

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB BLIDA 1



INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES

Département Construction Aéronautique

Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master en **Aéronautique**

Spécialité : Structures Aéronautiques

Thème

**Prise en compte de l'équation de Fick dans l'analyse
du comportement Hygrothermomécanique des plaques
composites épaisses**

Présenté par :

HAFIANE Ahmed Anouar

BENZIADA Abderraouf

Dirigé par :

Encadreur : B. BOUKERT

Co-encadreur: M. KHODJET KESBA

IAES

2021 - 2022

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions ALLAH tout-puissant pour nous avoir donné la santé, la volonté, le courage pour accomplir ce présent travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements et reconnaissances à notre encadreur de mémoire M. BOUKERT Billel qui nous a soutenu et merveilleusement encadré.

Nous remercions aussi notre co-encadreur M. KHODJET KESBA Mohamed. Que tout ce qui, de près ou de loin, ont contribué à notre formation, trouvent ici notre gratitude et nos remerciements.

Merci aux parents et toute la famille et aux amis qui nous ont toujours soutenu, Merci à toutes et à tous.

Dédicaces

*Ce projet fin d'étude est dédié à mes chers parents, ma mère et mon père
source de tendresse et noblesse et d'affection*

*Ils m'ont toujours poussé et motivé dans mes études sans eux, je n'aurais
Certainement pas fait d'études longues*

*Ce projet fin d'étude représente donc l'aboutissement du soutien et des
Encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma scolarité,
qu'ils en soient remerciés par cette trop modeste dédicace, Puisse Dieu, le tout
puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.*

*C'est un moment de plaisir de dédier cet œuvre, à mes frères et ma sœur,
en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour le dévouement et les
sacrifices dont vous avez fait toujours preuve à mon égard et à tous les membres
de nos familles.*

*A mes amis et mes camarades qui m'ont vraiment aidé à tout qui
compulse ce modeste travail.*

*Et finalement à mon binôme RAOUF et à toute sa famille, a toutes les
personnes que j'aime et qui m'aiment*

A moi-même

Ancuar

Dédicaces

Je dédie cet humble travail avec grand amour, sincérité et fierté

À ma très chère mère, « Tu m'as donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir. Tout ce que je peux t'offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que je te porte.

En Témoignage, je t'offre ce modeste travail pour te remercier pour tes sacrifices et pour l'affection dont tu m'as toujours entourée ».

À mon cher père, « L'épaule solide, l'œil attentif compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect ».

À mes sœurs.

Merci d'être toujours là dans les moments de joie, de tristesse et de folie. Que dieu vous protègent et vous gardent pour moi.

À mes tantes, mes oncles, et tous les membres de ma famille pour leurs sacrifices, leurs encouragements et pour leur soutien matériel et moral tout au long de mon projet.

À mes ami(e)s sans exception qui comptent vraiment pour moi qui n'ont cessé de m'aider et de me conseiller pour accomplir mon travail.

À mon cher binôme Anouar, qui a partagé avec moi tout ce travail, trois années d'études, une complicité unique, la galère, folie et réussites. Ainsi que toute sa famille.

Et enfin, à tous ceux qui m'ont aidé de prêt ou de loin.

A moi-même

Raouf

Liste des notations et des symboles

a :	Longueur de la plaque.
b :	Largeur de la plaque.
h :	Épaisseur du stratifié.
V_f :	Fraction volumique de fibre.
V_m :	Fraction volumique de matrice.
E_L :	Module d'élasticité longitudinale de fibre.
E_T :	Module d'élasticité transversale de fibre.
G_{ij} :	Module de cisaillement.
ν_{LT} :	Coefficient de poisson.
α :	Coefficient de dilation thermique.
β :	Coefficient de dilation hygroscopique.
$\sigma(M)$:	Tenseur des contraintes.
$\varepsilon(M)$:	Tenseur des déformations.
u_0 :	Déplacement du point M dans le plan moyen suivant l'axe de x.
v_0 :	Déplacement du point M dans le plan moyen suivant l'axe de y.
w_0 :	Déplacement du point M dans le plan moyen suivant l'axe de z.
$\varepsilon(M)$:	Tenseur des déformations.
$\sigma(M)$:	Tenseur des contraintes.
M_x, M_y :	Moment de flexion.
M_{xy} :	Moment de torsion.
N_x, N_y, N_{xy} :	Résultantes en membrane par unité de longueur

$[C_{ij}]$:	Coefficients de la matrice de rigidité.
$[A_{ij}]$:	Matrice des rigidités en membrane.
$[B_{ij}]$:	Terme de couplage en membrane/flexion-torsion.
$[D_{ij}]$:	Matrice des rigidités en membrane flexion-torsion.
$[E_{ij}]$:	Matrice de couplage membrane-flexion torsion et gauchissement.
$[H_{ij}]$:	Matrice de couplage membrane-flexion torsion et gauchissement.
$[F]$:	Matrice de rigidité en gauchissement.
θ :	L'angle de l'orientation des fibres.
$[C]$:	Matrice de rigidité.
$[S]$:	Matrice de souplesse.
T :	Température.
ΔT :	Gradient de température.
ΔC :	Variation de l'humidité.
$C(z,t)$:	Concentration dans le temps suivant z .
C_0 :	Concentration initiale.
C_s :	Concentration de saturation.
D :	Diffusivité.
A, B, C, b :	Propriétés hygroscopiques.
CLPT	: Classical laminated plate theory.
FSDT	: The first order shear deformation theory.
HSDT	: The higher order deformation theory.

Résumé

Actuellement, les stratifiés composites sont aujourd'hui largement utilisés notamment dans l'aéronautique et d'autres secteurs. Au cours d'un vol, les structures externes sont exposées à des variations de température et d'humidité qui sont cycliques à une bonne approximation. Ces dernières génèrent des chargements et des contraintes dans les matériaux composites. Ce travail a pour objet d'étudier le comportement des stratifiés composites épais en utilisant la théorie d'ordre élevé de REDDY, la distribution de l'humidité selon l'épaisseur de la plaque est déterminée par la résolution de l'équation de Fick

Un programme numérique a été développé pour simuler le comportement des stratifiés composites en tenant compte des paramètres environnementaux.

Mots clés : Matériaux composites, Théorie d'ordre élevé, l'Humidité, Stratifiés composites.

ملخص

تستخدم حاليا المواد المركبة الصفائحية على نطاق واسع خاصة في صناعة الطائرات والقطاعات الاخرى. اثناء الطيران، تتعرض الهياكل الخارجية للتغيرات في درجة الحرارة والرطوبة التي تكون دورية بتقريب جيد. هذا الاخير يولد الاجهادات والضغوط في الصفائح المركبة. يهدف هذا العمل إلى دراسة سلوك الصفائح المركبة السمكية باستخدام نظرية النظام العالي ل ريدي، ويتم تحديد توزيع الرطوبة حسب سمك الصفيحة من خلال حل معادلة للعالم فيك
تم تطوير برنامج عددي لمحاكاة سلوك الصفائح المركبة مع مراعاة المعايير البيئية.
الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، نظرية الرتبة العالية، الرطوبة، الشرائح المركبة.

Abstract

Currently, composite laminates are widely used in aeronautics and other sectors. During a flight, external structures are exposed to temperature and humidity variations that are cyclic. These generate loads and stresses in the composite materials. The purpose of this work is to study the behavior of thick composite laminates using the higher-order theory of REDDY and the distribution of moisture according to the thickness of the plate is determined by solving the Fick equation.

A numerical program has been developed to simulate the behavior of composite laminates taking into account environmental parameters.

Keywords: Composite materials, Higher order theory, Moisture, Composite laminates.

Sommaire

Résumé.....	7
Introduction générale	15
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	
I.1. Introduction.....	18
I.2. Définition d'un matériau composite	18
I.3. Différents domaines d'applications	19
I.4. Types de composite	19
I.4.1. Grande diffusion	19
I.4.2. Haute performance.....	20
I.5. Constituant d'un matériau composite	20
I.5.1. Le renfort	20
I.5.1.1. Fibres de verre	21
I.5.1.2. Fibres de carbone.....	22
I.5.1.3. Fibres d'aramide	23
I.5.1.4. Fibres céramiques	24
I.5.2. La matrice	25
I.5.3. Les charges	26
I.5.4. Les additifs.....	26
I.5.4.1. Les GelCoats	26
I.6. Classifications des matériaux composites	27
I.6.1. Selon la forme des composants.....	27
I.6.1.1. Les matériaux composites à fibre	27
I.6.1.2. Les matériaux composites à particules	27
I.6.2. Classifications selon la nature des composants	27
I.7. L'intérêt des matériaux composites	28

I.8. Les avantages des matériaux composites	28
I.9. Les inconvénients des matériaux composites	29
I.10. Les composites dans l'aviation	29
I.10.1. Airbus A350 XWB	30
I.10.2. Boeing B787 DREAMLINER	31
I.11. Fabrications des matériaux composites	32
I.11.1. Moulage au contact	32
I.11.2. Moulage par projection simultanées	33
I.11.3. Moulage sous vide	33
I.11.4. Moulage RTM	34
I.11.5. Moulage par injection	34
I.11.6. Moulage par pultrusion	35
I.12. Architecture des matériaux composites [1]	35
I.12.1. Les monocouches	36
I.12.2. Les stratifiés	36
I.12.2.1. Définition des plis	37
I.12.2.2. Le plan moyen	37
I.12.2.3. Structure générale d'un stratifié	37
I.12.2.4. Stratifiés hybrides	38
I.12.3. Structures sandwiches	38
I.13. Les repères principaux	39
I.13.1. Plan LT et plan XY	39

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.1. Introduction	41
II.2. Définition d'une plaque	41

II.3. Analyse théorique du comportement mécanique des matériaux composites	42
II.3.1. Microanalyse	42
II.3.2. Loi de comportement.....	43
II.3.2.1. Matrice de rigidité	44
II.3.2.2. Matrice de flexibilité	44
II.3.2.3. Relation d'élasticité dans le repère (LT)	44
II.3.2.4. Relation d'élasticité dans le repère (XY)	45
II.3.2.5. Etat de contrainte plane	47
II.3.2.6. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux du repère local (L,T) :	48
II.3.2.7. Matrice de rigidité réduite de chaque pli du stratifié(X,Y) :	48
II.4. Théorie classique des plaques de LOVE-KIRCHOFF (CLPT)	49
II.4.1. Champ de contrainte et déformation	50
II.4.2. Equation de mouvement.....	54
II.5. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	54
II.6. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).....	55
II.6.1. Contraintes Planes Généralisées.....	56
II.6.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux	56
II.6.3. Matrice de rigidité de chaque pli du stratifié.....	57
II.7. Théorie de déformation en cisaillement de 3ème ordre de Reddy (TSDT) :	58
II.7.1. Champs de déformation et contrainte.....	60
II.7.2 Matrice de passage de déformation et contrainte	61
II.7.3. Equation de mouvement.....	62
II.7.4. Solution de Navier.....	64
II.7.5. Calcul des contraintes.....	67
II.7.6.Cas hygrothermomécanique	68

II.7.7. L'équation de diffusion (L'équation de FICK)	69
Chapitre III : Calcul numérique et résultats	
III.1. Introduction	72
III.2. Logiciel MATLAB	72
III.3. Interface graphique	72
III.3.1. L'environnement MATLAB	72
III.3.2. Originlab	73
III.4. Organigramme du programme développé.....	74
III.5. Résultats de simulations.....	77
III.5.1. L'influence de la température opérationnelle :	78
III.5.2. L'influence de l'humidité relative HR%	81
III.5.3. L'influence de la température référentielle T0	84
III.5.4. L'influence de la concentration initiale C0.....	87
III.5.5. L'influence du temps t	90
Conclusion générale	93
Bibliographie.....	95

Liste des figures

Figure I. 1: Matériau composite.....	19
Figure I. 2: Types de renforts.....	21
Figure I. 3: Fibre de verre.	22
Figure I. 4: Fibre de carbone.....	23
Figure I. 5: Fibre d'aramide.....	24
Figure I. 6: A350 matériaux de construction.	31
Figure I. 7: Boeing 787 Dreamliner matériaux de construction.	31
Figure I. 8: Moulage au contact.	32
Figure I. 9: Moulage par injection simultanée.	33
Figure I. 10: Moulage sous vide.	33
Figure I. 11: Moulage RTM.....	34
Figure I. 12: Moulage par injection.	34
Figure I. 13: Moulage par pultrusion.	35
Figure I. 14: Une monocouche à fibres longues UD.	36
Figure I. 15: Différentes orientations des fibres.	37
Figure I. 16: Le plan moyen.....	37
Figure I. 17: Exemples de composites sandwichs.	39
Figure I. 18: Le repère local et globale d'un stratifié.	39
Figure II. 1: La géométrie de la plaque.	42
Figure II. 2: Géométrie déformée et non déformée d'un coté de plaque selon la CLPT.	49
Figure II. 3: Géométrie déformé et non déformé d'un coté de plaque selon la FSDT.	55
Figure II. 4: Géométrie déformé et non déformée d'un coté de plaque selon la HSDT.	56
Figure II. 5: Schéma de la diffusion dans une plaque.	70

Figure III. 1: Interface graphique de MATLAB.....	73
Figure III. 2: Organigramme de la plaque épaisse.	76
Figure III. 3: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes températures opérationnelles(T).....	78
Figure III. 4: Influence de la température opérationnelle sur les contraintes dans le repère global.	79
Figure III. 5: Influence de la température opérationnelle sur les contraintes dans le repère local.	80
Figure III. 6: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes humidités relatives (HR%).	81
Figure III. 7: Influence de l'humidité relative sur les contraintes dans le repère global.	82
Figure III. 8: Influence de l'humidité relative sur les contraintes dans le repère local.	83
Figure III. 9: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes températures référentielles (T0).	84
Figure III. 10: Influence de la température référentielle sur les contraintes dans le repère global.	85
Figure III. 11: Influence de la température référentielle sur les contraintes dans le repère local.	86
Figure III. 12: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes concentrations initiales(C ₀).	87
Figure III. 13: Influence de la concentration initiale sur les contraintes dans le repère global.	88
Figure III. 14: Influence de la concentration initiale sur les contraintes dans le repère local.	89
Figure III. 15: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement (t).....	90
Figure III. 16: Influence du temps sur les contraintes dans le repère global.....	91
Figure III. 17: Influence du temps sur les contraintes dans le repère local.	92

Liste des tableaux

Tableau III. 1: Les caractéristiques mécaniques et hygrothermiques du matériau.	77
Tableau III. 2: Données de simulation 1.	78
Tableau III. 3: Données de simulation 2.	81
Tableau III. 4: Données de simulation 3.	84
Tableau III. 5: Données de simulation 4.	87
Tableau III. 6: Données de simulation 5.	90

Introduction générale

Les matériaux composites à matrice polymère précisément les stratifiés composites sont très importants dans des nombreuses applications, comme l'aéronautique, aérospatiale, le sport, pièces automobiles, de plus, l'utilisation des stratifiés composites dans les secteurs d'avions s'est développée au cours des dernières décennies. Chaque nouvelle génération d'avion marque une progression du nombre et de l'importance des pièces réalisée dans ces matériaux à cause de leurs propriétés mécaniques élevées ainsi que leur faible densité permettent d'obtenir des propriétés spécifiques bien supérieurs aux matériaux traditionnels.

Mais l'utilisation de matériaux composites dans une structure pose aussi de grandes difficultés. Dans le cas des structures aéronautiques et en raison de la spécificité des conditions environnementales telles que la température et l'humidité, ces dernières engendrent des sollicitations cycliques sur les matériaux composites durant leur usage qui cause une dilatation ou restriction et une hygrothermie interne. la matrice polymère favorise les sollicitations hygrothermiques par les phénomènes d'absorption de l'humidité qui cause des changements physiques et chimiques qui engendrent une perte des performances mécaniques.

Pour cela, il est inévitable d'avoir une meilleure compréhension possible de ces matériaux et comprendre leurs comportements dans des différentes conditions environnementales. L'objectif de ce travail est d'étudier les stratifiés composites épais et l'utilisation de l'équation de Fick pour simuler le phénomène d'absorption de l'humidité à travers l'épaisseur sur le matériau.

Pour l'accomplissement de cette étude, les étapes successives suivantes ont été suivies :

Chapitre I : Introduction sur les matériaux composites.

Le premier chapitre présente quelques généralités sur les matériaux composites, différents types, domaine d'utilisation, les avantages et les inconvénients.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygrothermomécanique des matériaux composites.

Le deuxième chapitre présenté analyse théorique des matériaux composites puis nous avons présenté quelques notions sur les différentes théories des plaques : la théorie classique des plaques CLPT(Classical laminated plate theory), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT(The first order shear deformation theory) et on s'intéresse plus

Introduction générale

particulièrement à la théorie d'ordre supérieur HSDT(The higher order deformation theory) de Reddy. Aussi bien que le chapitre expose les formulations et les équations nécessaires à l'analyse et le calcul hygrothermomechanique par la méthode de Navier.

Chapitre III : Calcul numérique et résultats.

Dans le troisième chapitre, nous décrirons d'abord le code de calcul élaboré dans ce travail grâce à nos contributions à des méthodes de calcul itératives et à un organigramme explicatif. Les résultats obtenus seront présentés sous forme des graphes traitant de différents paramètres.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Les matériaux composites sont devenus une alternative intéressante aux matériaux traditionnels grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques, De plus. Ils ont une bonne résistance à la fatigue, leurs avantages principales sont : la légèreté, résistance mécanique et chimique, multiplicité formelle et entretien réduit, C'est pour ces raisons que, au cours de ces dernières années, l'emploi des matériaux composites pour la réalisation de structures aéronautiques, navales ou ferroviaires c'est considérablement répandu.

L'objectif de ce chapitre est d'apporter une connaissance générale sur les matériaux composites, la description de leurs constituants, de leurs propriétés et leurs structures.

I.2. Définition d'un matériau composite

Selon **Berthelot**, « Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) et de nature différente, (donc ils sont des matériaux artificiels), se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, par rapport à la composition de base pour répondre à des besoins spécifiques ».

Les composites sont constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. La matrice maintient les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées (Modules et limites d'élasticité, résistance mécanique...). Cette association a pour but d'obtenir un matériau dont les propriétés spécifiques (propriétés mécaniques liées à la masse volumique) sont supérieures à celles de la matrice non renforcée. Le concept de matériau composite, par le choix des constituants et de leurs proportions respectives, ainsi que le choix de la forme, des dimensions et de la disposition des renforts, permettent donc de concevoir un matériau présentant les caractéristiques spécifiques recherchées.[1]

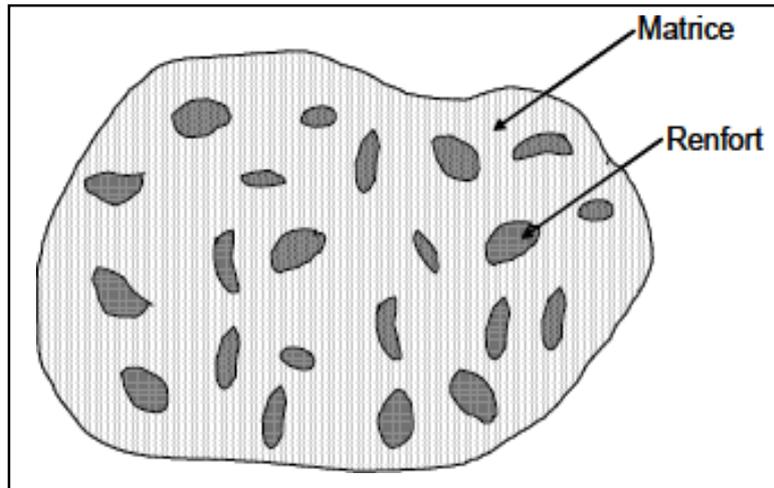


Figure I. 1: Matériau composite.

I.3. Différents domaines d'applications

- Transport : Aérien (Civil et Militaire) : Dérives, portes, éléments de fuselage, armature du siège, pales d'hélicoptère, disque de freinage, aube de turbine.
- Maritime.
- Ferroviaire.
- L'Aérospatiale : Réservoirs, tuyères, tuile de protection.
- Les sports et loisirs : mats et coques de bateaux, planches de ski et de snowboard, cadres de bicyclette, raquette de tennis, coques de piscines, toboggans, carrosserie de voitures de sport, club de golf, canne à pêche, perche de saut ;
- Bâtiments.

I.4. Types de composite

On distingue deux types de composites : la composite grande diffusion et la composite haute performance.

I.4.1. Grande diffusion

Les matériaux composites à grandes diffusions offrent des avantages essentiels qui sont : ils occupent une portion de 95 % des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques

armés ou des plastiques renforcés par des fibres courtes ou le taux volumique de renfort approximativement à 30%. [2]

I.4.2. Haute performance

Les matériaux composites de hautes performances sont caractérisés par des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important se sont les plus utilisées dans les domaines aéronautiques, industrie maritime, ... etc.

Les fibres longues sont les renforts utilisés avec un taux de renfort qui est supérieur à 50% inversement aux matériaux composites de grande diffusion ce qui rend le coût élevé. [2]

I.5. Constituant d'un matériau composite

Un matériau composite se compose comme suit : matrice + renfort + optionnellement (charge et/ou additif), par exemple : le béton armé.

I.5.1. Le renfort

Le renfort a pour rôle de contribuer à améliorer la tenue mécanique (résistance et rigidité) du matériau composite. Les fibres se présentent sous forme linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus). Les fibres de carbone, de verre et d'aramide sont les plus courantes. [3]

Les renforts peuvent être classés selon :

- Leur composition : métal, verre, polymère, etc.
- Leurs formes :
 - Fibres : courtes (0.1- 1 mm), longues (1 – 50 mm) ou continues (>50 mm).
 - Charges renforçant : Gravier (additionné au ciment pour fabriquer le béton), sable, bille de verre, etc.
- Leur distribution : mat ou tissé.

