الـجــمـهـوريـة الـجـزائـريـة الـديـمـقـراطـيـة الـشـعـبـيـة
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة الـتـعـلـيـم الــــعــــالـي و الــبـحــث الـعـــلـمـــي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة سعد دحلب بالبليدة
UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA
FACULTÉ DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématique et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Applications

Réalisé et préparé par :

HAMEDANI FAIZA & SERIER ABDALLAH BASMA

THEME :

ÉTUDE DE QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES

Soutenu le 13/07/202 devant les Jurys composé de :

Président : **Mr.** Ben Bachir.Maamr……………………………………Professeur USD BLIDA 1
Examinatrice : **Mme.** Boulaiki . Habiba………………………………………MCA USTHB
Promotrice : **Mme.** Betrouni . Latifa ……………………………………MCB / USD BLIDA1

Promotion 2021-2022

ملخص

المعادلات التكاملية تؤدي دورا مهمّا في العديد من المجالات الرياضية و الفيزيائية .هذه المذكرة دراسة عامة للمعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية ، حيث حددنا نوعين مهمين ، هما المعادلة التكاملية **لفيتوفولتيرا** ، و المعادلة التكاملية **لفريدهوم** ؛ لقد قمنا بدراسة وجود و حلول هذه المعادلات في فضاء بناخ ، و قمنا بحلها بطرائق فعالة مثل طريقة الاشتقاق،طريقة النواة المنحلة طريقة التقريب المتتالي،طريقة نيوتن كنتروفيش،طريقة التربيع ، طريقة الاسقاط، طريقة غالكرين وطريقة التجميع في فضاء هيلبرت، ولقد ركزنا في بحثنا هذا على الطريقتين الأخيرتين المذكورتين آنفا ، وقمنا بالمقارنة بينهما .و أخيرا اعتمدنا برنامج **ماتلاب** من اجل إجراء بعض العمليات الحسابية.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord ce travail n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide de l'encadrante **Mme L.Betrouni**, on la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciement s'adresse *à* **Mme M.Zoulikha** et **Mme F.Foudil** pour leur aide pratique et soutien moral et leur encouragements.

Nous tenons *à* remercier **Mr M.Benbachir** d'avoir accepté d'être président du jury.

Nous tenons *à* remercier **Mme H.Boulaiki** d'avoir accordé son temps précieux pour examiner notre travail, nous espérons qu'elle en soit satisfaite.

Nous tenons *à* remercier infiniment nos familles respectives pour le soutien, les conseils durant toute la période de la préparation de ce mémoire, présence et sacrifices qu'ils ont dû faire pour faire de nous ce que nous sommes devenues aujourd'hui.

Nos remerciement s'adresse également *à* tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nos profonds remerciements vont également *à* toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de prés ou de loin, en espérant que ce travail soit *à* la hauteur.

Faiza et Basma

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Ma très chère mère, mon très chèr père pour leur soutien inconditionnel, leurs patience et leur encouragement au long de ces années.

A ma soeur :**"Hiba"**.

A mes frères :**Khaled et Farouk** .

A ma chère amie **Faiza**, merci pour la patience durant la période de notre travail.

A ma grande famille, mes tantes et oncles.

Basma

Dédicaces

je dédie ce modest travail :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, *à* toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la femme de mon coeur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

Aux amours du coeur, aux fleurs de notre maison, *à* celles avec qui j'ai vécu, les plus beaux souvenirs, *à* la source de ma force, *à* mes soeurs **Leila, Houria, Maroua, Safa.**

A la plus belle personne que j'ai rencontrée *à* l'université, *à* ma chère amie **Basma**.

Au bonheur de notre maison, *à* ma deuxième mère, *à* ma grand-mère **Djemiaa**.

A qui je souhaitais me voir diplômé, mais avant cela est mort *à* mon grande-père **Ali**, grand-pére **Rabah** et ma grand-mère **Aicha**.

A mes tantes et mes oncles, ainsi que toute ma famille. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A mes très chers amis que j'ai connu jusqu'*à* maintenant. Merci pour leurs encouragements.

A tous mes enseignants(es) du primaire *à* l'université.

A tous ce que j'aime et que je respecte.

Faiza

RÉSUMÉ

Les équations intégrales jouent un rôle significatif dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Ce mémoire est une étude générale à la fois des équations intégrales linéaires et non linéaires. On distingue deux types importants : les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. On étudie l'existence et l'unicité des solutions de ces équations dans les espaces de Banach.

Pour résoudre ces équations, on utilise plusieurs méthodes : la méthode de dérivation, la méthode du noyau dégéneré, la méthode des approximations successives, la méthode de Newton-Kantrovish, la méthode de quadrature, la méthode de Galerkin et la méthode de Collocation.

Nous nous sommes concentré sur les méthodes de projection. Nous les avons présentées et comparer sur des exemples d'applications, et ce en utilisant des programes Matlab.

ABSTRACT

Integral equations play a significant role in many fields of mathematics and physics. This thesis is a general study of both linear and nonlinear integral equations. We distinguish between two important types of the integral equations, namely Volterra and Fredholm's integral equations. We study the existence and the uniqueness of the solutions of these equations in Banach spaces. We solve effectively some examples of integral equations by the derivation method, the direct computation method, the successive approximation method, the Newton Kantrovish method, the quadrature method and the projection method. we focus our study on solving integral equations using the Galerkin method and the Collocation method in Hilbert spaces. We also give a comparaison between the two methods. We use Matlab programs in order to facilitate some calculations.

