

---

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Option : Modélisation Stochastiques et Statistiques

THÈME :

---

**Inférence statistique de la distribution exponentielle à deux  
paramètres et applications**

---

Réalisé par

Hendi Amira & Mechaheb Wafia

**Soutenu devant le Jury :**

TAMI Omar	Université Blida 1	Président
FRIHI Redouane	Université Blida 1	Examineur
RASSOUL Abdelaziz	ENSH de Blida	Promoteur

Juillet 2022

---

## DÉDICACES

*Je dédie ce mémoire*

*A mes parents pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragements.*

*A mes soeurs, mes frères, mes amies et ma collègue de binôme Amira et sa famille.*

*Sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

**Mechaheb Wafia**

## DÉDICACES

*Je tiens c'est avec grande plaisir que je dédie ce modeste travail :*

*À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.*

*À mes chers soeurs, mon frère et mes grand mères.*

*À mon cher mari, O.Walid.*

*je dédie ce travail surtout à ma chère collègue Wafia et tous mes amis de promotion de 2<sup>ème</sup> année Master MSS.*

*À toute personne qui occupe une place dans mon coeur.*

**Hendi Amira**

## REMERCIEMENTS

*Avant tout, nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage d'arriver là. Nous tenons tout d'abord à exprimer notre reconnaissance à tous les professeurs de l'université de Blida qui ont assuré notre formation.*

*En second lieu, notre chère promoteur Monsieur RASSOUL Abdelaziz pour leurs conseils enrichissants et leurs orientation pertinentes d'une façon ou d'une autre a contribué au succès de ce mémoire.*

*Nos vifs remerciements vont également aux membres de jury, Mr O.TAMI et Mr R.FRIHI pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Abréviations et notations</b>	<b>x</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Variables aléatoires</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Définition des variables aléatoires	3
1.3 Types des variables aléatoires	4
1.3.1 Variables aléatoires discrètes	4
1.3.1.1 Exemples des variables aléatoires discrètes	4
1.3.2 les variables aléatoires continues	5
1.3.2.1 Exemples des variables aléatoires continues	5
1.4 Caractéristiques des variables aléatoires	7
1.4.1 Espérance	7
1.4.2 Variance et l'écarte type	7
1.4.3 Indépendance des variables aléatoire	8
1.5 Théorèmes limites	9
1.5.1 Introduction	9
1.5.2 Loi faible des grands nombres	9
1.5.3 Loi forte des grands nombres	9
1.5.3.1 Théorème centrale limite	9
1.6 lois usuelles	10
1.6.1 Les lois finies	10
1.6.1.1 La loi uniforme	10
1.6.1.2 la loi de Bernoulli	10
1.6.1.3 La Loi binomiale	11
1.6.1.4 La loi hypergéométrique	11

1.6.2	Les lois infinies . . . . .	12
1.6.2.1	La loi géométrique . . . . .	12
1.6.2.2	La loi de poisson . . . . .	12
1.7	Estimations . . . . .	13
1.7.1	Généralités : . . . . .	13
1.7.2	Estimateur sans biais : . . . . .	13
1.7.3	Estimateur efficace . . . . .	14
1.7.4	Une méthode générale d'estimation : le maximum de vraisem- blance . . . . .	14
1.7.5	Moments . . . . .	15
1.7.5.1	Méthode du Moments . . . . .	15
1.7.5.2	Fonction génératrice des moments . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Loi exponentielle à deux paramètres</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Estimation du maximum de vraisemblance (MLE) . . . . .	18
2.3	Estimation sans biais (UMLE) . . . . .	23
2.4	Méthode des espacements de produits (MPS) . . . . .	24
2.5	Estimation des quantiles (QE) . . . . .	25
2.6	Distribution exponentielle à deux paramètres . . . . .	26
2.7	Inférence pour la distribution exponentielle à deux paramètres avec sta- tistiques de commande généralisées . . . . .	27
2.7.1	Introduction . . . . .	27
2.8	Estimation des paramètres d'échelle et de localisation de $Exp(\alpha, \beta)$ à par- tir de statistiques d'ordre généralisées . . . . .	29
2.8.1	Estimation des paramètres . . . . .	29
2.8.2	Comparaison entre estimateurs . . . . .	31
2.8.2.1	Comparaison entre $\hat{\beta}$ et $\beta^*$ . . . . .	32
2.8.2.2	Comparaison entre $\hat{\alpha}, \tilde{\alpha}$ et $\alpha^*$ . . . . .	32
2.9	Prédicteurs ponctuels et reconSTRUCTEURS basés sur des quantités pivots	33
2.9.1	Comparaison des prédicteurs à l'aide de la mesure de proximité de Pitman . . . . .	37
2.9.1.1	Comparaison entre $Y_s^{(1,1)}, \hat{Y}_s^{(1,0)},$ et $\tilde{Y}_s^{(1,0)}$ . . . . .	37
2.9.1.2	Comparaison entre $Y_s^{(2,1)}$ et $\hat{Y}_s^{(2,0)}$ . . . . .	39
2.10	Inférence sur le paramètre moyen d'une distribution exponentielle à deux paramètres : Complète, données censurées . . . . .	39
2.10.1	Introduction . . . . .	39
2.10.2	Inférence sur la moyenne à partir d'un échantillon complet . . . . .	40
2.10.3	Inférence sur la moyenne sous censure . . . . .	42

2.10.3.1	Double censure de type II . . . . .	42
2.10.3.2	Censure progressive de type II . . . . .	43
2.11	Estimation de la fiabilité pour l'exponentielle à deux paramètres Famille basée sur des données progressivement censurées de type II . . . . .	46
2.11.1	Introduction . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Simulations et applications sur des données réelles</b>	<b>48</b>
3.1	Simulation des variables aléatoires exponentielles à deux paramètres . . . . .	48
3.2	Simulation de la moyenne . . . . .	50
3.2.1	À partir d'un échantillon complet . . . . .	50
3.2.2	À partir d'un échantillon sous censure (censure progressive de type II) . . . . .	51
3.2.3	Exemple illustratif . . . . .	52
3.3	Application de la fiabilité pour $Exp(\alpha, \beta)$ sur des données progressivement censuré de type II . . . . .	54
3.3.1	Exemple illustratif . . . . .	54

TABLE DES FIGURES
-------------------

2.1	La densité de la loi exponentielle de paramètre $Exp(2,2)$ . . . . .	18
2.2	Schéma de censure progressive de type $II$ . . . . .	44
2.3	La fonction de fiabilité de paramètres $Exp(2,2)$ . . . . .	46
3.1	La fonction de fiabilité pour un échantillon complet . . . . .	53
3.2	la fonction de fiabilité pour des données censuré. . . . .	54
3.3	la fonction de fiabilité pour $Exp(\alpha, \beta)$ sur des données progressivement censuré de type $II$ . . . . .	55
3.4	Les valeurs critiques de la quantité pivot $Q$ . . . . .	60

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Comparaison entre les BIAS et RMSE pour les quatres estimateurs avec $\alpha = \beta = 1$ .	49
3.2	Comparaison entre les BIAS et RMSE pour les quatres estimateurs avec $\alpha = \beta = 2$ .	50
3.3	Estimation des paramètres pour un échantillon complet avec $\alpha = \beta = 1$ .	51
3.4	Estimation des paramètres pour un échantillon complet avec $\alpha = \beta = 2$ .	51
3.5	Résultats d'estimation UMVUEs pour $\alpha = \beta = 1$ .	51
3.6	Résultats d'estimation UMVUEs pour $\alpha = \beta = 2$ .	51
3.7	Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré.	52
3.8	Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré avec $\alpha = \beta = 2$ .	52
3.9	Estimation des paramètres pour un échantillon complet.	53
3.10	Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré.	53
3.11	Données sur les différences de niveaux d'inondation pour deux stations sur la rivière Fox	55

التوزيع الأسّي ثنائي المعلمات مهم لتحليل الخدمة والموثوقية. في هذه المذكرة سنقوم بتمييز التوزيع الأسّي ذو المعلمتين، وأيضا من خلال تقديم طرق مختلفة لتقدير المعلمتين إما للبيانات الكاملة والبيانات الخاضعة للرقابة خاصة (الرقابة التدريجية من النوع الثاني). يتم تقديم حالات المحاكاة والتطبيق لإظهار كفاءة المقدرين من أجل الحصول على الأفضل مع المحاكاة والتطبيقات على البيانات الحقيقية.

**Résumé :**

La distribution exponentielle à deux paramètres est intéressante pour l'analyse de survie et de fiabilité. Dans ce mémoire on va caractérisé la distribution exponentielle à deux paramètres, aussi en présentant différentes méthodes pour estimer les deux paramètres soit pour des données complètes soit pour des données censurées en particulier (censure progressive de type II). Les états de simulation et application sont présentés pour montrer l'efficacité des estimateurs et avoir le meilleur avec des simulations et des applications sur des données réelles.

**Abstract :**

The two-parameter exponential distribution is of interest for service and reliability analysis. In this thesis we will characterize the exponential distribution with two parameters, also by presenting different methods to estimate the two parameters either for complete data and for censored data particular (progressive censoring type II). The simulation and application states are presented to show the efficiency of the estimators and to have the best with simulations and applications on real data.

## ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

### Abréviations

- MLE estimation du maximum de vraisemblance  
UMLE estimation sans biais  
UMVUE estimation sans biais variance minimale uniformément  
MPS méthode des espacements de produits  
QE estimations des quantiles  
MSE l'erreur quadratique moyenne  
PMC estimation plus proche de Pitman  
MSPE erreur prédictive quadratique moyenne exacte  
MOM méthode des moments  
MED la médiane  
TCL théorème centrale limite  
i.i.d indépendant, distribué de manière identique

### Notations :

- $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels  
 $\mathbb{R}_+^*$  l'ensemble des nombres réels positifs non nuls  
 $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres naturels  
 $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels , zéro non compris  
 $\stackrel{d}{=}$  égalité des distributions  
 $\chi^2$  loi de khi-deux  
 $E$  l'espérance mathématique  
 $Var$  Variance

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

En théorie des probabilités et en statistique, la distribution exponentielle est la distribution de probabilité du temps entre les événements dans un processus ponctuel de Poisson, c'est-à-dire un processus dans lequel les événements se produisent de manière continue et indépendante à un taux moyen constant. C'est un cas particulier de la distribution gamma. C'est l'analogue continu de la distribution géométrique, et il a la propriété clé d'être sans mémoire. En plus d'être utilisé pour l'analyse des processus ponctuels de Poisson, on le trouve dans divers autres contextes.

la distribution exponentielle n'est pas la même que la classe des familles de distributions exponentielles, qui est une grande classe de distributions de probabilité qui inclut la distribution exponentielle comme l'un de ses membres, mais comprend également la distribution normale, la distribution binomiale, la distribution gamma, Poisson, et plein d'autres.

La distribution exponentielle joue un rôle prépondérant dans l'analyse de nombreux ensembles de données obtenus à partir de tests de durée de vie, et l'utilisation des statistiques de commande à cet égard se pose assez naturellement. Il n'est donc pas surprenant qu'au cours des cinquante dernières années, ce particulier domaine de recherche traitant des propriétés des statistiques d'ordre exponentiel a attiré l'attention de nombreux chercheurs.

Nous nous concentrerons sur la distribution exponentielle à deux paramètres ; il s'agit d'un membre de la famille des distributions à deux paramètres (échelle et localisation). Certains des premiers résultats ont été obtenus pour la distribution exponentielle à un paramètre qui appartient à la famille d'échelles.

Dans ce mémoire, nous présentons essentiellement l'inférence statistique de la distribution exponentielle à deux paramètres avec ses applications organisé comme suit : Dans le premier chapitre nous présentons brièvement généralités sur les variables aléatoire et quelques notions de base.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les quatre méthodes d'estimation avec

une étude comparative entre la méthode du maximum de vraisemblance, les estimations non biaisées qui sont des fonctions linéaires de la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des espacements des produits et la méthode d'estimation des quantiles sont présentées, l'inférence sur le paramètre moyen d'une distribution exponentielle à deux paramètres Complète, données censurées et une estimation de la fiabilité basée sur des données progressivement censurées de type II.

Et on termine ce chapitre par le problème de l'estimation de la fonction de fiabilité de la distribution exponentielle à deux paramètres. Le maximum de vraisemblance classique et la fonction de fiabilité sont obtenus sur la base d'échantillons progressivement censurés de type II.

Dans le dernier chapitre, en utilisant le logiciel R pour simuler la loi exponentielle à deux paramètres, nous calculons les estimateurs des paramètres avec quatre méthodes (MLE,UMLE,MPS,QE), on cherche le meilleur estimateur avec une étude comparative entre le BIAS et RMSE. Établir des estimateurs à la moyenne à partir d'un échantillon complet et sous censure (censure progressive de type II), et on construisons l'intervalle de confiance par l'utilisation de UMVUE, on termine par des exemples illustratifs sur des données réelles qui illustrent l'application et l'inférence de la distribution exponentielle à deux paramètres.

En fin, notre travail est clôturé par une conclusion.

## 1.1 Introduction

Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience, mais par une certaine fonction de ce résultat ; considérons par exemple l'expérience qui consiste à observer, pour chacune des  $n$  pièces produites par une machine, si la pièce est défectueuse ou non, nous attribuerons la valeur 1 à une pièce défectueuse et la valeur 0 à une pièce en bon état. L'univers associé à cette expérience est  $\Omega = \{0, 1\}^n$ . Ce qui intéresse le fabricant est la proportion de pièces défectueuses produites par la machine. Introduisons donc une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  de  $\Omega$  associe le nombre

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{n} \quad (1.1)$$

qui correspond à la proportion de pièces défectueuses associées à l'observation de  $\omega$ . Une telle fonction  $X$  définie sur  $\Omega$  et a valeur dans  $\mathbb{R}$  s'appelle une variable aléatoire réelle.

## 1.2 Définition des variables aléatoires

Une variable aléatoire est une fonction définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, telle qu'il soit possible de déterminer la probabilité pour qu'elle prenne une valeur donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné. À l'origine, une variable était une fonction de gain, qui représentait le gain obtenu à l'issue du résultat d'un jeu. Par exemple, supposons qu'un joueur lance un dé et que celui-ci gagne 1DA s'il amène un six et perde 10DA s'il amène un autre

résultat. Alors il est possible de définir la variable aléatoire de gain qui associe 1 au résultat " six " et  $-10$  à un résultat inintéressant. La probabilité pour que la variable aléatoire prenne la valeur 1 correspond exactement à la probabilité pour que le joueur gagne 1DA. Dans les applications, les variables aléatoires sont utilisées pour modéliser le résultat d'un mécanisme non-déterministe ou encore comme le résultat d'une expérience non-déterministe qui génère un résultat aléatoire.

## 1.3 Types des variables aléatoires

### 1.3.1 Variables aléatoires discrètes

**Définition 1.1** Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de type discret.

**Définition 1.2** Soit  $X$  une v.a.r. discrète prenant ses valeurs dans un ensemble  $x_1, x_2, \dots, x_n$  éventuellement infini. Alors la loi de  $X$  est caractérisée par l'ensemble des probabilités  $P(X = x_i)$ , c'est-à-dire les nombres réels positifs  $p_i$  tels que  $P(X = x_i) = p_i$  avec  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

#### 1.3.1.1 Exemples des variables aléatoires discrètes

##### Loi de Bernoulli

**Définition 1.3** On dit qu'une v.a.r.  $X$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  suit une loi de Bernoulli de Paramètre  $p \in ]0, 1[$ , notée  $B(p)$ , si

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p. \quad (1.2)$$

Par exemple, cette loi intervient lorsque l'on modélise l'état de fonctionnement d'un système. La probabilité que le système fonctionne vaut  $p$  et la probabilité que le système ne fonctionne pas vaut  $1 - p$ . Cette loi s'applique aussi aux jeux de hasard de type binaire comme pile ou face.

##### Loi binomiale

**Définition 1.4** On dit qu'une v.a.r.  $X$  à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, N\}$  suit une loi binomiale de Paramètres  $(n, p)$ , notée  $B(n; p)$ , si

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{(n-k)}, 0 \leq k \leq n. \quad (1.3)$$

Cette loi intervient par exemple pour modéliser le nombre de pièces défectueuses dans un lot de  $n$  pièces, qui ont chacune une probabilité  $p$  d'être défectueuse, indépendamment les unes des autres

## Loi géométrique

**Définition 1.5** On dit qu'une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , notée  $\mathcal{G}(p)$ , si

$$P(X = k) = p(1 - p)^{(k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.4)$$

Cette loi permet de modéliser le nombre de réalisations indépendantes d'une expérience à 2 issues (succès-échec), jusqu'à l'obtention du premier succès, si à chaque réalisation la probabilité de succès est  $p$ .

## Loi de Poisson

**Définition 1.6** On dit qu'une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , si

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^k}{k!} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Cette loi intervient; comme comportement limite de la loi binomiale lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $np \rightarrow \lambda$ . Elle intervient également pour modéliser des "événements rares"

### 1.3.2 les variables aléatoires continues

**Définition 1.7** Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

**Définition 1.8** Soit  $X$  une v. a.r. qui prend un nombre infini non dénombrable de valeurs. Si  $F_X$  est une fonction continue, on dit que  $X$  est une v. a. r. Continue. Dans ce cas, la loi de  $X$  est déterminée par l'ensemble des probabilités  $P(a < X < b)$ , pour tout  $a < b$ .