Les renforts sont classés selon des types couramment rencontrés comme indique la figure (I.2) :

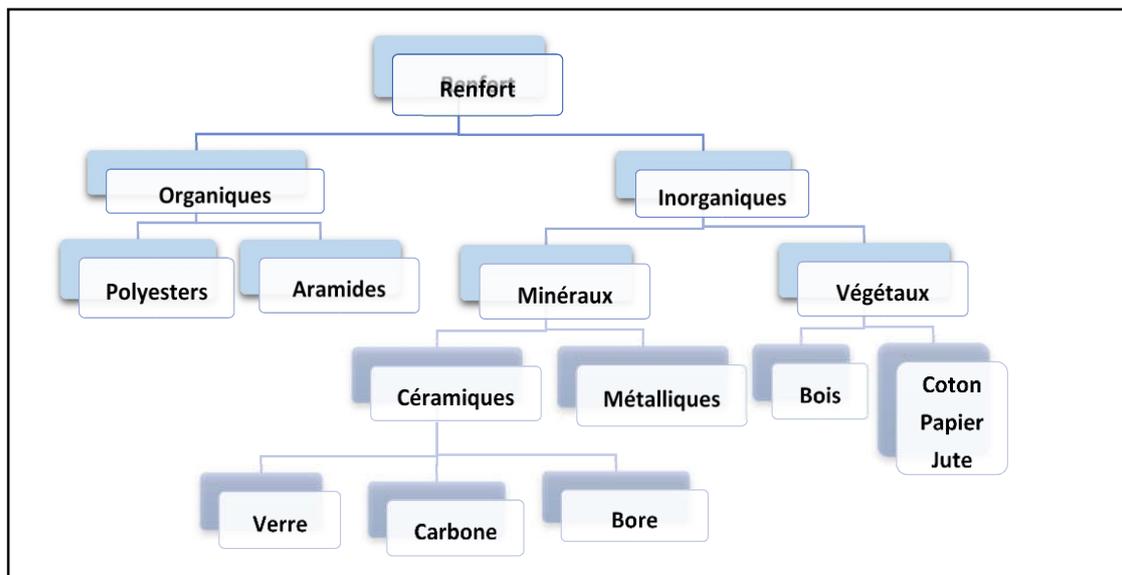


Figure I. 2: Types de renforts.[3]

Parmi les renforts les plus employés, on peut citer :

I.5.1.1. Fibres de verre

La fibre de verre désigne un filament de verre extrêmement fin, la fibre de verre est la plus ancienne (1940), la moins chère du marché, et le renfort composite le plus couramment utilisé (95%). Ils sont fabriqués par fibrage de verre fondu à base de silice et d'additifs. Le verre est coulé dans des moules en platine-rhodium à 1250°C ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. La fibre de verre améliore les propriétés des matériaux, la résistance aux chocs et réduit le poids. Les domaines d'applications : aéronautique, électricité, électronique, équipements industriels, sports et loisirs... Ils sont divisés en trois qualités :[3]

- Fibres E pour les composites à grande diffusion (GD) ;
- Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- Fibres R pour les composites à hautes performances (HP).



Figure I. 3: Fibre de verre.

Avantages :

- Des propriétés d’isolation électrique acceptables pour la plupart des applications
- Tenue à la température élevée ;
- Dilatation et conductivité thermique faible ;
- Excellente capacité de transmission de lumière.

Inconvénient :

- Faible module (par rapport au carbone ou à l’aramide) ;
- Vieillissement au contact de l’eau.

I.5.1.2. Fibres de carbone

La fibre de carbone a des propriétés mécaniques très fortes, fabriquées par un polymère de base appelé précurseur. Actuellement, les fibres précurseurs utilisées sont des fibres acryliques en poly acrylonitrile (PAN), qualité de la fibre de carbone final dépend largement de la qualité des précurseurs. Le principe de développement est de décomposer la fibre acrylique Le chauffage sans faire fondre les fibres entraîne une graphitisation brai comme résidu. Le raffinage du pétrole ou du charbon est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Les fibres de carbone sont les plus utilisés dans les applications à hautes performances.

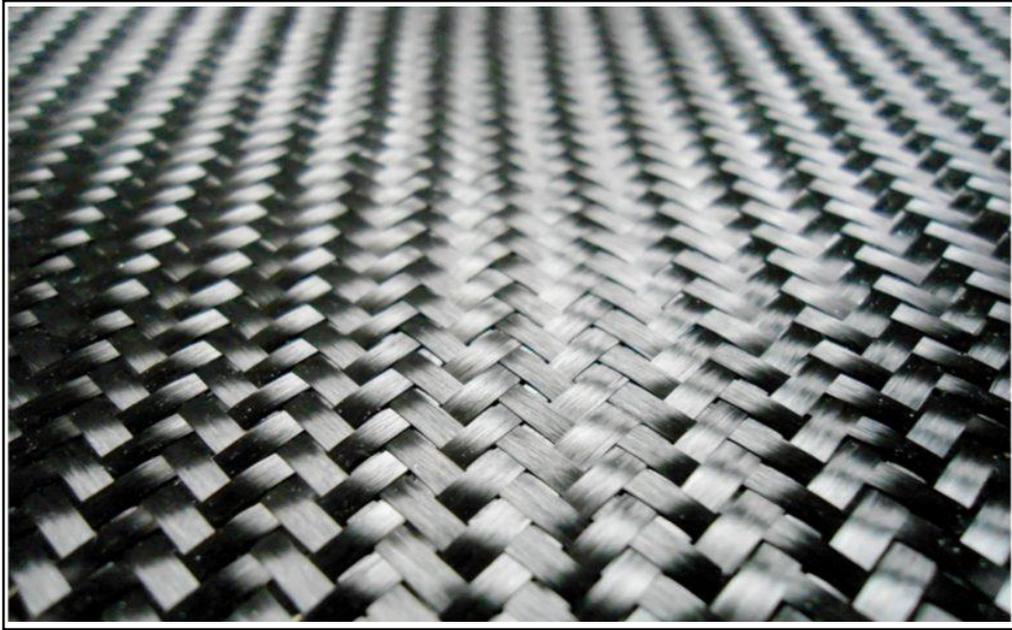


Figure I. 4: Fibre de carbone.

Avantages :

- Une faible dilatation thermique ;
- Bonne conductibilité thermique et électrique ;
- Bonne résistance à l'humidité;
- Une très bonne tenue à la compression.

Inconvénients :

- Une mauvaise résistance à l'abrasion et aux chocs ;
- Risque de provoquer des maladies pulmonaires ;
- Prix très élevé.

I.5.1.3. Fibres d'aramide

Les fibres d'aramide sont obtenue grâce à la chimie organique de l'aramide. La fibre aramide est un agrégat de filaments jaunes d'une dizaine de microns de diamètre. Il existe deux types de fibres : les fibres à bas module utilisées dans les câbles et les gilets pare-balles, et les fibres à haut module utilisées pour renforcer les composites hautes performances. Les composites renforcés de fibres d'aramide ont une bonne ductilité Résistance à la chaleur et résistance à la traction. Ils sont chers et ont une faible résistance à la pression.



Figure I. 5: Fibre d'aramide.

Avantages :

- Faible densité ;
- Absorption des vibrations, amortissement ;
- Excellente résistance aux chocs et à la fatigue.

Inconvénients :

- Prix très élevé ;
- Reprise d'humidité importante (4%) ;
- Usinage difficile.

I.5.1.4. Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. On peut citer : Fibres de Carbure de Silicium, Fibres de Bore, Fibres de Bore carbure de silicium.

I.5.2. La matrice

Le rôle principal de la matrice dans les matériaux composites est de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger vis-vis de l'environnement extérieur, la matrice doit donc être assez déformable et présenter une bonne compatibilité avec les fibres, la masse volumique faible de la matrice est un facteur essentiel pour que le matériau composite ait des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Il existe deux grandes familles de résines polymères : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables. Ces deux types de résine peuvent être modulés ou mis en forme, pour donner soit un produit fini, soit un produit semi fini dont la forme peut être modifiée.

Les résines thermoplastiques, dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle, le polyéthylène, le polypropylène, polystyrène polyamide, le poly carbonate, etc.

Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois, possédant ainsi des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques. Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- Les résines polyesters insaturées : polyesters condensés, dérivés allyliques, etc.,
- Les résines de condensation phénoliques, aminoplastes, furaniques, etc.,
- Les résines époxydes.

On peut distinguer Les résines thermostables par rapport aux autres résines par leurs performances thermiques, puisque dans ces résines nous retrouvons les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace. Parmi les résines thermostables, nous citons les résines bismaléimides et les résines polyamides.[1]

I.5.3. Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, et diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre).[2]

Les principales charges utilisées sont :

- Microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...).
- Des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...).
- Des particules de carbone (noir de carbone).

I.5.4. Les additifs

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ou ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faibles quantité (quelque % et moins) et interviennent comme :[2]

- Lubrifiants et agents de démoulage.
- Pigments et colorants.
- Agents anti-retraits.
- Agents anti-ultraviolets.
- Accélérateur.
- Catalyseur.

1.5.4.1. Les GelCoats

GelCoats est une couche de surface à base de résine spécialement conçue pour assurer certaines fonctions telles que la dureté, la résistance à la corrosion et la résistance aux chocs. Les GelCoats se présentent sous la forme d'un liquide homogène crémeux, coloré et thixotrope. Ils comprennent :

- D'une résine de base.
- De charges diverses.
- De pigments.
- De différents additifs.

Les GelCoats sont généralement appliqués au fond du moule à la brosse ou au pistolet à une épaisseur de 0,4 à 0,6 mm.

I.6. Classifications des matériaux composites

Les classifications des matériaux composites peuvent être classés en dépend de deux fonctions : forme des composants ou nature des composants.[1]

I.6.1. Selon la forme des composants

En fonction de la forme des composants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

I.6.1.1. Les matériaux composites à fibre

Si le renfort se trouve sous forme de fibres, le composite est alors à fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues soit sous forme des fibres discontinues.

I.6.1.2. Les matériaux composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

I.6.2. Classifications selon la nature des composants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des Composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine de températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

I.7. L'intérêt des matériaux composites

Dans le domaine de l'aviation on peut placer en parallèle : d'une part les préoccupations majeures des constructeurs, de l'autre les principales propriétés caractéristiques des pièces en matériaux composites :[4]

- Soucis des avionneurs : performances et économie.
- Caractéristiques des pièces composites :

Gain de masse, économie de carburant, → accroissement de charge utile, ou rayon d'action (Kesba) Bonne tenue en fatigue → durée de vie augmentée : il y a économie sur l'amortissement.

Absence de corrosion → allègement de l'inspection lors des visites : il y a économie sur le coût de la maintenance.

Lorsqu'on complète le bilan par un examen du coût des solutions composites Comparées aux solutions classiques, on constate une bonne adéquation entre besoins des avionneurs et utilisations des composites.

I.8. Les avantages des matériaux composites

- Une structure en matériaux composites est théoriquement d'une à six fois plus légère que celle fabriquée avec des alliages métalliques., le gain de masse pratique se réduit à quelques dizaines de % (jusqu'à -45%), ce qui reste très avantageux pour des applications où ce paramètre est important (aéronautique, énergie, etc...)
 - Plus fort : Le matériau est très résistant aux charges et aux chocs (flexion, torsion, pression interne, etc...) grâce au renfort.
 - Plus résistant : Le matériau est également résistant aux intempéries et aux agressions chimiques grâce à la matrice
 - Meilleure durée de vie : La tenue du matériau à travers le temps est très bonne, les matériaux composites sont peu sensibles à la corrosion
 - Liberté de forme : La matière est plus malléable et il est plus facile de créer des formes particulières
- La matière est également plus étanche, plus isolante, etc.

I.9. Les inconvénients des matériaux composites

Rare. L'un des rares inconvénients est l'outillage spécial et la difficulté de réparation, en particulier lorsque le matériau est endommagé, bien qu'il existe une possibilité de délaminage ou de collage.

Un autre inconvénient est que les techniques de compoundage ne sont pas bien connues et maîtrisées en raison des développements récents, mais des formations ainsi que des livres techniques existent.

Étant donné que le matériau composite n'est pas facile à casser, il est difficile de juger si la structure interne a été endommagée, bien sûr, c'est le plus grand inconvénient de l'utilisation de matériaux composites. Les dommages structurels, en revanche, sont faciles à détecter en raison des coudes et des renflements en aluminium.

De plus, les résines utilisées dans les composites s'affaiblissent à des températures aussi basses que 150 degrés, Il est important que ces avions prennent des précautions supplémentaires pour éviter les incendies, des températures supérieures à 300 degrés peuvent entraîner une défaillance structurelle.

Enfin, les composites peuvent être coûteux, bien que le coût initial élevé soit souvent compensé par des économies à long terme.

I.10. Les composites dans l'aviation

Selon la FAA, le matériau composite existe depuis la Seconde Guerre mondiale. Ce matériau hybride unique est devenu plus populaire au fil des ans et se retrouve aujourd'hui dans de nombreux types d'avions et de planeurs. Les structures des aéronefs sont généralement composées de 50 à 70 % de matériaux composites. Selon le rôle plus ou moins important qu'ils doivent jouer pour assurer l'intégrité de la structure, on peut citer Des pièces de structures primaires d'avion, c'est-à-dire dont la bonne tenue est vitale Pour l'appareil :

- Caissons de la voilure.
- Caissons d'empennage
- Caissons de fuselage

- **Des gouvernes :**
 - Ailerons.
 - Volets de direction de profondeur
 - Volets hypersustentateurs
 - Spoilers aérofreins

- **L'habillage extérieur :**
 - Carénages.
 - Portes de soutes
 - Portes de trains d'atterrissage
 - Radomes

- **L'habillage intérieur :**
 - Planchers.
 - Cloisons
 - Portes, etc.

I.10.1. Airbus A350 XWB

C'est la première fois qu'Airbus produit un avion avec 53 % de fibre de carbone. Le fuselage est entièrement réalisé en composites. Le titane rentre aussi pour 14 % dans la composition de la structure. Moins de poids signifie moins de consommation de carburant. L'A350 embarque également la plus grande aile en fibre de carbone du monde d'une envergure de presque 32 mètres. Au total, la structure est composée à 70 % de matériaux avancés combinant composites, titane et de l'aluminium moderne. [5]

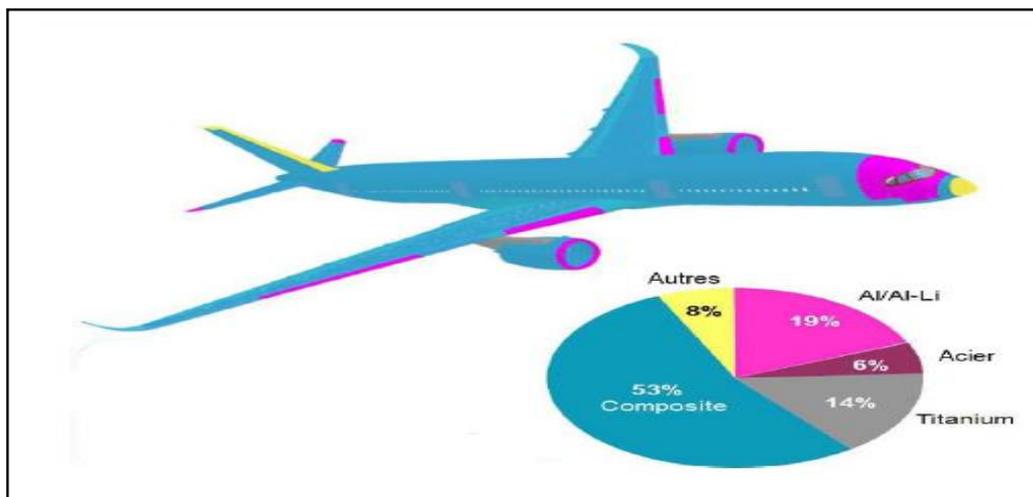


Figure I. 6: A350 matériaux de construction.[20]

I.10.2. Boeing B787 DREAMLINER

Le Boeing 787, également connu par son surnom *Dreamliner*, est un avion long-courrier produit depuis 2009 par la société Boeing. Officiellement lancé le 26 avril 2004 pour une mise en service en mai 2008, il effectue son premier vol le 15 décembre 2009 et est certifié le 26 août 2011. La première livraison du Boeing 787-8, à la compagnie All Nippon Airways (ANA), a lieu le 26 septembre 2011. Sa composition structurale en pourcentage est : 50% composite, 20% aluminium, 15% titane, 10% acier et 5% autres. [6]



Figure I. 7: Boeing 787 Dreamliner matériaux de construction.[6]

I.11. Fabrications des matériaux composites

Le développement des matériaux composites implique trois opérations fondamentales : [7]

- Imprégnation des renforts par des systèmes de résine.
- Forme la géométrie de la pièce.
- Renforcer le système :
- Polycondensation et réticulation de matrices thermodurcissables,
- Ou simple refroidissement de matériaux thermoplastiques.

I.11.1. Moulage au contact

Le moulage par contact fonctionne avec un seul moule. C'est sur ce moule que seront déposées les différentes couches de résines et de matériaux, pour leur permettre d'en prendre la forme.

Le moule est tout d'abord enduit d'un agent de démoulage, puis d'un GelCoats qui permettra d'obtenir une surface parfaitement lisse. Ensuite, des couches successives de résine liquide et de renforts (mats ou tissus) sont déposées à la main. Pour que le résultat soit parfait, les couches doivent être ébullées. L'opérateur vient donc presser la matière avec un rouleau pour supprimer les bulles d'air éventuellement incrustées entre les couches. Enfin, lorsque la pièce est dure, elle peut être démoulée et détournée.

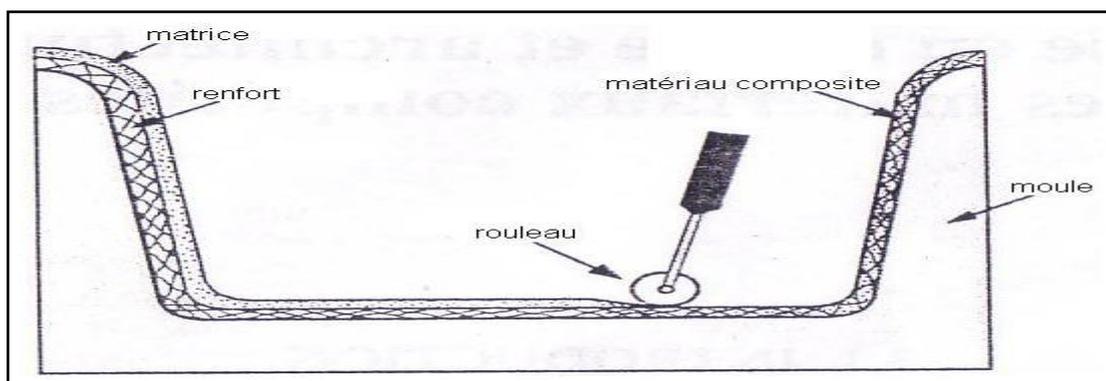


Figure I. 8: Moulage au contact.

I.11.2. Moulage par projection simultanées

Le principe consiste à projeter un jet de résine, dans lequel se déposent, à l'aide d'un coupeur, des fibres de verre de 3 à 4 cm de longueur qui vont se plaquer contre les surfaces du moule. Une opération de bullage est nécessaire pour homogénéiser la matière et retirer l'air emprisonné.

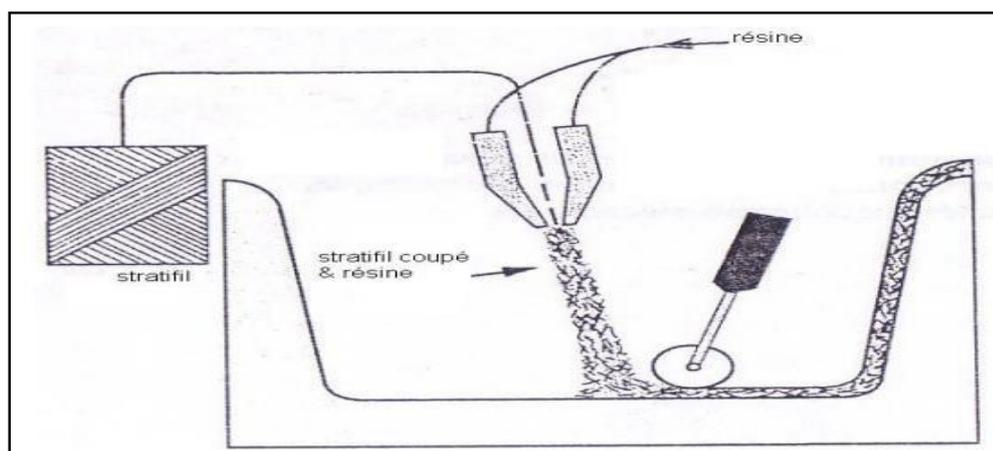


Figure I. 9: Moulage par injection simultanée.

I.11.3. Moulage sous vide

Les renforts secs sont installés sur le moule. Puis, le réseau d'infusion et le réseau de mise sous vide sont mis en place. Une membrane souple, aussi appelée « bâche à vide » est ensuite installée. L'air est vidé pour mettre le moule sous vide, puis la résine est injectée. Les renforts secs sont alors imprégnés de résine. Une fois la pièce durcie, il suffit de procéder au démoulage et à l'éventuel détourage.

