

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Institut d'aéronautique et des études spatiales

Blida



Projet de fin d'études

Etude des vibrations libres des plaques épaisses
en matériaux à gradient fonctionnel (FGM)
reposant sur un support élastique de Winkler-
Pasternak

Master structures aéronautiques

Fait par :

Zemani KADA

Sebakhi FAIZA

Promoteur :

Dr.HAMADOUCHE MAHI Amale

Année universitaire 2014-2015

Résumé:

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en conséquence des propriétés mécaniques de l'élément structural qu'ils constituent. Ce travail est justement consacré à présenter une théorie raffinée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement vibratoire des plaques épaisses fonctionnellement graduées (FGM) simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Cette théorie contient seulement quatre variables alors que les autres théories de déformation de cisaillement en contiennent cinq ou plus. Elle possède une forte similitude avec la théorie classique des plaques (CPT) dans de nombreux aspects et elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement. Ce nouveau modèle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transverse au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les propriétés mécaniques de la plaque FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

Les équations de mouvement d'une plaque P-FGM reposant sur une fondation élastique sont déterminées grâce à l'application du principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues en utilisant la méthode de Navier. Les fréquences naturelles de vibration libre sont calculées en résolvant le système aux valeurs propres obtenu. Une étude paramétrique sera effectuée pour démontrer l'influence des différents paramètres sur le comportement vibratoire de la plaque FGM.

Mots clé : Matériaux fonctionnellement gradués, théorie raffinée, comportement mécanique, vibration libre, plaque, fondations élastiques.

ABSTRACT

Functionally graded materials (FGM's) are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component (usually metal and ceramic) through the thickness direction. This work is devoted precisely to present a refined theory which takes into account the effect of transverse shear in order to analyze the bending behavior of thick functionally graded plates resting on an elastic foundation of Winkler-Pasternak type. This theory contains only four unknowns in contrast to other shear deformation theories (*five unknowns or more*). It has a strong similarity with the classical theory of plates (CPT) in many aspects and it does not require shear correction factor. This new model satisfies zero transverse shear stresses conditions at the top and the bottom surfaces of the plate. The Material properties vary according to a power law distribution of volume fraction of constituents.

The motion equation for P-FGM plates resting on the elastic foundation is obtained by applying the principle of Hamilton. Approximates solutions are obtained by using the Navier method, and then the fundamental frequencies are found by solving the results of the eigenvalue problem. Parametric studies will be presented to highlight the influence of various parameters on the mechanical behavior of the FGM plate.

Keywords: functionally graded materials, refined theory, mechanical behavior, free vibration, plate, elastic foundations.

المواد المتدرجة الخاصة هي مجموعة جديدة من المواد المركبة التي تتميز بتدرج مستمر في الخصائص الميكانيكية لكل مكون بتغير السمك (عموما المعادن والسيراميك) ، هذا البحث مخصص على وجه التحديد لتقديم نظرية جديدة تأخذ بعين الاعتبار تأثير القص العرضي للصفائح السميكة بوجود أساس مرن من نوع وينكلر-باسترنالك. عدد مجاهيل هذه النظرية أربعة فقط خلافا لغيرها من النظريات (خمسة متغيرات أو أكثر)، كما أن لهذه النظرية تشابها كبيرا مع النظرية الكلاسيكية للصفائح في العديد من الجوانب و لا تتطلب معامل التصحيح. بتغير الخصائص الميكانيكية للصفائح تبعا لقانون القوة المضاعفة في توزيع العناصر المركبة

بعد كتابة معادلة التفاضلية للحركة عن طريق تطبيق مبدأ هاملتون ، نستنتج الحل التقريبي ل نافيي ، ثم نستخرج الترددات الأساسية من خلال حل نتائج المشكلة القيمة الأساسية .
النتائج المحصل عليها في هذا التحليل الاهتزازي الحر للوحات المستقرة على أسس مرنة ، فعالة وسهلة لتحليل حركة اللوحات . وستعرض دراسات بارامترية لتسليط الضوء على تأثير المتغيرات المختلفة على السلوك الميكانيكي للوحات

كلمات البحث: واد المتدرجة الخاصة ، نظرية المجاهيل الأربعة، السلوك الميكانيكي ، والاهتزاز الحر ، لوحة، أسس مرنة

LISTES DES FIGURES ET TABLEAUX

Liste des figures

- Figure (1-1)** : Variation continue des propriétés
- Figure (1-2)** : Variation discrète des propriétés
- Figure (1-3)** : Variation continue la microstructure (schématisée)
- Figure (1-4)** : Variation continue la microstructure (photo)
- Figure (1-5)** : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.
- Figure (1-6)** : la distribution des composantes des matériaux.
- Figure (1-7)** : géométrie d'une plaque FGFM.
- Figure (1-8)** : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.
- Figure (1-9)** : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM
- Figure (1-10)** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.
- Figure (2-1)** : Modèle d'une plaque FGFM.
- Figure (2-2)** : Solide soumis à un chargement solide.
- Figure (2-3)** : Représentation des contraintes sur les faces d'un cube élémentaire.
- Figure (2-4)** : Schématisation des résultantes en membrane et en cisaillement des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion.
- Figure (2-5)** : plaque reposant sur une fondation élastique.
- Figure (2-6)** : Trajectoire réel et virtuel [37].
- Figure (3-1)** : Schématisation des déformations dans la théorie classique des plaques.
- Figure (3-2)** : déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).
- Figure (3-3)** : Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre.
- Figure (3-4)** : schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.
- Figure (3-5)** : profil de variation de $\varphi(z)$ a travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).
- Figure (3-6)** : profil de variation de $d\varphi(z)/dz$ a travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).
- Figure (4-1)** : Plaque FGFM reposant sur une fondation élastique.
- Figure (5-1)** : Organigramme du programme de calcul.
- Figure (5-2)** : Plaque FGFM reposant sur une fondation élastique

Figure (5-3) : La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$, $k_s = k_w = 0$) en fonction du l'indice de la fraction volumique p .

Figure (5-4) : La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM ($a/b = 1$, $k_s = k_w = 0$) en fonction du l'indice de la fraction volumique p .

Figure (5-5) : L'évolution l'erreur relative en paramètre fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$.

Figure (5-6) : La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$) en fonction du l'indice de la fraction volumique p et les coefficients de Winkler-Pasternak.

Figure (5-7) : La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$, $\hat{k}_s=0$ et $\hat{k}_s=0$) en fonction du rapport d'épaisseur h/a

Figure (5-8) : La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$) en fonction de l'indice de puissance p , pour les différentes configurations et rapport d'épaisseur.

Liste tableaux

Tableau (1-1) : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [10].

Tableau (3-1): Différentes fonction de forme des théories des plaques isotopes et FGM.

Tableau (4-1) : Les constantes la rigidité et la masse.

Tableau (5-1) : Différents modèles de déplacement et nombre des fonctions inconnus.

Tableau (5-2) : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$, $k_s = k_w = 0$).

Tableau (5-3) : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque P-FGM Al_2/Al_2O_3 ($a/b = 1$, $k_s = k_w = 0$).

Tableau (5-4) : Influence du rapport d'épaisseur a/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée P-FGM (Al/Al_2O_3).

NOMENCLATURE

A :	Surface.
A_{ij} :	Rigidité en membrane.
B_{ij} :	Rigidité de couplage.
B^a_{ij} :	Rigidité de couplage d'ordre supérieur.
C_{ij} :	Constantes de rigidités d'un matériau FGM dans ses axes principaux .
D_{ij} :	Rigidité de flexion.
$E(z)$:	La variation du module de Young le long de l'axe z .
E^c :	Module de Young de la céramique.
E^m :	Module de Yung du métal.
E_c :	Energie cinétique d'une plaque.
$\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z$:	Les efforts de volume exercés sur un solide.
F_{ij} :	Les constantes de la matrice rigidité.
G :	Module de cisaillement.
I_{xy} :	L'inertie rotation.
K :	Module de compressibilité.
$[K]$:	Matrice de rigidité.
\mathcal{L} :	Lagrangien.
$[M]$:	Matrice masse.
$M_f(x, y)$:	Moment de flexion et de torsion.
M_x, M_y :	Moments de flexion.
M_x^b, M_y^b :	Moment de flexion par unité de longueur.
M_{xy}^b :	Moment de flexion d'ordre supérieur par unité de longueur.
M_x^s, M_y^s :	Moment de torsion par unité de longueur.
M_{xy}^s :	Moment de torsion d'ordre supérieur par unité de longueur.
$N(x, y)$:	Résultantes en membrane.
N_x, N_y, N_{xy} :	Les résultantes par unité de longueur des efforts normaux (x, y) et l'effort de cisaillement dan le plan (x, y) .
$P(z)$:	Propriété le long de l'axe z .

P_i :	Propriété mécanique du constituant (i).
P_c :	Propriétés de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque.
P_m :	Propriétés de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la plaque.
$Q(x, y)$:	Résultante en cisaillement.
Q_{ij} :	Coefficients de rigidités réduites.
Q_{yz}^s, Q_{xz}^s :	Résultantes des efforts de cisaillement d'ordre supérieur dans les plans (x, z) et (y, z) par unité de longueur.
R :	Inertie de couplage.
S_{ij} :	Constantes de souplesses d'un matériau FGM dans ses axes principaux.
U, V, W :	Déplacements d'un point M dans les directions x, y, z.
U_f :	Energie de déformation du support élastique.
U_d :	Energie de déformation d'une plaque.
$V_f(z)$:	Fraction volumique de la plaque le long de l'axe z.
V_i :	Fraction volumique du constituant (i).
W_p :	Travail des forces exercées sur une plaque.
A :	Longueur.
a_x, a_y, a_z :	Les composantes de vecteur d'accélération du point M .
B :	Largeur.
$f(z)$:	Fonction de forme.
f_e :	La densité de la force de réaction d'une fondation élastique.
h :	L'épaisseur de la plaque.
k_s :	Rigidité de cisaillement.
k_w :	Rigidité de Winkler.
k_x^b :	Les courbures de la poutre due à la flexion.
k_x^s :	Les courbures de la poutre due au cisaillement.
P :	Paramètre matériel (paramètre de puissance).
$q(x, y)$:	Charge transversale.
u, v, w :	Déplacements du point de référence $M_0(x, y, 0)$.
u_b, v_b, w_b :	Déplacements dû à la flexion.
u_s, v_s, w_s :	Déplacements dû au cisaillement.

$x, y, z :$	coordonnées cartésiennes.
$t :$	variable temps.
$\gamma_{yz}^s :$	Déformation transversal due au cisaillement.
$\Delta :$	Le vecteur propre.
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz},$	Champ des déformations.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} :$	
$\varepsilon^0 :$	Les déformations en membrane.
$\lambda, \mu :$	Les coefficients de Lamé.
$\nu(z) :$	Coefficient de Poisson suivant l'épaisseur.
$\rho(z) :$	La variation de la masse volumique le long de l'axe z.
$\rho_c :$	La masse volumique de la céramique.
$\rho_m :$	La masse volumique du métal.
$\rho_s :$	L'inertie axiale.
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz},$	Champ des contraintes.
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} :$	
$\phi_x :$	La rotation de la normale à la section transversale par rapport a l'axe y.
$\phi_y :$	La rotation de la normale à la section transversale par rapport a l'axe x.
$\Omega :$	La fréquence propre.
$\bar{\omega}, \bar{\omega} :$	Fréquence naturel non dimensionnelles.
CPT :	Théorie classique des plaques minces.
ESDPT :	Théorie exponentielle de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory).
FGM :	Functionally Graded Materials.
FSDPT :	Théorie de déformation de cisaillement du premier degré.
HSDPT :	Théorie hyperbolique de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory).
ISS :	Interaction Support Structure.
PRT :	Théorie raffiné des plaques (Refined Plate Theory).
PM :	Métallurgie des poudres (Powdered metallurgy).
SSDT :	Théorie sinusoïdal de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The sinusoidal shear deformation theory).

TABLE DES MATIERES

Résumé.

Remerciement.

Liste des illustrations, graphiques et tableaux.

Liste des symboles et des abréviations.

Table des matières.

Introduction.

Chapitre 1 : Les matériaux à gradient fonctionnel

1-1 Etude bibliographique.

1-2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.

1-3 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.

1-4 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels.

1-5 Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM.

1-5-1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.

1-5-2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.

1-5-3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.

1-5-4 D'autres propriétés matérielles des plaques FGM.

Chapitre 2 : Théorie générale des plaques et la formulation énergétique

2-1 Historique des plaques.

2-2 Définition d'une plaque.

2-3 Expressions générales du champ de déplacement.

2-3-1 Conditions de compatibilité et le champ de déplacement.

2-3-2 Schémas du premier degré.

2-4 Champ de déformation.

2-5 Champ des contraintes.

2-6 Matériaux anisotropes.

2-6-1 Matériau monoclinique.

2-6-2 Matériau orthotrope.

2-6-3 Matériaux isotropes.

2-7 Résultantes et moments.

- 2-7-1 Résultantes en membrane.
- 2-7-2 Résultante en cisaillement.
- 2-7-3 Moment de flexion et de torsion.
- 2-8 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré.
 - 2-8-1 La relation fondamentale de la dynamique.
 - 2-8-2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane.
 - 2-8-3 Relations fondamentales relatives aux résultantes de cisaillement.
 - 2-8-4 Relations fondamentales relatives aux moments.
- 2-9 Modélisation du support élastique (Winkler et Pasternak).
- 2-10 Formulation énergétique de la théorie des plaques.
 - 2-10-1 Energie de déformation.
 - 2-10-2 Travail des forces exercées sur la plaque.
 - 2-10-3 Energie cinétique d'une plaque.
 - 2-10-4 Fonction de Hamilton ou Hamiltonien.
- 2-11 Variation d'une fonctionnelle.

Chapitre 3 : Modélisation du comportement mécanique des plaques

- 3-1 Classement des théories de déformation en cisaillement.
- 3-2 Théorie classique des plaques minces(CPT).
 - 3-2-1 Hypothèses de la théorie classique des plaques.
 - 3-2-2 Champ de déplacement (Théorie classique des plaques (CPT)).
 - 3-2-3 Limitation de la théorie classique :
- 3-3 Théorie de déformation de cisaillement du premier degré (FSDPT).
- 3-4 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT).
 - 3-3-1 Champ de déplacement (HSDPT).
 - 3-3-2 La fonction forme de la théorie d'ordre supérieure.
- 3-4 Nouvelle théorie raffinée de déformations des plaques.

Chapitre 4 : Analyse du comportement mécanique des plaques

- 4-1 Présentation de la plaque.
- 4-2 Théorie raffinée de déformation de cisaillement à 4 inconnues.
- 4-3 Champ de déplacement, déformation et contrainte.
 - 4-3-1 Champ de déplacement.

- 4-3-2 Champ de déformation.
- 4-3-3 Contrainte.
- 4-4 Formulation énergétique de la théorie des plaques.
 - 4-4-1 Energie de déformation.
 - 4-4-2 Equation constitutive.
 - 4-4-3 Energie cinétique.
 - 4-4-4 Travail des forces exercées sur la plaque.
 - 4-4-5 Energie de fondation.
- 4-5 La variation des énergies.
 - 4-5-1 La variation d'énergie de déformation.
 - 4-5-2 Energie cinétique.
 - 4-5-3 Energie de déformation.
 - 4-5-4 Travail des forces exercées sur la plaque.
- 4-6 Application du principe de Hamilton.
- 4-7 Méthode de Navier pour le calcul des fréquences de la plaque FGM.
 - 4-7-1 Problème aux valeurs propres.

Chapitre 5 : Résultats et interprétations

- 5-1 Présentation de l'outil Maple.
- 5-2 Description du programme.
- 5-3 Organigramme de programme de calcul.
- 5-4 Validation du programme.
 - 5-4-1- Validation en comparaison avec d'autre théorie d'ordre différent.
 - 5-4-2-Comparaison avec des modèles d'ordre supérieur.
- 5-5 Etude paramétrique de la plaque P-FGM (Al/Al₂O₃).
 - 5-5-1 Influence de k_s et k_w sur les fréquences propres non dimensionnelle d'une plaque P-FGM.
 - 5-5-2 Influence du rapport d'épaisseur h/a sur les fréquences propres naturelles d'une plaque P-FGM.
 - 5-5-3 Influence de l'index p sur les fréquences propres d'une plaque P-FGM.

Conclusion générale.

Bibliographie.

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie.

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ou la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées.

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués qui présente une nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants et qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre.

Ce travail porte une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques FGM simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak. Cette analyse vibratoire est examinée par une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre élevé.

Deux objectifs seront visés à travers cette thèse. Le premier objectif principal de ce travail est de déterminer le comportement mécanique de la plaque FGM par un nouveau modèle analytique basé sur la théorie d'ordre supérieur pour déterminer les équations d'équilibre d'une plaque FGM épaisses et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles proposés dans la littérature. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues pour la théorie proposée est seulement quatre, tandis que les autres théories en comptent cinq ou plus. Cette théorie raffinée est variationnelle consistante, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et permet une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres supérieure et inférieure.

Le second objectif de cette thèse est l'étude de l'influence des différents paramètres caractérisant les matériaux FGM sur la réponse d'une plaque reposant sur un support élastique.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation suivante :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel, le premier chapitre sera consacré à une généralité et une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leur comparaison aux matériaux composites, ainsi qu'à leurs domaines d'application.

Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les théories des plaques. Dans le troisième chapitre, nous présentons une modélisation des plaques et le support élastique. Le chapitre quatre, quant à lui, sera consacré à la formulation d'un modèle analytique des plaques épaisses basé sur la théorie raffinée de déformation en cisaillement à quatre inconnues pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM. La formulation énergétique et variationnelle abouti ensuite à un système d'équation différentielle et présente le problème aux valeurs propres à partir de la méthode analytique de Navier. Les solutions du problème sont présentées dans le chapitre cinq passant par l'étude paramétrique d'une plaque P-FGM en vibration libre et par la résolution du problème aux valeurs propres. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à l'étude effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre

I

Les matériaux à gradient fonctionnel

Penser ne suffit pas : il faut penser à quelques choses.

Jules RENARD

LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

Introduction :

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe des matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [1] [2] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [3]. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux.

1-1 Etude bibliographique :

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette spatiale hypersonique. *Le problème principal à résoudre* étant le flux

de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un choc thermique (une température extérieure de 2000°K et une température intérieure de 1000°K dans moins de 10 mm d'épaisseur, la vitesse de vol de plus de 25 Mach, La température des gaz de combustion de la chambre de combustion peut être supérieure à 2000 ° k). Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

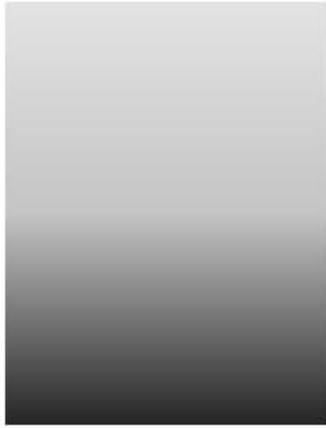
L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup des travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en ce concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des plaques en FGM.

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à l'étude des contraintes résiduelles, Le comportement thermomécanique (flambage), le comportement thermoélastique statique, en revanche peu d'études ont été dédiés aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à s'intéresser à leur comportement dynamique.

1-2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure 1-1) ou discrète (figure 1-2) à travers l'épaisseur [4]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques de la structure. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

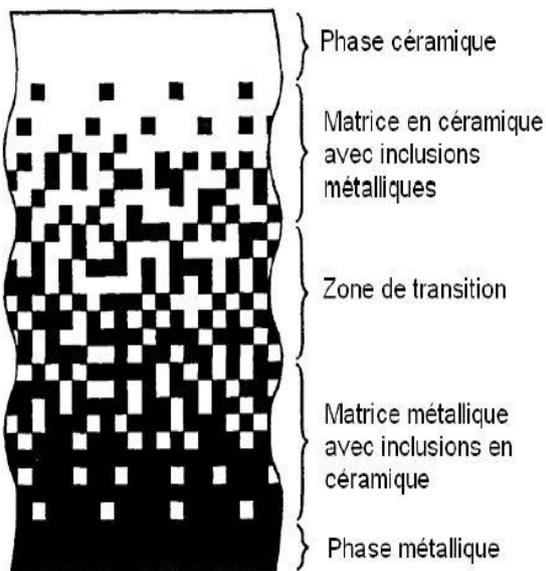


Fig(1-1) : Variation continue des propriétés

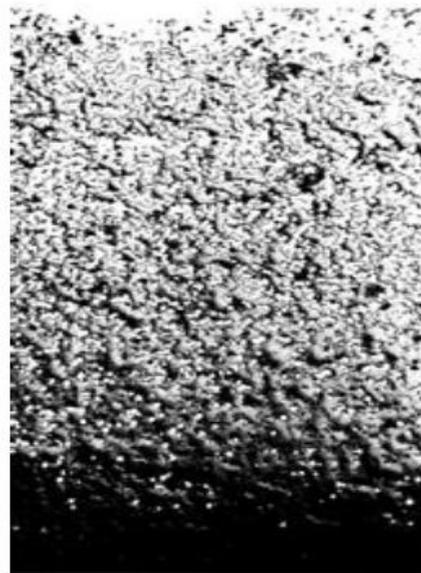


Fig(1-2) : Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (figures 1-3 et 1-4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



Fig(1-3) : Variation continue la microstructure (schématisée) [45]



Fig(1-4) : Variation continue la microstructure (photo) [45]

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- ✓ faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- ✓ haute température de fusion ou de décomposition ;
- ✓ haut module d'élasticité et haute dureté ;
- ✓ charge à la rupture élevée ;
- ✓ bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure) ;
- ✓ conservation des propriétés à haute température ;
- ✓ faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- ✓ faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- ✓ Bonne résistance mécanique ;
- ✓ Conductivité thermique élevée,
- ✓ Très bonne ténacité.

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [5] [6].

1-3 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Ils sont aussi applicables à la conversion d'énergie comme les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique, générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique et pile à combustible.

Les FGM sont également utilisés aux biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette, Les tissus vivants comme les os et les dents sont considérés comme des matériaux à gradient fonctionnel naturels. Cette technologie

est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables dans les composants des réacteurs nucléaires.

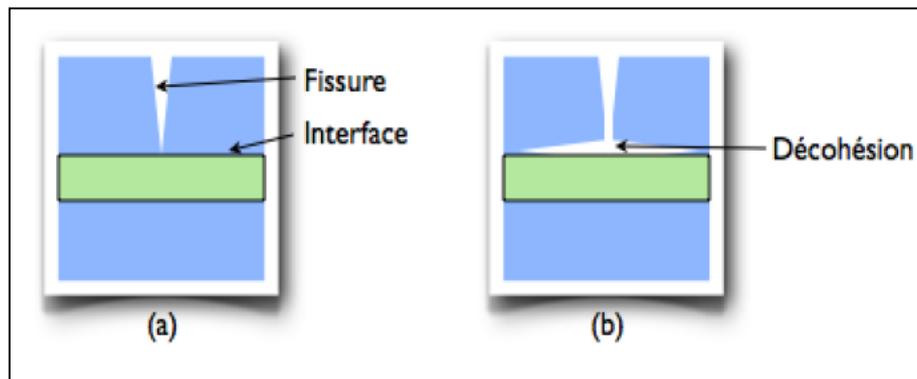
Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil [7].