#### 1.3.2.1 Exemples des variables aléatoires continues

##### Lois uniforme

La loi uniforme sur un intervalle est la loi des "tirages au hasard" dans cet Intervalle. Si  $a < b$  sont deux réels, la loi uniforme sur l'intervalle  $[a; b]$  est notée  $\mathcal{U}([a, b])$ . Elle a pour densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a} 1_{([a, b])}(x). \quad (1.6)$$

### Lois exponentielle

On dit que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ , si la loi de  $X$  a pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

La loi exponentielle est utilisée en fiabilité. Le paramètre  $\lambda$  représente le taux Moyen de défaillance alors que son inverse  $\theta = 1/\lambda$  est "le temps moyen de bon fonctionnement".

La loi exponentielle s'applique bien aux matériels électroniques ou aux matériels subissant des défaillances brutales

### Loi Gamma

La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des lois Gamma. Soient  $a > 0$  et  $\lambda > 0$ . On dit que  $X$  suit une loi Gamma de paramètres  $(a, \lambda)$ , notée  $\Gamma(a, \lambda)$ , si la loi de  $X$  a pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{(a-1)} \exp(-\lambda x), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Où pour tout  $a > 0$ , la fonction gamma est donnée par

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-x) dx. \quad (1.9)$$

Le paramètre  $a$  est un paramètre de forme alors que le paramètre  $\lambda$  est un paramètre d'échelle.

Pour  $n$  entier,  $a = n/2$  et  $\lambda = 1/2$ , la loi  $G(n/2, 1/2)$  est appelée loi du chi-deux à  $n$  degrés de liberté, et notée  $\chi^2(n)$ . Elle joue un rôle important en statistique, c'est la loi de la somme des carrés de  $n$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On l'utilise Pour les variances empiriques d'échantillons gaussiens. La loi  $G(1, \lambda)$  est la loi exponentielle  $Exp(\lambda)$ .

### Lois du $\chi^2$ , de Student et de Fisher

Par définition, la variable aléatoire, somme des carrés de  $v$  variables indépendantes  $\mathcal{N}(0, 1)$  suit une loi du  $\chi_v^2$  à  $v$  degrés de liberté. Deux autres lois Jouent des rôles important en statistique.

La loi de Student à  $n$  degrés de liberté,  $T(n)$  est la loi du rapport  $X/\sqrt{(y/n)}$  où les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Y$  de loi  $\chi^2(n)$ . Elle a

pour densité :

$$\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (1.10)$$

Elle décrit la distribution de la moyenne empirique d'un échantillon gaussien.

La loi de Fisher de paramètres  $n$  et  $m$  (entiers positifs), est la loi du rapport  $(X = n) = (Y = m)$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives  $\chi_2(n)$  et  $\chi_2(m)$ . Elle caractérise la distribution de rapports de Variances est et très présente en théorie des tests (analyse de variance et modèle Linéaire). L'expression de sa densité est définie par un rapport de fonctions  $\Gamma$

## 1.4 Caractéristiques des variables aléatoires

### 1.4.1 Espérance

**Définition 1.9** *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire se définit comme la moyenne des valeurs prises par cette variable, pondérées par leurs probabilités. Dans le cas d'une variable discrète que l'on suppose prendre les valeurs entières, elle se définit simplement par (Sous réserve d'existence, c'est-à-dire ici de sommabilité). Pour une variable continue, la formule différentielle donnée précédemment s'intègre en (Sous réserve d'existence, c'est-à-dire ici d'intégrabilité).*

**Propriétés :**

1. L'espérance est linéaire : pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , et pour toutes v .a .r.  $X$  et  $Y$

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

2. Si  $X$  est une v.a.r. constante égale à  $a \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire pour tout  $\omega \in \Omega, X(\omega) = a$ , alors  $P(X = a) = 1$  et  $E(X) = a$ .
3. L'espérance d'un v. a. r. positive est positive. En particulier, si  $X \geq Y$  (ce qui signifie que pour tout  $\omega \in \Omega, X(\omega) \geq Y(\omega)$ ), alors  $E(X - Y) \geq 0$  donc  $E(X) \geq E(Y)$ . L'espérance d'une v .a .r.  $X$  est un indicateur de "localisation" de sa loi :  $E(X) \simeq$  "valeur moyenne de  $X$ ".

### 1.4.2 Variance et l'écarte type

**Définition 1.10** *Pour rendre positifs les écarts entre  $X$  et son espérance  $E(X)$ , un autre outil plus facile à manipuler que la valeur absolue, est à notre disposition : la mise au carré. On ne va donc pas calculer la moyenne des écarts mais la moyenne Des écarts au carré. C'est ce qu'on appelle la variance.*

La variance de la v.a.  $X$  est la quantité :

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] \quad (1.11)$$

**Propriétés**

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  pour tout  $a; b \in \mathbb{R}$ , en particulier,  $\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$ .

Afin d'être en mesure de comparer, en termes d'ordre de grandeur, variance et espérance, il faut prendre la racine carrée de la variance. C'est ce qu'on appelle L'écart-type.

**Définition 1.11** La racine carrée de  $\text{Var}(X)$ , notée  $\sigma(X)$ , est appelée écart type de  $X$ .

**Exemple 1.1** — Loi uniforme  $\mathcal{U}([a, b])$  :  $E(X) = (a + b)/2$  et  $\text{var}(X) = ((a - b)^2)/12$

- Loi de Bernoulli  $B(p)$  :  $E(X) = p$  et  $\text{Var}(X) = p(1 - p)$ .
- Loi Binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  :  $E(X) = np$  et  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$  :
- Loi géométrique  $G(p)$  :  $E(X) = 1/p$  et  $\text{Var}(X) = (1 - p)/(p^2)$
- Loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  :  $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$
- Loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :  $E(X) = \mu$  et  $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- Loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  :  $E(X) = 1/\lambda$  et  $\text{Var}(X) = 1/(\lambda^2)$ .

### 1.4.3 Indépendance des variables aléatoire

**Définition 1.12** Deux v.a.  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes si et seulement si

$$P(X \in A; Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B); \quad \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.12)$$

On peut montrer que l'indépendance est équivalente à

$$P(X \leq a; Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b); \quad \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.13)$$

Où encore en termes de fonctions de répartition :

$$F_{(X,Y)}(a; b) = F_X(a)F_Y(b); \quad \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.14)$$

**Théorème 1.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r.

- Cas discret :  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout couple  $(x, y) \in X \times X$ , on a

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

- Cas continu :  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout couple  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ; on a

$$f_{X,Y}(s, t) = f_X(s)f_Y(t).$$

## 1.5 Théorèmes limites

### 1.5.1 Introduction

Deux théorèmes mathématiques ont une place particulière en théorie des probabilités et en statistiques : la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ils interviennent dans l'étude de phénomènes aléatoires comportant un grand nombre de v.a.r indépendantes de même loi. Par exemple, pour le premier cité, il apparaît lorsque l'on étudie la proportion de "pile" dans un jeu de pile ou face, ou encore la moyenne de lancers de dé successifs. Quant au second, il nous donne de façon informelle une estimation précise de l'erreur que l'on commet en approchant l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique.

### 1.5.2 Loi faible des grands nombres

**Théorème 1.2** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.r. indépendantes, de même loi, et admettant une variance. On note  $\mu = E(X_1)$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , Dans ce cas, on dit que la moyenne arithmétique  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  converge en probabilité vers l'espérance mathématique lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### 1.5.3 Loi forte des grands nombres

**Théorème 1.3** Soit  $(x_i, i \geq 1)$ , une suite de réalisation de la variable aléatoire  $X$ . On suppose que  $E(|X|) < \infty$ . Alors, pour presque tout  $\omega$  (c-a-d il existe  $N \in \Omega$  avec  $P(N) = 0$  et  $\omega \notin N$ )

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) \quad (1.15)$$

#### 1.5.3.1 Théorème centrale limite

On a vu que deux v.a.r ont la même loi si et seulement si leur fonctions de répartition sont égales. Ainsi, la fonction de répartition est souvent utilisée en pratique afin de démontrer l'égalité en loi. On est donc amené à définir la convergence en loi comme la convergence des fonctions de répartition associées.

**Définition 1.13** Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. et soit  $Y$  une v.a.r. On dit que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $Y$  si pour tout  $x_0$  point de continuité de la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$ ,

$$F_{Y_n}(x_0) = P(Y_n \leq x_0) \longrightarrow F_Y(x_0) = P(Y \leq x_0), \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

On note la convergence en loi  $Y_n \longrightarrow y$ . La convergence en loi est réalisée aux points de continuité de  $F_Y$ . C'est la convergence simple de la suite de fonctions de répartition

$F_{Y_n}$ .

**Propriété d'additivité de la loi normale :** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a. indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors la v.a.  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ . Ce résultat implique que la v.a. centrée réduite  $\sum \frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Que se passe-t-il dans le cas général où les v.a.r  $X_i$  ne sont pas nécessairement normales ? le résultat ci-dessus se transforme alors en un résultat de convergence en loi.

**Théorème 1.4 (TCL)** Soit  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.r indépendantes, de même loi, et admettant une variance. On note  $m = E(X_1)$  et  $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$ , alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

## 1.6 lois usuelles

### 1.6.1 Les lois finies

#### 1.6.1.1 La loi uniforme

**Définition 1.14** soient  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $a < b$ . On dit que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$  si  $X(\omega) \in [a, b]$  et  $\forall k \in [a, b], P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$ . On note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

**Exemple 1.2** Une urne contient  $n$  boules numérotées. On en tire une au hasard, la variable  $X$  est égale au numéro de la boule tirée.

**Proposition 1.1** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$  alors elle admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{1.16}$$

Et

$$\text{var}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12} \tag{1.17}$$

#### 1.6.1.2 la loi de Bernoulli

**Définition 1.15** Soit  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si :  $X(\omega) \in \{0, 1\}$  et  $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$

**Exemple 1.3** Tout éprouve à deux issues : succès et échec est la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

**Proposition 1.2** Soit  $X \hookrightarrow B(1, p)$ .  $X$  admet une espérance et une variance :

$$E(X) = p \tag{1.18}$$

Et

$$\text{var}(X) = p(1-p) \tag{1.19}$$

### 1.6.1.3 La Loi binomiale

**Définition 1.16** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$  si :  $X(\omega) = [n, p]$  et on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.20)$$

Où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On note

$$X \hookrightarrow B(n, p)$$

**Exemple 1.4** On considère une succession de  $n$  épreuves aléatoires dont les résultats sont indépendantes, chacun ayant deux issues appelée succès (de probabilité  $p$ ) et échec (de probabilité  $1 - p$ ).  $X$  est le nombre total de succès dans  $n$  épreuves.

**Proposition 1.3** Soit  $X \hookrightarrow B(n, p)$ .  $X$  admet une espérance et une variance :

$$E(X) = np \quad (1.21)$$

Et

$$V(X) = np(1-p) \quad (1.22)$$

### 1.6.1.4 La loi hypergéométrique

**Définition 1.17** Soit  $(n, N) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $1 \leq n \leq N$  et  $p \in ]0, 1[$  tel que  $Np$  soit un entier naturel. On pose  $q = 1 - p$  on dit que  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètre  $(N, n, p)$  si :

$$X(\omega) = [\max(0, n - N_q), \min(n, N_p)] \text{ et } \forall k \in [\max(0, n - N_q), \min(n, N_p)],$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_p}{k} \binom{N_q}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$

**Exemple 1.5** On tire sans remise  $n$  boules dans une urne contenant  $N_p$  boules blanches et  $N_q$  boules noires,  $X$  est le nombre de boules blanches obtenues.

**Proposition 1.4** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ .  $X$  admet une espérance et une variance :

$$E(X) = np \quad (1.23)$$

Et

$$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1} \quad (1.24)$$

## 1.6.2 Les lois infinies

### 1.6.2.1 La loi géométrique

**Définition 1.18** Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ . On dit que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  si :

$$X(\omega) = N^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$P(X = k) = pq^{(k-1)}.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

**Exemple 1.6** On Effectue une infinité de lancers d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est  $p$  et celle d'obtenir face est  $q$ .  $X$  est le rang d'apparition du premier pile.

**Proposition 1.5** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$

— Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X > k) = q^k$

— Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P(X > k + l) = P(X > k)P(X > l)$

### 1.6.2.2 La loi de poisson

**Définition 1.19** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  On dit que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si :  $X(\omega) = N$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$p(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

**Exemple 1.7** C'est une loi limite de la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$  quand  $np$  tend vers  $\lambda$  pour  $n$  qui tend vers  $+\infty$  et  $p$  proche de 0. Elle sert à modéliser par exemple le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une période donnée, ou encore le nombre de voitures passant à un péage pendant une période donnée...

**Proposition 1.6** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ , admet une espérance et une variance :

$$E(X) = \lambda \quad (1.25)$$

Et

$$V(X) = \lambda \quad (1.26)$$

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  admet une espérance et une variance.

## 1.7 Estimations

### 1.7.1 Généralités :

Estimation générale consiste à trouver à partir d'observations les valeurs de paramètres inconnus d'une ou plusieurs lois de probabilité (valeurs prises par des variables qui obéissent à cette loi de probabilité). Pour cela, on utilise un estimateur basé sur la v.a étudiée : lorsque v.a a pour valeur une observation, la valeur de l'estimateur est appelée une estimation. Le terme estimation fait référence à une valeur numérique utilisée pour l'approximation. En général, l'estimateur est une variable aléatoire, c'est-à-dire que l'estimation du paramètre dépend des individus présents dans l'échantillon. Une autre estimation de ce paramètre serait obtenue si un autre échantillon était considéré. La sélection de l'estimateur est basée sur des critères qui mesurent sa proximité avec les paramètres inconnus. Dans ce qui suit, nous présentons une liste des critères les plus couramment utilisés pour définir la "qualité" d'un estimateur.

### 1.7.2 Estimateur sans biais :

Un estimateur est sans biais si, avec une taille d'échantillon finie et fixe, différentes estimations du même paramètre pour différents échantillons permettent d'estimer ce paramètre comme le centre de gravité, ou plus simplement, si  $T$  est un estimateur de  $E(T) = \theta$ . L'opérateur  $E(\cdot)$  est utilisé pour représenter la moyenne de la population de la variable aléatoire qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  sur laquelle il opère. Un estimateur classiquement utilisé pour la variance est :

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.27)$$

C'est un estimateur biaisé de la variance, il sous-estime en moyenne la variance de population, en effet

$$E(\widehat{\sigma}_n^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 \quad (1.28)$$

Nous voyons à partir de la formule précédente qu'une estimation sans biais de la variance est donnée par :

$$\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (1.29)$$

Si la moyenne de population  $m$  est connue, il est facile de montrer qu'un estimateur sans biais de la variance est donné par :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad (1.30)$$

Plus généralement, si  $g$  est une fonction non linéaire, et si  $T$  est un estimateur sans biais de 0, alors :

$$E(g(t)) \neq g(0)$$

Ainsi, en prenant  $g(x) = \sqrt{x}$  on obtient :

$$E\left(\sqrt{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}\right) \neq \sigma$$

La quantité  $\sqrt{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}$  n'est donc pas un estimateur sans biais de l'écart type  $\sigma$ .

### 1.7.3 Estimateur efficace

**Définition 1.20** *Un estimateur sans biais est efficace si sa variance est la plus faible parmi les variances des autres estimateurs sans biais. Ainsi, si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux estimateurs sans biais du paramètre  $\theta$ , l'estimateur  $\theta_1$  est le meilleur estimateur si :*

$$V(\theta_1) < V(\theta_2) \tag{1.31}$$

Et

$$E(\theta_1) = E(\theta_2) = \theta \tag{1.32}$$

### 1.7.4 Une méthode générale d'estimation : le maximum de vraisemblance

Fisher propose une méthode basée sur la remarque suivante : les meilleurs valeurs pour le paramètre inconnu  $\theta$  sont celles qui donnent la plus grande probabilité aux événements observés  $(x_1, \dots, x_n)$ . On vu que cette probabilité peut être "représentée" par la vraisemblance

$$L(x, \theta) = f(x_1, \theta) \dots f(x_n, \theta). \tag{1.33}$$

**Remarque 1.1** *Il est équivalent de rendre maximum*

$$\ln L(x, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta) \tag{1.34}$$

## 1.7.5 Moments

Si  $X$  une variable aléatoire, on appelle moment d'ordre  $K$ , s'il existe le nombre  $E(X^K)$ , tel que on a :

$$\mu_K = E[(X - E(X))^k]$$

Le moment factoriel d'ordre  $K$

$$E[X(X - 1)\dots(X - K + 1)].$$

### 1.7.5.1 Méthode du Moments

L'idée de base de la méthode des moments est d'estimer l'espérance mathématique par la moyenne empirique et d'estimer la variance par la variance empirique, etc... Autrement dit, si  $\theta = E(X)$ , alors l'estimateur  $\theta$  par la méthode des moments est

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.35)$$

Généralement, l'estimateur du moment d'ordre  $r$  est donné par la formule :

$$E(X^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.36)$$

Alors, pour  $\theta \in O$  si  $E(X) = \phi(\theta)$ , où  $\phi$  est une fonction inversible, l'estimateur de  $\phi$  par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta}_n = \phi^{-1}(\hat{\delta}_n) \quad (1.37)$$

De la même manière, on estime la variance de la loi de  $X_i$  par la variance empirique de l'échantillon.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (1.38)$$

### 1.7.5.2 Fonction génératrice des moments

**Définition 1.21** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que la fonction

$$f_X(u) = e^{bu} g_X(au) \quad (1.39)$$

Cette fonction appelé fonction génératrice des moments de  $X$ , et Pour  $a, b$  deux réelles, on a

$$G_{aX+b}(u) = e^{bu} G_X(au),$$

- La fonction  $G_X(-u)$  est aussi une fonction génératrice des moments,
- La fonction  $G_X$  est convexe.

