
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER
En Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

THEME :

**Étude analytique et numérique de quelques problèmes
de contrôle optimal**

présenté par

MAHTAR HASSIBA & BOURAHLA LEYLA

Soutenu le 18 juillet 2022 devant le Jury :

M. TAMI OMAR	MCB	USD-Blida 1	Président
M. TALBI MOHAMED EL AMINE	MCA	USD-Blida 1	Examineur
Mme BOUTAOUS FATIHA	MCA	USD-Blida 1	Promotrice

2021 / 2022

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire ...

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chères soeurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mon cher frère pour son appui et son encouragement,

A mes amis avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables, je leur souhaite de ma part la réussite

A ma binôme Leyla, ainsi que toute sa famille.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible,

Merci d'être toujours là pour moi

HASSIBA, M.

DÉDICACES

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études

A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mon cher frère pour son appui et son encouragement .

A mes amis avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables, je leur souhaite de ma part la réussite

A tous les membres de ma famille.

A tous les gens qui m'aime et m'aide dont je n'ai pas cité les noms.

A ma binôme Hassiba, ainsi que toute sa famille
Merci d'être toujours là pour moi

LEYLA, B.

REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remercions « **ALLAH** » le tout puissant qui nous a donné le courage et la santé pour réaliser ce travail.

En second lieu, nous remercions nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience, leurs conseils et leur aide durant la préparation de ce travail.

nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre promotrice **F. BOUTAOUS** pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de préparation de ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury **Mr. O.TAMI** et **Mr. M.A .TALBI** pour l'intérêt à notre travail et de l'avoir examiné.

Enfin, nous tenons à exprimer nos remerciements et notre gratitude à tous nos enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période de nos études, ainsi qu'à toutes les personnes qui nous ont apporté l'aide et l'assistance nécessaires et qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

HASSIBA, M et LEYLA, B

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE	2
1 Rappels des notions de base	5
1.1 Quelques notions d'algèbre linéaire	5
1.2 Généralités sur les équations différentielles	8
1.2.1 Définitions fondamentales	8
1.2.2 Quelques types d'équations différentielles	9
1.2.2.1 Équation différentielle à variables séparées	9
1.2.2.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 1	10
1.2.2.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 2	11
1.2.2.4 Equation d'Euler- Lagrange	11
1.2.3 Résolution numérique des équations différentielles	13
1.2.3.1 Le problème de Cauchy	13
1.2.3.2 Méthode de Newton	15
1.2.3.3 Méthode d'Euler	16
1.2.3.4 Méthode de Runge - Kutta	16
1.2.4 Programmations des méthodes numériques par logiciel Matlab .	20
1.2.5 Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles .	25
2 Contrôle optimal	28
2.1 Les différents types des systèmes de contrôle :	30
2.2 Le problème de contrôle optimal	30
2.3 Position du problème	32
2.4 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal	33
2.4.1 Position du problème	33
2.5 Formulations mathématiques et exemples	34
2.5.1 Formulation de Lagrange	34

2.5.2	Formulation de Mayer	36
2.5.3	Formulation de Bolza (Mayer-Lagrange)	37
2.6	Commandabilité (Contrôlabilité)	37
2.6.1	Commandabilité (contrôlabilité) des systèmes linéaires	39
2.6.1.1	Systèmes linéaires stationnaires (autonomes)	39
2.6.1.2	Cas des systèmes linéaires non stationnaires	43
2.6.2	Commandabilité (contrôlabilité) des systèmes non linéaires	46
2.7	Application Entrée-Sortie	46
2.8	Contrôles singuliers	48
2.9	Contrôlabilité locale	49
3	Méthodes de résolution numérique	50
3.1	Méthodes directes	51
3.2	Méthodes indirectes	52
3.2.1	Principe du maximum de Pontryagin	52
3.3	Contrôle optimal des systèmes linéaires	53
3.3.1	Temps d'optimalité	53
3.3.1.1	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité	53
3.4	Contrôle optimal des systèmes non linéaires	54
3.4.1	Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version faible	54
3.4.1.1	Le problème de Lagrange	55
3.4.1.2	Le problème de Mayer-Lagrange	55
3.4.2	Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version forte	56
3.4.3	Principe du maximum de Pontryagin : Cas temps final $T = t_f$ est inconnu (libre)	58
3.4.4	Principe du Maximum avec Contraintes sur l'état	59
3.4.4.1	Méthode de pénalisation	59
3.5	Méthode de tir	60
3.5.1	Méthode de tir simple	60
3.5.2	Méthode de tir multiple	61
3.5.3	Résolution d'un problème aux deux bouts	63
3.5.4	Problème aux deux bouts	63
3.5.4.1	Problème à valeur initiale et méthode de tir	64
3.5.4.2	Mise en œuvre pratique de la méthode de tir	66
4	Applications du principe de maximum de Pontryagin	68
4.1	Systèmes de contrôle linéaires	68
4.1.1	Cas de problèmes sans contraintes sur le contrôle	68
4.1.2	Résolution à l'aide du logiciel MATLAB :	74
4.1.3	Cas des problèmes avec contraintes sur le contrôle	79

TABLE DES MATIÈRES

4.2	Systèmes de contrôle non - linéaires	81
5	Conclusion générale	85
	BIBLIOGRAPHIE	86

TABLE DES FIGURES

1.1	les méthodes numériques	23
1.2	la méthode de Rk45	25
2.1	Schéma de représentation d'un système de contrôle	29
2.2	Exemple d'un Véhicule.	29
2.3	Problème du contrôle optimal	31
2.4	Le problème de contrôlabilité.	38
2.5	Variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$	47
3.1	La différence entre les méthodes directes et les méthodes indirectes	51
4.1	Méthode d'Euler	76
4.2	Méthode de RK4.	79
4.3	Trajectoire, état adjoint et contrôle optimal pour le modèle de ruche.	84

المخلص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة التحليلية والرقمية لبعض مسائل الضبط الأمثل. أولاً سوف ندرس إمكانية التحكم في الأنظمة الديناميكية الثابتة وغير الثابتة في الحالات الخطية وغير الخطية نتقدم بأمثلة معيار كالمان الذي يلعب دوراً أساسياً في هذه النظرية. بعد ذلك سوف نقدم الطرق العددية المباشرة وغير المباشرة لحل مشكلة التحكم الأمثل في الأنظمة الديناميكية الخطية وغير الخطية. من بين الطرق غير المباشرة نقدم طريقة تيغ التي تعطي النتيجة الرئيسية لمبدأ بونترياجين. وفي الأخير ننهي هذا العمل بتقديم أمثلة في مختلف التطبيقات على مبدأ بونترياجين واستنتاج عام حول دراسة التحكم الأمثل للأنظمة الديناميكية.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est l'étude analytique et numérique de quelques problèmes de contrôle optimal.

D'abord, nous allons étudier la contrôlabilité des systèmes dynamiques stationnaires et non stationnaires dans les cas linéaires et non linéaires où nous présentons avec des exemples le critère de Kalman qui joue un rôle fondamental dans cette théorie.

Ensuite, nous allons présenter les méthodes numériques directes et indirectes de résolution le problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Parmi les méthodes indirectes nous donnons la méthode de tir qui donne le résultat principal de Principe du Maximum de Pontryagin PMP.

Ce travail sera terminé par des exemples vari d'applications sur le principe du Maximum de Pontryagin et une conclusion générale sur l'étude du contrôle optimal des systèmes dynamiques.

Abstract :

The objective of this memory is the analytical and numerical study of some problems of optimal control.

First, we will study the controllability of stationary and non-stationary dynamical systems in the linear and non-linear cases where we present with examples the Kalman criterion which plays a fundamental role in this theory.

Then, we will present the direct and indirect numerical methods of resolution the problem of optimal control of the linear and nonlinear dynamical systems.

Among the indirect methods we give the shooting method which gives the main result of Pontryagin Maximum Principle PMP. This work will be ended with various examples of applications on the principle of the Maxim of Pontryagin and a general conclusion on the study of the optimal control of the dynamical systems.

NOTATIONS GÉNÉRALES

\max : Le maximum.

\min : Le minimum.

\lim : La limite.

\mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.

$M_{n,m}$: L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

A^T : Transposée de la matrice A .

A^{-1} : La matrice inverse de la matrice A .

A^* : L'adjoint de la matrice A .

e^A : Matrice exponentielle de la matrice A .

I_n : La Matrice identité de dimension n .

$\det(A)$: Déterminant de la matrice A .

rg : Le rang de la matrice A .

$p_\lambda(A)$: Le polynôme caractéristique de la matrice A .

$\dim(\mathbb{R}^n)$: La dimension de \mathbb{R}^n .

$GL_n(\mathbb{K})$: L'ensemble des matrices inversibles.

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$: La dérivée de $x(t)$ par rapport à la variable t .

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$: La dérivée seconde de $x(t)$ par rapport à la variable t .

∇f : gradient de f .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le produit scalaire.

\perp : L'orthogonalité.

$C^p(\Omega, \mathbb{K})$: L'ensemble des applications de Ω dans de classe C^p .

$L^p(\Omega, \mathbb{K})$: L'ensemble des applications mesurables de Ω dans K , de puissance p intégrables sur Ω pour $1 \leq p \leq +\infty$.

$L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{K})$: L'ensemble des applications mesurables de Ω dans K , de puissance p intégrables sur tout compact de Ω , pour $1 \leq p \leq +\infty$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie mathématique du contrôle optimal a pris naissance dans les années quarante dans la qualité d'une partie spéciale des équations différentielles, c'est le prolongement du calcul variationnel. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Voir [1] Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines des mathématiques.

Le problème d'optimisation dans les mathématiques implique les spécifications des décisions (conditions ou contraintes) de l'utilisateur et de la formalisation du concept de l'optimale décision. [2]

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol, économie, mécanique, médecine, chimie, robotique, et biologie, etc. La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif de la théorie de contrôle est de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbations, c'est ce qu'on appelle la stabilisation, ou de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation, c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, etc. Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguine, formulé par L. S. Pontriaguine en 1956 [3] qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales (pour plus de détails sur l'histoire de cette découverte, Voir [4]). Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité.

Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman[5] , et pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. En suite, une fois le problème de Contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir : les méthodes directes et les méthodes indirectes, voir[6].

- Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire, puis résoudre ce problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler, de Rung-Kutta ou bien les méthodes de types SQP (méthode de programmation quadratique successive), etc. Ces méthodes sont les plus simples à mettre en oeuvre.
- Les méthodes indirectes, quant à elles, consistent à appliquer le principe du maximum de Pontriaguine (PMP), qui donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre et se traduisent dans un problème aux deux bouts. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, ce qui revient en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème original. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation .

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

Au chapitre 1

Intitulé Généralités sur les Equations Différentielles, nous nous sommes attelés à la définition des notions que nous allons utiliser par la suite comme l'équation d'Euler-Lagrange par rapport à son rôle dans la théorie .

Nous donnons dans ce chapitre quelques méthodes de résolutions des équations différentielles les plus simples et les plus utiles pour notre thème , par exemple les méthodes de Rung-Kutta qui représentent un outil d'une grande utilité . A la fin du chapitre, on a introduit la méthode de tir pour la résolution d'une équation différentielle avec conditions aux limites .

Au chapitre 2

Intitulé Contrôle optimal, nous nous intéressons au problème de contrôle optimal, où nous avons présenté les notions de base liées à l'étude de la théorie de contrôlabilité et du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.

Au chapitre 3

Intitulé les méthodes directes et les méthodes indirectes de résolutions de problème de contrôle optimal. Parmi les méthodes indirectes on propose la méthode de tir, elle est basée sur le principe de maximum de Pontryagin (PMP) avec ses deux versions faible et forte.

Au chapitre 4

Nous donnons des exemples variés d'applications du Principe du Maximum de Pontryagin à la résolution de quelques problèmes de contrôle optimal linéaires et non linéaires.

Ce travail sera terminé par une conclusion générale sur l'étude du contrôle optimal des systèmes dynamiques.

CHAPITRE 1

RAPPELS DES NOTIONS DE BASE

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base nécessaires à la réalisation de ce travail. En particulier, nous donnons des rappels d'algèbre linéaire, des équations différentielles et les méthodes de leur résolution. Pour plus de détails voir ([7],[8],[1])

1.1 Quelques notions d'algèbre linéaire

Soit n, m et p des nombres entiers non nuls, T un nombre réel positif, et soit $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle polynôme caractéristique de la matrice A , et on le note $P_A(\lambda)$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I$.

Théorème 1.1 (Théorème de Hamilton-Cayley)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors, son polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ satisfait la propriété $P_A(\lambda) = 0$.

Proposition 1.1 Le rang d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Proposition 1.2 Un nombre complexe λ est une valeur propre de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Le rang de la matrice $A - \lambda I$ est strictement inférieur à n .
2. Le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ est nul : $|A - \lambda I| = 0$.

Définition 1.2 On dit que V est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ si V est un vecteur non nul et

$$AV = \lambda I \iff (A - \lambda I)V = 0.$$

Définition 1.3 (Matrice diagonale) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

La matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$\forall i \neq j, a_{i,j} = 0.$$

Définition 1.4 (Matrice inversible) Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A.B = I_n$$

Dans ce cas la matrice B est unique. Elle est appelée l'inverse de la matrice A et on écrit :

$$B = A^{-1}.$$

Définition 1.5 (Matrice symétrique) Une matrice A est dite symétrique si $A^T = A$.

Définition 1.6 (Matrice diagonalisable) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D où $D = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n])$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Telles que :

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$

Définition 1.7 (Matrice nilpotente) Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que la matrice A est nilpotente si :

il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0$, alors $A^k = 0$, pour tout $k \geq m$.

Définition 1.8 (Exponentielle d'une matrice) soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. D'ordre n . L'exponentielle de la matrice A , notée e^A , est définie par le développement en série entière :

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Remarque 1.1

- Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, son exponentielle e^A se calcule directement à partir de son développement en série entière, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes.
- Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, pour calculer son exponentielle e^A on utilise le résultat suivant :

Proposition 1.3 Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

- $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, tell que l'application exponentielle est de Classe C^∞ sur \mathbb{K} .
- Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, i.e. $AB = BA$, on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

- Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D telle que :

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1},$$

Pour calculer l'exponentielle e^A pour une matrice quelconque $A \in M_n(\mathbb{K})$, on utilise le résultat suivant.

Proposition 1.4 (Décomposition de Dunford) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors, il existe une matrice N nilpotente, telles que :

$$A = D + N \text{ et } DN = ND$$

De plus, cette décomposition est unique. On écrit

$$e^{tA} = e^{D+N} = e^D e^N.$$

Proposition 1.5 Si A n'est pas diagonalisable on peut utiliser la décomposition de Jordan telle que $A = D + N$ avec D est diagonalisable et N nilpotente qui commutent

$$e^A = e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN}.$$

Définition 1.9 (Fonction convexe) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 1.10 (Ensemble convexe) On dit qu'un ensemble A d'un espace vectoriel E est convexe si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

1.2 Généralités sur les équations différentielles

Introduction

En Mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, etc. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.2.1 Définitions fondamentales

Définition 1.11 Soit $x = \phi(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses n premières dérivées une relation de la forme :

$$\phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = \phi(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée "équation différentielle d'ordre n ". Bien entendu, la même expression s'applique à toute équation qui peut se ramener à la forme (1.1).

Un cas particulier important est celui où l'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\right) \quad (1.2)$$

Cette expression traduit l'idée selon laquelle une équation différentielle est, en principe, destinée à permettre de calculer $(d^n x/dt^n)$ en fonction de $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$

Remarque 1.2 L'équation (1.2) est dit autonome lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t , c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme :

$$\dot{x} = f(x).$$

Définition 1.12 Toute fonction $x = \phi(t)$, $t \in I$, qui vérifie l'équation (1.1) en tout point de l'intervalle I est appelée "solution" ou "intégrale" de cette équation.

Définition 1.13 Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé "arc intégrale" ou "courbe intégrale".

Définition 1.14 Le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) & \text{pour tout } t \in [a, b] \\ x(t_0) = x_0, & \text{pour } t_0 \in [a, b], \end{cases}$$

Avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$, est appelé "problème de Cauchy (P)", à condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Remarque 1.3 Le sens physique de la condition initiale est très intuitif. Un système physique régi par une équation différentielle du premier ordre, voit son état déterminé par une seule valeur qui dépende en général du temps. La connaissance de cet état à un instant donné, détermine l'état du système à tout instant.