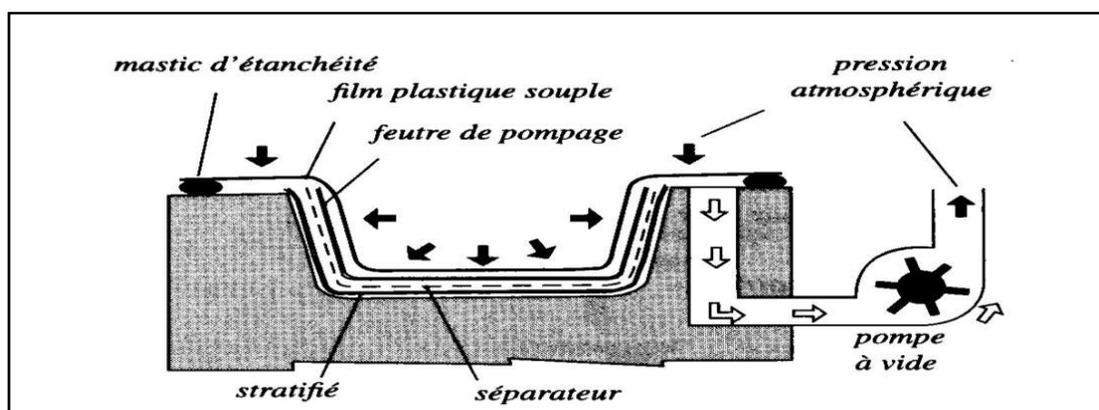


Figure I. 10: Moulage sous vide.

I.11.4. Moulage RTM

Le moulage d'une pièce par RTM requiert la présence d'un moule et d'un contre-moule. Les moules sont enduits d'un agent démoulant, et sont éventuellement recouverts d'un gel-coat. Le renfort du matériau composite est disposé dans le moule, puis ce dernier est fermé. La résine est ensuite injectée sous basse pression, afin qu'elle se répartisse parfaitement selon la forme souhaitée. Viennent ensuite les étapes de démoulage et de détourage de la pièce.

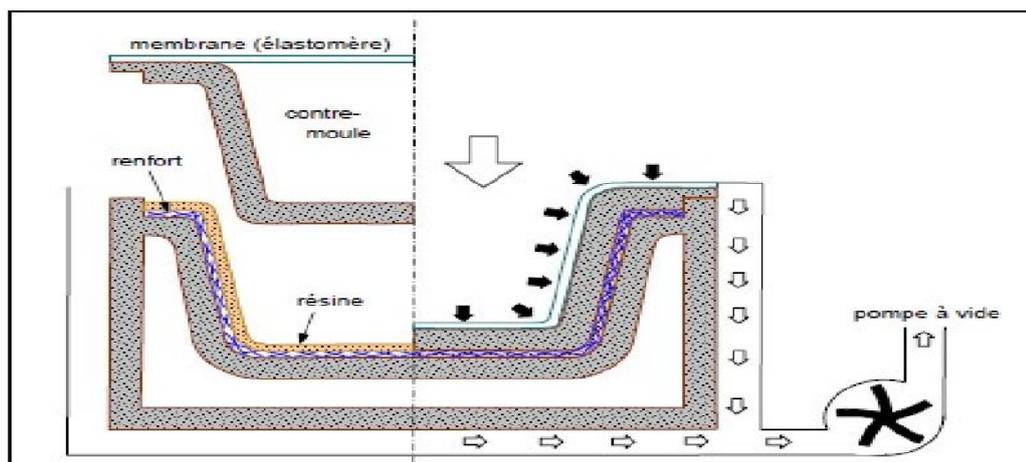


Figure I. 11: Moulage RTM.

I.11.5. Moulage par injection

Le moulage par injection utilise des matières thermoplastiques. Ces dernières se présentent sous forme de granulés avant la phase de transformation. Elles sont ramollies sous l'effet de la chaleur. **Une fois sous forme liquide, la matière est injectée sans un moule et prend l'empreinte de celui-ci.** Ensuite elle va refroidir et se solidifier. Lorsqu'elle a retrouvé sa dureté, on peut extraire la pièce qui devient utilisable.

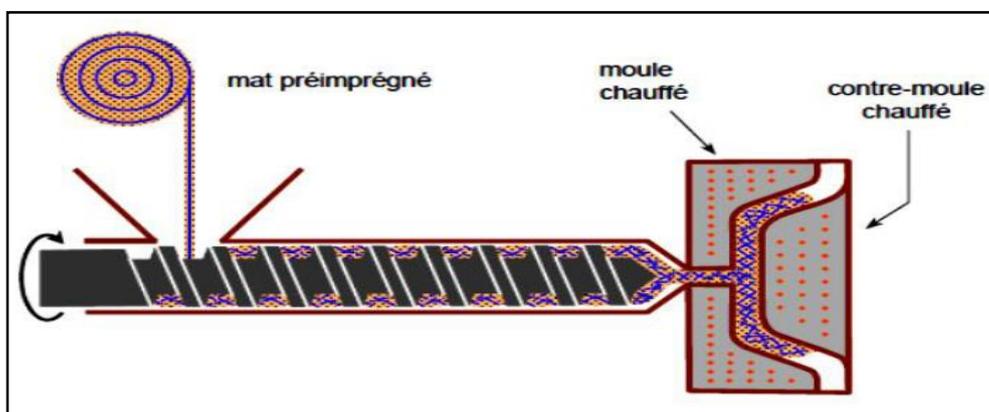


Figure I. 12: Moulage par injection.

I.11.6. Moulage par pultrusion

Le procédé de moulage par pultrusion sert pour la fabrication de profilés, rectilignes ou courbes, à section constante, hautement renforcés dans la direction principale. Dans cette technique, les renforts : fils, stratifils, rubans, etc. Passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés. Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine.

Ce procédé est applicable aux résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les profilés obtenus ont des caractéristiques mécaniques élevées, compte tenu de la possibilité d'obtenir des proportions de renfort élevées jusqu'à 80 % en volume.

Le procédé est adapté aux productions d'assez grandes séries (vitesse de défilement jusqu'à 20 m/h). Il nécessite un investissement important de matériel.

Exemples de fabrication cannes à pêche, profilés divers, raidisseurs, etc.

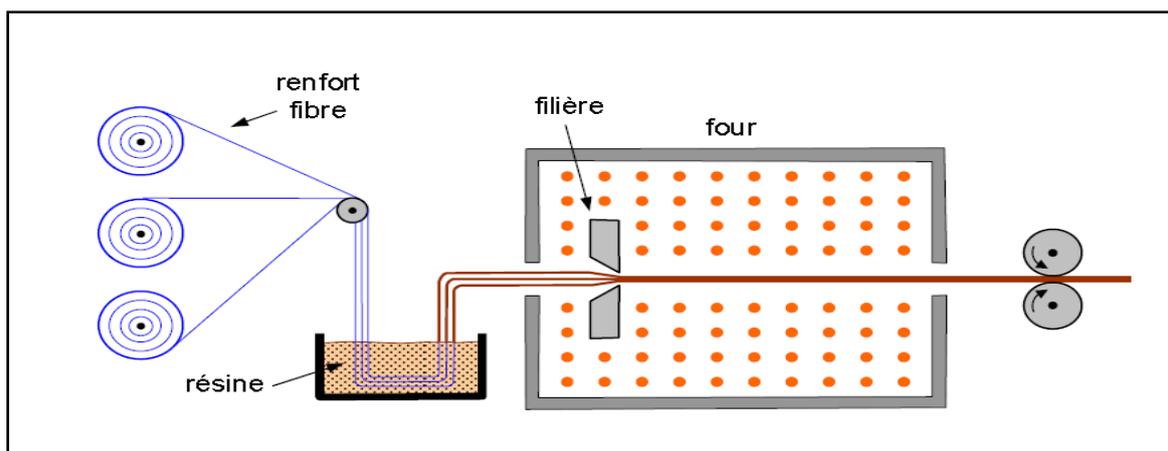


Figure I. 13: Moulage par pultrusion.

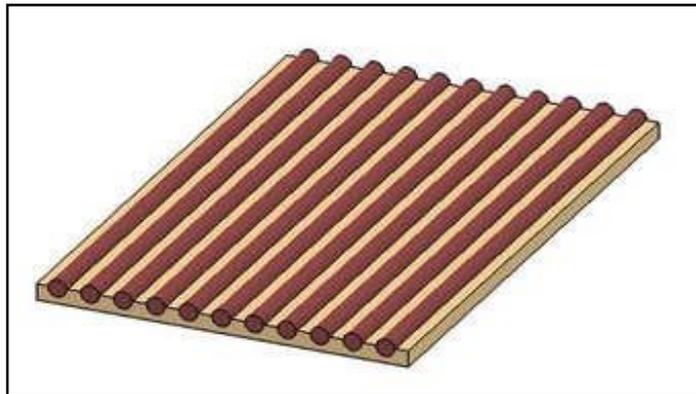
I.12. Architecture des matériaux composites

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des composites. Les structures des matériaux composites peuvent être classés en trois types :

- Les monocouches.
- Les stratifiées.
- Structures sandwiches.

I.12.1. Les monocouches

Les monocouches ou plis représentent l'élément de base de la structure composite où les fibres sont agencées en couche fine (quelques dixièmes de millimètre). Il existe plusieurs types de monocouches : à fibres longues (unidirectionnelles UD) ou réparties aléatoirement, à fibres courtes, à fibres tissées.[3]



I.12.2. Les stratifiés

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis), de renforts (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines.

Il existe quatre principaux types de stratifiés :

- **Stratifié Unidirectionnel** : l'orientation des fibres est la même dans tous les plis.
Exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta=0^\circ$ dans les différents plis.
- **Stratifié à Plis Orientés $\pm\theta$ (angle ply)** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta)$, avec θ différent de 0 ou de 90° .
- **Stratifié à Plis Croisés (cross ply)** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $0/90^\circ/0/90^\circ$.

Stratifié Symétrique : l'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z)=\theta(-z)$.

I.12.2.1. Définition des plis

Le pli est d'une seule couche de fibre et de matrice, les fibres sont orientées de « θ » par rapport à l'horizontale.

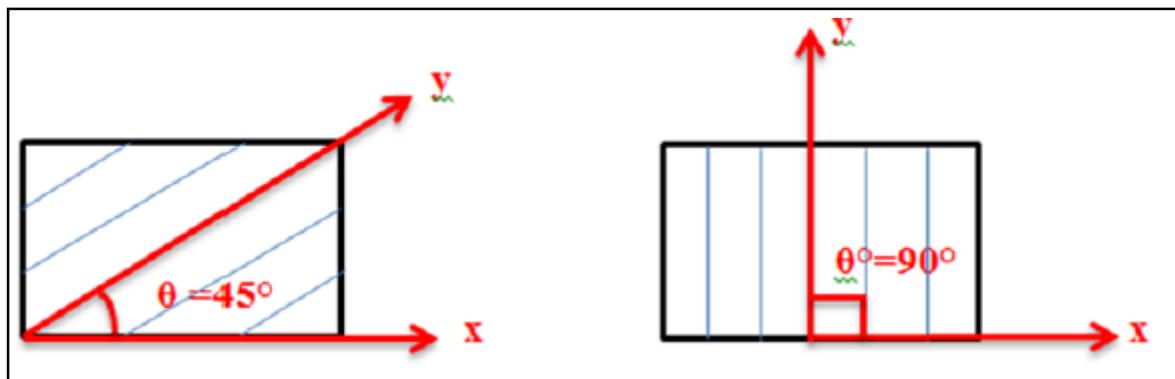


Figure I. 15: Différentes orientations des fibres.

I.12.2.2. Le plan moyen

C'est par définition le plan qui sépare en deux moitiés l'épaisseur du stratifié. Sur la figure ci-après c'est le plan x, y. il a par cote, par convention $z=0$. [1]

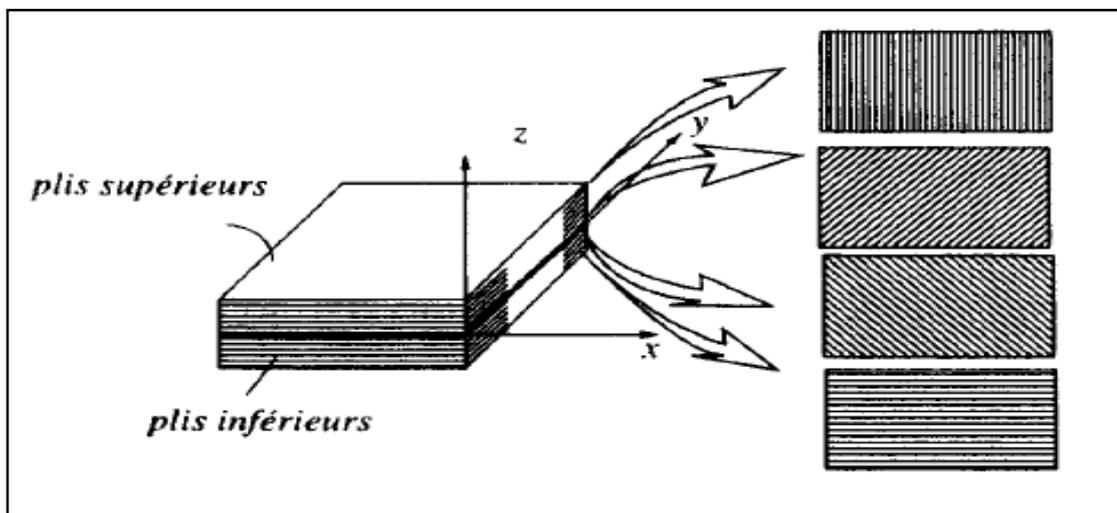


Figure I. 16: Le plan moyen.[4]

I.12.2.3. Structure générale d'un stratifié

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

- Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :
- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques, dans la direction des fibres ;
- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion.
- Une stratification croisée sera sensible au délaminage inter laminaire.
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir, une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

I.12.2.4. Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont plus performants en utilisant au mieux, les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- Des hybrides inter couches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente.
- Des hybrides intra couches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents.
- Des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

I.12.3. Structures sandwiches

Une structure sandwich est constituée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structure stratifiées.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

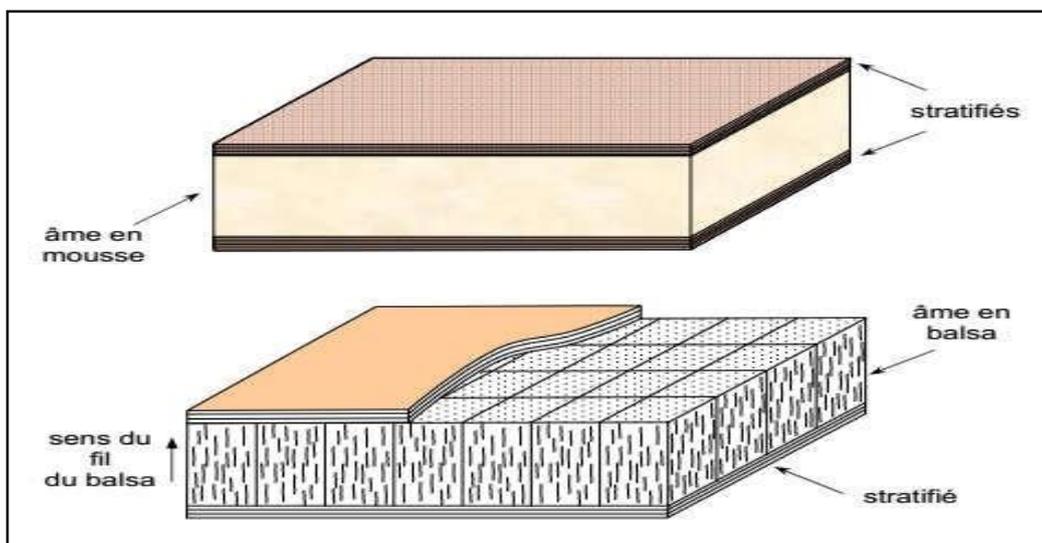


Figure I. 17: Exemples de composites sandwichs.

I.13. Les repères principaux

I.13.1. Plan LT et plan XY

Le repère principale (L, T) est lié à chaque couche de composite. La direction L est parallèle à la fibre (direction longitudinal) et la direction normale est perpendiculaire à la direction de fibre T est appelé direction transversale.[8]

Les stratifiées étant élaborés par couches suivant des directions de fibre décalées d'une couche à une autre d'un angle θ , il est nécessaire de rapporter le comportement élastique de chaque couche à un système d'axe noté (X, Y, Z) appelé repère de stratifié.

Avec θ est l'angle que font le repère (L, T) et l'axe X du repère (X, Y).[8]

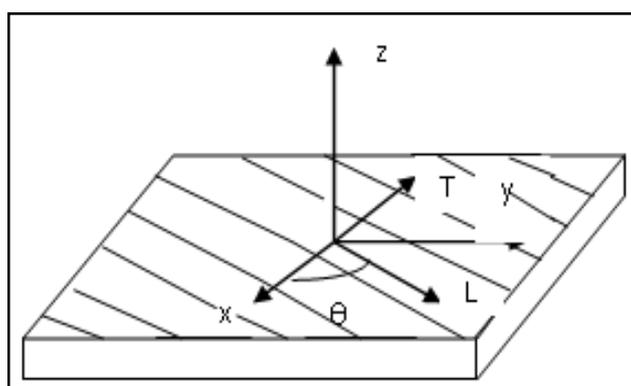


Figure I. 18: Le repère local et globale d'un stratifié.

Chapitre II : Modélisation
mécanique et hygro
thermomécanique des matériaux
composites

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour comprendre notre travail et recherche théorique, dans un premiers temps, on présente quelques notions sur les approches et les théories qui servent à analyser le comportement des composites multicouches. Dans ce contexte, il est nécessaire de bien comprendre le comportement mécanique, thermique, hygrothermique, hygro-mécanique d'un stratifié à travers des concepts théoriques et numériques. La modélisation des structures stratifiées exige des différentes théories développées par plusieurs chercheurs. Parmi ces théories on peut citer la théorie classique des stratifiées (également connu sous le nom théorie de LOVE-KIRCHOFF), La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (J-N Reddy) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante.

II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est définie comme étant un solide défini par une surface plane (plan x,y) et par une épaisseur notée $h(x,y)$, par rapport aux autres dimensions à savoir la longueur et la largeur.

Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épais suivant la grandeur de l'épaisseur h , nous admettons généralement :[11]

-Pour les plaques minces : $\frac{h}{a} \leq 0.05$

-Pour les plaques épaisses : $0.05 \leq \frac{h}{a}$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

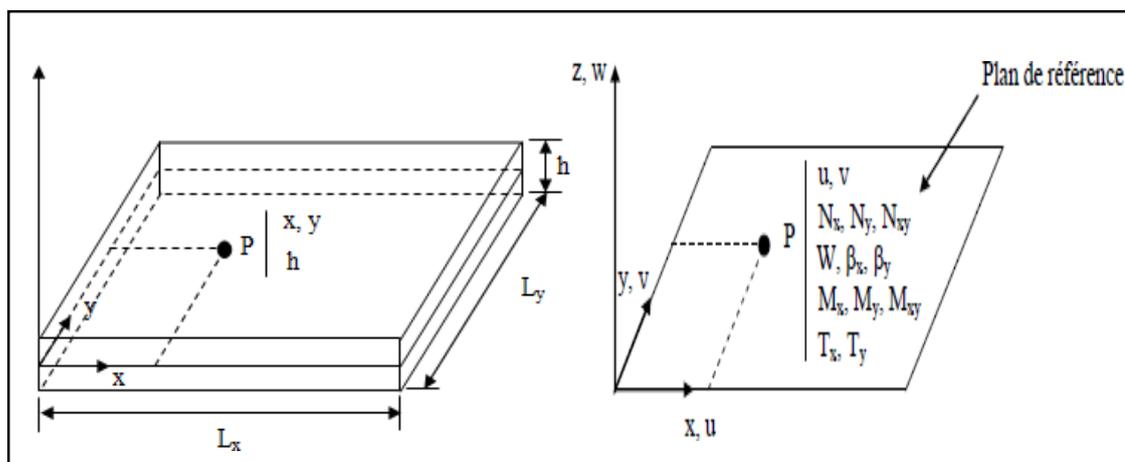


Figure II. 1: La géométrie de la plaque.