## CHAPITRE 2

# LOI EXPONENTIELLE À DEUX PARAMÈTRES

### 2.1 Introduction

La variable aléatoire  $X$  à une distribution exponentielle à deux paramètres si elle a une fonction de densité de probabilité de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta}; \quad x \geq \alpha, \quad \beta > 0 \quad (2.1)$$

Où  $\alpha$  soit le paramètre de localisation et  $\beta$  soit le paramètre d'échelle.

On considère  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  comme un échantillon aléatoire ordonné d'une distribution exponentielle de l'éq.2.1. Dans la littérature, l'estimation des paramètres dans la distribution exponentielle est largement considérée par exemple, Johnson et Kotz (1970)[1]; Johnson et al (1994)[2]; et Balakrishnan et Basu (1995)[3]; souvent l'estimation des paramètres dans les distributions exponentielles est considérée dans un scénario d'application spécial tel qu'avec la fonction de survie comme dans Balakrishnan et Sandhu (1996)[4]. Les variantes de ce scénario incluent des échantillons censurés, des populations tronquées et des situations où le paramètre de décalage est supposé être connu. Ici, nous traitons des distributions exponentielles de l'équation 2.1 et supposons que les deux paramètres sont inconnus.

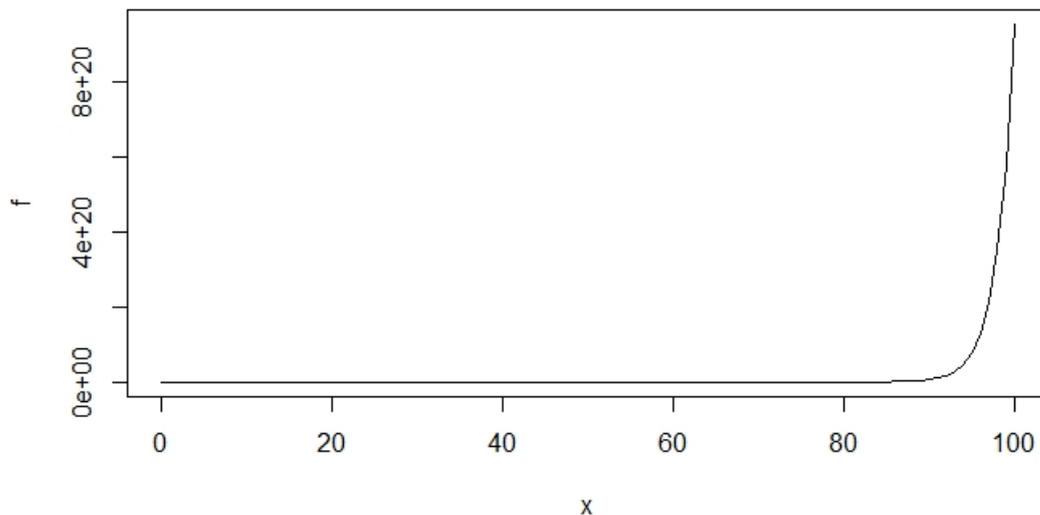


FIGURE 2.1 – La densité de la loi exponentielle de paramètre  $\text{Exp}(2,2)$

## 2.2 Estimation du maximum de vraisemblance (MLE)

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes ayant chacune la fonction de densité de probabilité  $f$ , alors les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\alpha$  et  $\beta$  sont :

$$\hat{\alpha}_L = X_{1:n} \text{ le minimum, et } \hat{\beta}_L = \bar{X} - X_{1:n}$$

Où  $\bar{X}$  est la moyenne de l'échantillon.

On peut facilement montrer que :

$$E(\hat{\alpha}_L) = \alpha + (\beta/n), \quad V(\hat{\alpha}_L) = (\beta^2/n^2) \quad , \text{ et } \quad E(\hat{\beta}_L) = \beta(1 - (1/n))$$

Dans cette section nous vérifierons que :

$$V(\hat{\beta}_L) = \frac{\beta^2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{2.2}$$

Notez la différence de  $V(\hat{\beta}_L)$  donnée dans Johnson et Kotz (1970, p.211)[5] et dans Johnson et al. (1994, p.507)[2].

$$V^*(\hat{\beta}_L) = \beta^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right).$$

Pour démontrer l'équation 2.2, introduisons quelques théorèmes :

◇ **Théorème 2.1** Pour  $1 \leq i \leq n$

$$\alpha_{i:n} = E(X_{i:n}) = \alpha + \beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r}. \quad (2.3)$$

**Preuve.** Pour  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \alpha_{i:n} &= E(X_{i:n}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \{F(x_i)\}^{i-1} \{1-F(x_i)\}^{n-i} f(x_i) dx_i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \cdot \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x_i (1 - e^{-(x_i-\alpha)/\beta})^{i-1} (e^{-(x_i-\alpha)/\beta})^{n-i} e^{-(x_i-\alpha)/\beta} dx_i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \int_{\alpha}^{\infty} x_i e^{-(n-i+1+r)(x_i-\alpha)/\beta} dx_i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{n-i+1+r} \left( \alpha + \frac{\beta}{n-i+1+r} \right) \\ &= \alpha + \beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r}, \end{aligned}$$

Puisque,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{n-i+1+r} &= \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{(n-i+1+r)^2} &= \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} (H[n] - H[n-i]) \\ &= \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \end{aligned}$$

Où  $H[n]$  représente le nombre harmonique  $\sum_{r=1}^n (\frac{1}{r})$ . ■

◇ **Théorème 2.2** Pour  $1 \leq i \leq n$ , on a,

$$\alpha_{i:n}^{(2)} = E(X_{i:n}^2) = \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} + \beta^2 \left[ \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right] \quad (2.4)$$

**Preuve.** Pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i:n} &= E(X_{i:n}^2) \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 \{F(x_i)\}^{i-1} \{1-F(x_i)\}^{n-i} f(x_i) dx_i \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \cdot \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x_i^2 (1 - e^{-(x_i-\alpha)/\beta})^{i-1} (e^{-(x_i-\alpha)/\beta})^{n-i} e^{-(x_i-\alpha)/\beta} dx_i \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \int_{\alpha}^{\infty} x_i^2 e^{-(n-i+1+r)(x_i-\alpha)/\beta} dx_i \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \left( \frac{\alpha^2}{n-i+1+r} + \frac{2\alpha\beta}{(n-i+1+r)^2} + \frac{2\beta^2}{(n-i+1+r)^3} \right) \\
 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \\
 &\quad + \beta^2 \left[ \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

Puisque ,

$$\sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{n-i+1+r} = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{(n-i+1+r)^2} &= \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} (H[n] - H[n-i]) \\
 &= \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r},
 \end{aligned}$$

$H[n]$  représente le nombre harmonique  $\sum_{r=1}^n (\frac{1}{r})$ , et

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \frac{1}{(n-i+1+r)^3} &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} [\Gamma(i)\Gamma(n-i+1) \cdot \{(H[n] - H[n-i])^2 \\
 &\quad - PolyGamma[1, n+1] + PolyGamma[1, n-i+1]\}] \\
 &= \frac{(i-1)!(n-i)!}{2(n!)} \left[ \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

Où

$$PolyGamma[n, z] = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{n+1}}.$$

■

◇ **Théorème 2.3** Pour  $j - i \geq 2$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j;n} = E(X_{i:n}X_{j:n}) &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \\ &+ \beta^2 \left[ \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right] \\ &+ \alpha\beta \sum_{r=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+r} + \beta^2 \left( \sum_{r=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+r} \right) \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Preuve.** Pour  $j - i \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j;n} &= E(X_i X_j) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \{F(x_i)\}^{i-1} \\ &\times \left[ \int_{x_i}^{\infty} \{F(x_j) - F(x_i)\}^{j-i-1} x_j \{1 - F(x_i)\}^{n-j} f(x_j) dx_j \right] f(x_i) dx_i \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \{F(x_i)\}^{i-1} I_1 F(x_i) dx_i \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_i}^{\infty} \{F(x_j) - F(x_i)\}^{j-i-1} x_j \{1 - F(x_i)\}^{n-j} f(x_j) dx_j \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{x_i}^{\infty} \{e^{-(x_i-\alpha)/\beta} - e^{-(x_j-\alpha)/\beta}\}^{j-i-1} x_j e^{-(n-j)(x_i-\alpha)/\beta} e^{-(x_j-\alpha)/\beta} dx_j \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^s \binom{j-i-1}{s} e^{-(j-i-s)(x_j-\alpha)/\beta} dx_j \\ &= \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^s \binom{j-i-1}{s} \left[ \frac{x_i}{n-j+1+s} + \frac{\beta}{(n-j+1+s)^2} \right] e^{-(n-i)(x_i-\alpha)/\beta} \\ &+ \frac{(j-i-1)!(n-j)!}{(n-i)!} \left( x_i + \beta \sum_{s=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+s} \right) e^{-(n-i)(x_i-\alpha)/\beta}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i,j:n} &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \int_{\alpha}^{\infty} x_i F(x_i)^{i-1} I_1 f(x_i) dx_i \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \int_{\alpha}^{\infty} x_i \left( x_i + \beta \sum_{s=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+s} \right) \cdot e^{-(n-i+1+r)(x_i-\alpha)/\beta} dx_i \\
 &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \binom{i-1}{r} \left[ \frac{\alpha^2}{n-i+1+r} + \frac{2\alpha\beta}{(n-i+1+r)^2} \frac{2\beta^2}{(n-i+1+r)^3} + \sum_{s=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+s} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\alpha\beta}{n-i+1+r} + \frac{\beta^2}{(n-i+1+r)^2} \right) \right] \\
 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} + \beta^2 \left[ \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right] \\
 &\quad + \alpha\beta \sum_{r=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+r} + \beta^2 \left( \sum_{r=1}^{j-i} \frac{1}{n-j+r} \right) \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)
 \end{aligned}$$

■

◇ **Théorème 2.4** Pour  $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i,i+1:n} &= \alpha^2 + \alpha\beta \left[ \frac{1}{n-i} + 2 \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right] \\
 &\quad + \beta^2 \left[ \frac{1}{n-i} \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} + \sum_{r=1}^i \left( \frac{1}{n-i+r} \right)^2 + \left( \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-i+r} \right)^2 \right] \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Sur la base des théorèmes standards, nous avons :

$$V(\hat{\beta}_L) = V(\bar{X} - X_{1:n}) = V(\bar{X}) + V(X_{1:n}) - 2cov(\bar{X}, X_{1:n})$$

Où

$$V(\bar{X}) = \frac{\beta^* 2}{n} \quad , \quad V(X_{1:n}) = \frac{\beta^2}{n^2}$$

Et

$$\begin{aligned}
 cov(\bar{X}, X_{1:n}) &= \frac{1}{n} cov \left( X_{1:n}, \sum_{i=1}^n X_{i:n} \right) \\
 &= \frac{1}{n} V(X_{1:n}) + \frac{1}{n} cov(X_{1:n}, X_{2:n}) + \frac{1}{n} \sum_{i=3}^n cov(X_{1:n}, X_{i:n})
 \end{aligned}$$

Puisque,

$$cov(X_{1:n}, X_{2:n}) = E(X_{1:n} X_{2:n}) - E(X_{1:n}) E(X_{2:n})$$

En utilisant théorème 2.4 nous obtenons :

$$E(X_{1:n}X_{2:n}) = \alpha^2 + \alpha\beta\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \beta^2\left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n(n-1)}\right)$$

Appliquer théorèmes 2.1 on obtient

$$\text{cov}(X_{1:n}, X_{2:n}) = \frac{\beta^2}{n^2}$$

Pour  $3 \leq i \leq n$ , Résultats 2.3 donne :

$$E(X_{1:n}X_{2:n}) = \alpha^2 + \alpha\beta\left(\frac{2}{n} + \sum_{r=1}^{i-1} \frac{1}{n-i+r}\right) + \beta^2\left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} + \sum_{r=1}^{i-1} \frac{1}{n-i+r}\right)$$

Maintenant, puisque

$$\text{cov}(X_{1:n}, X_{2:n}) = E(X_{1:n}X_{2:n}) - E(X_{1:n})E(X_{2:n}) = \frac{\beta^2}{n^2}$$

Avec

$$\text{cov}(\bar{X}, X_{1:n}) = \frac{1}{n}\left(\frac{\beta^2}{n^2} + \frac{\beta^2}{n^2} + (n-2)\frac{\beta^2}{n^2}\right) = \frac{\beta^2}{n^2}$$

On trouve que :

$$V(\hat{\beta}_L) = \frac{\beta^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et

$$\text{cov}(\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L) = \text{cov}(X_{1:n}, \bar{X} - X_{1:n}) = 0$$

## 2.3 Estimation sans biais (UMLE)

Les estimations sans biais qui sont une fonction linéaire des estimations du maximum de vraisemblance sont :

$$\hat{\alpha}_U = \frac{1}{n-1}(nX_{1:n} - \bar{X}) \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_U = \frac{n}{n-1}(\bar{X} - X_{1:n})$$

Avec

$$V(\hat{\alpha}_U) = \frac{\beta^2}{n(n-1)} \quad ; \quad V(\hat{\beta}_U) = \frac{\beta^2}{n-1}$$

Et

$$\text{cov}(\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L) = -\frac{\beta^2}{n(n-1)}$$

## 2.4 Méthode des espacements de produits (MPS)

La méthode des espacements de produits (MPS) a été introduite simultanément par Cheng et Amin (1983)[6] et Ranney (1984)[7]. Soit

$$D_i = Y_i - Y_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x; \theta) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

Où  $x_0$  est la limite inférieure et  $x_{n+1}$  est la limite supérieure du domaine de la fonction de densité  $f(x; \theta)$ , et  $\theta$  peut être à valeur vectorielle. De toute évidence, la somme des espacements à l'unité,  $\sum D_i = 1$ . La méthode MPS consiste, tout simplement, à choisir  $\theta$  pour maximiser la moyenne géométrique des espacements,

$$G = \left( \prod_{i=1}^{n+1} D_i \right)^{1/(n+1)},$$

Où, de manière équivalente, son logarithme  $H = \ln G$ . L'estimation MPS donne des estimateurs cohérents dans des conditions beaucoup plus générales que les MLE. Les estimateurs MPS sont asymptotiquement normaux et asymptotiquement aussi efficaces que les MLE lorsqu'ils existent. Maintenant, en utilisant la fonction de densité 2.1, nous calculons

$$H = \frac{1}{n+1} \left\{ \ln(1 - e^{-(x_{i:n}-\alpha)/\beta}) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(e^{-(x_{i:n}-\alpha)/\beta} - e^{-(x_{i+1:n}-\alpha)/\beta}) - \frac{x_{n:n} - \alpha}{\beta} \right\}. \quad (2.7)$$

Puis en dérivant par rapport 2.7  $\alpha$  et  $\beta$  et égalant à zéro, on obtient

$$\hat{\alpha}_p = X_{1:n} + \hat{\beta}_p \ln \frac{n}{n+1} \quad (2.8)$$

Et

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_{i:n} e^{-(x_{i:n}/\hat{\beta}_p)} - X_{i+1:n} e^{-(x_{i+1:n}/\hat{\beta}_p)}}{e^{-(x_{i:n}/\hat{\beta}_p)} - e^{-(x_{i+1:n}/\hat{\beta}_p)}} = nX_{1:n} - X_{n:n} \quad (2.9)$$

Où  $\hat{\alpha}_p$  et  $\hat{\beta}_p$  sont les estimateurs MPS. En résolvant 2.8 et 2.9, en utilisant la méthode de Newton-Raphson,  $\hat{\alpha}_p$  et  $\hat{\beta}_p$  sont facilement obtenus.

Pour augmenter le taux de convergence et la facilité de calcul, les estimations UMLE peuvent être utilisées comme estimations initiale dans l'itération de Newton-Raphson. À cause de l'absence d'expression fermée pour  $\hat{\alpha}_p$  et  $\hat{\beta}_p$ , la simulation est effectuée dans la section 1 de chapitre 3.

