$

$$\vec{\Gamma}^g(G) = \begin{Bmatrix} -Vh\omega_z \\ 0 \\ Vh\omega_x \end{Bmatrix}$$

Le calcul de l'accélération de A est le même que pour le point G avec F_h devenant

$$F_{h+a} \text{ et } g_{h+b}$$

On a : $a \approx 0.45m$ et $b \approx 0.3m$

Les termes $Vh\omega_x$ et $Vh\omega_z$ sont toujours prépondérants :

D'où

$$\vec{\Gamma}^g(A) = \begin{Bmatrix} -Vh\omega_z \\ 0 \\ Vh\omega_x \end{Bmatrix}$$

Calcul du moment dynamique :

$$\vec{\delta}^g(\Sigma, G, t) = \vec{\delta}^g(G, \text{moteur}, t) + \vec{\delta}^g(G, \text{hélice}, t) \quad (3.66)$$

$$\vec{\delta}^g(G, \text{moteur}, t) = \frac{d^0 \vec{\mu}^g(G, \text{moteur}, t)}{dt} + \vec{\Omega}_0^g \wedge \vec{\mu}^g(G, \text{moteur}, t) \quad (3.67)$$

$$\vec{\mu}^g(G, \text{moteur}, t) = I_{(G)}(3) \vec{\Omega}_0^g \quad (3.68)$$

$$\vec{\mu}^g(G, \text{moteur}, t) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} (0)$$

$$\vec{\mu}^g(G, \text{moteur}, t) = \begin{Bmatrix} A_3 \omega_x \\ B_3 \omega_y \\ C_3 \omega_z \end{Bmatrix} (0)$$

Le moment du poids de l'hélice par rapport à G est :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{GA} \wedge \vec{P} = mg \begin{Bmatrix} -a \cos \delta \cos \varepsilon + b \sin \delta \\ b \cos \delta \sin \varepsilon \\ -a \cos \delta \sin \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Le moment de la force de traction de l'hélice est :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}) = \vec{GA} \wedge \vec{F} = \begin{Bmatrix} -bF \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les forces, moments, résultante dynamique et moment dynamique trouvée peuvent être considérés comme des excitations de période nulle. Nous pouvons donc considérer le calcul des efforts statiques comme le calcul vibratoire avec des excitations de la forme :

$$F_x = (m+M)g \cos \delta \sin \varepsilon + (m+M)Vh\omega_z \quad (3.69)$$

$$F_y = -(m+M)g \sin \delta + F \quad (3.70)$$

$$F_z = -(m+M)g \cos \delta \cos \varepsilon - (m+M)Vh\omega_x \quad (3.71)$$

$$M_x = -bF + mg(-a \cos \delta \cos \varepsilon + b \sin \delta) - (C_3 - B_3)\omega_y \omega_z - maVh\omega_x - B_4 i \Omega \omega_z \quad (3.72)$$

$$M_y = mgb \cos \delta \sin \varepsilon + c - (A_3 - C_3)\omega_x \omega_z + mbVh\omega_z \quad (3.73)$$

$$M_z = -mga \cos \delta \sin \varepsilon - (B_3 - A_3)\omega_x \omega_y - maVh\omega_z - B_4 i \Omega \omega_x \quad (3.74)$$

$$\text{Soit : } \vec{\delta}^g(G, \text{moteur}, t) = \begin{Bmatrix} \omega_y \omega_z (C_3 - B_3) \\ \omega_x \omega_z (A_3 - C_3) \\ \omega_x \omega_y (B_3 - A_3) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\delta}^g(G, \text{hélice}, t) = \frac{d^0 \mu^g(A, \text{hélice}, t)}{dt} + \vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^g(A) \quad (3.75)$$

$$\vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^g(A) = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{Bmatrix} \wedge m \begin{Bmatrix} -Vh\omega_z \\ 0 \\ Vh\omega_x \end{Bmatrix}$$

$$\vec{GA} \wedge m \vec{\Gamma}^g(A) = m \begin{Bmatrix} aVh\omega_x \\ -bVh\omega_z \\ aVh\omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\mu}^g(A, \text{hélice}, t) = I_{(A)}(4)\vec{\Omega}_g^4 = \left\{ \begin{array}{l} (A_4 \cos^2 \Omega t + C_4 \sin^2 \Omega t)\omega_x + (C_4 - A_4) \sin \Omega t \cos \Omega t \omega_z \\ B_4(\omega_y + i\Omega) \\ (C_4 - A_4) \sin \Omega t \cos \Omega t \omega_x + (A_4 \sin^2 \Omega t + C_4 \cos^2 \Omega t)\omega_z \end{array} \right\}$$

ω Étant nettement supérieur à $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; on peut négliger les termes $\omega_i \omega_j$ par rapport à $\Omega \omega_i$ (rapport de 1 à 240 avec une rotation d'hélice de 2750 tr/min.).

Les termes en $\sin 2i\Omega t$ et $\cos 2i\Omega t$ peuvent également être négligés car ils n'influent pas sur la réaction moyenne aux appuis.

On arrive à :

$$\vec{\delta}^g(\Sigma, G, t) = \left\{ \begin{array}{l} \omega_y \omega_z (C_3 - B_3) + maVh\omega_x + B_4 i\Omega \omega_z \\ \omega_x \omega_z (A_3 - C_3) + mbVh\omega_z \\ \omega_x \omega_y (B_3 - A_3) + maVh\omega_z - B_4 i\Omega \omega_z \end{array} \right\}$$

Les poids du moteur et de l'hélice exprimés dans le repère (0) lié au moteur sont de la forme :

$$\mathbf{P} = (m+M)g \begin{pmatrix} \cos \delta \sin \varepsilon \\ -\sin \delta \\ -\cos \delta \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

3.3 METHODE DE CALCUL :

Pour faciliter la détermination et la mise au point de suspension, on a réalisé un programme qui permet de déterminer les fréquences propres de la suspension, les courbes de transmissibilité, de vibration, de mettre en évidence l'influence de l'amortissement et de calculer en fonction de conditions de vol données, les réactions sur les supports élastiques.

Il est donc possible, après utilisation de l'organigramme, de vérifier le bon comportement d'une suspension et d'éventuellement la modifier.

Dans le chapitre 1, nous trouverons deux applications :

- 1) Montage du moteur PRV dans un avion type ORION avec hélice propulsive non fixée au moteur.
- 2) Montage moteur PRV dans un avion type ROBIN R 300 avec une hélice liée au moteur par l'intermédiaire d'un réducteur.

3.4 ETUDE DU CAS PARTICULIER :

3.4.1 Suspension type ORION :

Le but est d'effectuer une installation dans un avion du moteur PRV V6 à 90° équipé d'un réducteur de rapport de réduction 2.3 et d'une hélice.

a) Données de l'étude

Caractéristique du moteur + réducteur :

Masse : 170Kg

$$\text{Matrice d'inertie : } I_{(G)} = \begin{bmatrix} 4.75 & 0 & 0 \\ 0 & 5.34 & 0 \\ 0 & 0 & 5.2 \end{bmatrix}$$

Sur le moteur, 2 plages de fixation des supports sont prévues (montage automobile).

Il sera intéressant de les réutiliser si cela est possible.

Dans ce cas de figure, l'hélice, n'étant pas fixée au moteur, n'influe pas sur le comportement vibratoire de la suspension moteur.

Position des supports :

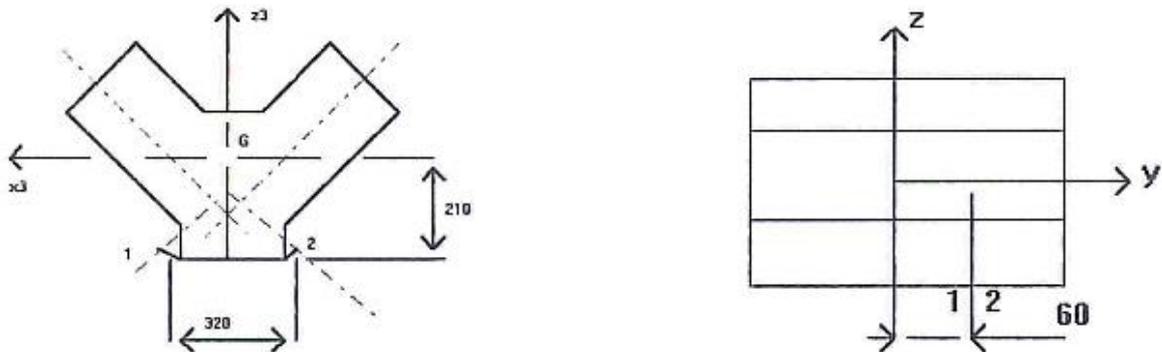


Figure 3.2-Position des supports (type ORION)

Pour le support 1 :

$$C=0.16 ; d=0.06 ; e=-0.21 ; \alpha = 0, \beta_1 = \beta, \gamma = 0$$

Pour le support 2 :

$$C=-0.16 ; d=0.06 ; e=-0.21 ; \alpha = 0, \beta_2 = -\beta, \gamma = 0$$

La valeur de β pouvant être facilement modifiée, nous la considérons comme un paramètre à définir.

Pour des raisons de cout, il est préférable de limiter au maximum le nombre des supports (imposant des plages usinées) ; le nombre minimum d'appuis étant 3, nous étudierons une suspension à trois supports.

Pour assurer la symétrie du plan yGz , il convient que le troisième appui appartienne à ce plan. D'où : caractéristiques du support N°3 :

$$c_3 = 0; d_3 = ?; e_3 = ?; \alpha_3 = 0; \beta_3 = 0; \gamma_3 = 0$$

b) Couplage

Les excitations principales sont des couples suivant \vec{y} et suivant \vec{z} .