II.3. Analyse théorique du comportement mécanique des matériaux composites

II.3.1. Microanalyse

L'analyse des composites unidirectionnels à l'échelle microscopique consiste à déterminer les propriétés mécaniques du matériau en fonction des propriétés mécaniques de ses constituants. Le problème de la détermination des modules d'élasticité (en fonction des modules et des fractions volumiques de fibres et de matrice) assez complexe, fut état de recherche massive de plusieurs auteurs qui ont établi différents modèles, Shapery (1968), Jones (1975), Christenson (1979), Chamis (1975), Gibson (1994).[1]

- Fraction de fibre en volume :

$$V_f = \frac{\text{Volume de renfort}}{\text{Volume totale du composite}} \quad (II.1)$$

- Fraction de matrice en volume :

$$V_m = \frac{\text{Volume de la matrice}}{\text{Volume totale du composite}} \quad (II.2)$$

$$V_f + V_m = 1$$

- Module de Young longitudinale E_L :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (II.3)$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

- Module de Young transversal E_T :

$$E_T = E_m \left(\frac{1}{(1 - V_f) + \left(\frac{E_m}{E_f}\right) V_f} \right) \quad (II.4)$$

- Module de cisaillement G_{LT} :

$$G_{LT} = G_m \left(\frac{1}{(1 - V_f) + \left(\frac{G_m}{G_f}\right) V_f} \right) \quad (II.5)$$

- Coefficients de Poisson ν_{LT} :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (II.6)$$

- Coefficient d'expansion thermique longitudinal α_L :

$$\alpha_L = \frac{V_f \alpha_f E_f + (1 - V_f) \alpha_m E_m}{V_f E_f + (1 - V_f) E_m} \quad (II.7)$$

- Coefficient de dilatation thermique transversal α_T :

$$\alpha_T = V_f (\alpha_f + \nu_f \alpha_f) + V_m \alpha_m (1 + \nu_m) - (V_f \nu_f + V_m \nu_m) \alpha_L \quad (II.8)$$

- Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinale β_L :

$$\beta_L = \frac{V_f \beta_f E_f + (1 - V_f) \beta_m E_m}{V_f E_f + (1 - V_f) E_m} \quad (II.9)$$

- Coefficient d'expansion hygroscopique transversal β_T :

$$\beta_T = V_f (\beta_f + \nu_f \beta_f) + V_m \beta_m (1 + \nu_m) - (V_f \nu_f + V_m \nu_m) \beta_L \quad (II.10)$$

II.3.2. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois de comportement qui caractérisent le comportement mécanique du milieu, ces lois expliquent le mieux les phénomènes observés. Cette loi est la loi de Hook généralisée.[1]

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.3.2.1. Matrice de rigidité

La loi de Hook généralisée introduit un matrice de rigidité C qui est généralement symétrique, Cette dernière d'écrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point $M_0(x, y) = M_0(x, y, 0)$, la matrice C est composée de constantes de rigidités, ce sont des coefficients indépendants.

$$\begin{aligned}
 [\sigma_i] &= [C_{ij}][\varepsilon_i] & i = 1, 6 \\
 [C]^{-1} &= [S] \\
 [\varepsilon_i] &= [S_{ij}][\sigma_i] \\
 \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & \cdot & \cdot & C_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{61} & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} & (II.11)
 \end{aligned}$$

II.3.2.2. Matrice de flexibilité

$[S]$ est la matrice inverse ou la matrice de souplesse, la relation d'élasticité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_i] &= [S_{ij}][\sigma_i] & i, j = 1, 6 \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & \cdot & \cdot & S_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{61} & \cdot & \cdot & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_6 \end{bmatrix} & (II. 12)
 \end{aligned}$$

II.3.2.3. Relation d'élasticité dans le repère (LT)

Dans un matériau composite unidirectionnel la matrice de rigidité et la matrice de souplesse seront écrites :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (II.13)$$

Ou :

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Les modules de l'ingénieur sont les modules de Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement, ces modules sont obtenus par des essais simples tel que des essais de traction unidirectionnel, cisaillement ..

Constantes de rigidité dans le repère (LT) :

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L & C_{12} &= 2K_L \nu_{LT} & C_{22} &= G_{TT'} + K_L \\ C_{23} &= -G_{TT'} + K_L & C_{66} &= G_{LT} & \text{avec } K_L &= \frac{1}{2(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}})} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Constantes de souplesse dans le repère LT :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L} & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

II.3.2.4. Relation d'élasticité dans le repère (XY)

Les constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle de θ avec la direction x de référence.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Ou :

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Constantes de rigidité dans le repère (XY) :

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11} \ c^4 + C_{22} \ s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) \ s^2 c^2 \\ C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \ s^2 c^2 + C_{12} \ (s^4 + c^4) \\ C'_{13} &= C_{12} \ c^2 + C_{23} \ s^2 \\ C'_{14} &= 0 \qquad C'_{15} = 0 \\ C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \ s \ c^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \ s^3 c \\ C'_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 + C_{22} c^4 \\ C'_{23} &= C_{12} s^2 + C_{23} c^2 \qquad C'_{24} = 0 \qquad C'_{25} = 0 \\ C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \ s^3 \ c + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \ s c^3 \\ C'_{33} &= C_{22} \qquad C'_{34} = 0 \qquad C'_{35} = 0 \\ C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) \ s \ c \\ C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} c^2 + C_{66} s^2 \\ C'_{45} &= (C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2}) \ s c \qquad C'_{46} = 0 \\ C'_{55} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} s^2 + C_{66} c^2 \qquad C'_{56} = 0 \end{aligned}$$

$$C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] s^2 c^2 + C_{66} (s^4 + c^4) \quad (\text{II.19})$$

Constantes de souplesse dans le repère (XY) :

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \ c^4 + S_{22} \ s^4 + (2S_{12} + S_{66}) \ s^2 c^2 \\ S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \ s^2 c^2 + S_{12} \ (s^4 + c^4) \\ S'_{13} &= S_{12} \ c^2 + S_{23} \ s^2 \\ S'_{14} &= 0 \qquad S'_{15} = 0 \\ S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \ s \ c^3 + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \ s^3 c \\ S'_{22} &= S_{11} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 + S_{22} c^4 \end{aligned}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

$$\begin{aligned}
 S'_{23} &= S_{12}s^2 + S_{23}c^2 & S'_{24} &= 0 & S'_{25} &= 0 \\
 S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s^3 c + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] sc^3 \\
 S'_{33} &= S_{33} & S'_{34} &= 0 & S'_{35} &= 0 \\
 S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) s c \\
 S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{23})c^2 + S_{66}s^2 \\
 S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] sc & S'_{46} &= 0 \\
 S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23})s^2 + S_{66}c^2 & S'_{56} &= 0 \\
 S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}]s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4) & & & & \text{(II.20)}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

L'analyse des constantes de rigidité a l'échelle microscopique révèle de fortes avantages des propriétés de base de la matrice et des fibres, le paramètre décisif pour le comportement élastique du matériau composite est le volume des fibres, le calcul de la matrice de rigidité et de souplesse est indispensable afin de faire des modélisations mécanique des matériaux composites.

II.3.2.5. Etat de contrainte plane

Un état de contrainte planes est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale, le tenseur est caractérisés par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.22)}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.3.2.6. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux du repère local (L,T) :

Rapportées aux axes principaux, les relations d'élasticité se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Ces constantes de rigidité réduites sont :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_t}{E_{LT}} \nu_{LT}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \frac{E_t}{E_{LT}} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

II.3.2.7. Matrice de rigidité réduite de chaque pli du stratifié(X,Y) :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)] \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

II.4. Théorie classique des plaques de LOVE-KIRCHOFF (CLPT)

La théorie classique des plaques est aussi la théorie la plus simple, elle a été proposée par KIRCHOFF en 1850 et améliorée plus tard par LOVE. La théorie ignore le cisaillement transverse et est appréciée des ingénieurs pour sa simplicité. Les éléments basés sur cette théorie sont en principe les mieux adaptés à la simulation de plaques minces. Leur formulation ne nécessite qu'une approximation de la seule composante de déplacement $w(x,y)$. [9][10]

La théorie classique des plaques minces (CLPT) est basée sur l'hypothèse de Love-Kirchoff, d'où :

Une section droite au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ($\epsilon_z = \gamma_x = \gamma_y = 0$).

L'épaisseur est petite, en conséquence les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.

Les déplacements pendant cette théorie peuvent s'écrire d'une manière linéaire sous

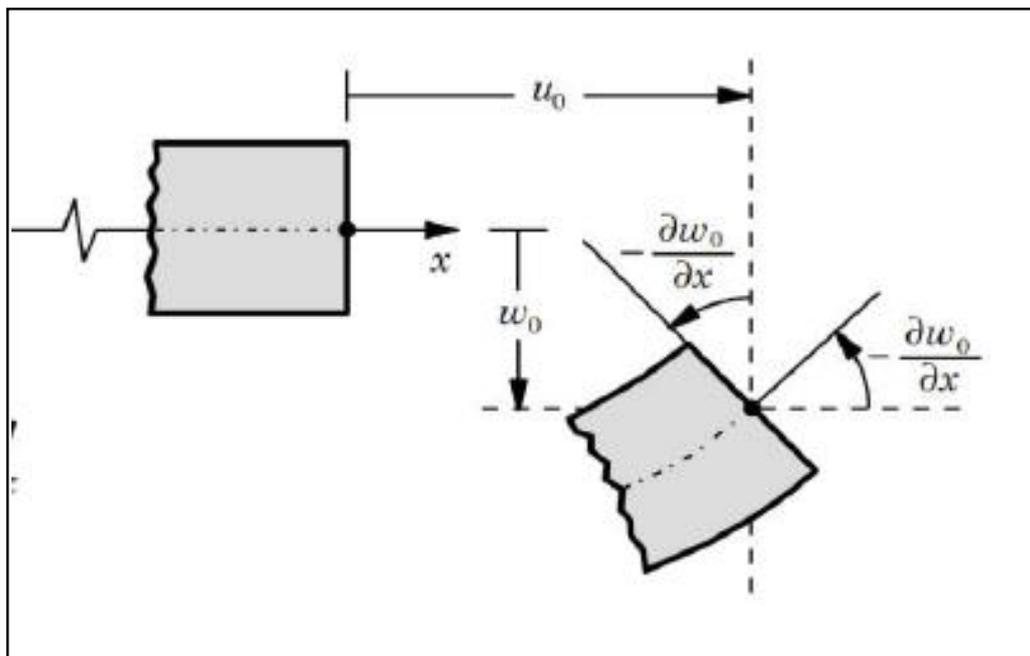


Figure II. 2: Géométrie déformée et non déformée d'un coté de plaque selon la CLPT.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

La forme suivante :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

II.4.1. Champ de contrainte et déformation

La théorie classique des stratifiés stipule que le champ de déformation est dérivé du champ de déplacement pour une approximation du premier ordre.

Pour les petites déformations et les rotations modérées, la relation contrainte-déplacement est de la forme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

Où : u, v, w sont les composantes du vecteur déplacement en un point M .

u_0, v_0, w_0 sont les composantes du point M dans le plan $(0, x, y)$.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

Cette théorie fait l'hypothèse de négliger le cisaillement transverse dans le matériau c'est à dire :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= 0 & \text{et} & & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

En négligeant le cisaillement transverse dans (II-27) et on déduit le nouveau champ de forme comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

On tout point M , le tenseur des déformations s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

La matrice de déformations se réduit en trois composantes non nulles, peut être considérée comme la superposition des déformations en membrane (dépendant uniquement des déplacements (u_0, v_0) et des déformations en flexion-torsion (dépendant des angles de rotation de la déformée du plan moyen $(\phi_x$ et $\phi_y)$ et de la cote z du point M). Le champ des déformations (II-29) s'écrit alors :

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

(II.31)

Généralement, les déformations en flexion-torsion s'expriment par la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

Avec :

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \text{(II.32)}$$

Où la matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures ;

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(II.33)}$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \\ k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned} \quad \text{(II.34)}$$

L'état de contraintes et la déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \varepsilon_{zz}$ correspondant à l'état de contrainte planes.

Le tenseur de contraintes en un point M sera :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.35)}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ représentent les contraintes en membranes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

D'après l'expression du champ de déformations (), le champ de contraintes () s'écrit par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + zQ'_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Les résultantes de contraintes qui correspondent les déplacements généralisés ($u_0; v_0; w_0; \emptyset_x; \emptyset_y$) sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Soit sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ k \end{bmatrix}$$

Les équations introduisent les coefficients de rigidité en membrane A_{ij} , les coefficients de rigidité en flexion D_{ij} , et les coefficients de couplage membrane-flexion B_{ij} de la plaque.

Ces coefficients dépendent de la structure du stratifié et s'expriment sous la forme :

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + Bk(x, y)$$

$$M_f(x, y) = B\varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y)$$

$N(x, y)$ et $M_f(x, y)$ représentent les résultantes en membranes et le moment de flexion-torsion respectivement.

Avec :

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + Bk(x, y)$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

$$M_f(x, y) = B\varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y)$$

II.4.2. Equation de mouvement

Par application du principe de travail virtuel :

$$\int_0^t (\partial U + \partial V - \partial K) dt \quad (\text{II.39})$$

Où U est l'énergie potentielle virtuelle de la déformation, V est le travail virtuel effectué par des forces appliquées et K l'énergie cinétique virtuelle.

II.5. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Cette théorie, proposée par Mindlin en 1951, tient compte des effets de les déformations induite par le cisaillement et l'effet dû à l'énergie de rotation. Cette approche plus raffinée du problème de plaque repose également sur une autre cinématique de déformation, et donc sur une autre expression des conditions aux limites. Cette théorie peut être considérée comme une amélioration de la théorie classique (CLPT). Il est essentiellement basé sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin. La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) est basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin, ainsi :[9][10]

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale (σ_z) est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée restedroite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée ;
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur K de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement (**fig 2.3**) est exprimé sous la forme.[1]

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= V_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= W_0(x, y) \quad (\text{II.40}) \end{aligned}$$

Où :

U_0, V_0, W_0 les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ($z = 0$), et ϕ_x, ϕ_y les rotations autour des axes y, x , respectivement.

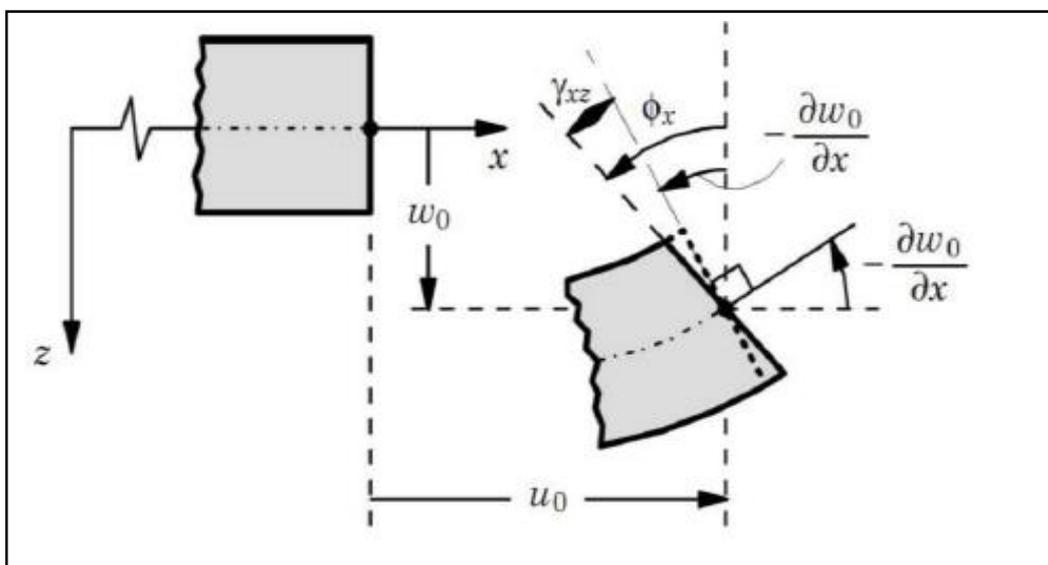


Figure II. 3: Géométrie déformé et non déformé d'un coté de plaque selon la FSDT.

II.6. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Les théories d'ordre supérieur HSDT ont été développées pour l'étude des plaques composites épaisses afin de franchir les limitations des théories classiques, l'HSDT est basée sur la distribution non linéaire du champ à travers l'épaisseur, le facteur de correction de cisaillement n'est plus nécessaire car la variation du cisaillement transversale et le déplacement sont de la même nature.[9][10]

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

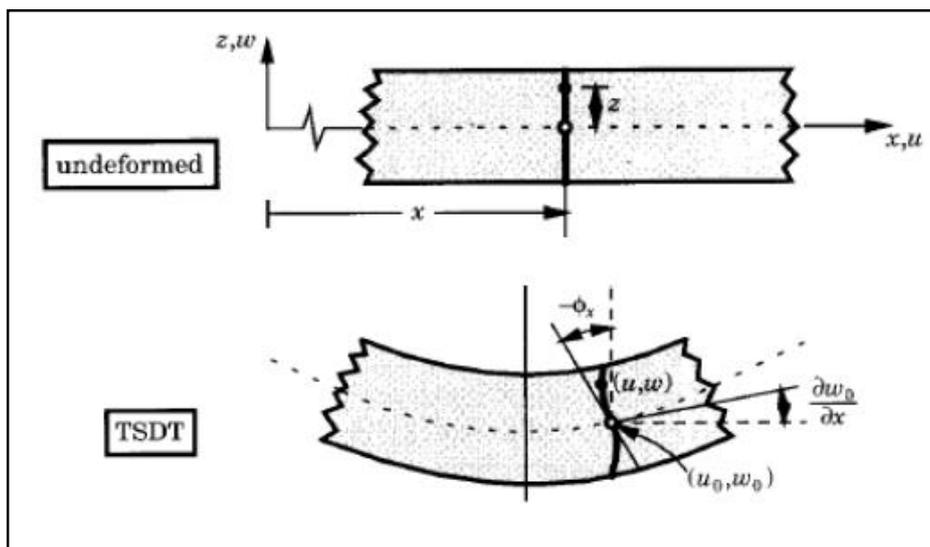


Figure II. 4: Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon la HSDT.

II.6.1. Contraintes Planes Généralisées

La déformation dans l'axe z est nulle et la direction principale est selon z, le tenseur de contrainte s'écrit :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

II.6.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

$$[Q]_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Les constantes de rigidités réduites sont :

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \\
 Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\
 Q_{66} &= G_{LT} \\
 Q_{55} &= G_{LT}'' \\
 Q_{44} &= G_{TT}''
 \end{aligned} \tag{II.43}$$

II.6.3. Matrice de rigidité de chaque pli du stratifié

$$[Q']_{ij} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \tag{II.44}$$

Les constantes de rigidités de chaque pli de stratifié sont :

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11} c^4 + Q_{22} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{12} (s^4 + c^4) \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s c^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s^3 c \\
 Q'_{22} &= Q_{11} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} c^4 \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s^3 c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s c^3 \\
 Q'_{44} &= Q_{44} c^2 + Q_{55} s^2 \\
 Q'_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) s c \\
 Q'_{55} &= Q_{44} s^2 + Q_{55} c^2 \\
 Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] s^2 c^2 + Q_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned} \tag{II.45}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

Avec :

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ Q'_{16} \\ Q'_{26} \\ Q'_{44} \\ Q'_{55} \\ Q'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^4s^4 & 4c^4s^4 & 0 & 0 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 & 0 & 0 \\ C^3S & -CS^3 & -cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ CS^3 & -CS^3 & cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -CS & CS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{44} \\ Q_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

II.7. Théorie de déformation en cisaillement de 3ème ordre de Reddy (TSDT) :

La théorie de REDDY est l'une des théories les plus utilisées et simplifiée dans les théories HSDT, elle représente bien le comportement du stratifié et donne une meilleure précision pour les contraintes de cisaillement transversale sans avoir besoin au facteur de correction en cisaillement, en plus les nombres de variables est le même que dans théorie FSDT définit par cinq variables indépendants.

L'hypothèse de la théorie de REDDY est : la section droite ne reste plus perpendiculaire ni plane après déformation.

Le champ de déplacement s'écrit : [11]

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) + z^2 \theta_x(x, y) + z^3 \lambda_x(x, y) \\ v &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) + z^2 \theta_y(x, y) + z^3 \lambda_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Où : (U_0, V_0, W_0) , (φ_x, φ_y) , (θ_x, θ_y) et (λ_x, λ_y) sont des paramètres à déterminer :

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x, y, 0) \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(x, y, 0) \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(x, y, 0)$$

En introduisant la condition limite libre pour la face supérieure et inférieure du stratifié:

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = Q_{55} \gamma_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) + Q_{45} \gamma_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\sigma_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = Q_{45} \gamma_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) + Q_{44} \gamma_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\gamma_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_x + 3z^2\lambda_x)_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$$

$$\gamma_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}) = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_y + 3z^2\lambda_y)_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (-h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x) = 0 \quad \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x) = 0$$

$$\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (-h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) = 0$$

$$\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) = 0$$

$$\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (-h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) = 0$$

$$\lambda_y = -\frac{4}{3h^2}(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) = 0 \quad \lambda_x = -\frac{4}{3h^2}(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) = 0$$

$$\theta_x = 0 \quad \theta_y = 0$$

Le champ de déplacement devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4}{3h} z^3 (\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4}{3h} z^3 (\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y})$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.49})$$

$$\phi_x = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \phi_y = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$$

II.7.1. Champs de déformation et contrainte

En remplaçant le champ de déplacement dans le système des lois de déformation on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ 0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^1_{xx} \\ \varepsilon^1_{yy} \\ \gamma^1_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon^3_{xx} \\ \varepsilon^3_{yy} \\ \gamma^3_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} ;$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^1_{xx} \\ \varepsilon^1_{yy} \\ \gamma^1_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^3_{xx} \\ \varepsilon^3_{yy} \\ \gamma^3_{xy} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_{yz} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} 2 \\ \gamma_{yz} \\ 2 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ \gamma_{yz} \\ 2 \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$c_1 = \frac{3}{h^2} \quad , \quad c_2 = 3c_1$$

II.7.2 Matrice de passage de déformation et contrainte

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{LT'} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{TT'} \\ \varepsilon_{LT'} \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.7.3. Equation de mouvement

Les équations de mouvement sont tirées du principe de déplacement virtuel, et pour le cas de la théorie d'ordre supérieur, les équations de mouvement impliquent l'énergie de déplacement virtuel et le travail virtuel produit par les forces, et l'énergie cinétique virtuelle.