## 2.5 Estimation des quantiles (QE)

Les méthodes d'estimations basées sur l'utilisation des quantiles des distributions correspondantes sont appelées estimations des quantiles. Les estimations des quantiles peuvent généralement être résumées comme suit :

Soit  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$  les paramètres à estimer et  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  la statistique d'ordre obtenue à partir d'un échantillon aléatoire de  $F(x; \theta)$ , où pour  $\theta$  fixé,  $F(x; \theta)$  est supposée strictement croissante à l'intérieur de son support. Soit  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$  l'ensemble des  $r$  indices distincts, où  $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j = \{1, 2, \dots, r\}$ . Alors on peut écrire :

$$F(x_{i:n}; \theta) \cong P_{i:n}, i \in I$$

Où de manière équivalente :

$$x_{i:n} \cong F^{-1}(P_{i:n}; \theta), \quad i \in I \quad (2.10)$$

Où

$$P_{i:n} = \frac{i - a}{n + b},$$

est une distribution empirique de  $F(x_{i:n}; \theta)$  ou, est une position de tracé appropriée, avec  $a$  et  $b$  sont des constantes. Les valeurs de  $a$  et  $b$  sont choisies (soit théoriquement, soit par simulation) de sorte que les estimateurs résultants aient certaines propriétés souhaitables (par exemple : erreur quadratique moyenne minimale). En remplaçant l'approximation par l'égalité dans 2.10, on obtient un ensemble de  $r$  équations indépendantes à  $r$  inconnues,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ . Une estimation élémentaire de  $\theta$  peut alors être obtenue en résolvant 2.10 pour  $\theta$ . Notez que ces estimation élémentaire basée sur la méthode de percentile. Les estimations obtenues à partir de 2.10 dépendent de  $r$  observations. Un sous-ensemble d'observations plus importantes est connu sous le nom de sous-ensemble élémentaire et l'estimation résultante est connue sous le nom d'estimation élémentaire de  $\theta$ . Ainsi, à partir d'un échantillon de taille  $n$ , il existe des estimations élémentaires  $nCr$ . Pour  $n$  et  $r$  grands, le nombre de sous-ensembles élémentaires peut être trop grand pour que les calculs de toutes les estimations élémentaires soient réalisables. Dans de tels cas, au lieu de calculer toutes les estimations élémentaires possibles. On peut sélectionner un nombre prédéfini,  $N$ , de sous-ensembles élémentaires soit systématiquement sur la base de certaines considérations théoriques, soit au hasard. Pour chacun de ces sous-ensembles, une estimation élémentaire de  $\theta$  est calculée et est notée  $\hat{\theta}_{j_1}, \hat{\theta}_{j_2}, \dots, \hat{\theta}_{j_N}, j = 1, 2, \dots, r$ . Ces estimations élémentaires peuvent être combinées, à l'aide de fonctions appropriées (de préférence robustes), pour obtenir une estimation finale globale de  $\theta$ . Une fonction robuste couramment utilisée est

la médiane (MED), c'est-à-dire :

$$\hat{\theta} = \text{median}(\hat{\theta}_{j_1}, \hat{\theta}_{j_2}, \dots, \hat{\theta}_{j_N}).$$

Les estimations sont uniques même lorsque la méthode des moments (MOM) et les équations MLE ont plusieurs solutions où alors le (MOM) et le (MLE) n'existent pas.

## 2.6 Distribution exponentielle à deux paramètres

Dans la distribution exponentielle à deux paramètres 2.1 , le cdf est

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{-(x-\alpha)/\beta}.$$

D'où il résulte que le p-ième quantile est :

$$q(p; \alpha, \beta) = \alpha - \log(1 - p)\beta, \quad 0 < p < 1.$$

Il y a deux paramètres donc deux équations sont nécessaires. Soit  $I = i, j$  pour que 2.10 devient :

$$x_{i:n} = \alpha - \log(1 - p_{i:n})\beta,$$

$$x_{j:n} = \alpha - \log(1 - p_{j:n})\beta,$$

Où  $i < j$ , d'où il résulte que les estimations élémentaires de  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par

$$\hat{\alpha}_{ij} = x_{i:n} + \hat{\beta}_{ij} \log(1 - p_{i:n}),$$

$$\hat{\beta}_{ij} = \frac{x_{j:n} - x_{i:n}}{\log(1 - p_{i:n}) - \log(1 - p_{j:n})}.$$

Alors pour choisir  $p_{i:n}, i = 1, 2, \dots, n$ , les estimations globales pour  $\alpha$  et  $\beta$  sont obtenues comme :

$$\hat{\alpha}_Q = \text{median}(\hat{\alpha}_{ij})$$

Et

$$\hat{\beta}_Q = \text{median}(\hat{\beta}_{ij}),$$

Où  $Q$  représente une estimation quantile. En choisissant  $p_{i:n}$ , Castillo et Hadi (1995)[8] ont suggéré d'utiliser :

$$p_{i:n} = 1 - \exp \left\{ \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-r+1} \right\};$$

À cause du fait que

$$E(X_{i:n}) = \mu_{i:n} = \sum_{r=1}^i \frac{1}{n-r+1},$$

Ce qui est vrai pour la distribution exponentielle standard, mais pour la distribution exponentielle à deux paramètres,  $\mu_{i:n}$  est fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  (résultat 2.1) et ne peut donc pas être utilisé à des fins générales. On peut décider d'estimer  $p_{i:n}$  en substituant des estimations simples à  $\alpha$  et  $\beta$  tel que décrit dans la section 2, dans la fonction quantile. Mais on peut facilement montrer que le MLE revient au MLE et que le UMLE ramène au UMLE. Par conséquent, dans la simulation de la section 5, le quantile empirique

$$p_{i:n} = \frac{i}{n+1},$$

sont utilisés.

## 2.7 Inférence pour la distribution exponentielle à deux paramètres avec statistiques de commande généralisées

### 2.7.1 Introduction

Pour modéliser des données statistiques ordonnées, Kamps (1995)[9] a introduit statistiques d'ordre pour unifier les variables aléatoires ordonnées ascendantes.

**Définition 2.1** *Statistiques de commandes généralisées (Kamps, 1995).*

Les statistiques généralisée de commande  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  basé sur une fonction de distribution continue  $F$  sont définis par leur fonction de densité de probabilité jointe :

$$f_{1,2,\dots,n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n \prod_{j=1}^n (1 - F(y_j))^{y_j - y_{j+1} - 1} f(y_j), \quad \text{avec } y_{n+1} = 0 \quad (2.11)$$

Sur le cône  $F^{-1}(0+) < y_1 \leq \dots \leq y_n < F^{-1}(1)$ , où  $C_r = \prod_{i=1}^r y_i$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ ,

$$F^{-1}(t) = \inf\{y : F(y) \geq t\}$$

Désigne la fonction quantile de  $F$ .

Les paramètres du modèle sont définis comme

$$y_i = k + n - i + \sum_{j=i}^{n-1} m_j > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Avec  $y_n = k > 0$  et  $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $y_i = n - i + 1$  correspond aux statistiques de commande ordinaires,

$m_i = -1$ ;  $y_i = k$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , où  $k$  est un entier positif, correspond pour enregistrer des valeurs, et  $y_i = k + (m + 1)(n - i)$ ,  $m \geq -1$  Correspond à  $m$  Statistiques de commande généralisées.

Tout les résultats obtenu pour la statistique d'ordre sont valables pour tous les sous-modèles Statistiques de commande généralisées ou tout sous-modèle pour l'estimation, la prédiction et le test d'hypothèses statistiques (Mann, 1969[10]; Ahsanullah, 1980, 2000[11]; Cramer et Kamps, (2001)[12]; David et Nagaraja, 2003)[13]. Ils fournissent des estimateurs et des prédicteurs linéaires. Sous la condition  $y_i \neq y_j$  pour  $i \neq j$  Cramer et Kamps dérivent la probabilité fonction de densité  $f_r(y)$  de  $Y_r := Y(r, n, \tilde{m}, k)$ ,

$$f_r(y) = C_r \sum_{i=1}^r a_i(r) (1 - F(y))^{y_i - 1} f(y), \quad -\infty < y < \infty, \quad (2.12)$$

Où

$$a_i(r) = \prod_{j=1, j \neq i}^r (y_j - y_i)^{-1}, \quad 1 \leq i \leq r \leq n$$

La densité de probabilité de la distribution exponentielle à deux paramètres  $E(\alpha, \beta)$ , avec le paramètre de localisation  $\alpha$  et le paramètre d'échelle  $\beta$  est

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)\right), \quad x > \alpha, \quad \beta > 0 \quad (2.13)$$

Les statistiques d'ordre généralisées basées sur une distribution exponentielle ont des propriétés théoriques caractéristiques (Kamps, 1995, Théorème 3.10 [9]; Ahsanullah, 2000, Théorème 4.1)[14], qui permet d'obtenir des estimateurs linéaires, Prédicteurs linéaires et distributions exactes pour les quantités pivotes. Sultan et Abd Ellah (2006)[15] ont présenté deux intervalles de prédiction d'une statistique d'ordre à partir d'une distribution exponentielle à un paramètre pour un échantillon de taille aléatoire.

Lawless (1971)[16] a introduit une quantité pivot pour construire un intervalle de confiance de préduction d'une statistique d'ordre dans des expériences de test de durée de vie avec un échantillon de taille fixe.

Ahsanullah (2000) a dérivé des estimateurs linéaires sans biais de la variance mini-

male pour  $\alpha$  et  $\beta$  de la loi  $Exp(\alpha, \beta)$  est basé sur  $m$ -statistiques d'ordre généralisé. Ici, nous utilisons l'erreur quadratique moyenne pour sélectionner parmi les estimateurs et parmi les prédicteurs. L'erreur quadratique est sensible aux valeurs extrêmes et peut ne pas exister. C'est pourquoi nous utilisons également la mesure de proximité de Pitman (Pitman et Wishart, 1937) [17], Keating et al. (1993)[18] rapportent quelques exemples motivants et les situations où la mesure de proximité de Pitman est le critère approprié. Par exemple, les moments centrés d'ordre supérieur de la distribution de Cauchy avec une fonction de densité de probabilité

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad (2.14)$$

N'existe pas. Sur la base d'un échantillon aléatoire de taille deux, les erreurs quadratiques moyennes de  $\hat{\theta}_1 = x_1$  et  $\hat{\theta}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  n'existent pas, mais  $\hat{\theta}_2$  est-ce que Pitman est plus proche de  $\theta$  que  $\hat{\theta}_1$  (Keating et al., 1993, 47). Balakrishnan et al. (2012) [19] utiliser la mesure de Pitman pour comparer le meilleur prédicteur linéaire sans biais et le meilleur prédicteur linéaire invariant sous des données censurées de type II à partir de la distribution exponentielle.

Dans la section 2.8, nous présentons le problème d'estimation de la relation à deux paramètres distribution exponentielle  $Exp(\alpha, \beta)$ , sur la base de statistiques de commandes généralisées, et comparer les estimateurs candidats. Dans la section 2.9, nous donnons deux quantités pivots pour obtenir des prédicteurs ponctuels, des reconstruites ponctuels de statistiques d'ordre généralisées basé sur  $Exp(\alpha, \beta)$ , et utilisez l'erreur quadratique moyenne et la mesure de Pitman de proximité pour comparer les prédicteurs.

## 2.8 Estimation des paramètres d'échelle et de localisation de $Exp(\alpha, \beta)$ à partir de statistiques d'ordre généralisées

### 2.8.1 Estimation des paramètres

Nous étendons les résultats d'Ahsanullah (2000)[14] pour les  $m$  statistiques d'ordre généralisé. En suivant le Lemme 3.1 de Kamps (1995)[9] avec la fonction de densité de probabilité dans l'Eq. 2.13, la log-vraisemblance basée sur les  $r$  premières statistiques d'ordre généralisé  $Y_i = 1, 2, \dots, r$ , avec  $r \leq n$ , est

$$\ell(\alpha, \beta) \propto -r \ln(\beta) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{r-1} (y_i - y_{i+1})(y_i - \alpha) - \frac{y_r}{\beta} (y_r - \alpha) \quad \text{pour } \alpha < y_1 < \dots < y_r < \infty. \quad (2.15)$$

**Cas 1 : Estimation de  $\alpha$  avec  $\beta$  connu**

L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\beta$  est solution de  $\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$  comme

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^r y_i (Y_i - Y_{i-1}) \quad \text{avec} \quad Y_0 := Y(0, n, \tilde{m}, k) = \alpha. \quad (2.16)$$

La quantité  $r\hat{\beta}/\beta$  une distribution Gamma avec le paramètre de forme  $r$  et le paramètre d'échelle 1, ce qui implique que  $\hat{\beta}$  est un estimateur sans biais de  $\beta$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\beta$  est l'estimateur linéaire sans biais à variance minimale lorsque  $\alpha$  est connu.

**Cas 2 : Estimation de  $\alpha$  et  $\beta$**

À partir de l'équation. 2.15, les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\alpha$  et  $\beta$  sont des solutions  $\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$  et  $\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$ ,

$$\hat{\alpha} = Y_1 \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{r} \sum_{i=2}^r y_i (Y_i - Y_{i-1}). \quad (2.17)$$

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \frac{\beta}{y_1} \neq \alpha \quad \text{et} \quad E(\hat{\beta}) = \frac{(r-1)\beta^2}{r} \neq \beta$$

Sont biaisés. Les estimateurs sans biais corrigés sont

$$\beta^* = \frac{1}{r-1} \sum_{i=2}^r y_i (Y_i - Y_{i-1}) \quad \text{et} \quad \alpha^* = Y_1 - \frac{\beta^*}{y_1}. \quad (2.18)$$

On a

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{(r-1)\beta^2}{r^2} < \text{Var}(\beta^*) = \frac{\beta^2}{r-1}. \quad (2.19)$$

L'estimateur  $\tilde{\alpha} = Y_1 - \frac{\hat{\beta}}{y_1}$  est le meilleur estimateur linéaire invariant de  $\alpha$  (Mann, 1969 [10]; Nagaraja, 1986 [20]). Les estimateurs linéaires sans biais à variance minimale de  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ . De l'éq. 2.18, la quantité  $2(r-1)\beta^*/\beta$  suit une distribution  $\chi^2$  à  $2(r-1)$  degrés de liberté. L'intervalle de confiance  $100(1-\delta)\%$  pour  $\beta$  est

$$[\beta, \bar{\beta}] = \left[ \frac{2(r-1)\beta^*}{\chi_{1-\delta/2}^2(2r-2)}, \frac{2(r-1)\beta^*}{\chi_{\delta/2}^2(2r-2)} \right]. \quad (2.20)$$

Comme  $2y_1(Y_1 - \alpha)/\beta$  et  $2(r-1)\beta^*/\beta$ , qui suivent une distribution axiale avec différents degrés de liberté, sont indépendants les uns des autres,

$$\frac{y_1(Y_1 - \alpha)}{\beta^*} \sim F(2, 2r-2) \quad (2.21)$$

Où  $F(v_1, v_2)$  désigne la distribution  $F$  avec des degrés de liberté  $v_1$  et  $v_2$ . Un intervalle de confiance de  $100(1 - \delta)\%$  pour  $\alpha$  est

$$Y_1 - \frac{\beta^*}{y_1} F_\delta(2, 2r - 2) < \alpha < Y_1 \quad (2.22)$$

### 2.8.2 Comparaison entre estimateurs

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont inconnus,  $r\hat{\beta}/\beta$  suit une distribution Gamma de forme  $r - 1$  et de paramètre d'échelle 1. L'erreur quadratique moyenne (MSE) de paramètre  $\alpha$  et  $\beta$  sont

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2}{r} < \frac{\beta^2}{r-1} = Var(\beta^*) = MSE(\beta^*) \quad (2.23)$$

Et

$$MSE(\hat{\alpha}) = \frac{2\alpha^2}{y_1}, \quad MSE(\alpha^*) = \frac{r\beta^2}{(r-1)y_1}, \quad MSE(\tilde{\alpha}) = \frac{(r-1)\beta^2}{ry_1} \quad (2.24)$$

De sorte que,

$$MSE(\tilde{\alpha}) < MSE(\alpha^*) \leq MSE(\hat{\alpha}) \quad (2.25)$$

Les estimateurs sans biais  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  de l'éq. 2.18 sont des fonctions linéaires à variance minimale de statistiques d'ordre généralisées. Barnett (1999)[21], Ahsanullah (2000) [14], David et Nagaraja (2003) [13] et Balakrishnan et Cramer (2014) [22] présentent des estimateurs linéaires et des prédicteurs linéaires basés sur des variables aléatoires ordonnées.

**Définition 2.2** *Estimateur plus proche de Pitman (Keating et al., 1993).*

*Pour  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$ , deux estimateurs d'un paramètre  $\theta$ , et  $\hat{\theta}_1$  est une estimation plus proche de Pitman (PMC) que  $\hat{\theta}_2$ , si*

$$PMC(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) := P(|\hat{\theta}_1 - \theta| < |\hat{\theta}_2 - \theta|) \geq 0.5 \quad (2.26)$$

*Pour toutes les valeurs de  $\theta$ , avec inégalité stricte pour au moins une valeur de  $\theta$ . La mesure de Pitman indique lequel des deux estimateurs d'un paramètre est le plus proche en probabilité de la vraie valeur.*

### 2.8.2.1 Comparaison entre $\hat{\beta}$ et $\beta^*$

Ensemble  $T_{\ell,r} = \sum_{i=\ell+1}^r y_i (Y_i - Y_{i-1})$ ,  $0 \leq \ell \leq r$ , donc  $\hat{\beta} = T_{1,r}/r$  et  $\beta^* = T_{1,r}/(r-1)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 PMC(\beta^*, \hat{\beta}) &= P(|\beta^* - \beta| < |\hat{\beta} - \beta|) \\
 &= P\left(\left|\frac{T_{1,r}}{r-1} - \beta\right| < \left|\frac{T_{1,r}}{r} - \beta\right|\right) \\
 &= P\left(\frac{T_{1,r}}{\beta} < \frac{2r(r-1)}{2r-1}\right) \\
 &= G_{r-1}\left(\frac{2r(r-1)}{2r-1}\right) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall r \geq 2,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Où  $G_{r-1}(t)$  désigne une fonction de distribution Gamma avec le paramètre de forme  $r-1$  et le paramètre d'échelle 1. Alors  $\beta^*$  est Pitman-plus proche de  $\beta$  que  $\hat{\beta}$ .