Nous devons donc assurer, en premier lieu, les découplages sur les paramètres β et γ soit β et x , γ et x , β et γ .

La construction du moteur impose une relation entre e_3 et d_3 :

Soit e_3 quelconque et $d_3 = -0.35$

Soit d_3 quelconque et $e_3 = -.027$

Les découplages des paramètres β et γ amènent 3 conséquences scalaires.

$$e_3 kx_3 + 2e_1 (\cos^2 \beta kx_1 + \sin^2 \beta ky_1) + 2c_1 (kx_1 - kz_1) \sin \beta \cos \beta = 0 \quad (3.76)$$

$$-d_3 kx_3 - 2d_1 (\cos^2 \beta kx_1 + \sin^2 \beta ky_1) = 0 \quad (3.77)$$

$$-2c_1 d_1 (kx_1 - kz_1) \sin \beta \cos \beta - e_3 d_3 kx_3 - 2d_1 e_1 (kx_1 \cos^2 \beta + kz_1 \sin^2 \beta) = 0 \quad (3.78)$$

Les mouvements en θ et φ étant découplés, nous pouvons imposer les pulsations propres sur ces deux paramètres.

Les excitations sur le moteur viennent de l'irrégularité du couple (la plus basse harmonique dangereuse est 1.5 ce qui donne une excitation de fréquence 22.5 Hz pour le moteur tournant à 900 tr/min.)

Le couple de lacet résultant du moteur a une fréquence de 30 Hz pour le moteur tournant à 900 tr/min. Nous prendrons donc une fréquence propre de vibration de 15 Hz et 10 Hz pour φ et θ

Nous devons vérifier que ces valeurs n'entraînent pas des transmissions d'effort trop importante.

Nous obtenons deux équations supplémentaires.

$$5.34(2 \times \pi \times 10)^2 + 4c_1 e_1 (kx_1 - kz_1) \sin \beta \cos \beta + 2c_1^2 (kx_1 \sin^2 \beta + kz_1 \cos^2 \beta) + e_1^2 (kx_1 \cos^2 \beta + kz_1 \sin^2 \beta) = 0 \quad (3.79)$$

$$5.2(2\times\pi\times 15)^2 + 2c_1^2ky_1 + d_3^2kx_1 + 2d_1^2(kx_1 \cos^2 \beta + kz_1 \sin^2 \beta) = 0 \quad (3.80)$$

Nous obtenons 5 équations et 6 inconnues. Comme x est également découplé, nous pouvons définir sa fréquence propre (de l'ordre de 12 Hz).

Il vient une sixième équation.

$$kx_3 + 2(\cos^2 \beta kx_1 + \sin^2 \beta kz_1) = (2\times\pi\times 12)^2 \times 170 \quad (3.81)$$

En posant :

$$A = \cos^2 \beta kx_1 + \sin^2 \beta kz_1$$

$$B = \sin^2 \beta kx_1 + \cos^2 \beta kz_1$$

$$C = -(kx_1 - kz_1) \sin \beta \cos \beta$$

Nous obtenons le système de 6 équations à 6 inconnues.

$$\begin{cases} e_3 kx_3 - 0.42A - 0.32C = 0 \\ 0.35kx_3 - 0.12A = 0 \\ 0.0192C + 0.35e_3 kx_3 + 0.0252A \\ 0.1344C + 0.0512B + e_3^2 kx_3 + 0.0882A = -21081 \\ 0.0512ky_1 + 0.1225kx_3 + 0.0072A = -46190 \\ kx_3 + 2A = -966432 \end{cases} \quad (3.82)$$

Nous arrivons aux valeurs suivantes (avec $d_3 = -0.35$)

$$kx_1 = -120000 \text{ N/m}$$

$$ky_1 = -506000 \text{ N/m}$$

$$kz_1 = -1416000 \text{ N/m}$$

$$e_3 = 0$$

$$\beta = -28.3^\circ$$

$$kx_1 = -141000 \text{ N/m}$$

Les résultats trouvés nous assurent un découplage des mouvements engendrés par les excitations principales (couple de roulis et de lacet). Nous pouvons essayer de découpler les mouvements sur z (excitation de pompage).

$y \rightarrow z$ (est déjà découplé précédemment).

Découplage de $\alpha \rightarrow z$

$$\text{Soit : } -0.35kz_3 + 2 \times 0.06(kx_1 \sin^2 \beta + kz_1 \cos^2 \beta) = 0 \quad (3.83)$$

$$\text{D'où : } kz_3 = -385000 \text{ N/m}$$

Cette valeur de k_{z_3} donne une fréquence propre pour le mouvement sur z de 19.8 Hz. Le moteur PRV V6 à 90° donne une excitation de pompage d'ordre 6, c'est-à-dire pour un moteur tournant à 900 tr/min, la fréquence excitatrice sera : 90 Hz.

Un balourd éventuel sur l'hélice tournant à, amène une excitation de fréquence 45 Hz. La valeur de 19.8 Hz comme fréquence propre sur ce paramètre est donc convenable. Il ne reste plus qu'un couple de paramètre couplé : pour le découpler, il faudrait : $\Sigma dkyz - \Sigma ekyy = 0$

Soit : $2e_1ky_1 = 0$ ce qui est impossible. On pourra donc les découpler, mais ceci n'est pas grave car il n'y a pas d'excitation suivant ces 2 paramètres.

Il nous reste encore une inconnue à déterminer : k_{y_3}

Nous pourrions la fixer arbitrairement pour que les pulsations propres sur y et α soit convenables. Dans les pages suivantes sont regroupées les caractéristiques de cette suspension.

3.4.2 Suspension type ROBIN 3000 :

a) Données de l'étude :

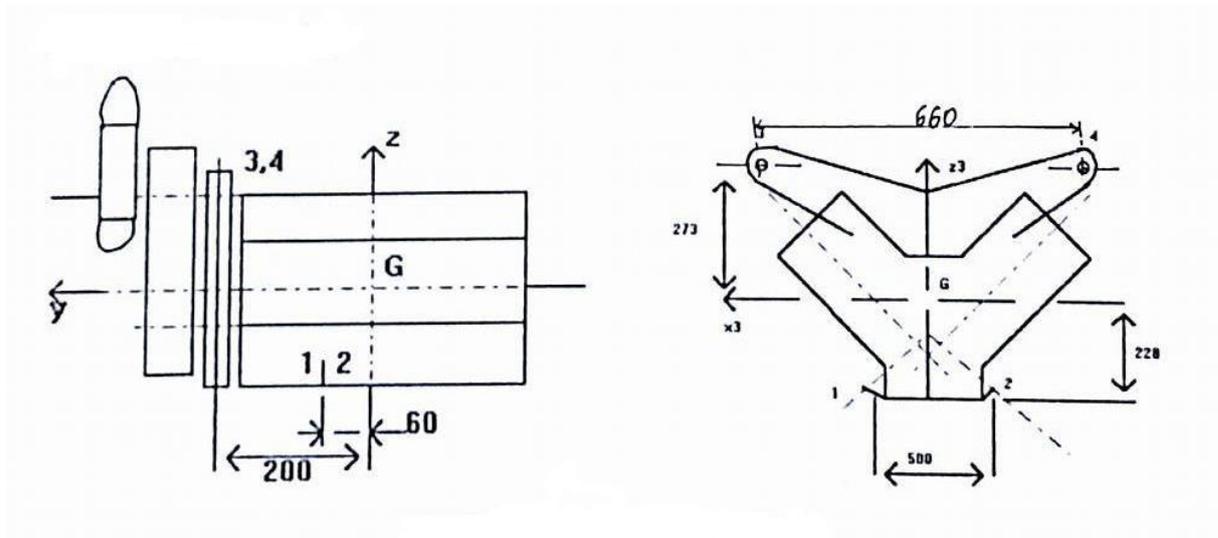


Figure 3.3-Position des supports (type ROBIN 3000)

Le groupe motopropulseur est constitué d'un réducteur plus une hélice.

Position des quatre points de fixation : (unité : mètre)

Support n°1: $c_1 = 0,25$; $d_1 = 0.06$; $e_1 = -0,228$; $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = \beta_1$; $\gamma_1 = 0$

Support n°2: $c_2 = -0,25$; $d_2 = 0,06$; $e_2 = -0,228$; $\alpha_2 = 0$; $\beta_2 = -\beta_1$; $\gamma_2 = 0$

Support n°3: $c_3 = 0,33$; $d_3 = 0,2$; $e_3 = -0,273$; $\alpha_3 = 0$; $\beta_3 = 0$; $\gamma_3 = 0$

Support n°4: $c_4 = -0,33$; $d_4 = 0,2$; $e_4 = 0,273$; $\alpha_4 = 0$; $\beta_4 = 0$; $\gamma_4 = 0$

Position de l'hélice : $a=0,41$; $b=0,21$; $m=17\text{Kg}$

Pour des raisons de symétrie, deux types de support seront utilisées :

Support n°1 et 2 : k_{x1}, k_{y1}, k_{z1} et β

Support n°3 et 4 : k_{x3}, k_{y3}, k_{z3}

Masse moteur réducteur : 170Kg

$$\text{Matrice d'inertie : } I_{(G)}(3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5,6 & 0 \\ 0 & 0 & 5,5 \end{bmatrix}$$

Masse de l'hélice : 17Kg

$$\text{Matrice d'inertie : } I_{(G)}(4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,65 & 0 \\ 0 & 0 & 1,65 \end{bmatrix}$$

b) Couplage :

L'existence de l'hélice empêche le découplage entre α et γ à cause de la présence du terme " $iB_4\Omega\omega^2$ ".