1.2.2 Quelques types d'équations différentielles

1.2.2.1 Équation différentielle à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t).$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration

$$\dot{x} = (dx/dt) = g(x).f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(x)dt,$$

Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(x)dt$$

Exemple 1.1 Résolvons l'équation suivante :

$$x - \frac{\dot{x}}{2t} = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On écrit cette équation sous forme différentielle puis on sépare les variables :

$$x - \frac{dx}{2tdt} = 1 \Rightarrow x - 1 = \frac{dx}{2tdt} \Rightarrow \frac{dx}{(x-1)} = 2tdt.$$

Par intégration de cette relation, il vient :

$$\int \frac{dx}{(x-1)} = \int 2t.dt \Rightarrow \ln((x-1)/k) = t^2 x - 1 = ke^{t^2}.$$

En on déduit que l'ensemble des solutions constitué des fonctions :

$$x \Rightarrow 1 + ke^{t^2}$$

1.2.2.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle est dite linéaire si elle peut s'écrire sous la forme :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \quad (1.3)$$

Définition 1.15 On appelle "équation différentielle homogène" associée à l'équation différentielle (1.3) l'équation :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad (1.4)$$

Les solutions de l'équation (1.4) sont de la forme :

$$x_H(t) = ke^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt},$$

où k est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l'équation (1.3) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière $x_p(t)$.

Autrement dit :

La solution de l'équation différentielle (1.3) est

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Remarque 1.4 Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas, par exemple, des équations de Bernoulli :

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^\alpha$$

Les fonctions p et q étant continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire.

Sinon : en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t)$$

C'est aussi le cas de l'équation de Ricatti :

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

qui se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, dès qu'on connaît une solution particulière $x_1(t)$. En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de le remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante :

$$\dot{y} = 2a(t)x_1(t) + b(t)y(t) + a(t)y^2(t).$$

1.2.2.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 2

Définition 1.16 On considère une fonction x définie par : $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow x(t) \end{cases}$, fonction dérivable sur I .

- On appelle équation linéaire d'ordre 2 non homogène l'équation qui s'écrit sous la forme :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d(t), \quad (1.5)$$

où a, b, c sont des constantes réelles ($a \neq 0$), et d est une fonction définie sur I et dérivable sur I , sachant que l'inconnue est la fonction $x(t)$. • L'équation (1.5) est dit homogène si elle s'écrit sous la forme :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0. \quad (1.6)$$

Définition 1.17 Équation caractéristique associée à l'équation différentielle (1.6) est s'écrire :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Méthode résolution de l'équation (1.5)

- si $\Delta > 0$ alors $x_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$, où λ et β réels.
- si $\Delta = 0$ alors $x_H(t) = (\lambda + \beta t)e^{r_0 t}$, où λ et β réels et $r_0 = \frac{-b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$ alors $x_H(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \gamma \sin(\beta t))$ où λ et γ réels et $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.

Les solutions de l'équation (1.5) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière $x_p(t)$. Où la solutions de l'équation différentielle (1.5) est

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t).$$

1.2.2.4 Equation d'Euler- Lagrange

Soit $g : [t_0, t_f]_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 . Pour toute fonction $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on note \dot{x} sa dérivée, et on pose :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Théorème 1.2 Si x^* est une fonction de classe C^2 qui donne à J une valeur extrême $J^* = J(x^*)$ parmi toutes les fonctions $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \quad (1.5)$$

alors nécessairement x^* satisfait la formule d'Euler-Lagrange :

$$g'_x(t) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))), \quad (1.6)$$

Signalons que, réciproquement, si $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange (1.6) et si pour tout $t \in [t_0, t_f]$, la fonction $g_t : (x, v) \rightarrow g(t, x, v)$ est concave, alors J^* est le maximum des $J(x)$ pour la fonction $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant (1.5), si le plus les g_i sont strictement concaves, x^* est l'unique maximum parmi ces fonctions.

Preuve. L'idée est d'utiliser le fait que toutes les dérivées partielles de la fonctionnelle J dans toutes les directions x satisfaisant (1.5) sont nécessairement nulles, et d'écrire x sous la forme $x = x^* + hX$.

Soit $X : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $X(t_f) = X(t_0) = 0$ et soit $\phi_X(h) = J(x^* + hX)$. On a $\phi_X(0) = J^*$ et comme ceci set la plus grande valeur de J , 0 est un extrémum de ϕ_X , d'où $\frac{d}{dh}\phi_X(0) = 0$, en d'autre termes, en dérivant sous ligne intégral puis en intégrant par partie, on a successivement :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dh}\phi_X(0) = \frac{d}{dh}J(x^* + hX)|_{(h=0)} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dh}g(t, x^*(t), hX(t), \dot{x}^*(t) + h\dot{X}(t))|_{(h=0)} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t) + g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\dot{X}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))]X(t) dt \\ &\quad + [g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))]X(t) \Big|_{(t=0)}^{(t=t_f)} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} G(t)X(t) dt \end{aligned}$$

Puisque $X(t_f) = X(t_0) = 0$, et $G(t) = g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, Qui est continue puisque g est de classe C^2 . Le théorème découle donc immédiatement du lemme suivant, souvent appelé "lemme fondamental du calcul des variations". ■

Lemme 1.1 Soit $G : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si pour toute fonction continue $X : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(t_f) = X(t_0) = 0$, et on a $\int_{(t_0)}^{(t_f)} G(t)X(t)dt = 0$ alors nécessairement la fonction G est nulle.

Preuve.

Soit $\phi_\xi : [t_0, t_f] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $\phi_\xi(t_f) = \phi_\xi(t_0) = 1$ et

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{(t_0)}^{(t_f)} \phi_\xi = 0,$$

Par exemple $\phi_\xi(t) = \exp(t(t - (t_f))/\xi)$, alors

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{(t_0)}^{(t_f)} G^2 \phi_\xi(t) = 0$$

Puis que

$$0 \leq \int_{(t_0)}^{(t_f)} G^2 \phi_\xi(t) \leq \max(G^2) \int_{(t_0)}^{(t_f)} \phi_\xi(t).$$

Posons

$$X(t) = G(t)(1 - \phi_\xi(t))$$

On a :

$$0 = \int_{(t_0)}^{(t_f)} G(t)X(t)dt = \int_{(t_0)}^{(t_f)} G^2(t)dt - \int_{(t_0)}^{(t_f)} G^2 \phi_\xi dt.$$

En passant à la limite sur ξ , on a $\int_{(t_0)}^{(t_f)} G^2(t)dt = 0$ et donc $G \equiv 0$. ■

1.2.3 Résolution numérique des équations différentielles

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Voir ([9],[10])

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et ne sont possibles que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles, parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit :

1.2.3.1 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et V un ouvert de \mathbb{R}^n , on appelle problème de Cauchy, le Problème qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), & t \in I = [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1, 7)$$

où f est une fonction de $I \times V$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , $t_0 \in I$.

- L'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ est un système pour $n \geq 2$.
- $x(t_0) = x_0$ représente la condition initiale du problème de Cauchy (P)

Définition 1.18 (Solution du problème de Cauchy) On suppose que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x(t), y(t))$ est mesurable.
- pour tout $x \in V$, la fonction $x \mapsto f(x(t), y(t))$ est continue.

On appelle solution du problème de Cauchy (P), tout couple $(J, x(\cdot))$, où J est un intervalle tel que $J \subset I, t_0 \in J$ et $x(\cdot)$ est une fonction absolument continue de J dans V , vérifiant : pour tout $t \in J$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.8)$$

Ce qui est équivalent à

$$(P) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Définition 1.19 Une solution $(J, x(\cdot))$ est dite maximale si, pour toute autre solution $(\bar{J}, \bar{x}(\cdot))$, nous avons $\bar{J} \subset J$ et $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ sur \bar{J} .

Théorème 1.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz usuel) Soit le problème de Cauchy (P). On suppose que :

- La fonction f soit continue sur $I \times V$.
- La fonction f soit lipschitzienne par rapport à x :

$$\exists M > 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall y, z \in V, \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq M \|y - z\|, \quad (1.9)$$

alors le problème de Cauchy (P) admet une solution unique définie sur I .

Remarque 1.5 Concernant la résolution des problèmes de contrôle, du fait que les contrôles u sont en général non continus (par exemple continus par morceaux), alors les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz usuel doivent être affaiblies. Ainsi, pour assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contrôle, on donne le résultat suivant :

Théorème 1.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que la fonction $f : I \times V \rightarrow V$ vérifie les deux hypothèses suivantes :

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant :

$$\forall x \in V, \quad \exists r > 0, \quad \beta(x, r) \subset V, \quad \exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+), \quad \text{tels que :}$$

$$\forall t \in I, \quad \forall y, z \in \beta(x, r), \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|. \quad (1.10)$$

2. f est localement intégrable par rapport à t , i.e. :

$$\forall x \in V, \quad \exists \beta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+), \text{ tels que : } \forall t \in I, \quad \|f(t, x)\| \leq \beta(t). \quad (1.11)$$

Alors pour toute condition initiale $(t_0, x(t_0)) \in I \times V$, il existe une unique solution maximale (J, x) de problème de Cauchy

En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t, y(t)) + \gamma(t), t \in I \\ y(t) &= x_0 + \gamma_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Où $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ et où γ est une fonction continue sur I . Le problème (1.12) est déduit de (1.7) en perturbant la donnée initiale x_0 et la fonction f . Caractérisons à présent la sensibilité de la solution y par rapport à ces perturbations.

Définition 1.20 Soit I un ensemble borné. Le problème de Cauchy (1.7) est stable au sens de Liapunov (ou simplement stable) sur I si, pour toute perturbation $(\gamma_0, \gamma(t))$ satisfaisant

$$|\gamma_0| < \epsilon, \quad |\gamma(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in I$$

Avec $\epsilon > 0$ assez petit pour garantir l'existence de la solution du problème perturbé (1.10), alors

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \|x(t) - y(t)\| < C\epsilon, \forall t \in I \quad (1.13)$$

La constante C dépend en général des données du problème t_0, x et f , mais pas de ϵ .

Quand I n'est pas borné supérieurement, on dit que (1.7) est asymptotiquement stable si, en plus de (1.11), on a la propriété suivante :

$$|x(t) - y(t)| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty, \quad (1.14)$$

$$\text{Si } |\gamma(t)| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

1.2.3.2 Méthode de Newton

Cette méthode a été mise au point par, c'est pourquoi elle porte son nom. C'est l'une des méthodes les plus utilisées pour la recherche des racines des équations non linéaires. C'est une méthode simple dont la convergence est rapide.

Supposons $f \in C^1(I)$ et $f'(\alpha) \neq 0$ (α une racine simple de f). En se donnant la valeur initiale x_0 , on obtient la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \forall n \geq 0$$

Algorithme de la méthode de Newton

- i. Etant donné ϵ , un critère d'arrêt.
- ii. Etant donné N , le nombre maximal d'itérations.
- iii. Etant donné x_0 , une valeur initiale de la solution.
- iv. Effectuer : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- v. Si : $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{x_n} < \epsilon$:
 - Convergence atteinte.
 - Ecrire la solution x_{n+1} .
 - Arrêt.
- vi. Si le nombre maximal d'itération N est atteint.
 - Convergence non atteinte en N itérations.
 - Arrêt.
- vii. Retour à l'étape 4.

1.2.3.3 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler nommée ainsi en l'honneur du mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), c'est une procédure numérique pour résoudre approximativement des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale de Cauchy. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

Subdivision l'intervalle $[0, T]$ comme suit : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$.

Posons : $h_n = t_{n+1} - t_n$, $h = \max h_n$, $0 \leq n \leq N$

Pour $0 \leq n \leq N$ la solution de problème est donnée par :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N$$

on aura le schéma d'Euler suivant :

$$y_{(n+1)} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$.

1.2.3.4 Méthode de Runge - Kutta

Cette méthode est une méthode d'analyse numérique elle est nommée ainsi à l'honneur des mathématiciens Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944), ont proposé en 1895[10] de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t, y(t)), & t \in I \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi(x_i, y_i, h_i), \end{cases}$$

Où la fonction d'incrémentation ϕ est une approximation de $f(x, y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Supposons un entier, une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$

L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot (b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_r k_r), \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + b_2 + \dots + b_r = 1$.

Les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A .

Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier, une méthode de Runge-Kutta[10] est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , du vecteur b et de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 ($r = 1$)

Pour $b = 1$, $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 ($r = 2$)

Pour déterminer toute les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction ϕ de la forme :

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

Où les coefficients k_1 et k_2 sont donnée par :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_i + ch, y_i + ahk_1), \end{cases}$$

développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right] \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i))$$

Développons de même k_2 au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + hb_1k_1 + hb_2[f(x_i, y_i) + hc[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + ahf(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i))] + o(h^2).$$

En identifiant les deux expressions on obtient

$$\begin{cases} y(x_i) & = y_i, \\ f(x_i, y_i) & = (b_1 + b_2)f(x_i, y_i), \\ \frac{1}{2}f'_x + \frac{1}{(2f'_y f)} & = b_2(cf'_x + af'_y f), \end{cases}$$

on en déduit que :

$$b_1 + b_2 = 1,$$

$$b_2c = b_2a = \frac{1}{2},$$

Soit en posant :

$$b_2 = \theta, b_1 = 1 - \theta \text{ et } c = a = \frac{1}{2}, \text{ on retrouve les trois cas standards :}$$

La méthode d'Euler on obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i).$$

La méthode de Heun (Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_{i+1} & = y_i + h.(k_1 + k_2)/2, \\ k_1 & = f(x_i, y_i), \\ k_2 & = f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{cases}$$

La méthode de Runge kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} & = y_i + h.k_2 \\ k_1 & = f(x_i, y_i), \\ k_2 & = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hk_1) \end{cases}$$

Méthode d'ordre 3 ($r = 3$)

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3 correspond au cas $b = (1/6, 2/3, 1/6)$, et la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre à chaque pas de calcul des trois facteurs k_i .

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

Algorithme de Runge- kutta d' ordre 4

1. Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (x_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N .
2. Pour $0 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ x_{i+1} &= x_i + h \\ &\text{Ecrire } x_{i+1} \text{ et } y_{i+1} \end{aligned}$$

3. L'itération se termine quand $i + 1 = N$.

Remarque 1.6 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-à-dire des méthodes dans lesquelles le pas h varié à chaque itération.

Une des méthodes classiques, consiste à employer deux méthodes de Runge-Kutta emboîtées, la première méthode d'ordrer sert à calculer la solution approchée, tandis que la seconde d'ordre r' sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas, on dit que la méthode est d'ordre (r, r') .

Proposée en 1957, la méthode de Merson est la première méthode de Runge-Kutta emboîtée, elle est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour le contrôle du pas, elle consiste à calculer :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/3, y_i - hk_1/6 + (hk_2)/6) \\ k_3 = f(x_i + h/3, y_i - (hk_1)/6 + (hk_2)/6) \\ k_4 = f(x_i + h/2, y_i + (hk_1)/8 + (3hk_2)/8) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i + (hk_1)/2 - (3hk_3)/2 + 2hk_1) \\ y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ y_{i+1}^* = y_i + h.(k_1 - 3k_3 + 4k_4)/2. \end{array} \right.$$

L'erreur :

$$\Delta_i = |y_{i+1} - y_{i+1}^*|.$$

Est évaluée à chaque pas.

Remarque 1.7 Si e désigne la tolérance acceptée, l'algorithme de Merson divise le pas facteur 2 quand $\Delta_i > e$, et multiplie le pas par 2 quand $\Delta_i \leq e/64$, et conserve le pas actuel dans les autres cas.

1.2.4 Programmations des méthodes numériques par logiciel Matlab

Exemple 1.2 On s'intéresse à utiliser la méthode la plus précise, pour cela prenons un simple exemple pour comparer la méthode d'Euler et celles de Runge-Kutta.

Résolvons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = 2y + x^2 \quad \text{sur l'intervalle } [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$$

La solution exacte est :

$$y^* = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Pour les méthodes de résolution on associe un programme implémenté sous Matlab.