### 2.8.2.2 Comparaison entre $\hat{\alpha}, \tilde{\alpha}$ et $\alpha^*$

**Proposition 2.1** *L'estimateur  $\tilde{\alpha}$  est plus proche de Pitman  $\alpha$  que  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^*$ .*

**Preuve.** Les variables aléatoires  $2y_1(Y_1 - \alpha)/\beta$  et  $2T_{1,r}/\beta$  sont indépendantes  $\chi^2$ , de plus

$$\hat{\alpha} - \tilde{\alpha} = T_{1,r}/ry_1 > 0 \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} + \tilde{\alpha} = 2Y_1 - T_{1,r}/ry_1.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
 PMC(\hat{\alpha}, \tilde{\alpha}) &= P(|\hat{\alpha} - \alpha| < |\tilde{\alpha} - \alpha|) \\
 &= P(|\hat{\alpha} - \alpha|^2 < |\tilde{\alpha} - \alpha|^2) \\
 &= P\left(2y_1(Y_1 - \alpha) < \frac{T_{1,r}}{r}\right) \\
 &= F_{2,2(r-1)}\left(\frac{r-1}{2r}\right) \\
 &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{-(r-1)} \in \left[\frac{1}{5}, 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right], \quad \forall r > 1
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

C'est,  $0.6 < PMC(\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}) \leq 0.8$  de sorte que  $\tilde{\alpha}$  est Pitman-plus proche de  $\alpha$  que  $\hat{\alpha}$ . Nous avons

$$PMC(\alpha^*, \tilde{\alpha}) = \left(1 + \frac{2r-1}{2r(r-1)}\right)^{-(r-1)} \in \left[\frac{1}{e}, \frac{144}{289}\right], \quad \forall r > 2, \tag{2.29}$$

$$PMC(\alpha^*, \hat{\alpha}) = \left(1 + \frac{1}{2(r-1)}\right)^{-(r-1)} \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{3}\right], \quad \forall r > 1 \tag{2.30}$$

C'est,  $0.502 \leq PMC(\tilde{\alpha}, \alpha^*) \leq 0.632$ , pour  $r > 2$ , et  $0.607 \leq PMC(\alpha^*, \hat{\alpha}) \leq 0.667, r > 1$ .

La mesure de Pitman de la proximité de paramètres d'échelle et de localisation est indépendamment de la taille de l'échantillon  $n$  et des paramètres du modèle  $y$ . Nagaraja (1986) trouvent la même chose pour les statistiques d'ordre ordinaire. ■

## 2.9 Prédicteurs ponctuels et reconSTRUCTEURS basés sur des quantités pivots

Notre méthode est basé sur des quantités pivots sous des statistiques de commande généralisées de  $Exp(\alpha, \beta)$ . Nous utilisons l'erreur quadratique moyenne et la mesure de proximité de Pitman pour comparer les prédicteurs ponctuels. Considérez les quantités pivots

$$V_1 = V_1(y) := \frac{Y_s - Y_r}{T_{\ell,r}} \quad (2.31)$$

$$V_2 = V_2(y) := \frac{Y_s - Y_r}{Y_r - Y_\ell}, \quad (2.32)$$

Où  $Y_\ell, \dots, Y_r$ ,  $1 \leq \ell < r < n$ , sont des statistiques de commande généralisées basées sur  $Exp(\alpha, \beta)$  :

$$T_{\ell,r} = T_{\ell,r}(y) = T_r - T_\ell \quad \text{pour } 0 \leq \ell < r < s \leq n, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.33)$$

Et

$$T_{0,r} = T_r = \sum_{i=1}^r y_i (Y_i - Y_{i-1}), \quad \text{avec } T_0 = 0. \quad (2.34)$$

Certaines observations peuvent manquer dans les premières expériences sur la durée de vie. La quantité pivot de l'équation. 2.31 et 2.32 permettent de contourner ce problème difficulté.

**Théorème 2.1** *La fonction de distribution de la grandeur pivot  $V_1$  est*

$$F_{V_1}(v_1) = 1 - \frac{C_s}{C_r} \sum_{i=r+1}^s \frac{a_i^{(r)}(s)}{y_i} (1 + y_i v_1)^{-(r-\ell)}, \quad v_1 \geq 0. \quad (2.35)$$

*De plus, un prédicteur ponctuel non biaisé de  $Y_s$  construit sur  $V_1$  est*

$$Y_s^{(1,\ell)} = Y_r + A_1 T_{\ell,r} \quad (2.36)$$

*Avec erreur prédictive quadratique moyenne exacte (MSPE),*

$$MSPE(Y_s^{(1,\ell)}) = \left( \sum_{i=r+1}^s y_i^{-2} + (r-\ell) A_i^2 \right) \beta^2, \quad (2.37)$$

Où

$$a_i^{(r)}(s) = \prod_{t=r+1, t \neq i}^s \frac{1}{y_t - y_i}, 1 \leq r < s \leq n, \quad A_1 = \frac{a_{r,s}}{r - \ell},$$

$$\alpha_{r,s} = \alpha_s - \alpha_r, \quad \text{et} \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{y_j}. \quad (2.38)$$

**Preuve.** Les variables aléatoires  $W_{r,s} = Y_s - Y_r$  et  $Y_r$  sont indépendantes d'un autre (Barakat et al., 2018)[23]. En conséquence,  $W_{r,s}$  et  $T_{\ell,r}$  sont indépendants de un autre. La quantité  $T_{\ell,r}/\beta$  suit une distribution Gamma de forme paramètre  $r - \ell$  et paramètre d'échelle 1 (Barakat et al., 2018)[23]. La probabilité fonction de densité de  $W_{r,s}/\beta$  (Kamps et Cramer, 2001)[24] est

$$f_{W_{r,s}(w)} = \frac{C_s}{C_r} \sum_{i=r+1}^s a_i^{(r)}(s) e^{-y_i w}, w > 0 \quad (2.39)$$

Puis,

$$\begin{aligned} F_{V_1}(v_1) &= P\left(\frac{W_{r,s}}{T_{\ell,r}} \leq v_1\right) \\ &= P(W_{r,s} \leq v_1 T_{\ell,r}) \\ &= \int_0^\infty P(W_{r,s} \leq v_1 t) f_{T_{\ell,r}}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^{v_1 t} f_{w_{r,s}}(w) dw \right) f_{T_{\ell,r}}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.40)$$

D'où l'éq. 2.35 suit. Un intervalle prédictif dte  $100(1 - \delta)\%$  de  $Y_s$  reposant sur  $V_1$  est  $[L, U_1]$  où  $L = Y_r$ ;  $U_1 = Y_r + v_{1,\delta} T_{\ell,r}$ , et  $v_{1,\delta}$  satisfait  $F_{V_1}(v_1, \delta) = 1 - \delta$ . Un prédicteur ponctuel non biaisé de  $Y_s$  est

$$Y_s^{(1,\ell)} = \eta L + (1 - \eta) U_1 = Y_r + (1 - \eta) v_{1,\delta} T_{\ell,r}, 0 < \eta < 1 \quad (2.41)$$

Où  $\eta$  est tel que  $E(Y_s^{(1,\ell)} - Y_s) = 0$ , ce qui implique  $(1 - \eta) v_{1,\delta} = A_1$ , d'où l'éq. 2.36 suit. Comme  $W_{r,s}$  et  $T_{\ell,r}$  sont indépendants de l'un un autre, l'erreur quadratique moyenne de prédiction de  $Y_s^{(1,\ell)}$  est

$$MSPE\left(Y_s^{(1,\ell)}\right) = E\left(Y_s^{(1,\ell)} - Y_s\right)^2 = A_1^2 E\left(T_{\ell,r}^2\right) - 2A_1 E\left(T_{\ell,r}\right) E\left(W_{r,s}\right) + E\left(W_{r,s}^2\right) \quad (2.42)$$

Ce qui implique l'éq. 2.37 et complète la preuve.

■

**Corollaire 2.1** Si  $r$  et  $s$  sont fixés, alors l'erreur quadratique moyenne de prédiction de  $Y_s^{(1,\ell)}$  est une fonction croissante de  $\ell$  atteignant son minimum pour  $\ell = 0$ . Si  $\ell = 0$ , nous devons estimer le paramètre de localisation  $\alpha$  Pour l'éq. 2.36, soit

1.  $\hat{\alpha} = Y_1$  alors,

$$\hat{Y}_s^{(1,0)} = Y_r + \frac{\alpha_{r,s}}{r} T_{1,r} \quad (2.43)$$

2. En remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha^* = Y_1 - \beta^*/y_1$ ; Éq. 2.36 devient  $Y_s^{(1,0)} = Y_s^{(1,1)}$ ,

3. Où, avec  $\tilde{\alpha} = Y_1 - \hat{\beta}/y_1$ ; l'éq. 2.36 devient

$$\tilde{Y}_s^{(1,0)} = Y_r + \frac{(r+1)\alpha_{r,s}}{r^2} T_{1,r}. \quad (2.44)$$

Par conséquent

$$MSPE(Y_s^{(1,1)}) > MSPE(\tilde{Y}_s^{(1,0)}) > MSPE(\hat{Y}_s^{(1,0)}) \quad \text{pour tous } r > 1 \quad (2.45)$$

**Théorème 2.2** La fonction de distribution de  $V_2$  est

$$F_{V_1}(v_2) = 1 - \frac{C_s}{C_\ell} \sum_{i=\ell+1}^r \sum_{j=r+1}^s \frac{a_i^{(\ell)}(r) a_j^{(r)}(s)}{y_j} (y_i + y_j v_2)^{-1}, \quad v_2 \geq 0 \quad (2.46)$$

Par ailleurs,

$$Y_s^{(2,\ell)} = Y_r + A_2(Y_r - Y_\ell) \quad (2.47)$$

Est un prédicteur ponctuel non biaisé de  $Y_s$  basé sur  $V_2$  avec,

$$MSPE(Y_s^{(2,\ell)}) = \left( \sum_{i=r+1}^s y_i^{-2} + A_2^2 \sum_{i=\ell+1}^r y_i^{-2} \right) \beta^2 \quad (2.48)$$

Par ailleurs,

$$Y_\ell^* = Y_r - A_2^{-1}(Y_s - Y_r) \quad (2.49)$$

Représente un reconstruteur ponctuel non biaisé de  $Y_\ell$  construit sur le reconstruteur grandeur pivot  $V_2^* = 1/V_2$ . L'erreur de reconstruction quadratique moyenne exacte (MSRE) de  $Y_\ell^*$ , est

$$MSRE(Y_\ell^*) = A_2^{-2} MSPE(Y_s^{(2,\ell)}), \quad (2.50)$$

Où  $A_2 = \alpha_{r,s}/\alpha_{\ell,r}$ .

**Preuve.** Par l'équation 2.32,  $V_2 = W_{r,s}^*/W_{\ell,r}^*$ , Où

$$W_{i,j}^* = X(j, n, \tilde{m}, k) - X(i, n, \tilde{m}, k)$$

Et  $X(i, n, \tilde{m}, k), i = 1, 2, \dots, n, 1 \leq i < j \leq n$ , dénotent des statistiques de commande généralisées basé sur  $Exp(0, 1)$ .  $W_{\ell,r}^* = \sum_{i=\ell+1}^r y_i^{-1} Z_i$  et  $W_{r,s}^* = \sum_{i=r+1}^s y_i^{-1} Z_i$  (Barakat et al., 2018)[23], où les  $Z_i$  sont indépendants et identiquement distribués de  $Exp(0, 1)$ . D'où  $W_{\ell,r}^*$  et  $W_{r,s}^*$

sont indépendants les uns des autres. Suivant Aly (2016)[25] et Aly et al. (2019)[26], on obtient l'éq. 2.46. Le  $100(1 - \delta)\%$  prédictif l'intervalle de  $Y_s$  est  $[L, U_2]$ , où

$$L = Y_r, U_2 = Y_r + v_{2,\delta}(Y_r - Y_\ell), \quad (2.51)$$

Et  $v_{2,\delta}$  satisfait  $F_{V_2}(v_{2,\delta}) = 1 - \delta$ , l'équation 2.47 et 2.48 suivre comme pour le théorème 2.1.

Considérons la fonction de distribution  $F_{V_2^*}(u)$  de  $V_2^*$ . Puis,

$$F_{V_2^*}(u) = P\left(\frac{1}{V_2} \leq u\right) = 1 - P\left(V_2 \leq \frac{1}{u}\right) = \bar{F}_{V_2}\left(\frac{1}{u}\right). \quad (2.52)$$

Un  $100(1 - \delta)\%$  intervalle de reconstruction pour  $Y_\ell$  est  $[L_2^*, U^*]$ , où

$$L_2^* = Y_r - u_\delta(Y_s - Y_r), \quad U^* = L, \quad (2.53)$$

Et  $u_\delta$  satisfait l'équation non linéaire.  $\bar{F}_{V_2}(\frac{1}{u_\delta}) = 1 - \delta$ . on obtient l'éq 2.49 et 2.50, et théorème 2.2. ■

**Corollaire 2.2** *La grandeur pivot  $V_2$ , pour  $l = 0$ , prend la forme*

$$V_3 = \frac{Y_s - Y_r}{Y_r - \alpha} \quad (2.54)$$

Et la fonction de distribution de  $V_3$  est

$$F_{V_3}(v_3) = 1 - C_s \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^r \frac{a_i^{(r)}(s)a_j(r)}{y_i} (y_i + y_i v_3)^{-1}, \quad v_3 \geq 0 \quad (2.55)$$

Un prédicteur ponctuel non biaisé de  $Y_s$  basé sur  $V_3$  est

$$Y_s^{(2,0)} = Y_r + A_3(Y_r - \alpha) \quad (2.56)$$

Et

$$MSPE(Y_s^{(2,0)}) = \left( \sum_{i=r+1}^s y_i^{-2} + A_3^2 \sum_{i=1}^r y_i^{-2} \right) \beta^2, \quad (2.57)$$

Où  $A_3 = \lambda_{r,s}/\lambda_r$ .

**Théorème 2.3** *La fonction de distribution de la grandeur pivot reconstructive*

$$U = \frac{Y_r - Y_\ell}{T_{r,s}}, \quad 1 \leq \ell < r < s,$$

est

$$F_U(u) = 1 - \frac{C_r}{C_\ell} \sum_{i=\ell+1}^r \frac{a_i^{(\ell)}(r)}{y_i} (1 + y_i u)^{-(s-r)}, \quad u \geq 0. \quad (2.58)$$

Un reconstruteur ponctuel non biaisé de  $Y_\ell$  construit sur  $U$ , est

$$Y_\ell^\sim = Y_r - (s-r)^{-1} \lambda_{\ell,r} T_{r,s}, \quad (2.59)$$

Avec erreur quadratique moyenne de reconstruction

$$MSRE(Y_\ell^\sim) = \left( \sum_{i=\ell+1}^r y_i^{-2} + (s-r)^{-1} \lambda_{\ell,r}^2 \right) \beta^2. \quad (2.60)$$

**Preuve.** La preuve suit par la même méthode utilisée dans les théorèmes 1 et 2. ■

## 2.9.1 Comparaison des prédicteurs à l'aide de la mesure de proximité de Pitman

Pour comparer les prédicteurs, nous considérons

**Cas 1 :** Le prédicteur ponctuel dépend du premier  $r$  observé généralisé statistiques de commande; et

**Cas 2 :** Le prédicteur ponctuel ne dépend que de  $Y_1$  et  $Y_r$ .

### 2.9.1.1 Comparaison entre $Y_s^{(1,1)}$ , $\hat{Y}_s^{(1,0)}$ , et $\tilde{Y}_s^{(1,0)}$

**Théorème 2.4** Si  $Y_1, \dots, Y_r$  sont des statistiques de commande généralisées de  $Exp(\mu, \sigma)$ , alors

$$PMC(Y_s^{(1,1)}, \hat{Y}_s^{(1,0)}) = \bar{F}_{V_1}(B_{r,s} | \ell = 1) = \frac{C_s}{C_r} \sum_{i=r+1}^s \frac{a_i^{(r)}(s)}{y_i} (1 + y_i B_{r,s})^{-(r-1)}, \quad (2.61)$$

$$PMC(Y_s^{(1,1)}, \tilde{Y}_s^{(1,0)}) = \bar{F}_{V_1}(B_{r,s}^* | \ell = 1) = \frac{C_s}{C_r} \sum_{i=r+1}^s \frac{a_i^{(r)}(s)}{y_i} (1 + y_i B_{r,s}^*)^{-(r-1)}, \quad (2.62)$$

$$PMC(\tilde{Y}_s^{(1,0)}, \hat{Y}_s^{(1,0)}) = \bar{F}_{V_1}(\tilde{B}_{r,s} | \ell = 1) = \frac{C_s}{C_r} \sum_{i=r+1}^s \frac{a_i^{(r)}(s)}{y_i} (1 + y_i \tilde{B}_{r,s})^{-(r-1)}, \quad (2.63)$$

Où

$$\begin{aligned} B_{r,s} &= \frac{2r-1}{2r(r-1)} \lambda_{r,s}, \\ B_{r,s}^* &= \frac{2r^2-1}{2r^2(r-1)} \lambda_{r,s}, \\ \tilde{B}_{r,s} &= \frac{2r+1}{2r^2} \lambda_{r,s}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

Avec  $1 < r < s \leq n$ .