INTRODUCTION

L'étude des équations intégrales est un chapitre tout à fait fascinant dont la recherche continue jusqu'a présent. Le résultat de cette recherche est à la fois d'une beauté saisissante et intrinsèquement intéressante [16].

Les premières équations intégrales furent obtenues par **Daniel Bernoulli** vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du XIX^e siècle, avec les travaux de **H. A. Schwarz, de H. Poincaré, de V. Volterra** et surtout ceux de **I. Fredholm**, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisait **D. Hilbert** à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel **F. Riesz** développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Il y a deux types des équations : les équations intégrales linéaires et les équations intégrales non liéaires. Les deux catégories les plus importantes d'équations intégrales sont l'équation intégrales de **Volterra** et l'équation intégrale de **Fredholm**.

L'équation intégrale de **Volterra** au moins une des bornes de l'intégration est une variable. A été nommé d'après le mathématicien italien **Vito Volterra** (du 3 mai 1860 au 11 octobre 1940) [16]. Parmi ses oeuvres dans le domaine mathématique on a la théorie des équations différentielles et des équations intégrales. **Volterra** est aussi un des premiers Italiens à s'intéresser à l'analyse fonctionnelle, en prolongeant les travaux **d'Ascoli** et **d'Arzela** sur les espaces de fonctions. Il tente de définir des notions de continuité et de différentiabilité pour des applications entre deux espaces de fonctions, ses définitions sont imparfaites mais amèneront d'autres mathématiciens comme **Hadamard** ou son jeune élève **Gateaux** à en proposer de plus adaptées.

En revanche, l'équation intégrale de **Fredholm** se caracterise par des bornes d'intégration constante, elle a été nommé d'après le célèbre mathématicien suédois **Erik Ivak Fredholm** (7 avril 1866 au 17 août 1927). Son article phare, sur une classe d'équations fonctionnelles, est publié dans Acta Mathematica en 1903 [16]. **Fredholm** est surtout connu pour ses travaux sur les équations intégrales et la théorie spectrale. Une grosse partie de ses recherches s'est faite en 1899, lorsqu'il est allé à Paris étudier le problème de **Dirichlet** avec **Poincaré**, **Émile Picard**, et **Hadamard**. Un premier rapport est apparu en 1900, intitulé Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de **Dirichlet**, **Riemann**, **Schwarz**, **Carl Neumann** et **Poincaré** avaient étudié la question, qui était maintenant posée sous forme d'une équation intégrale.

En plus de ces deux équations on a l'équation intégrale singulière qui est définie lorsque l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinis.

Un autre type d'équations intégrale est l'équation intégro-différentielles, ce type d'équations, la fonction inconnue apparaît sous le signe de dérivé et sous le signe d'intégrale.

Ces équations sont présentées dans une variété d'applications en physique mathématique, telles que l'atténuation des ondes, le transfert radiatif et les ondes dans les fluides. Dans certains cas, comme dans l'œuvre d'Abel sur les équations intégrales est un modèle mathématique qui surgit naturellement dans la représentation de l'une des situations physiquement intéressantes [9] comme le modèle de **Volterra** pour l'augmentation de la population qui s'écrit sous la forme

$$\frac{dP}{dT} = aP + bP^2 - cP \int_0^T P(x)dx, \quad P(0) = P_0.$$

Où $P = P(T)$ désigne la population au temps T, a, b et c sont des constantes et paramètres positifs, $a > 0$ est le coefficient de natalité, $b > 0$ est le coefficient d'encombrement, $c > 0$ est le coefficient de toxicité et P_0 est le coefficient initial de population.

Très souvent le choix d'une équation intégrale plutôt que celui d'une équation différentielle ordinaire ou une équation aux dérivées partielles est dicté par la simplicité qui découle de la réduction d'un problème aux valeurs initiales ou d'un problème aux limites. Par exemple, cela permet d'éviter dans certains cas de calculs, la discrétisation du domaine. De même que la réduction d'un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles par une équation intégrale réduit la dimension du problème. Par exemple, par ce procédé, un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes se trouve réduit à la résolution d'une équation intégrale à une seule fonction inconnue dépendant d'une seule variable. Ainsi un modèle mathématique d'un problème physique se trouve réduit à la résolution d'une seule équation [14].

Dans ce mémoire, on va étudier des différents théorèmes du point fixe (le théorème de Banach et de Schauder). Ces théorèmes sont importants pour montrer l'existence de la solution des équations intégrales. Le théorème de point fixe de Banach donne l'existence et l'unicité de la solution. Ce pendant le théorème de Schauder donne uniquement l'existence de la solution.

On utilise les méthodes de résolution analytiques : dérivation, noyau dégénéré , et les méthodes numérique : approximations successives, Newton Kantrovish, Galerkin, Collocation, quadrature, pour résoudre des équations intégrales linéaires et non linéaires.

Dans notre travail on s'intéresse aussi aux méthodes de projection qui sont utilisés dans l'espace d'Hilbert (L^2), parmi ces méthodes on étudie la méthode de **Bobnov-Galerkin** et la méthode de **Collocation** qui consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme combinaison linéaire des éléments d'une base de l'espace d'Hilbert [5]. La base qu'on a choisie est formée par des polynômes orthogonaux (Legendre, Hermite, Tchebychev).