1. `clear all; clc;`
2. `global h;`
3. `double f;`
4. `double Fexacte;`
5. `a=input('Donnez la borne inf de la intervalle :');`

```
6. b=input('Donnez la borne sup de la intervalle :');
7. t(1)=1;
8. y(1)=1;
9. n=input('donnez le nombre de sous intervalles :');
10. h=(b-a)/n; disp('la valeur de h est :'); h
11. % la méthode solution exacte :
12. Fexacte(1)=1;
13. for i=1 :n;
14. t(i+1)=t(i)+h;
15. Fexacte(i+1)=Solution
16. exacte(t(i+1));
17. end
18. disp('la discription du temps :')
19. t
20. disp('les valeurs exactes de la fonction en chaque itération :')
21. Fexacte;
22. subplot(221); plot(t,Fexacte,'b'); grid on; title('la méthode exacte');
23. % la méthode d'Euler :
24. for i=1 :n;
25. t(i+1)=t(i)+h;
26. y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
27. end
28. disp('les valeurs de yi avec la méthode de Euler :')
29. y
30. subplot(222); plot(t,y,'b'); grid on; title('la méthode de Euler');
31. % la méthode de Rung-Kutta d'ordre 2 :
32. for i=1 :n
33. K1=h*f(t(i),y(i));
34. K2=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(K1/2));
35. t(i+1)=t(i)+h;
36. y(i+1)=y(i)+K2;
37. end
```



```
38. disp('les valeurs de yi avec la méthode RK2 :')

39. y

40. subplot(223);

41. plot(t,y,'g');

42. grid on;

43. title('la méthode RK2');

44. % La méthode d'ordre de Runge-kutta 4 :

45. for i=1 :n

46. K1=h*f(t(i),y(i));

47. K2=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(K1/2));

48. K3=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(K2/2));

49. K4=h*f(t(i)+h,y(i)+K3);

50. t(i+1)=t(i)+h;

51. y(i+1)=y(i)+(1/6)*[K1+(2*K2)+(2*K3)+K4];

52. end

53. disp('les valeurs de yi avec la méthode RK4 :')

54. y

55. subplot(224); plot(t,y,'b'); grid on; title('la méthode RK4 :');
```

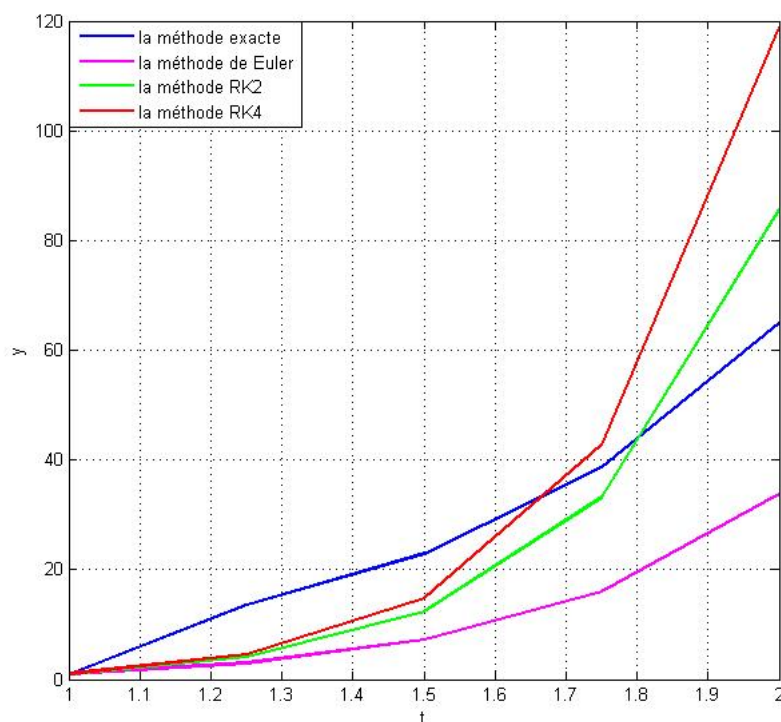


FIGURE 1.1 – les méthodes numériques

Dans cette étude nous avons remarqué d'une part que la méthode d'Euler, bien que simple d'application, ne permettait d'approcher la solution qu'avec une faible précision pour un certain pas. La solution serait donc de prendre un pas très petit afin d'obtenir une meilleure approximation de la fonction, ce qui augmenterait considérablement le nombre de calcul. D'autre part, nous avons tenté de résoudre le même problème avec les méthodes Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4. Nous avons tout de suite remarqué que RK4 était bien plus complexe tant au niveau des calculs, que du codage. Mais cela n'a pas été en vain étant donné que les résultats obtenus sont presque confondus avec la solution analytique, c'est-à-dire elle est la plus précise que les deux autres méthodes.

Résolution du même système avec RKF45

Un programme RKF45 a été employé avec une tolérance $\epsilon = 10^{-5}$, il a changé la taille du pas automatiquement.

Après l'exécution de ce programme :

1. fonction rk45
2. epsilon = 0.00001;
3. h = 0.1;

```

4. t(1) = 0;
5. y(1) = 1;
6. i = 1;
7. fprintf('Step
8. while t(i) < 1
9. h = min(h, 1-t(i));
10. k1 = h*f(t(i),y(i));
11. k2 = h*f(t(i)+h/4, y(i)+k1/4);
12. k3=h*f(t(i)+3*h/8,y(i)+3*k1/32+9*k2/32);
13. k4 = h*f(t(i)+12*h/13, y(i)+1932*k1/2197-7200*k2/2197+7296*k3/2197);
14. k5 = h*f(t(i)+h, y(i)+439*k1/216-8*k2+3680*k3/513-845*k4/4104);
15. k6 = h*f(t(i)+h/2, y(i)-8*k1/27+2*k2-3544*k3/2565+1859*k4/4104-11*k5/40);
16. y(i+1) = y(i) + 25*k1/216+1408*k3/2565+2197*k4/4104-k5/5;
17. z(i+1) = y(i) + 16*k1/135+6656*k3/12825+28561*k4/56430-9*k5/50+2*k6/55;
18. R = abs(y(i+1)-z(i+1))/h;
19. delta = 0.84*(epsilon/R)^(1/4); if R <= epsilon
20. t(i+1) = t(i)+h;
21. i = i+1;
22. fprintf('Step
23. h = delta*h;
24. else
25. h = delta*h;
26. end
27. plot(t,y,'r');grid on;hold on;
28. end
29. function y1= f(a,b)
30. y1=2*b+a^2;

```

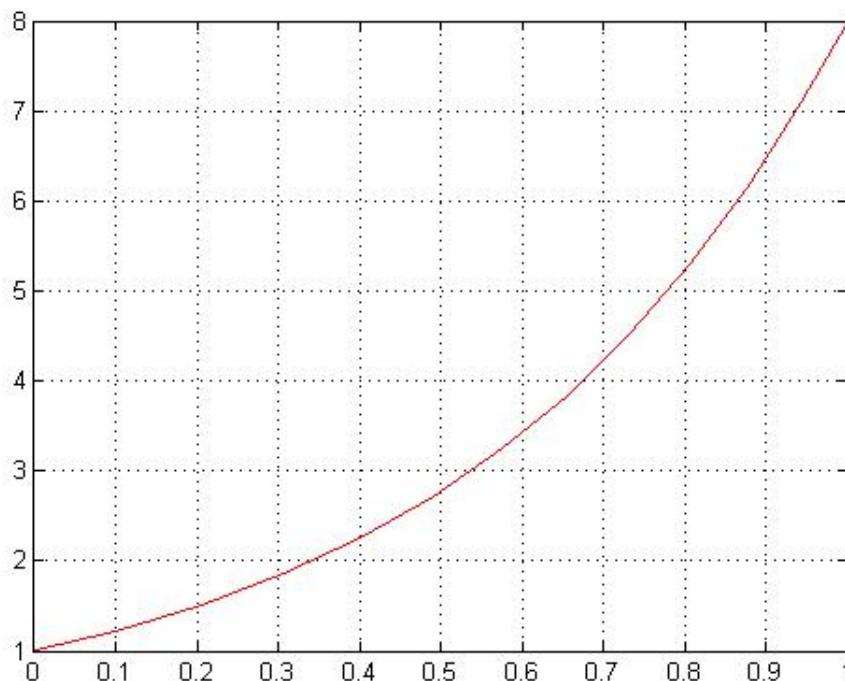


FIGURE 1.2 – la méthode de Rk45

1.2.5 Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles

Dans cette section nous faisons l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec conditions aux limites de la forme :

$$\begin{cases} y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1.15)$$

On suppose que les fonctions $(a_i(x))$ sont suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles que nous rencontrons.

La différence entre les équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites est que dans le premier cas, à $t = t_0$, la fonction $y(t_0)$, ainsi que sa pente $y'(t_0)$ sont connues. Dans le cas des équations avec conditions aux deux extrémités de l'intervalle, soit $y(a)$ et $y(b)$. On remarque qu'il n'y a aucune condition initiale liée à la dérivée de la fonction $y(t)$ en $x = a$. La condition initiale sur la dérivée est remplacée par une condition sur la fonction $y(t)$ à l'autre extrémité de l'intervalle $[a, b]$. En effet il suffit, de remarquer que l'on peut remplacer l'équation différentielle (1.15) par deux équations différentielles avec conditions initiales.

Théorème 1.5 La solution de l'équation différentielle avec conditions initiales suivantes :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(x) \quad (1.16)$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielle avec conditions aux limites (1.15) est donnée par :

$$y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \quad (1.17)$$

$$y_1(a) = y_a \text{ et } y_1'(b) = 0,$$

et

$$y_2''(x) = a_2(x)y_2'(x) + a_1(x)y_2(x) \quad (1.18)$$

$$y_2(a) = 0 \text{ et } y_2'(a) = 1.$$

Preuve. On doit vérifier en premier lieu les conditions aux limites. Si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ satisfont respectivement aux équation (1.15) et (1.16) en $x = a$

$$y(a) = y_1(a) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(a) = y_a + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)0 = y_a$$

Par ailleurs :

$$y(b) = y_1(b) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(b) = y_1(b) + (y_b - y_1(b)) = y_b.$$

Il reste à montrer que l'expression (1.16) est bien la solution de l'équation différentielle (1.15).

On pose que :

$$c = \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)$$

Pour simplifier la notation. On doit donc s'assurer que $y_1(x) + y_2(x)$ est la solution de l'équation différentielle (1.15). La dérivée seconde de $y(x)$ peut écrire sous la forme :

$$y''(x) = (y_1(x) + cy_2(x))'' = y_1''(x) + cy_2''(x).$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des équations (1.15) et (1.16). Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} y''(x) &= a_2(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) + a_0(x) + c(a_2(x))y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) \\ &= a_2(x)(y_1'(x) + c(y_2'(x) + a_2(x)(y_1(x) + c(y_2(x))) + a_0(x)) \end{aligned}$$

$$= a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x)$$

Ce qui montre bien que $y(x)$, définie par (1.14), est la solution de l'équation (1.13).

On peut résoudre les équations différentielles (1.17) et (1.18) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. On doit d'abord transformer chacune d'elle en un système de deux équations différentielles d'ordre 1. En posant :

$$u_1(x) = y_1(x) \text{ et } v_1(x) = y_2(x) \quad u_1(x) = y_1'(x) \text{ et } v_1(x) = y_2'(x)$$

On obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), & u_1(a) &= y_a \\ u_2'(x) &= a_2(x)u_2(x) + a_1(x)u_1(x) + a_0(x), & u_2(a) &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} v_1'(x) = v_2(x), & (v_1(a) = 0) \\ v_2'(x) = a_2(x)v_2(x) + a_1(x)v_1(x), & v_2(a) = 1. \end{cases}$$

La solution finale va s'écrire sous la forme :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(x) = u_1(x) + \left(\frac{y_b - u_1(b)}{v_2(b)}\right)v_1(x).$$

Selon les nouvelles variables $u_1(x)$ et $v_1(x)$. ■

Conclusion

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle majeur dans la théorie du contrôle. La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont le plus nombreuses.

Introduction

Le problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Définition 2.1 (Système dynamique)

- Un système est un ensemble d'objets qui réalisent une opération spécifique.
- Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, cette loi peut être représentée par des équations.

Définition 2.2 (Système de contrôle (commande)) Un système de contrôle est un système dynamique dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système au moyen d'un contrôle (ou commande). Le système de contrôle peut être un système mécanique (moteur, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc.

L'objectif la théorie du contrôle peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

D'un tel système résulte une relation entrée sortie où l'entrée $u(t)$ représente la commande, c'est-à-dire le moyen d'action sur le système, et la sortie $y(t)$ représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme de mesure. Il est représenté par le diagramme suivant (voir figure 2.1)

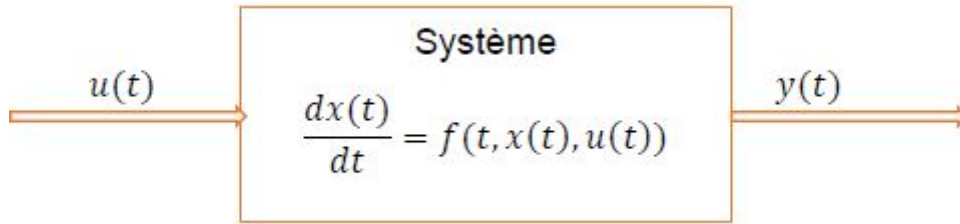


FIGURE 2.1 – Schéma de représentation d'un système de contrôle

Exemple 2.1 Stabilisation d'un véhicule

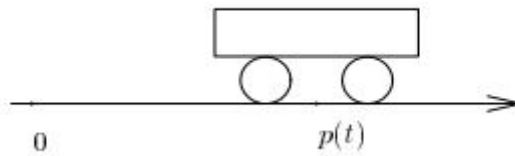


FIGURE 2.2 – Exemple d'un Véhicule.

On considère un véhicule sur un rail. Il a deux moteurs, un à l'avant (pour accélérer) et l'autre à l'arrière (pour freiner). A l'instant $t = 0$, le véhicule est à la position p_0 à la vitesse u_0 . On veut que le véhicule s'arrête à l'origine o , (la vitesse y est donc nulle). Pour cela, il faut allumer les moteurs au "bon moment", d'une manière correcte et si possible optimale (en mettant par exemple le moins de temps possible et en consommant le moins d'énergie possible). Cet exemple peut modéliser de façon très simplifiée, une voiture lancée à 60km/h qui doit s'arrêter à un feu situé à une certaine distance p_0 .

Dans ce cas le système est le véhicule. La fonction d'état est donnée par le vecteur $x(t) = (p(t), \frac{dp}{dt}(t))$ (c'est-à-dire (position, vitesse)). L'état initial $x_0 = (p_0, u_0)$ est supposé connu. Le contrôle $u(t)$ est la force appliquée au véhicule, due à l'allumage des moteurs à l'instant t . si le moteur arrière s'allume la force est négative. La dynamique du système est donnée par la loi fondamentale de la dynamique (force = masse \times accélérations), qu'on peut écrire ici $\frac{d^2p}{dt^2} = u(t)$ (on normalise la masse supposée constante). On obtient

$$X(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ \frac{dp}{dt}(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

L'équation d'état est donc une équation différentielle dans \mathbb{R}^2 . De plus, il y a des contraintes sur u dues à la taille des moteurs et à la limitation de l'accélération. Une hypothèse mathématique raisonnable est que u est mesurable et bornée.

2.1 Les différents types des systèmes de contrôle :

Définition 2.3 (Système de contrôle linéaire, non linéaire) Un système de contrôle linéaire s'il est régi par un système d'équations différentielles linéaires. Sinon, il dit non linéaire.

Remarque 2.1 Les systèmes de contrôle réels, présents dans la nature, sont non linéaires, dans ce cas l'étude de ces systèmes est beaucoup plus complexe. Pour simplifier leur étude, on les linéarise dès que l'on peut le faire.

Définition 2.4 (système linéaire stationnaire, non stationnaire) Un système de contrôle linéaire est stationnaire s'il a des coefficients constants (indépendant du temps).

Si le système de contrôle a des coefficients variables dans le temps alors il est non stationnaire.

- Les systèmes de contrôle sont de dimension finie, s'ils sont décrits par des équations différentielles ordinaires et modélisent des phénomènes physiques dits « localisés » tels le mouvement d'un solide.
- Les systèmes de contrôle sont de dimension infinie modélisent des phénomènes « distribués ». Souvent décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP), tels la condition thermique dans une barre métallique, la vibration d'une corde tendue.

Définition 2.5 (Trajectoire) On considère le système commandé (contrôlé) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière $t \in [0, T] \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui vérifie sur un intervalle $[0, T]$ de \mathbb{R} .

2.2 Le problème de contrôle optimal

Soit $T > 0$, un horizon de temps, n et m deux nombres entiers non nuls. On considère le système dynamique contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1
- $x(t)$: le vecteur d'état du système de contrôle (2.1). En général, $x(t)$ appartient à une

variété différentielle M de dimension n , on supposera ici que M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n .

