الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère De L'enseignement Supérieure Et De La Recherche Scientifique

Université De Blida1

Faculté Des Sciences

Département De Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques

Spécialité : **Analyse Mathématiques et Applications**

Réduction des singularités des équations différentielles $A(x,y)dy = B(x,y)dx$

Présentée par

Oukaci Karima

Soutenue publiquement, le 12 / 07 / 2022 devant le jury composé de :

Mr. BENDRAOUCHE Mohamed	PROF	Univ. Blida1	Président
Mr. BERKANE Djamel	MCA	Univ. Blida1	Directeur de mémoire
M^{me}. MOKHFI Siham	MCB	Univ. Blida1	Examinatrice

2021/2022

Table des matières

DÉDICACE

Salutations

à mon père

et

ma mère

et

khalil elrahman

et
à moi même

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord je remercie **ALLAH** qui ma donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail, et je remercie mon encadreur Monsieur **Berkane Djamel** pour avoir accepté d'encadrer ce mémoire. Un grand merci pour son extrême patience au cours de ces mois.*
J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur M. Bendraouche pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le Jury de ce mémoire et je remercie également Madame S. Mokhfi d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude de l'existence des solutions algébriques d'équations différentielles de la forme :

$$A(x,y)dy = B(x,y)dx \quad (1)$$

où A, B sont des éléments de l'anneau des séries formelles à deux variables $\mathbb{C}[[X,Y]]$
Il a pour principal objectif de réduire le problème au cas particulier où

$$r = \min(O(A), O(B)) \leq 1$$

avec $O(X)$ désigne l'ordre de la série formelle X,
Cette réduction apparait dans les différentes extensions du théorème fondamental de réduction des singularités de l'équation différentielle $Ady = Bdx$ (Théorème3.2) dû à A. Seidenberg [4] puis ensuite à Arno Van Dan Esen[1]. Il s'agit de montrer, qu'après un nombre fini de transformations de type : translations, transformations linéaires et éclatements ou " blowing up ", les solutions de l'équation différentielle $Ady = Bdx$, dans le cas où $r > 1$, correspondent à des solutions du même type d'équation, mais dans laquelle $r \leq 1$.

En particulier, afin de chercher une démonstration plus simple de ce théorème, on utilisera dans ce travail, à côté des différentes propriétés et résultats concernant la paramétrisation des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, la notion de multiplicité de l'intersection des courbes algébriques.

Notations

1. $\mathbb{C}$: Le corps des nombres complexes.

2. $\mathbb{C}[X]$: L'anneau des polynômes d'une indéterminée et à coefficients complexes.

3. $\mathbb{C}(X)$: Le corps des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients complexes.

4. $\mathbb{C}[[X,Y]]$: L'anneau des séries à deux indéterminées et à coefficients complexes.

5. $\mathbb{C}((X,Y))$: Le corps des séries rationnelles à deux indéterminées et à coefficients complexes.

6. $\mathbb{C}((X))^*$: La clôture algébrique des séries à une indéterminée et à coefficients complexes.

7. $a_1 \neq 0$, $O(a_1X^n + a_2X^{n+1} + \ldots) = n$: L'ordre de la série $a_1X^n + a_2X^{n+1} + \ldots$.

8. $\min(O(A), O(B))$: La mesure de complexité à l'origine de l'équation différentielle :

$$A(x,y)dy = B(x,y)$$

9. $I(F, G, (0,0))$: la multiplicité d'intersection des séries F et G au point $(0,0)$.

10. $R(X)$: Le résultant de deux polynômes.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude de l'existence des solutions algébriques d'équations différentielles de la forme :

$$A(x,y)dy = B(x,y)dx \tag{2}$$

où A, B sont des éléments de l'anneau des séries formelles à deux variables $\mathbb{C}[[X,Y]]$, sur le corps commutatif $\mathbb{C}$, algébriquement clos, et de caractéristique nulle .

Il a pour principal objectif de réduire le problème au cas particulier où

$$r = \min(O(A), O(B)) \leq 1$$

avec $O(X)$ désigne l'ordre de la série formelle X.

Pour $\min(O(A), O(B)) = O(A) = r$, la série formelle A se décompose en une somme de polynômes homogènes A_{r+i} de degrés $r+i$:

$$A = A_r + A_{r+1} + \dots$$

Le nombre r est une mesure de la complexité pour une équation $Ady = Bdx$ au voisinage de l'origine. En particulier le point $(0,0)$ est dit singulier pour cette équation si $r \geq 1$.

Cette réduction apparait dans les différentes extensions du théorème fondamental de réduction des singularités de l'équation différentielle $Ady = Bdx$ (Théorème3.2) dû à A. Seidenberg [4] puis ensuite à Arno Van Dan Esen[1].

Il s'agit de montrer, qu'après un nombre fini de transformations de type : translations, transformations linéaires et éclatements ou " blowing up ", les solutions de l'équation différentielle $Ady = Bdx$, dans le cas où $r > 1$, correspondent à des solutions du même type d'équation, mais dans laquelle $r \leq 1$.

En particulier, afin de chercher une démonstration plus simple de ce théorème, on utilisera dans ce travail, à côté des différentes propriétés et résultats concernant la paramétrisation des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, la notion de multiplicité de l'intersection des courbes algébriques. Dans le cas général, on considère l'équation différentielle :

$$A(x,y)\frac{dy}{dt} = B(x,y)\frac{dx}{dt} \tag{3}$$

où $x = x(t)$ et $y = y(t)$, $\quad t \in \mathbb{C}$.
Une solution de l'équation (2) au voisinage de l'origine est une branche de représentation centrée à l'origine qui satisfait l'équation (3).
Une telle branche est représentée par une paire non nulle de séries

$$x(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots, \quad y(t) = d_1 t + d_2 t^2 + \ldots$$

qui vérifie :

$$A(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} = B(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}.$$

On prouve alors, dans un premier temps, que l'existence d'une telle branche analytique de l'équation (2) est équivalente à l'existence d'un élément irréductible non nul F de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ qui vérifie :

$$DF = \left(A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}\right)F \equiv O \bmod F.$$

où D est un opérateur différentiel sur l'anneau $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Cette équivalence est la meilleure façon de relier l'équation $Ady = Bdx$ à l'opérateur $A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial Y}$.

Elle nous permet donc d'étudier la réduction sur l'ensemble des opérateurs différentiels D, et, on est ainsi ramené à établir les différentes propriétés concernant les solutions d'un opérateur différentiel $A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ au voisinage d'un point quelconque de l'ensemble $\mathbb{C}^2$.

L'utilisation des propriétés du nombre d'intersections au point $(0,0)$ de deux séries formelles F et G de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, noté $I(F,G,(0,0))$ intervient directement dans les différentes étapes de la démonstration du théorème principal.

Ce travail est composé de deux parties indépendantes. La première partie est consacrée aux outils mathématiques, permettant de démontrer le théorème principal.

On propose alors, dans le CHAPITRE 1, de présenter brièvement les propriétés des branches de représentation et les théorèmes principaux, concernant la paramétrisation des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Dans le CHAPITRE 2, après avoir décrit les solutions d'un opérateur différentiel

$$D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$$

et expliciter la relation qui existe entre celui-ci et l'équation différentielle $Ady = Bdx$, nous étudierons la correspondance entre les solutions de D et son transformé D^T, au moyens des transformations affines et les éclatements.

Le CHAPITRE 3 est consacré à la généralisation de la notion du nombre d'intersection aux courbes analytique et à la démonstration du théorème principal.

Dans le CHAPITRE 4, nous donnons une étude complété concernant l'existence des solutions analytiques d'un opérateur D dans le cas où la mesure de la complexité de D vérifie $r(D) \leq 1$,pour $F \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ en général et précisément dans $\mathbb{C}[[X, Y]]$:

$$DF = (A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y})F.$$

Chapitre 1

Branches de représentations

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *Soit* $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, *un élément de* $\mathbb{C}[[t]]$.
On appelle ordre de f *le plus petit entier positif* k *tel que* $a_k \neq 0$.

L'ordre de f est noté $O(f)$.

Exemple

* Si $f = a_0 + a_1 t + \ldots$, avec $a_0 \neq 0$,alors $O(f) = 0$.
* Si $f = 0$, on convient de donner la valeur $O(f) = \infty$.

Définition 1.2 **a)** *Une branche de représentation est un couple non nul* $(x(t), (y(t))$ *d'éléments de* $\mathbb{C}[[t]]$.

b) *On appelle centre d'une branche de représentation* $(x(t), (y(t))$ *l'élément* (a, b) *de* $\mathbb{C}^2$, *tel que en* $t = 0$ *on ait :* $x(0) = a$ *et* $y(0) = b$.

Définition 1.3 *Soient* $(x) = (x_1, x_2)$, $(y) = (y_1, y_2)$, *deux branches de représentations.*
On dit que la branche (x) *est équivalente à* (y) *si et seulement s'ils existe une série* τ *non nulle de* $\mathbb{C}[[t]]$, *d'ordre* $O(\tau) = 1$, *qui vérifie* $y_i = x_i(\tau)$, $\forall i \in \{1, 2\}$.

Proposition 1.1 *Chaque branche de représentation détermine une unique classe d'équivalence .*

Théorème 1.1 *Pour un système convenable de coordonnées, chaque branche de représentation est équivalente à une branche $(x(t), y(t))$, avec :*

$$x(t) = t^n \quad , y(t) = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \dots \quad , 0 < n < n_1 < n_2 < \dots$$

Démonstration. R. Walker [5]

Choisir le centre de la paramétrisation comme l'origine d'un système de coordonnées affine, la paramétrisation devient :

$$\overline{x_1} = t^n(b_0 + b_1 t + \dots) \ , \ n > 0$$

$$\overline{y_1} = t^{n_1}(c_0 + c_1 t + \dots) \ , \ n_1 > 0$$

avec au moins un des b_0 , c_0 différent de zéro. En échangeant des axes si nécessaire,nous pouvons supposer $b_0 \neq 0$ et :

$$\bar{t} = d_1 t + d_2 t^2 + \dots \ , \ d_1 \neq 0$$

et :

$$\overline{x} = \overline{x_1}(\bar{t}), \quad \overline{y} = \overline{y_1}(\bar{t})$$

donc :

$$\overline{x} = t^n(d_1 + d_1 t + \dots)^n [b_0 + b_1(d_1 t + \dots) + \dots]$$

$$= t^n[d_1^n b_0 + (n d_1^n d_2 b_0 + db) + \dots + (n d_1^{n-1} d_i b_0 + P_i(b_1, \dots, b_i, d_1, \dots, d_{i-1}))t^i + \dots]$$

où P_i est un polynôme en argument. Définir $d_1, d_2, \dots$ successivement par :

$$d_1^n = b_0^{-1} d_2 = -(n d_1^n b_0)^{-1} d_1^{n+1} b_1 d_i = -(n d_1^n b_0)^{-1} P_i \quad , \ i = 3, 4, \dots,$$

on a $\overline{x} = t^n$, $(\overline{x}, \overline{y})$ est la paramétrisation du type requise. □

Définition 1.4 *Une branche de représentation $(x(t), y(t))$ est dite réductible ou non-primitive s'il existe une série $\tau(t)$ de $\mathbb{C}[[t]]$, d'ordre $O(\tau) > 1$, qui vérifie :*
$x(t) = \bar{x}(\tau(t))$, $y(t) = \bar{y}(\tau(t))$, pour une certaine branche $\bar{x}, \bar{y}$ de $\mathbb{C}[[t]]$.
Les branches non-réductibles sont dites primitives ou irréductibles.

Le théorème suivant est un critère pour déterminer la nature des branches analytiques :

Théorème 1.2 *La branche de représentation*

$$(t^n,\ a_1t^{n1} + a_2t^{n2} + \dots)$$

où $0 < n < n_1 \dots,\ a_i \neq 0$ *, pour tout* $i \geq 1$*, est réductible si et seulement si* $n, n_1, n_2, \dots,$ *ont un facteur commun* > 1.