Le but de notre travail est de résoudre analytiquement et numériquement des équations intégrales, et comparer les méthodes utilisées.

Notre travail est presenté en six chapitres :

Dans le premier chapitre on donne des rappels sur les espaces de Hilbert, les polynômes orthogonaux avec comme exemples les polynômes classiques.

Dans le deuxième chapitre, on présente la classification des équations intégrales et intégro-différentielles et illustrées avec quelques exemples. En outre, la linéarité et les concepts d'homogènèité des équations intégrales sont abordés.

Dans le troisième chapitre, on étudie l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales de Fredholme et de Volterra en utilisant les théorèmes du point fixe : Le théorème du point fixe de Banach, Schauder, dans des espaces de Banach. Quelques applications de ces théorèmes sont citées.

Dans le quatrième chapitre, on résoud les équations intégrales linéaires et non linéaires en utilisant la méthode de réduction par dérivation et la méthode de noyau dégénerés pour les équations intégrales de Fredholm.

Dans le cinquième chapitre, on résoud les équations intégrales lnéares et non linéaire par des méthode itératives, parmi ces méthodes (méthode d'approximations successive, méthode de Newton-Kantrovish, méthode de quadrature).

Dans le sixième chapitre, on présente les méthodes de projection pour la résolution des équations intégrales linéaires et non linéaires. Parmi ces méthodes : la méthode de Boubnov Galerkin, la méthode de Collocation, et on donne quelques exemples numériques et applications.

CHAPITRE

1

RAPPELS

1.1 Les espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach muni d'un produit scalaire. Ce concept permet d'étendre *à* des espaces foncionnels de dimension infinie les raisonnements de la géométrie encludienne classique [4].
Dans cette section, on présente quelques notions préliminaires qui vont nous permettre d'introduire ces espaces :

Définition 1.1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite une suite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N, \forall m, n \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2. *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes dans E pour sa norme. Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.3. *On appelle espace de Banach* $(E, \|.\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme* $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.4. *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel réel E (resp. Complex) une application f de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *(resp.*$\mathbb{C}$*) qui possède les propriétés suivantes :.*

1. *f(x+x′ ,y)=f(x,y)+f(x′,y),*
2. $f(\lambda x, y) = \bar{\lambda}\, f(x,y)$,
3. $f(y,x) = \overline{f(x, y)}$,
4. $f(x,x) \geq 0$,
5. $f(x,x) = 0 \iff x = 0$.

où x, x' *et* y *sont des éléments quelconques de E et* λ *un élément quelconque de* $\mathbb{R}(resp.\mathbb{C})$.

Définition 1.5. *Soit E un espece vectoriel réel. Si E est muni d'un produit scalaire et d'une norme associée à ce produit scalaire alors E sera dit* ***Espace Préhilbertien****.*

Définition 1.6. *Un espace de Hilbert est un espace Préhilbertien complet.*

Définition 1.7. *Soit E un espace Préhilbertien ·*
$\forall$ *x,y* $\in E$ *, x et y sont Orthogonaux si* $\langle x, y\rangle = 0$ *et on écrit* $x \perp y$.

Exemple 1.1. *Soit* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{lll} \varphi : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{array}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*. Alors* φ *est un produit scalaire sur E.*

Exemple 1.2. *Pour tout ouvert non vide* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, on peut définir sur* $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ *le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx. \quad \forall f, g \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$$

1.1.1 La projection sur un sous-espace vectoriel complet

Théorème 1.1. *Soient E un espace Préhilbertien muni du produit scalaire $\langle . \rangle$ et de la norme $\|.\|$ et soit F un sous-espace vectoriel complet de E . Pour tout $x \in E$, il existe un y et un seul appartenant à F, tell que :*

$$\|x - y\| = d(x, F).$$

Cet élément y, appelé projection orthogonale de x sur F et noté

$$y = P_F(x),$$

est le seul vecteur de F tel que $x - y$ soit orthogonal à F.

Théorème 1.2. *Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H, pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul.*
Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H, qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$.

Démonstration. Soit f un élement de H, orthogonal *à* tous les vecteurs du système complet $\{\varphi_k\}$, alors tous ses coefficients de Fourier sont nul, $\langle f, \varphi_i \rangle = 0, \quad \forall_i = 1, 2, ...$ le système $\{\varphi_k\}$ étant complet donc fermé. D'o*ù* l'égalité de Perseval

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2,$$

qui implique que $f = 0$.
Inversement, si le système $\{\varphi_k\}$ n'est pas complet il existerait dans H un vecteur non nul g qui réalise l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|g\|^2,$$

et d'aprés le théorème de Riesz-Fisher, on peut trouver un élément f de H, tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2,$$

il est aisé de voir que le vecteur non nul $f - g$ est orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ d'o*ù* la condition suffisante. $\square$

1.2 Les Polynômes orthogonaux

Les Polynômes orthogonaux est une suite infinie de polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$...à coefficients réels, dans laquelle chaque $P_n(x)$ est de degré n, et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire de fonctions donné.