• $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une commande (contrôle) du système de contrôle (2.1). Le problème de contrôle optimal consiste à chercher :

Si le système (2.1) est contrôlable, existe-t-il un contrôle joignant $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle $u \rightarrow J(u)$? voir figure (2.3)

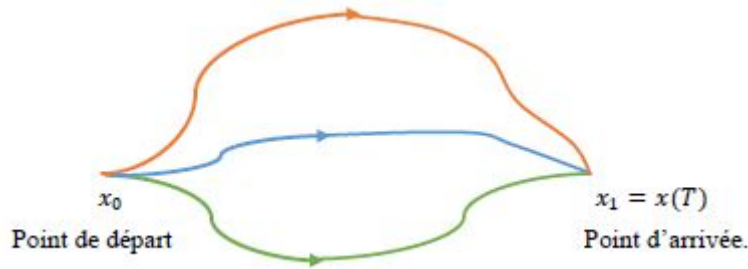


FIGURE 2.3 – Problème du contrôle optimal

Définition du problème de contrôle (commande) optimal

En général, le problème de commande optimale est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u J(T, u) = \min_u g(T, x_u(T)) + \int_0^T l(t, x_u(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0 \in M_0, \\ x(T) = x_1 \in M_1, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Où

- $J(T, u)$: est la fonction coût, critère de qualité ou but du problème (3.2).
- $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 appelée Lagrangien.
- $g : w \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .
- $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 définit les équations dynamiques.
- M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n .
- V : un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
- W : un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Résolution d'un problème de contrôle optimal

Nous donnons ici quelques étapes importantes en résolution d'un problème de contrôle optimal :

Modélisation mathématique du problème de contrôle optimal

- ▷ Différents groupes de variables (état, commande).
- ▷ Fonctionnelle de coût (Lagrange 1762, Mayer 1878, Bolza 1913).
- ▷ Les équations dynamiques.
- ▷ Conditions aux limites (initiales, terminales).
- ▷ Contraintes algébriques (inégalités, égalités, ensembles, espaces).
- ▷ Ensemble d'hypothèses (continuité, différentiabilité)

Méthodes de résolution

- ▷ Méthodes directes : Par exemple les méthodes d'optimisation (linéaire ou non linéaire).
- ▷ Méthodes indirectes : Par exemple la méthode de tir.

2.3 Position du problème

Pour résoudre le problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif, d'où la nécessité d'une définition du problème en termes physiques et sa modélisation en termes mathématiques. En connaissant la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande qui optimise l'objectif, par exemple, une commande en temps optimal, c'est-à-dire : réaliser l'objectif d'un processus dans le temps le plus court.

Objet et but de la commande (contrôle)

On suppose que l'état x est solution d'une équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$ est la position de l'objet à l'instant t , $x(t_0) \in \mathbb{R}$ la position initiale du système, et $u(t)$ est la commande.

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet considéré de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in G_0$) à la position ($x_1 \in G$), (où G_0 est l'ensemble de départ, et G l'ensemble d'arrivée (accessibilité)).

Et aussi d'optimiser le fonctionnement d'un système en fonction d'un critère de coût pertinent, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

Classe des commandes (contrôles) admissibles

La classe des commandes admissibles U est constituée de fonctions mesurables $u(t)$:

$$U = \{u(t), \quad t \in T = [t_0, t_f]\}.$$

Chaque commande transfère l'objet du point de départ x_0 en un point de l'ensemble d'arrivée $G(t_f)$.

Commande Bang-Bang

Soit U l'ensemble de commandes et U_e l'ensemble de point extrémaux de U .

La commande admissible u est dite de Bang-Bang si $u \in U_e$ c'est-à-dire u prend les valeurs extrémales de U , ensemble borné.

Ainsi, par exemple, si on a $|u(t)| \leq 1$, les commandes Bang-Bang sont telles que $u(t) = \pm 1$.

Critère de qualité

C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle $[0, T]$, à optimiser.

2.4 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal

2.4.1 Position du problème

Dans la classe des commandes constantes par morceaux

$$U = \{u(t), \quad t \in T = [t_0, t_f]\},$$

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = g(T, x(t)) + \int_0^T l(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \min_{u \in U} \quad (1) \\ \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \in M_0 \quad (2) \\ Hx(t_f) = g, \quad (3) \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (4) \end{array} \right.$$

où

- $J(T, u)$ est appelé coût ou critère de qualité (fonction objectif).
- $x(t) = (x_j, j \in J \in \mathbb{R}^n$, un n -vecteur représentant la position (l'état) du système à l'instant $t \in T$.

- $A(I, J)$ est une $n \times m$ -matrice qui caractérise le système.
- $B(J)$ est un n -vecteur donné.
- $H = H(I, J)$ c'est une $m \times n$ -matrice telle que le rang de $h = m \leq n$.
- g est un m -vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant t_f .
- $u(t)$ est une commande.
- l est une fonction de classe C^1 , appelé lagrangien.
- $I = 1, \dots, m$ et $J = 1, \dots, n$ sont des ensembles d'indices.
- x_0 la position initiale.

2.5 Formulations mathématiques et exemples

On se propose ici de présenter les principales formulations mathématiques des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations différentielles ordinaires. Voir [11]

Considérons un phénomène décrit par le système :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (edo)$$

2.5.1 Formulation de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit problème de Lagrange s'il s'écrit de la manière suivante :

$$(L) \begin{cases} \inf J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{Sous les contraintes}(C) \begin{cases} x(t_f) = x_f, \text{ ou } (x(t_f) \in (C_f), u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \\ x(\cdot) \in F_1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n), u(\cdot) \in F_0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \end{cases} \end{cases}$$

ou bien

$$(L) \begin{cases} \text{Sup} J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{sous les contraintes}(C) \end{cases}$$

1. Lorsque le temps final $t_f > t_0$ est fixé, le problème (L) est dit un problème à temps terminal fixé. Si la valeur t_f n'est pas fixée ou connue d'avance, t_f devient alors une inconnue qu'on intégrera dans les variables i.e. on écrira $J(x(\cdot), u(\cdot), t_f)$ et on rajoutera la contrainte supplémentaire $t_f > t_0$: Dans ce cas, il s'agit d'un problèmes à temps terminal libre.
2. La fonction $l : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée parfois Lagrangien (ou coût instantané) et qui est supposée au moins continue. La fonctionnelle $J : F_1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \times$

$F_0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite critère ou coût où les classes de fonctions F_1, F_0 dans lesquelles on cherche $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont à préciser selon le problème posé. Ici on prendra

$$F_1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) = W^{1,2}([t_0, t_f], \mathbb{R}^n),$$

$$F_0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) = L^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m).$$

- $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est l'état du système avec une condition $x(t_0) = y_0$ dite condition initiale et éventuellement une autre contrainte sur l'état final $x(t_f) = x_f \in \mathbb{R}^n$ (ou bien l'état final doit être dans une cible $C_f \times \mathbb{R}^n$).
 - $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ est la commande (ou contrôle) du système, on impose une condition importante sur elle : $u(t) \in U$, par exemple, $u(t) \in [-1, 1]^m$.
3. L'évolution du système avec le temps t est décrite par l'équation différentielle du premier ordre donnée sous la forme condensée $\dot{x} = f(t, x, u)$ avec,
 $f = (f_1, \dots, f_n) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant certaines conditions, par exemple, les conditions de Cauchy-Lipschitz pour l'existence de solution unique de l'équation différentielle considérée.

Donnons un exemple de problème de contrôle optimal de Lagrange gouverné par des EDO :

Exemple 2.2 (Contrôle optimal du niveau de glucose dans le sang) Considérons un modèle du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose (par exemple exprimée en mg) au temps t (compté en secondes s) à partir de l'instant initial $t_0 = 0$. On suppose que, si on ne fait rien, cette quantité diminue à un taux proportionnel à la quantité présente dans le sang :

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t).$$

où α est une constante donnée strictement positive. Au départ, le niveau de glucose est $x(0) = a$ (mg). Dans le but de porter le niveau de glucose à celui prescrit de $x(t_f) = c \neq a$, du glucose est transfusé dans le sang à raison de $u(t)$ mg/s ($u(t)$ est la vitesse de transfusion, la variable de contrôle). La contrainte sur cette commande est

$$0 \leq u(t) \leq m, \quad t \in [0, t_f]$$

où $m > 0$ est la valeur maximale de la vitesse de pénétration. L'évolution de l'état $x(t)$ se fait donc suivant l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f]$$

On veut opérer de manière à minimiser la quantité globale de glucose trans-fusée, i.e. on va

minimiser le critère

$$J(x(\cdot), u(\cdot), t_f) = \int_0^{t_f} u(s) ds$$

sachant que le temps $t_f > 0$ est inconnu ici. Ainsi le problème se formalise comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{t_f > 0} J(x(\cdot), u(\cdot), t_f) \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f] \\ u(t) \in [0, m], \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = a, \quad x(t_f) = c, \end{array} \right.$$

2.5.2 Formulation de Mayer

Un problème de contrôle optimal de type Mayer est un problème qui s'écrit sous la forme :

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser (ou Maximiser) } J(x(\cdot), u(\cdot)) := g_0(x(t_f)) \\ \text{Sous les contraintes de type (C)} \end{array} \right.$$

Dans cette formulation le critère J n'est pas de type intégrale, il ne porte que sur l'état final $x(t_f)$ (et t_f s'il est inconnu) avec $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ supposée au moins continue.

Un exemple typique sous forme de Mayer est le problème de contrôle optimal à temps minimal où dans ce cas le critère à minimiser est $J(x(\cdot); u(\cdot); t_f) = t_f$ avec une contrainte supplémentaire $t_f > t_0$. En voici un exemple :

Exemple 2.3 (Rectification de la trajectoire d'un avion) On note $\theta(t)$ l'angle à l'instant t de la déviation de la trajectoire d'un avion par rapport à la trajectoire désirée. On peut commander cette déviation par une force notée $u(t)$: La déviation $\theta(t)$ et la force $u(t)$ sont liées par une équation différentielle du second ordre (connue en mécanique) :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + \alpha \dot{\theta}(t) + \omega^2 \theta(t) &= u(t), \quad t \geq t_0 \\ \text{avec } |u(t)| &\leq 1, \quad (\text{contraintes technologiques}). \end{aligned}$$

La déviation initiale $\theta(0) = \theta_0$ étant connue ainsi que la vitesse de déviation initiale $\dot{\theta}_0 = v_0$, on souhaite retourner à l'état $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = (0, 0)$ (i.e. déviation nulle, vitesse nulle) en un temps minimum qu'on veut déterminer. Autrement dit, Il s'agit de minimiser :

$J(u(\cdot), t_f) = t_f > 0$ (t_f étant inconnu) : Pour formuler le problème de commande optimale, on pose $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$ de sorte que

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bu \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{array}{l} x(0) = (\theta_0, v_0) \\ x(t_f) = (0, 0) \end{array} \right\} \text{Condition en } t_0 = 0 \text{ et } t_f \text{ portant sur } x. \\ u(t) \in U := [-1, 1] \quad \text{Contrainte portant sur le contrôle } u(\cdot). \end{array} \right.$$

2.5.3 Formulation de Bolza (Mayer-Lagrange)

Les problèmes de commande optimale de type

$$(\beta) \begin{cases} \text{Minimiser (ou Maximiser)} & J(x(\cdot), u(\cdot)) = g_0(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{Sous les contraintes de type (C)} \end{cases}$$

sont appelés problèmes de Bolza. Dans la formulation de Bolza, le critère à optimiser J comporte deux parties : la partie concernant l'état final (observation) et la partie J donnée sous forme intégrale comme dans la formulation de Lagrange.

Notons que la formulation de Bolza est la plus générale puisqu'en faisant $g_0 = 0$ dans (β) on retrouve (L) , et en faisant $l = 0$ dans (β) on retrouve (M) :

Finalement, on donne un exemple illustratif de problème de Bolza sous des contraintes de type (C) .

Exemple 2.4 (Transfert optimal des fichiers informatiques) Un fichier x_0 (en M_0 : "mégaoctets") $x_0 > 0$, doit être acheminé par le réseau. Démarrant à la date $t_0 = 0$, à chaque instant on peut choisir une vitesse de transmission (en M_0/s) de la forme $u(t) u_{max}$ avec $u(t) \in [0, 1]$. Le transfert des données est régi par la loi $\dot{x}(t) = -u(t)$, le coût instantané de transfert est $u(t)\theta(t)$ où $\theta(\cdot)$ est une fonction continue strictement décroissante. De plus, il est associé à la date finale t_f un coût proportionnel à t un coût proportionnel à t_f^2 . On veut déterminer $t_f > 0$ et le contrôle $\bar{u}(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow [0, 1]$ minimisant le critère

$$J(t_f, u) = \alpha \int_0^{t_f} u(t)\theta(t)dt + (1 - \alpha)t_f^2, \quad (0 < \alpha < 1).$$

qui est un compromis entre le coût total de transmission (que l'on voudrait le petit possible) et la date t_f de fin de transmission (on ne voudrait pas attendre trop longtemps). Naturellement, la totalité du fichier x_0 doit être acheminée à la date terminale t_f . Le problème de contrôle optimal est alors de type Bolza.

2.6 Commandabilité (Contrôlabilité)

Pour certains types de problèmes, avant leur résolution, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions en utilisant les notions de Commandabilité ou de (contrôlabilité). Elle consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois le problème d'une contrôlabilité résolue, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère.

Définition 2.6 Le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini. voir Figure (2.3)

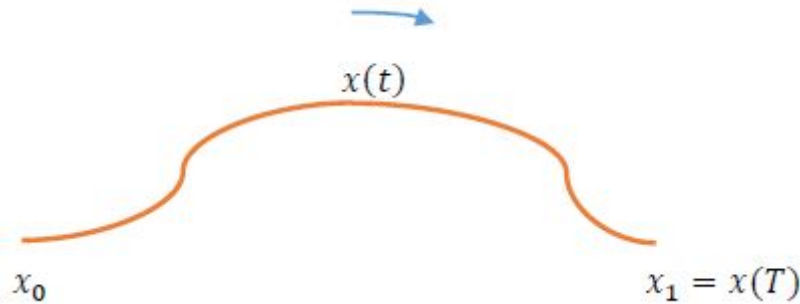


FIGURE 2.4 – Le problème de contrôlabilité.

Ensemble accessible

Considérons le système dynamique (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

Définition 2.7 L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps T est :

$$Acc(x_0, T) = x_u(T), u \in U.$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (2.3) associée au contrôle u . $Acc(x_0, T)$ Est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.3), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 2.8 le système (1.1) est dit contrôlable en temps T si

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{(T \geq 0)} Acc(x_0, T).$$

2.6.1 Commandabilité (contrôlabilité) des systèmes linéaires

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

On supposera que A et B sont des fonctions continues, ce qui veut dire que chacune des composantes de A et B sont des fonctions continues de $[0, T]$.

D'après le théorème des équations différentielles, pour tout contrôle u le système (2.1) admet une solution unique $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)(M(s)^{-1}(B(s)u(s)))ds,$$

où $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est la résolvante du système linéaire homogène :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

2.6.1.1 Systèmes linéaires stationnaires (autonomes)

Définition 2.9 Un système définie par :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

est dit autonome si les matrices $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont constantes.

Autrement dit : le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit stationnaire lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$ et la solution x du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in [0, T], \quad x(t) = e^{At}(x_0 + B \int_0^t (e^{-As}(u(s)ds))).$$

Définition 2.10 le système (2.1) est dit contrôlable en temps T si :

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.11 Le système autonome $\dot{x} = AX + BU$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande (on

dit aussi l'entrée) $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de taille $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états x_0 et $x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable, borné $u(t)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en un temps fini T .

Le critère de Kalman

dans le cas d'un système linéaire sans contraintes, il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité de ce système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient A et B deux matrices constantes sur $[t_0, t_f]$ et on note

$$K = (A|B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

La matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

Théorème 2.1 Le système stationnaire

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T],$$

est dit contrôlable en temps t_f (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman $K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{(n-1)}B]$, est de rang $K = \dim(\mathbb{R}^n)$, on écrit :

$$\text{rang}(K) = n. \quad (2.5)$$

Remarque 2.2 $K \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{Rang } K = n$ est appelée condition de Kalman, où $n \leq m$.

Démonstration

La preuve du théorème 2.1 est basée le lemme suivant.

Lemme 2.1 La matrice K est rang n si, et seulement si, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ U &\longmapsto \int_0^{(T^*)} e^{(T^*-t)A} Bu(t) dt \end{aligned}$$

Est surjective.

Preuve du lemme 2.1

Supposons tout d'abord que rang $k < n$ et montrons que ϕ n'est pas surjective.

L'application ϕ étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi k = 0$. Par conséquent

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{(n-1)}B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{(n-1)}$ tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence que pour tout entier k , $\psi A^k B = 0$. Donc

$$\forall t \in [0, T], \quad \psi A^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0,$$

i.e.