1-4 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels :

Avec l'évolution technologique et les exigences de concurrence économique, les laboratoires de recherches ont poussé d'avantage leurs objectifs techniques, visant à satisfaire la demande en matière de performances et de qualité. Ces performances prescrites ne peuvent être atteintes avec des matériaux purs à cause des propriétés de ces derniers qui ne sont pas assez polyvalentes pour certaines utilisations. Pour résoudre ce problème, la combinaison d'un métal avec d'autres métaux ou non métaux en état de fusion est utilisée, c'est ce qu'on appelle alliage, ceci donne des propriétés différentes de celles des matériaux de base. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique [8], car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Ainsi qu'il est prohibitif de combiner deux matériaux par ce procédé avec un écart de température de fusion des composants. La métallurgie des poudres (powdered metallurgy PM) est une autre méthode de production d'une pièce qui ne peut être produite par alliage conventionnel, où l'alliage est produit sous forme de poudre à faire fritter. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [8]. Bien que ces limitations sont avantageuses à certaines applications (par exemple, filtre et applications non structurales) mais, elles sont préjudiciables à d'autres. Une autre méthode de production des matériaux avec combinaison de propriétés est celle de combinaison de matériaux à l'état solide, donnant des matériaux composites.

Les matériaux composites sont des matériaux constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux différents dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués d'une matrice et d'un renfort, souvent ce dernier est sous forme de fibres. Ainsi, il est possible d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau obtenu telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres.

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue ..., etc. [9]. En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure 1-5.a), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure 1-5.b). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. Les matériaux composites donc sont échoués dans des conditions extrêmes à travers le processus de délamination (séparation des fibres de la matrice) dû à la transition brutale de composition. Cela peut se produire par exemple, dans une application à haute température, où deux matériaux avec différents coefficients de dilatation thermique sont utilisés.



Fig(1-5) : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. *Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau* distingue, les F G M des

matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau (1-1) [10]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [11].

Tab (1-1) : caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [10].

	exemple	FGM	Non-FGM
propriétés	<p>— . . — Resistance mecanique</p> <p>— Conductivité thermique</p>	<p>Ciramiue Métal</p>	
structure	<p>Elément constituants :</p> <p>Ciramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>fibre ◆</p>		

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure (figure I-6). Le matériau *plan* (figure 1-6a) composé à une caractéristique plane, et le matériau *relié* (figure 1-6 b) a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

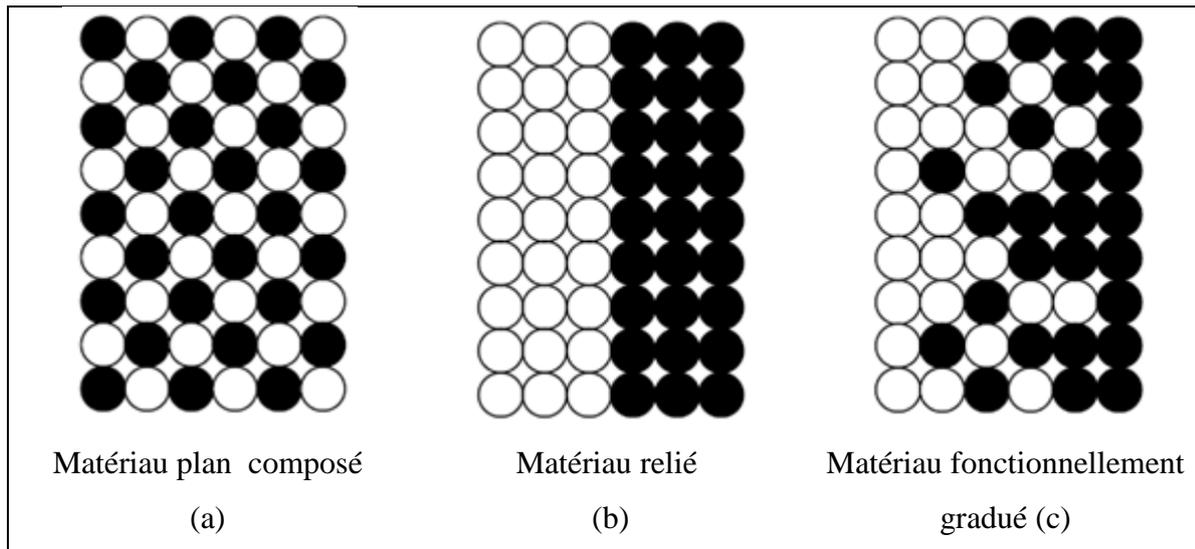


Fig (1-6) : la distribution des composantes des matériaux.

1-5 Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes, avec une transition idéalement continue de la composition de la structure, et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [12] :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1-1)$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_i : La propriété mécanique du constituant (i) ;

V_i : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1-2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (1-3)$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_m : La propriété mécanique du métal ;

P_c : La propriété mécanique de la céramique ;

V_m : La fraction volumique du métal ;

V_c : La fraction volumique de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (1-4)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

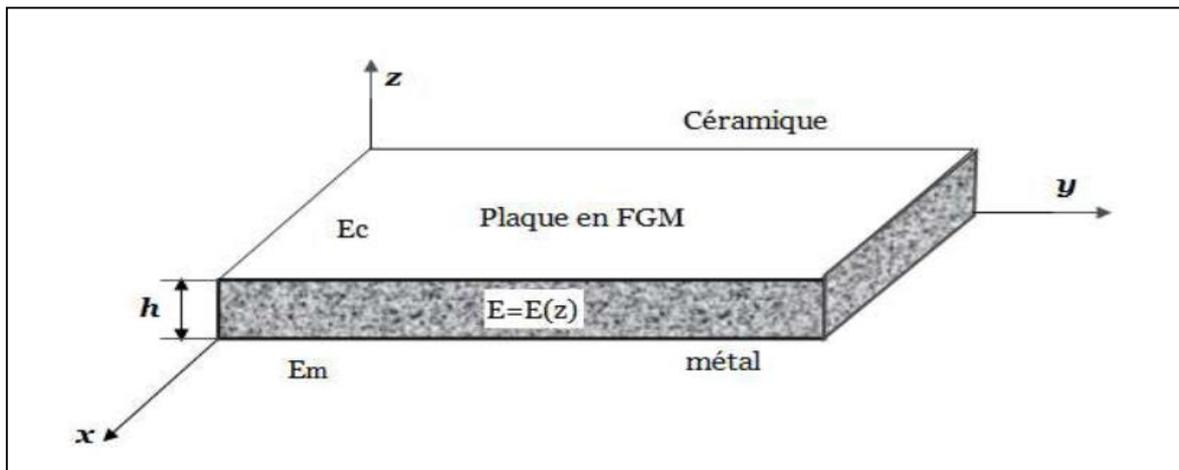


Fig (1-7) : géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

L'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la

plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

1-5-1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (1-5)$$

Où p est un paramètre matériels (paramètre de puissance) et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [13]:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad (1-6)$$

Où P_m et P_c sont respectivement les propriétés de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM.

$V(z)$ étant la fraction volumique du P-FGM définit par la relation (1-5).

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (1-8). Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

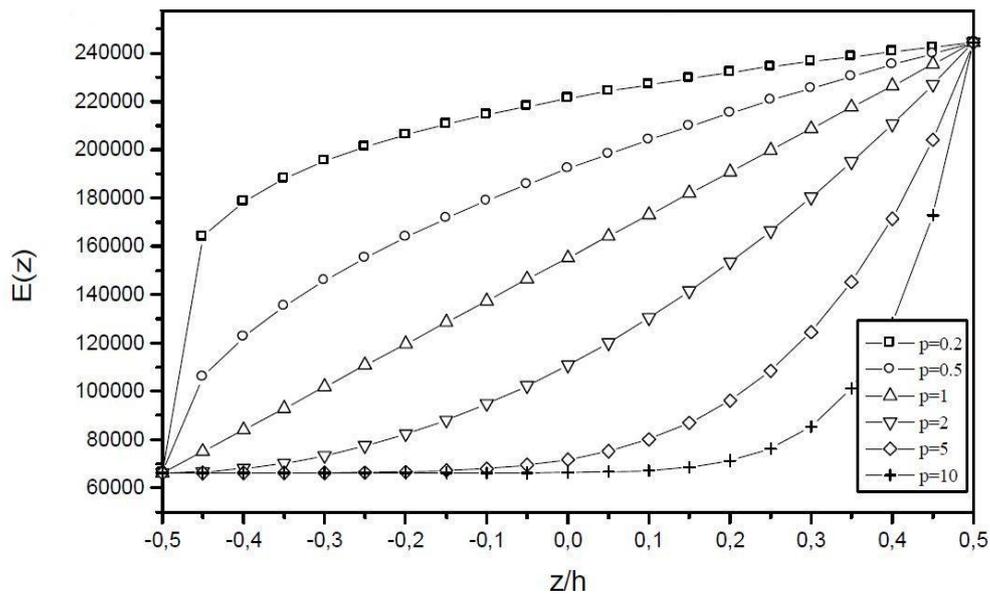


Fig (1-8): Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

On considérant la loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice c) et surface inférieure 100% métal (indice m)), les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1-7)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V(z) \quad (1-8)$$

$E(z)$: La variation du module de Young le long de l'axe z ;

E_m : Module de Yung du métal ;

E_c : Module de Young du la céramique ;

$\rho(z)$: La variation de la masse volumique le long de l'axe z ;

ρ_m : La masse volumique du métal ;

ρ_c : La masse volumique de la céramique.

Lorsque ($p = 1$), la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que lorsque ($p = 1/2$ ou 2), la composition change d'une manière quadratique ou parabolique.

Dans le cas par exemple d'un revêtement d'isolation thermique (barrière thermique), il est souhaitable d'avoir le maximum de céramique sur la surface exposé à de fortes températures pour améliorer l'isolation sans sacrifier les aspects mécanique des zones gradées. Pour répondre à ce besoin, un profil parabolique enrichi de la céramique est tout a fait adapté.

1-5-2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [14]:

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1-9a)$$

$$V'(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1-9b)$$

On utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + (1 - V(z))E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1-10a)$$

$$E(z) = V'(z)E_1 + (1 - V'(z))E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1-10b)$$

La figure (1-9) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1-9 a) et (1-9 b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

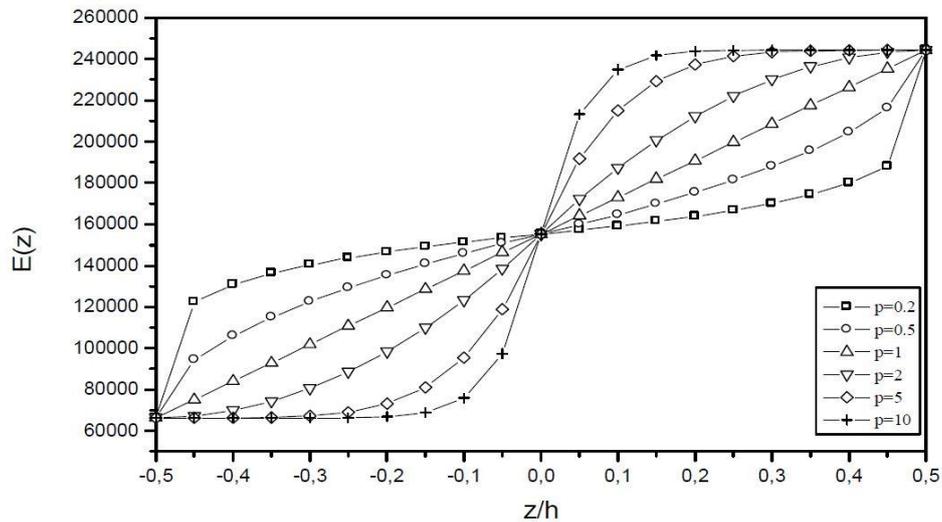


Fig (1-9) : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

1-5-3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [15] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (1-11)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (1-12)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (1-10).

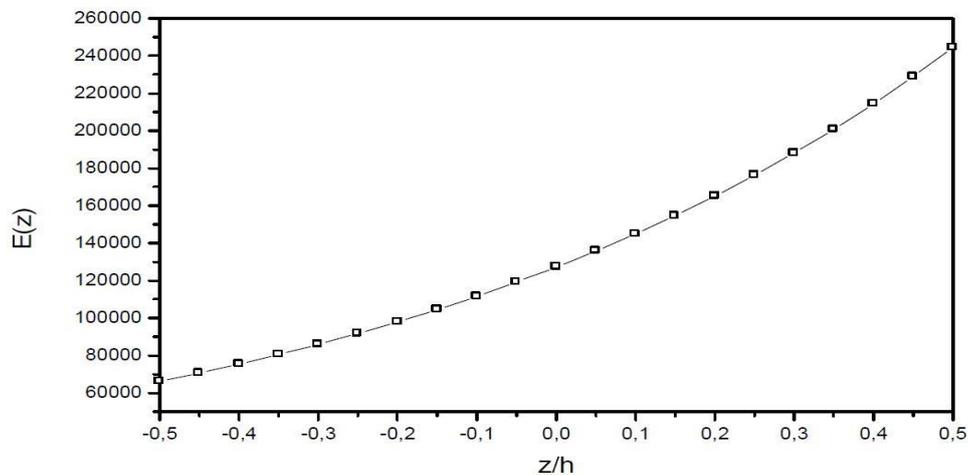


Fig (1-10) : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

1-5-4 D'autres propriétés matérielles des plaques FGMs :

Les lois de mélange P-FGM, S-FGM et E-FGM sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Plusieurs autres modèles permettant d'évaluer les propriétés globales de la structure existent.

Le modèle le plus utilisé est basé sur le schéma de Mori et Tanaka [16], ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Pour une distribution aléatoire de particules isotropes (indice 2) dans une matrice isotrope (indice 1) Les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$\frac{K-K_1}{K_2-K_1} = \frac{V_2}{1+V_1(K_2-K_1)/(K_1+\frac{4}{3}G_1)} \quad (1-13)$$

$$\frac{G-G_1}{G_2-G_1} = \frac{V_2}{1+V_1(G_2-G_1)/(G_1+f_1)} \quad (1-14)$$

$$f_1 + \frac{G_1(9K_1+8G_1)}{6(K_1+2G_1)} \quad (1-15)$$

Avec :

K : Module de compressibilité ;

V : Fraction volumique ;

G : Module de cisaillement.

Il y a aussi un autre modèle qui suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celle d'un composite (schéma auto-cohérent de Hill). Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement. Les modules élastiques sont donnés par :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{(K_1+(\frac{4}{3})G)} + \frac{V_2}{(K_2+(\frac{4}{3})G)}} - (4/3)G \quad (1-16)$$

Le module G est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{(K_1+(\frac{4}{3})G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2+(\frac{4}{3})G)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G-G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G-G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (1-17)$$

Pour les deux schémas précédent, le module de Young est calculé par :

$$E = 9KG/(3K + G) \quad (1-18)$$

La masse volumique est évaluée à partir de la loi de Voigt (1-3)

Il est bien connu que le modèle de Mori-Takana conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusion sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

Conclusion :

Ce chapitre nous a permis d'avoir un aperçu global sur les matériaux à gradient fonctionnel « FGM ». Nous avons vu l'histoire de leur développement, leurs définitions, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Les différentes lois de mélange ont été présentées et la variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes.

La connaissance de quelques éléments mécaniques des FGM est indispensable pour aborder par la suite le problème de vibration des plaques. En notant que l'effet thermique n'a pas été pris en considération, on considère que la plaque est plongée dans un champ de température constant. Dans le chapitre qui suit, nous allons mettre la loupe sur la théorie générale des plaques et la formulation énergétique.

Chapitre

II

Théorie générale des plaques et la formulation énergétique

Que me reste-t-il de ma vie ? Que me reste-t-il ? Que cela est étrange, il me reste que ce que j'ai donné aux autres.

Vahan TEKEYAN

Théorie générale des plaques et la formulation énergétique

Introduction :

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, ils sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle d'analyse:

- ✓ les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée;
- ✓ les plaques minces avec de grandes flèches (Karman);
- ✓ plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer et simplifier les éléments essentielles qui caractérisent le comportement mécanique des plaques, dans tout l'exposé qui suit nous adopterons les conventions et les notations suivantes : les coordonnées seront prises cartésiennes (x, y, z) , les composantes déplacements seront U, V et W ; les caractéristiques de la plaque : h l'épaisseur, ρ la masse volumique, E module de Young et ν le coefficient de Poisson.

2-1 Historique des plaques:

D'un point de vue historique, Euler fut l'un des premiers, en 1766, à formuler le premier modèle mathématique du problème représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration libre. Puis, le physicien allemand Chladni (1787) découvrit les premiers modes propres de vibrations d'une plaque carrée horizontale [17], C'est ensuite Lagrange qui développa (1811) la première équation différentielle correcte pour décrire les vibrations d'une plaque libre d'épaisseur constante, mais sans démonstration ni explication. Pour les mathématiciens, la détermination des fréquences naturelles fût une grande priorité. Sophie Germain a été récompensée en 1816 pour sa contribution au développement de l'équation de la plaque mince. Quelques temps après, Navier introduit la méthode pour calculer les modes et les fréquences propres d'une plaque pour certaines conditions aux frontières.

Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff [18] a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

Lord Rayleigh (1877) [19] ou encore Ritz (1909) [20], furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre. Cette procédure est appelée « Méthode de Rayleigh Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus utilisée dans l'analyse des structures en vibrations.

En 1921 Timoshenko montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement a pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres [21], [22]. Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love [23] (1944) qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaques épaisses [24].

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après-guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner (1945) [25]. Il propose une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Waburton [26] et Leissa [27] (1969) ont contribué d'après plusieurs travaux de recherches contemporaines à mieux appréhender le problème de vibration des plaques en tenant compte des différentes hypothèses pour la prédiction sensiblement exacte du comportement dynamique inhérent aux vibrations des plaques [28]. En 1973 Leissa [29], [30] proposa un catalogue élargi à différent cas d'hypothèse pour la solution des vibrations libres des plaques rectangulaires. En parallèle, Liew (1995) fournit une contribution effective pour les plaques épaisses [31].

2-2 Définition d'une plaque :

La plaque est un milieu continu d'une structure tridimensionnelle solide limitée par deux plans parallèles (les faces de la plaque). La surface moyenne située à mi-distance entre la peau inférieure et la peau supérieure de la plaque est connue sous le nom de la surface moyenne. La distance entre les faces est, l'épaisseur de la plaque (h).

Nous sélectionnons un système de coordonnées cartésiennes x, y, z . Les axes x et y sont placés dans le plan moyen de plaque et orientés le long des bords de la plaque, l'axe z est choisi perpendiculaire au plan moyen de la plaque c'est-à-dire normal au plan (x, y) . La plaque est sous un chargement latéral dans le plan (normal et cisaillement).

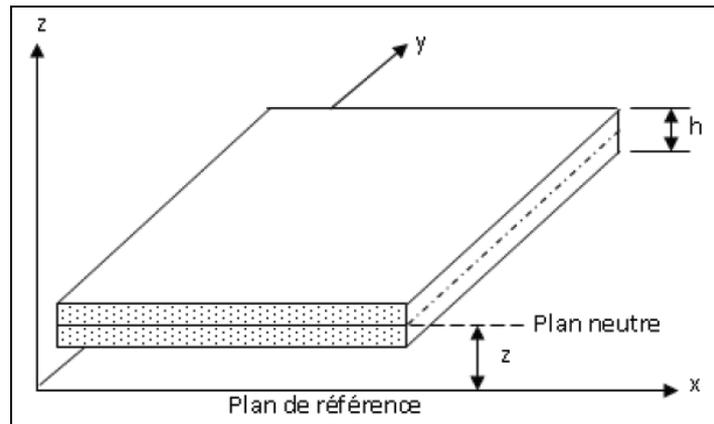


Fig 2-1 : modèle d'une plaque FGM.

La théorie des plaques est basée sur les hypothèses suivantes :

- ✓ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre ;
- ✓ Hypothèse de contrainte plane : dans la relation de comportement mécanique de la plaque, la contrainte normale dans la direction transversale σ_{zz} est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.
- ✓ L'hypothèse d'anisotropie plane de la plaque.

2-3 Expressions générales du champ de déplacement :

L'expression de déplacement en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynôme en z , généralement limité au degré trois, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ de déplacement est alors écrit sous la forme générale :

$$U(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\chi_x(x, y) \quad (2-1a)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\chi_y(x, y) \quad (2-1b)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y, 0) + z\psi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y) + z^3\chi_z(x, y) \quad (2-1c)$$

Cette forme du champ de déplacement répond aux conditions de compatibilité des déformations (2-3), et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas d'un problème de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans la relation (2-1).

Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (2-1), en série de la variable z à coefficients en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$.

Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par :

$$u(x, y) = u(x, y, 0) \quad (2-2a)$$

$$v(x, y) = v(x, y, 0) \quad (2-2b)$$

$$w(x, y) = w(x, y, 0) \quad (2-2c)$$

2-3-1 Conditions de compatibilité:

La condition de compatibilité des déformations exige que [32] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2-3)$$

2-3-2 Schémas du premier degré :

Les schémas les plus simples et les plus utilisées (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchoff) se réduit à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\psi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\psi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2-4)$$

Les schémas du premier degré permettent de résoudre la plupart des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer au 2^e degré, voire au 3^e degré.

2-4 Champ de déformation :

Le champ des déformations se déduit de l'équation (2-1) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} = \psi_z + 2z\varphi_z \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2-5) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\varphi_x \right) + z^2 \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + 3\phi_x \right) \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}$$

2-5 Champ des contraintes :

L'état des contraintes en un point $M(x,y,z)$ d'un solide soumis à un chargement mécanique (figure 2-2) permet de caractériser les actions mécaniques exercées sur la matière en ce point.

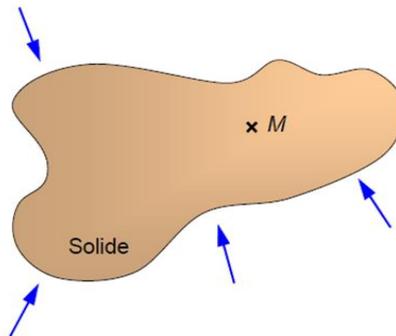


Fig (2-2) : solide soumis à un chargement solide.

Le champ de contraintes au point M d'un solide est un tenseur symétrique noté $\sigma(M)$

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_R$$

Comme $\sigma(M)$ est symétrique, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout $i \neq j$.

2-5-1 Illustration des contraintes dans un cube élémentaire :

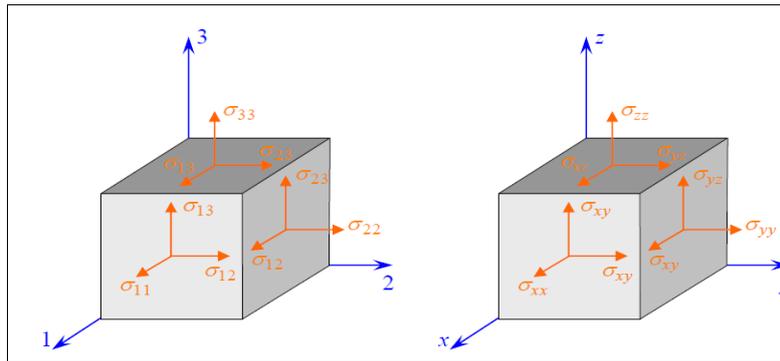


Fig (2-3) : Représentation des contraintes sur les faces d'un cube élémentaire.