Il faudra découpler les mouvements

Soit : $\beta \leftrightarrow x$, $\beta \leftrightarrow \gamma$ et $x \leftrightarrow \gamma$

Nous obtenons trois conditions à remplir ;

$$\Sigma eK_{xx} - \Sigma K_{zx} + mb\omega^2 = 0 \quad (3.84)$$

$$-\Sigma cK_{xy} - \Sigma deK_{xx} + \Sigma ceK_{xy} + \Sigma cdK_{zx} - mab\omega^2 = 0 \quad (3.85)$$

$$\Sigma cK_{xy} - \Sigma dK_{xx} - ma\omega^2 = 0 \quad (3.86)$$

Les équations (3.84), (3.85), (3.86) nous donnent :

$$0,456(K_{x1}\cos^2\beta + K_{z1}\sin^2\beta) + 0,456(K_{x3}) + 0,5(K_{x1} - K_{z1})\sin\beta\cos\beta = -mb\omega^2 \quad (3.87)$$

$$-0,03(K_{X1}-K_{Z1})\sin\beta\cos\beta+0,02736(K_{X1}\cos^2\beta+K_{Z1}\sin^2\beta)-0,1092K_{X3}=mab\omega \quad (3.88)$$

$$-0,12(K_{X1}\cos^2\beta+K_{Z1}\sin^2\beta)-0,4K_{X3}=ma\omega^2 \quad (3.89)$$

Nous pouvons découpler les mouvements à bas régime (moteur a 900 tr/min) soit pour $\omega=94\text{rd/s}$

Les équations nous donnent alors :

$$K_{X3} = -144434$$

$$-(K_{X1}-K_{Z1})\sin\beta\cos\beta=-65654$$

$$K_{X1}\cos^2\beta+K_{Z1}\sin^2\beta=-31775$$

D'où :

$$K_{X1}=-31775+65654\text{tg}\beta$$

$$K_{Z1}=31775-65654/\text{tg}\beta$$

La valeur de la pulsation propre doit permettre de vérifier la relation (sur β)

$$-\Sigma ceK_{ZZ}+\Sigma c^2K_{ZZ}+\Sigma e^2K_{XX}-\Sigma ceK_{ZZ}+\omega^2(B_3+B_4+mb^2)=0 \quad (3.90)$$

Soit :

$$0,125(K_{X1}\sin^2\beta+K_{Z1}\cos^2\beta)+7,9997\omega^2+0,2178K_{Z3}-39001,738=0 \quad (3.91)$$

Cette relation impose $\omega > 74\text{rd/s}$ pour avoir $K_Z > 0$ (soit une fréquence $> 12\text{ Hz}$)

Le tableau suivant nous donne les raideurs en fonction de l'angle β des supports.

Tableau 3.1-les raideurs en fonction de l'angle β

$\beta= 0$	$k_{x1}=-31775,6$	$k_{z1}=-31775$	$k_{z3}=-7821,58$
$\beta= -5$	$k_{x1}=-37519,6$	$k_{z1}=718655$	$k_{z3}=-43523,0$
$\beta= -10$	$k_{x1}=-43352,2$	$k_{z1}=340567$	$k_{z3}=-214873$
$\beta= -15$	$k_{x1}=-49367,6$	$k_{z1}=213249$	$k_{z3}=-138350$
$\beta= -20$	$k_{x1}=-55671,7$	$k_{z1}=148607$	$k_{z3}=-97632,9$
$\beta= -25$	$k_{x1}=-62390,6$	$k_{z1}=109020$	$k_{z3}=-71056,6$
$\beta= -30$	$k_{x1}=-69681,0$	$k_{z1}=81340$	$k_{z3}=-51331,0$
$\beta= -35$	$k_{x1}=-77747,1$	$k_{z1}=61988,2$	$k_{z3}=-85250$
$\beta= -40$	$k_{x1}=-86866,0$	$k_{z1}=46468$	$k_{z3}=-21109$
$\beta= -45$	$k_{x1}=-97429,8$	$k_{z1}=33878$	$k_{z3}=-7821,58$
$\beta= -50$	$k_{x1}=-110019,2$	$k_{z1}=23314$	$k_{z3}=5466,53$
$\beta= -55$	$k_{x1}=-125539,5$	$k_{z1}=14195$	$k_{z3}=19607,4$
$\beta= -60$	$k_{x1}=-145492,0$	$k_{z1}=6129,8$	$k_{z3}=35687,9$
$\beta= -65$	$k_{x1}=-172571,5$	$k_{z1}=-1160,5$	$k_{z3}=55413,5$
$\beta= -70$	$k_{x1}=-212159,0$	$k_{z1}=-7879,4$	$k_{z3}=81989,7$
$\beta= -75$	$k_{x1}=-276800,4$	$k_{z1}=-14183$	$k_{z3}=122706$
$\beta= -80$	$k_{x1}=-404119,0$	$k_{z1}=-20199$	$k_{z3}=199230$
$\beta= -85$	$k_{x1}=-782206,5$	$k_{z1}=-26031$	$k_{z3}=419569$
$\beta= -90$	$k_{x1}=-787950,5$	$k_{z1}=-31775$	$k_{z3}=426163$

La fréquence de 15 Hz donne une zone entre -65° et -74° qui permet de définir des raideurs correctes. Le tableau ci-dessous montre ses raideurs :

Tableau 3.2-les raideurs correctes en fonction de β

$\beta = -60$	$k_{x1} = -145492,0$	$k_{z1} = 6129,8$	$k_{z3} = -81764$
$\beta = -61$	$k_{x1} = -150218$	$k_{z1} = 4617$	$k_{z3} = -78183$
$\beta = -62$	$k_{x1} = -155253$	$k_{z1} = 3133$	$k_{z3} = -74442$
$\beta = -63$	$k_{x1} = -160629$	$k_{z1} = 1676$	$k_{z3} = -70520$
$\beta = -64$	$k_{x1} = -166386$	$k_{z1} = 246$	$k_{z3} = -66395$
$\beta = -65$	$k_{x1} = -172571$	$k_{z1} = -1160$	$k_{z3} = -62038$
$\beta = -66$	$k_{x1} = -179237$	$k_{z1} = -2544$	$k_{z3} = -57413$
$\beta = -67$	$k_{x1} = -186447$	$k_{z1} = -3907$	$k_{z3} = -52498$
$\beta = -68$	$k_{x1} = -194275$	$k_{z1} = -5249$	$k_{z3} = -47235$
$\beta = -69$	$k_{x1} = -202810$	$k_{z1} = -6573$	$k_{z3} = -41577$
$\beta = -70$	$k_{x1} = -212159$	$k_{z1} = -7879$	$k_{z3} = -35462$
$\beta = -71$	$k_{x1} = -222449$	$k_{z1} = -9169$	$k_{z3} = -28816$
$\beta = -72$	$k_{x1} = -233838$	$k_{z1} = -10443$	$k_{z3} = -21548$
$\beta = -73$	$k_{x1} = -246520$	$k_{z1} = -11703$	$k_{z3} = -13546$
$\beta = -74$	$k_{x1} = -260739$	$k_{z1} = -12949$	$k_{z3} = -4671,3$
$\beta = -75$	$k_{x1} = -276800$	$k_{z1} = -14183$	$k_{z3} = 5254,8$

La raideur K_{Z_3} étant conditionnée par la construction du châssis, il convient de prendre la valeur la plus faible possible.

Nous adopterons donc les valeurs suivantes :

$$\beta = -74^\circ$$

$$K_{X_1} = -261000 \text{ N/m} ; K_{Z_1} = -13000 \text{ N/m}$$

$$K_{X_3} = -144000 \text{ N/m} ; K_{Z_3} = -4700 \text{ N/m}$$

Il faut découpler $y \leftrightarrow \alpha$

En posant $\omega = 94 \text{ rd/s}$

$$0,456K_{y_1} - 0,546K_{y_3} = 31544 \quad (3.92)$$

Le découplage $y \leftrightarrow z$ est assuré car

$$\Sigma K_{yz} = 0 \quad (3.93)$$

Pour définir les K_{y_i} , on peut imposer une fréquence propre de l'ordre de 10 Hz sur y.

On arrive ainsi aux valeurs de :

$$K_{y_1} = -170000 \text{ N/m} \text{ et } K_{y_3} = -199000 \text{ N/m}$$

3.5 CONCLUSION :

Dans ce chapitre, on a étudié le couplage de notre système qui nous a conduits au découplage des différents mouvements suivant les six degrés de liberté du système. Afin de déterminer les différentes raideurs influant notre système, on a appliqué le couplage deux types de suspension (ORION et ROBIN 3000).

CHAPITRE IV :

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

4. RESULTATS ET INTERPRETATIONS :

4.1 INTRODUCTION

Notre travail consiste à élaborer un programme qui permettra de calculer tous les paramètres de notre système tels que les éléments de la matrice d'inertie du moteur et de l'hélice, la position du centre de gravité de l'hélice et du moteur, rapport de réduction, la position angulaire du support, la raideur suivant les axes X, Y, Z et plusieurs autres paramètres. En utilisant les équations développées dans les chapitres précédents.

4.2 PROGRAMME DE CALCUL

En utilisant le langage Fortran, un programme de calcul a été élaboré, ce dernier est basé sur la variation des différents paramètres afin de déterminer tous les efforts appliqués sur le support.