Démonstration. La suffisance de la condition est évidente. Pour prouver la nécessité :
Supposons qu'il existe $\bar{t}$, avec $O(\bar{t}) = 1$, de sorte que $\bar{x}(t), \bar{y}(\bar{t}) \in \mathbb{C}[[t^r]], r > 1$.
Nous montrons d'abord que $\bar{t}/t \in \mathbb{C}[[t^r]]$. Si ce n'était pas le cas donc $\bar{t}$ aurait la forme :

$$\bar{t} = t\left(b_0 + b_1t^r + \cdots + b_ht^{hr} + ct^s + \cdots\right),$$

où $b_0c \neq 0$ et $r \nmid s$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= t^n\left[\left(b_0 + \cdots + b_ht^{hr}\right) + ct^s + \cdots\right]^n \\ &= t^n\left(b_0 + \cdots + b_ht^{hr}\right)^n + nct^{n+s}\left(b_0 + \cdots + b_ht^{hr}\right)^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

Comme $\hat{x}(\bar{t}) \in \mathbb{C}[[t^r]]$, nous devons avoir $r \mid n$, car $\bar{x}(\bar{t})$ commence par le terme $b_0^nt^n$. après :

$$\bar{x}(\bar{t}) - t^n\left(b_0 + \cdots + b_ht^{hr}\right)^n = nct^{n+s}b_0^{n-1} + \cdots$$

est un élément de $\mathbb{C}[[t^r]]$, qui est impossible car $r\lceil(n+s)$. par conséquent$\bar{t} = t\bar{z}$, avec $\bar{z} \in \mathbb{C}[[t^r]]$.

Maintenant , supposons qu'au moins un des $n_1, n_2, \cdots$ n'est pas divisible par r, et laisser n_{h+1} le premier est n_i si divisible. puis

$$\begin{aligned}\bar{y}(\bar{t}) - \left(a_1t^{n_1}\bar{z}^{n_1} + \cdots + a_ht^{n_h}\bar{z}^{n_h}\right) &= a_{h+1}t^{n_{h+1}}\left(b_0 + b_1t^r + \cdots\right)^{n_{h+1}} + \cdots \\ &= a_{h+1}b_0^{n_{h+1}}t^{n_{h+1}} + \cdots\end{aligned}$$

le coté gauche de cette equation est nombre de $\mathbb{C}[[t^r]]$ est le coté droit n'est pas , cette contradiction implique que r doit être un facteur de n_i, et donc le théorème est prouvé. □

Exemple :

* $(t^4, (t^4+1)^3 - 1)$ est une branche réductible .
* $(0, t)$ est une branche primitive.

1.2 La paramétrisation des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$

Définition 1.5 *Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. On appelle paramétrisation de F , toute branche de représentation $(x(t),y(t))$ qui satisfait : $F(x(t),y(t))=0$.*

Exemple :

La branche $(0,t)$ est une paramétrisation primitive de $F(X,Y)=X$.

Proposition 1.2 *Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ et $(x)=(x_1,x_2)$ une paramétrisation de F. Alors :*

- *Chaque branche analytique de la classe d'équivalence de (x) est aussi une paramétrisation de F.*
- *Si $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ est le centre de (x), alors $F(a,b)=0$.*

Théorème 1.3 *Tout branche de représentation est une paramétrisation d'un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Cet élément est unique à un élément inversible prés*

Démonstration. Voir R. Walker [5] ou W. Fulton [2]. □

Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ avec $F(0,0)=0$, on cherche maintenant à montrer la réciproque du théorème 1.3, c'est à dire de prouver qu'il existe une paramétrisation du type $(t^n,y(t))$ centrée à l'origine , telle que :$F(t^n,y(t))=0$. Pour cela il est convenable de faire une extension sur la notion de séries.
Remplaçant l'indéterminé t par le symbole $X^{1/n}$, on introduit une relation entre les $X^{1/n}$, où $n=1,2,\ldots$, par les définition suivantes :

$$(X^{1/rn})^n=X^{1/r}\ ,\ X^{m/n}=(X^{1/n})^m.$$

Une paramétrisation de type qu'on vient de mentionner peut maintenant être écrite sous la forme :

$$(X,\overline{y}) \text{ ou } \overline{y}\in\mathbb{C}[[X^{1/n}]] \text{ et } F(X,\overline{y})=0.$$

Puisque $\mathbb{C}[[X^{1/n}]] \subset \mathbb{C}[[X^{1/rn}]]$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Alors la réunion de tous les corps de fraction des anneaux $\mathbb{C}[[X^{1/n}]]$ est un corps noté $\mathbb{C}((X))^*$ dont chaque élément $\overline{a}(x)$ s'écrit sous la forme :

$$a_1 X^{m_1/n_1} + a_2 X^{m_2/n_2} + \ldots, \text{ où } a_i \neq 0 \text{ et } m_1/n_1 < m_2/n_2 < \ldots.$$

on définit l'ordre de $\overline{a}(x)$ par $\dfrac{m_1}{n_1}$,on note aussi $\mathbb{C}[[X]]^*$ l'ensemble des élément de $\mathbb{C}(X)^*$ d'ordre positif.

Théorème 1.4 *(le théorème fondamental des courbes algébriques) $\mathbb{C}((X))^*$ est la clôture algébrique du corps $\mathbb{C}((X))$*

Démonstration. Voir R. Walker [5] ou W. Fulton [2]. □

Corollaire 1.1 *Soit $f(X,Y) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 Y + \ldots + \overline{a}_n Y^n$, $\bar{a}_i \notin \mathbb{C}(x)^*$, $\overline{a}_n \neq 0$.*

1. *Il existe un unique ensemble d'éléments $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$ de $\mathbb{C}(x)^*$ tel que*
$$f(X,Y) = \bar{a_n} \Pi_j (Y - \bar{y_j}) \ , \ j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$
2. *Si $O(\bar{a}_n) \leqslant O(\bar{a}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, alors $\forall j$, $\bar{y}_j$ sont des éléments de $\mathbb{C}(x)^*$.*
3. *Si $O(\bar{a}_n) = 0$, $O(\bar{a}_0) > 0$, $O(\bar{a}_i) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, alors au moins deux des $\overline{y}_j$ ont des ordres strictement positifs, $O(\overline{y}_j) > 0$.*

Démonstration. Voir R. Walker [5] ou W. Fulton [2]. □

On peut maintenant énoncer le résultat fondamental de ce chapitre :

Théorème 1.5 *Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ avec $F(0,0) = 0$, Alors il existe une branche de représentation primitive $(x(t), y(t))$ centrée à l'origine telle que $F(x(t), y(t)) = 0$. Cette paramétrisation est unique dans la classe des branches primitives .*

Démonstration. D'après le théorème de préparation de **Weierstrass**, on peut supposer que F s'écrit sous la forme : $F = Y^m + Y^{m-1}B_{m-1} + \ldots + B_0$, où B_i , $i = 1, \ldots, m-1$ sont des éléments de $\mathbb{C}[[X]$, Puisque $F(0,0) = 0$, alors $\mathrm{O}(B_0) > 0$ donc d'après les propriétés précédentes il existe une solution $\bar{y} \in \mathbb{C}(x)^*$, telle que $\mathrm{O}(\bar{y}) > 0$.
Soit n le plus petit entier positif, pour lequel $\bar{y}$ appartient au corps des fractions de $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$: En posant $t = X^{1/n}$, la branche de représentation $(t^n, y(t))$, où $y(t) = \bar{y}(t^n)$ est une paramétrisation centrée l'origine et primitive d'après le Théorème 1.2. □

Corollaire 1.2 *Soit* $(t^n\ ,\ a_1t^{n_1}+a_2t^{n_2}+\ldots)$ *, où* $0\ <\ n\ <\ n_1<$ *, une paramétrisation primitive d'un élément* F *de* $\mathbb{C}[[X,Y]]$*. Alors pour chaque* ε *vérifiant* $\varepsilon^n=1$*, il existe une solution de l'équation* $F=0$ *, de la forme :*

$$a_1\varepsilon^{n_1}X^{n_1/n}+a_2\varepsilon^{n_2}X^{n_2/n}+\ldots\ ,ou\ ,a_i\in\mathbb{C} \tag{1.2}$$

Démonstration. Suivant la démonstration du théorème 1.5 , posons $t=X^{1/n}$ pour un certain $\varepsilon^n=1$. Alors $t^n=X$, et la paramétrisation $(x(t),y(t))$ donne le série

$$\bar{y_\varepsilon}=a_1\varepsilon^{n_1}X^{n_1/n}+a_2\varepsilon^{n_2}X^{n_2/n}+\ldots$$

comme solution de l'équation $F(X,Y)=0$. □

Proposition 1.3

- *Soit* F *un série homogène de* $\mathbb{C}[[X,Y]]$ *. Alors on peut écrire* F *de manière unique sous la forme :*

$$\prod_i(a_iX+b_iY)^{l_i}\ ,\ a_i,b_i\in\mathbb{C},\ l_i\in\mathbb{N},\ i\in I\ \textit{et}\ I\textit{une partie finie de}\ \mathbb{N}$$

- *Soit* F *un élément non nul de* $\mathbb{C}[[X,Y]]$ *,d'ordre* $O(F)=r$ *,alors on peut écrire* F *sous la forme :* $F_r+F_{r+1}+\ldots$ *où les* F_i *sont des polynômes homogènes de degré* i

Définition 1.6 *On appelle tangente de* $F=0$ *au point* $(0,0)$ *,tout droite déterminée par les facteurs linéaires de* F_r*.*

Exemple :

Les tangentes de $F(X,Y)=X^4+Y^3-3X^2Y+2X^2Y^2+Y^4$
sont Y , $Y-\sqrt{3}X$ $Y+\sqrt{3}X$ dans l'espace $\mathbb{C}^2$

Remarque :

Si F est un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, d'après le lemme de **Hensel**, $F=0$ a seulement une tangente au point $(0,0)$. Donc $F_r=(aX+bY)^r$. Le théorème suivant montre

que le nombre de paramétrisations d'un élément F de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ est fini.

Théorème 1.6 *Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Alors le nombre de classes de paramétrisations de F à l'origine est égal au nombre de tangente de F au point* $(0,0)$.

Démonstration. Voir R. Walker [5] □

Corollaire 1.3 *Soit F un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Alors F possède une seule classe de paramétrisation centrée à l'origine .*

Résumé :

- Toute branche primitive (x(t),y(t)), correspond un élément F de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que $F((x(t),y(t)) = 0$ et inversement .
- Toute paramétrisation centrée à l'origine d'un élément F de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ donne une série de puissances $a_1X^{n_1/n} + a_2X^{n_2/n} + \ldots$, comme solution de l'équation $F(X,Y) = 0$. Cette solution est dite algébrique sur $\mathbb{C}[[X,Y]]$.
- Tout élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ possède une seule classe de paramétrisation centrée à l'origine.

Chapitre 2

Opérateurs différentiels

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Soient $A, B \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, On dit que $F \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ est solution de l'opérateur $D = (A\dfrac{\partial}{\partial X} + B\dfrac{\partial}{\partial Y})$ si $\exists K \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que $DF = KF$.*

Théorème 2.1 *Soient F et G des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ et D un opérateur différentiel.*

1. *Si F est solution de D alors pour chaque élément inversible H de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ on a $H.F$ est aussi une solution de D.*

2. *Si $F.G$ est solution de D, avec $(F,G) = 1$,alors F et G sont aussi des solutions de D.*

3. *Si F et G sont des solution quelconques de D alors $F.G$ et aussi une solution de D.*

Démonstration.

1. puisque F et une solution de D alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que

$$D.F = \lambda.F$$

donc : $\forall H \in \mathbb{C}[[X,Y]]$

$$\begin{aligned} D(F.H) &= H.DF + F.DH \\ &= H.\lambda.F + F.DH.1 \\ &= H.\lambda.F + F.DH.V.H \quad ; \qquad (V \in \mathbb{C}[[X,Y]] \qquad et\, V.H = 1) \end{aligned}$$

Alors :

$$D(F.H) = H.F.(\lambda + V.DH)$$

et donc :

$D(F.F) \equiv 0 \bmod (F.H)$ de plus $(H.F)(0,0) = 0$ d'où le résultat.