Avec :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \\
 \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + c_1 (\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} + q &= 0 \\
 \frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x &= 0 \\
 \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y &= 0
 \end{aligned} \tag{II.54}$$

$$\bar{M}_{ij} = M_{ij} - c_1 P_{ij} \quad (i,j = 1,2,6), \quad \bar{Q}_i = Q_{ij} - c_2 R_{ij}, \quad (i,j = 4,5)$$

Les résultantes des contraintes sont reliées à la déformation avec cette équation ci-dessus :

$$\begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \\ [P] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathcal{E}^0\} \\ \{\mathcal{E}^1\} \\ \{\mathcal{E}^3\} \end{Bmatrix} \tag{II.55}$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathcal{Y}^0\} \\ \{\mathcal{Y}^2\} \end{Bmatrix} \tag{II.56}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij},) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q'_{ij}{}^k, (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad i, j = 1,2,6$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{K=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^K(1, z^2, z^4) dz, i, j = 4, 5$$

$$A_{ij} = \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i - z_{i-1}) \cdot Q_{ij}^i$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^2 - z_{i-1}^2) \cdot Q_{ij}^i$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \cdot Q_{ij}^i \quad (\text{II.57})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^4 - z_{i-1}^4) \cdot Q_{ij}^i$$

$$F_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^5 - z_{i-1}^5) \cdot Q_{ij}^i$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^7 - z_{i-1}^7) \cdot Q_{ij}^i$$

$$\{[N], [M], [P]\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} (1, z^2, z^3) dz$$

$$\{[Q], [R]\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} (1, z^2) dz$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{xy} \\ Q_{xz} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{xy} \\ R_{xz} \end{bmatrix}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

II.7.4. Solution de Navier

Les équations de mouvement de la théorie du troisième ordre de Reddy sont très similaires dans leur forme à la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. En fait, les solutions Navier pour les stratifiés peuvent être développées en utilisant la théorie du troisième ordre. Pour les stratifiés à plis croisés, les rigidités suivantes sont nulles : [12]

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \\ E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u_0(x, 0) = \varphi_x(x, 0) = u_0(x, b) = \varphi_x(x, b) = 0 \\ v_0(0, y) = \varphi_y(0, y) = v_0(a, y) = \varphi_y(a, y) = 0 \\ w_0(x, 0) = w_0(x, b) = w_0(0, y) = w_0(a, y) = 0 \\ N_{xx}(0, y) = N_{xx}(a, y) = N_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, b) = 0 \\ \bar{M}_{xx}(0, y) = \bar{M}_{xx}(a, y) = \bar{M}_{yy}(x, 0) = \bar{M}_{yy}(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Les inconnues sont exprimées en termes de double séries :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \\ w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ \phi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ \phi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\Delta = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Le chargement mécanique transversal est aussi développé en double série par l'équation suivante :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{II.62})$$

$$Q_{mn}(x, y) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

Les coefficients du vecteur Δ sont obtenus à travers la résolution du système suivant (cas d'un chargement mécanique) :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

Avec :

$$s_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2$$

$$s_{12} = (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{13} = -c_1 [E_{11} \alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \beta^2] \alpha$$

$$s_{14} = \hat{B}_{11} \alpha^2 + \hat{B}_{66} \beta^2$$

$$s_{15} = (\hat{B}_{12} + \hat{B}_{66}) \alpha \beta$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$s_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2$$

$$s_{23} = -c_1 [E_{22} \beta^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \alpha^2] \beta$$

$$s_{24} = s_{15}$$

$$s_{25} = \hat{B}_{66} \alpha^2 + \hat{B}_{22} \beta^2$$

$$s_{33} = \bar{A}_{55} \alpha^2 + \bar{A}_{44} \beta^2 + c_1^2 [H_{11} \alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66}) \alpha^2 \beta^2 + H_{22} \beta^4]$$

$$s_{34} = \bar{A}_{55} \alpha - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha \beta^2]$$

$$s_{35} = \bar{A}_{44} \beta - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha^2 \beta]$$

(II.64)

$$s_{44} = \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11} \alpha^2 + D_{66} \beta^2$$

$$s_{45} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{55} = \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66} \alpha^2 + D_{22} \beta^2$$

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_1 D_{ij}, \hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij}, \hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij}, \bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_1 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2 c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij}, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} = D_{ij} - 2 c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij}, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2 c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij}, (i, j = 4, 5)$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

II.7.5. Calcul des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_x \end{Bmatrix} \Delta T - \begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix}^k \Delta C(x, y, z) \right) \quad (\text{II.65})$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left(R_{mn}^{xx} + z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx} \right) s(\alpha x) s(\beta y) \\ \left(R_{mn}^{yy} + z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy} \right) s(\alpha x) s(\beta y) \\ \left(R_{mn}^{xy} + z S_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy} \right) c(\alpha x) c(\beta y) \end{array} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{mn}^{xx} \\ T_{mn}^{yy} \\ T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2 \alpha \beta W_{mn}) \end{Bmatrix}$$

Les contraintes de cisaillement transverses des équations constitutives sont données par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}^k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \left(\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$(1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \left\{ \begin{array}{l} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \sin(\beta y) \cos(\alpha x) \end{array} \right\}$$

Où : $c_2 = \frac{4}{h^2}$ ne signifie pas que les contraintes de cisaillement transverses sont quadratiques par couches dans l'épaisseur.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites

II.7.6.Cas hygrothermomécanique

Pour le cas d'un comportement hygrothermomécanique l'effet de la température et l'humidité sont pris en consideration pour le calculs des contraintes :

$$\sigma(i) = f(q_0(i)) + f(\Delta T) + f(\Delta C(i)) \quad (\text{II.66})$$

le vecteur Δ est obtenu en resolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha N_{mn}^{T1} - \alpha N_{mn}^{C1} \\ \beta N_{mn}^{T2} - \beta N_{mn}^{C2} \\ 0 \\ \alpha \bar{M}_{mn}^{T1} - \alpha \bar{M}_{mn}^{C2} \\ \beta \bar{M}_{mn}^{T2} - \beta \bar{M}_{mn}^{C2} \end{array} \right\} \quad (\text{II.67})$$

$$N^{T(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T. dz$$

$$M^{T(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T. T. dz$$

$$P^{T(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T. z^3. dz$$

$$N^{C(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). dz \quad (\text{II.68})$$

$$M^{C(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). z. dz$$

$$P^{C(a)}_{mn} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). z^3. dz$$

Avec : (a) = xx,yy,xy

$$\bar{M}_{mn}^{T(a)} = M_{mn}^{T(a)} - \frac{4}{3\Box^2} P_{mn}^{T(a)}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

$$\bar{M}_{mn}^{c(a)} = M_{mn}^{c(a)} - \frac{4}{3\Omega^2} P_{mn}^{c(a)}$$

Les contraintes relatives à chaque sous couche peut être calculer par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_x \end{pmatrix}^k \Delta T - \begin{pmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{pmatrix}^k \Delta C(x, y, z) \right) \quad \text{(II.69)}$$

II.7.7. L'équation de diffusion (L'équation de FICK)

La loi de fick établie par Adolph fick en 1855 décrit le phénomène de diffusion, c'est-à-dire la façon dont les gaz et les liquides se propagent et se mélangent à l'intérieur d'une structure. La diffusion fickienne obéit à la règle générale selon laquelle les particules diffusent des zones de forte concentration vers les zones de faible concentration, au fil du temps, la concentration dans une substance deviendra la même, lorsque cela se produit la substance a atteint un état stable, d'après la loi de fick le flux molaire dû à la diffusion est proportionnel au gradient de concentration, pour une plaque d'épaisseur h négligeable par rapport aux dimensions a et b (a,b>>h) , la direction privilégié du déplacement des molécules d'eau est suivant l'axe z C=C(z,t),[13]

$$\text{div}(\vec{\varphi}) = - \frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{(II.70)}$$

Lorsque la diffusion est unidirectionnelle suivant z, et que le coefficient de diffusion est le même en chaque point, ce dernier est donc indépendant de la concentration en eau,

On obtient alors :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad \text{(II.71)}$$

Chapitre II : Modélisation mécanique et hydro thermomécanique des matériaux composites

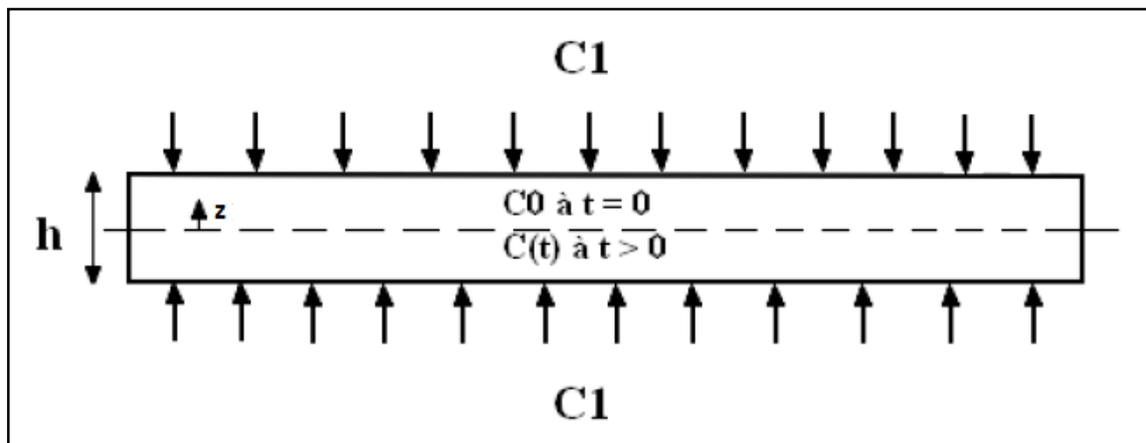


Figure II. 5: Schéma de la diffusion dans une plaque.

Les conditions initiales et aux limites sont :[14]

$$t=0 \quad \frac{-h}{2} < z < \frac{h}{2} \quad \rightarrow \rightarrow C=C_0 \quad (\text{II.72})$$

$$t=0 \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad \rightarrow \rightarrow C=C_s$$

Donc la solution finale de l'équation de diffusion 1D avec les conditions initiales et aux limites qu'on a eu est :[14]

$$\frac{C - C_0}{C_s - C_0} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h} \exp \left[\frac{-D_z(2n+1)^2\pi^2 t}{h^2} \right]$$

$$C = \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h} \exp \left[\frac{-D_z(2n+1)^2\pi^2 t}{h^2} \right] \right] \times (C_s - C_0) + C_0 \quad (\text{II.73})$$

Avec :

- z : distance à partir du plan central de la plaque suivant l'épaisseur,
- t : durée d'exposition à l'humidité de conditionnement,
- h : épaisseur de la plaque,
- C₀ : concentration initiale en eau du matériau.

La diffusivité D (équation d'Arrhenius) [12] : $D = A \exp[B/T(k^\circ)]$ (II.74)

La concentration à la saturation C_s [12] : $C_s = C_\infty = C^*HR^b$ (II.75)

Chapitre III : Calcul numérique et résultats

III.1. Introduction

Dans ce qui suit nous allons présenter les résultats des simulations obtenues à travers le programme de calcul développé par le logiciel MATLAB afin de voir l'influence de la température et l'humidité sur le comportement des plaques composites épaisses simplement supportée suivant la théorie de REDDY.

III.2. Logiciel MATLAB

MATLAB est une abréviation de *MATRIX LABORatory*, Ecrit à l'origine, en Fortran, par C MOLER. Ce dernier, est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiner au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.[15]

MATLAB permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmations (C ou Fortran), MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- La programmation facile,
- La bibliothèque mathématique très compréhensive,
- L'outil graphique qui inclus les fonctions d'interface graphique et les utilitaires.

III.3. Interface graphique

III.3.1. L'environnement MATLAB

MATLAB affiche au démarrage plusieurs fenêtres. Selon la version on peut trouver les fenêtres suivantes :

- Current Folder : indique le répertoire courant ainsi que les fichiers existants.
- Workspace : indique toutes les variables existantes avec leurs types et valeurs.
- Command History : garde la trace de toutes les commandes entrées par l'utilisateur.
- Command Window : utilisées pour formuler nos expressions et interagir avec MATLAB. [15]

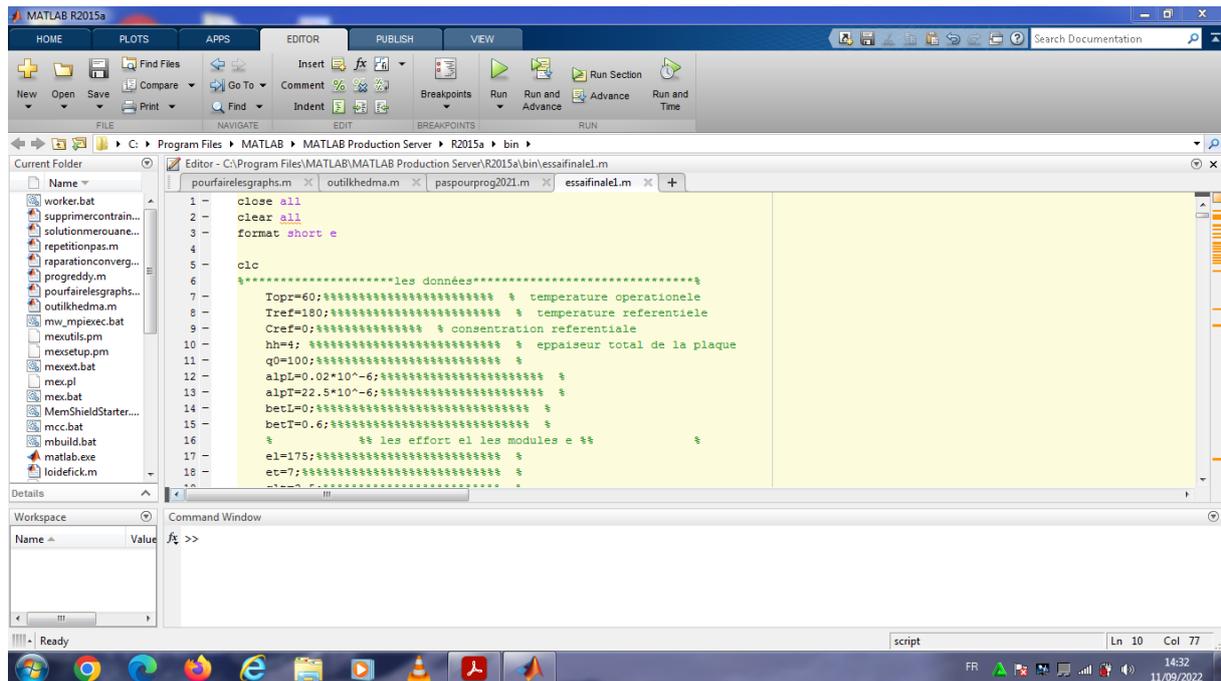


Figure III. 1: Interface graphique de MATLAB.

III.3.2. Origin

Origin est un logiciel de traitement et d'analyse de données scientifiques pour environnement Microsoft Windows développé par OriginLab.

Origin offre une interface facile à utiliser pour les débutants, combinée à la possibilité d'effectuer une personnalisation avancée à mesure que vous vous familiarisez avec l'application.

Les graphiques d'origine et les résultats d'analyse peuvent être automatiquement mis à jour en cas de changement de données ou de paramètres, ce qui vous permet de créer des modèles pour des tâches répétitives ou d'effectuer des opérations par lots à partir de l'interface utilisateur.[16]

III.4. Organigramme du programme développé

Pour présenter le comportement de la plaque composite épaisse simplement supportée sous un effet hygrothermique, on a élaboré un programme MATLAB en se basant sur la théorie de REDDY, La stratifiée est soumise à un chargement hygroscopique est imposé par la loi de Fick., Notre programme est décrit à travers l'organigramme présenté ci-dessous :

Les contraintes présentes dans les graphes seront calculées par la manière suivante :

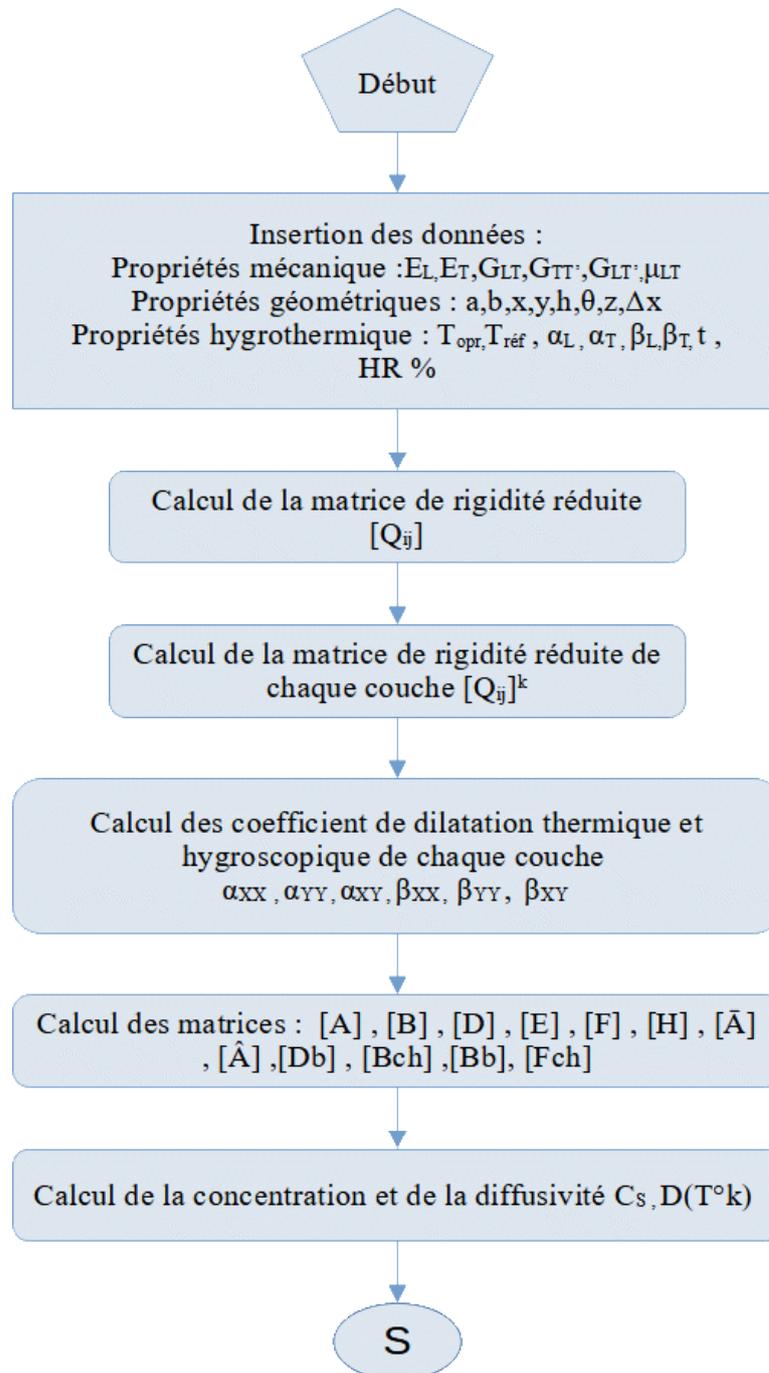
$$\overline{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{b^2} \right)$$

$$\overline{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right) \left(\frac{h^2}{b^2} \right)$$

$$\overline{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{b^2} \right)$$

$$\overline{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \left(\frac{h}{b} \right)$$

$$\overline{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \left(\frac{h}{b} \right)$$



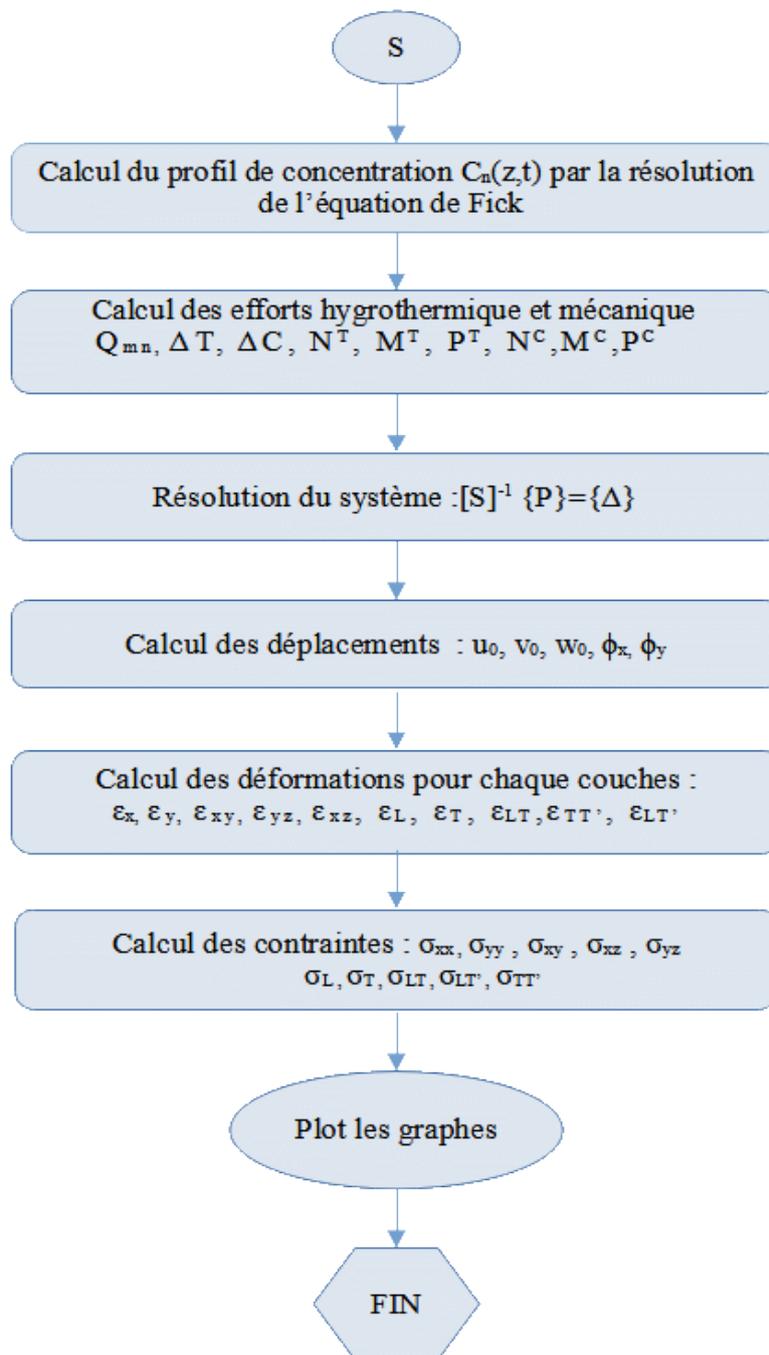


Figure III. 2: Organigramme de la plaque épaisse.

Les résultats de notre programme ont été validés avec les références [14] [17] [18].