L'état des contraintes en un point M de stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations, le champ de contrainte rapportée aux axes de référence $(Oxyz)$ s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = C_{ij} \varepsilon \quad (2.7)$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOK généralisée, introduit la matrice de rigidité C_{ij} , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

La relation d'élasticité (2-7) peut être écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\varepsilon = S_{ij} \sigma \quad (2-8)$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice S_{ij} est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelée constantes de flexibilité ou constantes de souplesse.

2-6 Matériaux anisotropes :

Dans le cas le plus générale, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibre ou tissu, etc. les propriétés de symétries géométrique réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré [32].

2-6-1 Matériau monoclinique :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un *changement de base effectué par symétrie par rapport a ce plan ne modifie pas la matrice*. Dans le cas ou le plan de symétrie est le plan (x, y) l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

2-6-2 Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétries, perpendiculaires deux a deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent.

L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport a ce deuxième plan conduit a une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

La matrice de souplesse a la meme forme, le nombre de constantes d'élasticités indépendantes est ramené a 9.

2-6-3 Matériaux isotropes :

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité(ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$C_{11}=C_{22} \quad C_{23}=C_{12} \quad C_{66}=1/2 (C_{11}+ C_{22}) \quad (2-12)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit a 2, et conduit a la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{12} - C_{12}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} - C_{12}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} - C_{12}/2 \end{bmatrix} \quad (2-13a)$$

Généralement. Les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ [32] :

$$C_{12}=\lambda \text{ et } 1/2 (C_{11}- C_{12}) = \mu$$

D'où :

$$C_{11}=\lambda+ 2 \mu \quad (2-13b)$$

$$\lambda = E\nu / (1 + \nu) (1 - 2 \nu) \quad (2-13b)$$

$$\mu = E / 2 (1 + \nu) \quad (2-13b)$$

2-7 Résultantes et moments :

2-7-1 Résultantes en membrane:

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(M) dz \quad (2-14)$$

Où $\sigma(M)$ est la matrice des contraintes en membrane $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$.

Soit :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_R = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2-15)$$

N_x, N_y, N_{xy} Sont les résultantes, par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la (figure 2-4).

2-7-2 Résultante en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2-16)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur de la plaque (figure 2-4).

2-7-3 Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2-17)$$

M_x et M_y Sont les moments de flexion, et M_{xy} les moments de torsion.

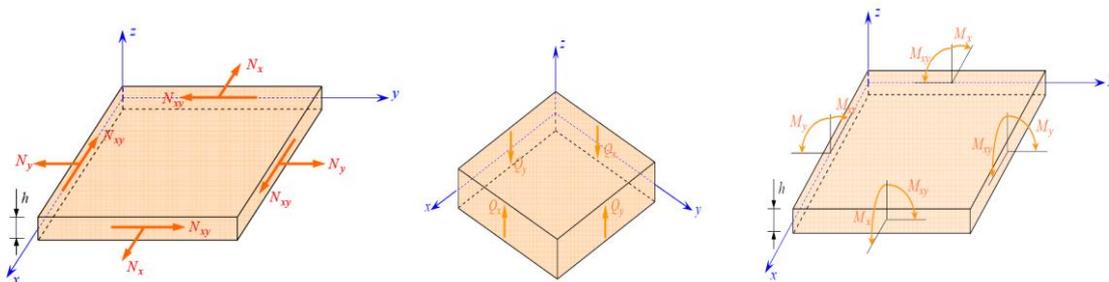


Fig (2-4) : Schématisation des résultantes en membrane et en cisaillement des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion.

2-8 Relation fondamentales dans le cas d'un schéma de premier degré :

2-8-1 La relation fondamentale de la dynamique [33]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + \mathcal{F}_x &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \mathcal{F}_y &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \mathcal{F}_z &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-18)$$

$(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)$ sont les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, champ magnétique...)

$(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2})$ sont les composantes du vecteur accélération du point M .

ρ est la masse volumique en un point M .

En introduisant les relations (2-15), (2-16), (2-17) et (2-6) dans la relation (2-18), la relation fondamentale pour un stratifié s'écrit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2-20)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2-23)$$

Les grandeurs ρ_s, R, I_{xy} sont des inerties axiale, de couplage et de rotation respectivement, elles sont déterminés pour les plaques de masse volumique (ρ) par :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (2-24)$$

2-8-2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-26)$$

2-8-3 Relations fondamentales relatives aux résultantes de cisaillement :

$$F_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2-27)$$

2-8-4 Relations fondamentales relatives aux moments :

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\ & F_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ & (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\ & F_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-29)$$

Les équations précédentes ne prennent pas en compte les force volumiques, les contraintes de cisaillement sur les faces du stratifié, et négligent les effets d'inertie en rotation. Ces équations associées aux conditions imposées sur les frontières de la structure, permettent de trouver en principe les déplacements. La résolution de ces équations est toutefois complexe et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particuliers.

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, H_{ij}$ et F_{ij} sont les constantes de la matrice rigidité.

2-9 Modélisation du support élastique (Winkler et Pasternak):

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant au domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au support élastique, et l'ensemble structure et support doivent agir ensemble pour supporter les charges. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'interaction support-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques. Le terme générique désignant l'étude de ces phénomènes porte le nom d'*Interaction Support Structure* (ISS). Le terme interaction est très important puisqu'il met bien en évidence le fait que non seulement la nature du support a une influence sur le comportement de la structure, mais aussi la structure a une influence sur le comportement du support qui peut modifier ainsi les composantes de la sollicitation selon le modèle adopté.

En construction aéronautique et aérospatiale, tout équipement (moteur, modules électroniques, etc.) n'est pas attaché/fixé directement à la structure, mais par l'intermédiaire d'un support élastique (plaque, poutre, tige, ressort, support d'amortissement, etc.). Ce dernier doit être conçu de telle manière à ce que les vibrations propres (dues au fonctionnement de l'élément) ne soient pas transmises à la structure sans amortissement. Donc partant de là, on comprend bien que l'étude de l'interaction support-structure doit être menée soigneusement afin de déterminer le comportement statique et dynamique de tels assemblages.

Les plaques posées sur fondations élastiques ont été largement étudiées pour modéliser divers problèmes constructifs et modéliser divers problèmes d'ingénierie pendant les dernières décennies. Pour décrire les interactions entre la plaque et la fondation, les scientifiques ont proposé divers modèles de base. Le modèle le plus simple concernant la base élastique est le modèle de *Winkler* établi en 1867 (modèle à un seul paramètre k_w). Dans ce modèle, le rapport entre la pression externe p et la déflexion w de la surface de base est exprimé par:

$$p = k_w w \quad (2-30)$$

Où w le déplacement vertical du sol qui est proportionnel à la pression de contact p . La constante de proportionnalité k_w s'appelle le module de la réaction de sol.

Dans le modèle linéaire de *Winkler*, on suppose que le support de base se compose de ressorts élastiques qui sont étroitement alignés et indépendants les uns des autres avec une rigidité k_w commune (c'est une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux). Le déplacement de la plaque est indépendant du déplacement du sol en dehors de la région chargée. Le modèle de *Winkler* implique deux problèmes majeurs. Le premier problème est que le déplacement de la plaque est une constante quand il est soumis à une charge uniformément distribuée q . Il n'y a aucun moment de flexion ou force de cisaillement dans la plaque pendant cette condition de charge, qui est complètement peu réaliste et non conservative. Le deuxième problème est que la valeur de k_w n'est pas unique et dépend des diverses propriétés de la plaque et du support ainsi que du chargement.

Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (1954) qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de *Winkler* en présentant un nouveau paramètre dépendant (modèle à deux paramètres). Ce deuxième paramètre (modèle de Pasternak) prend en compte l'effet de l'interaction entre les points de cisaillement dans la fondation. Dès lors, le modèle de

Pasternak a été largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions plaques-structures.

Plusieurs recherches ont été menées en vue de l'étude du comportement thermomécanique des FGM. Cependant, les recherches sur les vibrations libres des FGM sont tout à fait limitées, particulièrement concernant les effets d'interaction avec la base élastique. En 1999 Cheng a proposé une analogie de membrane pour obtenir des valeurs propres explicites et exactes pour la vibration des plaques FGM sur une base de *Winkler-Pasternak* basée sur la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement. Récemment *Malekzadeh* (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses en FGM sur bases d'élastiques avec deux paramètres. Les formulations sont basées sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité. Le but de ce travail est d'analyser la vibration libre des plaques en FGM reposant sur une base de *Winkler-Pasternak* en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement des plaques.

La relation entre la flèche et la réaction de la fondation est exprimée par :

$$f_e = k_x w - k_s \nabla^2 w \quad (2-31)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Si la fondation est modélisée par le modèle linéaire de Winkler, le coefficient k_s dans l'équation (2-31) est identiquement nul.

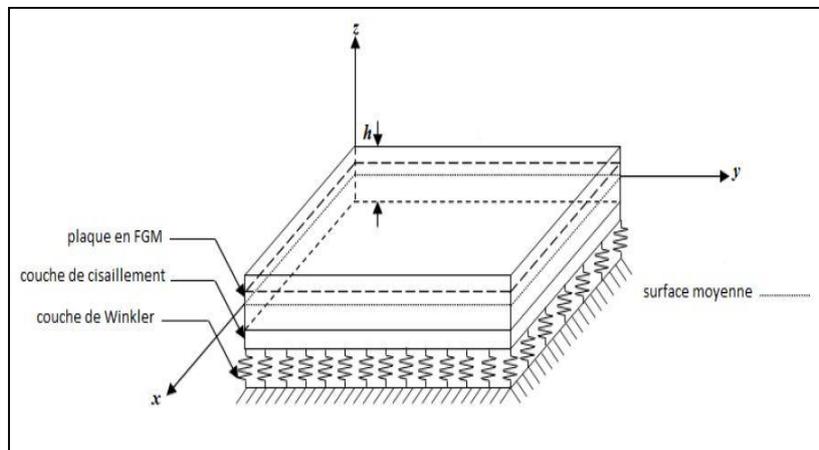


Fig (2-5) : plaque reposant sur une fondation élastique.

2-10 Formulation énergétique de la théorie des plaques :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des plaques. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet de développer des méthodes de recherche des solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés.

2-10-1 Energie de déformation :

L'énergie totale de déformation d'un solide élastique en coordonnées cartésiennes est donnée par [34] :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx dy dz \quad (2-32)$$

Sous la forme développée :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2-33)$$

2-10-2 Travail des forces exercées sur la plaque :

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure du stratifié. La variation du travail de ces actions s'écrit [35], [36]:

$$\delta W_p = \iint \left[\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \delta w_0 dx dy \quad (2-34)$$

En introduisant les contraintes q , nous avons :

$$W_p = \iint q w_0 dx dy \quad (2-35)$$

2-10-3 Energie cinétique d'une plaque :

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (2-36)$$

2-10-4 Fonction de Hamilton ou Hamiltonien :

Pour résoudre des problèmes de mécanique, on utilise des principes variationnels faisant intervenir la fonction de Hamilton, que l'on désigne le plus souvent sous le terme de « Hamiltonien ». Pour arriver à comprendre le sens de cette fonction, considérons un problème dépendre du temps t et qui admet le Lagrangien [37], [38] :

$$\mathcal{L} = (U_d + U_f - W_p - E_c) \quad (2-37)$$

U_d :Energie de déformation de la plaque ;

U_f :Energie de déformation du support élastique ;

W_p : Travail des forces exercées sur la plaque ;

E_c : Energie cinétique.

Considérons le mouvement de notre système matériel entre les instants t_0 et t_1 , le point figuratif q de coordonnées q_i décrit un arc de courbe A_1, A_2 de l'espace de configuration.

Considérons maintenant l'intégrale d'action, $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \partial t$, que l'on nome action Hamiltonienne.

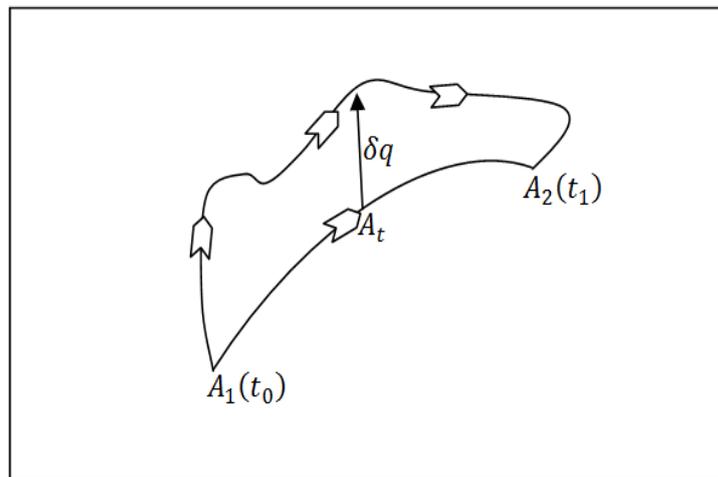


Fig (2-6) : Trajectoire réelle et virtuelle [37].

Imaginons un autre parcours pour q entre A_1 et A_2 voisin du parcours vrai, et définie par la variation virtuelle δq . Le principe de Hamilton : un système se meut d'une configuration à une autre de telle façon que la première variation d'action entre trajectoire virtuelle infiniment voisine ayant les même extrémités dans l'espace et dans le temps soit nulle.

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad (2-38)$$

Ce principe peut être utilisé pour trouver l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites pour un état de contrainte et de déformations donné. Pour l'appliquer, il est nécessaire de déterminer la variation de chaque terme d'énergie.

2-11 Variation d'une fonctionnelle :

D'une manière générale, une fonctionnelle F peut être définie comme étant une fonction d'un ensemble de fonction : $u(x, y, \dots)$, $v(x, y, \dots)$, et de leurs dérivées par rapport à l'ensemble des variables (x, y, \dots) , soit :

$$F = F \left(u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots, v, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \dots \right) \quad (2-39)$$

La premier variation de F est définie par :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-40)$$

Ou:

$\delta u, \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \dots, \delta v, \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \dots$ sont des variations quelconques des fonctions ; $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots, v, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \dots$

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial u}$ est obtenue par derivation formelle de F par rapport à la variable u.

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}$ est obtenue par derivation formelle de F par rapport à la variable $\frac{\partial u}{\partial x}$. Il en est de même des autres dérivées. L'opérateur δ a les propriétés de l'opérateur variation ∂ usuel.

Conclusion :

Les éléments développés dans ce chapitre sont applicables à la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'une plaque. Dans le cas ou le problème d'élasticité peut être ramené à un problème d'élasticité à deux dimensions, les relations établies précédemment dans le cas générale se simplifient.

Nous étudions dans le chapitre suivant, les différentes théories utiles pour étudier le comportement mécanique d'une plaque.

Modélisation du comportement mécanique des plaques

La science sans conscience n'est que ruine de l'âme.

Jean Stiwarte

Modélisation du comportement mécanique des plaques

Introduction :

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

3-1 Classement des théories de déformation en cisaillement :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories: théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaque semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-

Reissner), théorie d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D).

3-2 Théorie classique des plaques minces (CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

3-2-1 Hypothèses de la théorie classique des plaques:

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisant à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivants :

- ✓ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen.
- ✓ Hypothèse dite de section droite (section plane) figure (3-1): Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformations. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- ✓ Les termes non linéaires du déplacement U et V sont négligés, et l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal W est considéré.

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure (3-1).

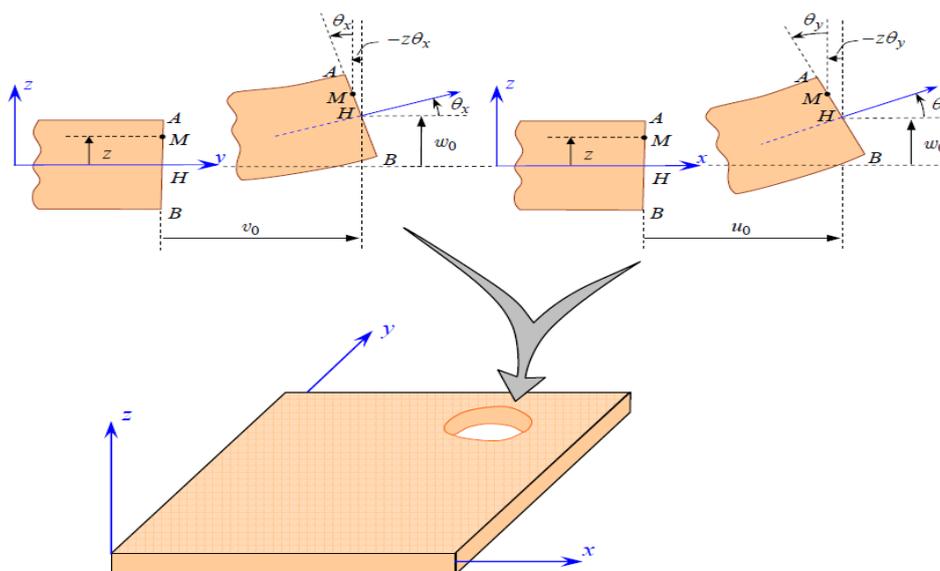


Figure (3-1) : Schématisation des déformations dans la théorie classique des plaques.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

3-2-2 Champ de déplacement (Théorie classique des plaques (CPT)) :

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques ». Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t s'écrit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

Où u, v, w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (figure 3-1) ; ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques épaisses.

3-2-3 Limitation de la théorie classique :

La théorie classique des plaques basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformation dans les plaques peu épaisses. Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse.

3-3 Théorie de déformation de cisaillement du premier degré (FSDPT) :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (i.e. elle n'est plus très petite devant les dimensions des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (théorie des plaques moyennement épaisses).

En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de Timoshenko montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres.

Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié 3 ans plus tard qui fera date.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformations figure (3-2), d'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Etant donné que la théorie des plaques de premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de facteur correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

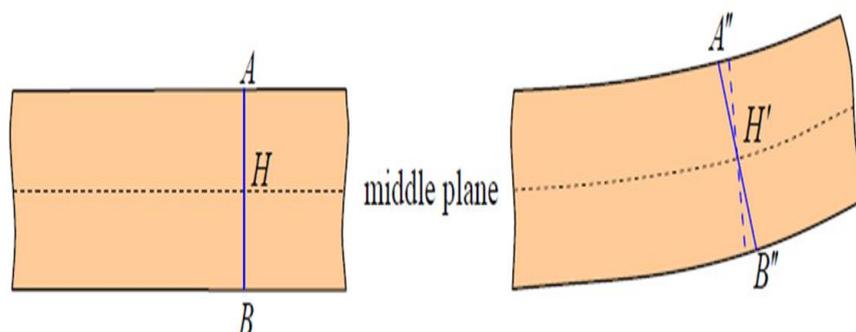


Fig (3-2) : Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).

3-3-1 Champ de déplacement :

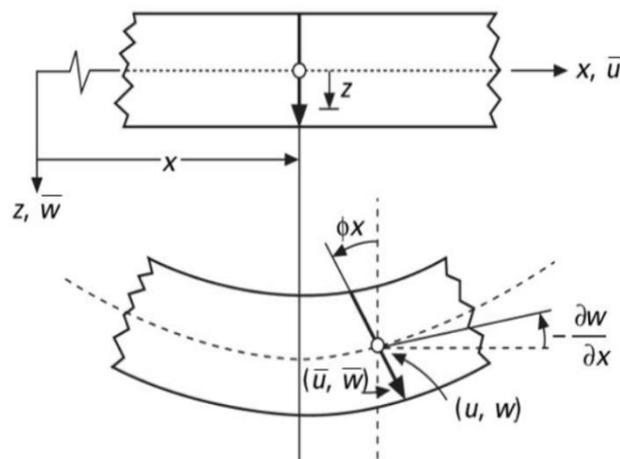
Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter les déformations en cisaillement transverses dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements (voir figure (3-3)) est alors le suivant :

$$\begin{aligned}U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\W(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (3-2)$$

Ou u, v, w sont les déplacements le long des coordonnées (x, y, z) d'un point du plan moyen (plan $z=0$) (déplacement en membrane); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normales à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.



Fig(3-3) : Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre.

3-4 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT):

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff. Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par plusieurs chercheurs. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur. Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont :

- ✓ Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- ✓ Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformations.
- ✓ La déformation axiale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.
- ✓ Les contraintes normale dans la direction transversale n'est en générale pas négligeables.

De nouvelles formulations et théorie d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années. Carrera a proposé une formulation compacte et unifiée des théories d'ordre supérieur [39] [40]. Cependant, les théories du premier ordre (FSDPT) et d'ordre supérieur (HSDPT) ne sont pas pratiques vu le nombre de termes d'ordre supérieur introduits dans la formulation. Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, Shimpi a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (Refined Plate Theory -RPT). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement. La théorie RPT a été ensuite adaptée avec succès aux plaques orthotropes. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim et Thai [42] pour le cas de flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim [43], ont adapté la méthode RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

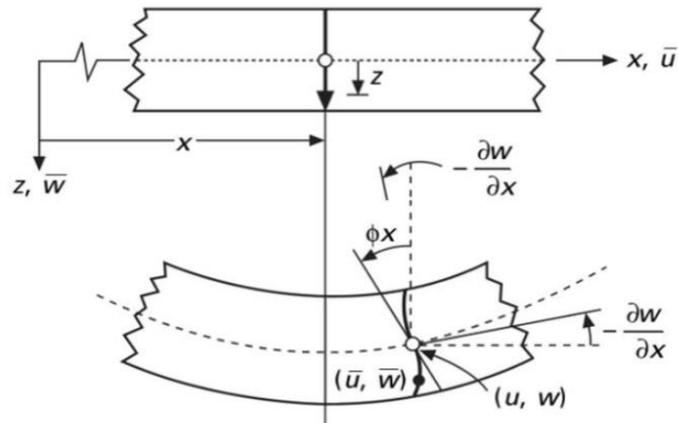


Figure (3-4) : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.

3-3-1 Champ de déplacement (HSDPT) :

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2eme ordre, 3eme ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en séries. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

3-3-1-1 Théories des plaques du second ordre:

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\
 W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t)
 \end{aligned} \quad (3-5)$$

Où : $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ sont des fonction inconnues dependant des coordonnées x et y et du temps t .

Cette théorie apporte une amelioration substantielle par rapport à la théorie du premier ordre tout en nécessitant un facteur de correction comme pour la FSDPT.

3-3-1-2 Théories des plaques du troisième ordre :

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont vu le jour. Le champ des déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\chi_x(x, y, t) \\V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\chi_y(x, y, t) \\W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) + z^3\chi_z(x, y, t)\end{aligned}\quad (3-6)$$

Ou : $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z$ sont des fonction inconnues dependant des coordonnées x et y et du temps t .

3-3-2 La fonction de forme de la théorie d'ordre supérieure :

Pour le cas des théories raffinées basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contraintes nulles sur les faces inferieure et supérieur de la plaque, le champ de déplacement d'un point matériel situé aux coordonnées (x, y, z) dans la plaque s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}U(x, y, z) &= u(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \\V(x, y, z) &= v(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, t) \\W(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\quad (3-7)$$

$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ sont les déplacements dans les directions x, y, z .

u, v, w sont les déplacements du plan médian (plan $z = 0$).

$$\phi_x = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial y}\quad (3-8 a)$$

$$\phi_y = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\quad (3-8 b)$$

ϕ_x, ϕ_y sont les rotations des plans yz et xz .