**Preuve.** Pour prouver l'éq. 2.61,

$$Y_s^{(1,1)} - \hat{Y}_s^{(1,0)} = \frac{\lambda_{r,s}}{r(r-1)} T_{1,r} > 0,$$

Et

$$Y_s^{(1,1)} + \hat{Y}_s^{(1,0)} = 2Y_r + 2B_{r,s} T_{1,r}, r > 1. \quad (2.65)$$

Puis,

$$\begin{aligned} PMC(Y_s^{(1,1)}, \hat{Y}_s^{(1,0)}) &= P\left(|Y_s^{(1,1)} - Y_s| < |Y_s^{(1,0)} - Y_s|\right) \\ &= P(Y_r + B_{r,s} T_{1,r} < Y_s) = P(W_{r,s} > B_{r,s} T_{1,r}) \\ &= \int_0^\infty P(W_{r,s} > B_{r,s} t) f_{T_{1,r}}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_{B_{r,s} t}^\infty f_{W_{r,s}}(w) f_{T_{1,r}}(t) dw dt \\ &= \bar{F}_{V_1}(B_{r,s} | \ell = 1), \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'éq. 2.61. Les preuves de l'éq. 2.62 et 2.63 se ressemblent. ■

**Corollaire 2.3** Si  $s = r + 1 > 3$ , alors

$$PMC(Y_{r+1}^{(1,1)}, \hat{Y}_{r+1}^{(1,0)}) = (1 + B_{r,r+1})^{-(r-1)} < \frac{1}{2}, \quad (2.66)$$

$$PMC(Y_{r+1}^{(1,1)}, \tilde{Y}_{r+1}^{(1,0)}) = (1 + B_{r,r+1}^{(1,0)})^{-(r-1)} < \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

$$PMC(\tilde{Y}_{r+1}^{(1,0)}, \hat{Y}_{r+1}^{(1,0)}) = (1 + \tilde{B}_{r,r+1})^{-(r-1)} < \frac{1}{2} \quad (2.68)$$

Autrement dit,  $\hat{Y}_s^{(1,0)}$  est plus proche de Pitman de  $Y_s$  que les deux  $Y_s^{(1,1)}$  et  $\tilde{Y}_s^{(1,0)}$ , pour  $s = r + 1 > 3$ .

### 2.9.1.2 Comparaison entre $Y_s^{(2,1)}$ et $\hat{Y}_s^{(2,0)}$

Le prédicteur ponctuel  $Y_s^{(2,\ell)}$  s'applique aux statistiques d'ordre généralisées  $Y_1$  et  $Y_r$ . Si  $\ell = 0$ , nous estimons  $\alpha$  par son estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\alpha} = Y_1$ .

**Proposition 2.2** *Supposons que  $Y_1$  et  $Y_r$  sont des statistiques d'ordre généralisées basées sur  $Exp(\alpha, \beta)$  Alors,*

$$PMC(Y_s^{(2,1)}, \hat{Y}_s^{(2,0)}) = 1 - \frac{C_s}{C_1} \sum_{i=2}^r \sum_{j=r+1}^s \frac{a_i^{(1)}(r) a_j^{(r)}(s)}{y_i} (y_j + y_i \beta_{r,s})^{-1} \quad (2.69)$$

Où

$$\omega_{r,s} = \frac{2\lambda_r \lambda_{1,r}}{(2\lambda_r - \lambda_1) \lambda_{r,s}}. \quad (2.70)$$

## 2.10 Inférence sur le paramètre moyen d'une distribution exponentielle à deux paramètres : Complète, données censurées

### 2.10.1 Introduction

Supposons que la variable aléatoire  $X$  a une distribution exponentielle à deux paramètres avec le paramètre de localisation  $\alpha$  et le paramètre d'échelle  $\beta$ , c'est-à-dire qu'elle a une fonction de densité de probabilité telle que :

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta}, x > \alpha; \alpha \in \mathbb{R}; \beta > 0. \quad (2.71)$$

La valeur moyenne de cette distribution est

$$\theta = E(X) = \alpha + \beta.$$

Les distributions exponentielles à deux paramètres ont de nombreuses applications en ingénierie, biologie, épidémiologie, médecine, etc. Durée de vie moyenne attendue en plus de la durée de vie garantie, et la valeur moyenne est connue sous le nom de durée de vie moyenne. Les paramètres de localisation et d'échelle sont respectivement connus sous le nom de temps effectif supplémentaire garanti et moyen, et la valeur moyenne est appelée temps effectif moyen.

Dans cette partie, nous considérons l'inférence sur le paramètre de la moyenne d'une population exponentielle. Dans un premier temps, nous proposons l'UMVUE pour ce

paramètre, puis développer une approche exacte basée sur des échantillons pour tester et construire un intervalle de confiance basé sur cet estimateur. Ensuite, cette méthode est généralisée à la censure progressive de type II, et de double censure.

### 2.10.2 Inférence sur la moyenne à partir d'un échantillon complet

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une distribution exponentielle à deux paramètres avec le paramètre de localisation  $\alpha$  et le paramètre d'échelle  $\beta$ . Dans cette section, nous considérons l'inférence du paramètre moyen  $\theta$  sur la base de cet échantillon complet et proposons une quantité pivot pour ce paramètre en utilisant l'UMVUE de  $\theta$ . Nous utilisons ensuite cette quantité pivot pour tester des hypothèses et construire des intervalles de confiance exacts pour  $\theta$ .

Il est bien connu que  $(X_{(1)}, \hat{\beta})$  est une statistique complète suffisante pour  $(\alpha, \beta)$  où  $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$  et

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - X_{(1)})}{(n-1)}.$$

Aussi, il est bien connu que  $X_{(1)}$  et  $\hat{\beta}$  sont indépendants (Lawless, 1982 [27]) avec,

$$V = \frac{2n(X_{(1)} - \alpha)}{\beta} \sim \chi_{(2)}^2, U = \frac{2(n-1)\hat{\beta}}{\beta} \sim \chi_{(2n-2)}^2. \quad (2.72)$$

Par conséquent, les UMVUEs pour  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $X_{(1)} - \hat{\beta}/n$  et  $\hat{\beta}$ , respectivement, et aussi,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$  est l'UMVUE pour la moyenne paramètre,  $\theta$ . On peut facilement montrer que  $\frac{2n(\bar{X} - \alpha)}{\beta}$  est distribué comme chi-distribution au carré à  $2n$  degrés de liberté.

Maintenant, nous proposons une quantité pivot pour  $\theta$  qui est l'emplacement et l'échelle invariant et sa distribution peut être obtenue exactement. Le résultat est prouvé dans le théorème suivant.

**Théorème 2.5** *Considérons  $Q = \frac{\bar{X} - \theta}{\hat{\beta}}$  La distribution de  $Q$  est libre de lieu et les paramètres d'échelle et est distribué comme  $T = (1 - 1/n)(U + V - 2n)/U$ , où  $U$  et  $V$  sont des variables aléatoires indépendantes avec  $\chi_{(2n-2)}^2$  et  $\chi_{(2)}^2$  respectivement.*

**Preuve.** D'après 2.72, on a  $\hat{\beta} \stackrel{d}{=} \frac{\beta U}{2n-2}$  et  $X_{(1)} \stackrel{d}{=} \frac{\beta V}{2n} + \alpha$ . Par conséquent,

$$Q = \frac{\bar{X} - \theta}{\hat{\beta}} = \frac{(1 - 1/n)\hat{\beta} + X_{(1)} - \theta}{\hat{\beta}} \stackrel{d}{=} \frac{n-1}{n} \left( \frac{U + V - 2n}{U} \right),$$

■

La distribution de  $Q$  n'est pas bien connue, mais la distribution empirique et les quantiles de  $Q$  peuvent être obtenus par simulation de Monte Carlo en utilisant le algorithme suivant :

Pour une taille d'échantillon donnée  $n$ ,

1. Générez  $U$  et  $V$  à partir de  $\chi_{(2n-2)}^2$  et  $\chi_{(2)}^2$  respectivement.

2. Calculer

$$T = \frac{n-1}{n} \left( \frac{U+V-2n}{U} \right).$$

3. Répétez les étapes 1 et 2 pour  $M$  fois et obtenez  $M$  réalisations de  $T$ , comme  $T_1, \dots, T_M$ .

4. Calculez le  $\gamma$  ème quantile des  $T_i$  comme estimation du  $\gamma$  ème quantile de  $Q$ , c'est-à-dire  $q^\gamma$ .

La quantité pivot proposée  $Q$ , peut être appliquée pour tester des hypothèses sur le paramètre moyen,  $\theta$ . Considérons

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (2.73)$$

Où  $\theta_0$  est connu.  $H_0$  est rejeté au niveau  $\varepsilon$  si  $Q > q^{1-\varepsilon/2}$  ou  $Q < q^{\varepsilon/2}$ , où  $q^\gamma$  est  $\gamma$  ème quantile de  $Q$ . De plus, une confiance bilatérale précise l'intervalle entre  $\theta$  et le coefficient de confiance  $1 - \varepsilon$  est donné par

$$(\bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_2}, \bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_1}), \quad (2.74)$$

Où  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$  et  $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

**Remarque 2.1** Pour un  $p \in (0, 1)$  donné, le  $p$ -ième quantile de la distribution exponentielle à deux paramètres est donnée par  $\varphi = \alpha + a\beta$  où  $a = -\log(1-p)$ . Semblable au théorème 2.1, nous pouvons définir la quantité pivot de  $\varphi$  comme

$$Q_\varphi = (X_{(1)} + (a - 1/n)\hat{\beta} - \varphi)/\hat{\beta}$$

Et montrer facilement qu'il est distribué comme

$$T_\varphi = (n-1)(V - U(na-1)/(n-1) - 2na)/nU$$

Où  $U$  et  $V$  sont variables aléatoires indépendantes avec  $\chi_{(2n-2)}^2$  et  $\chi_{(2)}^2$ , respectivement. Exister dans un cas particulier, le  $p$ -ième paramètre quantile  $\varphi$  devient le paramètre moyen lorsque  $p = 1 - e^{-1}$ . Donc,  $Q_\varphi$  et  $T_\varphi$  deviennent respectivement  $Q$  et  $T$ .

### 2.10.3 Inférence sur la moyenne sous censure

Dans cette section, nous considérons l'inférence sur le paramètre moyen de la distribution exponentielle à deux paramètres sous des schémas d'échantillonnage tels que double censure, censure de type II et censure progressive de type II. Dans chaque cas, une méthode précise est proposée pour tester supposer et construire des intervalles de confiance pour les paramètres moyens Similaire à l'échantillon complet de la section 2.

#### 2.10.3.1 Double censure de type II

Laisser  $X_{(r+1)} \leq X_{(r+2)} \leq \dots \leq X_{(n-s)}$  être un échantillon double censuré d'un distribution exponentielle à deux paramètres où les  $r$  observations sont Censuré à gauche, et  $s$  les observations ont été censurées à droite. Il est bien connu que  $(\hat{\alpha}_D, \hat{\beta}_D)$  est une statistique suffisamment complète  $(\alpha, \beta)$  (Kambo, 1978[28], Balakrishnan, 1990)[29] où

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_D &= X_{(r+1)} + \hat{\beta}_D \log\left(\frac{n-r}{n}\right), \\ \hat{\beta}_D &= \frac{1}{n-r-s} \left( \sum_{i=1}^{n-s-r} X_{(r+i)} + sX_{(n-s)} - (n-r)X_{(r+1)} \right).\end{aligned}$$

Aussi,  $X_{(r+1)}$  et  $\hat{\beta}_D$  sont des variables aléatoires indépendantes avec,

$$V = \frac{X_{(r+1)} - \alpha}{\beta} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{r+1} V_i / [2(n-i+1)], \quad U = \frac{2(n-r-s)}{\beta} \hat{\beta}_D \sim \chi_{(2(n-s-r-1))^2} \quad (2.75)$$

Où les  $V_i$  est indépendant et identiquement distribué (iid) aléatoire une variable avec une distribution du chi carré de degré 2 liberté (Cheng et al., 2013)[30]. Par conséquent, les UMVUE pour  $\alpha$  et  $\beta$  sont

$$\hat{\alpha}_{UD} = X_{(r+1)} - d\hat{\beta}_{UD} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_{UD} = \frac{n-r-s}{n-r-s-1} \hat{\beta}_D,$$

Respectivement, où

$$d = \sum_{i=1}^{r+1} (n-i+1)^{-1}.$$

Ainsi, l'UMVUE pour le paramètre moyen,  $\theta$  est

$$\hat{\theta}_{UD} = \hat{\alpha}_{UD} + \hat{\beta}_{UD}.$$

**Théorème 2.6** Considérer  $Q_D = \frac{\hat{\theta}_{UD} - \theta}{\hat{\beta}_{UD}}$ . La distribution de  $Q_D$  est libre de paramètres de localisation et d'échelle et est distribué comme

$$T_D = [2(n - r - s - 1)V + (1 - d)U - 2(n - r - s - 1)]/U$$

Où  $U$  et  $V$  sont variables aléatoires indépendantes distribuées comme  $\chi^2_{(2(n-s-r-1))}$  et  $\sum_{i=1}^{r+1} \frac{V_i}{2(n-i+1)}$ , respectivement, où les  $V_i$  sont iid comme  $\chi^2_{(2)}$ .

**Preuve.** La preuve est similaire à la preuve du théorème 2.1. Les quantiles  $Q_D$  peuvent être obtenus à l'aide de simulations de Monte Carlo Similaire à l'algorithme 2.1. ■

**Remarque 2.2** La deuxième catégorie de double censure comprend la deuxième catégorie de droits censuré quand  $r = 0$ . Par conséquent, la quantité pivot suggérée  $Q_D$  est s'applique également aux distributions exponentielles à deux paramètres de type II Censure de droite (Epstein et Sobel, 1954[31]; Epstein, 1960)[32]. Pour tester des hypothèses dans 2.73,  $H_0$  est rejeté au niveau  $\varepsilon$  si  $Q > q^{1-\varepsilon/2}$  ou  $Q < q^{\varepsilon/2}$  où  $q_D^\gamma$  est le  $\gamma$  ème quantile de  $Q_D$ . De plus, un exact deux-intervalle de confiance unilatéral pour  $\theta$  avec  $1 - \varepsilon$  coefficient de confiance est donné comme

$$(\hat{\theta}_{UD} - \hat{\beta}_{UD}q^{\varepsilon_2}, \hat{\theta}_{UD} - \hat{\beta}_{UD}q^{\varepsilon_1}), \quad (2.76)$$

Où  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$  and  $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . En utilisant 2.63, une quantité pivot généralisée pour  $\theta$  est

$$G_D = x_{r+1} + \frac{2(n - r - s)\hat{\beta}_{D0}}{U}(1 - V),$$

Où  $x_{(r+1)}$  et  $\hat{\beta}_{D0}$  sont les valeurs observés de  $X_{(r+1)}$  et  $\hat{\beta}_D$ , respectivement.

### 2.10.3.2 Censure progressive de type II

L'échantillonnage progressivement censuré de type II joue un rôle important pour obtenir des données dans les études sur la durée de vie et a reçu une attention considérable dans la littérature. Il permet un pour enlever les unités expérimentales à des points autres que le point terminal de la expérience à vie afin d'économiser du temps et de l'argent associés aux tests. Il est également un mécanisme de censure plus général que les schémas de censure traditionnels.

Le schéma de censure progressive de type II peut être décrit comme suit : Supposons  $n$  des éléments indépendants sont soumis à un test de durée de vie et l'expérimentateur décide au préalable la quantité  $m$ , le nombre de défaillances à observer. Maintenant au moment de la première échec,  $R_1$  des  $n - 1$  éléments survivants restants sont aléatoirement retirés de la expérience. Au moment du second échec,  $R_2$  des  $n - R_1 - 1$  éléments restants sont retirés au hasard de l'expérience. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que, au moment de la mème panne constatée, le reste  $R_m = n - m - R_1 - \dots - R_{m-1}$  survivants

sont supprimés de l'expérience. Voir Figure .

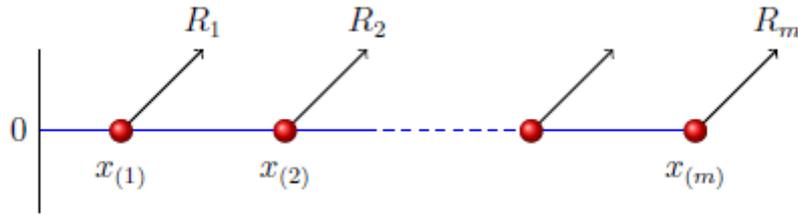


FIGURE 2.2 – Schéma de censure progressive de type II

Le schéma de censure progressif de type II comprend certains cas particuliers :

1. Lorsque  $R_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ , il se réduit à un plan d'échantillonnage complet.
2. Lorsque  $R_i = 0, i = 1, 2, \dots, m-1$  et  $R_m = n-m$ , il se réduit à un échantillon censuré de type II.