Définition 1.8. *Soit* $]a,b[$ *un intervalle ouvert borné ou non dans* $\mathbb{R}$*. On se donne un poids sur* $]a,b[$*, c'est-à-dire une fonction* $\omega :]a,b[\to]0,+\infty[$ *continue. On suppose en outre que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *l'intégrale* $\int_a^b |x|^n \omega(x)dx$ *est convergente, c'est le cas par exemple si* $]a,b[$ *est borné et si* $\int_a^b \omega(x)dx$ *converge. Sous ces hypothèses, on considère l'espace vectoriel* E *des fonctions continues sur* $]a,b[$ *telles que :*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|\omega(x)dx}, \quad < +\infty.$$

Grâce aux hypothèses faites ci-dessus, E contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. L'espace E *est muni d'un produit scalaire naturel*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

et $\|.\|_2$ *est la norme associée à ce produit scalaire, cette norme est appelée norme* L^2 *ou norme moyenne quadratique. On notera* $d_2(f,g) = \|f-g\|_2$ *la distance associée.*

1.2.1 Propriétés des polynômes orthogonaux

Théorème 1.3. *[6] Les polynômes* P_n *vérifient la relation de récurrence*

$$P_n(x) = (x-\lambda_n)P_{n-1}(x) - \mu_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

avec

$$\lambda_n = \frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|_2^2}, \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-1}\|_2^2}$$

Théorème 1.4. *[6] Pour tout poids* ω *sur* $]a,b[$*, le polynôme* P_n *possède n zéros distincts dans l'intervalle* $]a,b[$*.*

1.3 Polynômes orthogonaux classiques

1.3.1 Polynômes de Tchebychev

Parmi les polynômes orthogonaux les plus importants il ya les polynômes de Tchebychev $T_n(x)_{n\geq 0}$ qui sont des polynômes orthogonaux par rapport *à* la fonction poids $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dans $L_2([-1,1])$, par la formule de **Rodrigues** suivant :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1}(n-1)!}{2n!}\sqrt{1-x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}).$$

La formule d'intégration s'écrit comme suit :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0, \quad m \neq n.$$

La suite des polynômes de Tchebychev (T_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Les premiers polynômes de Tchebychev sont :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

1.3.2 Polynômes d'Hermite

[6] Les polynômes d'Hermite sont notés $H_n(x)$. Ils sont définis sur le domaine ouvert $L_2(]-\infty,+\infty[)$, avec la fonction de poids $\omega(x) = e^{-x^2/2}$, par la formule de **Rodrigues** suivante :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

La formule d'intégration s'écrit comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0.$$

Les polynômes d'Hermite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= x, \\
H_2(x) &= x^2 - 1, \\
H_3(x) &= x^3 - 3x.
\end{aligned}$$

1.3.3 Polynômes de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $L^2([-1,1])$ et la fonction poids est simplement la fonction constante de valeur 1. On définit le polynôme de Legendre P_n (pour tout entier naturel n) par la dérivée n^{ime} du polynôme $(x^2-1)^n$ qui est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant égale $\grave{a}$ 1, donc P_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant.[17]

$$2n(2n-1)...(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

La formule suivante permet de calculer l'expression générale de P_n pour n donnée

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

La formule de récurence s'écrite comme suite :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Démonstration. On va montrer comment obtenir les premiers polyômes de Legendre.
On pose $y = (x^2-1)^n$.

$$\frac{dy}{dx} = 2nx(x^2-1)^{n-1}.$$

On multiplie par (x^2-1)

$$\begin{aligned}
(x^2-1)\tfrac{dy}{dx} &= 2nx(x^2-1)^n, \\
(1-x^2)\tfrac{dy}{dx} - 2nxy &= 0.
\end{aligned}$$

On dérive $(n+1)$ fois en utilisant la règle de Leibniz

$$(f \star g)^n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}(\lambda) g^{(n-k)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n g^{(k)}(\lambda) f^{(n-k)}(\lambda).$$

Avec $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Alors

$$\begin{array}{rcl}
[(1-x^2)y^{(n+2)} + (n+1)(-2x)y^{(n+1)} + \frac{n+1}{2!}n(-2)y^n] + 2n[xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)}] & = & 0, \\
(1-x^2)y^{(n+2)} + [-2nx - 2x + 2nx]y^{(n+1)} + [-n^2 - n + 2n^2 + 2n]y^{(n)} & = & 0, \\
(1-x^2)y^{(n+2)} - 2xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} & = & 0.
\end{array}$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{1.3.1}$$

Cette équation représente l'équation de Legendre d'ordre n et admet une solution de série finie $P_n(x)$. On utilise la technique d'intégration en série pour obtenir sa solution, soit la solution de (1.3.1).

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k X^k, \quad C_0 \neq 0. \tag{1.3.2}$$

On pose

$$H = (1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + n(n+1)y.$$

D'oǜ

$$\begin{array}{rcl}
H & = & [n(n+1)c_0 + 2c_2] + [(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3]x + \sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)c_{j+2} \\
& + & (n-j)(n+j+1)c_j]x^j = 0.
\end{array}$$

Ce qui implique que

$$\begin{array}{rcl}
n(n+1)c_0 + 2c_2 & = & 0, \\
(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3 & = & 0, \\
(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j & = & 0.
\end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
c_2 & = & \frac{n(n+1)}{2!}c_0, \\
c_3 & = & \frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1.
\end{array}$$

$$c_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j, \quad j = 2, 3, 4. \tag{1.3.3}$$