$F(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $f(z)=0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $f(z)=z$. En plus, Le champs de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)\quad (3-9)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier a proposé le modèle sinusoidal (The sinusoidal shear deformation theory -SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3-10)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory -ESDPT) développée par Karama en 2003 est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (3-11)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The Hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane en 2010 est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)-1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh(\pi/2)-1} \quad (3-12)$$

La théorie dominante, utilisée dans les études de flexion, de flambage et de vibrations des plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy. Le champ des déplacements de Reddy est le suivant :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left[\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left[\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Le champ des déplacements inclut une variation parabolique des déformations en cisaillement transversal et des contraintes qui leurs sont associées. Les contraintes de cisaillement s'annulent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Cette théorie ne nécessite donc pas de facteur de correction des contraintes puisqu'elle fournit une distribution plus réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur. Elle fournit également de meilleures précisions par rapport aux théories précédentes quant à la réponse globale des plaques minces et des plaques épaisses et une meilleure estimation des déflexions moyennes, des charges critiques de flambage, des fréquences de vibration et de leurs modes propres associés.

D'autres théories raffinées ont vu le jour plus récemment. Leur champ de déplacements sous la forme unifiée s'écrit suivant la formule (3-7) ou la fonction $f(z)$ est la fonction de la forme pilotant la distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est propre à chaque théorie. Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tabl (3-1): Différentes fonction de forme des théories des plaques isotropes et FGM :

Théorie	Intitulé	Fonction de forme $\varphi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction	Validité
CPT Kirchhoff	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaque mince
FSDPT Mindlin	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambarts-umian	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5z}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT Touratier	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

ESDPT Karama	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Levinson Reddy Murthy	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha^{\frac{z/h}{\ln(\alpha)}}, \quad \alpha > 0$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche Tounsi	Théorie raffiné des plaques	$\frac{\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Atmane Tounsi	Théorie raffiné des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{\cos(\pi/2) - 1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi (*)	Théorie raffiné des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

(*) Pour ce modèle, le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 W(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{3-14}$$

3-4 Nouvelle théorie raffinée de déformations des plaques [45]:

Dans la présente thèse, nous citons une nouvelle théorie de déformations d'ordre supérieur développée par Mahi (2012) et dont le paramétrage permet l'adaptation aux différents problèmes structuraux. Les conditions aux limites sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sont rigoureusement satisfaites. Aucune restriction n'est portée sur l'épaisseur de la plaque, ce qui permet une étude des poutres, plaques et coques minces et épaisses. La théorie de déformations d'ordre supérieur de Reddy est un cas particulier de cette nouvelle théorie. Cette dernière permet aussi d'approcher la théorie de déformation trigonométrique de Touratier et la théorie de déformation exponentielle de Karama avec une très bonne précision.

Elle est basée sur un développement en série d'ordre impair de la coordonnée z , limitée au degré 5. Le nombre de variables est identique à celui de la théorie de Reddy.

Le champ de déplacements s'écrit sous la forme (3-7) avec une nouvelle fonction de forme :

$$f(z) = \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \beta \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \quad (3-15)$$

Où : α et β sont les paramètres de la nouvelle théorie, définis par :

$$\beta = \frac{4}{5}(3\alpha - 4) ; 0 \leq \alpha \leq 2 \quad (3-16)$$

A partir des équations (3-7), nous dérivons le champ des déformations suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5}(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5}(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5}(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ \gamma_{xz} &= \left[1 - 3\alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left[1 - 3\alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3-17)$$

Les hypothèses sur lesquelles est basée la présente théorie sont les mêmes que celles de la formulation de Reddy. De plus, la fonction de forme est telle que les conditions suivantes sont rigoureusement satisfaites.

Les hypothèses sur lesquelles est basée la présente théorie sont les suivantes:

- Les contraintes de cisaillements σ_{xz} et σ_{yz} sont nulles au niveau des surfaces supérieure et inférieure, ce qui est vérifié par : $\frac{df(z)}{dz} \Big|_{z=\pm h/2} = 0$; figure (3-6).
- Le profil des contraintes du cisaillement transverse à travers l'épaisseur est parabolique figure (3-6).
- La déformation en cisaillement est maximale au niveau du plan moyen ($z = 0$), ce qui est vérifié par : $\frac{df(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 1$; figure (3-6).
- La fonction de forme $\varphi(z)$ et sa dérivée première sont continues à travers l'épaisseur (voir figures (3-5) et (3-6)). Ceci permet d'avoir une continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement le long de l'axe z .

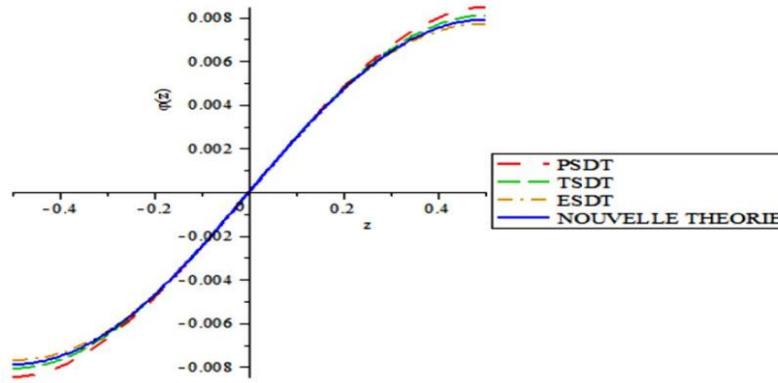


Fig (3-5) : profil de variation de $\varphi(z)$ a travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).

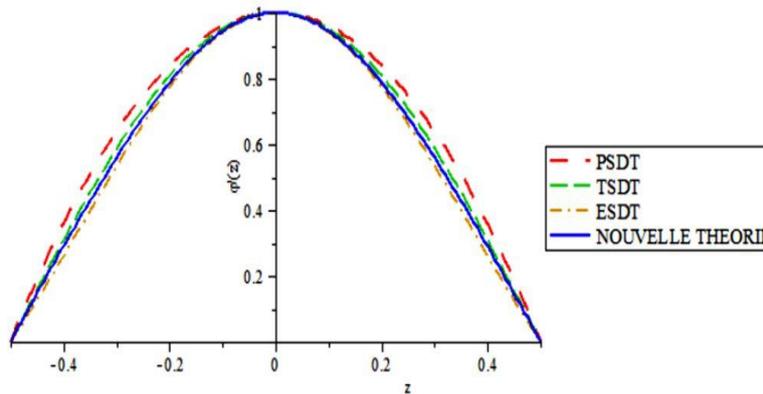


Fig (3-6) : profil de variation de $d\varphi(z)/dz$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).

Comme nous l'avons souligné plus haut, le paramètre α permet d'adapter la fonction de forme au problème étudié. Les valeurs particulières de α sont les suivantes :

- $\alpha = 4/3$ permet de retrouver exactement la fonction de forme de la théorie de Reddy ;
- $\alpha = \pi^2/6$ permet d'approcher la théorie de Touratier (TSDPT) avec une bonne précision.
- $\alpha = 2$ permet d'approcher la théorie de Karama (ESDPT) avec une bonne précision.

Conclusion :

La théorie classique des plaques, basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et la théorie du premier ordre permettent de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations dans les plaques peu épaisses. Par contre dans le cas des plaques épaisses ces théories deviennent assez mal adaptées à décrire le comportement mécanique (flèche de la plaque, répartition des contraintes, etc.)

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de la théorie raffinée d'ordre supérieur pour l'étude de la déformation et la vibration libre d'une plaque FGM avec ou sans la présence de fondations élastiques.

Chapitre

IV

Analyse du comportement mécanique des plaques

La pensée n'est qu'un éclair dans la nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.

Henri POINCARÉ

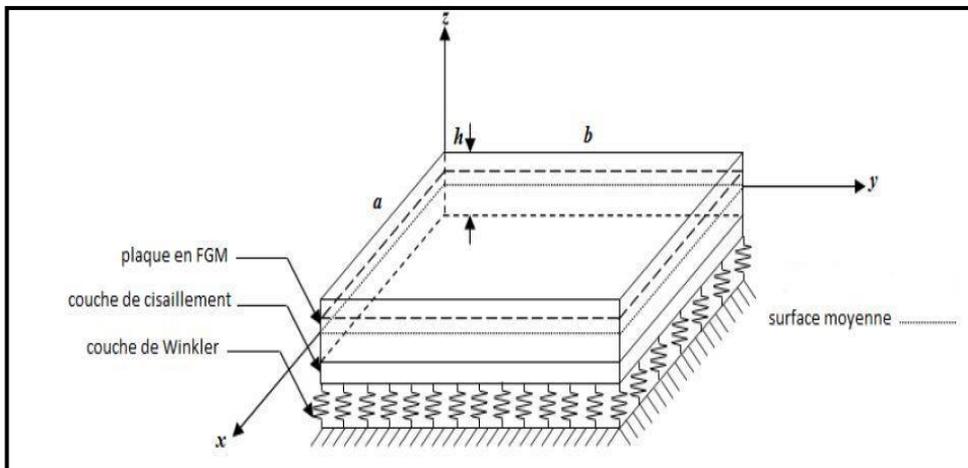
Analyse du comportement mécanique des plaques

Introduction :

Le but de ce chapitre est de trouver les relations fondamentales du comportement mécanique des plaques FGM soumises à des charges extérieures transversales, de les écrire sous une forme unifiée et de les résoudre. Après avoir déterminé l'énergie de déformation de la plaque, l'énergie cinétique et l'énergie de déformation du support élastique, Ces énergies sont utilisés dans la formulation variationnelle pour aboutir ensuite à un système d'équations différentielles. La théorie de déformation utilise dans ce chapitre est la théorie raffiné à quatre inconnues. Le problème aux valeurs propres sera établi à partir de la méthode de Navier présentée afin d'aboutir au calcul des fréquences de la plaque FGM.

4-1 Présentation de la plaque :

Considérons une plaque rectangulaire en FGM d'une longueur a , largeur b , et d'épaisseur h Figure (4-1). On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_w et une rigidité de cisaillement de k_s . On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire.



Fig(4-1) :Plaque FGM reposant sur une fondation élastique.

Le module de Young E varie selon une distribution de puissance en termes de fractions volumique des constituants suivant l'épaisseur. La plaque FGM est soumise à une charge transversale $q(x,y)$. La plaque considérée est appuyée au niveau des frontières $x = 0, a$ et $y = 0, b$. z représente la coordonnée suivant l'épaisseur mesurée à partir de la surface moyenne.

La relation fonctionnelle entre E et z pour une plaque FGM (céramique-métal) est donnée comme suit :

$$E(z) = E_m + E_{cm}V_f \quad (4-1)$$

$$E_{cm} = E_c - E_m \quad (4-2)$$

$$V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad (4-3)$$

Avec :

E_c et E_m : sont Les modules de Young de la céramique et du métal respectivement;

V_f : est la fraction volumique ;

p : est l'indice qui contrôle le mélange de la céramique et du métal à travers l'épaisseur h de la plaque. Il prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

On note que la fraction volumique du métal est élevée au voisinage de la surface inférieure de la plaque et celle de la céramique est élevée au voisinage de la surface supérieure. Généralement, le coefficient de Poisson ν varie très légèrement. Pour simplifier les équations, ν est supposé constant.

4-2 Théorie raffinée de déformation de cisaillement à 4 inconnues:

Le nombre de variables inconnus de la théorie raffinée de déformation de cisaillement (RHSDT) est seulement quatre, contrairement au cinq variables dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Les hypothèses de la présente théorie sont:

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal W inclut deux composantes : un déplacement dû à la flexion w_b et un déplacement w_s dû au cisaillement. Ces composantes sont en fonction des coordonnées x, y et du temps t .

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4-4)$$

- La contrainte normale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales σ_x et σ_y .
- Le déplacement U suivant la direction x et le déplacement V suivant y se composent de trois termes : extension, flexion et cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s \quad (4-5)$$

$$V = v + v_b + v_s \quad (4-6)$$

Les composantes de la flexion u_b et v_b sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de u_b et v_b sont données par :

$$u_b = -z \frac{dw_b}{dx} \quad (4-7)$$

$$v_b = -z \frac{dw_b}{dy} \quad (4-8)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent à l'aide du déplacement w_s une variation parabolique des distorsions γ_{xz} et γ_{yz} de telle sorte que les contraintes τ_{xz} et τ_{yz} seront nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et par conséquent, l'expression de u_s et v_s est donnée par :

$$u_s = -f(z) \frac{dw_s}{dx} \quad (4-9)$$

$$v_s = -f(z) \frac{dw_s}{dy} \quad (4-10)$$

Dans ce cas, le coefficient de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

$f(z)$: La fonction de forme de cisaillement.

4-3 Champ de déplacement, déformation et contrainte :

4-3-1 Champ de déplacement :

En se basant sur les hypothèses précédentes, le champ de déplacement est obtenu comme suit :

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{dw_b}{dx} + \varphi(z) \frac{dw_s}{dx} \quad (4-11)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{dw_b}{dy} + \varphi(z) \frac{dw_s}{dy} \quad (4-12)$$

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4-13)$$

$f(z)$: La fonction de forme de cisaillement (la fonction de forme de SHIMPI), elle est basée sur un polynôme de degré 3.

$$f(z) = z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (4-14)$$

$$\varphi(z) = -f(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad (4-15)$$

4-3-2 Champ de déformation :

Dans le cas d'une théorie linéaire, le champ de déformation est défini par la relation (2-5).
En tenant compte les relations (4-11, 12, 13), le champ de déformation devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \varphi \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix} \quad (4-18)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{d^2 w_b}{dx^2} \\ -\frac{d^2 w_b}{dy^2} \\ -2\frac{d^2 w_b}{dx dy} \end{Bmatrix} \quad (4-19)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ -\frac{d^2 w_s}{dy^2} \\ -2\frac{d^2 w_s}{dx dy} \end{Bmatrix} \quad (4-20)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dw_s}{dy} \\ \frac{dw_s}{dx} \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = 1 + \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad (4-22)$$

ε^0 : Les déformations en membrane;

k_x^b : Les courbures de la poutre due à la flexion;

k_x^s : Les courbures de la poutre due au cisaillement;

γ_{yz}^s : Déformation transversal due au cisaillement.

4-3-3 Contrainte :

Etant donnée que la plaque FGM, élastique et isotrope, possède deux plans de symétrie (xz) et (yz) et que les contraintes normale σ_z est négligeable dans le volume de la plaque par rapport aux contraintes σ_x et σ_y (hypothèse 3), les relations contrainte déformation peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4-23)$$

Où ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$) et ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) sont les termes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités réduites Q_{ij} (dépend que de z) sont donnés par:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} ; \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} ; \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} ; \end{aligned} \quad (4-25)$$

$E(z)$: Module de Young en un point z de la plaque ;

ν : Coefficient de Poisson en un point z de la plaque (il est supposé constant dans notre étude).

4-4 Formulation énergétique de la théorie des plaques:

4-4-1 Energie de déformation :

L'énergie de déformation totale des plaques est défini par l'équation (2-33), étant donnée que $\sigma_{zz} = 0$ («troisième hypothèse des plaques), alors l'énergie totale de déformation de la plaque FGM est donnée par:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (4-26)$$

Pour souci de simplification, nous posons :

$$U_d = \sum_{i=1}^5 U_i \quad (4-27)$$

$$U_d = U_d^1 + U_d^2 + U_d^3 + U_d^4 + U_d^5 \quad (4-28)$$

En considèrent l'équation (4-27), et en développant chaque terme de l'équation (4-26) grâce aux relations (4-18, 19, 20, 21), nous obtenons :

$$U_d^1 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \varepsilon_x dz \right] dx dy$$

$$U_d^1 = \frac{1}{2} \iint \left[\int (\sigma_x \varepsilon_x^0 - z \sigma_x k_x^b + \sigma_x \varphi(z) k_x^s) dz \right] dx dy \quad (4-29 \text{ a})$$

$$U_d^2 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \varepsilon_y dz \right] dx dy$$

$$U_d^2 = \frac{1}{2} \iint \left[\int (\sigma_y \varepsilon_y^0 - z \sigma_y k_y^b + \sigma_y \varphi(z) k_y^s) dz \right] dx dy \quad (4-29 \text{ b})$$

$$U_d^3 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz \right] dx dy$$

$$U_d^3 = \frac{1}{2} \iint \left[\int (\sigma_{xz} \gamma_{xz}^s g(z)) dz \right] dx dy \quad (4-29 \text{ c})$$

$$U_d^4 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \gamma_{yz} dz \right] dx dy$$

$$U_d^4 = \frac{1}{2} \iint \left[\int (\sigma_{yz} \gamma_{yz}^s g(z)) dz \right] dx dy \quad (4-29 \text{ d})$$

$$U_d^5 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} dz \right] dx dy$$

$$U_d^5 = \frac{1}{2} \iint \left[\int (\sigma_{xy} \gamma_{xy}^0 + z \sigma_{xy} k_{xy}^b + \sigma_{xy} \varphi(z) k_{xy}^s) dz \right] dx dy \quad (4-29 \text{ e})$$

En fonction des résultantes et moments, les expressions précédentes deviennent :

$$U_d^1 = \frac{1}{2} \iint [N_x \varepsilon_x^0 - M_x^b k_x^b + M_x^s k_x^s] dx dy \quad (4-30 \text{ a})$$

$$U_d^2 = \frac{1}{2} \iint [N_y \varepsilon_y^0 - M_y^b k_y^b + M_y^s k_y^s] dx dy \quad (4-30 \text{ b})$$

$$U_d^3 = \frac{1}{2} \iint [Q_{xz} \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (4-30 \text{ c})$$

$$U_d^4 = \frac{1}{2} \iint [Q_{yz} \gamma_{yz}^s] dx dy \quad (4-30 \text{ d})$$

$$U_d^5 = \frac{1}{2} \iint [N_{xy} \gamma_{xy}^0 - M_{xy}^b k_{xy}^b + M_{xy}^s k_{xy}^s] dx dy \quad (4-30 \text{ e})$$

Avec :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (4-31a)$$

$$(Q_i) = \int_{-h/2}^{h/2} g \sigma_i dz, (i = xz, yz) \quad (4-31 \text{ b})$$

Ou :

N_x, N_y, N_{xy} : Les résultantes par unité de longueur des efforts normaux (x, y) et l'effort de cisaillement dans le plan (x, y) .

M_x^b, M_y^b : Moment de flexion par unité de longueur.

M_{xy}^b : Moment de torsion par unité de longueur.

M_x^s, M_y^s : Moment de flexion d'ordre supérieur par unité de longueur.

M_{xy}^s : Moment de torsion d'ordre supérieur par unité de longueur.

Q_{yz}^s, Q_{xz}^s : Les résultantes des efforts de cisaillement d'ordre supérieur dans les plans (x, z) et (y, z) par unité de longueur.

Donc l'expression finale de l'énergie de déformation de la plaque s'écrit :

$$U_d = \frac{1}{2} \int [N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b K_x^b + M_y^b K_y^b + M_{xy}^b K_{xy}^b + M_x^s K_x^s + M_y^s K_y^s + M_{xy}^s K_{xy}^s + Q_{yz}^s \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (4-32)$$

4-4-2 Equation constitutive:

En développant les équations (4-31), les résultantes et moments s'écrivent comme suit :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y) dz \\ = A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 + B_{11} K_x^b + B_{12} K_y^b + B_{11}^s K_x^s + B_{12}^s K_y^s \quad (4-33 a)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{12} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y) dz \\ = A_{12} \varepsilon_x^0 + A_{22} \varepsilon_y^0 + B_{12} K_x^b + B_{22} K_y^b + B_{12}^s K_x^s + B_{22}^s K_y^s \quad (4-33 b)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{66} \gamma_{xy}) dz = A_{66} \gamma_{xy}^0 + B_{66} K_{xy}^b + B_{66}^s K_{xy}^s \quad (4-33 c)$$

$$M_x^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} z (Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y) dz \\ = B_{11} \varepsilon_x^0 + B_{12} \varepsilon_y^0 + D_{11} K_x^b + D_{12} K_y^b + D_{11}^s K_x^s + D_{12}^s K_y^s \quad (4-33 d)$$

$$M_y^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = \int_{-h/2}^{h/2} z (Q_{12} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y) dz \\ = B_{12} \varepsilon_x^0 + B_{22} \varepsilon_y^0 + D_{12} K_x^b + D_{22} K_y^b + D_{12}^s K_x^s + D_{22}^s K_y^s \quad (4-33 e)$$

$$M_{xy}^b = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (z Q_{66} \gamma_{xy}) dz = B_{66} \gamma_{xy}^0 + D_{66} K_{xy}^b + D_{66}^s K_{xy}^s \quad (4-33 f)$$

$$M_x^s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \varphi(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi(z) (Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y) dz \\ = B_{11}^s \varepsilon_x^0 + B_{12}^s \varepsilon_y^0 + D_{11}^s K_x^b + D_{12}^s K_y^b + H_{11}^s K_x^s + H_{12}^s K_y^s \quad (4-33 g)$$

$$\begin{aligned}
M_y^s &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \varphi(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi(z) (Q_{12} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y) dz \\
&= B_{12}^s \varepsilon_x^0 + B_{22}^s \varepsilon_y^0 + D_{12}^s K_x^b + D_{22}^s K_y^b + H_{12}^s K_x^s + H_{22}^s K_y^s
\end{aligned} \tag{4-33 h}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \varphi(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\varphi(z) Q_{66} \gamma_{xy}) dz \\
&= B_{66}^s \gamma_{xy}^0 + D_{66}^s K_{xy}^b + H_{66}^s K_{xy}^s
\end{aligned} \tag{4-33 i}$$

$$\begin{aligned}
Q_{yz}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_{yz} dz = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (Q_{44} \gamma_{yz}) dz \\
&= A_{44}^s \gamma_{yz}^s
\end{aligned} \tag{4-33 j}$$

$$\begin{aligned}
Q_{xz}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_{xz} dz = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (Q_{55} \gamma_{xz}) dz \\
&= A_{55}^s \gamma_{xz}^s
\end{aligned} \tag{4-33 k}$$

Les équations (4-33) peuvent encore s'écrire sous forme matriciel :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x^b \\ K_y^b \\ K_{xy}^b \\ K_x^s \\ K_y^s \\ K_{xy}^s \end{bmatrix} \tag{4-34}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{bmatrix} \tag{4-35}$$

Les différentes rigidités qui interviennent dans les équations (4-33) sont définies par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) Q_{ij} dz; (i, j = 1, 2, 6) \tag{4-36 a}$$

$$B_{ij}^s = -\frac{1}{4} B_{ij} + \frac{5}{3h^2} E_{ij}; (i, j = 1, 2, 6) \tag{4-36 b}$$

$$D_{ij}^s = -\frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}; (i, j = 1, 2, 6) \tag{4-36 c}$$

$$H_{ij}^s = \frac{1}{16} B_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^4} H_{ij}; (i, j = 1, 2, 6) \tag{4-36 d}$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) Q_{ij} dz; (i, j = 4, 5) \tag{4-36 e}$$

$$A_{ij}^s = \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{2h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}; (i, j = 4, 5) \tag{4-36 f}$$