Basé sur l'échantillon observé

$$X_1 = X_{1:m:n}, \quad X_2 = X_{2:m:n}, \dots, \quad X_m = X_{m:m:n}$$

À partir d'un schéma de censure progressif de type II  $(R_1, \dots, R_m)$ , la fonction de vraisemblance peut être écrit comme

$$L(\alpha, \beta) = c \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.77)$$

Pour la distribution exponentielle à deux paramètres, il est montré par Viveros et Balakrishnan (1994)[33] que  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_p)$  est une statistique complète et suffisante pour paramètre vectoriel  $(\alpha, \beta)$ , où

$$\hat{\alpha}_p = X_{(1)} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (r_i + 1)(X_{(i)} - X_{(1)}).$$

Aussi, quel que soit le modèle de censure progressive,  $\hat{\alpha}_p$  et  $\hat{\beta}_p$  sont indépendants

$$V = \frac{2n(\hat{\alpha}_p - \alpha)}{\beta} \sim \chi_{(2)}^2, \quad U = \frac{2m\hat{\beta}_p}{\beta} \sim \chi_{(2m-2)}^2. \quad (2.78)$$

Par conséquent, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être estimés par

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{UP} &= \hat{\alpha} - \frac{1}{n}\hat{\beta}_{UP} \\ \hat{\beta}_{UP} &= \frac{m}{m-1}\hat{\beta}_p\end{aligned}$$

Comme *UMVUE* de  $\theta$ , est

$$\hat{\theta}_{UP} = \hat{\alpha}_{UP} + \hat{\beta}_{UP}.$$

**Théorème 2.7** *Considérons  $Q_D = \frac{\hat{\theta}_{UP} - \theta}{\hat{\beta}_{UP}}$ . La distribution de  $Q_D$  est réduite depuis le lieu et les paramètres d'échelle et est distribué comme*

$$T_p = \frac{(m-1)V + (n-1)U - 2n(m-1)}{nU},$$

Où  $U$  et  $V$  sont indépendamment distribués comme  $\chi^2_{(2m-2)}$  et  $\chi^2_{(2)}$ , respectivement

**Preuve.** La preuve est similaire à la preuve du théorème 2.1. Pour tester les hypothèses dans 2.73,  $H_0$  est rejeté au niveau  $\varepsilon$  si  $Q_p > q_p^{1-\varepsilon/2}$  ou  $Q_p < q_p^{\varepsilon/2}$ , où  $q_p^\gamma$  est  $\gamma$ -ème quantile de  $Q_p$ . De plus, les deux exactes Intervalles de confiance unilatéral pour  $\theta$  avec  $1 - \varepsilon$  le coefficient de confiance est donné comme

$$(\hat{\theta}_{UP} - \hat{\beta}_{UP}q_p^{\varepsilon_2}, \hat{\theta}_{UP} - \hat{\beta}_{UP}q_p^{\varepsilon_1}), \quad (2.79)$$

Où  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$  and  $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

En utilisant 2.78, une quantité pivot généralisée pour  $\theta$  est

$$G_p = x_{(1)} + \frac{m\hat{\beta}_{p_0}}{U} \left(2 - \frac{V}{n}\right)$$

Où  $x_{(1)}$  et  $\hat{\beta}_{p_0}$  sont les valeurs observées de  $X_{(1)}$  et  $\hat{\beta}_p$  respectivement. Nous avons trouvé les mêmes résultats pour la généralisation et les intervalles de confiance proposés pour le paramètre moyen en termes de probabilités de couverture et longueurs attendues.

■

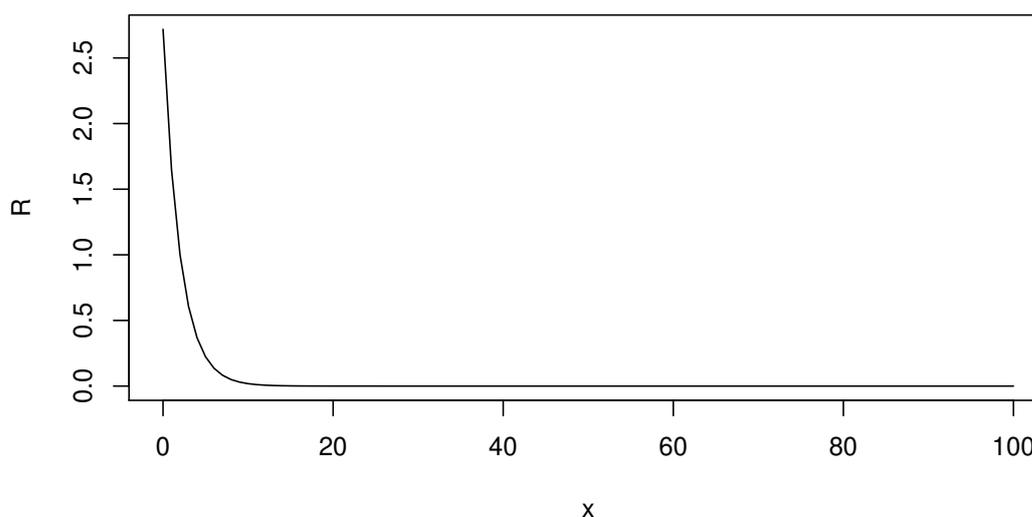
## 2.11 Estimation de la fiabilité pour l'exponentielle à deux paramètres Famille basée sur des données progressivement censurées de type II

### 2.11.1 Introduction

La distribution exponentielle à deux paramètres (localisation-échelle) a la probabilité fonction de fiabilité donnée, par

$$R(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{t-\alpha}{\beta}\right\} & t \geq \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases} \quad (2.80)$$

FIGURE 2.3 – La fonction de fiabilité de paramètres  $Exp(2, 2)$



Supposons que  $X_1 = X_{1:m:n}, X_2 = X_{2:m:n}, \dots, X_m = X_{m:m:n}$  un échantillon d'un distribution exponentielle à deux paramètres avec schéma de censure progressif de type II  $(R_1, \dots, R_m)$ , d'où le MLE de  $\alpha$  est

$$\hat{\alpha}_{ML} = x_1 = X_{1:m:n} \quad (2.81)$$

Le MLE de  $\beta$  peut être obtenu comme

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^m (R_i + 1)(x_i - x_1)}{m}. \quad (2.82)$$

Ainsi, substituez les estimations ML des deux paramètres dans l'équation. 2.80, on

obtient l'estimation ML de la fonction de fiabilité  $R(t)$ , sous la forme

$$\hat{R}_{ML}(t) = \exp \left\{ -\frac{t - \hat{\alpha}_{ML}}{\hat{\beta}_{ML}} \right\}. \quad (2.83)$$

### 3.1 Simulation des variables aléatoires exponentielles à deux paramètres

Dans cette section on va générer des échantillons de la variable aléatoires exponentielle à deux paramètres. En utilisant la méthode d'inversion pour générer des échantillon à laide du logiciel statistique R.

Nous évaluons les différents estimateurs des paramètres de la loi exponentielle, nous comparons les estimations MLE, UMLE, MPS et QE à l'aide de la simulation de Monte Carlo. Les résultats dépendent de la taille de l'échantillon  $n$  et des valeurs des paramètres. Les résultats sont invariants par rapport au paramètre  $\alpha$ , donc on pose  $\alpha = 1$ . Par rapport à  $\beta$ , on pose  $\beta = 1$ , car pour toute autre valeur les résultats sont proportionnels. Nous générons  $1000(m)$  échantillons aléatoires à partir de 2.1. Pour chaque échantillon, nous estimons  $\alpha$  et  $\beta$  en utilisant les quatre méthodes différentes (MLE, UMLE, MPS, QE) présentées dans la section 2 – 4. Pour chaque estimation, nous calculons le biais comme

$$BIAS(\hat{\alpha}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\hat{\alpha}_k - \alpha).$$

Et

$$BIAS(\hat{\beta}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\hat{\beta}_k - \beta).$$

L'erreur quadratique moyenne (RMSE) comme

$$RMSE(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\hat{\alpha}_k - \alpha)^2}.$$

Et

$$RMSE(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\hat{\beta}_k - \beta)^2}.$$

TABLE 3.1 – Comparaison entre les BIAS et RMSE pour les quatre estimateurs avec  $\alpha = \beta = 1$ .

n		MLE	UMLE	MPS	QE
20	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	0.004395416	0.0102068010	0.0001096985	0.0001598499
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.042062186	0.0139010853	0.0094494335	0.0094498072
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.014003843	-0.0003868472	0.0097102554	0.0332863353
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.116628858	0.1031931641	0.1046861016	0.1116964463
50	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	-0.0009116031	0.010406252	0.0002576801	0.0003080871
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.0386058566	0.014857239	0.0105790665	0.0105803213
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.0207655762	0.004708603	0.0148571752	0.0391153574
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.1168158214	0.099022469	0.1010081893	0.1096343333
100	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	-0.001247468	0.009838861	-0.0001497357	-0.0001001232
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.038241775	0.013329528	0.0091412757	0.0091395854
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.006684081	-0.011128946	-0.0011403496	0.0226564355
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.119866282	0.102684714	0.1031172718	0.1078024771
200	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	-0.9981821	-0.9947372	-0.9996983	-0.9996860
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.9985977	0.9947515	0.9997127	0.9997003
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	-1.0083447	-1.0127334	-1.0077722	-0.9942092
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	1.0110990	1.0150999	1.0101743	0.9967074

Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 2$

TABLE 3.2 – Comparaison entre les BIAS et RMSE pour les quatre estimateurs avec  $\alpha = \beta = 2$ .

n		MLE	UMLE	MPS	QE
20	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	0.005873919	0.10056741	-0.00048783	0.001957375
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.212023145	0.14470269	0.10779977	0.107667833
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.093142263	-0.07995042	0.02110482	0.182486578
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.550460438	0.44910846	0.46567299	0.532027745
50	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	0.005103960	0.03928636	-0.0006575859	-0.0002633936
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.117526588	0.05296110	0.0357924895	0.0357804759
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.009766441	-0.04274668	-0.0028027341	0.0809649857
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.315926563	0.27806757	0.2803836562	0.3013502238
100	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	0.00996242	0.020350919	0.0002309654	0.0003308995
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.08222537	0.031181592	0.0235896762	0.0235906308
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.02287033	-0.008124625	0.0119953286	0.0590151632
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.21523139	0.197409671	0.1995955335	0.22242937
200	BIAS( $\hat{\alpha}$ )	0.001762272	0.009430252	-0.0006022031	-0.0005772053
	RMSE( $\hat{\alpha}$ )	0.057192502	0.013219115	0.0092576917	0.0092560990
	BIAS( $\hat{\beta}$ )	0.009564329	-0.003541489	0.0064909654	0.0336428314
	RMSE( $\hat{\beta}$ )	0.145813077	0.137381188	0.1381782037	0.1440563382

À partir du tableau 3.1 et 3.2, on peut voir que le meilleur estimateur pour estimer le paramètre  $\alpha$  est MPS (qui a le BIAS et le RMSE le plus faible), QE et le deuxième après le MPS, par contre UMLE est le meilleur estimateur pour estimer le paramètre  $\beta$  où l'MPS est le deuxième dans cette estimation.

## 3.2 Simulation de la moyenne

### 3.2.1 À partir d'un échantillon complet

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire complet de taille  $n$  et par l'utilisation de UM-VUE de  $\theta$ , où  $\theta = E(x) = \alpha + \beta$ , telle que  $\alpha$  est le paramètre de localisation et  $\beta$  soit le paramètre d'échelle. Soit  $(X_{(1)}, \hat{\beta})$  est une statistique complète suffisante pour  $(\alpha, \beta)$  où

$$\hat{\alpha} = X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

Et

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - X_{(1)})}{(n-1)}.$$

L'intervalle de confiance est donné par

$$(\bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_2}, \bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_1}),$$

Où  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$  et  $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

Dans cette simulation on considère  $n = 20, 30, 50$ , avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ . Les valeurs de  $q^{\varepsilon_1}$  et  $q^{\varepsilon_2}$  ont été extraites du tableau 1 pour un  $\varepsilon_1 = 0.025$  et  $\varepsilon_2 = 0.975$  où  $1 - \varepsilon = 0.95$ .

TABLE 3.3 – Estimation des paramètres pour un échantillon complet avec  $\alpha = \beta = 1$ .

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	1.0675750	0.9010729	1.9686479	1.346908	2.219146
30	1.0146107	0.7802147	1.7948254	1.391975	1.987278
50	1.0273126	0.8801068	1.9074194	1.583540	2.090482

Ainsi que pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 2$  nous avons les résultats suivants

TABLE 3.4 – Estimation des paramètres pour un échantillon complet avec  $\alpha = \beta = 2$ .

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	2.1332987	2.4171746	4.5504733	2.882623	5.222448
30	2.1332987	2.2867619	4.4200606	3.239329	4.984129
50	2.1220984	2.5868729	4.7089713	3.757002	5.247041

D'autre part les UMVUEs pour  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $X_{(1)} - \hat{\beta}/n$  et  $\hat{\beta}$  respectivement, ainsi l'UMVUE pour le paramètre moyen  $\theta$  est :  $\hat{\theta} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ .

Nous avons d'abord mené l'étude pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$

TABLE 3.5 – Résultats d'estimation UMVUEs pour  $\alpha = \beta = 1$ .

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	1.149497	1.087356	2.129415	1.433508	2.486068
30	1.0063332	1.0632459	0.0569127	1.520590	2.331846
50	1.013719	1	1.787639	1.559639	2.135639

En suite pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 2$

TABLE 3.6 – Résultats d'estimation UMVUEs pour  $\alpha = \beta = 2$ .

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	2.113415	1.891149	3.799337	2.589002	4.419634
30	2.071605	2.213388	4.151921	3.082854	4.771669
50	2.049110	1.844000	3.818406	3.176695	4.238838

### 3.2.2 À partir d'un échantillon sous censure (censure progressive de type II)

Soit  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_p)$  est la statistique complète et suffisante pour  $(\alpha, \beta)$  telle que

$$\hat{\alpha}_p = X_{(1)} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (r_i + 1)(X_{(i)} - X_{(1)}).$$

Est UMVUE pour le paramètre  $\theta$  est  $\hat{\theta}_p = \hat{\alpha}_p + \hat{\beta}_p$ .

L'intervalle de confiance est donné par

$$(\bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_2}, \bar{X} - \hat{\beta}q^{\varepsilon_1}),$$

Où  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$  et  $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

Ici on considère un échantillon de taille  $n = 20, 30, 50$  avec  $r = 8$  observations ont été censurées à droite. Dans cette simulation on garde les mêmes valeurs critiques de la grandeur pivot  $Q$  mentionné dans le tableau 1 . Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$  Nous avons obtenu les résultats suivants

TABLE 3.7 – Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré.

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	1.0396183	0.2308239	1.2704422	1.81006	2.033444
30	1.0360575	0.2281507	1.2642082	2.066711	2.240790
50	1.0670564	0.1919421	1.2589985	1.982089	2.092647

Ainsi, pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 2$  on a les résultats suivants

TABLE 3.8 – Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré avec  $\alpha = \beta = 2$ .

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
20	2.124076	1.087040	3.211117	4.328012	5.380267
30	2.079237	0.378842	2.458079	3.975114	4.264170
50	2.04618830	0.08147771	2.12766601	4.07974204	4.12667320

### 3.2.3 Exemple illustratif

Dans cette section, nous illustrons les méthodologies discutées dans la section 2.10 du chapitre 2 pour l'inférence sur la valeur moyenne de distribution l'exponentielle à deux paramètres à l'aide d'un exemple. Pour chaque cas, on obtient le UMVUE de ce paramètre et présenter l'intervalle de confiance à queue égale estimations à un niveau de confiance en utilisant la méthode exacte proposée dans 2.74.

#### Exemple 3.1     $\diamond$ Cas 1 : (Échantillon complet)

Cet ensemble de données est tiré de Grubbs (1971)[34] et présente les kilométrages correspondant aux pannes de 19 porte-avions militaires. Les observations en kilomètre sont : 162, 200, 271, 302, 393, 508, 539, 629, 706, 777, 884, 1008, 1101, 1182, 1463, 1603, 1984, 2355 et 2880.

Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$  et sur la base de ces données complètes, les estimateurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont 162.0000 et 881.6111 respectivement, et donc l'estimateur de la moyenne est

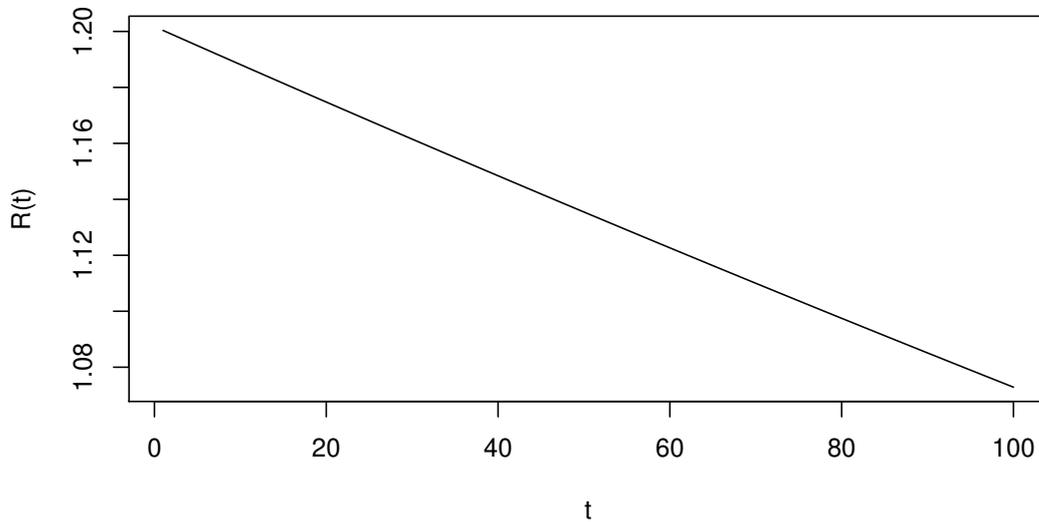
1043.6111.