$\psi \phi(u) = 0$, donc ϕ est surjective.

Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n / 0$ tel que : pour tout contrôle u on ait

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

D'où

$$\forall t \in [0, T], \quad \psi e^{(T-t)A} B = 0.$$

En $t = T$, on obtient $\psi B = 0$.

Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T$ on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi par dérivations successives on obtient :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Ainsi $\psi \phi = 0$. Donc rang $k < n$.

La preuve du théorème 2.1

Si la matrice K est de rang n , alors d'après le lemme 1, l'application ϕ est surjective, i.e :

$$\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Or pour tout contrôle u l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est :

$$X(T^*) = e^{T^*A}x_0 + \int e^{T^*-t}Bu(t)dt.$$

Alors l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$Acc(T^*, x_0) = \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$$

Donc le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 et l'ensemble accessible en temps T s'écrit :

$$Acc(T^*, x_0) = e^{T^*A}x_0 + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui prouve que ϕ est surjective. Donc d'après le lemme 2.1 la matrice K est de rang n .

Remarque 2.3 La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Exemple 2.5 Soit le système différentiel :

$$(S_2) \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

$$\text{Avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

La matrice de contrôlabilité (commandabilité) de Kalman est :

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Le rang de la matrice K est

$$\text{rang}(K) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Donc le système (S_2) est contrôlable.

Exemple 2.6 Soit le système de contrôle dans \mathbb{R}^3 :

$$(S_3) \quad \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité (commandabilité) de Kalman est :

$$K = [B, AB, A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice K est $rg(K) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Donc le système (S_3) n'est pas contrôlable.

Exemple 2.7 Considérons maintenant le système (S_4) suivant :

$$\dot{x}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $n = 2$ états, $m = 1$ entrée.

Et la matrice de commandabilité du système (S_4) est :

$$C(A, B) = [B, AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\alpha & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$C(A, B) = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

Le système est commandable si et seulement si le $\det(C(A, B))$ est non nul, c'est-à-dire $\alpha \neq 3$.

2.6.1.2 Cas des systèmes linéaires non stationnaires

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas d'un système de contrôle non stationnaire (non autonome), c'est-à-dire dans le cas où les matrices A et B dépendent du temps.

Théorème 2.2 Le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

est contrôlable en temps T si, et seulement si, la matrice

$$C(t) = \int_0^T (M(t))^{-1} B(t) (B(t)^T) (M(t)^{-1})^T dt$$

est inversible, où $C(t)$ est appelée matrice de contrôlabilité, et B^T est la transposée de B .

Remarque 2.4

- Si un système linéaire non stationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0 alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.
- Si le système est autonome, on a $M(t) = e^{tA}$ et donc

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} e^{tA} B B^T e^{-sA^T} ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1^*)$ est inversible si, et seulement si, $C(T_1)$ est inversible.

i.e. : la condition de contrôlabilité ne dépend pas de T^* . Ce qui n'est pas le cas pour le système non stationnaire.

Exemple 2.8 Soit le système (S_5) défini par la forme matricielle :

$$(S_5) \dot{X}(t) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t).$$

On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

La résolvante du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ est donnée par la formule $M(t) = e^{tA}$.

Le polynôme caractéristique associé à la matrice A est

$$P_\lambda(A) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. On cherche une matrice inversible P formée par les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D telle que :

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}.$$

La matrice diagonale D est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

D'où

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Pour calcul simple, il résulte

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ti} & 0 \\ 0 & e^{-ti} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$(M(t))^{-1}B(t)B(t)^T(M(t))^{-1T} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & 0 \\ \sin(2t) & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité au temps T^* est alors

$$\begin{aligned} C(T^*) &= \int_0^{T^*} e^{-sA}B(s)(B(s))^T e^{-sAT} ds \\ &= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \cos(2s) & 0 \\ \sin(2s) & 0 \end{pmatrix} ds. \\ &= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2T^*) & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2T^*) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice $C(T^*)$ est $\det(C) = 0$. Donc la matrice $C(T^*)$ n'est pas inversible. Par conséquent le système (S_5) n'est pas contrôlable.

2.6.2 Commandabilité (contrôlabilité) des systèmes non linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, u \in U, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.4)$$

où x est un vecteur de \mathbb{R}^n , A une matrice dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (2.4).

Définition 2.12 Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.4) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 , si $x_1 \in \text{Acc}(x_0, T)^\circ$.

2.7 Application Entrée-Sortie

Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, on se propose de trouver un temps T et un contrôle u sur I tel que la trajectoire x_u associée à u , vérifie :

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(t_f) = x_1. \quad (2.5)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 2.13 Soit $t_f > 0$, L'application entrée-sortie en un temps t_f du système de contrôle (2) initialisé à x_0 est l'application :

$$E_{x_0, t_f} : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

$$u \rightarrow x_u(t_f) = x_1$$

, Où $x_u(\cdot)$ est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \\ x_u(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, t_f]$. voir la figure(2.4)

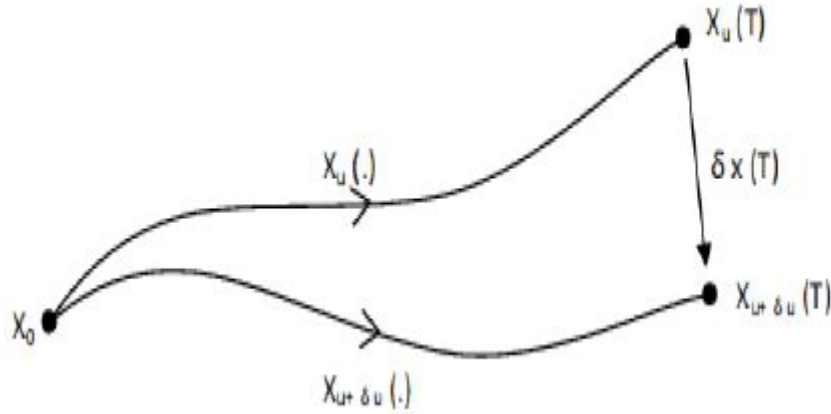


FIGURE 2.5 – Variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$

Lemme 2.2 L'application E_{x_0, t_f} est différentiable au sens de Fréchet. Et sa différentielle au sens de Fréchet à l'ordre un est :

$$E_{x_0, t_f}(u + \delta u)(t) = E_{x_0, t_f} u(t) + dE_{x_0, t_f} \cdot \delta u + o(\|\delta u\|)_{L^\infty}. \quad (2.8)$$

Par définition :

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + B(u(t)), \quad x_u(0) = x_0,$$

$$\dot{x}_{u+\delta u}(t) = Ax_{u+\delta u}(t) + B(u + \delta u), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0,$$

On pose

$$\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t),$$

$$\dot{\delta x} = A\delta x + B(u + \delta u) - B(u), \quad \delta x(0) = 0,$$

avec

$$B(u + \delta u) = B(u) + dB(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|).$$

Ainsi on aura le système dit linéarisé le long de $u(\cdot)$ à l'ordre un suivant :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Or à l'ordre un on a :

$$\delta x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds \quad (2.10)$$

D'où le résultat suivant :

$$dE_{x_0, t_f} = \int_0^{t_f} e^{(t_f-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds = \delta x(t_f) \quad (2.11)$$

De la condition d'admissibilité $\delta x(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, \quad u \in U, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.12)$$

Définition 2.14 Le système (2.12) est appelé système linéarisé du système (2.4) le long de la commande $u(\cdot)$. La solution du système linéarisé (2.12) en temps T est donnée par :

$$\delta x(T) = \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds$$

$$dE_T(u(T))\delta u = x_{u+\delta u}(T) - x_u(T) = \delta x(T).$$

Où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (2.12).

Proposition 2.1 $dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.

Proposition 2.2 Le système (2.4) est localement contrôlable au voisinage de $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de x_1 .

Remarque 2.5 Si le système linéarisé (2.12) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que E_T est localement surjective, on déduit que le système de départ (2.4) est localement contrôlable au voisinage de x_1 :

Théorème 2.3 Le système linéarisé (2.5) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))' e^{-tA'} dt.$$

est inversible.

2.8 Contrôles singuliers

Définition 2.15 Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, T]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire x_u) est singulier sur $[0, T]$ si la différentielle de Fréchet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.

Proposition 2.3 Le contrôle u (ou la trajectoire $x_u(\cdot)$) est singulier si le rang $dE_{X_0, T}(u) < n$.

2.9 Contrôlabilité locale

Définition 2.16 (point d'équilibre) On appelle point d'équilibre du système le système commandé (contrôlé), un couple $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, vérifiant

$$f(x_e, u_e) = 0.$$

Soit $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ point d'équilibre du système de contrôle. On dit que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre (x_0, u_0) si :

pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

pour tout

$$x_0, x_1 \in B_\eta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < \eta\}$$

il existe une application mesurable telle que

$$|u(t) - u_0(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \epsilon] \quad (2.12)$$

$$x(\epsilon) = x_1,$$

Théorème 2.4 Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$ telle que U soit un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0)$, Soit

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \quad (2.13)$$

Si le rang $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0$, système est localement contrôlable en (x_0, u_0)

Voici une autre notion importante permettant d'étudier la contrôlabilité d'un système en se ramenant à un système que l'on sait contrôlable. Il s'agit de la définition suivante :

Définition 2.17 (Systèmes semblables) Les systèmes de contrôle linéaires :

$$\dot{X}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \text{ et } \dot{X}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

sont dits semblables s'il existe une matrice inversible P de taille n telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$ et $B_2 = PB_1$,

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytiques. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre. Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré.

Quelle méthode choisir ?

Les méthodes directes présentent les avantages suivants sur les méthodes indirectes :

- leur mise en oeuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes, en particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations.*
- elles sont plus robustes,*
- elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (contrairement aux méthodes indirectes.*
- il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état .*
- elles permettent de calculer les contrôles optimaux sous forme de feedback, i.e. en boucle fermée, ce qui est particulièrement adapté aux problèmes de stabilisation.*

Les avantages des méthodes indirectes sont :

- L'extrême précision numérique.*
- La bonne rapidité de convergence.*

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivants :

- Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.*

- Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.
- Rigidité de la méthode : la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, car d'une part cela requiert d'appliquer un principe du maximum tenant compte de ces contraintes (qui est beaucoup plus compliqué que le principe du maximum standard), d'autre part la présence de contrainte sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale, notamment la structure de ses commutations.
- Il faut être capable de deviner de bonnes conditions initiales pour l'état et le vecteur adjoint, pour espérer faire converger la méthode de tir. En effet le domaine de convergence de la méthode de Newton peut être assez petit en fonction du problème de contrôle optimal.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes

Méthodes directes	Méthodes indirectes
Mise en œuvre simple, sans connaissance apriori de la solution	Connaissance apriori de la structure de la trajectoire optimale
Facilite de la prise en compte des contraintes sur l'état	Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
Contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	Contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
Précision numérique basse ou moyenne	Très grande précision numérique
Efficace en basse ou moyenne	Efficaces en toute dimension
Gourmandise en mémoire	Calculs parallélisables
Peu sensible au choix de la condition initiale	Très sensibles au choix de la condition initiale

FIGURE 3.1 – La différence entre les méthodes directes et les méthodes indirectes

3.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimale en un problème d'optimisation non linéaire en dimension fini, parmi ces méthodes directes les méthodes d'Euler, de Rung-Kutta et on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support seulement cette méthode résolu les problèmes linéaires. Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte.

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation linéaire (programmation non linéaire¹).

Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée.

La mise en œuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations, néanmoins ces méthodes sont moins précises.

Les méthodes directes sont très faciles à appliquer, et relativement robustes à l'initialisation. On peut traiter un système avec un grand nombre de variables d'état. Leur précision est limitée par la précision de la discrétisation, donc le nombre de variables utilisées, peut s'avérer insuffisantes pour certains problèmes. Les méthodes directes fournissent une trajectoire et une commande en boucle ouverte (u en fonction du temps). Cela rend ces méthodes moins adaptées à certains cas particuliers, comme le problème de système d'équations non linéaires.

3.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir², un problème aux valeurs limites obtenu par application du Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP) qui donne une condition nécessaire d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, et qui numériquement se ramènent à une méthode de tir (exemple de tir simple). Le choix de ces méthodes s'explique par leurs avantages, la bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence) et leurs grande précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal mais lourdement dépendantes du point initial. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Le problème de contrôle optimal est analysé par la méthode indirecte ou utilise les conditions nécessaires du principe du maximum pour sélectionner les trajectoires optimales parmi une famille de trajectoire extrémales, solution d'un système Hamiltonien. Dans cette partie, nous nous intéressons sur le principe du maximum de Pontryaguine et la définition de la méthode de tir au contrôle optimal.

3.2.1 Principe du maximum de Pontryagin

On considère que la théorie du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryaguine qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

D'une manière générale, un système dynamique à contrôler est un processus comprenant des entrées et des sorties. Les entrées du système (les contrôles) sont choisies de manière à optimiser un critère de performance.

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions de propriétés essentielles.

3.3 Contrôle optimal des systèmes linéaires

3.3.1 Temps d'optimalité

Considérons le système

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.1)$$

où les contrôles u sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soit x_0 et x_1 deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0 . C'est-à-dire : qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 . Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1 on veut caractériser celles qui le font en temps minimal t^* (Voir Fig 3.6).

On a le théorème d'existence suivant. (Voir [8])

Théorème 3.1 Si le point x_1 est accessible depuis x_0 alors il existe une trajectoire temps minimal reliant x_0 à x_1 .

Définition 3.1 Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, T]$ si la trajectoire du système (2) du problème du contrôle (3.1) associée à u vérifie

$$x(t) = \partial \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in I = [0, T]$$

En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fautive car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.

Définition 3.2 Un contrôle $u^0(t), t \in [0, T]$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t), t \in [0, T]$.

3.3.1.1 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 3.2 Soit $T > 0$. Considérons le système de contrôle linéaire :

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Le contrôle est extrémal sur $[0, T]$ si, et seulement si il existe une solution non triviale $p(t)$ l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$, de l'équation

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$$

tell que :

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v. \quad (3.3)$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$. Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Remarque 3.1

— Si $\Omega = [-\alpha, \alpha]$ ou $\alpha > 0$, la condition signifie que :

$$u(t) = \text{sign} p(t)B(t).$$

La fonction $\phi(t) = p(t)\beta(t)$ appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation.

— Si u est extrémal sur $[0, T]$ alors $u(t)$ est aussi extrémal sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$.

Proposition 3.1 Considérons dans \mathbb{R}^n le système linéaire autonome avec contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & B \in \mathbb{R}^n \\ |u(t)| \leq 1 \end{cases}$$

où la paire de matrices (A, B) vérifie la condition de Kalman.

- Si toute valeur propre de A est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur \mathbb{R}_+ .
- Si toute valeur propre de A a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur \mathbb{R}_+ .

3.4 Contrôle optimal des systèmes non linéaires

3.4.1 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version faible

D'abord, nous allons présenter la version faible du principe du maximum de Pontryagin, elle concerne le contrôle optimal des systèmes différentiels sans contraintes sur le contrôle

3.4.1.1 Le problème de Lagrange

Ce problème simplifié est le suivant. On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

ou les contrôles $u(\cdot) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier les conditions $x(0) = x_0$, et $x(T) = x_1$. Le problème est de minimiser un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.5)$$

où T est fixé. On a le résultat suivant.

Théorème 3.3 (Principe du maximum faible, cas de Hamiltonien) Si le contrôle u associé au système de contrôle (3.4) est optimal pour le coût (3.5), alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^n appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), P^0, u(t)), \quad (3.6)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), P^0, u(t)) \quad (3.7)$$

Où $H(x, p, P^0, u) = P^0 L^0(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle$ où H est le Hamiltonien associé au système (3.4) et au coût (3.5).

Démonstration :

pour la démonstration de ce théorème voir [7], [8].

3.4.1.2 Le problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût :

$$C(t, u) = g(t, x(t)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.8)$$

ou le temps final t n'est pas fixe. Soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est de déterminer une trajectoire solution du problème de contrôle (3.4) où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles tel que $x(T) \in M_1$ et de plus $x(\cdot)$ minimise sur

$[0, T]$ le coût (3.8)

On a le résultat suivant.

Théorème 3.4 (Principe du Maximum faible, cas de Mayer-Lagrange) Si le contrôle u est optimal sur $[0, T]$ alors il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n / 0$, absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), P^0, u(t)), \quad (3.9)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), P^0, u(t)), \quad (3.10)$$

où

$$H(x, p, P^0, u) = P^0 L^0(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle \quad (3.11)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixe, on a la condition au temps final T

$$H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (3.12)$$

Démonstration :

voir[8]

3.4.2 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version forte

Nous présentons ici, la version forte du principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle. Il s'agit d'un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal.