4-4-2 Energie cinétique:

L'énergie cinétique de la plaque FGM est définie par l'équation (2-36) :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho_z \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (4-37)$$

Pour souci de simplification, nous posons :

$$E_c = E_c^1 + E_c^2 + E_c^3 \quad (4-38)$$

Alors :

$$\boxed{\frac{dU}{dt}(x, y, z) = \dot{u}(x, y) - z \frac{d\dot{w}_b}{dx} - \varphi(z) \frac{d\dot{w}_s}{dx}}$$

$$E_c^1 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 dz \right] dx dy$$

$$E_c^1 = \frac{1}{2} \iint \left(\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{u})^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \right)^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \varphi(z)^2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \right)^2 dz - \int_{-h/2}^{h/2} 2 z \rho(z) \dot{u} \frac{d\dot{w}_b}{dx} dz - \int_{-h/2}^{h/2} 2 \rho(z) \varphi(z) \dot{u} \frac{d\dot{w}_s}{dx} dz + \int_{-h/2}^{h/2} 2 z \rho(z) \varphi(z) \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\dot{w}_s}{dx} dz \right) dx dy$$

$$E_c^1 = \frac{1}{2} \iint \left(I_1 (\dot{u})^2 + I_3 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \right)^2 - 2I_2 \dot{u} \frac{d\dot{w}_b}{dx} - 2I_2^a \dot{u} \frac{d\dot{w}_s}{dx} + 2I_3 \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\dot{w}_s}{dx} \right) dx dy \quad (4-49)$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt}(x, y, z) = \dot{v}(x, y) - z \frac{d\dot{w}_b}{dy} - \varphi(z) \frac{d\dot{w}_s}{dy}}$$

$$E_c^2 = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 dz \right] dx dy$$

$$E_c^2 = \frac{1}{2} \iint \left(\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{v})^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dy} \right)^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \varphi(z)^2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dy} \right)^2 dz - \int_{-h/2}^{h/2} 2 z \rho(z) \dot{v} \frac{d\dot{w}_b}{dy} dz - \int_{-h/2}^{h/2} 2 \rho(z) \varphi(z) \dot{v} \frac{d\dot{w}_s}{dy} dz + \int_{-h/2}^{h/2} 2 z \rho(z) \varphi(z) \frac{d\dot{w}_b}{dy} \frac{d\dot{w}_s}{dy} dz \right) dx dy$$

$$E_c^2 = \frac{1}{2} \iint \left(I_1 (\dot{v})^2 + I_3 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dy} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{d\dot{w}_s}{dy} \right)^2 - 2I_2 \dot{v} \frac{d\dot{w}_b}{dy} - 2I_2^a \dot{v} \frac{d\dot{w}_s}{dy} + 2I_3 \frac{d\dot{w}_b}{dy} \frac{d\dot{w}_s}{dy} \right) dx dy \quad (4-50)$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt}(x, y, z) = \dot{w}_b(x, y) + \dot{w}_s(x, y)}$$

$$\begin{aligned}
E_c^3 &= \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) W^2 dz \right] dx dy \\
E_c^3 &= \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2 dz \right] dx dy \\
E_c^3 &= \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{w}_b)^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{w}_s)^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} 2\rho(z) \dot{w}_b \dot{w}_s dz \right] dx dy \\
E_c^3 &= \frac{1}{2} \iint (I_1 (\dot{w}_b)^2 + I_1 (\dot{w}_s)^2 + 2I_1 \dot{w}_b \dot{w}_s) dx dy \tag{4-51}
\end{aligned}$$

Avec :

$$I_1, I_2, I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \tag{4-52}$$

$$I_2^a, I_3^a, I_3^{aa} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \varphi(z) (1, z, \varphi) dz \tag{4-53}$$

Ou :

I_1, I_2, I_3 : Sont les inerties axiale, de couplage, et de rotation respectivement ;

I_2^a : Est l'inertie de couplage d'ordre supérieur ;

I_3^a, I_3^{aa} : Sont les inerties de rotation d'ordre supérieur ;

Donc l'expression finale de l'énergie cinétique de la plaque FGM est :

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \int \left[I_1 (\dot{u})^2 + I_1 (\dot{v})^2 + I_1 (\dot{w}_b)^2 + I_1 (\dot{w}_s)^2 + I_3 \left(\frac{dw_b}{dx} \right)^2 + I_3 \left(\frac{dw_b}{dy} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^2 + \right. \\
&I_3^{aa} \left(\frac{dw_s}{dy} \right)^2 - 2 I_2 \left(\dot{u} \frac{dw_b}{dx} \right) - 2 I_2^a \left(\dot{u} \frac{dw_s}{dx} \right) - 2 I_2 \left(\dot{v} \frac{dw_b}{dy} \right) - 2 I_2^a \left(\dot{v} \frac{dw_s}{dy} \right) + 2 I_3^a \left(\frac{dw_b}{dx} \frac{dw_s}{dx} \right) + \\
&\left. 2 I_3^a \left(\frac{dw_b}{dy} \frac{dw_s}{dy} \right) + 2 I_1 (\dot{w}_b \dot{w}_s) \right] dx dy \tag{4-54}
\end{aligned}$$

4-4-3 Travail des forces exercées sur la plaque :

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges transverses exercées sur les faces inférieure et supérieure de la plaque. Si en introduisant les contraintes q , le travail de ces actions s'écrit :

$$W_p = \iint q W dx dy \tag{4-55}$$

$$W_p = \iint q (w_b + w_s) dx dy \tag{4-56}$$

4-4-4 Energie de fondation :

Puisque la surface inférieure de la plaque est supposée posée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, la relation entre la flèche et la réaction de la fondation est exprimée par :

$$f_e = k_w w - k_s \nabla^2 w \quad (4-57)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation.

4-5 La variation des énergies :

4-5-1 La variation d'énergie de déformation :

En procédant à la variation de l'équation (4-26), nous obtenons :

$$\delta U_d = \iiint \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz \quad (4-58)$$

δ : opérateur de variation

En développant l'équation(4-58), nous obtenons:

$$\delta U_d = \iiint (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dx dy dz \quad (4-59)$$

En substituant les relations (4-18, 19, 20, 21) dans l'équation (4-59), en intégrant suivant z et en utilisant les expressions des résultantes et les moments, la variation d'énergie de déformation devient :

$$\delta U_d = \int [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta K_x^b + M_y^b \delta K_y^b + M_{xy}^b \delta K_{xy}^b + M_x^s \delta K_x^s + M_y^s \delta K_y^s + M_{xy}^s \delta K_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (4-60)$$

$$\delta U_d = \int \left[N_x \delta \left(\frac{du}{dx} \right) + N_y \delta \left(\frac{dv}{dy} \right) + N_{xy} \delta \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) - M_x^b \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) - M_y^b \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dy^2} \right) - M_{xy}^b \delta \left(2 \frac{d^2 w_b}{dx dy} \right) - M_x^s \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) - M_y^s \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dy^2} \right) - M_{xy}^s \delta \left(2 \frac{d^2 w_s}{dx dy} \right) + Q_{yz}^s \delta \left(\frac{dw_s}{dy} \right) + Q_{xz}^s \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right] dx dy \quad (4-61)$$

Comme les opérateurs de variation et de déformation sont commutatifs, nous pouvons donc réarranger l'expression et intégrer par parties selon l'ordre qui convient. En annulant ainsi les variations des déplacements et rotations (déplacement et rotation virtuels), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta U_d = \iint \left[-\frac{\partial N_x}{dx} \delta u - \frac{\partial N_y}{dy} \delta v - \frac{N_{xy}}{dy} \delta u - \frac{dN_{xy}}{dx} \delta v - \frac{d^2 M_x^b}{dx^2} \delta w_b - \frac{d^2 M_y^b}{dy^2} \delta w_b - \right. \\ \left. 2 \frac{d^2 M_{xy}^b}{dx dy} \delta w_b - \frac{d^2 M_x^s}{dx^2} \delta w_s - \frac{d^2 M_y^s}{dy^2} \delta w_s - 2 \frac{d^2 M_{xy}^s}{dx dy} \delta w_s - \frac{dQ_{yz}^s}{dy} \delta w_s - \right. \\ \left. \frac{dQ_{xz}^s}{dx} \delta w_s \right] dx dy \end{aligned} \quad (4-62)$$

Les contributions dynamiques des termes sources par rapport aux variations δu , δv , δw_b et δw_s sont:

$$\begin{aligned} \delta u : -\frac{\partial N_x}{dx} - \frac{N_{xy}}{dy} \delta u \\ \delta v : -\frac{\partial N_y}{dy} - \frac{dN_{xy}}{dx} \\ \delta w_b : -\frac{d^2 M_x^b}{dx^2} - \frac{d^2 M_y^b}{dy^2} - 2 \frac{d^2 M_{xy}^b}{dx dy} \\ \delta w_s : -\frac{d^2 M_x^s}{dx^2} - \frac{d^2 M_y^s}{dy^2} - 2 \frac{d^2 M_{xy}^s}{dx dy} - \frac{dQ_{yz}^s}{dy} - \frac{dQ_{xz}^s}{dx} \end{aligned} \quad (4-63)$$

4-5-2 Energie cinétique:

L'énergie cinétique de la plaque FGM en vibration libre est donnée par l'expression (4-37):

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho_z \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (4-64)$$

En dérivant les équations (4-11, 12, 13) par rapport au temps, puis en développant l'équation (4-64), la variation d'énergie cinétique devient donc :

$$\begin{aligned} \delta E_c = \frac{1}{2} \int \left[2I_1 \dot{u} \delta \dot{u} + 2I_1 \dot{v} \delta \dot{v} + 2I_1 \dot{w}_b \delta \dot{w}_b + 2I_1 \dot{w}_s \delta \dot{w}_s + 2I_3 \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \frac{d\dot{w}_b}{dx} + \right. \\ \left. 2I_3 \frac{d\dot{w}_b}{dy} \delta \frac{d\dot{w}_b}{dy} + 2I_3^a \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \frac{d\dot{w}_s}{dx} + 2I_3^a \frac{d\dot{w}_s}{dy} \delta \frac{d\dot{w}_s}{dy} - 2I_2 \delta \left(\dot{u} \frac{d\dot{w}_b}{dx} \right) - 2I_2^a \delta \left(\dot{u} \frac{d\dot{w}_s}{dx} \right) - \right. \\ \left. 2I_2 \delta \left(\dot{v} \frac{d\dot{w}_b}{dy} \right) - 2I_2^a \delta \left(\dot{v} \frac{d\dot{w}_s}{dy} \right) + 2I_3^a \delta \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\dot{w}_s}{dx} \right) + 2I_3^a \delta \left(\frac{d\dot{w}_b}{dy} \frac{d\dot{w}_s}{dy} \right) + \right. \\ \left. 2I_1 \delta (\dot{w}_b \dot{w}_s) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4-65)$$

En intégrant par rapport au temps, en procédant par une intégration par parties, en annulant les variations des déplacements et rotations (virtuels) et en supposant des variations nulles au début et à la fin de l'intervalle temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta E_c dt = \int_0^t \iint & \left[-I_1 \ddot{u} \delta u - I_1 \ddot{v} \delta v - I_1 \ddot{w}_b \delta w_b - I_1 \ddot{w}_s \delta w_s + I_3 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} \delta w_b + \right. \\
& I_3 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dy^2} \delta w_b + I_3^{aa} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \delta w_s + I_3^{aa} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dy^2} \delta w_s + I_2 \left(-\frac{d\ddot{u}}{dx} \delta w_b + \frac{d\ddot{w}_b}{dx} \delta u \right) + \\
& I_2^a \left(-\frac{d\ddot{u}}{dx} \delta w_s + \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \delta u \right) + I_2 \left(-\frac{d\ddot{v}}{dy} \delta w_b + \frac{d\ddot{w}_b}{dy} \delta v \right) + I_2^a \left(-\frac{d\ddot{v}}{dy} \delta w_s + \frac{d\ddot{w}_s}{dy} \delta v \right) + \\
& I_3^a \left(\frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} \delta w_s + \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \delta w_b \right) + I_3^a \left(\frac{d^2 \ddot{w}_b}{dy^2} \delta w_s + \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dy^2} \delta w_b \right) - I_1 (\ddot{w}_b \delta w_s + \\
& \left. \ddot{w}_s \delta w_b) \right] dx dy dt \quad (4-66)
\end{aligned}$$

Les contributions dynamiques des termes sources par rapport aux variations $\delta u, \delta v, \delta w_b$ et δw_s sont :

$$\begin{aligned}
\delta u : & -I_1 \ddot{u} + I_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + I_2^a \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \\
\delta v : & -I_1 \ddot{v} + I_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dy} + I_2^a \frac{d\ddot{w}_s}{dy} \\
\delta w_b : & -I_1 \ddot{w}_b + I_3 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} + I_3 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dy^2} - I_2 \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2 \frac{d\ddot{v}}{dy} + I_3^a \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} + I_3^a \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dy^2} - I_1 \ddot{w}_s \quad (4-67) \\
\delta w_s : & -I_1 \ddot{w}_s + I_3^{aa} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} + I_3^{aa} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dy^2} - I_2^a \frac{d\ddot{u}}{dx} - I_2^a \frac{d\ddot{v}}{dy} + I_3^a \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} + I_3^a \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dy^2} - I_1 \ddot{w}_b
\end{aligned}$$

4-5-3 Energie de déformation :

L'énergie de déformation de support élastique est définie par [WINKLER PASTERNAK]:

$$U_f = \iint f_e W \quad (4-68)$$

La variation d'énergie de déformation du support élastique est alors :

$$\delta U_f = \iint [f_e \delta W] dx dy \quad (4-69)$$

En développant le déplacement (W), l'expression finale de la variation sera donc :

$$\delta U_f = \iint [f_e \delta (w_b + w_s)] dx dy \quad (4-70)$$

4-5-4 Travail des forces exercées sur la plaque :

Le Travail des forces exercées sur la plaque est défini par [32] :

$$W_p = \iint q W \, dx dy \quad (4-71)$$

En développant le déplacement suivant la direction (z) :

$$W_p = \iint q(w_b + w_s) \, dx dy \quad (4-72)$$

L'expression finale de la variation des charges extérieures s'écrit donc :

$$\delta W_p = \iint [q \delta (w_b + w_s)] \, dx dy \quad (4-73)$$

4-6 Application du principe de Hamilton :

Afin de déterminer les équations différentielles du mouvement vibratoire de la plaque FGM, nous appliquons le théorème des travaux virtuels qui dans le cas d'un problème dynamique se traduit par :

$$\int_0^t \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (4-74)$$

Où \mathcal{L} représente le Lagrangien, et t la variable temps.

Nous nous appuyons sur le principe de Hamilton qui est un principe général pouvant être appliqué à une large classe de problèmes de mécanique des solides déformables, le principe est basé sur le Lagrangien qui s'écrit sous forme :

$$\mathcal{L} = (U_d + U_f - W_p - E_c) \quad (4-75)$$

U_d : Energie de déformation totale de la plaque FGM ;

U_f : Energie de déformation du support élastique Winkler-Pasternak ;

W_p : Travail des charges extérieures ;

E_c : Energie cinétique de la plaque.

La variation du Lagrangien est donc:

$$\delta \mathcal{L} = \delta U_d + \delta U_f - \delta W_p - \delta E_c \quad (4-76)$$

Équation (4-76) implique :

$$\int_0^t \delta \mathcal{L} dt = \int_0^t \delta U_d dt + \int_0^t \delta U_f dt - \int_0^t \delta W_p dt - \int_0^t \delta E_c dt = 0 \quad (4-77)$$

En remplaçant δU_d , δE_c , δU_f , et δW_p par leurs expressions respectives (4-62,66,70,73), en collectant ensuite les termes δu , δv , δw_b , et δw_s . Nous obtenons les 4 équations différentielles qui régissent le mouvement de la plaque FGM :

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_2^a \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (4-78 a)$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_2^a \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (4-78 b)$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - k_w (w_b + w_s) + k_w \nabla^2 (w_b + w_s) q = I_1 [I0] (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 [I1] \left(\frac{d\ddot{u}}{dx} + \frac{d\ddot{v}}{dy} \right) - I_3 [I2] \nabla^2 \ddot{w}_b - I_3^a [j2] \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (4-78 c)$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - k_w (w_b + w_s) + k_s \nabla^2 (w_b + w_s) + q = I_1 [I0] (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2^a [j1] \left(\frac{d\ddot{u}}{dx} + \frac{d\ddot{v}}{dy} \right) - I_3^a [j2] \nabla^2 \ddot{w}_b - I_3^{aa} [k2] \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (4-78 d)$$

Ces cinq dernières expressions représentent les équations différentielles du mouvement en vibration libre d'une plaque FGM en théorie d'ordre supérieur unifiée et reposant sur un support élastique de Winkler-Pasternak.

4-7 Méthode de Navier pour le calcul des fréquences de la plaque FGM :

Les formules de comportement de divers types des plaques en flexion, présentent les équations mathématiques différentielles partielles exactes. Malheureusement, les solutions analytiques de ces équations ont été limitées aux plaques homogènes d'états relativement simples (la géométrie, le chargement et les frontières). Même lorsque les solutions analytiques pourraient être trouvées, elles étaient souvent trop difficiles et encombrantes pour employer dans la pratique. Les méthodes numériques traitées peuvent satisfaire la plupart de ces conditions pratiques.

Le but de toutes ces méthodes numériques est de fournir des algorithmes informatiques appropriés pour obtenir les solutions numériques approximatives aux problèmes difficiles. Les techniques numériques présentées sont des méthodes discrètes. C'est-à-dire, le volume de la plaque ou de sa frontière est discrétisé mathématiquement ou physiquement. Les méthodes numériques sont :

- ✓ La méthode des différences finies (FDM);
- ✓ Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles ;
- ✓ La méthode des éléments finie (FEM) ;
- ✓ La méthode des éléments de frontière (BEM).

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales: Les méthodes de résidus pondérés (ou méthodes intégrales) et les méthodes variationnelles (méthodes à extremum).

Le principe général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction sur le domaine d'intégration de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. La solution est écrite sous forme d'une série polynomiale ou trigonométrique à termes finis. Des paramètres généralisés sont introduits et des fonctions de base sont alors construites. Le principe de la méthode consiste à rechercher les paramètres qui donnent la meilleure approximation construite à l'aide de fonctions de base.

Les méthodes des *résidus pondérés* utilisent des fonctions test de manière à minimiser l'erreur ou le résidu de l'équation différentielle. Différentes méthodes de résidus pondérés sont obtenues selon la valeur de la fonction test. La méthode de collocation par points, la méthode de collocation par sous domaines, la méthode des moindres carrés et la méthode de *Galerkin*.

Dans d'autres cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est à dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle comme c'est le cas de l'énergie totale par exemple en mécanique des structures. La méthode adaptée à ce type de formulation est la méthode de *Ritz* et *Navier*, qui aboutit plus tard à la méthode des éléments finis en mécanique des structures.

La méthode de *Navier* est une méthode qui approxime les déplacements par des séries finies. Elle ne peut être appliquée qu'aux plaques sur appuis simples car les conditions aux limites correspondantes sont automatiquement satisfaites.

Les conditions aux limites (appuis simple) de Navier sont:

$$v = w_b = w_s = \frac{dw_b}{dy} = \frac{dw_s}{dy} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \dots \dots \dots (x = 0, a) \quad (4-79)$$

$$u = w_b = w_s = \frac{dw_b}{dx} = \frac{dw_s}{dx} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \dots \dots \dots (y = 0, b) \quad (4-80)$$

La méthode de Navier approxime les déplacements de la structure à travers les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_b^{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ w_s^{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{bmatrix} \quad (4-81)$$

Avec:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (4-82)$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b} \quad (4-83)$$

m, n sont des nombres naturels

a : Longueur (suivant x)

b : Largeure (suivant y)

ω : La fréquence propre associée au mode propre (m, n).

Où : U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn} sont les amplitudes des déplacements ; t est le temps.

Cette forme des déplacements vérifie exactement les conditions aux limites de la plaque. Les déplacements u, v, w_b et w_s sont ensuite injectés dans les équations du mouvement (4-78). Il faut alors isoler les termes U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn} . Les coefficients de ces termes doivent être identiquement nuls (pour ne pas avoir une solution triviale), ce qui donne un système d'équations algébriques homogènes et linéaires. Le déterminant de ce système d'équations fournit les fréquences propres.

Les forces extérieures sous forme d'une série double trigonométrique

$$q(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (4-84)$$

Donc :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \sin \alpha x \cos \beta y \, dx \, dy \quad (4-85)[44]$$

Avec :

$m = n, Q_{mn} = 0$ La plaque n'est soumise à aucun chargement

$m \neq n, Q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$ La plaque est soumise à un chargement uniforme

$m = n = 1, Q_{11} = q_0$ La plaque est soumise à un chargement sinusoïdal

Où q_0 est l'intensité de la charge au centre de la plaque

4-7-1 Problème aux valeurs propres :

Substituant les équations (4-81 et 4-85) dans les équations de mouvement (4-78) nous obtenons des équations aux valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n ,

$$(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)u_{mn} + (\alpha\beta(A_{12} + A_{66}))v_{mn} + \left(-\alpha(\alpha^2B_{11} + \beta^2(B_{12} + 2B_{66}))\right)w_b^{mn} + \left(-\alpha(\alpha^2B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))\right)w_s^{mn} = (\omega^2I_1)u_{mn} + (-\omega^2\alpha I_2)w_b^{mn} + (-\omega^2\alpha I_2^a)w_s^{mn} \quad (4-86a)$$

$$(\alpha\beta(A_{12} + A_{66}))u_{mn} + (\alpha^2A_{66} + \beta^2A_{12})v_{mn} + \left(-\beta(\beta^2B_{22} + \alpha^2(B_{12} + 2B_{66}))\right)w_b^{mn} + \left(-\beta(\beta^2B_{22}^s + \alpha^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))\right)w_s^{mn} = (\omega^2I_1)v_{mn} + (-\omega^2\beta I_2)w_b^{mn} + (-\omega^2\beta I_2^a)w_s^{mn} \quad (4-86b)$$

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha(\alpha^2B_{11} + \beta^2(B_{12} + 2B_{66}))\right)u_{mn} + \left(-\beta(\beta^2B_{22} + \alpha^2(B_{12} + 2B_{66}))\right)v_{mn} + \\ &\left(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)\right)w_b^{mn} + \left(D_{11}^s\alpha^4 + \right. \\ &\left.2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)\right)w_s^{mn} = (-\omega^2\alpha I_2)u_{mn} + \\ &(-\omega^2\beta I_2)v_{mn} + \left(\omega^2(I_2 + I_3(\alpha^2 + \beta^2))\right)w_b^{mn} + \left(\omega^2(I_1 + I_3^a(\alpha^2 + \beta^2))\right)w_s^{mn} + \\ &Q_{mn} \end{aligned} \quad (4-86c)$$

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha(\alpha^2B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))\right)u_{mn} + \left(-\beta(\beta^2B_{22}^s + \alpha^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))\right)v_{mn} + \\ &\left(D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)\right)w_b^{mn} + \left(H_{11}^s\alpha^4 + \right. \\ &\left.2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)\right)w_s^{mn} = \\ &(-\omega^2\alpha I_2^a)u_{mn} + (-\omega^2\beta I_2^a)v_{mn} + \left(\omega^2(I_1 + I_3^a(\alpha^2 + \beta^2))\right)w_b^{mn} + \left(\omega^2(I_1 + \right. \\ &\left.I_3^{aa}(\alpha^2 + \beta^2))\right)w_s^{mn} + Q_{mn} \end{aligned} \quad (4-86d)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_b^{mn} \\ w_s^{mn} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_b^{mn} \\ w_s^{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (4-87)$$

Ce sont des équations aux valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre :

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{Q\} \quad (4-88)$$

[K] est la matrice de rigidité et [M] est la matrice masse et $\{\Delta\}$ est un vecteur propre. Les constantes rigidités-masses sont déterminé dans le tableau (4-1):

Tab (4-1) : les constantes la rigidité et la masse.