III.5. Résultats de simulations

Le stratifié type de notre étude est un stratifié composite en T300/5208. Le T300 est la fibre de carbone et le N5208 est la matrice. Nous présentons ci-dessous sous forme de tableau les caractéristiques mécaniques et hygrothermiques du stratifié [14][17][18] :

Tableau III. 1: Les caractéristiques mécaniques et hygrothermiques du matériau.

<i>Stratifié T300/5208</i>	
Module de Young Longitudinal	$E_L = 175 \text{ GPA}$
Module de Young transversale	$E_T = 7 \text{ GPA}$
Module de cisaillement	$G_{LT} = 3.5 \text{ GPA}$ $G_{LT'} = 3.5 \text{ GPA}$ $G_{TT'} = 1.4 \text{ GPA}$
Coefficient de Poisson principale	$\nu_{LT} = 0.25$
Les dimensions de la plaque	a= 90 mm b= 40 mm h= 4 mm
Orientation des couches	$[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$
Coefficient d'expansion hygroscopique	$\beta_L = 0$ $\beta_T = 0.6$
Coefficient de dilation thermique	$\alpha_L = 0.02 \times 10^{-6}$ $\alpha_T = 22.5 \times 10^{-6}$
Diffusivité (mm ² /s)	$D = 132 \exp(-6750/T(K^\circ))$
Concentration à la saturation	$C_s = 0.015 \text{ HR}\%$

III.5.1. L'influence de la température opérationnelle :

La simulation consiste à varier la température opérationnelle du stratifié et observer l'influence de cette sur l'état de contrainte du matériau. Avec une température référentielle égale à 180°C, une durée de t=350h et HR=40%.

Tableau III. 2: Données de simulation 1.

N°	1	2	3
T opr (°c)	30	45	60
Tref (°c)	t(h)		HR%
180	350		40

- **Simulation 1** : Variation de la température opérationnelle (T=30°C T=45°C T=60°C)

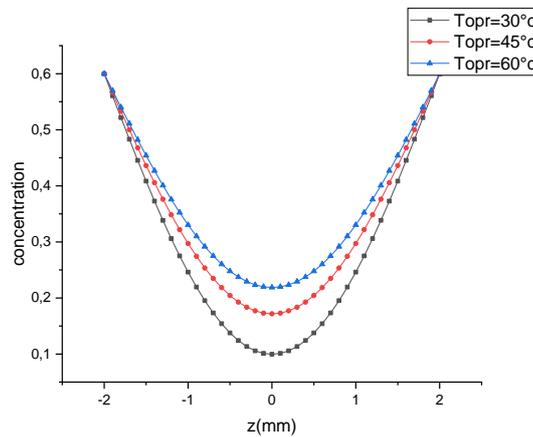
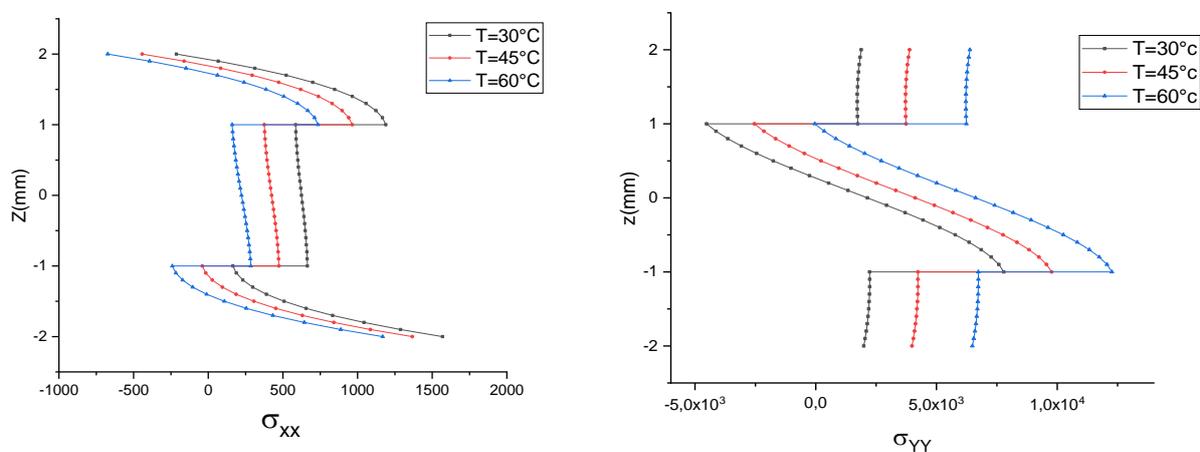


Figure III. 3: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes températures opérationnelles(T).



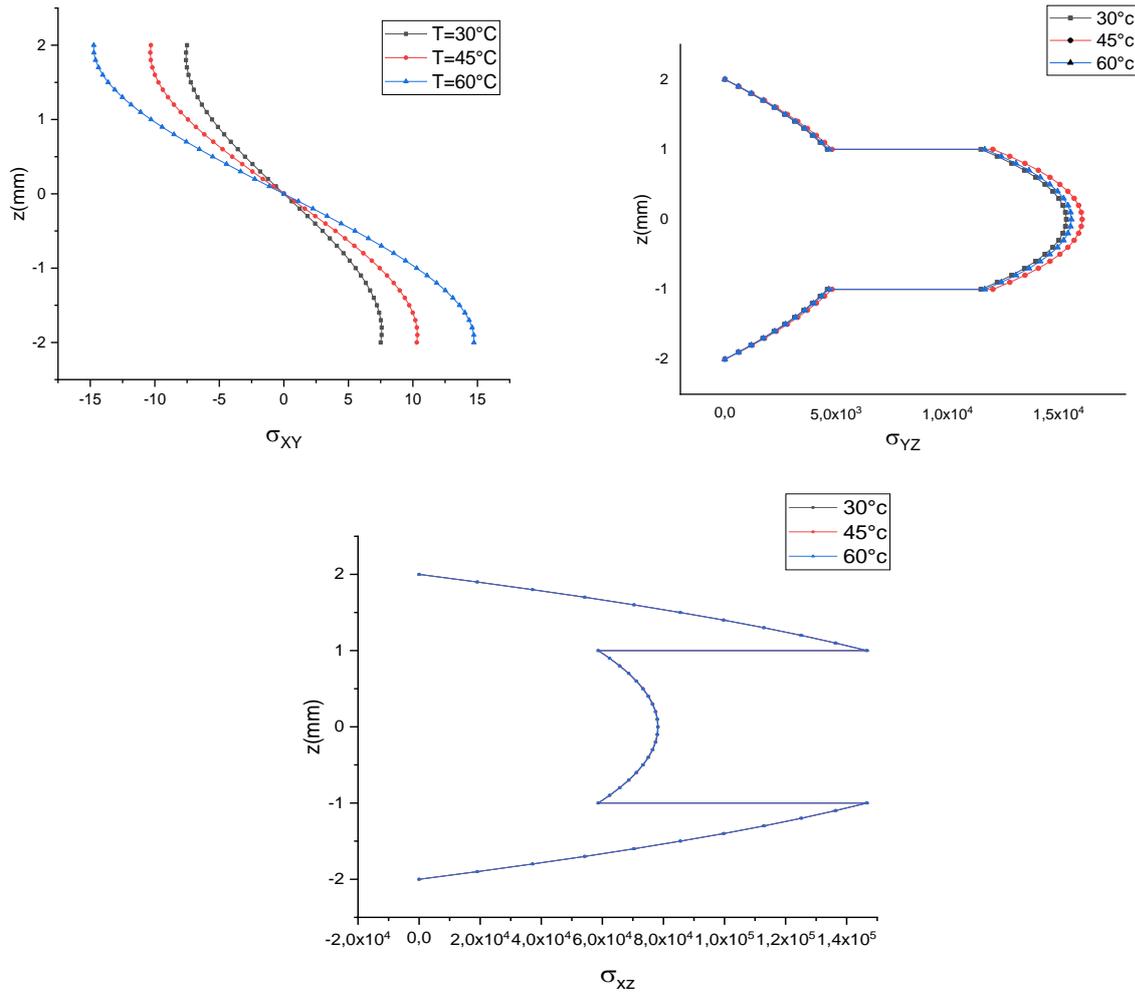
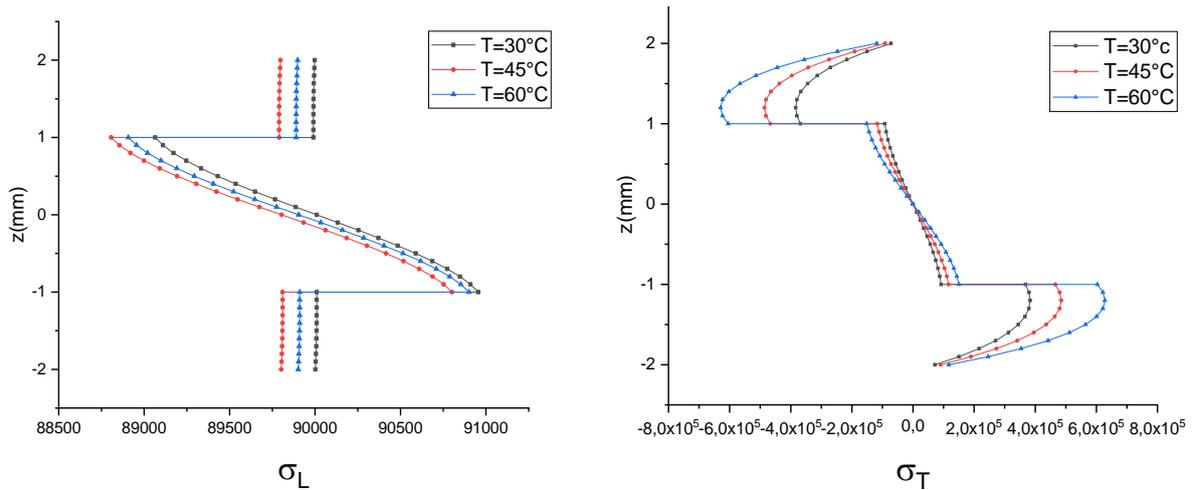


Figure III. 4: Influence de la température opérationnelle sur les contraintes dans le repère global.

Repère LT



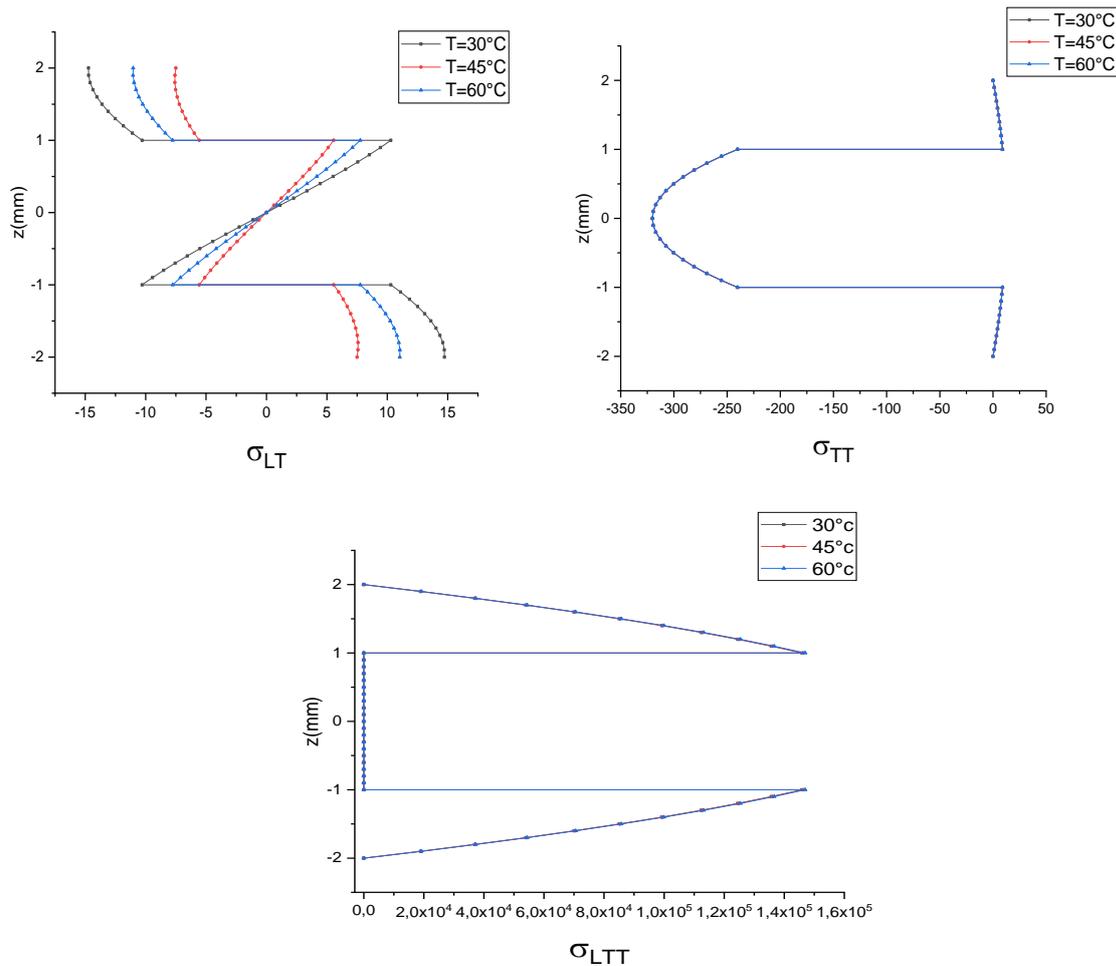


Figure III. 5: Influence de la température opérationnelle sur les contraintes dans le repère local.

Cette simulation représente le comportement du stratifié composite croisée cité dans le tableau III.1 , en variant la valeur de la température opérationnelle avec une température référentielle égale à 180°C, le profil de la concentration est calculée à travers la loi de fick pour une durée de t=350h et HR=40% , Lorsqu'on fait varier la valeur de la température opérationnelle on remarque une grande influence sur les contraintes longitudinales Sig xx pour les couches extérieures qui présentent un angle d'orientation de fibre de 0°, l'augmentation de la température opérationnelle provoque une relaxation des contraintes pour la couche inférieure ($-2 \leq z \leq -1$) , le 2ieme cote extérieur on remarque une augmentation de la contrainte en mode compression, pour les couches intérieures le comportement est indépendant de la température vu l'angle d'orientation particulière 90°, les mêmes commentaires sont appliques a la contrainte transversale Sig YY mais d'une manière inversée, La contrainte Sig xy est faible et cela est dû à l'architecture croisée du stratifié ; on constate aussi une faible influence sur les contraintes de cisaillement.

III.5.2. L'influence de l'humidité relative HR%

Dans cette simulation on fera varier le taux d'humidité relative, pour voir l'influence de ce dernier. Avec un ΔT constant et une concentration initiale C_0 égale à 0, le temps d'exposition est $t=350h$.

Tableau III. 3: Données de simulation 2.

N°	1	2	3
HR%	30	50	70
Tref (°c)	Topr (°c)	t(h)	C_0
180	60	350	0

- **Simulation 2 : Variation d'humidité relative HR (HR=30% HR=50% HR=70%)**

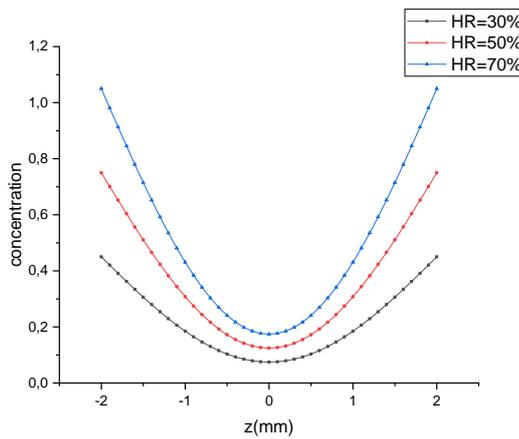
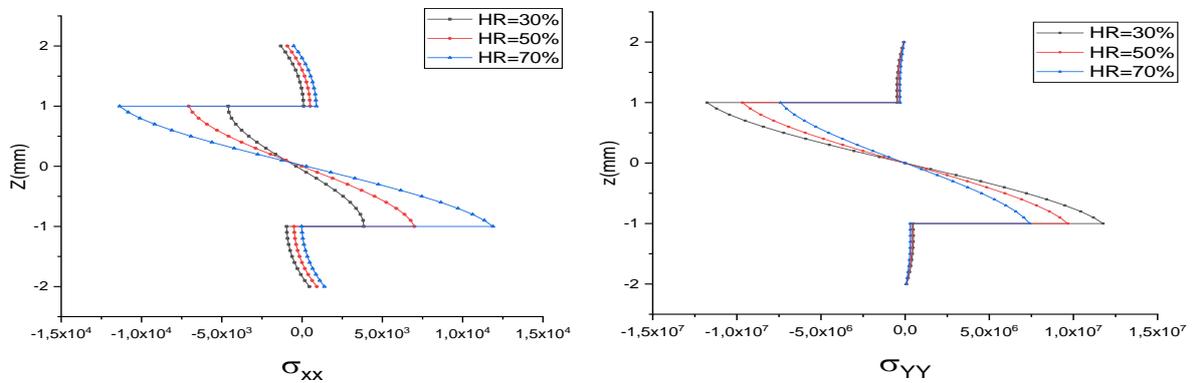


Figure III. 6: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes humidités relatives (HR%).



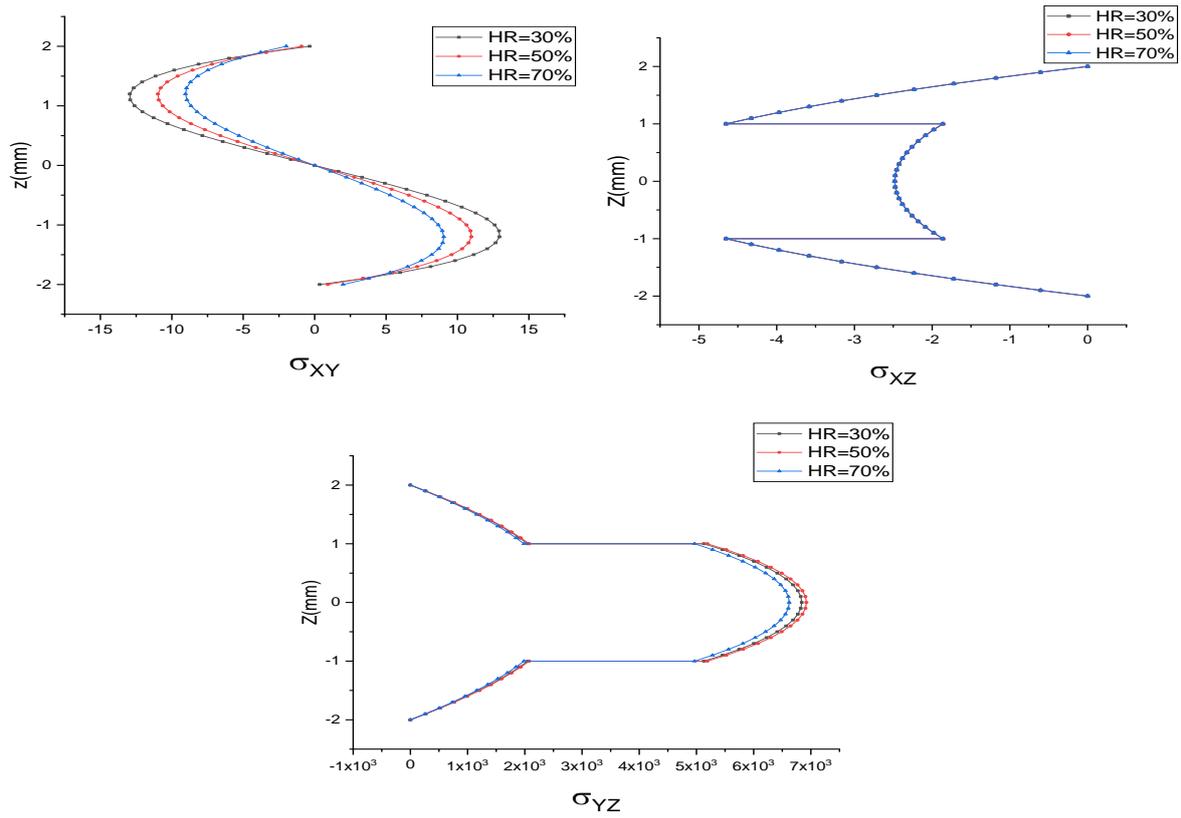
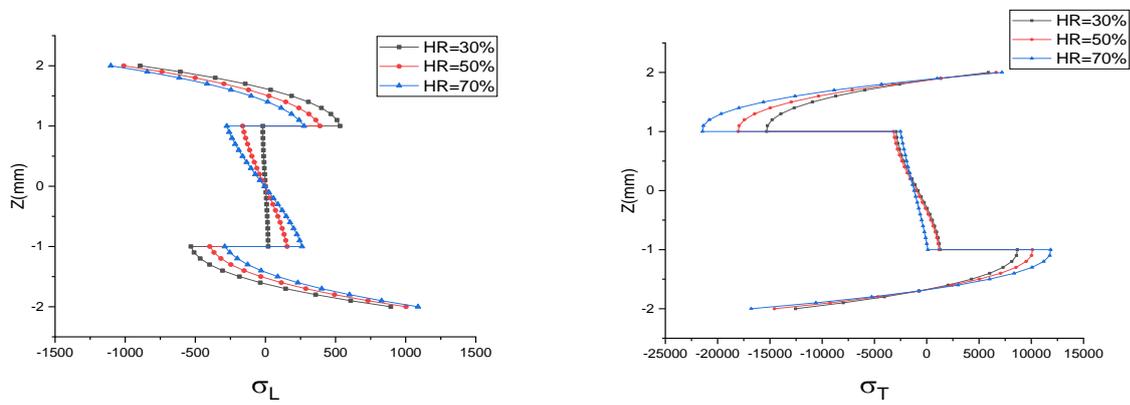


Figure III. 7: Influence de l'humidité relative sur les contraintes dans le repère global.