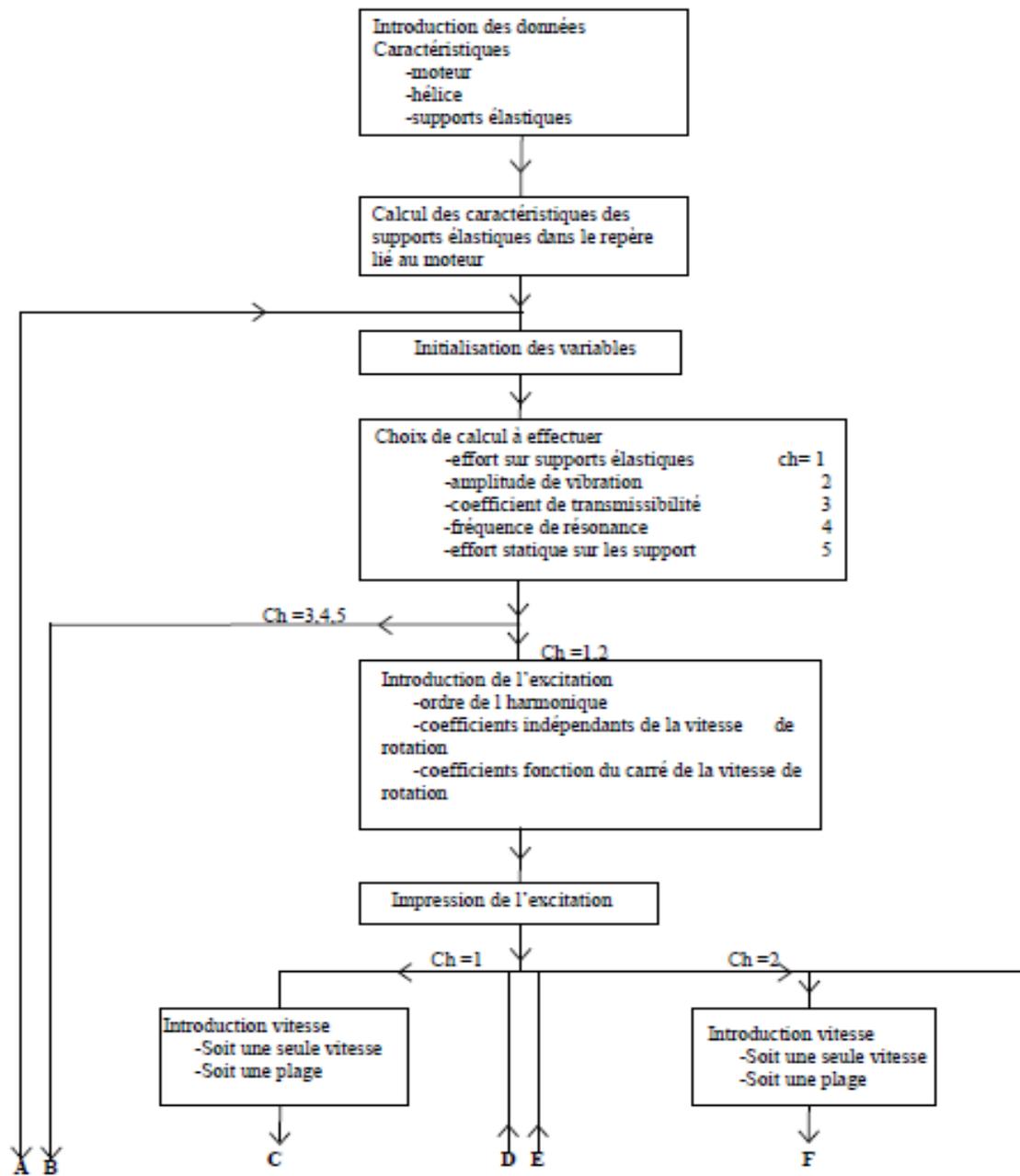
Ce programme est régi par plusieurs étapes à savoir :

- Introduction des données ;
- Calcul des caractéristiques des supports élastiques ;
- Choix de calcul à effectuer ;
- Introduction de l'excitation ;
- Introduction de vitesse
- Introduction des conditions de vol ;
- Calcul des efforts sur les appuis et des coefficients de transmissibilité ;
- Affichage des résultats ;

4.3 ORGANIGRAMME DE CALCUL

L'organigramme de la page suivante est un organigramme général qui permet l'étude d'une suspension élastique.

Le point de départ étant l'analyse des excitations sur le système à suspendre et la définition de la zone de fonctionnement, le résultat final étant les positions et caractéristiques des supports élastiques.



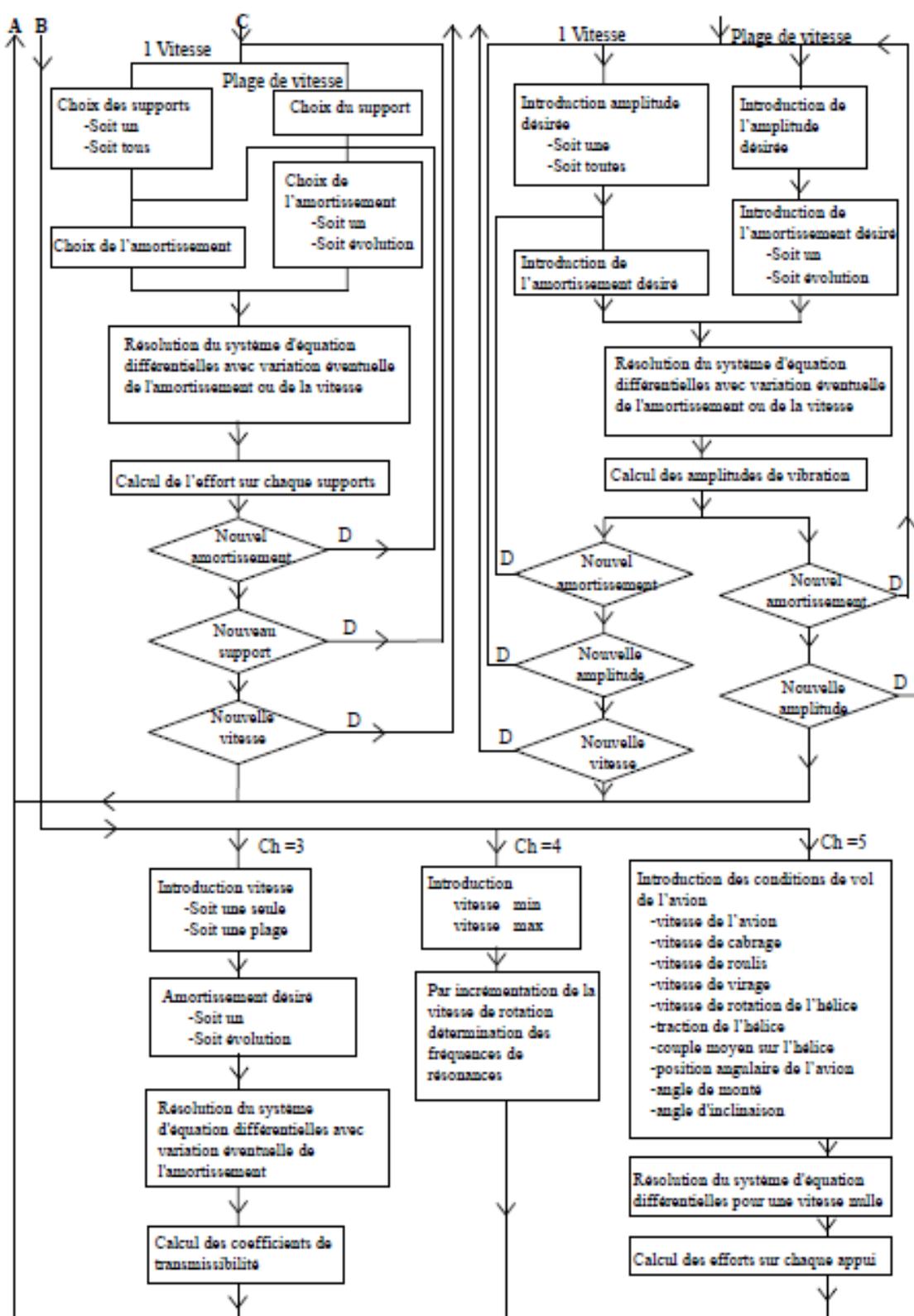


Figure 4.1 l'organigramme

4.4 RESULTATS OBTENUS :

4.4.1 Suspension type ORION :

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

SUSPENSION MOTEUR(ORION)		
MASSE DE MOTEUR+REDUCTEUR	Mm=	170 Kg
ELEMENTS DE LA MATRICE D'INERTIE DU MOTEUR	A3=	4.75 Kg*m ²
	B3=	5.34 Kg*m ²
	C3=	5.20 Kg*m ²
MASSE DE L'HELICE	Mh=	0.00 Kg
ELEMENTS DE LA MATRICE D'INERTIE DE L'HELICE	A4=	0.00 Kg*m ²
	B4=	0.00 Kg*m ²
	C4=	0.00 Kg*m ²
POSITION DU CENTRE DE GRAVITE DE L'HELICE/ CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Ah=	0,00 m
	Bh=	0,00 m
RAPPORT DE REDUCTION DU REDUCTEUR	I=	1.00
NOMBRE DE SUPPORT ELASTIQUE	N=	3.00
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-1		
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0,16 m
	Ds=	0,06 m
	Es=	-0,21 m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0.00
	BETA=	-0.283
	GAMMA=	0.00
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	120548.00 N/m
	Ky=	505760.00 N/m
	Kz=	1416506.00 N/m
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-2		
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0.16 m
	Ds=	0,06 m
	Es=	-0,21 m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0.00
	BETA=	-0.283
	GAMMA=	0.00
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	120548.00 N/m
	Ky=	505760.00 N/m
	Kz=	1416506.00 N/m
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-3		
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0,00 m
	Ds=	-0,35 m
	Es=	0,00 m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0.00
	BETA=	0.00
	GAMMA=	0.00
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	141429.00 N/m
	Ky=	100000.00 N/m
	Kz=	384804.00 N/m