Théorème 3.5 (Énoncé général du principe du maximum de Pontryagin) On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0), \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et les contrôles u sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en

temps $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs, le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$ est défini par :

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(s, x(s), u(s)) ds$$

où $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire associée au contrôle $u(\cdot)$.

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $P(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelée vecteur adjoint et un réel $P^0 \leq 0$, tel que le couple $(P(\cdot), P^0)$ est non trivial et tel que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), P^0, u(t)), \quad (3.13)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), P^0, u(t)) \quad (3.14)$$

Où $H(x, p, P^0, u) = P^0 f^0(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x, p, P^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), P^0, u). \quad (3.15)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{u \in U} H = -P^0 \frac{\partial H}{\partial x}(T, x(T)) \quad (3.16)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(T) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad (3.17)$$

$$(p(T) - P^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))) \perp T_x(T)M_1 \quad (3.18)$$

Remarque 3.2 Si f et l ne dépendent pas du temps t c'est-à-dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [0, T], \quad \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), P^0, u) = cst$$

Remarque 3.3 La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La condition $p^0 \geq 0$ conduira au principe du minimum.

Remarque 3.4 Si le contrôle u est continu au temps T , la condition (3.16) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))$$

Définition 3.3 Les conditions (3.17) et (3.18) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Remarque 3.5 Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\}$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (3.8) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial H}{\partial x}(T, x(T))$$

Remarque 3.6 Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, i.e. lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (3.15) devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Dans ce cas, on retrouve le principe du maximum faible.

3.4.3 Principe du maximum de Pontryagin : Cas temps final $T = t_f$ est inconnu (libre)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{t_f > 0} J(t_f, x, u) = \min_{t_f > 0} g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f]. \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \in U = [0, m]. \end{array} \right.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.6 (Principe du Maximum de Pontryagin) Soit $(\bar{t}_f, \bar{x}, \bar{u})$ solution du problème (3.20) alors il existe une application $\bar{p} : t \rightarrow \bar{p}(t)$ tel que le système (PMP) suivant soit satisfait :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \nabla_p H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)), \quad \bar{x}_0 = x_0,$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\nabla_x H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)), \quad \bar{p}(\bar{t}_f) = -\nabla_x g(\bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f))$$

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)) + g(\bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f))$$

Où

(3.21) : désigne l'équation d'état.

(3.22) : désigne l'équation adjointe.

(3.23) : désigne la condition de transversalité .

3.4.4 Principe du Maximum avec Contraintes sur l'état

Le principe du maximum tel qu'il vient d'être énoncé prend en compte des contraintes sur le contrôle, mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état.

Ce problème est en effet beaucoup plus difficile. Il existe plusieurs variantes du principe du maximum avec contraintes sur l'état. La théorie est cependant beaucoup plus compliquée. (Voir [4], [8]).

Une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. On rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction.

3.4.4.1 Méthode de pénalisation

Un moyen simple de manipuler des contraintes sur l'état est de résoudre un problème de contrôle optimal modifié, où comme dans la théorie linéaire quadratique, on pondère cette contrainte de manière à la forcer à être vérifiée.

Le principe de cette méthode

Supposons qu'on veuille imposer à l'état d'appartenir à un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$. Donnons-nous une fonction sur \mathbb{R}^n nulle sur C et strictement positive ailleurs. Alors, en ajoutant au coût $C(t, u)$ le scalaire $\lambda \int_0^t \phi(x(t))dt$, où $\lambda > 0$ est un poids que l'on peut choisir assez grand, on espère que la résolution de ce problème de contrôle optimal modifié va forcer la trajectoire à rester dans l'ensemble C .

En effet, si $x(t)$ sort de l'ensemble C et si λ est grand, alors le coût correspondant est grand, et probablement la trajectoire ne sera pas optimale.

Conclusion

le principe du maximum de pontryagin donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales, et aussi son application peut être en pratique assez complexe. Pour trouver les solutions qui satisfont ces conditions (cherche des

fonctions $p(t)$, on fait appel à la méthode de tir.

3.5 Méthode de tir

On distingue deux types de méthodes de tir : méthode de tir simple et méthode de tir multiple.

3.5.1 Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(t, u) = g(t, x(t), u(t)) + \int_0^T l(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \in M_0, \quad x(T) = x_1 \in M_1 \\ p(0) = p_0, \quad p(T) = p_1 \\ t \in [0, T] \end{array} \right.$$

Et supposons que le temps final T est fixé.

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z} = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$ et les conditions initiale, finale sous la forme $R(z(t_0), z(T)) = 0$. Finalement on obtient le problème aux valeurs limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = F(t, z(t)), \\ R(z(t_0), z(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Notons par $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{z} = F(t, z(t)), z(t_0) = z_0.$$

La fonction de tir est alors définie par :

$$G(T, z_0) = R(z_0, z(T, z_0)).$$

Le problème (2.7) aux valeurs limites est alors équivalent à la résolution du système suivant :

$$G(T, z_0) = 0.$$

Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut être résolu par la méthode de Newton.

Remarque 3.7 Si le temps final T est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant T comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dT}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Remarque 3.8 le PMP tel qu'il est énoncé prend en compte les contraintes sur le contrôle mais ne prend pas compte d'éventuelles contraintes sur l'état de la forme $h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k$, où les fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe (C^1) . Ce problème est en effet beaucoup difficile.

3.5.2 Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $Z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode.

De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum de pontryagin réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq T \end{cases}$$

Où $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, T]$ peuvent être des temps de commutation, dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état, ce peut être des temps de jonction avec un arc frontière, ou bien des temps de contact avec la frontière. On a de plus des conditions de continuité sur l'état et le vecteur adjoint aux points de commutation.

Remarque 3.9 A priori le temps final T est inconnu. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé, on le détermine lorsque c'est possible

par une analyse géométrique du problème.

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en N sous intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit $t_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < t_f$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point γ_j la fonction z est continue, nous pouvons considérer γ_j comme un point de commutation fixe, en lequel nous avons

$$\begin{cases} z(\gamma_j^+) = z(\gamma_j^-) \\ \gamma_j = \gamma_j^* \end{cases}$$

On définit maintenant les nœuds

$$\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}.$$

Finalement, nous sommes conduits au problème aux valeurs limites suivant :

$$\bullet \quad \dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\bullet \quad \forall j \in \{2, \dots, m_1\} r_j(\Gamma(j), z(\Gamma_j^-), z(\Gamma_j^+)) = 0,$$

$$\bullet \quad r_m(\Gamma_m, z(\Gamma_m)), (\Gamma(m)) = 0,$$

Où $\Gamma_1 = t_0$ est fixé, $\Gamma_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Application de la méthode de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$, où $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe $(C)^1$. L'idée de base est la suivante : si z_k est proche d'un zéro z de G alors

$$0 = G(z) = dG(z_k).(z - z_k) + o(z - z_k).$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k),$$

Un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ étant choisi, et on espère que z_k converge vers z .

Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation

$$G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0,$$

où d_k est appelée direction de descente, et on pose $z_{k+1} = z_k - d_k$. Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode de Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, etc.

Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro (d'une solution). Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode de , il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z . Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée.

Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossière de cette trajectoire optimale. Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus au moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

3.5.3 Résolution d'un problème aux deux bouts

Cas général

Considérons le problème général de contrôle optimal à l'instant fixés suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} (f^0(t, x(t), u(t)))dt \quad (\text{Objectif}) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (\text{Dynamique}) \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{Contrôles admissible}) \\ \phi_0(t_0, x(t_0)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0} \quad (\text{Conditions initiales}) \\ \phi_f(t_f, x(t_f)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1} \quad (\text{Conditions finales}) \end{array} \right.$$

3.5.4 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire d'optimalité (PMP) nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec $n_0 + n_1$ paramètres (μ_0 et μ_1) et $2n + n_0 + n_1$ conditions initiales et terminales suivant :

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\int_x^t ((t, x(t), u(t))p(t)) - l_x(t, x(t), u(t)), \\ u(t) = h(p(t)), \\ h_0(x(t_0)) = 0, \\ h_1(x(t_f)) = 0, \\ p(t_0) = -\frac{d\phi}{dx_0}(x(t_0), x(t_f), \mu_0, \mu_1), \\ p(t_f) = \frac{d\phi}{dx_f}(x(t_0), x(t_f), \mu_0, \mu_1), \end{array} \right.$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien, et la fonction ϕ telle que :

$$\phi : (t_0, x_0, t_f, x_f, \mu_0, \mu_1) \mapsto g(t_0, x_0, t_f, x_f) + (\phi_0(t_0, x_0)|\mu_0) + (\phi_1(t_f, x_f)|\mu_1)$$

En posant $y(t)$ le couple état, état adjoint ($y(t) = (x(t), p(t))$) et ϕ la dynamique du couple état-état adjoint donnée par le système Hamiltonien et en éliminant les paramètres μ_0 et μ_1 , nous sommes conduits à un problème aux deux bouts TPBVP³ suivant :

$$(TPBVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \phi(t) = \phi(t, y(t)) \quad pp[t_0, t_f] \\ c_0(t_0, y(t_0)) = 0 \quad \text{Conditions aux limites en } t_0 \\ c_f(t_f, y(t_f)) = 0 \quad \text{Conditions aux limites en } t_f \end{array} \right.$$

Remarque 3.10 ces conditions aux limites c_0 et c_f correspondent aux conditions de transversalité mentionnées ci-dessus, qui contiennent les conditions initiales et finales de (p), en plus des conditions sur l'état adjoint p.

3.5.4.1 Problème à valeur initiale et méthode de tir

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts. Posons $y(\cdot; z)$ la solution du système à valeur initiale IVP⁴ suivant :

$$IVP = \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \phi(t, y(t)) \quad pp \text{ sur } [t_0, t_f] \\ y(t_0) = z \quad \text{Valeur Initiale.} \end{array} \right.$$

On introduit maintenant une application G appelée fonction de tir, qui à la valeur initiale z associe la valeur des conditions aux limites en t_f pour la solution correspondante de (IVP), définie par :

$$G : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ z \longrightarrow G(z) = \begin{pmatrix} R_0(z) \\ R_f(y(t_f; z)) \end{pmatrix}$$

Trouver un zéro de la fonction de tir G est alors équivalent à la résolution de problème

(TPBVP), et donne ainsi une solution de (p).

Remarque 3.11 L'algorithme de résolution numérique de problème TPBVP sera complètement défini si on se donne :

- L'algorithme de résolution de $G(z) = 0$.
- L'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initiale pour calculer la fonction de tir G .

Exemple 3.1 On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^2 (u(t))^2 \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(2) = 0.5, \quad x_2(2) = 0 \end{array} \right.$$

Application du Principe du Maximum

Le Hamiltonien du système est :

$$H = p^0(u^2(t)) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t).$$

Le Principe du Maximum de Pontriaguine, nous conduit à un système différentiel à deux équations et à une condition initiale et une condition terminale, en d'autre terme à un problème aux deux bouts TPBV P suivant :

$$(TPBVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) + u(t) \\ \dot{p}(t) = 0 \\ u(t) = h(p(t)) \\ x(0) = x_0 = 0 \\ x(2) = x_f = 0.5, \end{array} \right.$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par minimisation de l'Hamiltonien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min H(t, x(t), u(t), p(t)) = \min(u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)) \\ |u| \leq 1. \end{array} \right.$$

Nous obtenons immédiatement ici

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = -\frac{p_2(t)}{2} \quad \text{si } |p_2(t)| \leq 2 \\ u(t) = -\text{sing}(p(t)) \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Détermination de la fonction de tir :

Posons $y(t) = (x(t), p(t))$. Résoudre le problème (TPBVP) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $G(z) = 0$ où la fonction G_0 , qui sera appelée la fonction de tir, associée à notre problème est définie par :

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longrightarrow G(z) = y(2; 0, z) - x(2)$$

avec $y(., 0, z)$ est la solution du système à valeur initial suivant :

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = u(t) \\ \dot{y}_3(t) = 0 \\ \dot{y}_4(t) = -y_3(t) \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = z_1 \in \mathbb{R}, y_4(0) = z_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Soit $y(t, 0, 0, z_1, z_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(0, 0, z_1, z_2)$.

Pour $t_f = 2$, on doit avoir :

$$y(2, 0, 0, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} y_1(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_2(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_3(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_4(2, 0, 0, z_1, z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ qlq \\ qlq \end{pmatrix}$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$G(t_f, y) = \begin{pmatrix} y_1(2, 0, 0, z_1, z_2) - 0.5 \\ y_2(2, 0, 0, z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

Notre but est de chercher les racines de la fonction de tir G .

Remarque 3.12 La fonction de tir G peut être non différentiable à la frontière de la région de contrôle et même aussi peut être non définie en certains points initiaux. En conséquence, des difficultés risquent de survenir lorsqu'on essaye de résoudre $G(z) = 0$ à l'aide d'un algorithme de Newton, en particulier si le point initial n'est pas dans la bonne région. De faite, résoudre directement $G(z) = 0$ depuis un point de départ quelconque n'est pas trivial. Donc la méthode tir simple peut diverger si le point de départ est situé dans une mauvaise" région (avec davantage d'itérations toute fois).

3.5.4.2 Mise en œuvre pratique de la méthode de tir

Le calcul de la loi optimal en utilisant le principe du maximum est fondé sur le principe suivant :

Etape 1 : En un point $z = (x(t), p(t))$ de la trajectoire, on calcule le contrôle avec la

condition de maximisation. Ce contrôle s'exprime comme un feedback dynamique (fonction en général multi-valuée) $u(t) = (x(t), p(t))$.

Etape 2 : Dans le cas où la condition de maximisation conduit à un contrôle unique (x, p) , on définit l'hamiltonien $H(x, p) = H(x, p, (x, p))$ qui définit par intégration les trajectoires optimales. On applique une méthode de tir, pour calculer le vecteur adjoint initial $p_0 = p(0) = z$, qui doit donc résoudre une équation de tir (non linéaire) $G(z) = 0$. Le problème est Bien posé car le nombre d'équations de tir coincide avec le nombre d'inconnues.

Etape 3 : Si l'on veut converger vers la solution, la résolution de l'équation par la méthode de Newton nécessite d'avoir une bonne approximation du vecteur $z = p(0)$ initial. Pratiquement, on effectue souvent le calcul en immergeant le problème dans une famille de problèmes à un paramètre λ , c'est la démarche homotopie (ou méthode de continuation), ou l'équation de tir s'écrit $G_\lambda(z) = 0$.

Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé à la théorie du contrôle optimal qui a commencé dans les années 50, avec la formalisation du principe du maximum de Pontryagin et le développement des méthodes directes et les méthodes indirectes de résolution de problèmes du contrôle optimal.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS DU PRINCIPE DE MAXIMUM DE PONTRYAGIN

Dans ce chapitre, nous présentons des exemples illustratifs d'applications du principe de maximum de Pontryagin au calcul du contrôle optimal de quelques systèmes dynamiques dans les cas linéaires et non linéaires.

4.1 Systèmes de contrôle linéaires

4.1.1 Cas de problèmes sans contraintes sur le contrôle

Exemple 4.1 On considère le problème linéaire sans contraintes sur le contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = -x(2) - y(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t) \\ X(0) = 1, y(0) = 2 \\ u \in U, \quad t \in [0, 2] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

L'Hamiltonien de ce système est :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p^0 * \frac{1}{2} u^2,$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x = -\frac{dH}{dx} = 0. \\ \dot{p}_y = -\frac{dH}{dy} = p_x \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_x(t) = cst = c_1, \\ p_y(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec c_1 et c_2 deux réels.

Reprenons l'expression de L Hamiltonien.

On pose $p^0 = -1$, $H = p_x y + p_y u - \frac{1}{2} u^2$. les Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} p_x(2) = 1 \\ p_y(2) = 1 \end{cases}$$

En remplaçant dans le système (1.15), on obtient

$$\begin{cases} p_x(2) = c_1 = 1, \\ p_y(2) = -2 + c_2 = 1_2 = 3. \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} p_x(2) = 1, \\ p_y(2) = -t + 3, \end{cases}$$

Condition de maximisation

$$\frac{dH}{du} = p_y(t) - u(t) = 0 \implies p_y(t) = u(t)$$

De là, le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -t + 3.$$

Calculons les trajectoires associées au contrôle u^*

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \implies y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3$$

$$\dot{y}(t) = y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3 \implies x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + c_3 t + c_4$$

les Conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

$$y(0) = c_3 = 2 \text{ et } x(0) = c_4 = 1.$$

Donc la solution du système (4.1)

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 3 \\ x^*(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1 \\ y^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 2. \end{cases}$$

Exemple 4.2 Problème de contrôle de production et consommation Supposons que nous disposons d'une usine pour laquelle nous pouvons contrôler la production.