Repère LT



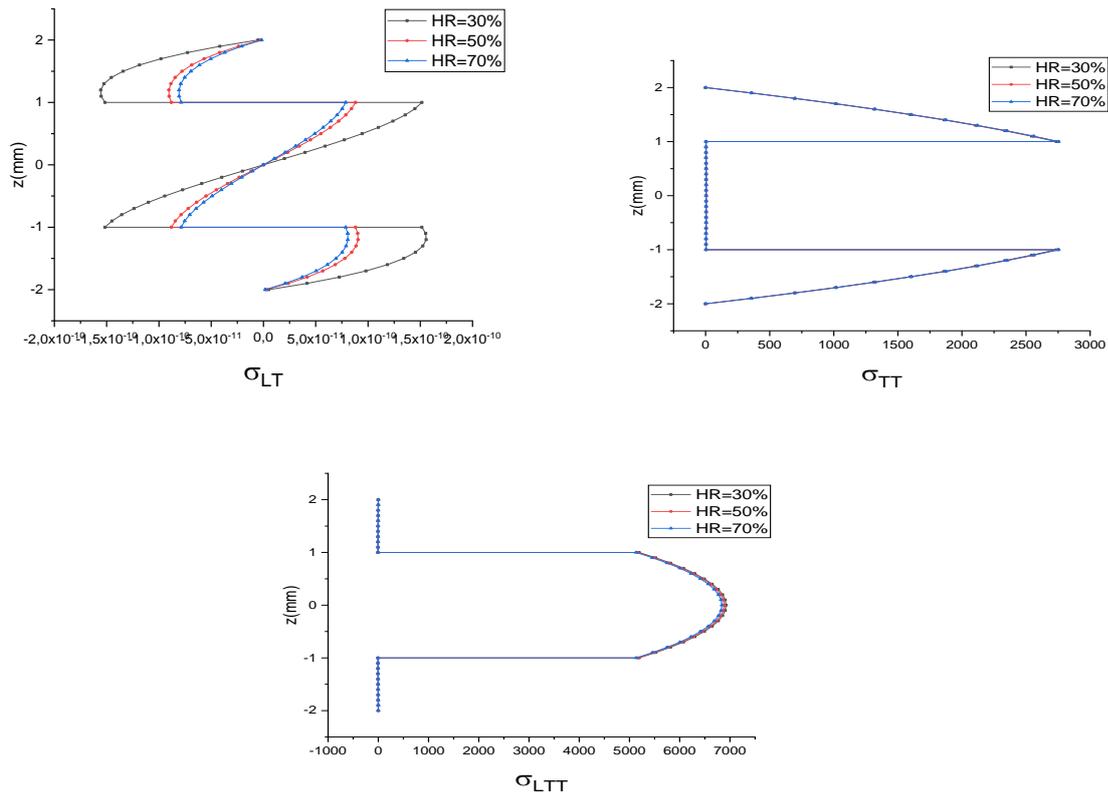


Figure III. 8: Influence de l’humidité relative sur les contraintes dans le repère local.

Dans cette simulation, les résultats des contraintes sont obtenus pour différents cas de concentration en faisant varier l’humidité relative comme indiquée dans le tableau III.3, pour un ΔT constant et une concentration initiale C_0 égale à 0, le temps d’exposition est $t=350h$, lorsque la valeur de HR augmente les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} sont très influencés, l’ordre de grandeur de ces dernières est beaucoup plus importantes par rapport au cas de la température opérationnelle est cela est dû à la valeur importante des coefficients d’expansion hygroscopique. L’augmentation du taux d’humidité relative rend la discontinuité de la contrainte σ_{xx} plus agressive, le même phénomène est remarqué pour le cas de σ_{yy} mais d’une manière inversée.

III.5.3. L'influence de la température référentielle T0

Dans cette simulation on fera varier la température référentielle T0 pour voir l'influence de ce dernier. Avec une température opérationnelle Top=60°C constante et l'humidité relative HR%=60%.

Tableau III. 4: Données de simulation 3.

N°	1	2	3
T0	120	150	220
Topr (°c)	HR%		
60	60		

• Simulation 3 : influence de T0(Tref)

T0=120°C T0=150°C T0=220°C, Top=60°C HR = 60%

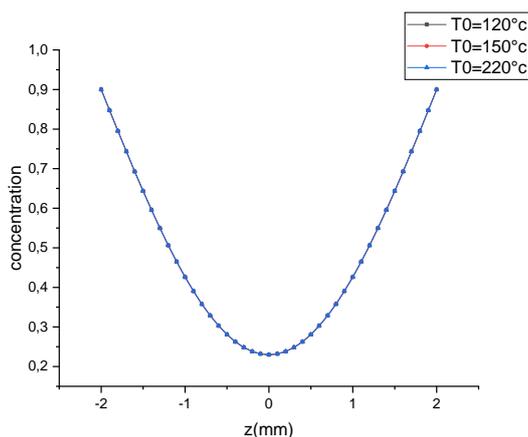
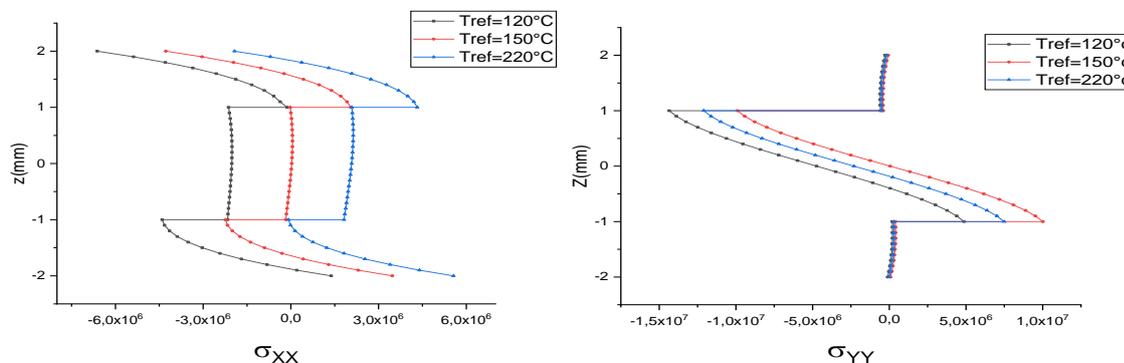


Figure III. 9: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes températures référentielles (T0).



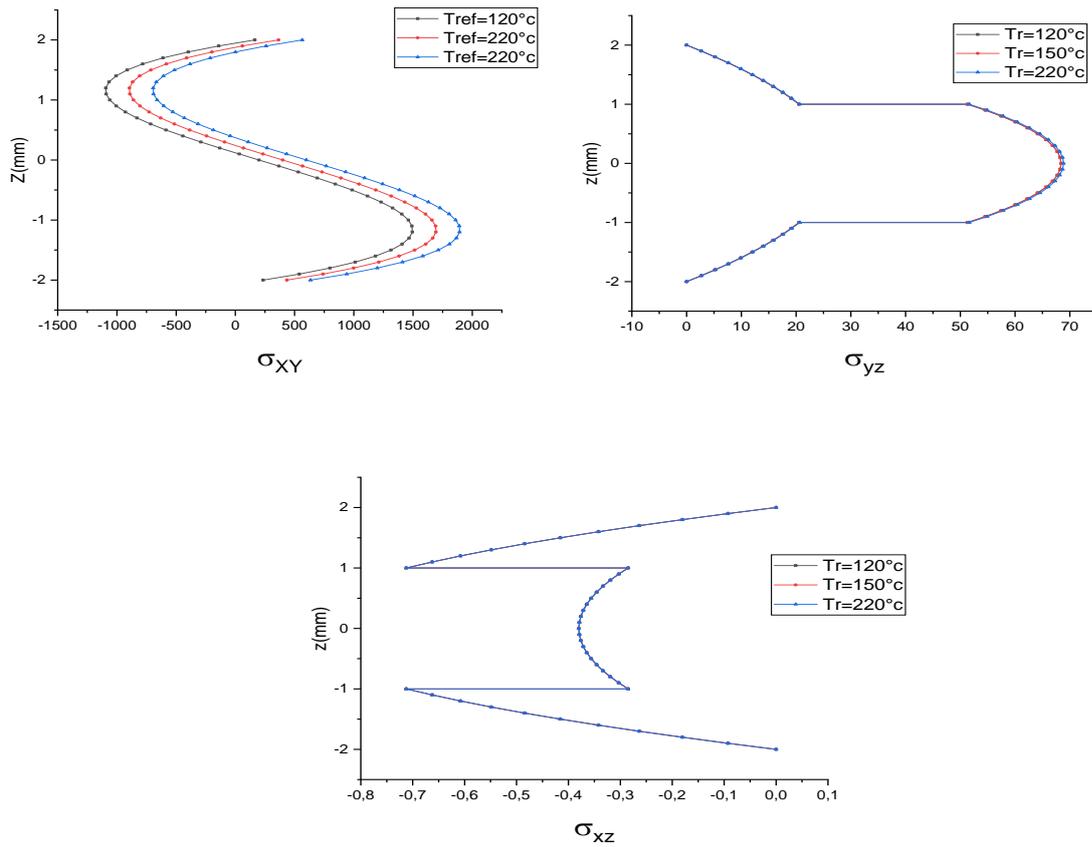
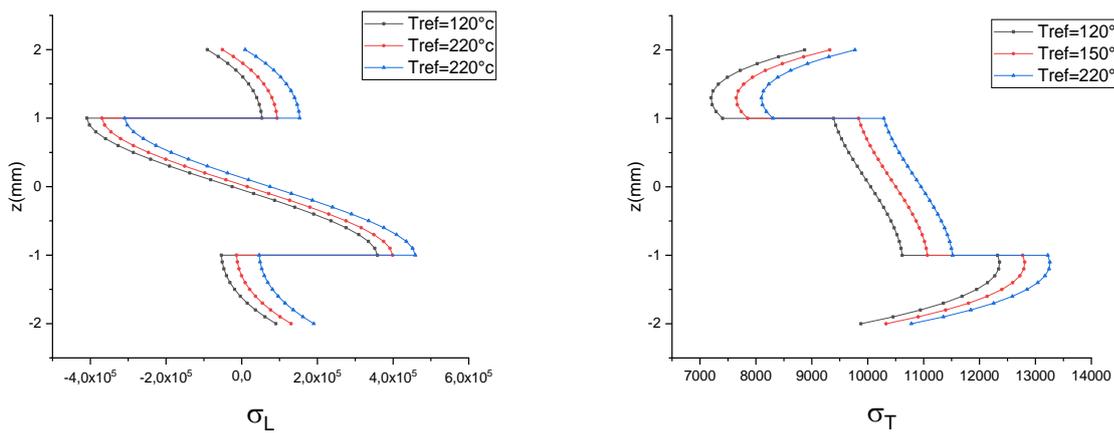


Figure III. 10: Influence de la température référentielle sur les contraintes dans le repère global.

Repère LT



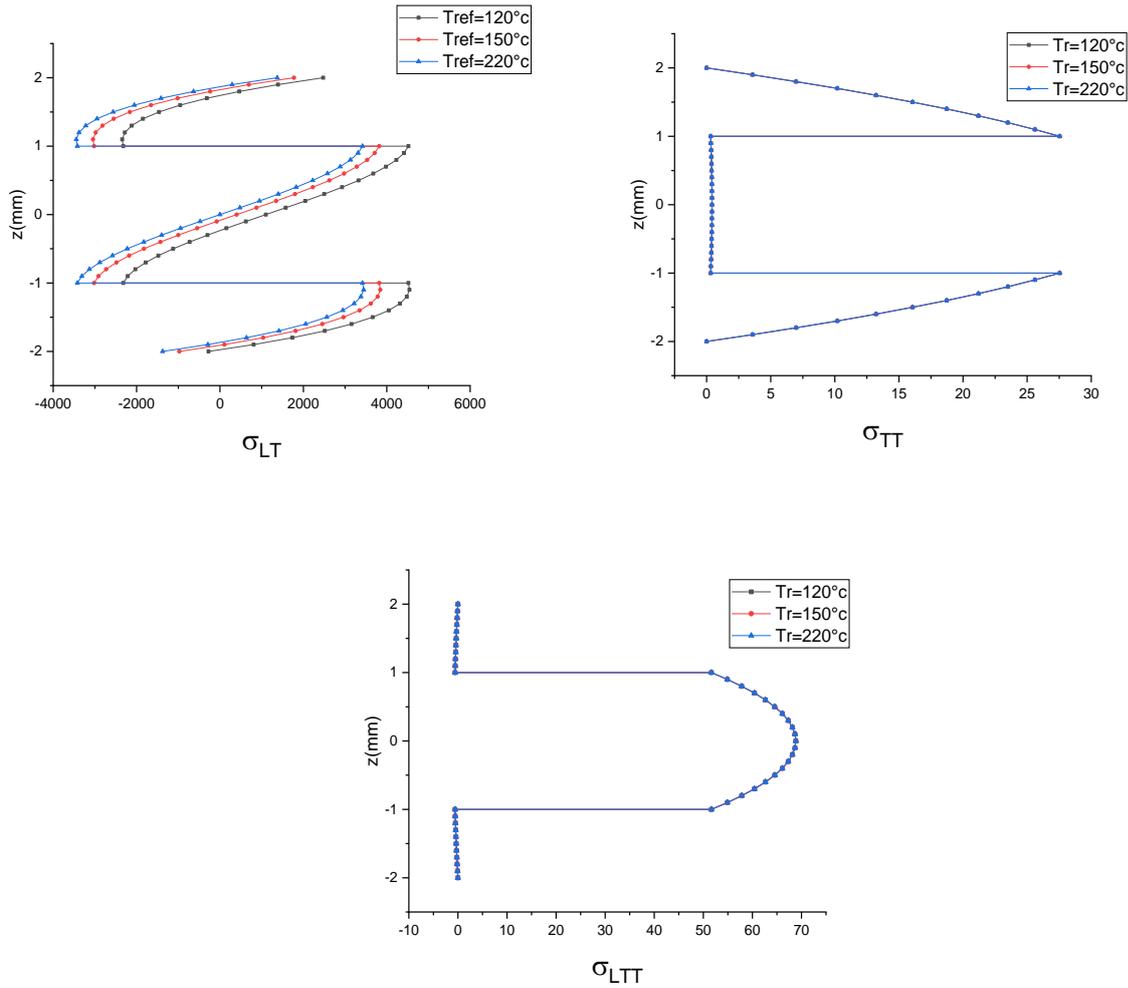


Figure III. 11: Influence de la température référentielle sur les contraintes dans le repère local.

Pour ce cas on a fait varier la température de cuisson pour des valeurs données dans le tableau III.4 tout en gardant la température opérationnelle constante $T_{opr}=60^{\circ}c$, le profil de concentration est calculé en utilisant la loi de Fick , ce dernier est le même pour les 3 cas de T_{ref} , la T_{ref} n'intervient que dans le calcul des contraintes, une dépendance très remarquable est constaté entre l'état de contrainte et la température de référence, si on analyse par couche les même commentaires du cas de variation de la température opérationnelle sont applicables ici.

III.5.4. L'influence de la concentration initiale C0

Dans cette simulation on fera varier la concentration initiale C₀ différente de zéro, Avec un temps d'exposition égale à 350 heures et HR=50%.

Tableau III. 5: Données de simulation 4.

N°	1	2	3
C0	10%Cs	30%Cs	50%Cs
Topr (°c)	Tref (°c)	t(h)	HR%
60	180	350	50

• Simulation 4 : influence de C0

C0=10%Cs C0=30%Cs C0=50%Cs

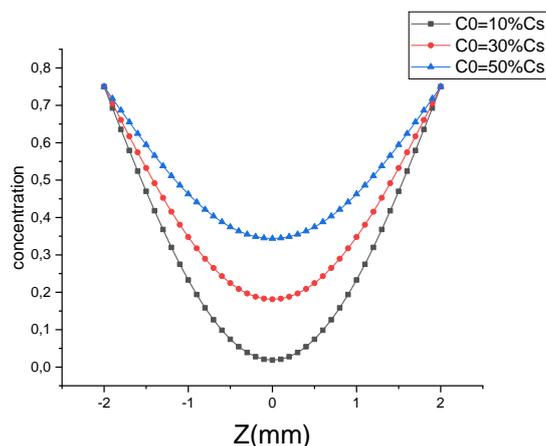
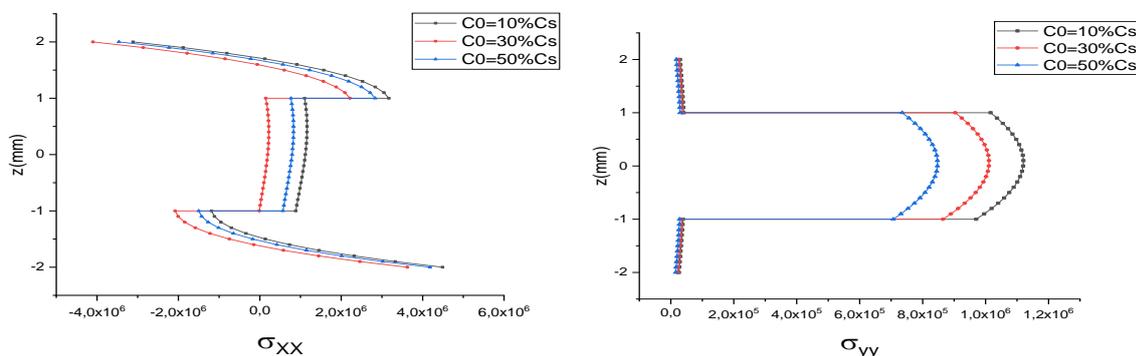


Figure III. 12: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes concentrations initiales(C₀).



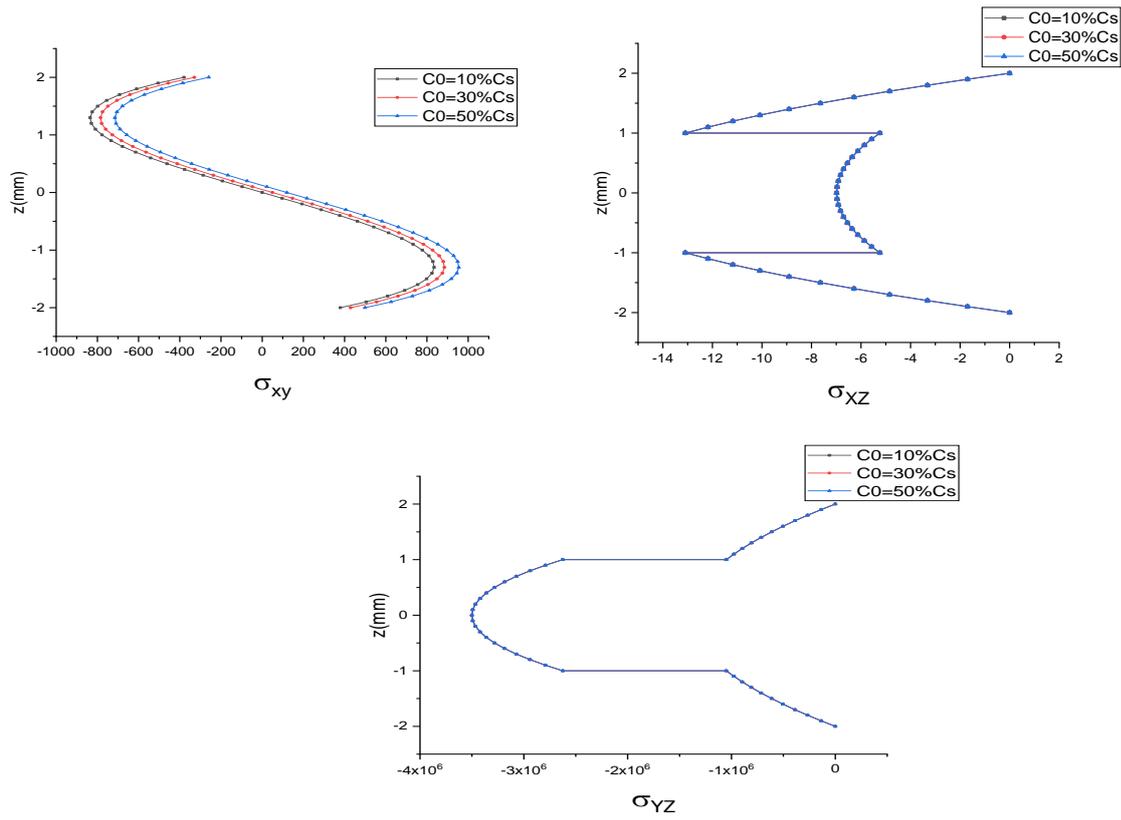
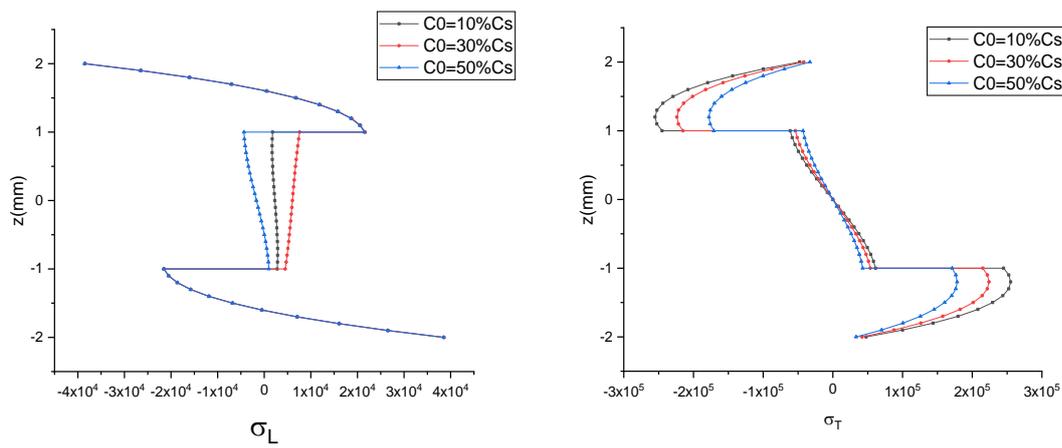


Figure III. 13: Influence de la concentration initiale sur les contraintes dans le repère global.