2. Montrons que F est solution de D au point $(0,0)$. , Il existe une série $\lambda \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que :

$$D(F.G) = F.DG + G.DF = \lambda.F.G$$

Alors :

$$G.DF = F(\lambda F - DG)$$

et donc F divise $G.DF$, mais puisque F et G sont premier entre eux , alors divise DF . Et puisque $O(F) \geq 1$ (car $O(F) = 0$ implique que F est inversible, d'où $(F.G) \neq 1$) , alors $DF \equiv 0 \bmod F$ et $F(0,0) = 0$, D'où la conclusion .

3 Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que $DF = \lambda_1 F$ et $DG = \lambda_2 G$ donc :

$$D(F.G) = F.DG + G.DF \qquad = \lambda_2.F.G + \lambda_1.F.G = (\lambda_1 + \lambda_2).(F.G)$$

La valeur du produit $(F.G)$ au point $(0,0)$ est égale à :

$$(F.G)(0,0) = 0$$

Donc $F.G$ est solution de D à l'origine.

$\square$

Corollaire 2.1 *Soit $\prod_i^n F_i^{l_i}$ une décomposition en facteurs premiers d'une solution de D dans $\mathbb{C}[[X,Y]]$ alors pour tout $i = 1, \ldots, n$; F_i est solution de D et la réciproque est aussi vraie.*

Démonstration.

Si $\prod F_i^{l_i}$ est une solution de D à l'origine alors d'après le Théorème 2.1 $F_i^{l_i}$ est aussi solution de D pour tout i .En utilisant le fait que :

$$DF_i^{l_i} = l_i F_i^{l_{i-1}}$$

, on obtient que F_i est solution de D pour tout i.

Réciproquement , si pour tout i , F_i est solution de D ,alors en faisant une récurrence sur l_i ,on trouve que $F_i^{l_i}$ est aussi solution de D . Donc d'après le Théorème2.1 $\prod F_i^{l_i}$ est solution de D à l'origine.

- Comme conséquence, pour étudier les solutions de D , il suffit de se restreindre aux solutions irréductibles.

$\square$

Soit maintenant : $A(x, y)dy = B(x, y)dx$ une équation différentielle, où A et B sont des éléments de $\mathbb{C}[[X, Y]]$

Définition 2.2 *Une solution nulle à l'origine de l'équation différentielle $Ady = Bdx$ est une branche analytique, primitive $(x(t), y(t))$ centrée à l'origine et qui satisfait*

$$A(x, y)\frac{dy}{dt} = B(x, y)\frac{dx}{dt}$$

La relation qui existe entre l'opérateur différentiel $(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y})$ et l'équation $Ady = Bdx$ est explicitée dans le théorème suivant.

Théorème 2.2 **a)** *Soit $(x(t), y(t))$ une solution de $Ady = Bdx$ et soit $F \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ un élément irréductible, qui vérifie $F(x(t), y(t)) = 0$. Alors F est une solution de D*

b) *Soient F un élément irréductible ,solution de D et $(x(t), y(t))$ une paramétrisation primitive de F,Alors $(x(t), y(t))$ est une solution de l'équation différentielle $A(x, y)dy = B(x, y)dx$*

Démonstration.

a) En dérivant la fonction $F(x(t), y(t))$ par rapport à t ,on obtient l'équation :

$$(\frac{\partial F}{\partial x})_{(x,y)}.\frac{dx}{dt} + (\frac{\partial F}{\partial y})_(x, y)\frac{dy}{dt} = 0 \ ; \quad \forall t$$

Mais l'hypothèse $(x(t), y(t))$ est solution de l'équation $Ady = Bdx$ implique :

$$A(x, y)\frac{dy}{dt} = B(x, y)\frac{dx}{dt}$$

Cette relation se met sous la forme d'un déterminant :

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ -B & A \end{pmatrix}_{(x,y)} = 0$$

car $(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}) \neq 0$ (le raisonnement par l'absurde implique que la branche $(x(t), y(t))$ n'est pas centrée a l'origine).Donc $D(F)(x(t), y(t)) = 0$, d'où la congruence $DF \equiv 0 \ mod\ F$ et la valeur de F au point $(0, 0)$ et $F(0, 0) = 0$. Celà implique que F est solution de D à l'origine

b) Réciproquement, si $F(x, y) = 0$ et $DF \equiv 0 \mod F$, alors

$$(\frac{\partial F}{\partial X})_{(x,y)}.\frac{dx}{dt} + (\frac{\partial F}{\partial Y})_{(x,y)}.\frac{dy}{dt} = 0$$

mais puisque $D(F)(x, y) = 0$, alors :

$$A(x, y)(\frac{\partial F}{\partial x})_{(x,y)} + B(x, y)(\frac{\partial F}{\partial y})_{(x,y)} = 0$$

Donc :

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ -B & A \end{pmatrix}_{(x,y)} = 0$$

Car si ce déterminant n'est pas nul, ça impliquerait que $(\frac{\partial F}{\partial X})_{(x,y)}$ et $(\frac{\partial F}{\partial Y})_{(x,y)}$ sont nuls, donc la branche $(x(t), y(t))$ est aussi une paramétrisation de $\frac{\partial F}{\partial X}$, donc d'après le Théorème1.3, F divise $\frac{\partial F}{\partial X}$ mais ceci est impossible car l'ordre de $\frac{\partial F}{\partial X}$ ou $\frac{\partial F}{\partial Y}$ est inférieur à celui de F , D'où la conclusion.

□

2.2 Transformations d'un opérateur différentiel

Nous allons maintenant étudier les solution de l'opérateur D , en utilisant trois types de transformations :

1. Transformation linéaire.

2. Translations.

3. Les éclatements ou "blowing up".

1. En fait on utilisera simplement les transformation linéaires de la forme :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

où $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $c_{11}.c_{22} - c_{21}.c_{12} \neq 0$. Ces nouvelles coordonnées transforment l'opérateur en $D_1 = A_1 \dfrac{\partial}{\partial X} + B_1 \dfrac{\partial}{\partial y}$ avec

$$A_1 = DX' = D(c_{11}X + c_{12}Y) = c_{11}A + c_{12}B$$
$$B_1 = DY' = D(c_{21}X + c_{22}Y) = c_{21}A + c_{22}B$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = (c_{ij}) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A_1 & X' \\ B_1 & Y' \end{pmatrix} = (c_{ij}) \begin{pmatrix} A & X \\ B & Y \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient la relation :

$$B_1.X' - A_1.Y' = det(c_{ij})(B.X - A.Y)$$

comme conséquence, $B.X - A.Y$ est covariant sur les transformation linéaires.
Si $r = \min(O(A), O(B))$ avec $A = A_r + \dots$, $B = B_r + \dots$ ou A_i , B_i sont des polynômes homogènes de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Alors $I(D) = I(X, Y) = B_r X - A_r Y$ est aussi covariant.

L'importance de $I(D)$ apparait dans la démonstration du théorème de réduction des singularités des équations différentielles $Ady = Bdx$.

2. La translation consiste à poser $X' = X - a$, $Y' = Y - b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Maintenant traiter la transformation du type 3. Soit de nouveau

$$F = F_r + F_{r+1} + \dots$$

posons $X' = X$, $Y' = \dfrac{Y}{X}$,alors on définit le transformé F' de F par :

$$F'(X',Y') = \frac{1}{X^r}F(X,XY') = F_r(1,Y') + XF_{r+1}(1,Y') + \ldots$$

Cette définition implique que pour chaque $c \in \mathbb{C}$, F' peut être considéré comme un élément de $\mathbb{C}[[X', Y' - c]]$

Proposition 2.1 *Le transformé d'un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ avec une transformation du type 3 est aussi irréductible.*

Démonstration. Posons maintenant $r = r(D) = Min(O(A), O(B))$ où D est l'opérateur différentiel $A\dfrac{\partial}{\partial x} + B\dfrac{\partial}{\partial y}$ et faisons la transformation $X' = X, Y' = \dfrac{Y}{X}$ on obtient alors le transformé D' de D :

$$D' = A'\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y} \quad ,avec \quad A' = DX' = DX = A(X,XY').$$

et

$$\begin{aligned} B' = D'Y' = D(\frac{Y}{X}) &= \frac{1}{X}B(X,XY') - \frac{Y'XA(X,XY')}{X^2} \\ &= \frac{B(X,XY' - Y'A(X,XY'))}{X} \end{aligned}$$

En supposant que $I(1,Y') = B_r(1,Y') - Y'A(1,Y')$ est non nul, alors :

$$B'(X',Y') = X^{r-1}.(I(1,Y') + X(\ldots))$$

On prend alors $\quad D^T = \dfrac{D}{X^{r-1}} \quad$ si $\quad I(1,Y') = 0$, $\quad$ On pose $\quad D^T = \dfrac{D}{X^r}$.
Enfin, on décrit comment les solutions de D correspondent avec les solution du transformé de D noté D^T. □

Théorème 2.3 *Soit $F = (Y - cX)^m + F_{m+1} + \ldots$ une solution de D au point $(0,0)$ Alors $F'(X',Y') = (Y' - c)^m + XF_{m+1}(1,Y') + \ldots$, est une solution de D^T au point $(0,c)$. Réciproquement, soit $F'(X',Y')$ une solution de D^T au point $(0,c)$ avec $F' \neq X'$, alors $X^{r-1}F'(X,\dfrac{Y}{X})$est une solution de D au point $(0,0)$ où r est défini par :*

$$F'(0,Y') = C_rY'^r + C_{r+1}Y'^{r+1} + \ldots \;, C_r \neq 0$$

Démonstration.

a. Soit $F = (Y - cX)^m + F_{m+1} + \dots \ , m \geq 1$ une solution de D au point $(0,0)$,alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que $DF = \lambda.F\lambda$

Supposons que $I(1, Y') \neq 0$, Alors le transformé D^T de D après un éclatement s'écrit

$$D^T F' = \frac{D'F'}{X^{r-1}}$$

où $\ r = Min(O(A), O(B))\ $ et $D'F' = I + II$,avec :

$$I = \frac{-mF(X, XY').A(X, XY')}{X^{m+1}}$$

$$et$$

$$II = \frac{1}{X^{m+1}}\{A'\frac{\partial F}{\partial X} + A'.Y'.\frac{\partial F}{\partial Y} + B'.Y'.\frac{\partial F}{\partial Y}\}$$

l'hypothèse $D^T F' = \dfrac{D'F'}{X^{r-1}}$, implique les relations :

$$\begin{aligned} D'F' &= \frac{-mF(X,Y)A'}{X^{m+1}} + \frac{1}{X^m}\{A'\frac{\partial F}{\partial X} + A'.\partial\frac{1}{X}.Y'\frac{\partial F}{\partial Y} + B'.X.\frac{\partial F}{\partial Y}\} \\ &= \frac{-mF(X,Y').A}{X} + \frac{1}{X^m}A'\frac{\partial F}{\partial X} + B'\frac{1}{X^m}\frac{\partial F}{\partial Y} \\ &= \frac{-mF'(X,Y')A'}{X} + \frac{1}{X^m}\{A\frac{\partial F}{\partial X} + B\frac{\partial F}{\partial Y}\} \\ &= \frac{-m.A.F'}{X} + \frac{1}{X^m}DF \end{aligned}$$

de plus puisque X^r divise A et $D'F' \equiv 0\ mod\ X'F'$ dans $\mathbb{C}[[X, Y' - c]]$ alors : $D^T F' \equiv 0\ mod\ F'$ (car $D^T F' = \dfrac{1}{X'}DF'$), d'où le résultat.

b. D'après le théorème de préparation de **Weierstrass** et la proposition2.1,on peut écrire F' sous la forme :

$$(Y' - c)^s + B_{s-1}(Y' - c)^{s-1} + \ldots + B_0 \quad ou \quad s = O(F(0, Y'))$$

donc : $F'(X, \dfrac{Y}{X}) = \dfrac{1}{X^s}(Y - cX)^s + B_{s-1}X(Y - cX)^{s-1} + ... + X^s B_0$

Posons $\ F = X^s F'(X, \dfrac{Y}{X})$,puisque F' est solution de D^T au point $(0, c)$ il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}[[X, Y' - c]]$ tel que $D'F' = \lambda.F'$.

