

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Reçu le 25 MAI 1982



Étude des suites de réels $\cos n!x$ et $\sin n!x$.

par B. BALLEZ, professeur au Centre universitaire d'Avignon.

En utilisant la structure des sous-groupes additifs de \mathbb{R} , on montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$ est tout l'intervalle $[-1, +1]$, quand $\frac{x}{2\pi}$ est irrationnel.

Rappelons brièvement la démonstration pour la suite $(\cos nx)$ par exemple.

Soit $a \in [-1, +1]$ et $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$. Le sous-groupe additif de \mathbb{R} engendré par x et 2π n'est pas monogène car $\frac{x}{2\pi}$ est irrationnel : il est donc partout dense. Si maintenant ε est un nombre positif donné, par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|u - \alpha| < \eta \Rightarrow |\cos u - a| < \varepsilon.$$

Alors d'après ce qui précède, il existe des entiers n et m (avec $n \geq 0$) tels que

$$|nx + 2m\pi - \alpha| < \eta$$

donc

$$|\cos(nx + 2m\pi) - a| = |\cos nx - a| < \varepsilon.$$

On se propose d'étudier l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites extraites des précédentes :

$(\cos n!x)$ et $(\sin n!x)$, pour $\frac{x}{2\pi}$ irrationnel (si $\frac{x}{2\pi}$ est rationnel, ces suites sont constantes à partir d'un certain rang). Il va être commode d'utiliser la notion de développement « factoriel » d'un nombre réel :

1^o Tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$ est la somme d'une série convergente de la forme

$$\sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n!}$$

où pour tout n , a_n est un entier compris entre 0 et $n - 1$ (égalités possibles). Si x est irrationnel, cette écriture est unique.

2^o Inversement toute série de cette forme est convergente et sa somme est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Démontrons d'abord 2^o : On a pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^p \frac{a_n}{n!} &\leq \sum_{n=2}^p \frac{n-1}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^p \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 1 - \frac{1}{p!}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

1^o Pour $n \geq 2$, désignons par p_n la partie entière de $n!x$:

$$p_n \leq n!x < p_n + 1,$$

alors

$$(n+1)p_n \leq (n+1)!x < (p_n+1)(n+1),$$

d'où

$$(n+1)p_n \leq p_{n+1} \text{ et } p_{n+1} + 1 \leq (n+1)(p_n + 1).$$

Il en résulte

$$\frac{p_n}{n!} \leq \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{p_n}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Soit alors a_{n+1} l'entier défini par l'égalité

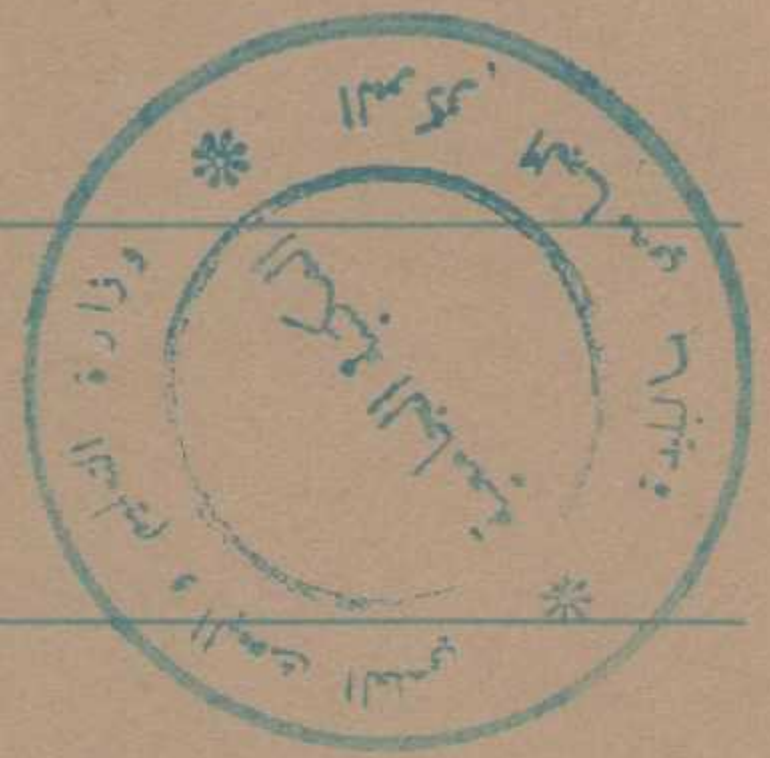
$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

De la double inégalité ci-dessus résulte que a_{n+1} est positif et au plus égal à n et on a immédiatement par récurrence,

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $a_2 = p_2 = [2x]$ et si $x < 1$, $a_2 = 0$ ou 1 et comme $\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow x$ on a bien

$$x = \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n!},$$



Comité de rédaction

LIBRAIRIE VUIBERT, 63, bd Saint-Germain, 75015 Paris.

A. WARUSFEL, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

J. CHEVALLET, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Henri IV.

G. FLORY, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

Sommaire

Étude des suites de réels $\cos n!x$ et $\sin n!x$, par B. Ballet	317
Une condition nécessaire pour qu'une fonction soit limite simple de fonctions continues, par B. Ballet	319
Une contrainte inutile, par J. Bouteloup	320
Écoles normales supérieures d'Ulm et de Sèvres (solution de la question 6 305)	322
Écoles normales supérieures de Saint-Cloud et de Fontenay (solution de la question 6 308)	326
École normale supérieure de l'enseignement technique (solution de la question 6 313)	334
École nationale de la statistique et de l'administration économique (solution de la question 6 318)	339
Examens oraux des concours d'entrée aux grandes écoles (1981)	344
Questions et Réponses	347

Abonnements 1981-1982.

FRANCE : F 240. Librairie Vuibert (C.C.P. Paris 389-85 F).

BELGIQUE : FB 2000, Editions et diffusion, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

CANADA : S 66. Le diffuseur, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

ESPAGNE : PTA 5 760. Cientifico tecnica, 27, Sandro Davila. Madrid 28.

MAROC : DH 240. SMER, 3, rue Ghazza, Rabat.

SUISSE : FS 107. Delachaux et Niestlé, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

AUTRES PAYS : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. Librairie Vuibert (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.