Repère LT



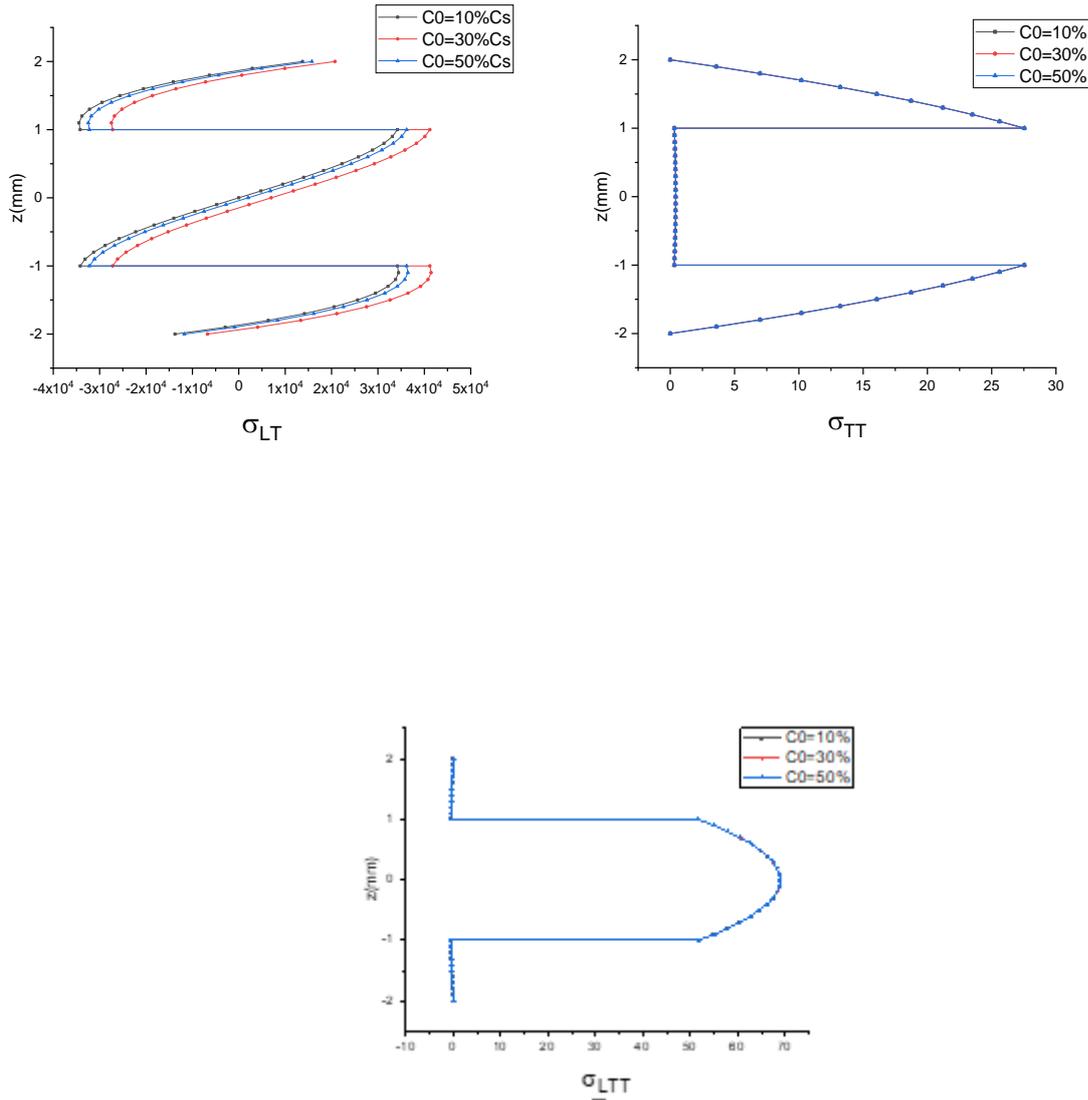


Figure III. 14: Influence de la concentration initiale sur les contraintes dans le repère local.

Dans cette partie on simule le comportement du stratifié avec la prise en compte d'une concentration initiale C_0 différente de zéro, ce qui implique une nouvelle variation de ΔC pour un temps d'exposition égale à 350 heures et $HR=50\%$, les valeurs de C_0 sont données dans le tableau III.5, le but de cette section est de simuler le comportement d'un stratifié contaminer par l'humidité avant de commencer à réagir avec un environnement défini par une température et un taux d'humidité. L'ordre de grandeur des contraintes ici est moins important par au cas des mêmes conditions de simulation avec une $C_0=0$, mais les conséquences de la contamination initiale ne sont pas considérées.

III.5.5. L'influence du temps t

Dans cette simulation on fera varier le temps d'absorption t, avec l'humidité relative égale 50% et un ΔT constant.

Tableau III. 6 : Données de simulation 5.

N°	1	2	3
t	350h	700h	1000h
Topr (°c)	Tref (°c)	C0	HR%
60	180	0	50

- Simulation 5 : Variation du temps t=350h t=700h t=1000h

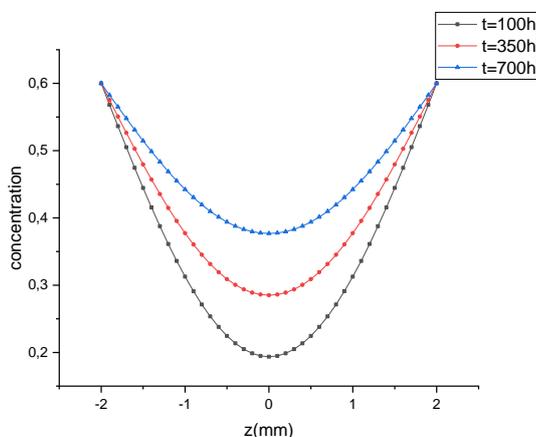
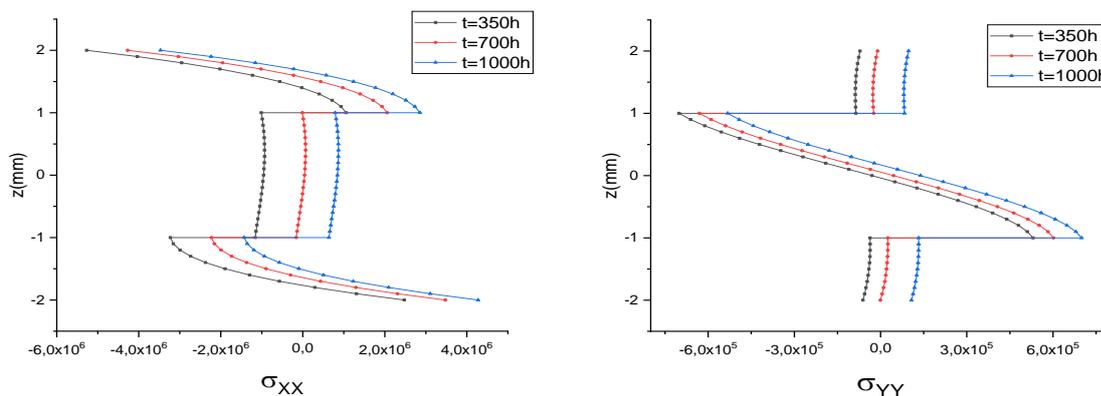


Figure III. 15: Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement (t).



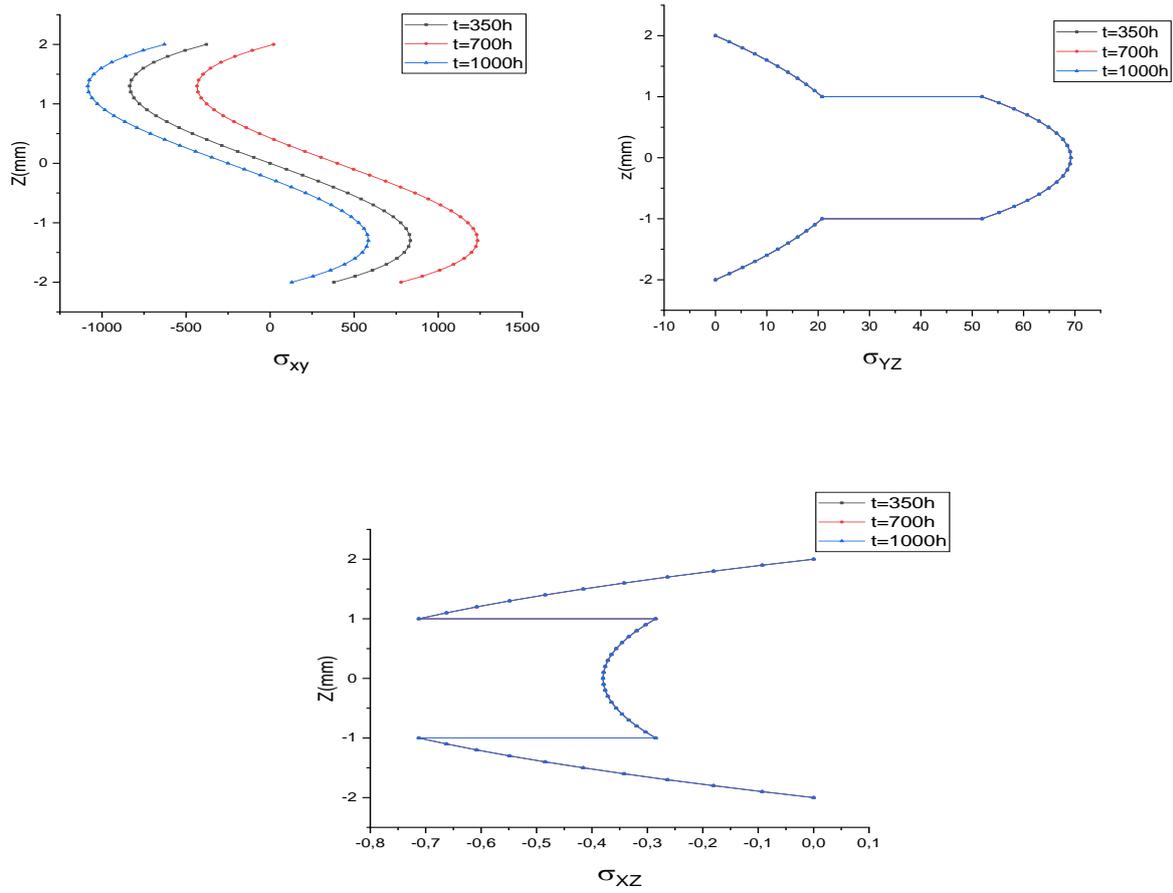
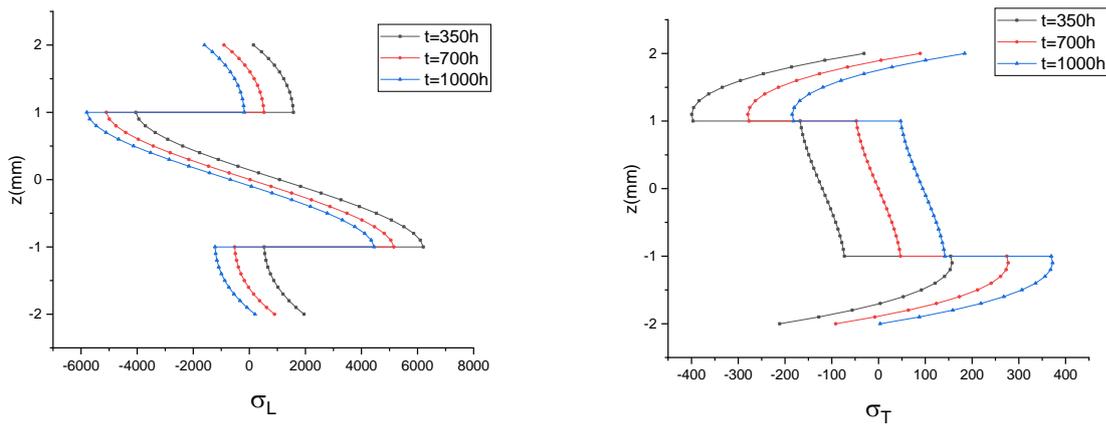


Figure III. 16: Influence du temps sur les contraintes dans le repère global.

Repère LT



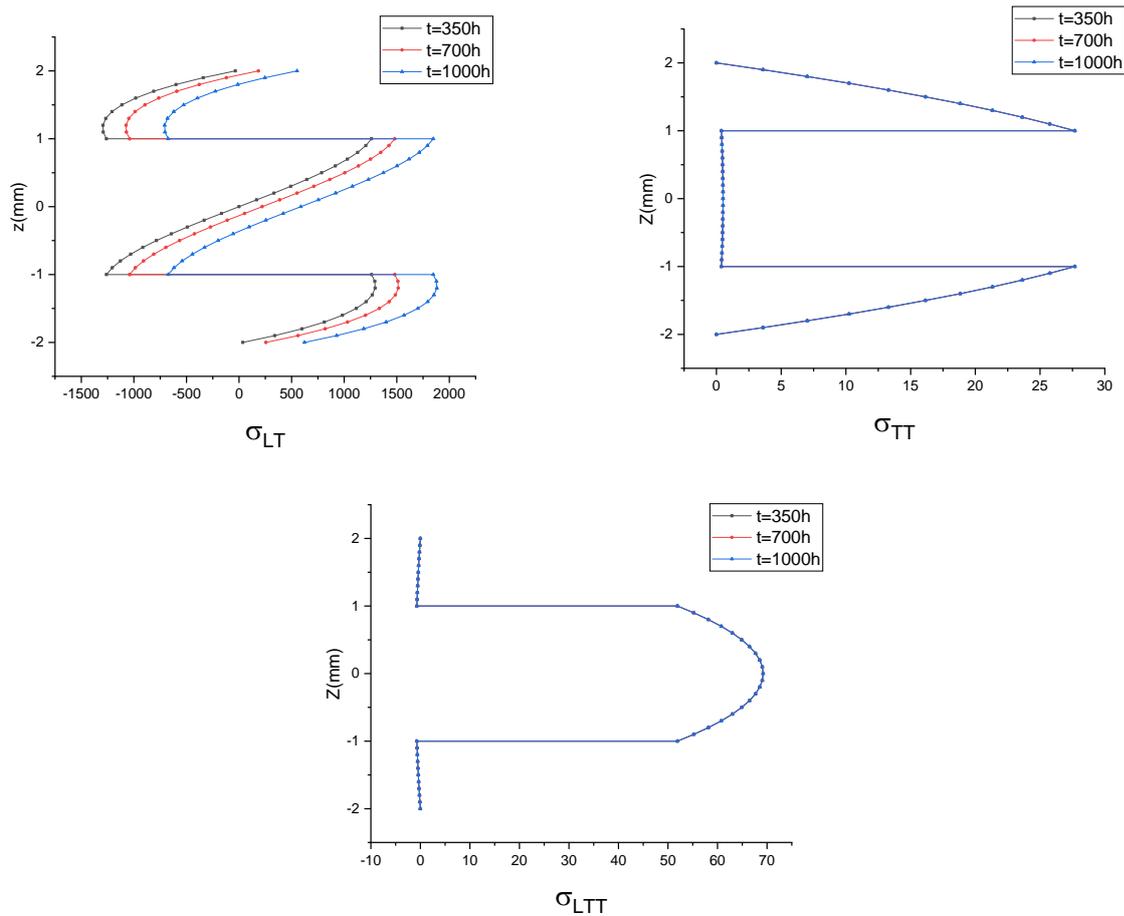


Figure III. 17: Influence du temps sur les contraintes dans le repère local.

L'objectif de cette simulation est de voir l'influence du temps d'absorption sur le comportement du stratifiée, pour cela ont fait varier le temps d'exposition comme indique dans le tableau III.6 pour un milieu d'humidité égale à 50% et un ΔT constant, on constate que les contraintes longitudinales et transversales augmentent au fil du temps.

Conclusion générale

Conclusion générale

Il ressort de cette étude que la résistance et la fiabilité de la structure composite dépendent non seulement de la charge mécanique, mais aussi des conditions environnementales. L'impact des conditions environnementales nécessite donc des méthodes de prédiction qui permettent d'utiliser leurs comportements à long terme dans les dimensions initiales, en tenant compte de l'espérance de vie requise ou imposée. Une étude prédictive sera donc nécessaire pour permettre d'utiliser les résultats obtenus.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à élaborer un code de calcul en utilisant le logiciel Matlab pour but d'étudier le comportement des plaques composites épaisses avec la prise en compte de l'effet de l'environnement, la température et l'humidité sont variés lors du calcul des états des contraintes.

Parmi ces études, la théorie d'ordre élevé développée par REDDY a été utilisée pour évaluer l'influence de température et d'humidité sur le comportement des stratifiés composites.

Dans ce travail, un programme Matlab a été développé, ce qui nous a permis de simuler le comportement des stratifiés composites placés dans des conditions environnementales avec des changements de température et d'humidité.

Les résultats ont montré un rôle contributif des paramètres environnementaux dans le comportement des plaques composites épaisses.

Les résultats montrent que ces dernières contribuent dans les contraintes, elles doivent donc être considérées dans la phase d'ingénierie des structures composites aéronautiques car ces dernières fonctionnent dans des conditions environnementales variables et extrêmes (altitude et vitesse).

Les résultats ont montré que l'ordre de grandeur des contraintes hygroscopique est plus élevée que l'ordre des contraintes thermique ce qui confirme la dominance hygroscopique calculée par la loi de Fick

L'utilisation de la loi de Fick pour le calcul hygroscopique donne des résultats plus proches à la physique du comportement

Les résultats montrent que les paramètres de référence de fabrication (T_0 , C_0) ont une influence sur l'état de contrainte.

Conclusion générale

L'architecture du stratifiée peut jouer un rôle important dans la réduction de la contrainte environnementale.

Dans ce travail l'effet de couplage entre la température et l'humidité été abordé, la température intervient comme accélérateur d'absorption des molécules d'eau, la diffusion est un phénomène thermoactif par la température.

Le vieillissement cause par la température et l'humidité n'a pas été abordé dans ce travail, il est fortement recommandé de prendre en considération ce phénomène destructif afin d'obtenir des résultats plus fiables.

Bibliographie

- [1] : J-M. BERTHELOT matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structure MASSON, ISMANS, institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés le Mans, France Novembre 2010.
- [2] : D. Youcef, ETUDE DE LA RUPTURE EN MODE I D'OUVERTURE DES MATERIAUX COMPOSITES, UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA, 2003-2004.
- [3] : HENNI, M. A. B. (2019). *CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA VIBRATION DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES SOUS CHARGEMENTS MECANIQUE ET THERMOMECANIQUE* (Doctoral dissertation, Université Ibn Khaldoun-Tiaret-).
- [4] : Gay, D. (1991). Matériaux composites. P28
- [5] : La Dépêche du Midi.Toulous Pourquoi l'A350 est révolutionnaire. Décembre 2014
- [6] : « appropedia »
[enligne]Available.https://www.appropedia.org/composites_in_the_aircraft_industry.
- [7] : Rotteleur Composites. Actualités.05 janvier 2017
- [8] : T. Djellel.Etude thermoélastique composites avec la prise en compte de l'effet de température sur les propriétés mécaniques. 2007.Chap01 P16
- [9] : MARAH BILLEL. ETUDE NEMURIQUE DE LA STABILITES DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES. 2020.Mémoire de Master.
- [10] : RAHMANE ABDELHAFID. Étude du comportement dynamique des composites Stratifiés et sandwichs. 2018.thèse de doctorat.
- [11]: Reddy, J. N. (2003). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press.
- [12]: BOUKERT, B. *Etude hygro-thermo-mécanique des plaques composites épaisses utilisant la méthode à ordre élevé (Higher-Order)* (Doctoral dissertation, Université Blida1-Saad Dahlab).2018
- [13]. Z. Sereir, E. Adda Bedia, A. Tounsi, "Effect of the accelereed moisture diffusivity on the hygrothermal behavior laminated plate with symmetrical environmental conditions", Journal of thermal stresses, Taylor & Francis Edition, Vol 28, pp 889 908, 2005.
- [14] : Agnès Roudier. Analyse multi-échelle du comportement hygro-mécanique des fibres de lin. Autre. Université Blaise Pascal – Clermont-Ferrand II, 2012.Francais. [15] : Baba Hamed, F. Z. (2015). Le calcul scientifique appliqué au Génie Civil sous MATLAB.

Bibliographie

- [15]: Baba Hamed, F. Z. (2015). Le calcul scientifique appliqué au Génie Civil sous MATLAB.
- [16] : Origin (Pro), Version Number (e.g.'Version2022). OriginalLabCorporation, Northampton, MA, USA.
- [17] : Reddy,J.N,'A Simpe Higher -Order Theory for laminated Composite Plates', ASME Journal of applied Mechanics (1984),745-752.
- [18] : JN.Reddy 'Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis',CRC Press, second edition 2004.
- [19] : Marco Gigliotti , 'Internal stresses in composite laminates due to cyclical Hygrothermal loading' AIAA Journal Vol 4,No12 , December 2004.
- [20] : Bachmann, J., Hidalgo, C., & Bricout, S. (2017). Environmental analysis of innovative sustainable composites with potential use in aviation sector—A life cycle assessment review. *Science China Technological Sciences*, 60(9), 1301-1317.