En calculant $DF(X,Y)$ on trouve : $D(X^sF'(X,\dfrac{Y}{X})) = I + II$ où :

$$I = sX^{s-1}A(X,Y)F'(X,\frac{Y}{X}) + X^sA(X,Y)\frac{\partial F'}{\partial X}$$
$$II = X^sA(X,Y)\frac{-Y}{X^2}.\frac{\partial F'}{\partial Y'} + X^{s-1}B(X,Y)\frac{\partial F'}{\partial Y'}$$

donc $DF = sX^{s-1}A(X,Y)F'(X,Y') + X^sD'F'$

Supposons que $D'F' = X^rD^TF'$,alors

$$DF = sX^{s-1}A(X,Y)F'(X,Y') + X^{s+r}\lambda F'$$

mais puisque X^r divise $A, D'F' = \lambda F'X^r$ et $F = X^rF'(X,Y')$ alors

$$DF = s.\overline{A}(X,Y).F(X,Y) + \lambda X^r.F(X,Y)$$

où $\overline{A} = \dfrac{1}{X}A(X,Y)$, donc $DF \equiv 0 \; mod \; F$. D'où le résultat cherché.

$\square$

Corollaire 2.2 *Soit $F(X,Y) = Y - \sum_i c_iX^i$ une branche linéaire solution de D au point $(0,0)$. Alors $F'(X',Y') = (Y'-c) - \sum_i c_iX^i$ est une branche linéaire solution de D^T au point $(0,c_1)$.*
Réciproquent, soit $F'(X',Y') = (Y'-c) - \sum_i c_iX^i$ une branche linéaire solution de D^T au point $(0,c)$ .Alors $Y - cX - \sum_i c_iX^{i+1}$ est une branche linéaire sans tangente vertical, solution de D au point $(0,0)$

Démonstration. C'est le cas particulier de $m = 1$ du Théorème 2.3 $\square$

Résumé :

- L'existence d'une branche primitive, solution de l'équation $Ady = Bdx$ est équivalente à l'existence d'une solution irréductible de l'opérateur $D(A\dfrac{\partial}{\partial X} + B\dfrac{\partial}{\partial Y})$

- Tout paramétrisation, solution de l'équation différentielle $Ady = Bdx$,donne une série $a_1x^{1/n} + a_1x^{2/n} + \ldots$ comme solution algébrique de l'équation $Ady = Bdx$.

Chapitre 3

Multiplicité d'intersection de courbes algébriques analytiques

3.1 La multiplicité d'intersection d'éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$

On commence d'abord par la notion d'ordre d'une série formelle à deux indéterminées, puis on donne la définition du nombre d'intersections d'élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

Définition 3.1 *Soient F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ et $\delta = (x(t), y(t))$ une branche de $\mathbb{C}[[t]]$, On appelle ordre de F sur δ, noté $O_\delta(F)$, l'ordre de la série $F((x(t), y(t))$ par rapport à t.*

Exemple :

Soient $F(X,Y) = X^2 + Y^2$ et $\delta = (t^2, t^3)$, alors $F(\delta) = t^4 + t^6$, d'où $O_\delta(F) = 4$.

Proposition 3.1 *Soient $F, G \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, et δ une branche de $\mathbb{C}[[t]]$, Alors :*

$O_s(F.G) = O_\delta(F) + O_s(G)$.

. *Si δ est centrée à l'origine et $F(0,0) = 0$, alors $O_s(F) = 0$.*

. *Si δ est une paramétrisation de F , alors $O_\delta(F) = \infty$.*

. *Si δ' est une branche équivalente à δ , alors $O_{\delta'}(F) = O_\delta(F)$.*

Théorème 3.1 *Soient de F et G deux élément non nuls de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Alors la somme des ordre de F sur les différentes classes de paramétrisations de G au point $(0,0)$ est égale à la somme des ordres de G sur les différentes classes de paramétrisations de F au point $(0,0)$.*

Démonstration.

Supposons que F et G sont des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, D'après le corolaire1.1, les séries F et G s'écrivent :

$$F(X,Y)=\prod_{i=1}^{i=m}(Y-\overline{y_i})\,,\ G(X,Y)=\prod_{i=1}^{i=n}\left(Y-\bar{Z}_i\right) \tag{3.1}$$

et leurs ordres est $O(F)=m, O(G)=n$, avec $m,n\geq 1$ et $\overline{y_i},\bar{Z}_i\in\mathbb{C}(X)^*$.

Soit $\bar{y}_i$ une série associé à une paramétrisation :

$$P=\left(t^r,\sum b_i t^i\right) \tag{3.2}$$

de F au point $(0,0)$, avec $r,i\geq 1$, donc 3.1 et 3.2 impliquent :

$$G\left(t_r,\sum b_i t^i\right)=at^n+\ldots,\ a\neq 0,\ \text{où}\ \ O_P(G)=N \tag{3.3}$$

Si $O_p(G)=\infty$, alors la série $at^N+\ldots$, est remplacée par une série nulle . Le corollaire1.2 implique existence des paramétrisations de F équivalentes à P de la forme $(t^r,\sum_i b_i\ \varepsilon_\lambda^i\ t^i)$, où ε_λ est une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité, de plus nous avons des racines $\bar{y}_\lambda$ de l'équation $F(X,Y)=0$ de la forme :

$$\bar{y}_\lambda=b_1\varepsilon_\lambda X^{1/r}+b_2\varepsilon_\lambda X^{2/r}+\ldots \tag{3.4}$$

Donc d'après 3.3, on obtient :

$$G(X,\overline{y_1})=aX^{\frac{N}{R}}+\ldots$$

, et de la même manière $G(X,\overline{y_\lambda})=a\varepsilon_\lambda^N X^{\frac{N}{R}}+\ldots$ d'où :

$$\prod_\lambda G(X,\overline{y^\lambda})=bX^N+\ldots,\ b\neq 0$$

Donc, si on fait le même raisonnement pour chaque classe de paramétrisation de F à l'origine, on trouve :

$$O\left[\prod_\alpha G\left(x,\bar{y}_\alpha\right)\right]=\sum_p O_p(G),$$

le produit porte sur toutes les racines $\bar{y_\alpha}$ de $F(X,Y)$ et la somme porte sur les différentes classes P de F à l'origine.

Maintenant soient $\overline{\mathrm{Z}}_\beta, \overline{\mathrm{Z}}_{\beta'}$ deux racines de l'équation $G(X,Y)=0$ avec $O\left(\bar{z}_{\beta'}\right)=0$, alors :

$$\prod_{\alpha} G\left(X, \bar{y}_\alpha\right)=\prod_{\alpha, \beta}\left(\bar{y}_\alpha-\bar{z}_\beta\right) \prod_{\alpha \beta}\left(\bar{y}_\alpha-\bar{z}_{\beta'}\right)$$

donc :

$$\sum_p O_p(G)=O(\prod_{\alpha,\beta}(\bar{y}_\alpha-\bar{z}_\beta))+O(\prod_{\alpha,\beta'}(\bar{y}_\alpha-\bar{z}_{\beta'}))$$

Mais puisque $\overline{\mathrm{Z}}_{\beta'}(0)\neq 0$, alors si $\overline{\mathrm{Z}}_{\beta'}(0)\neq \bar{y}_\alpha(0)$ on a $O\left(\bar{y}_\alpha-\overline{\mathrm{Z}}_{\beta'}\right)=0$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_P O_P(G)=O\left(\prod_{\alpha,\beta}\left(\bar{y}_\alpha-\bar{z}_\beta\right)\right) &= O\left(\prod\nolimits_{\alpha,\beta}\left(\bar{z}_\alpha-\bar{y}_\beta\right)\right)\\ &=\sum_Q O_Q(F)\end{aligned}$$

où la dernière somme porte sur les différentes classes de paramétrisation de G au point (0.0), d'où le résultat. □

On peut maintenant définir le nombre d'intersection de deux éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$:

Définition 3.2 *Soient F et G deux éléments non nuls de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. On appelle nombre d'intersections, ou multiplicité d'intersection de F et G au point $(0,0)$, le nombre $\sum_P O_P(G)$ où P décrit i les classes de paramétrisation de F au point $(0,0)$.*

On noté $I(F,G,(0,0))$ la nombre d'intersections de F et G au point $(0,0)$. Les propositions suivantes relient le nombre d'intersection de F,G et leurs résultant $R(X)$, en prenant F,G comme des éléments de $\mathbb{C}[[X]][Y]$:

Proposition 3.2 *Soient F et G des élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$,qui n'admettent pas de points d'intersections sur l'axe des Y (sauf peut être à l'origine). Alors l'équation $R(X)=0$ admet l'origine comme racine de multiplicité égale au nombre d'intersections de F et G au point $(0,0)$.*

Démonstration.

Comme nous l'avons démontré dans le théorème1.4 ,Les séries F et G se mettent sous la forme de produit :

$$F=\prod_{\alpha}\left(Y-\bar{y}_\alpha\right) \prod_{\alpha'}\left(Y-\bar{y}_{\alpha'}\right) \quad \text{et} \quad G=\prod_{\beta}\left(Y-\bar{z}_\beta\right) \prod_{\beta'}\left(Y-\bar{z}_{\beta'}\right),$$

les indices $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont dans $\mathbb{N}$
avec :

$$O(\bar{y}_\alpha) > 0,\ O(\bar{z}_\beta) > 0,\ O(\bar{y}_\alpha) = 0,\ O(\bar{z}_\beta) = 0.$$

Les propriétés de $R(X)$ impliquent alors la décomposition :

$$R(X) = \prod_{\alpha_\beta \beta} (\bar{y}_\alpha - \bar{z}_\beta) \cdot \prod_{\alpha' \beta} (\bar{y}_{\alpha'} - \bar{z}_\beta) \cdot \prod_{\alpha, \beta'} (\bar{y}_\alpha - \bar{z}_{\beta'}) \cdot \prod_{\alpha', \beta'} (\bar{y}_{\alpha'} - \bar{z}_{\beta'}).$$

D'où :

$$O\left(\prod_{\alpha', \beta} (\bar{y}_{\alpha'} - \bar{z}_\beta)\right) = \prod_{\alpha, \beta'} (\bar{y}_\alpha - \bar{z}_\beta)\right) = 0$$

alors $O\left(\prod_{\alpha', \bar{\sigma}'} (\bar{y}_{\alpha'} - \bar{z}_{\beta'})\right) = 0$, car $O(\bar{y}_{\alpha'} - \bar{z}_{\beta'}) \neq 0$ pour certaines $\bar{y}_{\alpha'}, \bar{z}_{\beta'}$, donc $\bar{y}_{a'}, \bar{z}_{\beta'}$ commencent par une même constante $a \neq 0$, par suite les, classes de paramétrisation correspondantes auront le même centre $(0, a)$ sur l'axe des Y, donc $F(0, a) = G(0, a)$, contrairement à l'hypothèse que F et G ne possède pas de points d'intersection sur l'axe des Y autre que $(0, 0)$. Donc :

$$O(R(X)) = O\left(\prod_{\alpha, \beta} (\bar{y}_\alpha - \bar{z}_j)\right).$$

$=$ le nombre d'intersection de F et G à l'origine. □

Proposition 3.3 *Soient F et G des éléments de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ et P une classe de paramétrisation de F à l'origine.* Si$O_P(G) = \infty$ *alors F et G possèdent un facteur commun.*

Démonstration. Si $O_P(G) = \infty$, alors $G(P) = 0$ donc P est une paramétrisation de F et G au point $(0, 0)$, donc les propriétés du résultant de F et G impliquent $R(X) = 0$, donc F et G possèdent un facteur commun . □

Donc, d'après le théorème 1.6, le nombre d'indices P dans la somme $\sum O_P(G)$ de la définition de $I(F, G, (0, 0))$ est fini.

Remarque :

On peut définir généralement le nombre d'intersections de deux éléments de $\mathbb{C}[[X - a, Y - b]], a, b \in \mathbb{C}$ de la manière suivante : si F et G sont des éléments de $\mathbb{C}[[X - a, Y - b]]$, alors :

$$I(F, G, (a, b)) = \sum_P O_P(G) = \sum_Q Q_{Q^{(F)}}$$

où P et Q sont les classes de paramétrisation de F et G respectivement centrées au point (a, b).