Commençons par construire le modèle mathématique en posant

$$x(t) = \text{quantité à produite à l'instant } t.$$

Supposons que nous réinvestissons la fraction de notre production à chaque instant t , de même nous réinvestissons la fraction restante. Notons par

$$u(t) = \text{fraction de la production restante à l'instant } t.$$

$u(t)$ sera notre contrôle que nous allons en outre soumettre à la contrainte suivante :

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{à chaque instant } t.$$

La production de notre usine est régie par le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ku(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Où k est une constante qui représente le taux de croissance de notre réinvestissement. Prenons comme fonction de coût la fonction suivante :

$$P[u(\cdot)] = \int_0^T (1 - u(t))x(t) dt,$$

qui signifie que nous cherchons à maximiser la consommation totale de la quantité produite. Notre consommation à un instant donné t est $(1 - u(t))x(t)$. Nous allons maintenant chercher à caractériser un contrôle optimal de notre problème. Pour cela, nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin.

Nous avons $n=m=1$:

$$f(x(t), u(t)) = x(t)u(t), \quad g \equiv 0, \quad r(x, u) = (1 - u)x.$$

Calcul du Hamiltonien

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t)) &= f(x(t), u(t))p(t) + r(x(t), u(t)) \\ &= p(t)x(t)u(t) + (1 - u(t))x(t) \\ &= x(t) + u(t)x(t)(p(t) - 1). \end{aligned}$$

L'équation dynamique du système est

$$\dot{x}(t) = H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = u^*(t)x(t), \quad (4.4)$$

L'équation adjointe (ou le vecteur adjoint) :

$$\dot{p}(t) = -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 - u^*(t)(p(t) - 1). \quad (4.5)$$

Conditions de transversalité

La condition finale peut s'exprimer de la manière suivante :

$$p(T) = g_x(x(T)) = 0. \quad (4.6)$$

Enfin, le maximum de l'Hamiltonien :

$$H(x(t), p(t), u^*(t)) = \max_{0 \leq u \leq 1} \{x(t) + u(t)x(t)(p(t) - 1)\} \quad (4.7).$$

Utilisation du principe du maximum

A partir de (4.4), à tout instant t , la valeur $u^*(t)$ doit être choisie de manière à maximiser $u(p(t) - 1)$ pour $0 \leq u \leq 1$. Comme $x(t) > 0$, alors la solution extrémale est

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 1, \\ 0 & \text{si } p(t) \leq 1, \end{cases}$$

Ainsi, il existe à contraintes $p(\cdot)$. Pour déterminer le contrôle optimale $u^*(\cdot)$. Nous allons devoir résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -1 - u^*(t)(p(t) - 1), \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

Puisque $p(T) = 0$, on déduit, par continuité, que $p(t) \leq 1$ pour tout assez proche de T , $t \leq T$. Ainsi $u(t) = 0$ pour ces valeurs de $t \in V(t)$.

Donc $\dot{p}(t) = -1$, et par conséquent $p(t) = T - 1$ pour les instants t vérifiant $p(t) \leq 1$, Et ceci se produit pour $T - 1 \leq t \leq T$.

Mais pour les instants $t \leq T - 1$, avec t proche de $T - 1$, on a $p(t) = 1$, donc on aura :

$$\dot{p}(t) = -1 - (p(t) - 1) = -p(t).$$

Du moment que $p(T - 1) = 1$, on a $p(t) = e^{T-1-t} > 1$ pour tous les instants ($0 \leq t \leq T - 1$). En particulier, il n'existe pas des points de commutation au-dessus de cet intervalle. Par conséquent, on déduit que le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq t^* \\ 0 & t^* \leq T, \end{cases}$$

Pour un temps de commutation optimal $t^* = T - 1$.

Exemple 4.3 *Contrôle optimal d'une épidémie d'un modèle SIR*

Dans cette section, nous présenterons la stratégie d'intervention au moyen de la vaccination. Nous considérons ici une campagne de vaccination sur une période de temps fixe, $[0, T]$. Le vaccin conduit les individus susceptibles à la classe des rétablis. Nous introduisons donc le contrôle $u(t)$.

On considère le système (S_3) suivantes :

$$(S_3) = \begin{cases} \dot{S}(t) &= rS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ \dot{I}(t) &= rS(t)I(t) - I(t), \\ \dot{R}(t) &= I(t) + u(t)S(t). \\ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.8)$$

Où

- **Susceptible S** : cette classe regroupe les personnes susceptibles de contracter la maladie
- **Infecté I** : il s'agit des personnes étant capables de transmettre la maladie, que des symptômes soient visibles ou non
- **Rétabli R** : cette dernière classe représente les personnes ayant eu la maladie, n'étant plus capables ni de la transmettre ni de la contracter à nouveau.

Notre objectif est de connaître l'évolution de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ au cours du temps. Pour cela nous cherchons dans un premier temps à déterminer les règles qui régissent les variations de ces variables. Et $u(t)$ est une fonction mesurable telle que : $0 \leq u(t) \leq a$, pour $t \in [0, T]$. a est le taux maximal de vaccination.

Le but ici est de minimiser le nombre total d'individus infectés et le coût associé à la vaccination pendant la campagne de vaccination. Par conséquent, le problème de contrôle optimal est de minimiser, en un temps T fixé, le coût :

$$J(u) = \alpha I(T) + \int_0^T u^2(t) dt$$

avec le système (S_3) et les données initiales non négatives $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$.

Le problème de contrôle optimal est donné comme suit

$$(S_3) = \begin{cases} J(t, u) &= (T) + \int_0^T u^2(t) dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{S}(t) &= rS(t)I(t) - u(t)S(t) \\ \dot{I}(t) &= rS(t)I(t) - I(t) \\ \dot{R}(t) &= I(t) + u(t)S(t) \\ S(0) = S_0, & I(0) = I_0, R(0) = R_0 \\ t \in [0, T], & 0 \leq u(t) \leq a \end{cases} \quad (4.9)$$

Où r est le taux d'infection et γ le taux de guérison.

$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ le nombre de personnes dans chaque classe à l'instant $t = 0$. Nous avons considéré un coût quadratique sur le contrôle, qui est la représentation non linéaire du coût de vaccination la plus simple et la plus large utilisée. Le paramètre α est un paramètre de poids décrivant l'importance comparative des deux termes dans la fonctionnelle. Par exemple, une valeur élevée de α signifie que c'est plus important de réduire le fardeau de la maladie que de réduire les coûts de vaccination.

Calcul du Hamiltonien

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} H(S, I, R, P_S, P_I, P_R, u, t) &= p^0 u^2 + P_S(rSIuS) + P_I(rSI\gamma I) + P_R(\gamma I + uS) \\ &= p^0 rSIP_S uSP_S + P_I rSI\gamma IP_I + P_R \gamma I + uSP_R, \end{aligned}$$

Où P_S, P_I, P_R , sont les vecteurs adjoints.

Ensuite en appliquant le principe du maximum de Pontryagin nous obtenons : Les equations adjointes :

$$\begin{cases} \dot{P}_S &= -\frac{\partial H}{\partial S} = rIP_S rIP_I + uP_S uP_R \\ \dot{P}_I &= -\frac{\partial H}{\partial I} = rSP_S - rsP_I + \gamma P_I - \gamma P_R \\ \dot{P}_R &= -\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \end{cases}$$

Les conditions de transversalité :

$$\begin{cases} P_S(T) &= p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial S} = 0 \\ P_I(T) &= p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial I} = p^0 \alpha \\ P_R(T) &= p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial R} = 0 \end{cases}$$

On maximise le Hamiltonien H :

$$\max_{0 \leq u \leq a} H = \max_{0 \leq u \leq a} p^0 u^2 + P_S(rSIuS) + P_I(rSI\gamma I) + P_R(\gamma I + uS)$$

Ce qui est équivalent à maximiser :

$$\phi(u) = p^0 u^2 + u(P_R - P_S)S$$

Condition nécessaire cherchons les racines de sa dérivée

$$\phi'(u) = 0 \iff 2p^0 u + P_R S P_S = 0 \iff u^* = \frac{(P_R - P_S)S}{-2p^0}$$

On pose $p^0 = -\frac{1}{2}$, on aura $u^* = (P_R - P_S)S$.

Conditions suffisante $\phi'' = 2p^0 = -1 < 0 \implies u^* = (P_R - P_S)S$ est un maximum.

En prenant en compte les limites sur u , la caractérisation du contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & (P_R(t) - P_s(t))S(t) < 0, \\ (P_R - P_s)S & 0 \leq (P_R(t) - P_s(t))S(t) \leq a, \\ a & (P_R(t) - P_s(t))S(t) > a, \end{cases} \quad (4.10)$$

qui, sous forme abrégée, peut être écrit sous la forme :

$$u^* = \text{Max}\{\min\{(P_R(t) - P_s(t))S(t), a\}, 0\}. \quad (4.11)$$

Exemple 4.4 Exemple numérique

Soit : $\dot{x} = u$ où $\dot{x} = \frac{d^2u}{dt^2}$ équation du mouvement d'un véhicule roulant sur une route sans frottement.

Les conditions initiales sont : $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ et les conditions finales sont :

$$x(t_f) = 0.5, \quad y(t_f) = 0.$$

On cherche la meilleure commande pour ramener la voiture de x_0 à x_f tout en minimisant notre fonctionnelle u^2 .

On fait un changement de variable :

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = u,$$

et on aura le problème de contrôle optimal formulé comme suit :

$$\text{s.c} \left\{ \begin{array}{l} \min J(u) = \min_u \int_0^2 u^2(t) dt \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \\ x(t_f) = 0.5, \quad y(t_f) = 0. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

4.1.2 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB :

On se ramène à un problème de discrétisation, la résolution de ce problème est effectué sous Matlab, on utilise la méthode d'Euler et de Runge-kutta d'ordre 4 respectivement.

1. fonction mydirect
2. global tf;
3. n=100; tf=2;
4. uinit=2*rand(n,1)-1;
5. xinit=umin;
6. lb=-ones(n,1); ub=ones(n,1);
7. options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set');

```

8. [res,Fval,exitflag]=fmincon(@fobj,xinit,[],[],[],[],lb,ub,@cond,options);
9. fprintf('contrôle');
10. format compact
11. res
12. fprintf('EXITFLAG=
13. x(1)=0; y(1)=0;
14. for i=1 :n-1;
15. % boucle d'Euler
16. x(i+1)=x(i)+(tf/n)*y(i);
17. y(i+1)=y(i)+(tf/n)*res(i);
18. end
19. subplot(221); plot(linspace(0,tf,n),x(1 :n),'b'); title('trajectoire de x');
20. subplot(222); plot(linspace(0,tf,n),y(1 :n),'b'); title('trajectoire de y');
21. subplot(223); plot(linspace (0,tf,n),res(1 :n),'r'); title('contrôle');
22. function[c,ceq]=cond(u)
23. global tf;
24. n=length(u);
25. xf=0;yf=0;
26. for i=1 :n-1 % boucle d'Euler
27. xf=xf+(tf/n)*yf;
28. yf=yf+(tf/n)*u(i);
29. end
30. c=0; % pas de contraintes in ' egalit ' es
31. ceq=[xf-0.5,yf]; % on impose la condition finale xf=0.5 et yf=0
32. % =====
33. function [val]=fobj(u)
34. global tf;
35. n=length(u);
36. val=0;
37. for i=1 :n;
38. % boucle d'Euler
39. val=val+(tf/n)*u(i)^2;

```

40. end

Les résultats sont donnés dans les figures (4.1) et les figures (4.2)

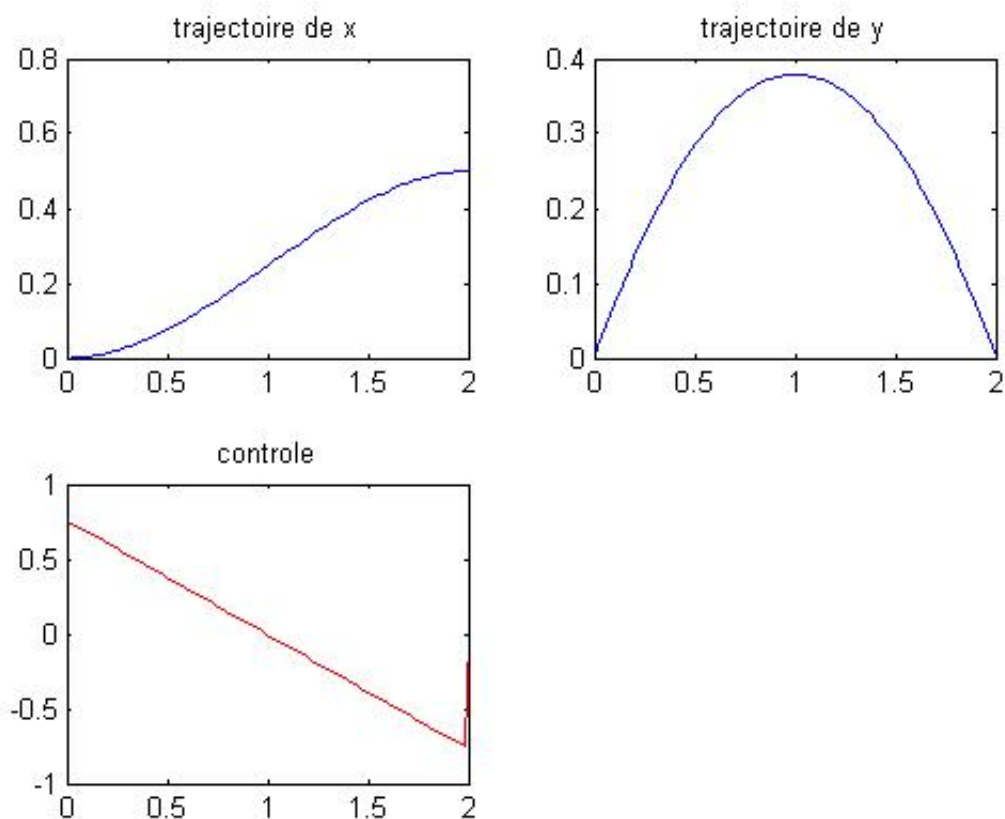


FIGURE 4.1 – Méthode d'Euler

1. *function* DirectRK4
2. *clear all; close all; clc;*
3. *global tf*
4. *n=100; tf=2;*
5. *uinit=2*rand(n,1)-1;*
6. *xinit=uinit;*
7. *Lb=-ones(n,1); ub=ones(n,1);*
8. *options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set');*
9. *[res,Fval,exitflag]=fmincon(@fobj,xinit,[],[],[],[],Lb,ub,@cond,options);*
10. *fprintf('contrôle ');*
11. *format compact*
12. *res'*

```

13. fprintf('EXITFLAG=
14. x(1)=0; y(1)=0;
15. for i=1 :n-1
16. k11=tf/n*y(i);
17. k21=tf/n*(y(i)+k11/2);
18. k31=tf/n*(y(i)+k21/2);
19. k41=tf/n*(y(i)+k31);
20. x(i+1)=x(i)+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
21. k12=tf/n*res(i);
22. k22=tf/n*(res(i)+k12/2);
23. k32=tf/n*(res(i)+k22/2);
24. k42=tf/n*(res(i)+k32);
25. y(i+1)=y(i)+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
26. end
27. subplot(221); plot(linspace(0,tf,n),x(1 :n),'b'); title('trajectoire de x');
28. subplot(222); plot(linspace(0,tf,n),y(1 :n),'b'); title('trajectoire de y');
29. subplot(223); plot(linspace(0,tf,n),res(1 :n),'b'); title('contrôle');
30. function[c,ceq]=cond(u)
31. global tf;
32. n=length(u);
33. xf=0; yf=0;
34. for i=1 :n-1
35. k11=tf/n*yf;
36. k21=tf/n*(yf+k11/2);
37. k31=tf/n*(yf+k21/2);
38. k41=tf/n*(yf+k31);
39. xf=xf+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
40. k12=tf/n*u(i);
41. k22=tf/n*(u(i)+k12/2);
42. k32=tf/n*(u(i)+k22/2);
43. k42=tf/n*(u(i)+k32);
44. yf=yf+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;