Tableau 4-1– caractéristiques d'une suspension (type ORION)

Nous obtenons les graphes suivants :

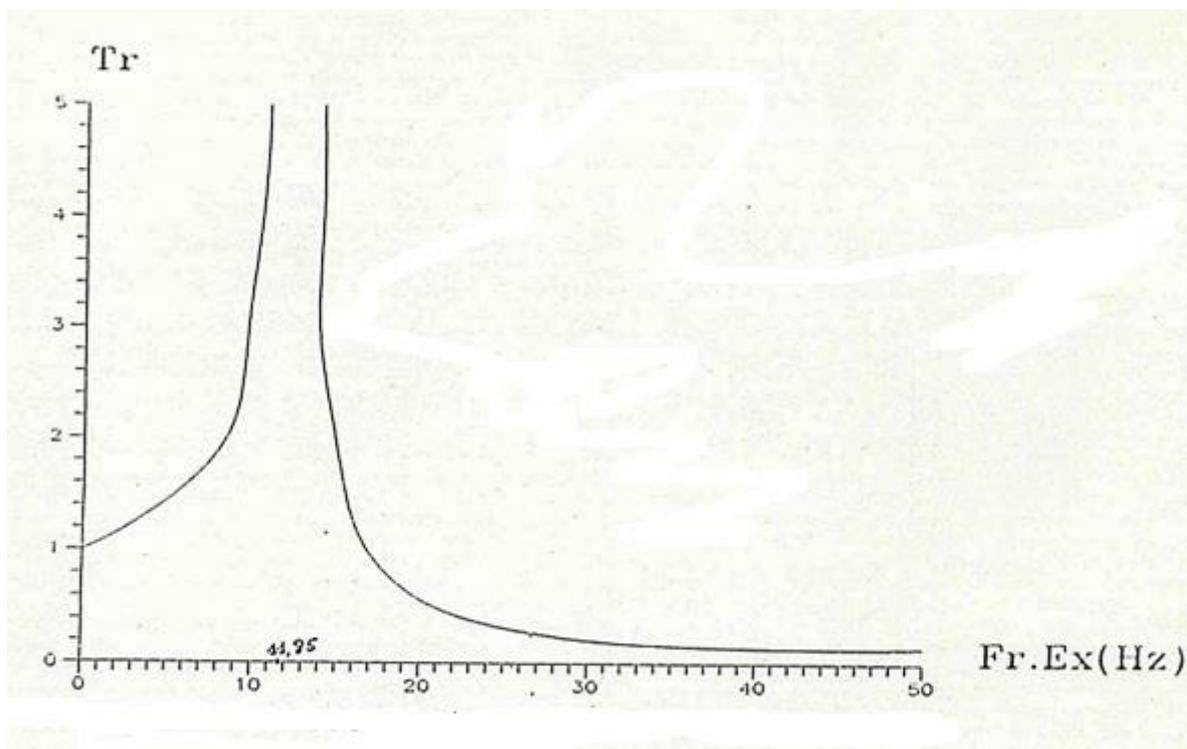


Figure 4.2-transmissibilité pour une excitation du type Fx (ORION)

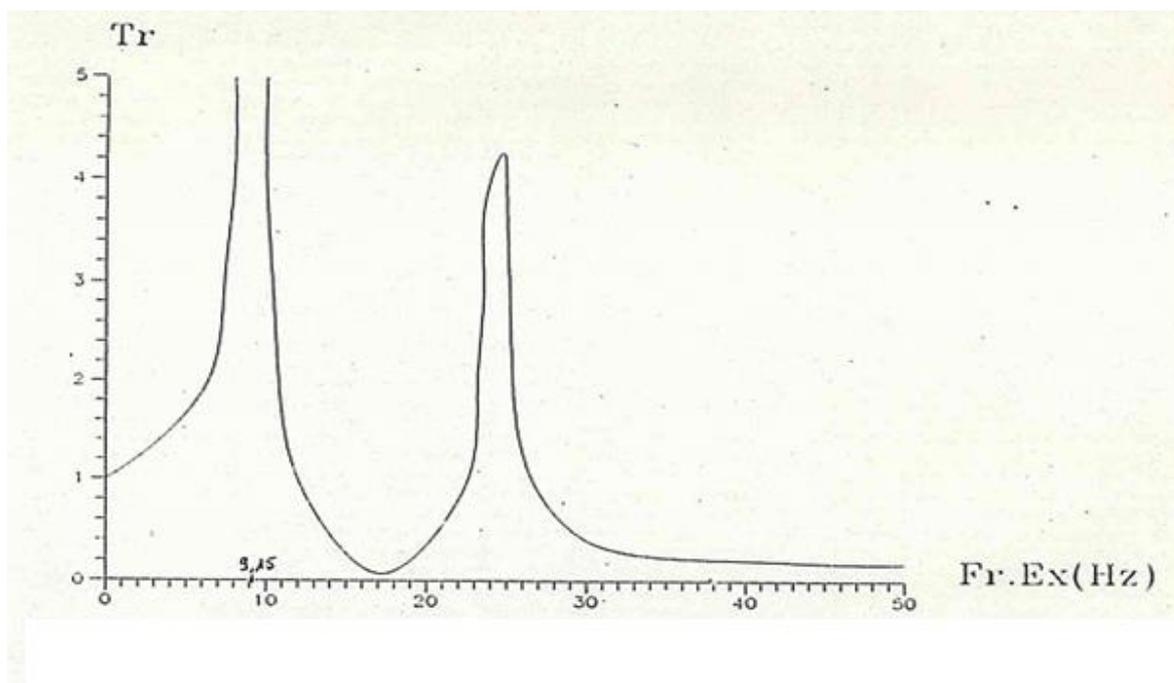


Figure 4.3- transmissibilité pour une excitation du type Fy (ORION)

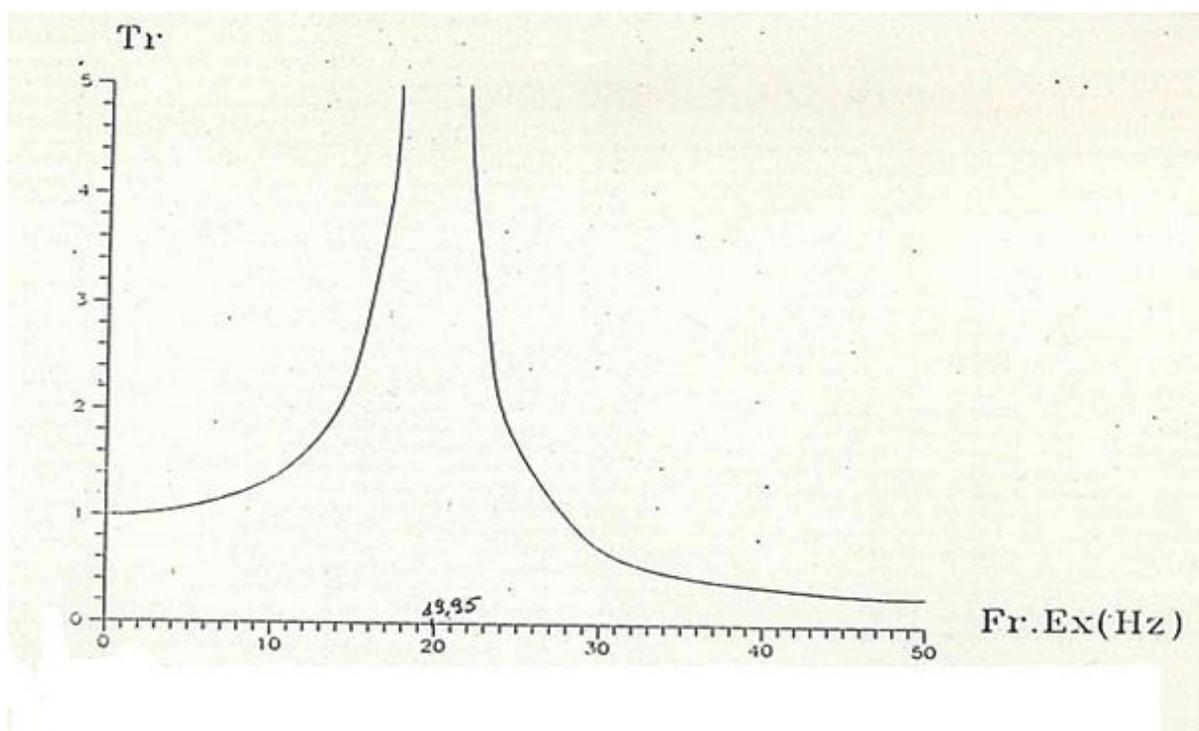


Figure 4.4- transmissibilité pour une excitation du type Fz (ORION)