3.2 Nombre d'intersections

Les principaux résultats concernant la notion du nombre d'intersection de deux éléments de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ sont démontrés dans les propositions suivantes :

Proposition 3.4 *Soient F, G, F_1, F_2, Des éléments de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ et le point $0 = (0, 0)$:*

a)- $I(F, G, 0) = I(G, F, G)$.

b)- *Si* $O(F) = 0,\ alors I(F, G, 0) = 0$.

c)- *Si F et G ont un facteur commun, alors $I(F, G, 0) = \infty$.*

d)- $I(F_l, F_2, G, 0) = I(F_1, G, 0) + I(F_2, G, 0)$.

e)- $I(F + AG, G, 0) = I(F, G, 0)$ *pour tout* $A \in \mathbb{C}[[X, Y]]$.

Démonstration.

a- Par hypothèse $I(F, G, 0) = \sum_P O_P(G) = \sum_Q O_Q(F) = I(G, F, 0)$, où P et Q représentent respectivement les différentes classes de paramétrisations de F et G au point $(0, 0)$.

b- Si $O(F) = 0$, alors $F(0, 0) = a \neq 0$. donc en calculant $F(P)$ pour une paramétrisation P de G au point (0.0) on trouve que :

$$F(P) = a + bt + \ldots . \quad \text{d'où} \quad O_P(F) = 0 \quad \text{et} \quad I(F, G, 0) = 0.$$

c- Si F et G. ont un facteur commun, alors leurs résultant $R(X)$ est nul, donc d'après la proposition3.2, on a :

$$\infty = O(R(X)) = I(F, G, 0) \text{ , d'où le résultat.}$$

d- Par hypothèse $O(x(t), y(t)) = O(x(t)) + O(y(t))$, pour $x, y \in \mathbb{C}[[t]]$ donc : $O_P(F_1, F_2) = O_P(F_1) + O_P(F_2)$, d'où :

$$\begin{aligned} I(F_1, F_2, G, 0) &= \sum O_P(F_1, F_2) \\ &= \sum [O_n, (F_1, O_p(F_2)] \\ &= I((F_1, G, 0) + I(F_2, G, 0) . \end{aligned}$$

e- Soit $A \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ et P une paramétrisation de G au point $(0,0)$. Alors l'ordre de $F+AG$ sur P vérifie :

$$O_P(F+AG) - O(F(P)+(AG)(P)) = O(F(P)) = O_P(F).$$

(car $G(P)=0$) : D'où $I(F+AG,G,0) = I(F,G,0)$.

□

Proposition 3.5 *Soit F un élément de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ et $O=(0,0)$. Alors :*

1) $I(F,X,0) = O_y(F(0,Y)) =$ *l'ordre de la série $F(0,Y)$ par rapport à y.*

2) $I(F,X,0) = O(F)$ *si et seulement si F n'admet pas X comme tangente au point* $(0,0)$.

Démonstration.

En utilisent le théorème de préparation de **Weierstrass**, on peut écrire F sous la forme $F = H.\left(Y^r + B_{r-l}Y^{r-1} + \ldots + B_rY + B_0\right)$, où $\forall\, B_i \in \mathbb{C}[[X]]$ et $B_i(0)=0$, avec r qui vérifier :

$F(0,Y) = C_rY^r + C_{r+1}Y^{r+1} + \ldots, C_r \neq 0$, où H est un élément inversible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, donc $r = O_r(F(o,Y))$.
D'après la proposition 3.5-(4) :

$$I(F,X,0) = I(H,X,0) + I\left(Y^r + \ldots + B_0, X, 0\right).$$

Par hypothèse H est en élément inversible, alors : $H(0,0) \neq 0$, c'est à dire que $O(H)=0$, d'où d'après la proposition 3.5-(2) :$I(H,X,0)=0$, donc $I\left(F,X,0\right) = I\left(Y^r + \ldots + B_0, X, 0\right)$. De plus $\delta_0 = (0,t)$ représente l'unique classe de paramétrisation de X au point $(0,0)$, ainsi : $I\left(Y^r + \ldots + B_0, X, 0\right) - O_{\delta_0}\left(Y^r + \ldots + B_0\right)$, d' où $I(F,X,O) = O\left(t^r\right) = O_y(F(O,y)) = r$.

Supposons que $F = \Pi F_i^{l_i}$ et F_i sont des éléments irréductibles de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. alors d'après la proposition 3.5-(4) :

$$I(F,X,0) = \sum_i I\left(F^{l_i}, X, 0\right) = \sum_i I\left(F_i, X, 0\right)^{l_i}$$

Donc si F n'admet pas X comme tangente, alors $\forall_i, F_i$ n'admet pas aussi X comme tangente (les tangente de F au point $(0,0)$ sont les différentes tangentes des F_i au point $(0,0)$). Donc on peut écrire F_i sous la forme :

$$F_i = \left(Y - c_iX\right)^{m_i} + \ldots = Y^{m_i} + \ldots \text{ avec } c_i \in \mathbb{C} \text{ et } O\left(F_i\right) = m_i$$

$O(F_i) = O(t^{mi}) = n_i = O(F_i)$, donc : $I(F_i, X, O) = O(F_i), \forall i$. Alors :

$$I(F, X, 0) = \sum_{i=1}^{i=n} O(F_i)^{li} = O(F).$$

Si F admet X comme tangente, alors il existe $i_0 \in \{1, \ldots, \ldots, n\}$ tel que X soit aussi une tangente de F_i au point $(0,0)$, donc F_i s'écrit sous la forme :

$$X^{m_{i_0}} + \ldots, \text{ où } m_{i_0} = O(F_{i_0}). \text{ D'où } O_{\delta_0}(F_{i_0}) = O(F_{i_0}(0,t))$$
$$= O_y(F_{i_0}(O,y)) > O(F_{i_0}).$$

Par suite : $I(F, X, 0) = O\delta_0(F) = O_y(F(O,y) > O(F)$, c'est à dire que $I(F, X, 0) \neq O(F)$, d'où la condition nécessaire . . $\square$

Proposition 3.6 *Soit G un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, qui n'admet pas X comme tangente et $P = (x(t), y(t))$ une paramétrisation de G à l'origine, alors :*

$$I(G, X, (0,0)) = O(x(t)) = O(G).$$

Démonstration.

Notons $\delta_0 = (0,t)$ l'unique paramétrisation de X au point $(0,0)$, alors d'après la proposition 3.4 $I(G, X, (0,0)) = O(G)$, mais puisque G est irréductible alors d'après le corollaire 1.3, P représente l'unique classe de paramétrisation de G au point $(0,0)$, d'où le résultat :

$$I(G, X, (0,0)) = O_P(X) = O(x(t))$$

$\square$

Proposition 3.7 *Le nombre d'intersections de deux éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ est invariant par les transformations affines.*

Démonstration.

Il suffit de vérifier le cas des transformations linéaires. Soient $F, G \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ et $P = (x(t), y(t))$ une paramétrisation quelconque de F au point $(0,0)$. Alors en utilisant la transformation $X_l = aX + bY,\ Y_1 = cX + dY$ avec $ad - bc \neq 0$, on obtient une paramétrisation $p_1 = (x_1(t), y_2(t))$ du transformé F_1 de F au point $(0,0)$, sur le plan (X_l, Y_1), avec :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdots$$

On déduit alors que :

$$F(P) = F_1(P_1) = 0$$

et

$$O(G(P)) = O(G_1(P_1)).$$

D'où :

$$I(F_1, G_1, (0,0)) = \sum_{P_1} O_{P_1}(G_1) = \sum_{p} O_p(G) = I(F, G, (0,0))$$

Soient maintenant F et G des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ qui n' admettent pas X comme tangente au point $(0,0)$, alors on peut écrire G sous la forme : $G(X,Y) = (Y - cX)^m + G_{m+1} + \dots$, où G_i sont des polynôme homogènes de degré i. De plus l'unique classe de paramétrisation de G à l'origine, représentée par $\gamma = (x(t), y(t))$ est de la forme :

$$* \dots x(t) = t^m + \dots \ , y(t) = ct^m + \dots, \text{ avec } m = O(G).$$

En utilisant la transformation $X_1 = X, Y_1 = Y/X$, on trouve que le transformé $G^{'}$ de G s'écrit sous la forme :

$$G'(X,Y) = (y' - c)^m + XG_{m+1}(1, y') + \dots, \text{ où } G' \in \mathbb{C}[[X, Y' - c]].$$

On peut aussi supposer que F' (le transformé de F) est un élément de $\mathbb{C}[[X, Y^{'} - c]]$ donc en utilisant (*) on peut vérifier que la branche $\delta' = (x'(t), y'(t))$ où :

$$x'(t) = x(t) = t^m + \dots \ , y'(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = c' + at + \dots.$$

est une paramétrisation de G au point $(0,0)$. D'où, en posant $n = O(F)$,

$$\begin{aligned} O_\delta(F) = O(F(x(t), y(t)) &= O(F(x'(t), x'(t) - y'(t)) \\ &= O_((x'^n, F'(x'(t), y'(t))). \\ &= O_{\delta'}(X^n, F'(X'Y')) \end{aligned}$$

Donc :

$$O_\delta(F) = O_{\delta'}\left(X^n, F'\left(X, Y^{'}\right)\right) \dots (**)$$

$\square$

Proposition 3.8 *Soient F et G des éléments de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, qui n'admettent pas X comme tangente et G irréductible, alors :*

$$I(F,G,(0,0)) = m.n + I\left(F^{'},G,(0,0)\right).$$

où $Y-cX$ est la tangente de G au point $(0,0)$ et $n=O(F), m=O(G)$.

Démonstration.

En utilisant la proposition 3.4-(d) et l'égalité (**) on obtient

$$\begin{aligned} I(F,G,(0,0)) &= O_\delta(F) = O_{\delta'}(X^n, F'(X,Y') = O_{\delta'}(X^n) + O_{\delta'}(F'(X,Y') \\ &= O_{\delta'}(X^n) + I\left(F', G^{'}, (0,0)\right) \end{aligned}$$

de plus on a :
$O_{\delta'}((X^n) = n.O(t) - n.O(x'(t))$, alors :
$I(F,G,(0,0)) = n\cdot O(x'(t)) + I(F^{'},G^{'},(0,0))$. mais puisque $O(x'(t)) = O(G) = m$, donc :

$$I(F,G,(0,0)) = n.m + I(F',G',(0,0))$$

La notion du nombre de multiplicité d'intersection ainsi définie est maintenant la même que lorsque on se restreint au cas des courbes planes de [6] , car le $I(F,G,(0,0))$ satisfait les principales propriétés requises dans [6] et ceci montre donc l'unicité d'un tel objet .
Enfin, on arrive maintenant a la démonstration du résultat principal de cette partie. □

Théorème 3.2 *Soit $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ un opérateur différentiel, avec $(A,B)=1$ et $r(D)>1$. Alors après un nombre fini de transformations du type $1,2,3$, les solutions de D au point $(0,0)$ correspondent à des solutions d'un opérateur différentiel D' en un point $(0,c)$, de mesure de complexité $r(D') \leq 1$.*

Démonstration. Posons d'abord $A = A_r + A_{r+1} + \ldots, B = B_r + B_{r+1}\ldots$, où $r = r(D) = \min(O(A), O(B) > 1$.
En rappelant que $I(D) = XB_r - A_rY$, on considérera deux cas :
1ér cas : $I(D)=0$. Alors $XB_r = A_rY$ donc A_r, et B_r, ne sont pas nuls (si non $r(D)$ est supérieur à r).
Soit $F = (Y+cX)^m + F_{m+1} + \ldots$, un élément irréductible de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. solution de D a l'origine (si F admet X comme tangente on applique alors une première transformation, en changeant les rôles de X et Y).