```


45. *end*

46. $c=0;$

47. $ceq=[xf-0.5,yf];$

48. *function val=fobj(u)*

49. *global tf;*

50. $n=length(u);$

51. $val=0;$

52. *for i=1 :n*

53. $k11=(tf/n)*u(i)^2);$

54. $k21=(tf/n)*(u(i)^2) + k11/2);$

55. $k31=(tf/n)*(u(i)^2) + k21/2);$

56. $k41=(tf/n)*(u(i)^2) + k31);$

57. $val=val+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;$

58. *end*

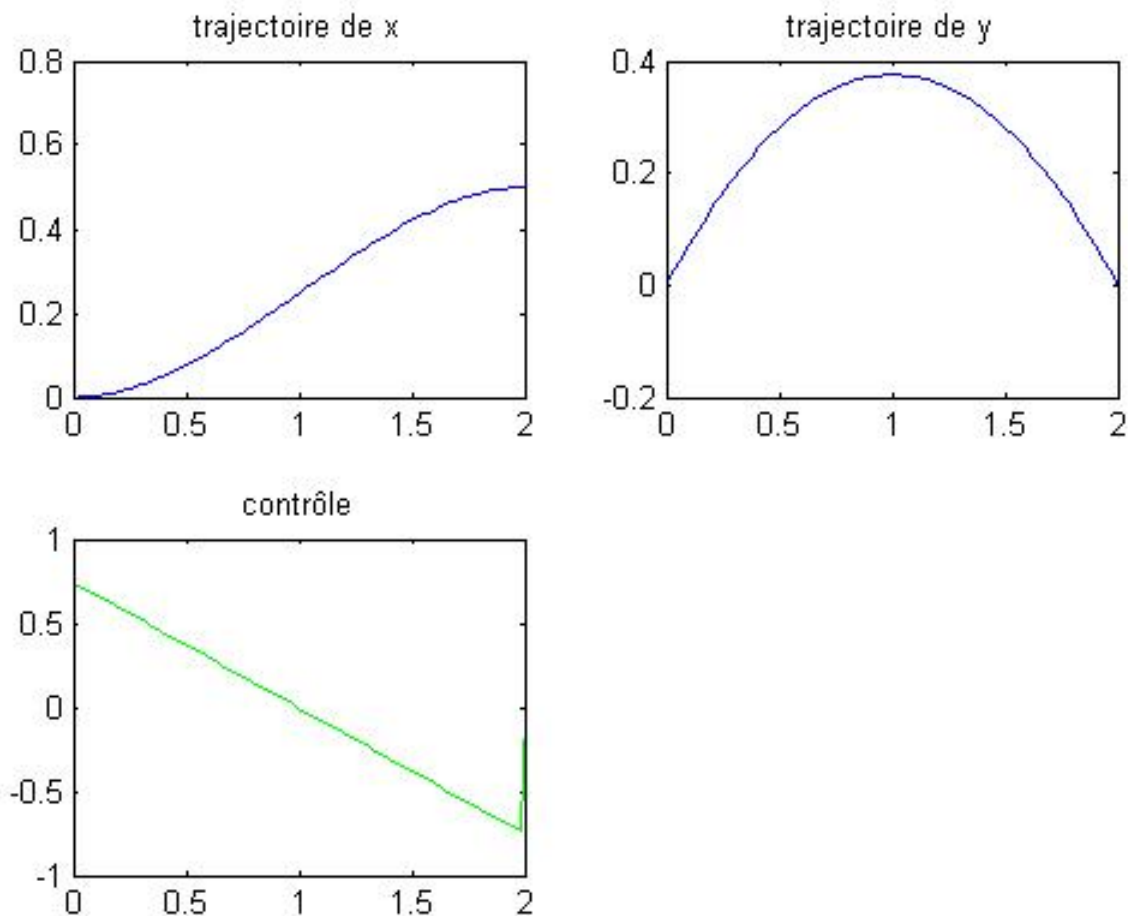


FIGURE 4.2 – Méthode de RK4.

4.1.3 Cas des problèmes avec contraintes sur le contrôle

Exemple 4.5 On considère le système de contrôle linéaire avec contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + u, \\ |u(t)| \leq 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

Le but est de joindre en temps minimal la droite $x = 0$ puis de rester sur cette droite.

On remarque que si une trajectoire reste dans $x = 0$ cela implique que

$$y(t) = -u(t) \text{ et donc } |y| \leq 1.$$

Réciproquement de tout point $(0, y)$ avec $|y| \leq 1$, part une trajectoire restant dans le lieu

$$x = 0, |y| \leq 1. \text{ Il suffit de choisir } u(t) = -ye^{-2t}$$

Par conséquent la cible est

$$M_1 = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}.$$

C'est un compact

Le système (4.13) peut s'écrire sous la forme matricielle $\dot{X} = AX + Bu$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Étude de la contrôlabilité du système (4.13)

En calculant les trajectoires optimales joignant M_1 à tous point final. Le système extrémal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - u, \\ \dot{y} = y - u, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = p_x - p_y, \end{cases}$$

Où $u(t) = -\text{signe}(p_x(t) + p_y(t))$

Par intégration, on obtient

$$\begin{cases} p_x(t) = \text{cste} = p_x \\ p_y(t) = p_x + (p_y(0) - p_x)e^{-t}. \end{cases}$$

En particulier $p_x + p_y$ est strictement monotone et donc le contrôle u admet au plus une commutation. Par ailleurs la condition de transversalité impose que si $x(0) = 0, |y| \leq 1$.

Alors

$$p_x(0) = \pm 1 \quad \text{et} \quad p_y(0) = 0$$

Mais $p_x(t) + p_y(t) = \pm(1 - e^{-t})$ et u ne commute pas sur \mathbb{R}_+ .

Calculons maintenant les extrémales partant du point $(0,1)$.

La condition de transversalité est :

$$p_x(0) = \cos \alpha, \quad p_y(0) = -\sin \alpha, \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < \Pi.$$

Par conséquent

$$u(t) = -\text{signe}(2 \cos \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)e^t)$$

et l'on a une commutation si et seulement s'il existe $t \geq 0$ tel que

$$e^{-t} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

- Si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} > 1$ donc l'équation ci-dessus n'a pas de solution.

Donc $u(t) = +1$ sur \mathbb{R}_+

- Si $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, l'équation a une solution $t(\alpha) > 0$ et l'on voit que $t(\alpha) > 0$ est strictement croissante de $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ dans $[0, +\infty[$. Alors, le contrôle vaut 1 sur $[0, t(\alpha)[$ et +1 ensuite.
- Si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R}_+ et on trouve

$$u(t) = -1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+.$$

4.2 Systèmes de contrôle non - linéaires

Exemple 4.6 : ruche d'abeilles

On considère un modèle relativement simple de dynamique de populations. Pour fixer les idées, nous allons le décliner dans le contexte de la modélisation d'une ruche d'abeilles. On suppose que dans la ruche, la population d'abeilles $\alpha(t)$ et celle des reines $r(t)$ évolue selon la dynamique

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(u(t))a(t) \\ \gamma u(t)a(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.14)$$

où le contrôle $u \in L^\infty([0, T], U)$ avec $U = [0, 1]$ représente l'effort des abeilles pour fournir des reines et où nous avons introduit la fonction

$$\psi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(v) = \alpha(1 - v) - \beta. \quad (4.15)$$

Les paramètres du modèle α, β, γ sont des réels strictement positifs et on suppose que $\alpha < \beta$. On suppose également que $a(0) > 0$, comme $\dot{a}(t) = \psi(u(t))a(t)$, on a $a(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. On notera également que :

- si u est constant égal à 1, on a $\dot{a}(t) = -a(t) < 0$: la population d'abeilles décroît (exponentiellement).
- si u est constant égal à 0, on a $\dot{a}(t) = (\alpha - \beta)a(t) < 0$: la population d'abeilles décroît (exponentiellement).

Notre objectif ici est de chercher un contrôle optimal afin de maximiser la population de reines au temps T . En introduisant la fonctionnelle $J : U = L^1([0, T], U) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$J(u) = -r(T),$$

le problème de contrôle optimal est donc le suivant :

$$\text{Chercher } \bar{u} \in U \text{ tel que } J(\bar{u}) = \inf_{u \in U} J(u).$$

On commence par chercher une condition nécessaire d'optimalité en appliquant le PMP. L'état de la ruche est décrit par le vecteur $x = (a, r)^t \in \mathbb{R}^2$. Le problème de contrôle optimal

(5.22) rentre dans le cadre d'application du PMP en posant

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \psi(u)a \\ \gamma ua \end{pmatrix}, \quad g(x, u) = 0, \quad h(x) = -r.$$

Soit $\bar{u} \in U$ un contrôle optimal, de trajectoire associée $(\bar{a}, \bar{r})^t$.

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} \psi(u) & 0 \\ \gamma u & 0 \end{pmatrix}$$

et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = 0$, l'état adjoint $\bar{p} = (\bar{p}_a, \bar{p}_r)^t : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tel que

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = -\psi(\bar{u}(t))\bar{p}_a(t) - \gamma\bar{u}(t)\bar{p}_r(t), \\ \frac{d\bar{p}_r}{dt}(t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.16)$$

et la condition finale sur l'état adjoint est

$$\bar{p}(T) = (\bar{p}_a(T), \bar{p}_r(T)) = (0, 1)^t.$$

On a donc

$$\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = -\psi(\bar{u}(t))\bar{p}_a(t) + \gamma\bar{u}(t), \quad \bar{p}_r(t) = -1, \quad \forall t \in [0, T]$$

Par ailleurs, le Hamiltonien est autonome et s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_a\psi(u)a + \gamma p_r u a.$$

La condition de minimisation s'écrit, en utilisant le fait que $\bar{a}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, T]$,

$$\bar{u}(t) \in \arg_{v \in [0, 1]} \min \psi(t)v, \quad (4.17)$$

où la **fonction de commutation** est donnée par

$$\psi(t) = -\bar{p}_a(t)\alpha - \gamma.$$

La solution du problème de minimisation (4.17) est élémentaire, on obtient pour tout $t \in [0, T]$,

- si $\psi(t) > 0$, $\bar{u}(t) = 0$,
- si $\psi(t) = 0$, $\bar{u}(t) \in [0, 1]$
- si $\psi(t) < 0$, $\bar{u}(t) = 1$.

Le contrôle optimal est donc nécessairement bang-bang, sauf si $\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur un sousintervalle de temps de mesure strictement positive. Reprenons alors l'équation de l'état adjoint :

- si $\bar{p}_a(t) > -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\bar{u}(t) = 1$, et on a $\frac{d}{dt}\bar{p}_a(t) = \beta\bar{p}_a(t) + \gamma \geq 0$ i.e. $\bar{p}_a(t)$ est croissante,
- si $\bar{p}_a(t) < -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\bar{u}(t) = 0$, et on a $\frac{d}{dt}\bar{p}_a(t) = (\beta - \alpha)\bar{p}_a(t) \geq 0$ i.e. $\bar{p}_a(t)$ est encore croissante,
- enfin, il ne peut exister d'intervalle de mesure strictement positive où \bar{p}_a est constant et égal à $-\frac{\gamma}{\alpha}$, en effet, dans ces conditions, on aurait $\psi(u(t))\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma u(t) = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$, donc \bar{p}_a ne pourrait pas être constant.

Nous pouvons maintenant terminer la résolution du problème. Au temps final, $\psi(T) = -\gamma < 0$, ce qui montre que $\bar{u}(T) = 1$, i.e., au temps final, le contrôle optimal consiste à fournir des reines (ce qui n'est pas très surprenant puisque l'objectif est d'en maximiser le nombre). Le point qui reste à préciser est s'il est optimal d'en fournir depuis l'instant initial ou s'il convient plutôt de laisser d'abord croître la population d'abeilles avant de commencer à en fournir. Comme la fonction de commutation est continue, il existe un temps $t_* < T$ tel que $\bar{u}(t) = 1$ sur $]t_*, T]$. Sur cet intervalle, on a $\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = \beta\bar{p}_a(t) + \gamma$ et par ailleurs la condition finale sur \bar{p}_a étant $\bar{p}_a(T) = 0$, on en déduit que

$$\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{\beta(t-T)}), \quad \forall t \in [t_*, T].$$

La fonction \bar{p}_a est donnée par l'expression ci-dessus tant que le contrôle optimal u reste égal à 1. Pour que la valeur du contrôle change, la fonction de commutation (qui est continue) doit s'annuler, i.e., $\bar{p}_a(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha}$. En utilisant l'expression de \bar{p}_a , on obtient

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + T.$$

On notera que $t_* < T$. Deux cas peuvent alors se produire en fonction des paramètres du problème.

- **Cas 1.** $t_* < 0$ (ce qui correspond au cas d'un horizon temporel T petit), le contrôle optimal est alors $\bar{u} \equiv 1$ sur $[0, T]$, ce qui signifie que l'on fournit des reines en continu depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$,
- **Cas 2.** $t_* > 0$ (ce qui correspond au cas d'un horizon temporel T relativement grand), le contrôle optimal est $\bar{u} \equiv 0$ sur $[0, t_*)$ et $\bar{u} \equiv 1$. En effet, le contrôle u vérifie bien le PMP car $\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = (\beta - \alpha)\bar{p}_a(t)$, $\bar{p}_a(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ car $\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}e^{(\beta - \alpha)(t - t_*)} < -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur $[0, t_*)$ si bien que la fonction de commutation est positive, ce qui correspond bien à $\bar{u}(t) = 0$. L'ensemble $\{t \in [0, T] \mid \psi(t) = 0\}$ est réduit au singleton $\{t_*\}$ et est donc de mesure nulle.

Une illustration de la trajectoire, de l'état adjoint et du contrôle optimal est présentée à la figure dans le cas où il y a une commutation.

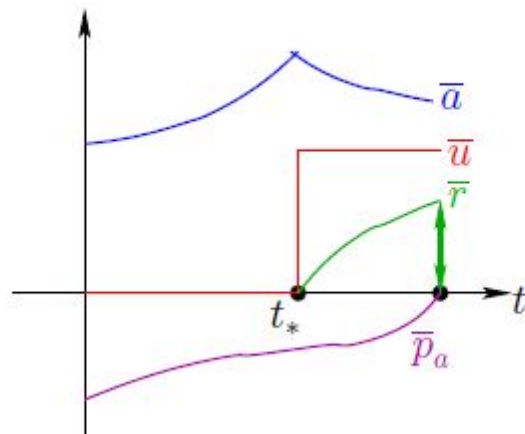


FIGURE 4.3 – Trajectoire, état adjoint et contrôle optimal pour le modèle de ruche.

L'objectif de ce travail est de présenter des méthodes numériques en contrôle optimal.

D'abord, nous sommes intéressés à la théorie de contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Le critère de Kalman qui joue un rôle fondamental dans cette théorie, a été présenté avec des exemples simples sur la contrôlabilité, La notion de contrôlabilité locale a été aussi donnée.

Ensuite, nous avons les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler et de Rung-Kutta.

Après, On présenter les méthodes indirectes consistent à applique le Principe du maximum de Pontryagin PMP (la version forte dans le cas avec contraintes sur le contrôle et la version faible dans le cas sans contraintes), qui permet d'exprimer la commande comme une fonction de l'état et du vecteur adjoint, $u(t) = (x(t), p(t))$. On obtient donc un problème aux valeurs limites, car on a une condition initiale en x et une condition finale en p , qu'on peut résoudre numériquement par une méthode de tir.

Et à la fin nous avons présenté les deux approches de résolution d'un problème de contrôle optimal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RJ Di Perna and PL Lions. *Equations différentielles ordinaires et équations de transport avec des coefficients irréguliers*. Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz", pages 1–9, 1988.
- [2] Maitine Bergounioux. *Optimisation dans \mathbb{R}^n et introduction au contrôle optimal des systèmes linéaires-cours et exercices*, 2001.
- [3] VG Boltyanskii, RV Gamkrelidze, and LS Pontryagin. *Towards a theory of optimal processes, reports acad. Sci. USSR*, 110(1) :710, 1956.
- [4] Revaz V Gamkrelidze. *Discovery of the maximum principle*. Journal of dynamical and control systems, 5(4) :437–451, 1999.
- [5] Rudolph Emil Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. 1960.
- [6] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications, volume 36*. Vuibert Paris, 2005.
- [7] Clément Pernet. *Algèbre linéaire exacte efficace : le calcul du polynôme caractéristique*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2006.
- [8] Tony Crilly. *Cayley's anticipation of a generalised cayley-hamilton theorem*. Historia Mathematica, 5(2) :211–219, 1978.
- [9] Alfio Maria Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique : programmes en MATLAB*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [10] Adam E Parker. *Runge-kutta 4 (and other numerical methods for odes)*. 2021.
- [11] K. Nachi. *Contrôle optimal des EDO linéaires*. université Oran 1, 2020.