Coefficients de la matrice rigidité K_{ij}	Coefficient de la matrice masse M_{ij}
$K_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$	$M_{11} = I_1$
$K_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66})$	$M_{12} = 0$
$K_{13} = -\alpha(\alpha^2 B_{11} + \beta^2(B_{12} + 2B_{66}))$	$M_{13} = -\alpha I_2$
$K_{14} = -\alpha(\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))$	$M_{14} = -\alpha I_2^a$
$K_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{12}$	$M_{22} = I_1$
$K_{23} = -\beta(\beta^2 B_{22} + \alpha^2(B_{12} + 2B_{66}))$	$M_{23} = -\beta I_2$
$K_{24} = -\beta(\beta^2 B_{22}^s + \alpha^2(B_{12}^s + 2B_{66}^s))$	$M_{24} = -\beta I_2^a$
$K_{33} = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)$	$M_{33} = I_2 + I_3(\alpha^2 + \beta^2)$
$K_{34} = D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)$	$M_{34} = I_1 + I_3^a(\alpha^2 + \beta^2)$
$K_{44} = H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 + k_w + k_s(\alpha^2 + \beta^2)$	$M_{44} = I_1 + I_3^{aa}(\alpha^2 + \beta^2)$

$\{\Delta\} = \{0\}$ étant une solution triviale, nous obtenons le problème aux valeurs propres standard suivant :

$$|[K] - \omega_{mn}^2[M]| = 0 \quad (4-89)$$

En résolvant ce système, les fréquences naturelles de notre système vibratoire libre sont facilement calculées par des procédures standards de résolution.

Conclusion :

Dans ce chapitre, les équations différentielles du mouvement de la plaque FGM vibrant librement sur un support élastique ont été écrites en se basant sur la version dynamique des travaux virtuels connue en tant que principe de Hamilton. En utilisant la méthode analytique de Navier appliquée à une plaque FGM sur appuis simples, nous aboutissons à un problème aux valeurs propres représenté par l'équation canonique (4-84) dont la résolution nous permettra d'obtenir l'ensemble des fréquences naturelles du système vibratoire analysé.

Résultats et interprétations

Comme les pioches et le prolongement de la main de l'homme, les jumelles le prolongement de ses yeux, l'ordinateur est le prolongement de sa pensée...

J.MAALO

Résultats et interprétations

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les fréquences propres naturelles d'une plaque P-FGM sous appuis simples en fonction de l'index de la fraction volumique p et du rapport d'épaisseur h/a , et présenter les résultats obtenus suite à son exécution, Nous commencerons par valider nos résultats, en les comparants avec ceux de l'article déjà publiés [46]. Nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter de l'influence du rapport d'épaisseur h/a et de l'index de la fraction volumique p sur les fréquences propres naturelles.

Afin de comparer nos résultats avec ceux des travaux déjà effectués, et les valider par la suite, on considère une plaque P-FGM carrée à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal au niveau de la face inférieure), Le rapport h/a définit le rapport d'épaisseur de notre plaque.

5-1 Présentation de l'outil Maple :

Maple a été initialement développé à l'Université de Waterloo en Ontario (Canada) à partir de 1981, La première version publique date de 1985 (version 3.3).

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, fonctions et séries. Maple réalise des dérivations, intégrations, résolutions de systèmes d'équations linéaires, inversions de matrices, développements asymptotiques et résolutions d'équations différentielles. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en arithmétique des nombres et en combinatoire.

Il est possible de :

- Copier et coller les formules mathématiques correspondantes dans un traitement de texte ;
- Tracer des courbes ou des surfaces (en aspect 3D) ;
- Générer des programmes de calculs numériques.

5-2 Description du programme :

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la théorie des plaques. Nous allons d'abord calculer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de z , puis nous calculons les constantes de rigidités réduites (Q_{ij}). Par la suite, nous allons construire les matrices élémentaires masse et rigidité d'une plaque développées au paragraphe (4-7-1), en passant par le calcul des inerties et les intégrales constantes.

Enfin, dans un but de validation des algorithmes et matrices développés, nous faisons quelques applications numériques et nous les comparons avec les résultats de la référence [44] et [46] pour des charges sinusoïdales appliquées.

Afin de concevoir notre programme de calcul, nous passons par les étapes suivantes :

✚ La spécification des paramètres d'entrées suivants :

1. *les caractéristiques mécaniques de la plaque :*

E_c, E_m : Les modules de YOUNG (céramique et métal),

ν : Coefficients de Poisson (supposé constant),

ρ_c, ρ_m : Les masses volumiques (céramique et métal),

2. *Les caractéristiques géométriques de la plaque :*

a : largeur de la plaque,

b : longueur de la plaque ,

h : L'épaisseur de la plaque,

p : L'index de la fraction volumique du P-FGM,

3. *Les caractéristiques du support élastique :*

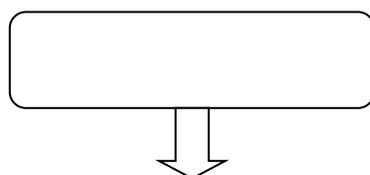
k_w : Rigidité de Winkler ;

k_s : Rigidité de cisaillement de Pasternak.

✚ L'analyse modale et résolution du problème aux valeurs propres : Après la formation de la matrice rigidité K et de la matrice masse M , nous résolvons le problème aux valeurs propres.

✚ Les résultats (output) : les sorties du programmes sont les valeurs propres du système vibratoire libre.

5-3 Organigramme du programme de calcul:



Début

Les données du programme:

Modules de Young, masses volumiques, coefficient de Poisson,
Géométrie de la plaque (épaisseur h , allongement a/h , et l'index p)
Paramètres du support élastique (k_s, k_w)

Calcul :

Fraction volumique (Eq 4-3), module de Young et masse volumique (Eq 4-1) de
la plaque en fonction de z (P-FGM)
Rigidités réduites et les inerties (Eq 4-23) (Eq 4-52) (Eq 4-53).

Résolution du système d'équations différentielles

avec

la méthode de Navier

Calcul des constantes de la matrice rigidité K_{ij} et matrice masse M_{ij} (Tab 4-1)

Résolution du problème aux valeurs propres

Calcul de fréquence propre adimensionnelle (Eq 4-89)

Affichage des résultats

(Fréquence adimensionnelle des 5 premiers modes)

Fin

Fig(5-1) : Organigramme du programme de calcul.

5-4 Validation du programme :

L'idéal pour la validation d'un programme numérique serait de confronter les résultats avec ceux des tests expérimentaux, ce qui à notre niveau, n'est pas possible (manque de moyens expérimentaux). Nous optons donc pour une comparaison avec les résultats de la référence [46]. Pour ce faire, nous annulons les charges transversales et nous calculons la fréquence propre naturelle adimensionnelle (ou paramètre de fréquence), en se servant de [44]:

$$\bar{\omega} = \omega \left(h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right) \quad (5-1)$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \omega \left(h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \right) \quad (5-2)$$

$\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}$: Paramètres de fréquence ou fréquences adimensionnelles,

ω : Fréquence propre naturelle.

Les paramètres adimensionnels de la base élastique sont [44]:

$$\hat{k}_w = \frac{k_w b^4}{D_m} \quad (5-3)$$

$$\hat{k}_s = \frac{k_s b^2}{D_m} \quad (5-4)$$

La rigidité flexionnelle de la plaque est [44]:

$$D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5-5)$$

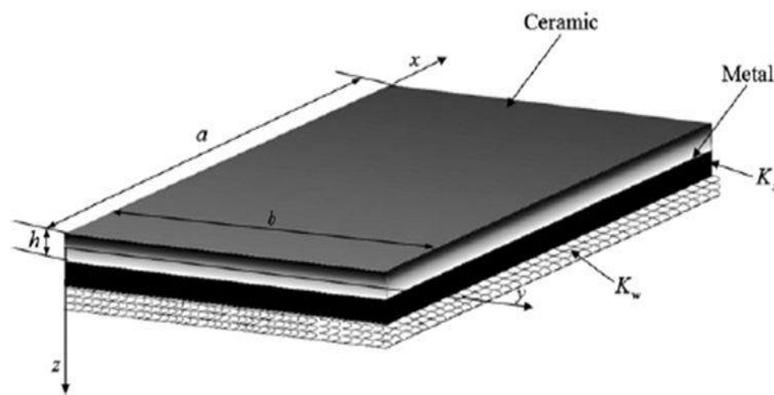


Fig (5-2) : Plaque FGM reposant sur une fondation élastique.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque Al/Al₂O₃ sont [44]:

Les modules de Young : $E_m = 70 \text{ Gpa}$ (métal), $E_c = 380 \text{ Gpa}$ (céramique) ;

Les masses volumiques: $\rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3$, $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$;

Le coefficient de Poisson: $\nu = 0,3$;

L'épaisseur de la plaque: $h = 0,0254 \text{ m}$;

$\hat{k}_s = \hat{k}_w = 0$;

$n = m = 1$ (La plaque n'est soumise à aucun chargement);

Al : Aluminium (métal) ;

Al_2O_3 : Alumine (céramique) ;

5-4-1- Comparaison avec des théories de déformation en cisaillement d'ordre différent :

Dans le but de démontrer la précision de la présente méthode, la corrélation entre la présente théorie et les théories d'ordre élevé et la théorie du premier ordre des plaques est établie. La description des différents modèles de déplacement est présentée dans le tableau (5-1).

Tab (5-1) : Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnues.

Modèle	Théorie	Facteur de correction (k^2)	Nombre d'inconnues	Type de solution
FSDT [47]	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First order shear deformation plate theory)	Equation (5-9)	5	solution analytique exacte
FSDT [48]	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First order shear deformation plate theory)	1	5	----
FSDT [49]	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First order shear deformation plate theory)	5/6 (plaque homogène) Equation (5-7) Equation (5-8)	5	solution analytique exacte (Méthode de pk-Ritz)
2D-HAPT [48]	Théorie de déformations de cisaillement d'ordre élevé (Higher order shear deformation theory)	----	5	solution analytique
Présente théorie	La méthode raffinée à 4 inconnues d'ordre supérieur	----	4	Solution analytique

Le tableau (5-2) présente la variation du paramètre de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque P-FGM simplement supportée en fonction des différentes théories. L'indice de la fraction volumique de la plaque varie entre 0 (plaque céramique) et ∞ (plaque métallique) pour les différents valeurs du rapport d'épaisseur h/a .

Tab (5-2) : comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1, \hat{k}_s = \hat{k}_w = 0$).

h/a	Modèle	K^2	index de la fraction volumique (p)					
			0	0,5	1	4	10	∞
0,05	FSDT [47]	Eq (5-8)	0,01480	0,01281	0,01150	0,01013	0,00963	-
	FSDT [49]	5/6	0,01464	0,01241	0,01118	0,00970	0,00931	-
	Présente théorie	-	0,01478	0,01253	0,01129	0,00979	0,00939	0,00751
0,1	FSDT [47]	Eq (5-8)	0,05769	0,04920	0,04454	0,03825	0,03627	0,02936
	2D HAPT [48]	-	0,05777	0,04917	0,04427	0,03811	0,03642	0,02933
	FSDT [48]	1	0,06382	0,05429	0,04889	0,04230	0,04047	-
	FSDT [49]	5/6	0,05673	0,04818	0,04346	0,03757	0,03591	-
		Eq (5-6)	0,05713	0,04849	0,04371	0,03781	0,03619	-
		Eq (5-7)	0,05711	0,04847	0,04370	0,03779	0,03618	-
Présente théorie	-	0,05769	0,04907	0,04428	0,03824	0,03651	0,02930	
0,2	FSDT [47]	Eq (5-8)	0,2112	0,1806	0,1650	0,1371	0,1304	0,1075
	2D HAPT [48]	-	0,2121	0,1819	0,1640	0,1383	0,1306	0,1077
	FSDT [48]	1	0,2334	0,1997	0,1802	0,1543	0,1462	-
	FSDT [49]	5/6	0,2055	0,1757	0,1587	0,1356	0,1284	-
		Eq (5-6)	0,2098	0,1790	0,1616	0,1383	0,1313	-
		Eq (5-7)	0,2096	0,1788	0,1614	0,1382	0,1312	-
Présente théorie	-	0,2108	0,1850	0,1681	0,1449	0,1370	0,1071	

Il faut noter que l'article de référence [47] et [49] sont basés sur une méthode analytique exacte alors que les articles de référence [48] et notre modèle sont basés sur une méthode d'approximation numérique.

Les facteurs de correction utilisés sont :

$$k^2 = \frac{5+5\nu}{6+5\nu} \quad (5-6)$$

$$k^2 = \frac{5}{6-\nu(V_m+V_c)} \quad (5-7)$$

Ou: V_m et V_c sont les fractions volumique du métal et céramique, respectivement.

$$k^2 \left(p, \frac{h}{a} \right) = \frac{5}{6} + C_1(e^{-C_2p} - e^{-C_3p}) \left(10 \frac{h}{a} - 2 \right) - C_4(e^{-C_5p} - e^{-C_6p}) \left(10 \frac{h}{a} - 1 \right) \quad (5-8)$$

Ou : $C_i (i = 1,2,3,4,5,6)$ sont des coefficients constants.

Les figures (5-3) montrent l'influence du modèle utilisé dans l'analyse vibratoire sur les fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ de notre plaque P-FGM Al/Al₂O₃, avec un rapport d'épaisseur (h/a) égal à 0.05, 0.1 et 0.2 respectivement.

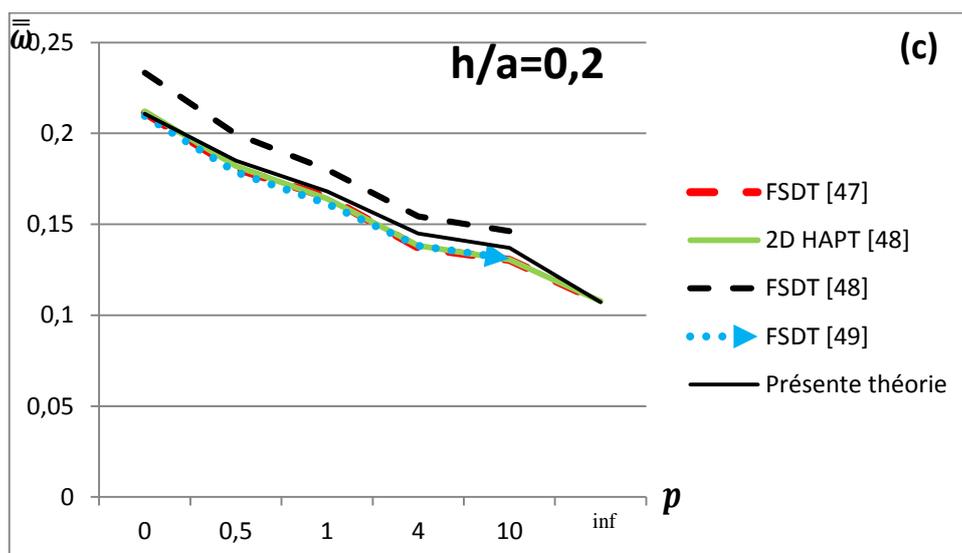
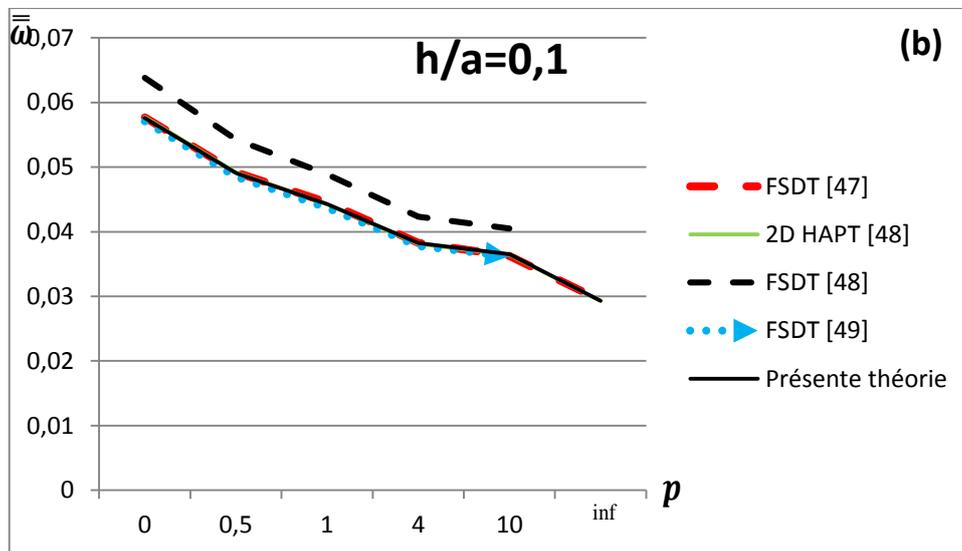
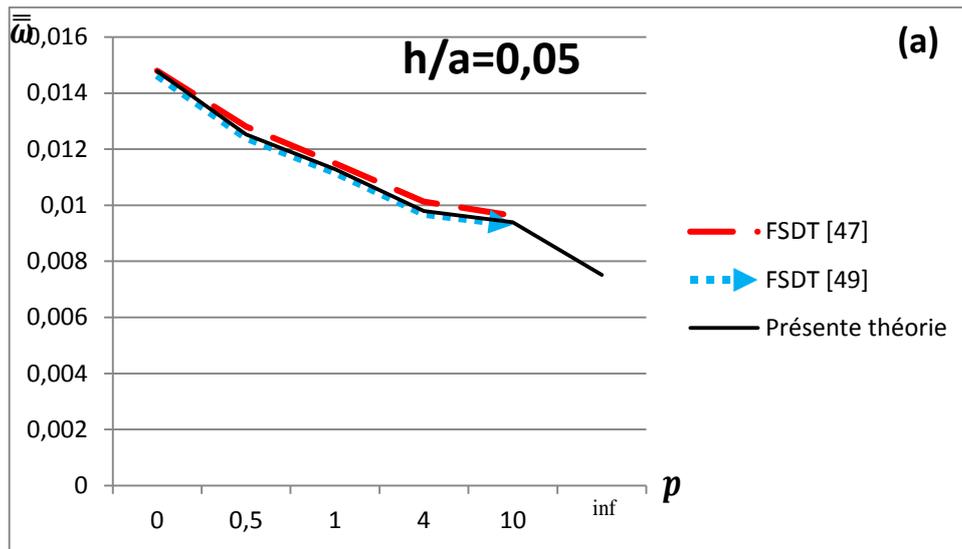


Fig (5-3) : Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1$, $\hat{k}_s = \hat{k}_w = 0$) en fonction du l'indice de la fraction volumique p .

D'après les graphes (5-3 a) et (5-3 b) on peut constater que les présents résultats sont en excellent accord avec ceux obtenus par la référence [FSDT 49] pour un rapport d'épaisseur de $h/a=0.05$, et la référence [FSDT 49], [2D HAPT 48] et [FSDT 47] pour le rapport d'épaisseur de $h/a=0.1$.

En ce qui concerne le rapport d'épaisseur $h/a=0.2$, figure (5-3 c) pour une plaque épaisse, les résultats sont différents de ceux obtenus par la présente théorie car les modèles des références [FSDT 49], [2D HAPT 48] et [FSDT 47] utilisent un facteur de correction en cisaillement ce qui n'est pas le cas des modèles d'ordre supérieur dont les hypothèses de sont plus réalistes.

Il est à noter que tous les résultats obtenus sur la base de la référence [FSDT 48] sont inappropriés, car la valeur de facteur de correction en cisaillement est considéré comme constant ($k^2 = 1$) pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur et les indices de la fraction volumique.

5-4-2-Comparaison avec des modèles d'ordre supérieur :

Le tableau (5-3) présente la variation du paramètre de fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) en fonction de l'indice de la fraction volumique p et du rapport d'épaisseur (h/a) concernant une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ simplement supportée. L'erreur relative entre nos résultats et ceux des articles de référence est calculée pour permettre la comparaison.

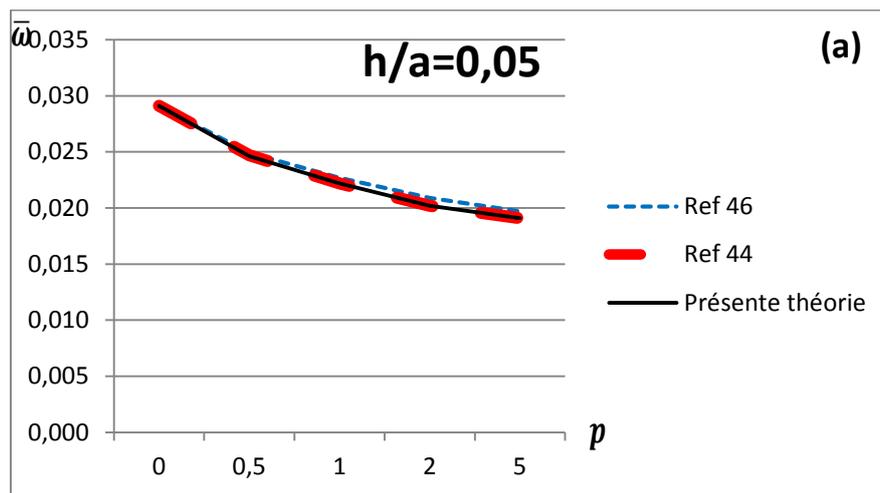
Tab (5-3) : comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle ($\bar{\omega}$) d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1, \hat{k}_s = \hat{k}_w = 0$).

h/a	Ref	Source	index de la fraction volumique				
			0	0,5	1	2	5
0,05 (a/h=20) Mince	(1)	Ref. [46]	0,0291	0,0249	0,0227	0,0209	0,0197
	(2)	Ref. [44]	0,0291	0,0247	0,0222	0,0202	0,0191
	(3)	Présente théorie	0,0291	0,0246	0,0222	0,0202	0,0191
	Erreur (2)/(1) (%)		0,000%	0,803%	2,203%	3,349%	3,046%
	Erreur (3)/(1) (%)		0,000%	1,205%	2,203%	3,349%	3,046%
0,1 (a/h=10)	(1)	Ref. [46]	0,1134	0,0975	0,0891	0,0819	0,0767
	(2)	Ref. [44]	0,1135	0,0964	0,0869	0,0788	0,0740
	(3)	Présente théorie	0,1133	0,0965	0,0871	0,0791	0,0746
	Erreur (2)/(1) (%)		0,088%	1,128%	2,469%	3,785%	3,520%

	Erreur (3)/(1) (%)	0,088%	1,026%	2,245%	3,419%	2,868%
0,2	(1) Ref. [46]	0,4154	0,3606	0,3299	0,3016	0,2765
	(2) Ref. [44]	0,4154	0,3553	0,3207	0,2894	0,2668
(a/h=5)	(3) Présente théorie	0,4145	0,3639	0,3308	0,3012	0,2824
Epaisse	Erreur (2)/(1) (%)	0,000%	1,470%	2,789%	4,045%	3,508%
	Erreur (3)/(1) (%)	0,193%	0,915%	0,242%	0,265%	1,881%

Les fréquences naturelles non dimensionnelles obtenues par notre modèle sont très proches de celles obtenues par la référence [46] avec un léger décalage, ce qui est tout à fait normal puisque la référence [46] utilise une théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur avec cinq variables indépendantes (théories des plaques du troisième ordre) pour obtenir les équations différentielles, et une méthode analytique pour découpler et résoudre ces équations. Notre modèle utilise une méthode approximative basée sur la méthode de Navier qui approxime les déplacements par des séries finies.