Donc F', le transformé de F à l'aide la transformation du type 3, est une solution de D^T au point $(0, c)$, avec :

$$D^T = (A_r(1, Y') + XA_{r+1}(1, Y') + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (\cdots)\frac{\partial}{\partial Y}.$$

- Si $A_r(1, c) \neq 0$, alors l'élément $A_r\left(1, Y'\right) + X_{r+1}\left(1, Y'\right) + \ldots$, est inversible dans $\mathbb{C}[[X, Y' - c]]$, car $A_r(1, c)$ est le terme constant de cet élément, donc on voit que lorsque on divise D^T par cet élément on obtient un opérateur de la forme $\frac{\partial}{\partial X} + (\ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$ qui représente une réduction au cas $r = 0$.
- Si$A_r(1, c) = 0$, alors A_r contient le facteur linéaire $Y - cX$ et puisque $XB_r = YA$, alors A_r contiens aussi le facture X,donc $A_r \neq (Y - cX)^r$ et $degA_r(1, Y') \leq r - 1$, ce qui implique que l'ordre de l'élément :

$$A_r(1, Y') + XA_{r+1}\left(1, Y'\right) + \ldots$$

est inférieur à $r - 1$. Donc $r\left(D^T\right) \leq r - 1$ et nous avons ainsi une réduction au cas $\leq r - 1$.

Donc si $I\left(D^T\right) = 0$ alors en faisant une deuxième transformations du type 3 sur D^T on obtient soit une réduction au cas $r = 0$, soit une réduction au cas $\leq r - 2$. D'où après un nombre fini de transformations du type 3 , on arrive à une réduction au cas $r \leq 1$, à condition qu'à chaque fois la relation $I\left(D^T\right) = 0$ soit satisfaite.

2ème cas : $I(D) \neq 0$

Soit $A_r \neq 0$ (on peut aussi supposer que $B_r \neq 0$ car il suffit d'utiliser la transformation linéaire $X' = X, Y' = X + Y$ pour obtenir un opérateur D' dans lequel $A' = A, B' = A + B$ et d'où $A'_r = B'_r \neq 0$, de plus avec un argument similaire, on peut supposer aussi que A et B n'admettent pas X comme tangente au point $(0, 0)$) . Soit de nouveau F une solution de D à l'origine possédant $Y - cX, c \neq 0$, comme tangente au point $(0, 0)$. Alors par une transformation $X' = X, Y' = \frac{Y}{X'}$, F correspond à une solution au point $(0, c)$ d'un opérateur différentiel :

$$D^T = XA'(X, Y')\frac{\partial}{\partial X} + B'(X, Y') - Y'A'(X, Y')\frac{\partial}{\partial Y'}.$$

avec $B'(X, Y') - Y'A'(XY') = B_r(1, Y' - Y'A_r(1, Y') + X(\ldots)$

$$= I(1, Y' + X(\ldots)\ldots\ldots(1).$$

Comparons maintenant :

$$(*) = I(A, B, (0,0)) \quad \text{avec} \quad (**) = I(XA^{'}, B' - Y'A', (0,c)),$$

en montrant que $(*) - (**) \geq 1$ si $r > 1$. On a d'après la proposition 3.4- (d) :

$$(**) = I(X, B' - Y'A', (0,c) + I(A', B' - Y'A', (0,c)).$$

et d'après (I) et la proposition 3.4-(e) on obtient :

$$(**) = I\left(X, I\left(1, Y^2\right), (0,c)\right) + I\left(A^{'}, B^{'}, (0,c)\right)$$

On peut supposer que $A, (1,c) = 0$, car dans le cas contraire l'élément $A'\left(X, Y'\right)$ serait inversible dans $[[X, Y^{'} - c]]$ et donc en divisant D^T
par cet élément, on obtient une réduction au cas $r \leq 1$. On peut supposer aussi que $I(1,c) = 0$, car si $I(l,c) \neq 0$, l'élément $I(l, Y\eta$ est inversible dans $\mathbb{C}[[X, Y^{'} - c]]$, d'où en divisant D^T par $I\left(1, Y^{'}\right)$ on obtient une réduction au cas $r = 0$, Comme conséquence :

$$B_r(1,c) = B_n(1,c) - A, (1,c) = I(1,c) = 0,$$

donc le point $(0,c)$ est un point d'intersection de A' et B' sur l'axe $X = 0$.
D'où d'après la proposition 3.8 :

$$(*) = r^2 + I\left(A^{'}, B, (0,0)\right)$$

. donc :

$$(*) - (**) = r^2 + I\left(A^{'}, B', (0,c)\right) - I\left(A^*, B', (0,c)\right) - I(X, I(1,Y), (0,c)).$$

d'où :

$$(*) - (**) \geq r^2 - (r+1)$$

en utilisant le fait que d'après la proposition 3.4 :

$$I\left(X, I\left(l, y'\right), (0,c)\right) = \deg I\left(1, y'\right) = \deg\left(B_r\left(1, y'\right) - A_r\left(1, y'\right)\right\} \leq r + 1,$$

alors si $r > 1$, on a évidemment que $(*) - (**) \geq 1$. $\square$

Résultat :

$I(A,B,(0,0)) > I(A,B,(0,c))$, si $r > l$, De plus, puisque $(A,B) = I$, alors d'après la proposition 3.1 : $I(A,B,(0,0)) < \infty$, d'où on obtient une réduction par le simple argument que la chaine strictement décroissante des nombres naturels : $I(A,B,(0,0)) > I(A_1,B_1,(0,c)) > I(A_2,B_2,(0,c))\ldots$, en posant $A_1 = A', B_1 = B'$ doit s'arrêter .
En arrivant à l'opérateur $D' = A'\frac{\partial}{\partial X} + B'\frac{\partial}{\partial Y'}$, où la chaine s'arrête, on doit avoir $r(D') \leq I$, dans le cas contraire on cherchera de nouveau un opérateur pour lequel le nombre d'intersection est inférieur à $I(A', B', (0,c))$, ce qui est contradictoire. D'où le théorème.

Résumé :

Soit $Ady = Bdx$ une équation différentielle, avec $\mathrm{Min}(O(A), O(B)) > 1$. Alors, après un nombre fini de transformation du type $1, 2, 3$, les solutions nulles à l'origine de l'équation $Ady = Bdx$, correspondent à des solutions nulles en un point $(0,c)$ d'une équation différentielle $A'dy = B'dx$, avec $Min\left(O\left(A'\right), O\left(B'\right)\right) \leq 1$.

Chapitre 4

Étude du cas où la singularité est simple $(r(D) \leq 1)$

Ce chapitre contient une étude concernant les solutions de l'opérateur différentiel $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$,donné par A. Seidenberg [4], lorsque la singularité est simple $(r(D) \leq 1)$.

4.1 L'existence des solutions

Dans ce paragraphe nous allons considérer la question de l'existence des solutions au voisinage d'un point singulier (l'origine) où $A, B \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ avec K un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro.

Théorème 4.1 *opérateur différentiel* $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ *Pour chaque opérateur différentiel* D *il existe une solution nulle à l'origine.*

Démonstration.

Soit $Ady = Bdx$ l'équation différentielle équivalente à l'opérateur différentiel D,

Considérons le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y) \\ \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y) \end{cases}$$

D'après Picard [3] le système (S) n'est pas équivalent à l'équation $Ady = Bdx$, mais chaque solution de (S) est solution de l'équation $Ady = Bdx$.

Considérons d'abord une solution du système (S) :$(a_0 + a_1 t + \ldots\ ,\ b_0 + b_1 t + \ldots)$, et comparons ensuite les coefficients de t^i dans $\frac{dx}{dt} = A(X(t), Y(t))$.

On trouve alors que pour chaque i :

$$(i+1)a_{i+1} = P_i(a_0, \ldots, a_i\ ,\ b_0, \ldots, b_i) \tag{4.1}$$

où P_i est un polynôme en $a_0, \ldots,\ a_i\ ,\ b_0, \ldots, b_i$, car les termes en fonction de $a_{i+k}\ ,\ b_{i+k}, \quad k > 0$ sont utilisés pour obtenir une puissance de t supérieur à i. On trouve aussi pour chaque i :

$$(i+1)b_{i+1} = Q_i\,(a_0, \ldots, a_i\ ,\ b_0, \ldots, bi) \tag{4.2}$$

et ceci en comparant les coefficients de t^i dans $\frac{dy}{dt} = B(X, Y)$.
Donc en résolvant successivement les systèmes 4.1 et 4.2 , on obtient tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots\ ,\ b_1, b_2, \ldots$, avec $a_0, \quad b_0$ étant arbitrairement choisis .
Donc pour obtenir une solution nulle à l'origine, il suffit donc de prendre $a_0 = b_0 = 0$.

- Dans le cas où $K = C$ (le corps des nombres complexes) le problème d'existence est résolu en appliquant au système (S) le théorème fondamental de l'existence des solutions d'équations différentielles du premier ordre.

$\square$

4.2 Étude des solutions au voisinage d'un point non-singulier $(r(D) = 0)$

Dans ce paragraphe nous allons étudier les opérateurs différentiels : $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ au voisinage d'un point non singulier.

Proposition 4.1 *Soit* $D = X(\lambda + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + Y(\mu + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$, $\lambda, \quad \mu \neq 0$.

(a) *Si* $\lambda \neq \mu$ *alors chaque solution de* D *au point* $(0,0)$ *possède soit une tangente horizontale, soit une tangente verticale.*

(b) *Si* λ, μ *sont rationnellement indépendants ou si* μ *est un nombre rationnel négatif, alors* D *possède seulement* X *et* Y *comme solution.*

(c) *Soit* $D = X\frac{\partial}{\partial X} + (CX + \lambda Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$ *, Si* λ *n'est pas rationnel ou* λ *est un nombre rationnel négatif, alors les seules solutions* D *sont* $F(X,Y) = X$ *et une branche linéaire, sans tangente verticale.*

Démonstration.

(a) Divisons D par $\lambda + \ldots$ On peut supposer alors que $\lambda + \ldots = 1$, et on obtient donc l'équation différentielle correspondant :

$$x \; dy - y \; (\mu + \ldots) \; dx = 0 \tag{4.3}$$

Si $x(t) = ct^{\mu} + \ldots, y(t) = dt^{v} + \ldots$, est une solution de 4.3 alors :

$$v.c.d.(1-\mu) \cdot t^{2v-1} + \ldots = 0.$$

Donc en supposant que $v.c.d \neq 0$ on obtient que $\mu = 1$ ce qui est contradictoire, (car μ est supposé différent de λ). D'où $c.d = 0$, c'est à dire que les solutions de D possèdent soit une tangente horizontale, soit une tangente verticale, suivant que c ou d est nul .

(b) Supposons que $\lambda = 1$ et faisons la transformation :

$$X_1 = X_1, Y_1 = \frac{Y}{X}$$

On trouve :

$$D = X\frac{\partial}{\partial X} + Y_1((\mu - 1) + \ldots\ldots.)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

lequel est de la même forme que le D qu'on vient d'examiner dans (a), et puisque cet opérateur est le résultat d'un éclatement, alors il ne possède pas de solutions avec tangentes verticales.

Faisons maintenant la transformation :

$$Y_2 = Y \;, \quad X_2 = \frac{X}{Y}$$

On trouve :

$$D = X_2((1-\mu) + \ldots)\frac{\partial}{\partial X_2} + Y(\mu + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$$

lequel est aussi de la même forme que le D original, donc cet opérateur ne possède pas de solution avec tangentes horizontales. Ainsi D est remplacé par deux autres opérateurs de la même forme.

Donc si D possède une autre solution une X et Y alors cette solution serait éventuellement transformée en une solution sans tangente verticale ou horizontale , ce qui est impossible d'après (a) d'où la conclusion.

(c) Faisons la transformation $Y_1 = Y$, $\quad X_1 = X/Y$, on trouve alors :

$$D = X_1((1-\lambda)+\dots)\frac{\partial}{\partial X_2} + Y(\lambda+\dots)\frac{\partial}{\partial Y}$$

qui possède seulement X_1 et Y comme solution à l'origine d'après (b), donc D n'a pas de solution dans le plan (X, Y) avec tangentes verticales excepté X.