Si on prend les valeurs 2,3,4,...,la relation de récurrence (1.3.3) donne

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\tfrac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}c_2 &= \tfrac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0,\\
c_5 &= -\tfrac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}c_3 &= \tfrac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1,\\
c_6 &= -\tfrac{(n-4)(n+5)}{6\cdot 5}c_4 &= -\tfrac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0,\\
c_7 &= -\tfrac{(n-5)(n+6)}{7\cdot 6}c_5 &= -\tfrac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1.
\end{aligned}$$

Etc, ainsi pour au moins $|x|<1$ nous obtenons deux solutions en séries de puissances linéairement indépendantes

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= c_0[1 - \tfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \tfrac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \tfrac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots],\\
y_2(x) &= c_1[x - \tfrac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \tfrac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \tfrac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \cdots].
\end{aligned}$$

Notez que si n est un entier pair, la première série se termine alors que $y_2(x)$ est une série infinie. Par exemple si $n = 4$, alors

$$y_1(x) = c_0[1 - \frac{4.5}{2!}x^2 + \frac{2.4.5.t7}{4!}x^4] = c_0[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4].$$

De même, lorsque n est un entier impair, la série $y_2(x)$ se termine par x^n, c'est-à-dire que lorsque n est un entier non négatif, on obtient une solution polynomiale de degré n de l'équation de Legendre. Parce que nous savons qu'un multiple constant d'une solution de l'équation de Legendre est aussi une solution, il est traditionnel de choisir des valeurs spécifiques pour c_0 ou c_1, selon que n est un entier positif pair ou impair, respectivement. Pour $n = 0$ on choisit $c_0 = 1$, et pour $n = 2, 4, 6, ...,$ on choisit

$$c_0 = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1\cdot 3...(n-1)}{2.4...n}.$$

Alors que pour $n = 1$ on choisit $c_1 = 1$ et pour $n = 3, 5, 7, ...,$ on choisit

$$c_1 = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}}\frac{1.3...n}{2.4...(n-1)}.$$

Par exemple quand $n = 4$ on a

$$y_1(x) = (-1)^{\frac{4}{2}}\frac{1.3}{2.4}[\ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4]\ = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

À partir des deux séries $y_1(x)$ et $y_2(x)$ et des choix ci-dessus de c_0 et c_1, on constate que les premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1, & p_1(x) &= x,\\
p_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), & p_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),\\
p_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & p_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}$$

$\square$

On peut générer les polynômes de Legendre par différenciation de la formule de **Rodrigue's** suivante

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \geq 0. \tag{1.3.4}$$

Démonstration. On va montrer la formule (1.3.4)

$$v = (x^2-1)^n,$$
$$y^n = \frac{d^n v}{dx^n}.$$

On a

$$cp_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{1.3.5}$$

Ainsi que $cp_n(x)$ est la solution

$$\begin{aligned} cp_n(x) &= \tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \\ cp_n(x) &= \tfrac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n], \\ cp_n(x) &= D^n(x-1)^n(x+1)^n + nc_1 D^{n-1}(x-1)^n D(x+1)^n + nc_2 D^{n-2}(x-1)^n D^2(x+1)^n. \end{aligned}$$

On a

$$D^n(ax+b) \quad = \quad m(m-1)(m-2)...(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-1}.$$

$$D^n(ax+b)^m = \frac{a^n m!(ax+b)^{m-n}}{(m-n)!}. \tag{1.3.6}$$

On va prouvez par récurrence la formule (1.3.6).

Pour $n = 0$ on a

$$(ax+b)^m = \frac{(ax+b)^m m!}{m!}.$$

On suppose que $D^n(ax+b)^m$ est vraie et monrer que $D^{n+1}(ax+b)^m$ est vraie .

On a

$$\begin{aligned} D^{n+1}(ax+b)^m &= \left(\tfrac{a^n m!(ax+1)^{m-n}}{(m-n)!}\right)', \\ &= \tfrac{a^n m!}{(m-n)!}(m-n)a(ax+b)^{m-n-1}, \\ &= \tfrac{a^{n+1} m!}{(m-n-1)!}(ax+b)^{m-n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} D^n(x-1)^n & = & 1^n n! & = & n!, \\ D^{n-1}(x-1)^n & = & \frac{1^n n!(x-1)^{n-n+1}}{(n-n+1)!} & = & \frac{n!(x-1)}{1!}, \\ D^{n-2}(x-1)^n & = & \frac{1^n n!(x-1)^{n-n+2}}{(n-n+2)!} & = & \frac{n!(x-1)^2}{2!}. \end{array}$$

$$cp_n(x) = n!(x+1)^n + nn!(x-1)n(x+1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{n!}{2!}(x-1)^2 n(n-1)(x+1)^{n-2} + ...$$

Posons $x = 1$

$$\begin{array}{lll} cp_n(1) & = & n!2^n, \\ c & = & 2^n n!, \quad p_n(1) = 1. \end{array}$$

On remplace dans l'equation (1.3.5) on obtient

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

□

1.3.4 Propriétés des polynômes de Legendre

1. $\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx = 0, \quad pour i \neq j,$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$

Démonstration. on va montrer les propriétés précédentes

1- $\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{lll} \langle p_i(x), p_j(x) \rangle & = & \int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx, \\ & = & \frac{1}{i!j!2^{(i+j)}} \int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j dx, \\ & = & \frac{1}{i!j!2^{(i+j)}}([\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^2-1)^j dx). \end{array}$$