Les figures (5-4 a, b, c) montrent l'influence de l'index de la fraction volumique p sur le paramètre de la fréquence fondamentale de notre plaque P-FGM, avec un rapport d'épaisseur (h/a) égal à 0.05, 0.1 et 0.2 respectivement. Les résultats considérés sont ceux de la référence [46], la référence [44] et notre présente théorie.



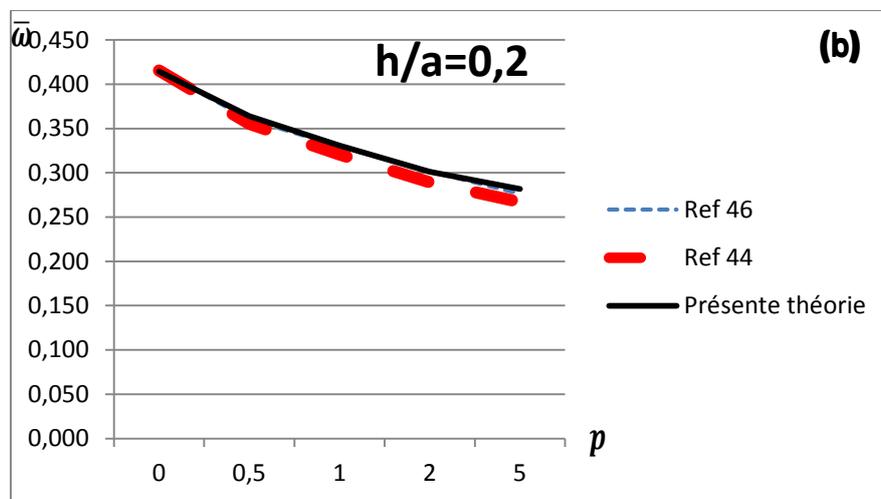
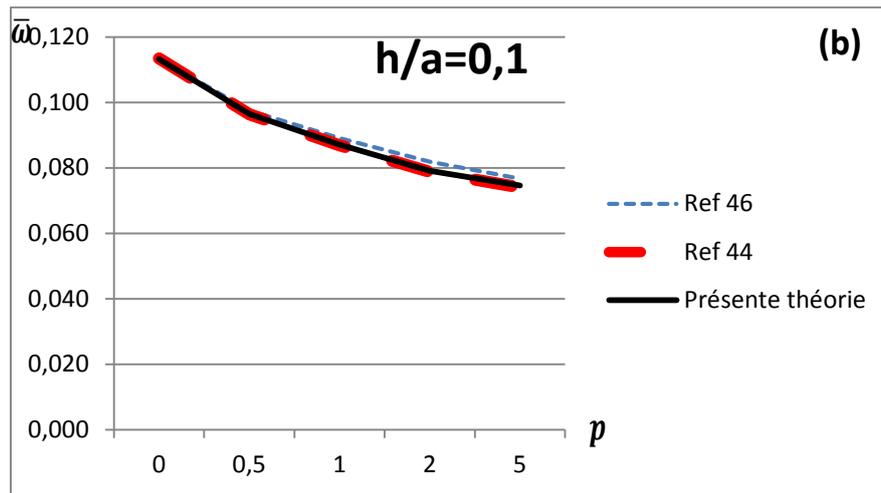


Fig (5-4):La variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM ($a/b = 1$, $\hat{k}_s = \hat{k}_w = 0$) en fonction du l'indice de la fraction volumique p .

Le paramètre de fréquence fondamentale non dimensionnelle représenté sur les figures (5-4 a,b,c) diminue en augmentant l'index de la fraction volumique, c'est-à-dire en introduisant plus de métal dans la plaque P-FGM, ce qui amoindrit sa rigidité. Nous remarquons que notre courbe est confondue avec la courbe représentant les résultats de la référence [46], ce qui confirme la bonne précision de la présente formulation.

Les figures (5-5 a,b,c) montrent l'évolution de l'erreur relative de notre théorie et celle de la référence [44], par rapport à la référence [46]. Nous avons choisi la référence [46] comme base de comparaison parce qu'elle utilise une méthode de résolution analytique.

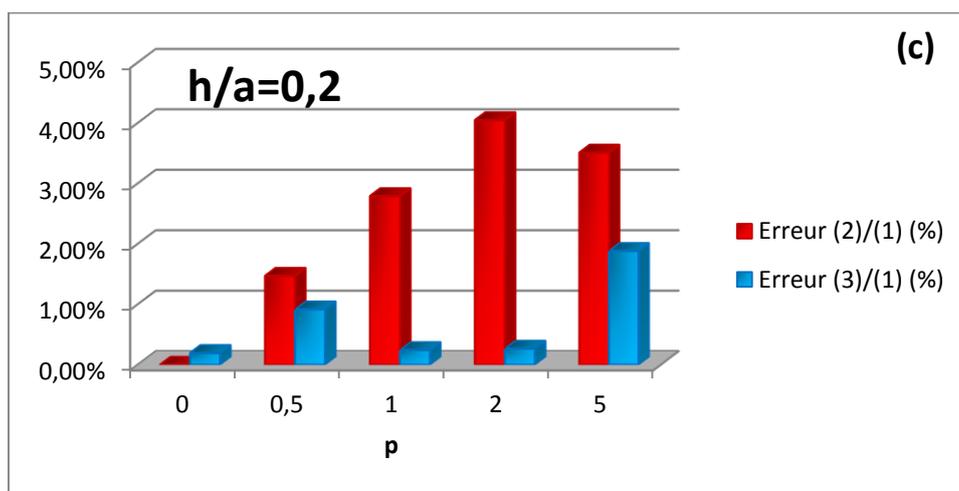
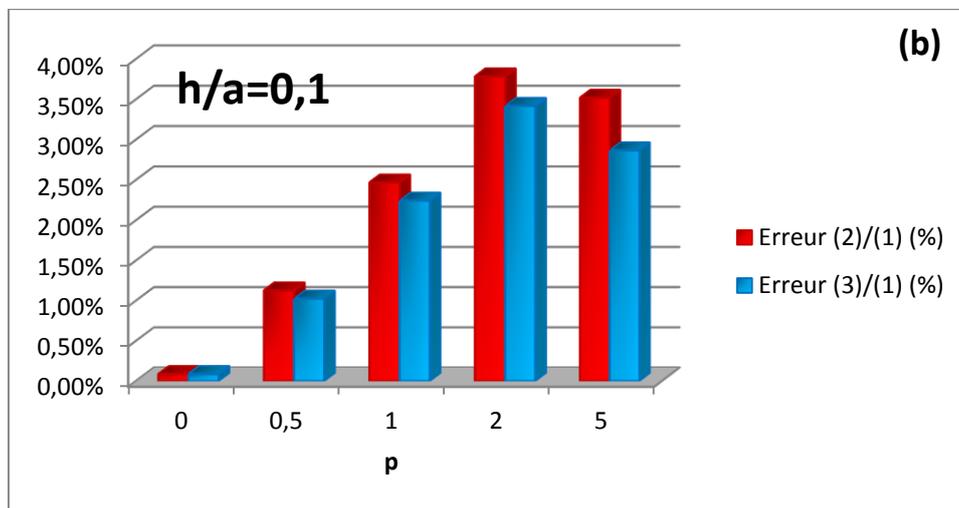
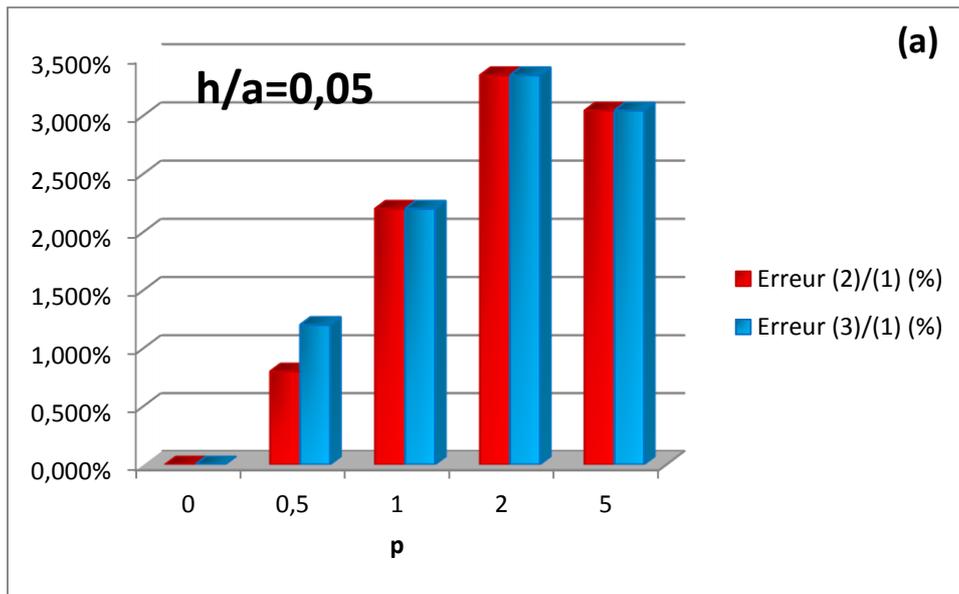


Figure (5-5) : l'évolution de l'erreur relative du paramètre fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$.

L'erreur relative entre les fréquences calculées par notre présente théorie et celles de l'article [46] est très petite pour les plaques épaisses ($h/a=0,2$), et varie entre 0,19% ($p=0$, plaque céramique) et 1,88% ($p= 5$ plaque riche en métal). Donc, l'erreur relative représentée sur les figures (5-5 a, b, c) nous fait remarquer une bonne concordance avec les résultats de l'article de référence [46].

Nous remarquons aussi que l'erreur relative entre notre étude et la référence [46] est plus faible comparant à celle de référence [44] avec la référence [46] et surtout pour les plaques épaisses ($h/a=0,2$) ; ce qui montre que nos résultats sont très bons et bien meilleurs que ceux de la référence [44]. Cette différence est due principalement à la précision de l'outil de calcul utilisé.

Finalement, l'étude comparative menée révèle que les résultats obtenus à partir de la présente méthode sont en très grande concordance avec ceux de la littérature ce qui valide sa précision. En plus, la présente théorie ne comprend que quatre (04) inconnues au lieu de cinq (05) pour les autres théories.

5-5 Etude paramétrique de la plaque P-FGM (Al/Al₂O₃) :

Nous présentons dans le tableau (5-4) les paramètres de fréquences propres naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ (Equation 5-1), en variant le rapport d'épaisseur h/a et l'index de la fraction volumique p .

Tab (5-4) : Influence du rapport d'épaisseur h/a et de l'index p sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée P-FGM (Al/Al₂O₃).

Configuration $\hat{k}_w = 0 / \hat{k}_s = 0$							
h/a	$\bar{\omega}_i$	L'indice de fraction volumique p					
		0	0,5	1	2	5	∞
0,05	$\bar{\omega}_1$	0,02908	0,02465	0,02222	0,02020	0,01911	0,01480
	$\bar{\omega}_2$	0,07174	0,06095	0,05497	0,04994	0,04715	0,03652
	$\bar{\omega}_3$	0,07174	0,06095	0,05497	0,04994	0,04715	0,03652
	$\bar{\omega}_4$	0,11334	0,09653	0,08713	0,07915	0,07460	0,05769
	$\bar{\omega}_5$	0,27067	0,24295	0,22518	0,20345	0,17577	0,13777
0,1	$\bar{\omega}_1$	0,11334	0,09653	0,08713	0,07915	0,07460	0,05769
	$\bar{\omega}_2$	0,27030	0,23337	0,21142	0,19226	0,18055	0,13758
	$\bar{\omega}_3$	0,27030	0,23337	0,21142	0,19226	0,18055	0,13758
	$\bar{\omega}_4$	0,41455	0,36388	0,33082	0,30120	0,28246	0,21100
	$\bar{\omega}_5$	0,54134	0,48590	0,45035	0,40690	0,35155	0,27554
0,2	$\bar{\omega}_1$	0,41455	0,36388	0,33082	0,30120	0,28246	0,21100
	$\bar{\omega}_2$	0,90306	0,85012	0,77911	0,71023	0,66503	0,45965
	$\bar{\omega}_3$	0,90306	0,85012	0,77914	0,71023	0,66503	0,45965

	$\bar{\omega}_4$	1,08268	0,97181	0,90071	0,81380	0,70310	0,55107
	$\bar{\omega}_5$	1,29858	1,30101	1,19433	1,08638	1,01648	0,66096
0,5	$\bar{\omega}_1$	1,78490	1,93097	1,76842	1,60051	1,49533	0,90849
	$\bar{\omega}_2$	2,70671	2,42952	2,25177	2,03449	1,75774	1,37768
	$\bar{\omega}_3$	3,11129	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	1,58360
	$\bar{\omega}_4$	3,11129	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	1,58360
	$\bar{\omega}_5$	3,86030	4,11138	3,70682	3,28792	3,03337	1,96484

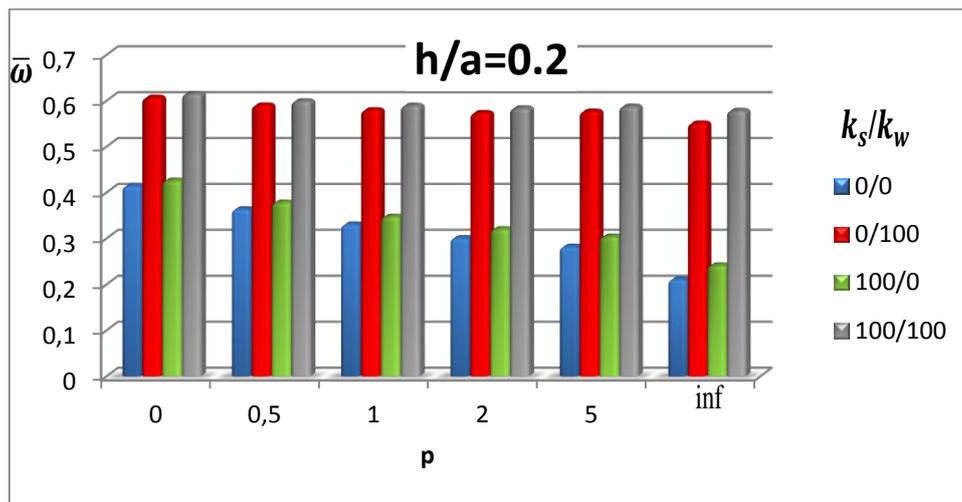
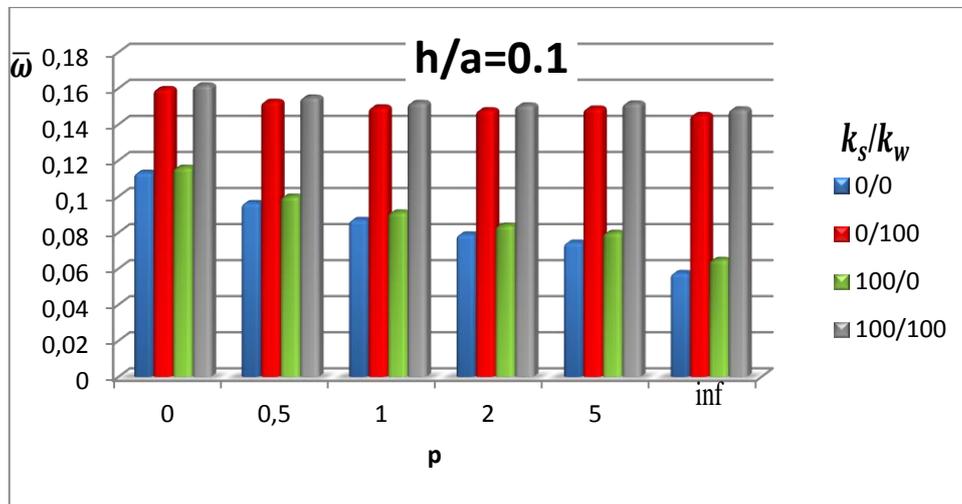
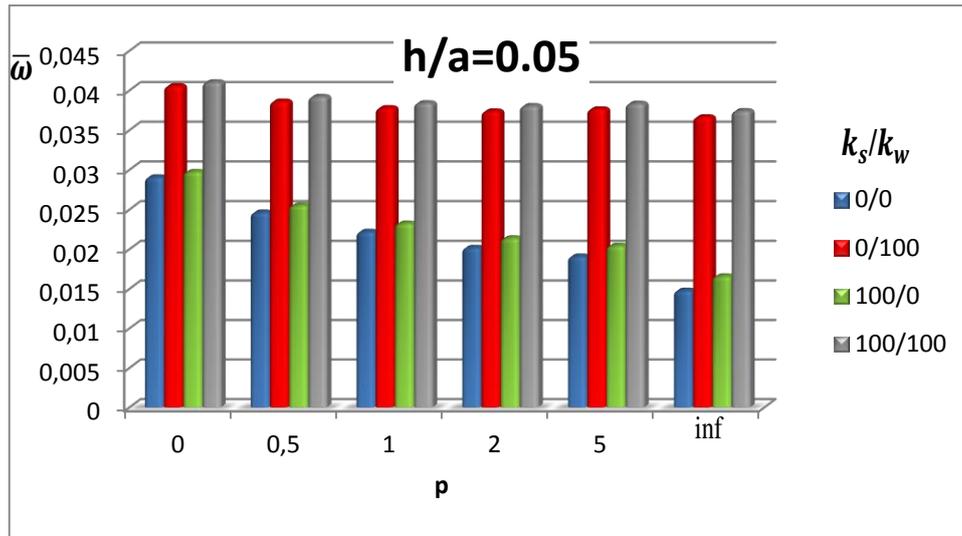
Configuration $\hat{k}_w = 0 / \hat{k}_s = 100$							
h/a	$\bar{\omega}_i$	L'indice de fraction volumique ρ					
		0	0,5	1	2	5	∞
0,05	$\bar{\omega}_1$	0,04057	0,03864	0,03780	0,03739	0,03766	0,03666
	$\bar{\omega}_2$	0,08448	0,07691	0,07311	0,07038	0,06955	0,06427
	$\bar{\omega}_3$	0,08448	0,07691	0,07311	0,07038	0,06955	0,06427
	$\bar{\omega}_4$	0,12654	0,11323	0,10624	0,10087	0,09859	0,08821
	$\bar{\omega}_5$	0,27067	0,24295	0,22518	0,20345	0,17577	0,13777
0,1	$\bar{\omega}_1$	0,15973	0,15273	0,14957	0,14799	0,14894	0,14540
	$\bar{\omega}_2$	0,32280	0,29800	0,28435	0,27408	0,27047	0,25042
	$\bar{\omega}_3$	0,32280	0,29800	0,28435	0,27409	0,27047	0,25042
	$\bar{\omega}_4$	0,47018	0,43177	0,40763	0,38783	0,35155	0,27554
	$\bar{\omega}_5$	0,54134	0,48590	0,45035	0,40690	0,37843	0,33720
0,2	$\bar{\omega}_1$	0,60716	0,59023	0,57975	0,57360	0,57674	0,55107
	$\bar{\omega}_2$	1,08268	0,97181	0,90071	0,81380	0,70310	0,56629
	$\bar{\omega}_3$	1,13792	1,10935	1,06431	1,02430	1,00883	0,87132
	$\bar{\omega}_4$	1,13792	1,10935	1,06431	1,02430	1,00883	0,87132
	$\bar{\omega}_5$	1,56420	1,53656	1,42415	1,28672	1,11169	0,93148
0,5	$\bar{\omega}_1$	2,70671	2,42952	2,25177	2,03449	1,75774	1,37768
	$\bar{\omega}_2$	3,23571	3,22039	3,08332	2,90340	2,69815	2,17830
	$\bar{\omega}_3$	4,27969	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	2,17830
	$\bar{\omega}_4$	4,27969	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	2,32870
	$\bar{\omega}_5$	4,57518	4,14016	3,92198	3,70378	3,45297	2,75536

Configuration $\hat{k}_w = 100 / \hat{k}_s = 0$							
h/a	$\bar{\omega}_i$	L'indice de fraction volumique ρ					
		0	0,5	1	2	5	∞
0,05	$\bar{\omega}_1$	0,02977	0,02554	0,02326	0,02140	0,02046	0,01661
	$\bar{\omega}_2$	0,07202	0,06131	0,05539	0,05044	0,04770	0,03728
	$\bar{\omega}_3$	0,07202	0,06131	0,05539	0,05044	0,04770	0,03728
	$\bar{\omega}_4$	0,11352	0,09676	0,08739	0,07947	0,07495	0,05818
	$\bar{\omega}_5$	0,27067	0,24295	0,22518	0,20345	0,17577	0,13777
0,1	$\bar{\omega}_1$	0,11614	0,10014	0,09132	0,08401	0,08004	0,06504
	$\bar{\omega}_2$	0,27146	0,23486	0,21314	0,19426	0,18281	0,14077
	$\bar{\omega}_3$	0,27146	0,23486	0,21314	0,19426	0,18281	0,14077
	$\bar{\omega}_4$	0,41530	0,36482	0,33190	0,30245	0,28388	0,21307
	$\bar{\omega}_5$	0,54134	0,48590	0,45035	0,40690	0,35155	0,27554
0,2	$\bar{\omega}_1$	0,42641	0,37862	0,34776	0,32066	0,30438	0,24196
	$\bar{\omega}_2$	0,90843	0,85616	0,78594	0,71798	0,67383	0,47429

	$\bar{\omega}_3$	0,90843	0,85616	0,78594	0,71798	0,67383	0,47429
	$\bar{\omega}_4$	1,08268	0,97181	0,90071	0,81380	0,70310	0,55107
	$\bar{\omega}_5$	1,30229	1,30476	1,19846	1,09107	1,02179	0,67115
0,5	$\bar{\omega}_1$	1,88743	2,01976	1,86483	1,70682	1,61357	1,16309
	$\bar{\omega}_2$	2,70671	2,42952	2,25177	2,03449	1,75774	1,37768
	$\bar{\omega}_3$	3,17251	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	1,74587
	$\bar{\omega}_4$	3,17251	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	1,74587
	$\bar{\omega}_5$	3,91050	4,11214	3,73846	3,32069	3,04028	2,09973