Par une substitution $X_1 = X$, $\quad Y = Y - dX$, laquelle ne change pas les directions verticales, on peut alors éliminer le terme $c.X$ dans D.

Faisons la transformations $X_l = X \quad Y_1 = \frac{Y}{X}$ on trouve :

$$D = X\frac{\partial}{\partial X} + ((\lambda-1)Y_1+\dots)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

lequel est de la même forme que le D original.

Si $(x(t) = t^v$, $y(t) = c.t^v + \dots)$, $\quad c \neq 0$, est une solution sans tangent verticale de l'original D, alors elle sera transformée en une solution :

$$(x(t) = t^v, \quad y_1(t) = c + a.t + \dots)$$

de D sur le plan (X, Y).

En comparant les coefficients de t^i dans l'équation :

$$x_1\ dy_1 - ((\lambda-1)\ y_2\ +\dots)\ dx_1 = 0$$

on obtient que $\lambda = \frac{v-1}{v}$, ce qui est impossible sauf si $v = 1$. Donc D possède dans le plan (X, Y) seulement des branches linéaires comme solutions.

Supposons que :

$$Y - \sum_i C_i X^i$$

soit une solution de D alors :

$$X - (-\sum\ i\ C_i X^{i-1}) + (\lambda.\sum C_i\ X^i) = 0$$

et donc le coefficient de X^i est $C_i(\lambda - i) + P_i\,(C_i, \dots, C_{i-1})$, $\quad P_i$ est un polynôme en $C_1, \dots, C_{i-1}$, alors en calculant successivement les coefficients C_i dans :

$$C_i(\lambda - i) + P_i\,(C_1, \dots, C_{i-1}) = 0$$

donc les coefficients C, sont déterminés d'une manière unique, d'où l'unicité de la branche linéaire solution de D.

$\square$

Les résultats concernant l'existence et la nature des solutions au voisinage d'un point non singulier sont donnés dans les théorèmes suivants :

Théorème 4.2 *Soit* $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ *un opérateur différentiel, avec* $A(0,0) \neq 0$.
Alors D *possède une unique solution au point* $(0,0)$ *qui est une branche linéaire sans tangente verticale.*

Démonstration.

Une branche F centrée à l'origine avec une tangente verticale s'écrit sous la forme X^r+ des termes de degré $> r$.
Comme $A(0,0) \neq 0$, alors DF possède un terme de degré $r-1$, d'où $DF \neq 0 \ mod\ F$. Donc D ne possède pas de solution avec tangentes verticales.

Faisons une substitution $X_1 = X, \quad Y_1 = Y - dX$, on peut alors supposer que $B(0,0) = 0$. Chaque solution avec $Y - CX$ comme tangente, doit être de la forme :
$F = (Y - C\cdot X)^r + \ldots$, donc avec le même argument qu'on vient de donner pour $F = X^r + \ldots$, on trouve que $C = 0$, et en faisant l'éclatement $X_1 = X, \quad Y_1 = Y/X$, on obtient :

$$D = A\frac{\partial}{\partial X_1} + \left(\frac{B}{X} - Y_1\frac{A}{X}\right)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

lequel n'est pas entier. Donc chaque solution de D dans le plan (X,Y), avec tangente horizontale se transforme en une solution de $D^T = X.D$ au point $(0,0)$ dans le pian (X_1, Y_1), donc, d'après la proposition 4.1, D^T possède seulement une solution qui correspond à une branche linéaire dans le plan (X,Y). □

Théorème 4.3 *Si* $(0,0)$ *est un point non singulier d'un opérateur* D*, alors toutes les solutions de* D *sont représentées par une solution* f*, qui satisfait* $Df = 0$ *(non nécessairement* $\equiv 0 \ mod\ f$ *).*

Démonstration. Si $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$, avec $A(0,0) \neq 0$ alors $D(X) = A$.
Soit $D_1 = \frac{D}{A}$ et posons :

$$Y^* = Y - XD_1Y + \left(\frac{X^2}{2!}\right)D_1^2Y - \ldots$$

où $D_1^i\ Y$ est la $i^{\text{éme}}$ application de l'opérateur D_1 sur Y, On peut vérifier alors que $D_1\ Y^* = DY^* = 0$ donc Y^* est une solution de D au point $(O,0)$. De plus toutes les autres solutions de D s'écrivent ξY^*, où ξ est un élément inversible dans $\mathbb{C}[[X,Y]]$. □

4.3 Étude des solutions au voisinage d'un point singulier $(r(D) = 1)$

On commence, maintenant à étudier les solutions d'un opérateur différentiel $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ au voisinage du point $(0, 0)$.
Premièrement, supposons que $r = r(D) > 0$ le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence des solutions.

Théorème 4.4 *soit D opérateur différentiel :*

(1) *A toute droite qui passe par l'origine (excepté un nombre fini), correspond une unique branche linéaire comme solution de D, si et seulement si $I(D) = 0$*

(2) *Si $I(D) \neq 0$,alors il existe une solution dans la direction $ax + by = 0$ seulement si $ax + by$ est un facteur de $I(D)$*

Démonstration.

Soit $D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$, On rappelle que si $A = A_r + \ldots$, et $B = B_r + \ldots$, alors $I(D) = I(X, Y) = B_r X - A_r Y$.

(1) En utilisant l'éclatement $X_1 = X, \quad Y_1 = Y/X$, on trouve le transformé :

$$D = X^r \left(A_r \left(1, Y_1\right) + X(\ldots)\right) \frac{\partial}{\partial X} + (\ldots)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

Si $I(D) = 0$, alors $B_r X = A_r Y$, d'où $A_r \neq 0$ (car dans le cas contraire $A_r = 0$ on aurait aussi que $B_r = 0$ et ceci implique que $r(D) > r$), de plus on a :

$$D = (A_r(1, Y_1) + X(\ldots))\frac{\partial}{\partial X} + (\ldots)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

Si $A_r(0, m) \neq 0$, pour $m \in \mathbb{C}$, alors d'après la proposition 4.1, D^T possède au point $(0, m)$ une unique solution, c'est une branche linéaire sans tangente verticale, celle ci correspond à une unique branche linéaire dans le plan (X, Y), avec $Y - mX$ comme tangente.

Dans ce cas pour chaque droite qui passe par l'origine exceptée les possibilités données par les tangentes de $X.A_r$, correspond une branche linéaire, comme solution de D.

(2) Si $I(D) \neq 0$, alors :

$$D^T = X.\left(A_r\left(1, Y_1\right) + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial X} + \left(I\left(1, Y_1\right) + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

si $I(O, m) \neq 0$, alors d'après (1) $A_r(o, m) \neq 0$ et D ne possède pas de solution dans la direction $Y - mX = 0$, donc la seule solution de D^T au point $(0, m)$ est X, laquelle ne correspond pas à une solution de D sans tangente verticale et dans ce cas il y a une solution de D dans la direction $Y - mX = 0$ seulement si $I(O, m) = 0$, c'est à dire si $Y - mX$ est un facteur de $I(D)$.

□

Corollaire 4.1 *Si $I(D) = 0$, alors pour chaque droite qui passe par l'origine excepté celles données par le pgcd (A_r, B_r), correspond une branche linéaire comme solution de D.*

Démonstration.

En supposant que $I(D) = 0$, il suffit de montrer que si D ne possède pas de solutions dans une direction $Y - mX = 0$ alors le facteur $Y - mX$ divise le *pgcd* (A_r, B_r) et réciproque.

Si D ne possède pas de solution dans la direction $Y - mX = 0$, $m \in \mathbb{C}(X)^*$, alors d'après la démonstration du Théorème 4.3, $Y - mX$ est un facteur de $X_{..} A_r$. mais puisque $B_r X = A_r Y$ alors $Y - mX$ est un facteur de B_r, donc $Y - mX$ divise le *pgcd* (A_r, B_r).
Réciproquement, si $Y - mX$ ne divise pas le *pgcd* (A_r, B_r) et divise seulement A_r, alors $Y - mX = 0$ est une direction donnée par $X..A_r = 0$ et donc D ne possède pas de solution dans cette direction .

Nous allons maintenant étudier le cas où $r = r(D) = 1$; posons alors $A = A_1 + \ldots$, $B = B_1 + \ldots$, avec $A_1 = aX + bY, B_1 = cX + dY$.
Premièrement, supposons que A_1 et B_1, ne sont pas proportionnelles c'est à cire que $a.d - d.c \neq 0$.

Considérons la transformation :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

où P une matrice 2×2, à coefficient dans $\mathbb{C}$ et posons :

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial Y - 1}\right) \cdot \mathrm{P}$$

. Alors :

$\left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\right) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix}$ devient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial Y_1}\right) \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

On suppose que :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a la forme canonique de **Jordan**. □

Théorème 4.5 *Soit* $D = (A_1 + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (B_1 + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$ *avec* $ad - bc \neq 0$.
Alors il existe au moins une solution de D *au point* $(0, 0)$ *sous la forme d'une branche linéaire centrée à l'origine.*

Démonstration.

En supposant que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a la forme canonique de **Jordan**, considérons premièrement le cas où $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$,. Alors :

$$D = (\lambda X + Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (\lambda Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$$

En posant $Y = \sum C_i X^i \;\; i \geq 1$, C_1 doit vérifier :

$$(\lambda + C_1)(-C_1) + \lambda C_1 = 0$$

donc $C_1 = 0$ et le coefficient de X^i , pour $i > 1$, est donné par :

$$\lambda(-iC_i) + \lambda C_i + P_i(C_{1,\ldots,}C_{i-1}) = 0$$

où P_i est un polynôme en $C_1, \ldots . C_{i-1}$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut résoudre successivement (4) pour obtenir les coefficients C_i.
Considérons, maintenant le cas où :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

. Alors en divisant D par λ_1, on peut alors supposer que $\lambda_1 = 1$, et D s'écrit :

$$D = (X + Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (\lambda Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$$

Posons $Y = \sum C_i X^i \;\; i \geq 1$, on trouve alors la condition suivante :

$$(X + \ldots)\left(-\sum -iC_iX^{i-1}\right) + \left(\lambda \cdot \sum C_iX^i + \ldots\right) = 0$$

le coefficient de X^i est $(\lambda - i)C_i +$ des termes en fonction de $C_1, \ldots, C_{i-1}$, lequel doit être nul, alors si λ n'est pas un entier positif on peut résoudre successivement et trouver les C_i. Et en changeant les rôles de X et Y on obtient aussi une solution si $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas entier positif, donc on aura une solution seulement si $\lambda \neq 1$.

Si $\lambda - 1$, la condition sur C_1 est $C_1(\lambda - 1) = 0$, laquelle est vraie pour tout C_1, donc on remarque que dans tous les cas, D possède au moins une solution sous la forme d'une branche linéaire centrée à l'origine. $\square$ Examinons, maintenant l'unicité des solutions en

donnant d'abord ce théorème de préparation.

Théorème 4.6 *Soit* $D = XE\frac{\partial}{\partial X} + YN\frac{\partial}{\partial Y}$ *avec* $E(0,0) \neq 0$ *et* $N(0,0) = 0$, *alors les seules solutions de* D *sont* X *et* Y.

Démonstration.

L'équation différentielle associée à l'opérateur D est :

$$x \cdot E \cdot dy - y \cdot N \cdot dx = 0$$

Soit $(t^v, C.t^\mu + \ldots)$, avec $C \neq 0$,une solution de cette équation, alors :

$$e.\mu.t^{v+\mu-1} + \ldots = 0, \text{ où } E(0,0) = e \neq 0,$$

d'où $\mu.C = 0$ ce qui est impossible, donc les seules solutions possibles de D sont X et Y. $\square$

Théorème 4.7 *Soit* $D = (\lambda X + Y \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (\lambda Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}, \lambda \neq 0$. *Alors* D *possède au point* $(0,0)$ *une unique solution qui est une branche linéaire avec tangente horizontale*

Démonstration.