Puisque $(x^2-1)^i$ a un zero d'ordre i en -1 et en 1, la $(i-1)$ième dérivé de $(x^2-1)^i$ s'annule en $x = 1 \wedge x = -1$. Ainsi on obtenons :

$$\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx = \frac{(-1)}{i!j!2^{(i+j)}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x^2-1)^i \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^2-1)^j dx.$$

En intégrant par partie j fois la formule précédente, on obtenons :

$$\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx = \frac{(-1)^j}{i!j!2^{(i+j)}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}(x^2-1)^i \frac{d^{2j}}{dx^{2j}}(x^2-1)^j dx. \tag{1.3.7}$$

On a $\frac{d^{2j}}{dx^{2j}}(x^2-1)^j = (2j)!$ alors (1.3.7) devient :
$\frac{(-1)^j(2j)!}{i!j!2^{(i+j)}}\int_{-1}^{1}\frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}(x^2-1)^i dx = \frac{(-1)^j(2j)!}{i!j!2^{(i+j)}}[\frac{d^{i-j-1}}{dx^{i-j-1}}(x^2-1)^i]_{-1}^{1} = 0.$

2- Soit n $\in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$K = \frac{1}{2^n n!}$ et $J = \int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx$. donc $J = K^2\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$
Posons $du = \frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n dx \wedge v = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, puis on intégrons par partie ce qui donne :

$$J = k^2([\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx). \quad (1.3.8)$$

Le premier terme à l'intérieur du crochet est nul puisque -1 et 1 sont des racines, et de proche en proche on obtient :

$$J = K^2(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx.$$

Comme $(x^2-1)^n$ est une polynôme de degré $2n$ (à coefficient principal réduit) que l'on dérive $2n$ fois, le résultat est une constante qui vaut $(2n)!$ alors J prend l'expression suivante :

$$J = K^2(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Il n'est pas très difficile de calculer cette dernière intégrale, pour cela on pose :

$$L = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Que l'on intègre par parties alors on obtient

$$L = [x(x^2-1)^n]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1}x^2(x^2-1)^{n-1}dx.$$

La première quantité (toute intégrée) a une valeur nulle. Une autre intégration par parties permet d'écrire :

$$L = \frac{2}{3}n(n-1)^2\int_{-1}^{1}x^4(x^2-1)^{n-2}dx$$

On poursuit ainsi de suite les calculs et, en notant par ε le signe que l'on déterminera plus tard, on arrive à l'expression :

$$L = \varepsilon 2n\frac{1}{3}2(n-1)\frac{1}{5}2(n-2)...\frac{1}{2n-1}2(2-1)\int_{-1}^{1}x^{2n-2}(x^2-1)^1 dx.$$

Qui conduit à l'expression suivante :

$$L = \varepsilon \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...2n+1} 2.$$

Le problème du signe E que nous avons délibérément abandonné se trouve résolu, en remarquant que $(x^2-1)^n$est une fonction qui a le signe de $(-1)^n$ sur l'intervalle $[-1,+1]$ ainsi L s'écrit :

$$L = (-1)^n \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n+1)} 2.$$

Ensuite, on peut écrit :

$$J = \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{1.3.5...(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}.$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

$\square$

CHAPITRE

2

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

2.1 Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Cette définition générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'impliquer dans des situations particulièrement inadéquates, nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales de la forme [11].

$$\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Et aussi celles sous la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Qui sont des exemples typiques. Dans ces équations la fonction φ est l'inconnue, la fonction $k(x, t)$ qui s'appelle noyau avec le terme libre f sont données.

2.2 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut *ê*tre classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. Qui constituent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autre types, à savoir les équations intégro-différentielles et les équations intégrales singulières. [15]

2.2.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

Les équations intégrales de Fredholm se caractérisent par des bornes d'intégration constante. La fonction inconnue $\varphi(x)$ peut apparaitre seulement *à* l'intérieur de l'équation intégrale sous la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt.$$

Cette équation est appelée équation du premier type (ou espèce) linéaire de Fredholm, o*ù* $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. Les équations intégrales de second type linéaire de Fredholm la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît *à* l'intérieur et *à* l'extérieur du signe intégral sous la forme [15]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt.$$

Exemple 2.1. *On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (4.2) par la méthode du noyau dégénéré.*

$$\varphi(x) = \sin x - \cos x + x \int_0^\pi \cos t\varphi(t)dt$$

2.2.2 Équations intégrales linéaires de Volterra

Dans les équations intégrales de **Volterra**, au moins une des bornes de l'intégration est une variable. Pour les équations intégrales de la première espèce linéaire de Volterra, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît seulement *à* l'intérieur du signe intégral sous la forme

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t).dt$$

O*ù* $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe. Cependant, dans les équations intégrales de la deuxième espèce linéaire de Volterra, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît *à* l'intérieur et *à* l'extérieur du signe intégral sous la forme [15]

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Exemple 2.2. *On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (4.1) par la méthode de réduction par dérivation.*

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$$

2.2.3 Équations intégrales non linéaires de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de **Fredholm** de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = 0.$$

L'équation intégrale non linéaire de **Fredholm** de seconde espèce prendre la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt.$$