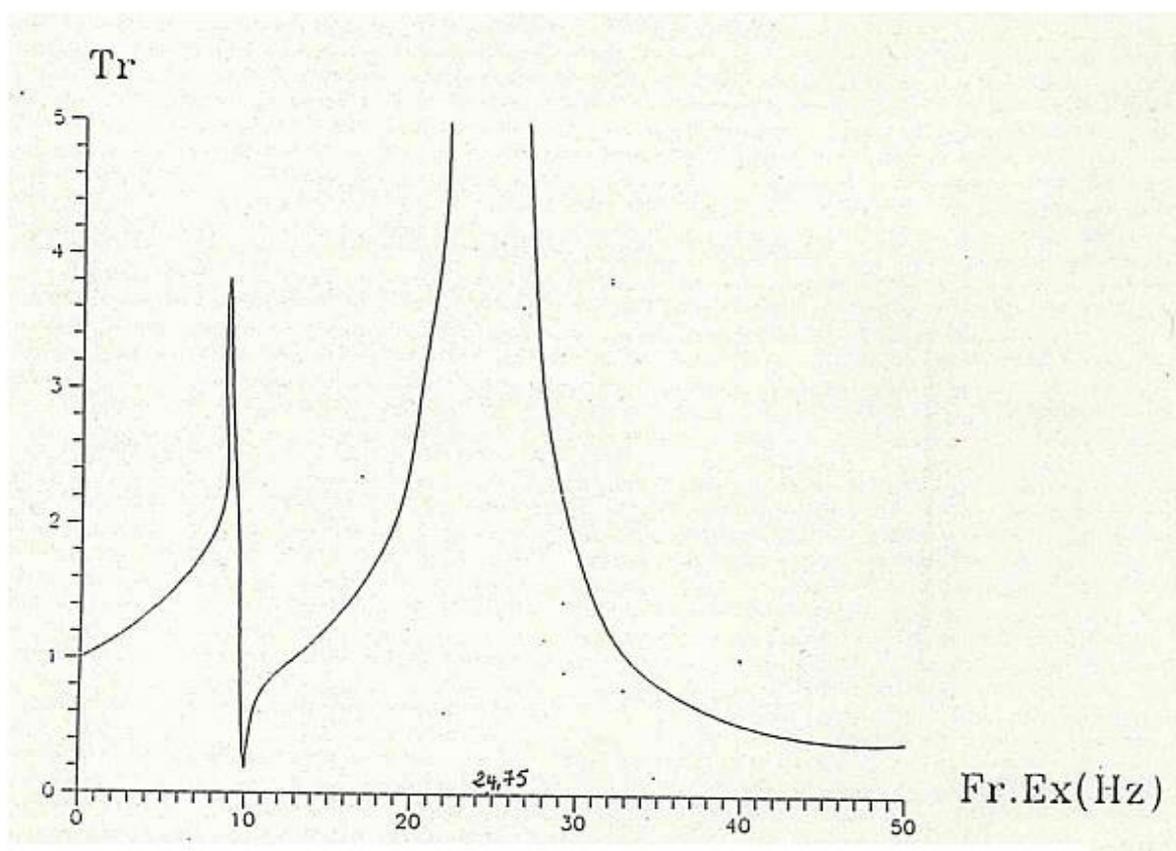


Figure 4.5- transmissibilité pour une excitation du type Mx (ORION)

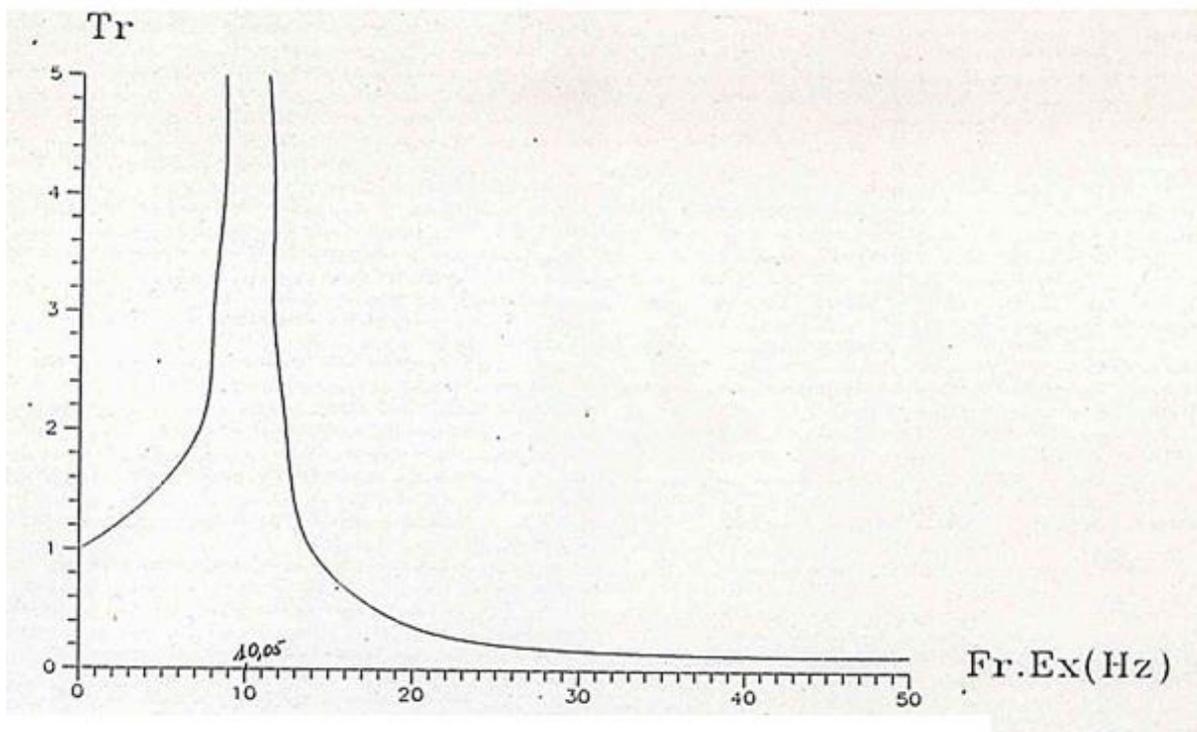


Figure 4.6- transmissibilité pour une excitation du type My (ORION)

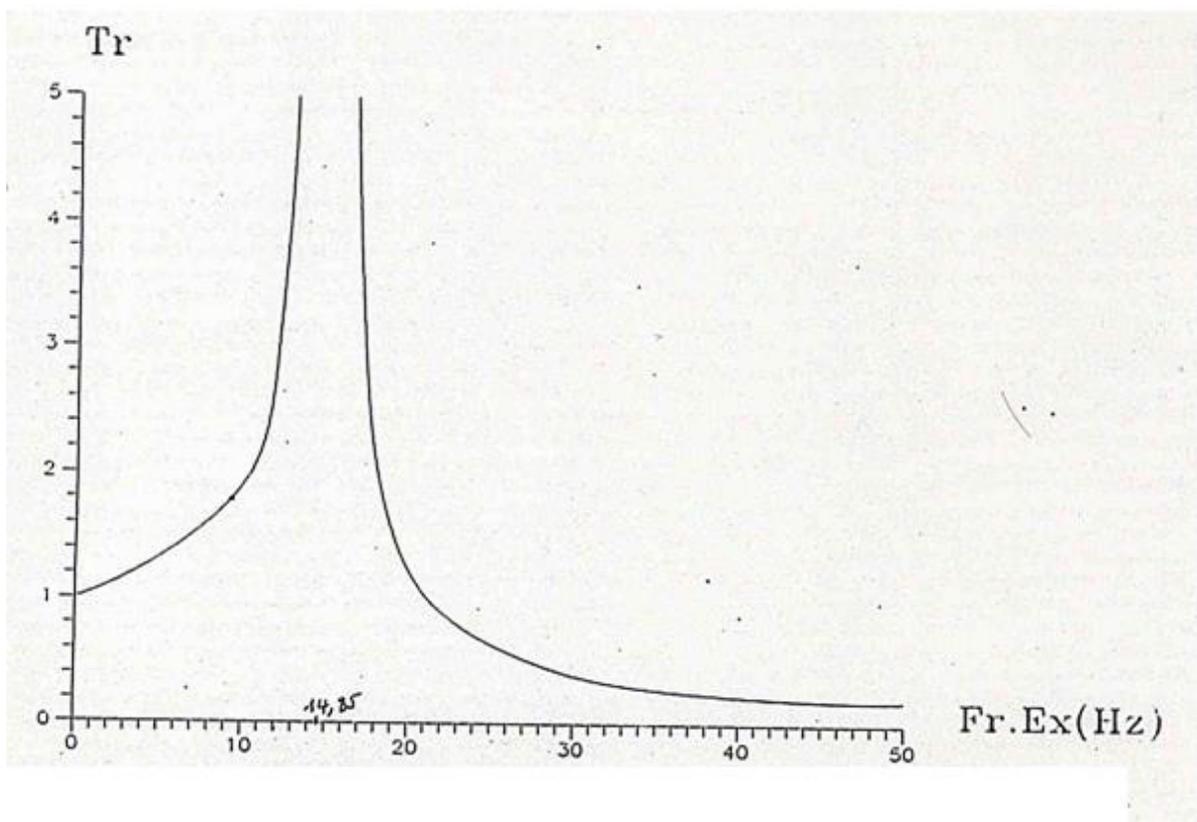


Figure 4.7- transmissibilité pour une excitation du type Mz (ORION)

4.4.2 Suspension type ROBIN 3000 :

Tableau 4-2– caractéristiques d'une suspension (type ROBIN 3000)