Comme dans ce cas $I(D) = -Y^2$, alors d'après le théorème 4.3 les solutions de D au point $(0,0)$ doivent avoir des tangentes horizontales.
Faisons la transformation $X_1 = X \;\; Y_1 = Y/X$, on trouve que :

$$D = X\left(\lambda + Y_1 + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial X} + \left(-Y + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial Y},$$

qui d'après la proposition 4.1-(c) possède une seule solution différente de X, et , oui est une branche linéaire sans tangente verticale, donc D possède une unique solution qui est une branche linéaire avec tangente horizontale .
On donne maintenant un exemple, dans lequel une direction déterminée par $J(D)$ ne soit pas solution de D. □ **Exemple :**

Soit $D = X\frac{\partial}{\partial X} + (2Y + X^2)\frac{\partial}{\partial Y}$, Alors $I(D) = XY$ et l'éclatement $X_1 = X \quad , \quad Y_1 = \frac{Y}{X}$ donne l'opérateur $D = X\frac{\partial}{\partial X} + (Y_1 + X)\frac{\partial}{\partial Y_1}$, qui d'après le théorème 4.6 possède juste une solution à savoir X. Donc D ne possède pas de solutions dans la direction $Y = 0$.

- Considérons, maintenant le cas où $D = (\lambda X + P)\frac{\partial}{\partial X} + (\mu Y + Q)\frac{\partial}{\partial Y}$, avec $O(P) \geq 2, O(Q) \geq 2, \mu.\lambda \neq 0$

Théorème 4.8 *Soit* $D = (\lambda X + P)\frac{\partial}{\partial X} + (\mu Y + Q)\frac{\partial}{\partial Y}$ *avec* $O(Q) \geq 2\ ,\ O(Q) \geq 2, \mu\lambda \neq 0$.

(1) *Si* $\frac{\lambda}{\mu}$ *n'est pas un nombre rationnel positif, alors D possède exactement deux solutions, une branche linéaire avec tangente horizontale et l'autre avec tangente verticale*

(2) *Soit* $\frac{\lambda}{\mu}$ *un nombre rationnel positif :*

- *Si* $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$*, alors pour chaque direction qui passe par l'origine, D possède une seule solution (qui est une branche linéaire).*
- *Si* $\frac{\lambda}{\mu} = 1$*, alors D possède une seule solution (qui est une branche linéaire) où deux solutions (qui sont des branches linéaires avec des tangentes distinctes), ou une infinité de solutions.*
- *Si* $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$*, alors D possède une seule solution avec tangente horizontale qui est une branche linéaire et les autres solutions possèdent des tangentes verticales.*

. *Si* $\frac{\lambda}{\mu}$ *est un nombre entier, alors soit il existe une seule solution, soit une infinité de solutions toutes linéaires.*

Démonstration.

a) Considérons premièrement les solutions sans tangentes verticales.
Faisons la transformation $X_1 = X_1$, $Y_1 = \frac{Y}{X}$ on trouve :

$$D = X(\lambda + X(\ldots))\frac{\partial}{\partial X} + ((\mu - \lambda)Y_1 + X(\ldots))\frac{\partial}{\partial Y_1},$$

donc d'après la proposition 4.1 , D possède juste une solution avec tangente non verticale, c'est une branche linéaire avec tangente horizontale. Et en changeant les rôles de X et Y on trouve de la même manière une deuxième solution la branche linéaire avec tangente verticale.

b) On peut supposer que λ, μ sont des nombres positifs avec $(\lambda, \mu) = 1$.

1) Si$\frac{\lambda}{\mu} = 1$, on obtient la conclusion désirée en appliquant simplement le théorème 4.3, car dans ce cas $I(D) = 0$.

2) Si $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$, alors dans ce cas $I(D) = (\mu - \lambda)XY$; donc toutes les solutions de D possèderont soit une tangente verticale, soit une tangente horizontale .

3) Soit $\frac{\lambda}{\mu} > 1$, alors suivant le même argument donné dans (a), on trouve qu'il existe seulement une solution avec tangente non verticale, qui est une branche linéaire avec tangente horizontale et les autres solutions, si elles existent, posséderont toutes des tangentes verticales.

Procédons par récurrence sur $\max(\lambda, \mu)$, d'abord faisons la transformation $X_1 = \frac{X}{Y}$ et $Y_1 = Y$, on trouve :

$$D = ((\lambda - \mu)X_1 + Y(\ldots))\frac{\partial}{\partial X_1} + Y(\mu + Y(\ldots))\frac{\partial}{\partial Y}$$

On considère d'abord le cas où $Max(\lambda\ ,\ \mu) = 2$, donc $\lambda = 2, \mu = 1$.
Si le terme Y n'apparait pas dans l'écriture de coefficient de $\dfrac{\partial}{\partial X_1}$ alors $I(D) = 0$, donc d'après le théorème 4.3, D possède une infinité de solutions dans le plan (X, Y).

Si maintenant le terme Y apparait dans l'écriture du coefficient de $\frac{\partial}{\partial X_1}$ alors d'après le théorème4.6, il existe seulement une solution qui est une branche linéaire avec tangente horizontale, mais puisque Y est solution de D, alors D posséder dans le plan (X_1, Y) une unique solution Y, laquelle peut correspondre ou pas à une solution de la forme Y dans le plan (X, Y), mais dans les deux cas D possède juste une solution .

S'il existe une infinité de solutions, alors elles sont toutes linéaires, et à Y, correspond dans le plan (X, Y) une branche linéaire avec tangente verticale . Ceci complète la démonstration pour le cas $\max(\lambda\mu) = 2$.Si $\max(\lambda, \mu) > 2$, alors $\lambda - \mu \neq \mu$ et $\frac{\lambda-\mu}{\mu}$ est aussi un nombre entier (car $\frac{\lambda}{\mu}$ est un nombre entier $\neq 1$). Par une substitution de la forme $Y_2 = Y$, $\quad X_2 = X_1 - dY$, on peut annuler le terme Y dans $(\lambda - \mu)X_1 + Y(\ldots)$, et le résultat est un opérateur pour lequel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence car $\max(\lambda - \mu, \mu) < \max(\lambda, \mu)$, d'où le résultat cherché .

4) Si $\frac{\lambda}{\mu}$ est un nombre entier faisons une démonstration par récurrence sur $\frac{\lambda}{\mu}$:

a- Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ on est ramené aux cas précédents.

b- Si $\frac{\lambda}{\mu} > 1$, alors en utilisant la transformation

$$X_1 = \frac{X}{Y}, \quad Y_1 = Y$$

l'opérateur obtenu est $D = (\lambda - \mu)X_1 + Y(\ldots)\frac{\partial}{\partial X_1} + Y(\mu + Y_1(\ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$, auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence car $\frac{\lambda-\mu}{\mu}$ est aussi un nombre entier et $\frac{\lambda-\mu}{\mu} < \frac{\lambda}{\mu}$

c- On étudie maintenant le cas ou A_1, B_1 sont proportionnels :

Soit $D = (aX + bY + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + (cX + dY + \ldots)\frac{\partial}{\partial Y}$, avec $\quad a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
En faisant une substitution $X_1 = X, \quad Y_1 = Y - dX$ on peut supposer que $c = 0$.

Si $a \neq 0$, on fait la substitution $X_1 = aX + bY, Y_1 = Y$ pour obtenir D sous la forme :

$$D = (X + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$$

. Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ et on a :

$$D = (Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}.$$

Ainsi on a deux formes canoniques :

$$D = (X + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y} \quad (\text{ i })$$

$$D = (Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y} \quad (\text{ ii }).$$

Dans le cas (ii), I(D) est un carré, mais dans le cas (i), il ne l'est pas.

□

Théorème 4.9 *Soit* $D = X\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}, \quad O(B) \geq 2$. *Alors* D *possède seulement une solution différente de* X, *qui est une branche linéaire, avec tangente horizontale.*

Démonstration.

En appliquant le Théorème 4.5, les seules solutions de D au point $(0,0)$ seront X et Y. Donc D possède seulement une solution avec tangente horizontale. □

Théorème 4.10 *Soit* $D = (X + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$, *où* $O(B) \geq 2$. *Alors* D *possède seulement comme solutions au point* $(0,0)$ *des branches linéaires, l'une avec une tangente verticale et l'autre avec une tangente horizontale.*

Démonstration.

D'abord notons que pour les transformations analytiques :

$$X_1 = C_{11}X + C_{12}Y + \ldots \quad , \quad Y_1 = C_{21}X + C_{22}Y + \ldots$$

on :

$$D = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y} = A_1\frac{\partial}{\partial X} + B_1\frac{\partial}{\partial Y}$$

avec :

$$A_1 = D \cdot X_i \quad , \quad et B_1 = D \cdot Y_1$$

Soit $D = (X + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ où $\quad O(B) \geq 2$.
Posons :

$$X_1 = X - \sum_{i=1}^{m} C_1 Y' \quad , \quad Y_1 = Y$$

. Alors $DX_1 = E.X_1$, avec $E(0,0) \neq 0$, et $DY_1 = B$, donc en comparant les coefficients de Y dans $DX_1 = EX_1$, on obtient que $C_1 = 0$ et D prend la forme :

$$D = X\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}, \quad O(B) \geq 2.$$

(Car E est un élément inversible). Donc d'après le du théorème 4.8, D possède seulement X_1 et Y_1 comme solutions, donc dans le plan (X, Y) D admet la branche linéaire $X - \sum C_i Y^i, ß \geq 2$ comme unique solution avec tangente verticale .

On obtient la deuxième solution (la branche linéaire avec tangente horizontale) en changeant simplement les rôles de X et Y. □

Exemple :

Les seules solutions de $D = (X - Y^2)\,\frac{\partial}{\partial X} + Y^2\frac{\partial}{\partial Y}$ sont exactement :

$$X - \sum_i (i-1)! Y^i \text{ et } Y - \sum_i (i-1)! X^i$$

- Nous allons étudier maintenant le cas $D = (Y + \ldots)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}, \quad O(B) \geq 2$:

Théorème 4.11 *Soit $D = (Y + P)\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$ où $\quad O(P) \geq 2, \quad O(B) \geq 2$ alors D possède soit une seule solution, soit deux solutions, soit une infinité de solution .*

Démonstration.

Soit $D = (Y+P)\frac{\partial}{\partial X}+B\frac{\partial}{\partial Y}$ ou $\quad O(P) \geq 2, \quad O(B) \geq 2$. Comme dans ce cas $I(D) = -Y^2$, alors d'après le théorème 4.3, toutes les solutions de D possédant une tangente horizontale.

Faisons la transformation $X_1 = X$ et $Y_1 = \frac{Y}{X}$, alors :

$$D = X\,(Y_1 + X(\ldots))\,\frac{\partial}{\partial X} + \left(-Y_1^2 + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial Y_1}$$

D sera étudié seulement au point $(0, 0)$, Si D possède sur le plan (X_1, Y_1) une seule solution, ou deux solutions, ou même une infinité de solutions, alors D possède aussi dans le plan

(X, Y) le même nombre de solution, donc il suffit d'étudier D dans le plan (X, Y_1), pour cela on prendra généralement des opérateurs différentiels de la forme :

$$D = X(Y + X(\ldots))\frac{\partial}{\partial X} + \left(-\lambda Y^2 + X(\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial Y}$$

où λ n'est pas un nombre rationnel négatif. En faisant une deuxième transformation $X_2 = \frac{X_1}{Y_1}$, $\quad Y_2 = Y_1$, l'opérateur obtenu est :

$$D^T = \left((n+1)X_2 + X_2^2 + (\ldots)\right)\frac{\partial}{\partial X_2} + (-nY_2 + X_2Y_2(\ldots))\frac{\partial}{\partial Y_2}$$

il correspond à un opérateur déjà étudié dans le Théorème 4.7, donc D^T possède en général, soit une unique solution, soit deux solutions qui sont ces branches linéaires, soit une infinité de solutions. $\square$

Bibliographie

[1] A. V. Essen. Reduction of singularities of differential equation ady=bdx. *Am. Journal of Math.*, 1979.

[2] W. Fulton. Algebraic curves. *W. A. Benjamin, Inc.*, 2008.

[3] E. Picard. Traité d'analyse tome ii. 1893.

[4] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation ady=bdx. *American journal of mathematics*, 90(01) :248–269, 1968.

[5] R. Walker. Algebraic curves. *W. A. Benjamin, Inc.*, 1969.