O*ù* $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

Exemple 2.3. *On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (4.2) par la méthode de noyeau dégénéré*

$$\varphi(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2} + \int_0^1 t\varphi^2(t)dt.$$

2.2.4 Équations intégrales non linéaires de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de **Volterra** de première espèce prend la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = 0.$$

L'équation intégrale non linéaire de **Volterra** de seconde espèce prendre la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt.$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

Exemple 2.4. *On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (5.2.2) par la méthode de Newton Kantrovish*

$$\varphi(x) = -x + \int_0^x t\varphi^2(t)dt.$$

2.2.5 Équations intégrales mixtes de Fredholm-Volterra

Les équations intégrales de Fredholm-Volterra apparaissent dans la littérature sous deux formes $à$ savoir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)\varphi(t)dt.$$

Et

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\Omega F(x,t,\mu,\tau,\varphi(\mu,\tau)d\mu d\tau.$$

où $f(x,t)$ où $F(x,t,\mu,\tau,\varphi(\mu,\tau)$ sont des fonctions analytiques sur $D = \Omega \cdot [0,T]$ et Ω est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, n=1,2,3 [15].

Exemple 2.5. *Les équations suivantes sont des exemples d'équations mixtes voir [2] pour plus de details.*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt - \int_0^1 t\varphi(t)dt, \quad x \in [0,1] \\ \varphi(x,t) & = & x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^t (\tau - \mu)d\mu d\tau, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1]. \end{array}$$

2.2.6 Équations intégrales singulières

Les équations intégrales de Volterra du premier type

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Ou du second type

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)\varphi(t)dt.$$

Sont appelées singulières si l'une des bornes de l'intégration $g(x)$, $h(x)$ où les deux sont infinis.

De plus, les deux équations précédentes sont appelées singulières si le noyau $K(x,t)$ est non borné en un ou plusieurs point de l'intervalle d'intégration [15].

Exemple 2.6. *L'exemple ci dessous est une équation intégrale singulière de transport de chaleur (**Lighthill**) [15]*

$$F(z)^4 = \frac{-1}{2\sqrt{z}} \int_0^z \frac{F'(s)}{z^{\frac{3}{2}} - s^{\frac{3}{2}}} ds. \tag{2.2.1}$$

Où

$$F(0) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

On peut convertire l'équation (4.2.2) *à une équation singulière de Volterra suivant :*

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^x \frac{t^{\frac{1}{3}}\varphi^4(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt, \quad x \in [0,1].$$

Où

$$\varphi(x) = F(x^{\frac{2}{3}}).$$

Et

$$\varphi(0) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0.$$

2.3 Les équations intégro-différentielles

Les équations intégro-différentielles sont des équations *où* la fonction inconnue $\varphi(t)$ apparaît sous le signe de dérivée et sous le signe d'intégral. On peut distinguer deux types de ces équations.

2.3.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Où $\varphi^{(n)}$ indique la **n**- ième dérivée de $\varphi(x)$. On distingue deux types :
Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(x)$ *à* l'intérieur du signe intégral est un, alors l'équation intégro-différentielle de Fredholm est dite linéaire.
Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ a un exposant autre qu'un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\varphi(x)$, comme (e^u, $cosu$,...,) l'équation intégro-différentielle de Fredholm est dite non linéaire [15].

Exemple 2.7. *Dans l'électrique on considère le problème d'ingénierie . Le courant $I(t)$ circulant dans un circuit fermé, puisse être obtenu en la forme de l'équation intégro-différentielle suivante :*

$$L\frac{\partial(I)}{\partial(t)} + RI + \frac{1}{C}\int_0^1 I(s)ds = f(t), \quad I(0) = I_0.$$

Où

L est l'inductance,

R est la résistance,

C la capacitance,

$f(t)$ l'applique tension. [15].

Exemple 2.8. *on va résoudre le problème suivant*

$$\begin{cases} u^{(3)} = & \sin x - x - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt, \\ u(0) = & 1, \\ u'(0) = & 0, \\ u''(0) = & -1. \end{cases}$$

On a

$$u^{(3)} = \sin x - x - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt.$$

On pose

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt. \tag{2.3.1}$$

Alors

$$u^{(3)} = \sin x - x - \alpha x.$$

Par intégration on a

$$\int_0^x u^{(3)}(t)dt = \int_0^x (\sin(t) - t - \alpha t)dt.$$

On obtient donc

$$u^{(2)}(x) = -cosx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\alpha}{2}x^2.$$

On intègre une deuxième fois

$$u'(x) = -sinx - \frac{1}{6}x^3 - \frac{\alpha}{6}x^3.$$

Par intégration aussi on aura

$$u(x) = \cos x - \frac{1}{18}x^4 - \frac{\alpha}{18}x^4$$

On peut obtenir la valeur de α en remplaçant dans (2.3.1) *:*

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -t\sin(t) - \frac{1}{6}t^4 - \frac{\alpha}{6}t^4 dt$$

Par conséquent $\alpha = -1$ et donc $u(x) = \cos(x)$.