MASSE DE MOTEUR+REDUCTEUR	Mm=	170	Kg
ELEMENTS DE LA MATRICE D'INERTIE DU MOTEUR	A3=	5	Kg*m ²
	B3=	5,6	Kg*m ²
	C3=	5,5	Kg*m ²
MASSE DE L'HELICE	Mh=	17	Kg
ELEMENTS DE LA MATRICE D'INERTIE DE L'HELICE	A4=	0	Kg*m ²
	B4=	1,65	Kg*m ²
	C4=	1,66	Kg*m ²
POSITION DU CENTRE DE GRAVITE DE L'HELICE/ CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Ah=	0,41	m
	Bh=	0,21	m
RAPPORT DE REDUCTION DU REDUCTEUR	I=	2,2	
NOMBRE DE SUPPORT ELASTIQUE	N=	4	
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-1			
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0,25	m
	Ds=	0,06	m
	Es=	-0,228	m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0	
	BETA=	-74	
	GAMMA=	0	
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	260739	N/m
	Ky=	169657	N/m
	Kz=	12949	N/m
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-2			
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0,25	m
	Ds=	0,06	m
	Es=	-0,228	m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0	
	BETA=	-74	
	GAMMA=	0	
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	260739	N/m
	Ky=	169657	N/m
	Kz=	12949	N/m
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-3			
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	0,33	m
	Ds=	-0,2	m
	Es=	0,273	m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0	
	BETA=	0	
	GAMMA=	0	
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	144434	N/m
	Ky=	199465	N/m
	Kz=	4671	N/m
* POUR SUPPORT ELASTIQUE N-4			
POSITION DU SUPPORT/CENTRE DE GRAVITE DU MOTEUR	Cs=	-0,33	m
	Ds=	0,2	m
	Es=	0,27	m
POSITION ANGULAIRE DU SUPPORT	ALPHA=	0	
	BETA=	0	
	GAMMA=	0	
RAIDEUR SUIVANT LES AXES X, Y, Z	Kx=	144434	N/m
	Ky=	199465	N/m
	Kz=	4671	N/m

D'après ce tableau, nous obtenons les graphes suivants :

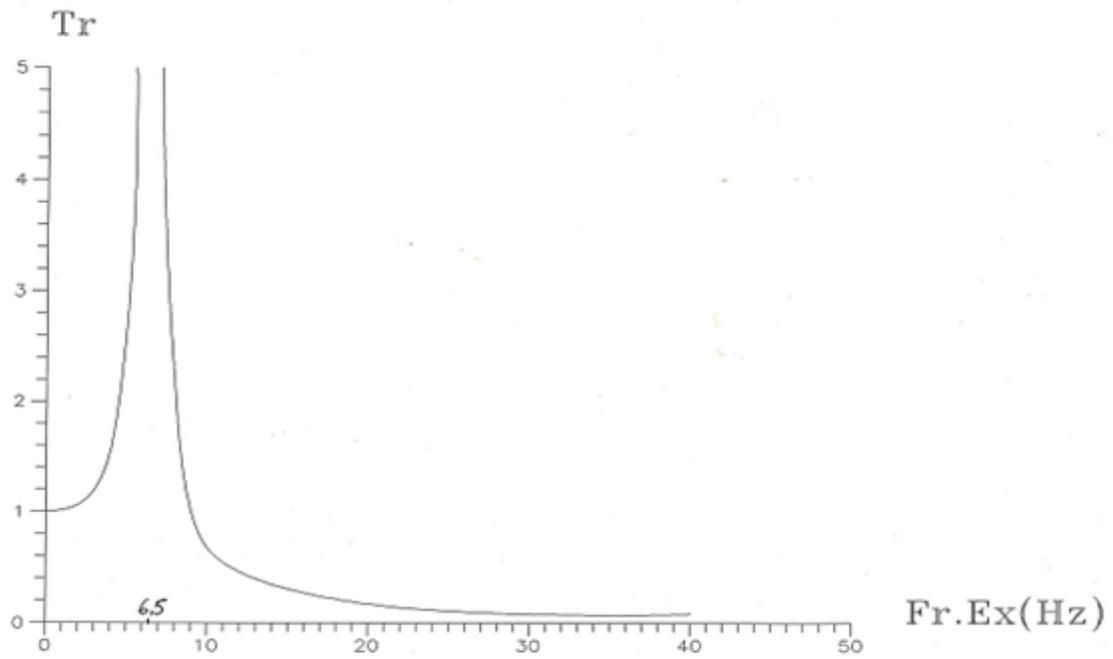


Figure 4.8- transmissibilité pour une excitation du type Fx (ROBIN 3000)

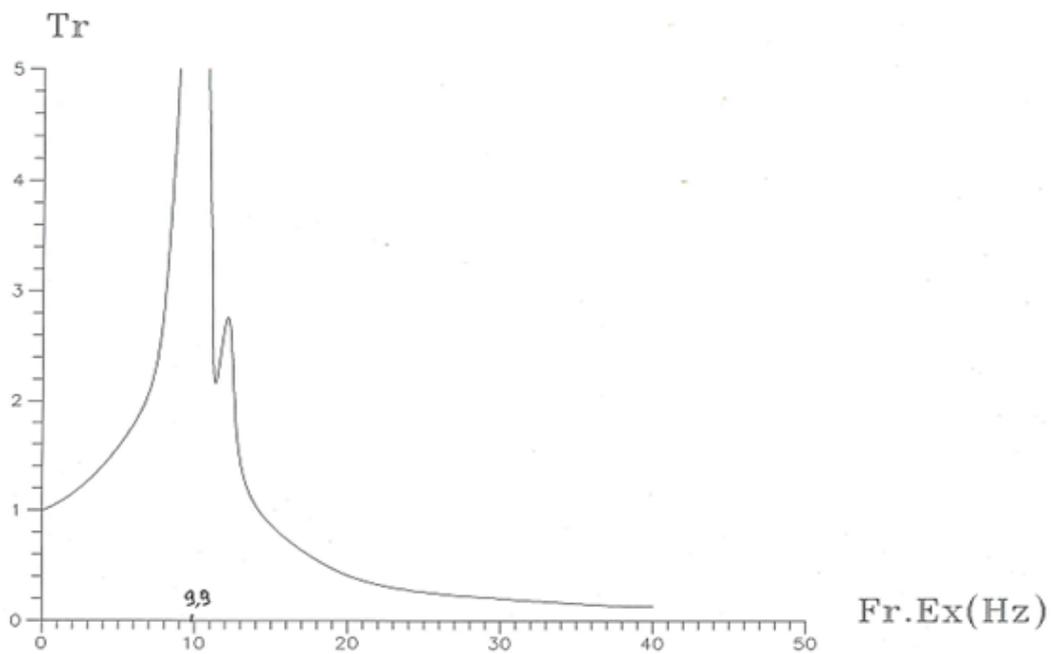


Figure 4.9- transmissibilité pour une excitation du type Fy (ROBIN 3000)

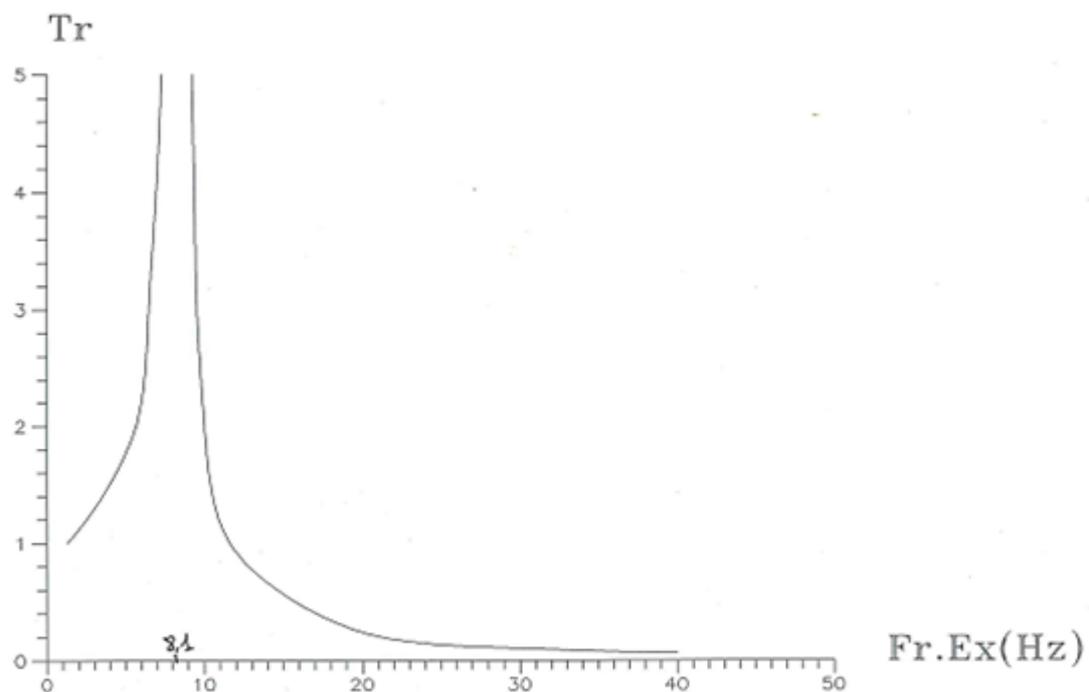


Figure 4.10- transmissibilité pour une excitation du type Fz (ROBIN 3000)