Configuration $\hat{k}_w = 100 / \hat{k}_s = 100$							
h/a	$\bar{\omega}_i$	L'indice de fraction volumique ρ					
		0	0,5	1	2	5	∞
0,05	$\bar{\omega}_1$	0,04106	0,03922	0,03842	0,03806	0,03836	0,03743
	$\bar{\omega}_2$	0,08472	0,07720	0,07343	0,07073	0,06993	0,06471
	$\bar{\omega}_3$	0,08472	0,07720	0,07343	0,07073	0,06993	0,06471
	$\bar{\omega}_4$	0,12670	0,11342	0,10646	0,10111	0,09886	0,08853
	$\bar{\omega}_5$	0,27067	0,24295	0,22518	0,20345	0,17577	0,13777
0,1	$\bar{\omega}_1$	0,16172	0,15503	0,15205	0,15064	0,15174	0,14847
	$\bar{\omega}_2$	0,32378	0,29917	0,28564	0,27549	0,27198	0,25219
	$\bar{\omega}_3$	0,32378	0,29917	0,28564	0,27549	0,27198	0,25219
	$\bar{\omega}_4$	0,47084	0,43256	0,40851	0,38880	0,35155	0,27554
	$\bar{\omega}_5$	0,54134	0,48590	0,45035	0,40690	0,37949	0,33849
0,2	$\bar{\omega}_1$	0,61532	0,59942	0,58956	0,58400	0,58768	0,57847
	$\bar{\omega}_2$	1,08268	0,97181	0,90071	0,81380	0,70310	0,87132
	$\bar{\omega}_3$	1,14217	1,11397	1,06928	1,02964	1,01451	0,87132
	$\bar{\omega}_4$	1,14217	1,11397	1,06928	1,02964	1,01451	0,93148
	$\bar{\omega}_5$	1,56727	1,53656	1,42415	1,28672	1,11169	
0,5	$\bar{\omega}_1$	2,70671	2,42952	2,25177	2,03449	1,75774	1,37768
	$\bar{\omega}_2$	3,29066	3,26881	3,12738	2,93771	2,71572	2,17830
	$\bar{\omega}_3$	4,27969	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	2,17830
	$\bar{\omega}_4$	4,27969	3,84141	3,56037	3,21681	2,77923	2,32870
	$\bar{\omega}_5$	4,57518	4,14308	3,93144	3,72538	3,49312	2,75536

5-5-1 Influence de k_s et k_w sur les fréquences propres non dimensionnelles d'une plaque P-FGM :



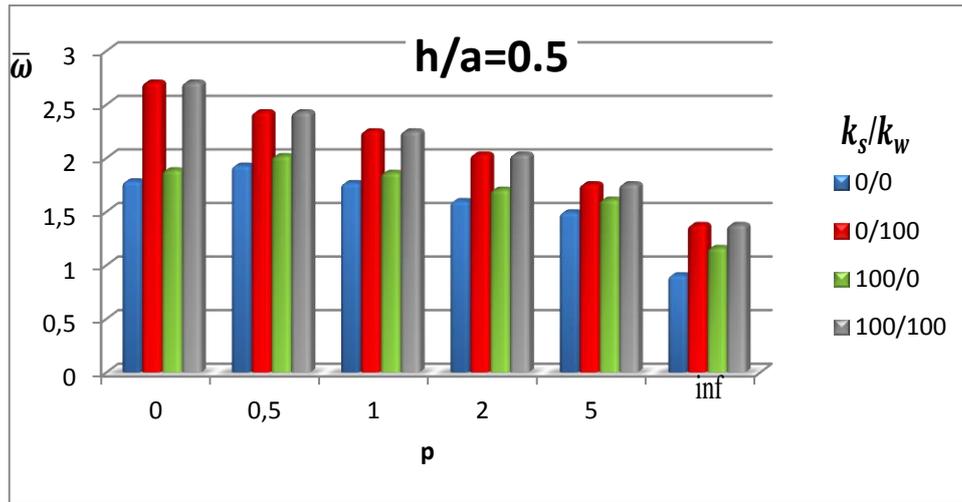


Fig (5-6) : Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1$) en fonction de l'indice de la fraction volumique p et les coefficients de Winkler-Pasternak.

A partir de ces figures (5-6), nous constatons que :

- L'accroissement du coefficient de Pasternak a un effet très remarquable sur l'évolution de la fréquence non dimensionnelle (comparant entre les colonnes bleu-rouge ou bien les colonnes verte-grise). L'augmentation est de 39.51% pour $\hat{k}_s=0$ et $\hat{k}_s=100$ ($h/a =0.05$, $p=0$) et de 51.64% (pour $h/a =0.5$ $p=0$) pour $\hat{k}_s=0$ et $\hat{k}_s=100$.

L'écart de la valeur de la fréquence fondamentale non dimensionnelle lors l'accroissement du coefficient de Pasternak est en augmentation avec l'accroissement de l'indice de puissance p .

L'effet du coefficient de Pasternak est identique pour le reste des résultats ($a/h=0.05$, 0.1, 0.2) sauf pour les plaques épaisses (d'épaisseur $h/a =0.5$), ou l'écart de la valeur de la fréquence fondamentale non dimensionnelle (entre $\hat{k}_s = 0$ et $\hat{k}_s = 100$) varie légèrement avec la l'accroissement de l'indice de puissance p .

L'accroissement de la fréquence non dimensionnelle est toujours significatif pour tous les rapports d'épaisseurs et les indices de puissances. Ceci implique que pour une plaque FGM, il y aurait beaucoup de changement des valeurs de fréquence fondamentale non dimensionnelle à partir d'un support élastique souple à un autre dur.

- Le coefficient de Winkler n'a pas un effet très important comparant au coefficient du Pasternak (comparant entre les colonnes bleu-verte et les colonnes rouge-grise), l'augmentation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle est de 2.37% pour $\hat{k}_w=0$ et $\hat{k}_w=100$ ($h/a =0.05$, $p=0$) et de 5.74% (pour $h/a =0.5$ $p=0$) pour $\hat{k}_s=0$ et $\hat{k}_s=100$.

L'écart de la valeur de la fréquence fondamentale non dimensionnelle lors l'accroissement du coefficient de Winkler est constant pour toutes variations des rapports d'épaisseurs et indices de puissances.

- L'augmentation des fréquences fondamentales non dimensionnelles dans la configuration (100/100) est très importante à cause de la présence des deux coefficients de support élastique.

5-5-2 Influence du rapport d'épaisseur h/a sur les fréquences propres naturelles d'une plaque P-FGM :

La figures (5-7) montre l'influence de rapport d'épaisseur (h/a) sur les fréquences propres naturelles non dimensionnelles d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ (Aluminium/Alumine), pour différents index de fraction volumique (0, 0.5, 1, 2, 5). Nous remarquons que la fréquence propre non dimensionnelle augmente en augmentant le rapport h/a de notre plaque. Plus le rapport d'épaisseur h/a est grand, plus on a des longueurs d'ondes de flexion plus courtes, sachant que ces dernières sont l'inverses des fréquences.

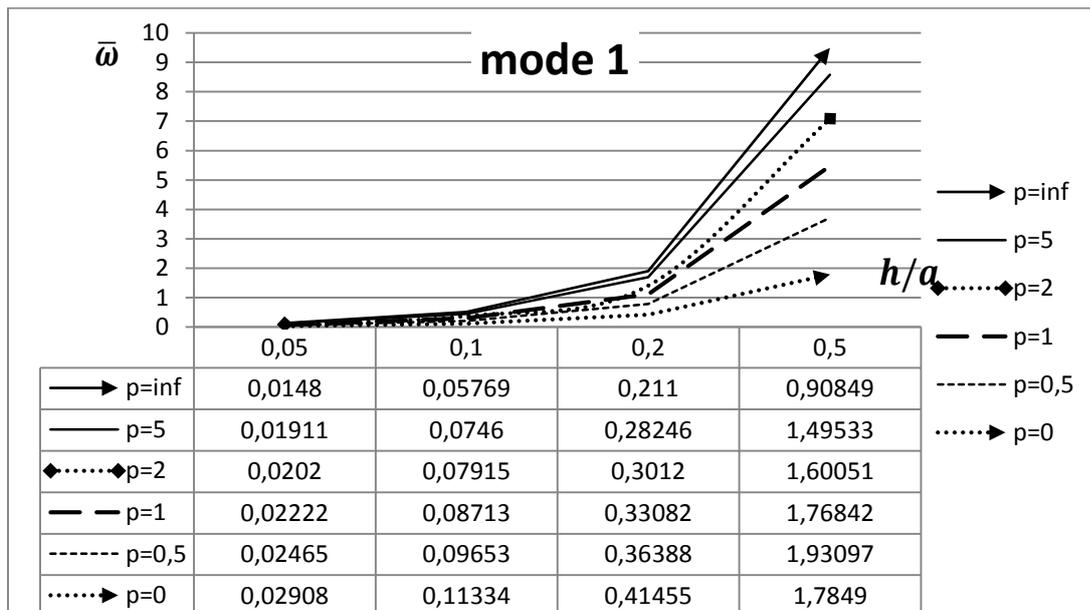


Fig (5-7) : Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1$, $\hat{k}_S=0$ et $\hat{k}_S=0$) en fonction du rapport d'épaisseur h/a .

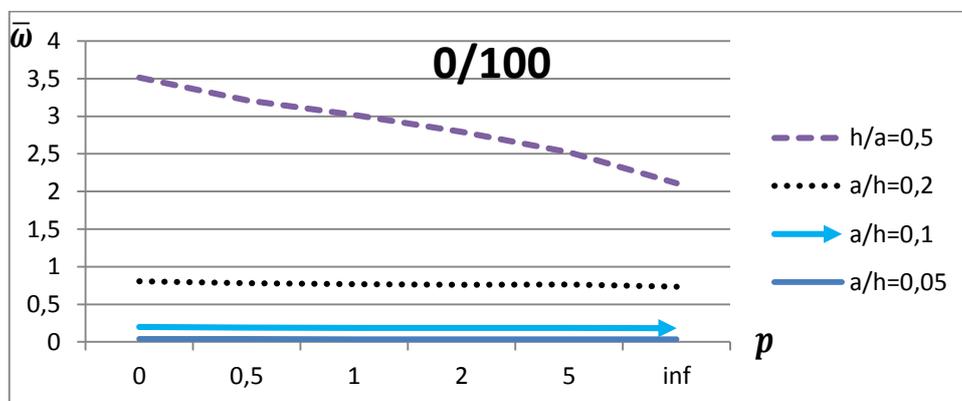
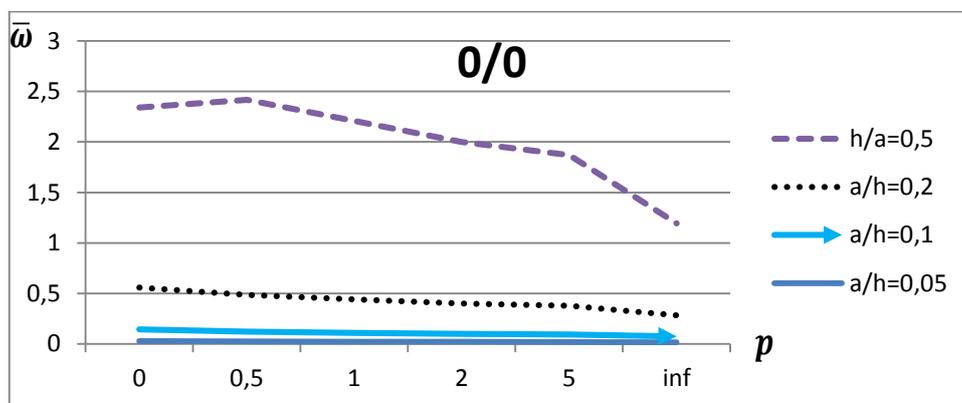
Nous remarquons aussi que l'influence du rapport d'épaisseur h/a sur les fréquences propres naturelles reste le même pour le reste des configurations (0/100, 100/0, 100/100).

5-5-3 Influence de l'index p sur les fréquences propres d'une plaque P-FGM :

Des graphes sont tracés pour démontrer l'influence de l'indice de puissance p sur les fréquences propres naturelles non dimensionnelles d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ (Aluminium/Alumine). La figure (5-8) montre l'influence de l'index de la fraction volumique p sur la fréquence propre naturelle, pour différents rapport d'épaisseur h/a (0.05, 0.1, 0.2, 0.5).

Nous remarquons que la fréquence devient plus petite en augmentant l'index de la fraction volumique de notre plaque. Nous remarquons aussi que l'effet de l'index de la fraction volumique p sur la fréquence propre naturelle est très important pour les plaques épaisses que pour les plaques minces.

En introduisant plus d'aluminium dans la plaque P-FGM, cette dernière perd de la rigidité par rapport à la même plaque avec une plus faible fraction volumique de métal, parce que le module de Young de l'aluminium est très faible devant celui de la céramique. Cette diminution de la rigidité globale de la plaque réduit ses fréquences propres naturelles. Il est bien claire que l'effet de l'indice de puissance reste le même pour toutes les configurations (avec ou sans paramètres Winkler et Pasternak).



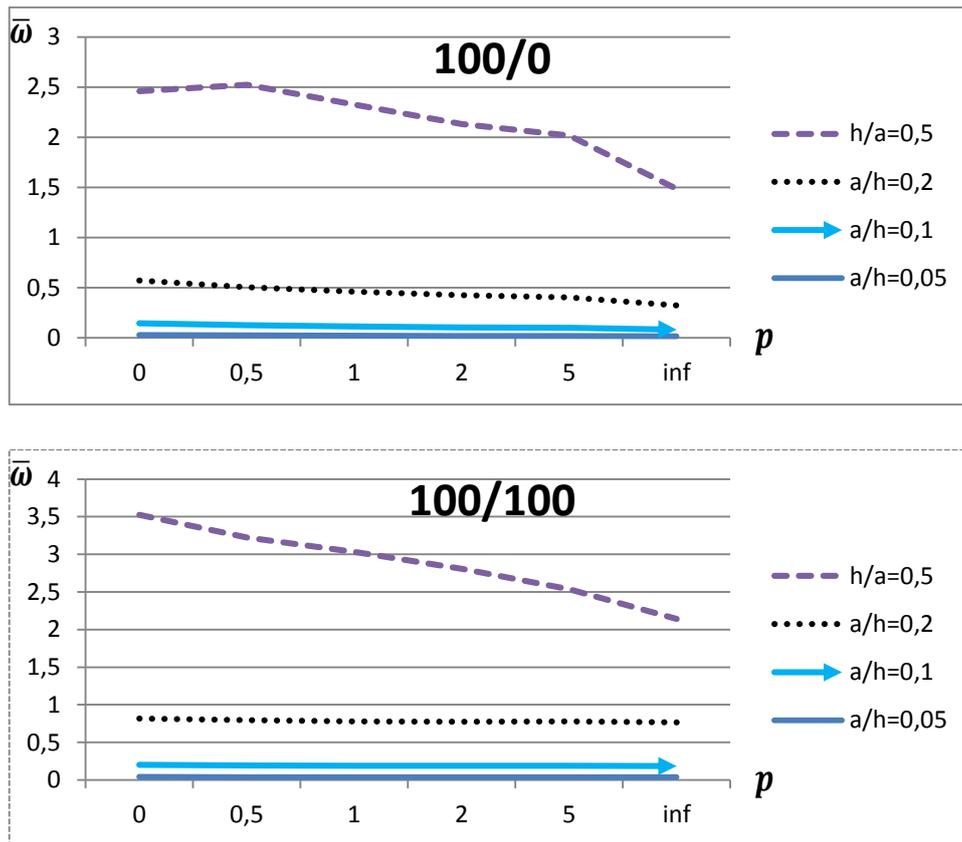


Fig (5-8) : Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/b = 1$) en fonction de l'indice de puissance p , pour les différentes configurations et rapport d'épaisseur.

Conclusion :

L'étude des vibrations libres de la plaque P-FGM sur une fondation élastique s'est faite en tenant compte de la théorie raffinée du troisième ordre. Les propriétés mécaniques de la plaque ont été prises comme variant à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. La méthode de Navier a permis la résolution du système d'équations différentielles et l'obtention des fréquences propres naturelles du système. De ce fait, le programme de calcul élaboré a été validé par comparaison avec des résultats déjà publiés.

Par la suite, une étude paramétrique de la plaque a été réalisée, en tenant compte des variables suivantes :

- L'indice de la fraction volumique p (concentration des matériaux constituants) ;
- Le rapport d'allongement a/h (géométrie de la plaque) ;
- Les coefficients de rigidité de la fondation.

Il a été noté que les fréquences naturelles du système vibratoire décroissent lorsque l'index de la fraction volumique p croit (en augmentant la concentration du métal et en diminuant celle

de la céramique). La géométrie de la plaque influe aussi sur les fréquences naturelles calculées : plus le rapport d'épaisseur est grand, plus les fréquences sont importantes.

Enfin, nous concluons que ces évolutions de fréquences naturelles des plaques étudiées sont une conséquence directe de la variation de la rigidité et de l'inertie globales en fonction des paramètres pris en considération dans cette étude.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques P-FGM carrées à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal à la face inférieure), sur appuis simples aux quatre bords, et sans contraintes thermiques et reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak. Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons étudié un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie raffinée et l'approche variationnelle. Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé aux autres modèles issus de la littérature. Il était prudent d'avoir choisi cette méthode pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM, car les recherches sur les vibrations libres des FGM sont tout à fait limitées, particulièrement concernant les effets d'interaction avec une base élastique.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences fondamentales non dimensionnelles obtenues en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnues) et les autres théories de déformation sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes vibratoires des plaques FGM.

Deuxièmement, l'étude paramétrique menée a démontré que le comportement vibratoire des plaques est intimement lié à la forme géométrique représentée par les rapports d'épaisseur, les propriétés des matériaux constituants par l'indice de la fraction volumique, les paramètres de fondation élastique, et aux théories appliquées pour modéliser la plaque. De plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement vibratoire.

Dans les applications technologiques, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir des paramètres de matériaux appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne

remettent pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à des conditions extérieures sévères.

En perspective. Le travail présenté dans cette thèse peut être développé et enrichi. Nous envisageons de réaliser l'étude de flambage des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques dans le cadre d'étude du comportement thermomécanique des plaques FGM. Il est également envisageable d'étendre l'analyse à des éléments structuraux à section variable et d'élargir l'étude aux coques qui sont des éléments très utilisées et très présentes dans les structures aérospatiales. On peut aussi résoudre les problèmes de vibration des structures reposant sur des fondations élastiques par la méthode des éléments finis et sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique, etc.) et sous diverses conditions aux limites.

BIBLIOGRAPHIE



Références bibliographiques :

- [1] Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.
- [2] Suresh, S., Mortensen, A. (1998), *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, (IOM Communications Ltd., London).
- [3] Hsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.
- [4] Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; 293–341.
- [5] Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.
- [6] Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35.
- [7] Baron. C, Naili. S. (2008), Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- [8] Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi *Member, IAENG*, Mukul Shukla and Sisa Pityana, "Functionally Graded Material: An Overview". dans *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III WCE 2012*, July 4 - 6, 2012, London, U.K.).
- [9] Lionel Gendre, "MATERIAUX COMPOSITES ET STRUCTURES COMPOSITES" publiée le 17-03-2011.
- [10] Koizumi, M. (1996), *FGM activities in Japan*, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- [11] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa (1986) casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites.
- [12] Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

- [13] Bao. G, Wang. L. (1995), Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [14] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- [15] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- [16] Mori, T. et Tanaka, K., « average stress in matrix and average élastic energy of material with the misfitting inclusions », *Acta metall*, (1973), 571-574.
- [17] E.F.F.Chladni, "Entdeckung Uber die Théorie des Klanges", Leipzig, (1787).
- [18] Kirchhoff. G. "Vorlesungen uber Mathematics he Physik", Vol.1 B.G. Teubner Leipzig, Germany (1876).
- [19] Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company (1877).
- [20] W. Ritz, "Theory Dertransversals Chwingungen einer Quadratische Platte Mit Freien"
- [21] S.Timoshenko" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars "Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [22] S.Timoshenko "On the Transverse Vibration of Bars of Uniform. Cross Section " Philosophical Magazine, 43 series (6) 125-131 (1922).
- [23] A.E.H. Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ", Dover, New York. Randern, *Annalen der physik* 28 737-736 (1944).
- [24] R.D. Mindlin. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", *Journal of applied mechanics*, 18 31-38 (1951).
- [25] Reissner E. " The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". *J. of appl. Mech.*, (12) A69-A77 (1945).
- [26] Warburton, G .B. "The vibration of Rectangular Plates". *Proceeding of the Institute of Mechanical engineers, Series A* 168, 371-384 (1954).
- [27] A.W. Leissa " Vibration of Plates", NASA SP-160, Scientific and technical Information Division of NASA, Washinton, US, DC, 1969.
- [28] Arthur Lebé,«THÈSE Doctorat homogénéisation de plaques périodiques épaisses, application aux panneaux sandwichs à âme pliable en chevrons» UNIVERSITÉ PARIS – EST 2010
- [29] A.W. Leissa" The Free Vibration of Rectangular Plate". *The journal of sound and Vibration*, 31 257-293 (1973).

- [30] A.W. Leissa " Recent Research in Plate Vibration". The shock and vibration Digest sound and Vibration, Part II: Complicated effects 19(3). 10-24. (1981-1985).
- [31] K.M. Liew et al " Reasearch on Thick Plate Vibration: A literature survey" The journal Of sound and Vibration, 180(1), 163-176 (1995).
- [32] J.M. Berthelot – Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition – Paris : Editions Masson, 1999.
- [33] J. Molimard : Mécanique des Matériaux composites- Version 2, Septembre 2004.
- [34] Reddy. J.N, (1997). “Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis”, second edition”, Florida: CRC Press, (2004).
- [35] T. Prakash a, M. Ganapathi: Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effects. Composite Structures 72(2006)10–18. 2004.
- [36] E.H. Dowell, E.F. Crawley, H.C. Curtiss, D.A. Peters, R.H. Scanlan, and F.A. Sisto : Modern course in Aeroelasticity-Kluwer Academic-3ème édition-1995.
- [37] Reddy. J.N, Energy principles and variational méthodes in applied mechanics, department of engineering Texas university-Edition John wiley & Sons.
- [38] S. Laroze – résistance des matériaux et structures – tome 3 – MASSON, EYROLLES - 1983.
- [39] Carrera, E. et Petrolo, M., « Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates », (2010), 48(12).
- [40] D’Ottavio, M. et Carrera, E., «variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells», AIAA journal, (2010), 48(9).
- [41] Kim, S.E., Thai, H.-T. et Lee, J., « Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory»,(2009), 47(4), 455-462
- [42] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", International Journal of Mechanical Sciences.
- [43] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", Composite Structures, 1738–1746.
- [44] Thai, H.-T., Dong-Ho Choi “A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation”, (2011).
- [45] Amale MAHI "ANALYSE ET ETUDE DES PLAQUES COMPOSITES FGM EN VIBRATIONS LIBRES". thèse de doctorat, Blida, 05 Avril 2012.
- [46] Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. Compos Struct 2011;93(7):1842–53.

- [47] Hosseini-Hashemi SH., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Omid M. “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”
- [48] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Compos. Struct.* 82 (2008) 499–512.
- [49] X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *J. Sound Vib.* 319 (2009) 918–939.