92e année (1981-1982)

Mai 1982 - Mensuel n° 9

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

A propos de la question Q4

par F. Kœchlin, professeur en Mathématiques spéciales C à Strasbourg.

La nature de la série et même de la suite de terme général $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2}$ paraît liée à ce qu'on appelle les « approximations diophantiennes de π ».

Il s'agit de savoir dans quelle mesure $|n - k\pi|$ peut être proche de $\frac{\pi}{2}$ en fonction de l'ordre de grandeur de n $\left(k \text{ étant l'entier le plus proche de } \frac{n}{\pi}\right)$.

Après quelques préliminaires sur les approximations diophantiennes, on va démontrer

1° $\frac{a}{n^{19}} < |\operatorname{tg} n| < bn^{19}$ en utilisant pour cela un résultat de M. Mignotte (voir bibliographie) dont la démonstration sort largement du cadre de la R.M.S. Cela donnera l'absolue convergence de la série $\frac{\operatorname{tg} n}{n^{20+\varepsilon}}$ ainsi que le rayon de convergence de la série entière $\frac{x^n \operatorname{tg} n}{n^2}$ (question transcrite, probablement par erreur, il y a quelques années dans des annales d'oral et peut-être à l'origine de la question posée).

2° En utilisant un résultat simple dû à Dirichlet on trouvera une constante c positive telle que $|\operatorname{tg} n| < \frac{c}{n}$ admette une infinité de solutions.

I. — *Proposition* 1 :

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists c_1 > 0 \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c_1}{q}$$

pour tout $\frac{p}{q}$ *vérifiant* $x \neq \frac{p}{q}$.

Démonstration : On prend $c_1 < \frac{1}{q_0}$ si $x = \frac{p_0}{q_0}$

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p_0 q - p q_0}{q q_0}\right| \geqslant \frac{1}{q q_0}.$$

Proposition 2 : (Dirichlet)

$$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in [\![1, n-1]\!],$$

vérifiant

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{nq}.$$

Démonstration : On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

L'un de ces intervalles contient au moins deux des $n+1$ nombres

$$0,\ 1,\ \{x\},\ \{2x\} \ldots \{(n-1)x\}$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y (principe des tiroirs). Il existe donc des entiers r_1, r_2, s_1, s_2 tels que

$$|(r_1 x - s_1) - (r_2 x - s_2)| \leqslant \frac{1}{n} \quad (r_1 > r_2)$$

(l'égalité est d'ailleurs impossible puisque x est irrationnel), on a donc

$$|qx - p| \leqslant \frac{1}{n}$$

$$q = r_1 - r_2, \qquad p = s_1 - s_2.$$

Corollaire 1 : $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ *Il existe une infinité de rationnels* $\frac{p}{q}$ *distincts tels que*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Démonstration : Soit $\frac{p_1}{q_1} \ldots \frac{p_k}{q_k}$ des rationnels obtenus par la proposition donc vérifiant

$$\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}$$

RMS

Comité de rédaction

Librairie Vuibert, 63, bd Saint-Germain, 75015 Paris.

A. Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

J. Chevallet, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Henri IV.

G. Flory, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

Sommaire

Abonnements 1981-1982

France : F 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Belgique : FB 2 000. **Éditions et diffusion**, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

Canada : $ 66. **Le diffuseur**, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

Espagne : PTA 5 760. **Cientifico tecnica**, 27, Sandro Davila. Madrid 28.

Maroc : DH 240. **SMER**, 3, rue Ghazza, Rabat.

Suisse : FS 107. **Delachaux et Niestlé**, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

Autres Pays : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.