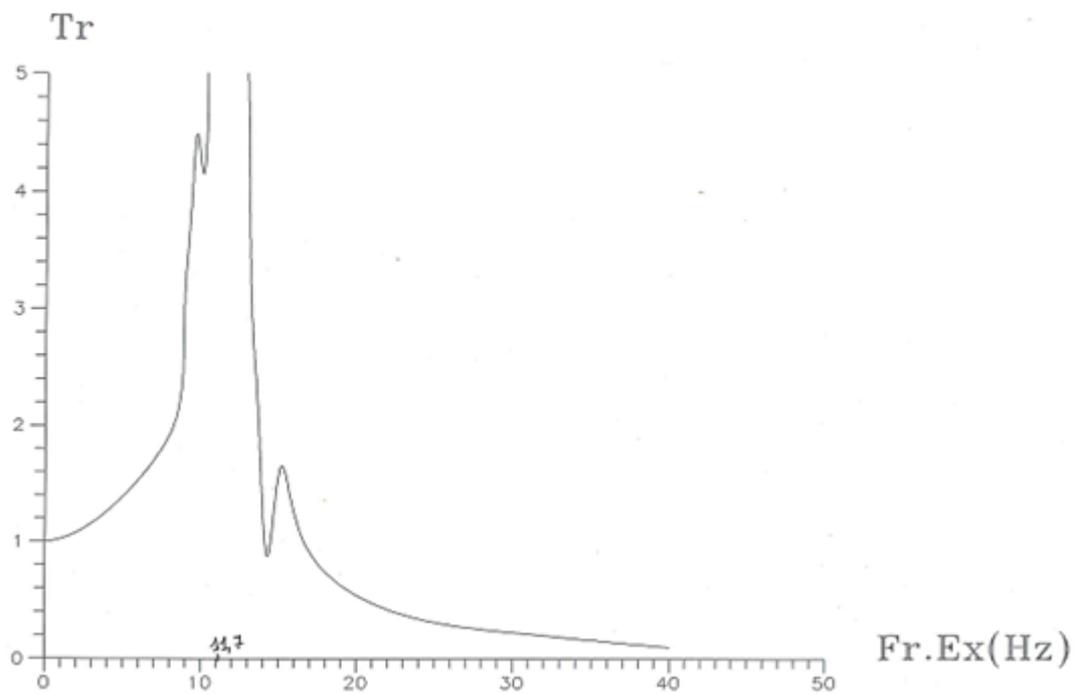


Figure 4.11- transmissibilité pour une excitation du type Mx (ROBIN 3000)

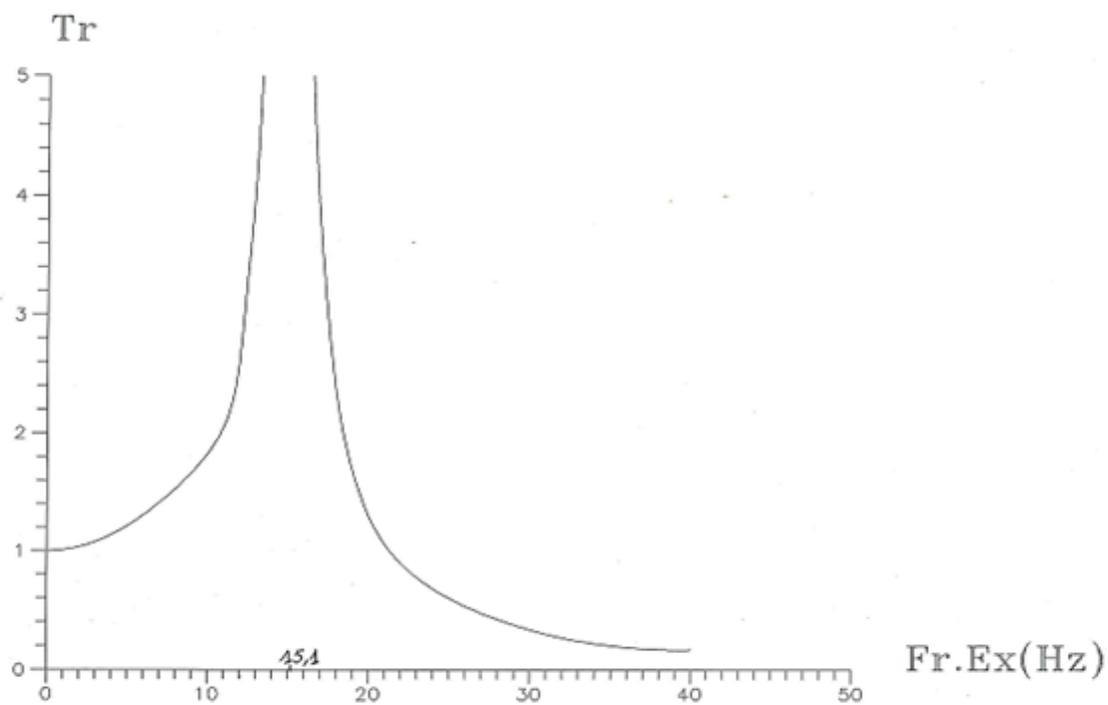


Figure 4.12- transmissibilité pour une excitation du type My (ROBIN 3000)

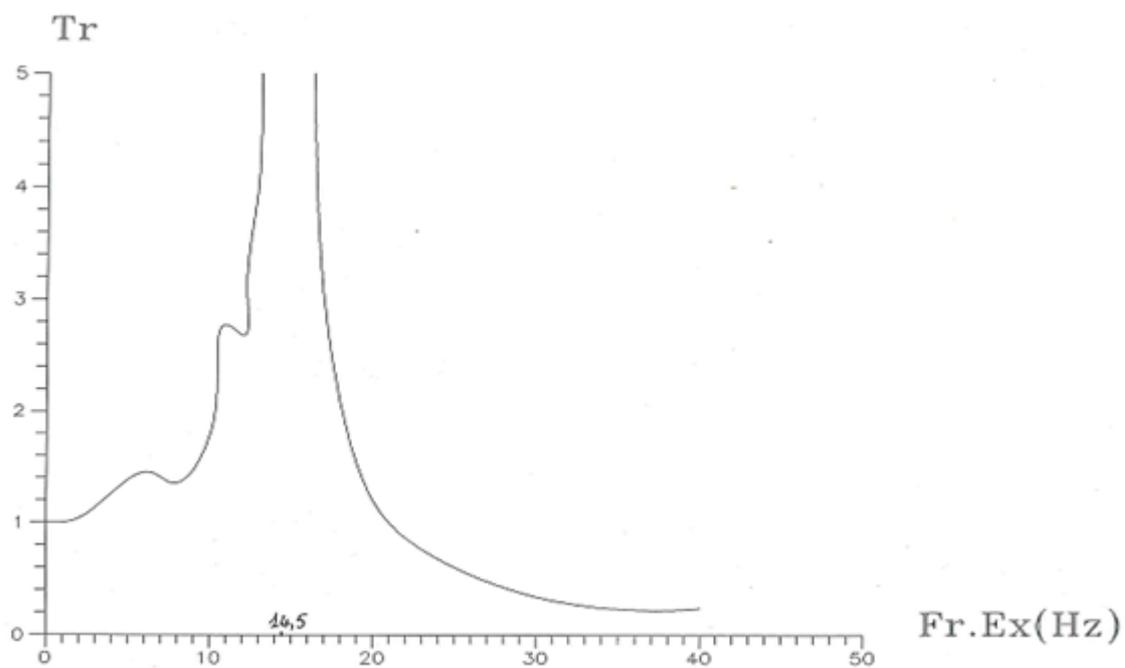


Figure 4.13- transmissibilité pour une excitation du type Mz (ROBIN 3000)

4.5 INTERPRETATION :

La valeur de transmissibilité est supérieure à "1" pour " ω " et inférieure à la fréquence de résonance. Elle est inférieure à "1" pour " ω " nettement supérieur à la fréquence de résonance.

On se rend compte que la période d'excitation en fonctionnement ne doit pas être inférieure à la fréquence de résonance.

Pour une excitation du type F_y (figure 4.2), nous trouvons à 25 Hz un pic de résonance dû au couplage entre y et α . De même pour la (figure 4.4), il y a un pic de résonance dû au couplage entre y et α .

Les petites irrégularités que nous trouvons sur les courbes sont dues aux couplages que nous n'avons pas pu faire disparaître à cause de l'hélice.

4.6 CONCLUSION :

Après l'utilisation du programme, on a déterminé toutes les fréquences de résonance qui influent sur notre suspension. Les résultats obtenus sont presque les mêmes en comparant avec les résultats du deux types étudiés dans le chapitre précédent.

CONCLUSION GENERALE

En conclusions, l'utilisation d'une suspension active du groupe motopropulseur est une démarche innovante en matière d'aéronef léger. La méthode de calcul autorise la prise en compte de six mobilités possibles pour le groupe motopropulseur. Les effets dynamiques du propulseur sont introduits dans l'analyse des efforts sollicitant la suspension, la détermination des caractéristiques des supports élastiques et leur positionnement s'effectuent en analysant les possibilités de découplage maximum de différents degrés de liberté.

Des comparaisons ont été faites avec d'autres résultats afin de montrer la validité du programme de calcul que nous avons élaboré, nous avons pu tirer certaines conclusions :

- La valeur de transmissibilité est supérieure à "1" pour " ω " et inférieure à la fréquence de résonance. Elle est inférieure à "1" pour " ω " nettement supérieur à la fréquence de résonance.
- la période d'excitation en fonctionnement ne doit pas être inférieure à la fréquence de résonance.

Bibliographie :

- [1]-Lovat- G mécanisme excitateurs. Cetim-Senlis 1986.
- [2]-Babaud- F les matériaux viscoélastiques. Dunod- Paris 1978.
- [3]-Louradour-G : isolation antivibratoire et antichoc. Technique de l'ingénieur B595.
- [4]-Michel-D mécanique de vibrations. Edition 1985.
- [5]-Paulstra application mécanique des élastomères catalogue général Levallais-Perret. France.
- [6]-Gallas-G propriétés dynamique des élastomères, application aux supports et butées 1978.
- [7]-<http://home.nordnet.fr/dmorieux/moteur0002.htm>.
- [8]- <http://www.experimentalaircraft.info/articles/aircraft-engine-mounts.php>.
- [9]- http://www.voiles-alternatives.com/documents/aviation/comment_vole_un_avion.pdf