D'après le tableau 1, les valeurs de 0,025 ème et les 0,975 ème quantiles de  $Q$  avec  $n = 19$  sont  $-0,664$  et  $0,334$ , respectivement. Par conséquent, une estimation de l'intervalle de confiance unilatéral pour la moyenne par la méthode qui a été proposée en 2.74 est  $(702.7524, 1582.6003)$

TABLE 3.9 – Estimation des paramètres pour un échantillon complet.

n	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
19	162.0000	881.6111	1043.6111	702.7524	1582.6003

FIGURE 3.1 – La fonction de fiabilité pour un échantillon complet



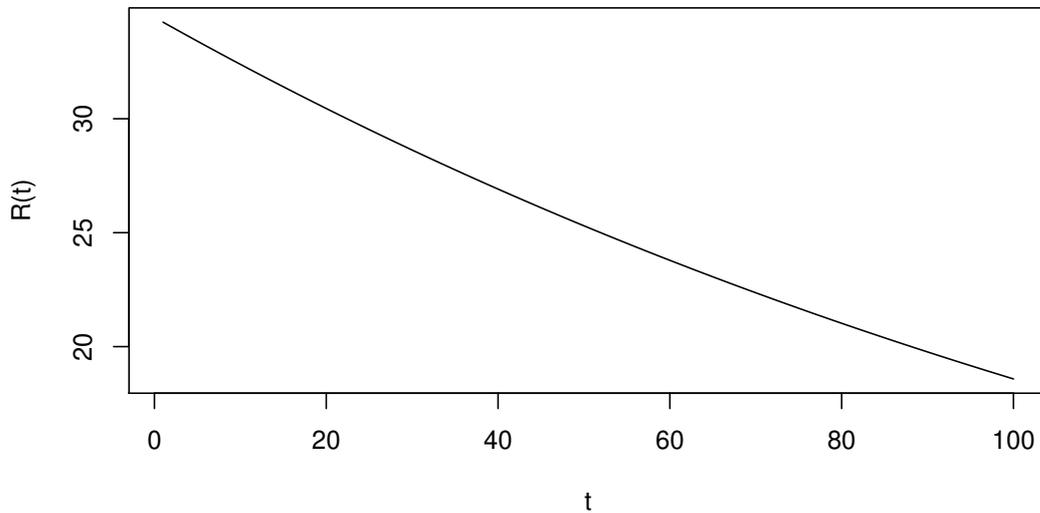
◇ **Cas 2 : (Censure progressive de type II)**

À partir de  $n = 19$  on suppose que seules les 10 premières observations sont progressivement censuré, dans ce cas  $m = 10$ . Par conséquent, l'échantillon censuré progressif de type II est  $(X_1, \dots, X_{10}) = (162, 200, 271, 302, 393, 508, 539, 629, 706, 777)$ . Par conséquent, les estimateurs sans biais de  $\alpha$  et  $\beta$  sont 573.400 et 162.000, respectivement, et donc, l'estimateur moyen est 735.400. Les valeurs de 0,025 ème et les 0,975 ème quantiles de  $Q_p$  avec  $n = 19$  et  $m = 10$  sont  $-0.827$  et  $0.364$ , respectivement. Par conséquent, une estimation de l'intervalle de confiance unilatéral pour la moyenne est  $389.732, 582.674$ .

TABLE 3.10 – Estimation des paramètres pour un échantillon progressivement censuré.

n	m	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	IClower	ICupper
19	10	573.400	162.000	735.400	389.732	582.674

FIGURE 3.2 – la fonction de fiabilité pour des données censuré.



### 3.3 Application de la fiabilité pour $Exp(\alpha, \beta)$ sur des données progressivement censuré de type II

#### 3.3.1 Exemple illustratif

Dans cette partie, nous considérons les données sur les différences de niveaux d'inondation pour deux stations sur la rivière Fox, Wisconsin, pendant 33 années différentes. Les données sont présentées dans le fig. 3.1. Cet ensemble de données a été analysé par P.S. Chan, H.K.T.[35]

Ici, nous analysons les données en supposant une distribution exponentielle à deux paramètres pour l'échantillon progressivement censuré de type II. La censure progressive de type II est appliquées à ces données, dans lesquelles elle peut être considérée comme la fermeture du stations de détection d'inondation pour la réduction des coûts. Le schéma censuré considéré est  $m = 12$ , et  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 3, R_i = 0, 8 \leq i \leq 12$ . Les données d'échantillon censurées sont  $\{x_1, \dots, x_{12}\} = 1.96, 4.79, 6.27, 7.84, 10.13, 11.45, 12.34, 13.98, 14.18, 14.40, 16.22, 17.06$ . Le ML des deux paramètres  $(\alpha, \beta)$  et la fonction de fiabilité  $R(t = 1)$  sont calculées en utilisant l'eq. 2.81, 2.82 et 2.83, respectivement. Les résultats sont

$$\hat{\alpha}_{ML} = x_1 = 1.96,$$

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^m (R_i + 1)(x_i - x_1)}{m} = 19.19,$$

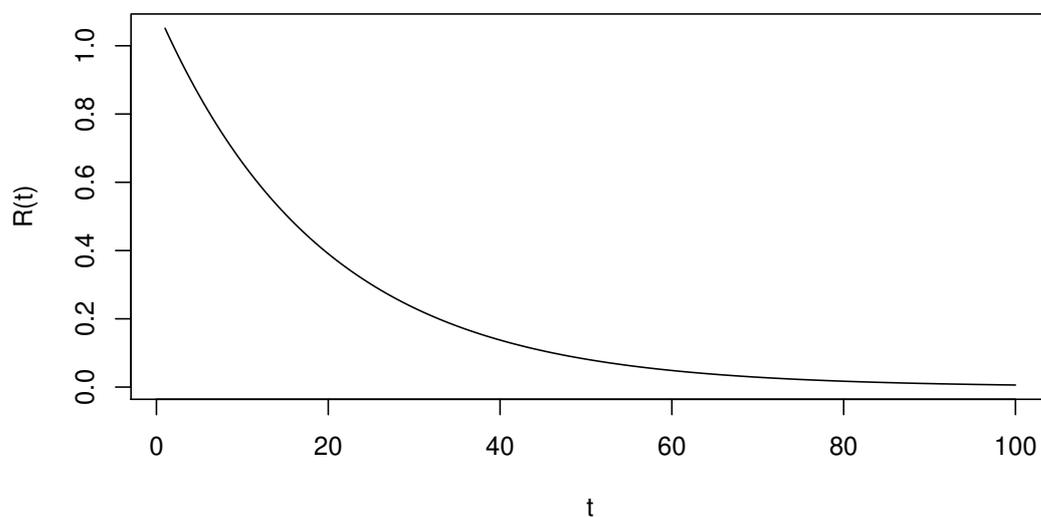
Et

$$\hat{R}(t)_{ML} = \exp\left\{-\frac{t - \hat{\alpha}_{ML}}{\hat{\beta}_{ML}}\right\} = \exp\left\{-\frac{1 - 1.96}{19.19}\right\} = 1.05.$$

TABLE 3.11 – Données sur les différences de niveaux d’inondation pour deux stations sur la rivière Fox

1.96	1.96	3.60	3.80	4.79	5.66	5.76	5.78	6.27	6.30	6.76
7.65	7.84	7.99	8.51	9.18	10.13	10.24	10.25	10.43	11.45	11.48
11.75	11.81	12.34	12.78	13.06	13.29	13.98	14.18	14.40	16.22	17.06

FIGURE 3.3 – la fonction de fiabilité pour  $Exp(\alpha, \beta)$  sur des données progressivement censuré de type II.



## CONCLUSION GÉNÉRALE

Les distributions exponentielles sont largement utilisées dans le domaine des tests de durée de vie. L'estimation des paramètres est revisitée dans les distributions exponentielles à deux paramètres. Par l'utilisation de la méthode de Monte Carlo nous avons fait une étude comparative entre la méthode du maximum de vraisemblance, les estimations non biaisées qui sont des fonctions linéaires de la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode de les espacements des produits et la méthode d'estimation des quantiles sont présentés .

La distribution exponentielle est basée sur des statistiques de commandes. Des estimations ponctuelles et d'intervalle sont utilisées pour l'échelle et les paramètres de localisation. Prédicteurs et reconSTRUCTEURS ponctuels impartiaux sont basés sur des quantités pivots. Le carré moyen de l'erreur et la mesure de Pitman aident à évaluer la proximité des estimateurs et prédicteurs.

Nous considérons l'inférence exacte sur la valeur moyenne d'un distribution exponentielle. Dans un premier temps, une quantité pivot est donnée pour le paramètre moyen basé sur des données complètes et présenter les quantiles exacts de cette quantité pivot pour un échantillon tailles. Un test exact et un intervalle de confiance sont proposés en utilisant cette grandeur pivot. Alors, des quantités pivots similiaies sont dérivées pour ce paramètre sur la base d'une double censure de type II, censure progressive de type II. À la fin, deux exemples sont présenté pour illustrer la méthode proposée.

Finalement, nous traitons le problème de l'estimation de la fonction de fiabilité pour la distribution exponentielle à deux paramètres sur la base d'échantillons progressive-ment censurés de type II illustré par un schéma de censure progressive de type II.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Yousry A El-Kassaby and Hugh J Barclay. Cost of reproduction in douglas-fir. *Canadian Journal of Botany*, 70(7) :1429–1432, 1992.
- [2] Warren E Johnson and William L Franklin. Spatial resource partitioning by sympatric grey fox (*Urocyon griseus*) and culpeo fox (*Urocyon culpaeus*) in southern chile. *Canadian Journal of Zoology*, 72(10) :1788–1793, 1994.
- [3] A Childs, B Chandrasekar, N Balakrishnan, and D Kundu. Exact likelihood inference based on type-i and type-ii hybrid censored samples from the exponential distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 55(2) :319–330, 2003.
- [4] N Balakrishnan and RA Sandhu. Best linear unbiased and maximum likelihood estimation for exponential distributions under general progressive type-ii censored samples. *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, Series B*, pages 1–9, 1996.
- [5] DR Jensen. Bounds on mahalanobis norms and their applications. *Linear algebra and its applications*, 264 :127–139, 1997.
- [6] RCH Cheng and NAK Amin. Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 45(3) :394–403, 1983.
- [7] Bo Ranneby. The maximum spacing method. an estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, pages 93–112, 1984.
- [8] Enrique Castillo and Ali S Hadi. A method for estimating parameters and quantiles of distributions of continuous random variables. *Computational statistics & data analysis*, 20(4) :421–439, 1995.
- [9] Udo Kamps. A concept of generalized order statistics. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48(1) :1–23, 1995.

- [10] Leon Mann. Queue culture : The waiting line as a social system. *American Journal of Sociology*, 75(3) :340–354, 1969.
- [11] M Ahsanullah. Linear prediction of record values for the two parameter exponential distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 32(3) :363–368, 1980.
- [12] Erhard Cramer and Udo Kamps. Ch. 12. sequential k-out-of-n systems. *Handbook of Statistics*, 20 :301–372, 2001.
- [13] Herbert A David and Haikady N Nagaraja. *Order statistics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [14] M Ahsanullah. Generalized order statistics from exponential distribution. *Journal of Statistical planning and Inference*, 85(1-2) :85–91, 2000.
- [15] Ahmed A Soliman, Ahmed H Abd Ellah, and Khalaf S Sultan. Comparison of estimates using record statistics from weibull model : Bayesian and non-bayesian approaches. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(3) :2065–2077, 2006.
- [16] Jerald F Lawless. A prediction problem concerning samples from the exponential distribution, with application in life testing. *Technometrics*, 13(4) :725–730, 1971.
- [17] Edward JG Pitman. The “closest” estimates of statistical parameters. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 33, pages 212–222. Cambridge University Press, 1937.
- [18] Jerome P Keating, Robert Lee Mason, and Pranab Kumar Sen. *Pitman’s measure of closeness : a comparison of statistical estimators*. SIAM, 1993.
- [19] N Balakrishnan, Katherine F Davies, Jerome P Keating, and Robert L Mason. Pitman closeness comparison of best linear unbiased and invariant predictors for exponential distribution in one-and two-sample situations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41(1) :1–15, 2012.
- [20] HN Nagaraja. Comparison of estimators and predictors from two-parameter exponential distribution. *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, Series B*, pages 10–18, 1986.
- [21] Vic Barnett. *Comparative statistical inference*, volume 522. John Wiley & Sons, 1999.
- [22] N Balakrishnan and Erhard Cramer. The art of progressive censoring. *Statistics for industry and technology*, 2014.
- [23] HM Barakat, EM Nigm, Magdy E El-Adll, and M Yusuf. Prediction of future generalized order statistics based on exponential distribution with random sample size. *Statistical Papers*, 59(2) :605–631, 2018.
- [24] Udo Kamps and Erhard Cramer. On distributions of generalized order statistics. *Statistics*, 35(3) :269–280, 2001.

- [25] Amany E Aly. Prediction and reconstruction of future and missing unobservable modified weibull lifetime based on generalized order statistics. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(2) :309–318, 2016.
- [26] Amany E Aly, HM Barakat, and Magdy E El-Adll. Prediction intervals of the record-values process. *Revstat : Statistical Journal*, 17(3) :401–27, 2019.
- [27] JF Lawless. Statistical methods in reliability. *Technometrics*, 25(4) :305–316, 1983.
- [28] NS Kambo. Maximum likelihood estimators of the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 7(12) :1129–1132, 1978.
- [29] N Balakrishnan. On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply type ii censored samples. *Journal of Applied Statistics*, 17(1) :55–61, 1990.
- [30] Conghua Cheng, Jinyuan Chen, and Jianming Bai. Exact inferences of the two-parameter exponential distribution and pareto distribution with censored data. *Journal of Applied Statistics*, 40(7) :1464–1479, 2013.
- [31] Benjamin Epstein and Milton Sobel. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 373–381, 1954.
- [32] Benjamin Epstein. Estimation of the parameters of two parameter exponential distributions from censored samples. *Technometrics*, 2(3) :403–406, 1960.
- [33] Román Viveros and N Balakrishnan. Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics*, 36(1) :84–91, 1994.
- [34] Frank E Grubbs. Approximate fiducial bounds on reliability for the two parameter negative exponential distribution. *Technometrics*, 13(4) :873–876, 1971.
- [35] Ping Shing Chan, Hon Keung Tony Ng, and Feng Su. Exact likelihood inference for the two-parameter exponential distribution under type-ii progressively hybrid censoring. *Metrika*, 78(6) :747–770, 2015.

FIGURE 3.4 – Les valeurs critiques de la quantité pivot  $Q$ .

$n$	$\gamma$											
	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
3	-31.805	-13.531	-9.200	-5.362	-3.419	-2.036	0.470	0.665	0.940	1.486	2.101	4.715
4	-11.950	-6.394	-4.778	-3.129	-2.172	-1.402	0.416	0.536	0.676	0.917	1.155	1.976
5	-7.109	-4.230	-3.297	-2.284	-1.649	-1.106	0.383	0.481	0.576	0.725	0.862	1.291
6	-5.060	-3.204	-2.564	-1.835	-1.358	-0.932	0.359	0.446	0.524	0.630	0.724	0.998
7	-3.968	-2.611	-2.125	-1.554	-1.168	-0.815	0.340	0.421	0.489	0.575	0.646	0.844
8	-3.291	-2.223	-1.830	-1.360	-1.035	-0.730	0.323	0.400	0.463	0.538	0.595	0.748
9	-2.822	-1.950	-1.619	-1.217	-0.934	-0.665	0.310	0.383	0.442	0.510	0.559	0.684
10	-2.487	-1.745	-1.459	-1.107	-0.856	-0.613	0.298	0.368	0.425	0.488	0.532	0.639
11	-2.228	-1.586	-1.335	-1.020	-0.793	-0.571	0.288	0.355	0.410	0.470	0.510	0.604
12	-2.029	-1.459	-1.232	-0.948	-0.740	-0.536	0.278	0.344	0.397	0.454	0.493	0.577
13	-1.867	-1.355	-1.149	-0.888	-0.696	-0.506	0.270	0.334	0.385	0.440	0.477	0.555
14	-1.731	-1.267	-1.079	-0.837	-0.659	-0.481	0.263	0.325	0.375	0.429	0.464	0.537
15	-1.620	-1.193	-1.018	-0.794	-0.626	-0.458	0.256	0.317	0.365	0.418	0.452	0.521
16	-1.523	-1.128	-0.965	-0.755	-0.598	-0.439	0.249	0.309	0.356	0.408	0.441	0.508
17	-1.439	-1.072	-0.920	-0.722	-0.572	-0.421	0.243	0.302	0.349	0.399	0.431	0.495
18	-1.367	-1.023	-0.879	-0.691	-0.550	-0.405	0.238	0.295	0.341	0.390	0.422	0.484
19	-1.302	-0.978	-0.842	-0.664	-0.529	-0.391	0.233	0.289	0.334	0.382	0.413	0.474
20	-1.247	-0.939	-0.810	-0.640	-0.511	-0.378	0.228	0.284	0.328	0.375	0.406	0.465
25	-1.034	-0.790	-0.686	-0.547	-0.439	-0.327	0.209	0.260	0.301	0.345	0.374	0.429
30	-0.895	-0.691	-0.602	-0.483	-0.390	-0.292	0.194	0.242	0.280	0.322	0.349	0.401
35	-0.796	-0.619	-0.542	-0.436	-0.353	-0.265	0.182	0.227	0.264	0.304	0.330	0.379
40	-0.722	-0.564	-0.495	-0.400	-0.325	-0.245	0.172	0.215	0.250	0.288	0.313	0.361
50	-0.616	-0.486	-0.428	-0.348	-0.283	-0.214	0.156	0.196	0.228	0.264	0.287	0.332
100	-0.390	-0.314	-0.279	-0.229	-0.189	-0.144	0.115	0.145	0.170	0.198	0.217	0.253
1000	-0.105	-0.087	-0.078	-0.065	-0.054	-0.042	0.039	0.050	0.059	0.070	0.077	0.091
10000	-0.032	-0.026	-0.024	-0.020	-0.017	-0.013	0.013	0.016	0.019	0.023	0.025	0.030