2.3.2 Équations intégro-différentielles de Volterra

Les équations intégro-différentielles de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons les problèmes *à* valeurs initiales en équations intégrales. L'équation intégro-diff de Volterra contient la fonction inconnue $\varphi(x)$ et l'une de ses dérivées $\varphi^n(x)$, n$\geq$ 1 *à* l'intérieur et *à* l'extérieur du signe intégral, l'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme suivante

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt.$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la $\mathbf{n} - ime$ dérivée de $\varphi(x)$. On distingue deux types :
Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(x)$ *à* l'intérieur du signe intégral est un, alors l'équation intégro-différentielle de Volterra est dit linéaire.
Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ *à* un exposant autre qu'un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\varphi(x)$, comme $ln(1+\varphi)$ l'équation intégro-différentielle de Volterra est dite non linéaire [15].

Exemple 2.9. *Considérons le modèle de Volterra pour l'augmentation de la populaton suivant*

$$\frac{dP}{dT} = aP + bP^2 - cP \int_0^T P(x)dx, \quad P(0) = P_0$$

Où $P = P(T)$ désigne la population au temps T.

a, b et c sont des constantes et paramètres positifs tel que :

$a > 0$ est le coefficient de natalité,

$b > 0$ est le coefficient d'encombrement,

$c > 0$ est le coefficient de toxicité,

P_0 est le coefficient initial de population [15].

2.4 Concept d'homogènèité

Les équations intégrales et les équations intégro-différentielles sont classées comme homogène ou non homogène, si la fonction $f(x)$ identiquement nulle, alors l'équation est appelée homognène sinon est dite non homogène. Pour clarifier ce conept, nous considérons les équations suivantes : [15]

1. $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x xt\varphi(t)dt,$
2. $\varphi(x) = x + \int_0^1 (xt)^2\varphi(t)dt,$
3. $\varphi(x) = \int_0^x (1 + xt)\varphi^4(t)dt,$
4. $\varphi''(x) = \int_0^x xt\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$

- 1 et 2 sont non homogène .

- 3 et 4 sont homogènes .

Voir [15] pour plus d'exemples.

CHAPITRE

3

APPLICATIONS DES THÉORÈMES DU POINT FIXE AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES

Les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations intégrales.

3.1 Théorème du point fixe de Banach

Définition 3.1. *[16] (Contraction) soit E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une contraction si l'on a $\exists k \in]0,1[$ telle que*

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\|_E \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\|_E, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

3.1.1 Existence et unicité des solutions pour les équations Intégrales

Théorème 3.1. *[16] (Banach1922) soit E un espace de Banach et $A : E \to E$ une contraction alors $\exists! \varphi \in E$ telle que $A\varphi = \varphi$ ie φ est un point fixe de E.*

Théorème 3.2. *[17] On considère l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt, x \in [0,T], T > 0. \qquad (*)$$

Sous les conditions suivants :

1. *$f \in L^2[a,b]$,*
2. *$\|\int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt\| \leq M\|\varphi\|_{L^2}$,*
3. *$|k(x,t,\varphi_1(t)) - k(x,t,\varphi_2(t))| < N(x,t)|\varphi_1 - \varphi_2|, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.*
4. *$B^2 = \int_a^b \int_a^b N^2(x,t)dxdt < +\infty$.*

Alors il existe une solution pour tout $\lambda < \frac{1}{B}$. Cette solution est à carré intégrale .

Démonstration. On pose

$$A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt.$$

Les solutions de l'équation (*) sont les points fixe de l'opérateur A.

Montrons que A :$L^2[a,b] \to L^2[a,b]$.

Soit $\varphi \in L^2([a,b])$. Alors

$$\begin{aligned}\|A\varphi\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^2} + |\lambda|\|\textstyle\int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt\|_{L^2},\\ &\leq \|f\|_{L^2} + |\lambda|\|\varphi\|_{L^2} \quad < +\infty.\end{aligned}$$

Montrons que A est une contraction. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2[a,b]$. Alors

$$\begin{aligned}
\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_{L^2[a,b]} &\leq \|\lambda(\int_a^b k(x,t,\varphi_1(t) - k(x,t,\varphi_2(t))dt\|_{L^2[a,b]},\\
&\leq |\lambda|(\int_a^b(\int_a^b k(x,t,\varphi_1(t) - k(x,t,\varphi_2(t)dt)^2dx)^{\frac{1}{2}},\\
&\leq |\lambda|(\int_a^b(\int_a^b N(x,t)|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt^2)dx)^{\frac{1}{2}},\\
&\leq |\lambda|(\int_a^b(\int_a^b N^2(x,t)\int_a^b(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))^2dtdx)^{\frac{1}{2}},\\
&\leq |\lambda|(\int_a^b\int_a^b N^2(x,t)dtdx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

L'opérateur A est une contraction si $|\lambda|B < 1$ d'où il existe un point fixe unique.

Donc l'équation (*) admet une unique solution. □

3.2 Théorème de point fixe de Brower

Théorème 3.3. *[8] (Théorème de Brouwer(1910)) soit $\mathbb{C}$ un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans $\mathbb{C}$.*

3.3 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder(1930) est une généralisation de théorème de Brouwer, il s'énonce ainsi

Théorème 3.4. *[8] Soit C un sous-ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.*

Démonstration. On note K l'adhérence de $f(C)$ i.e $K = \overline{f(C)}$ qui est par hypothèse un compact. $K \subset C$ car C est un fermé (si C est compact alors $K = f(C)$ car $f(C)$ est compact). Pour chaque n, soit F_n un $\frac{1}{n}$ réseau de K i.e $F_n = (x_1, x_2, ..., x_k) \subset k$ tel que $K \subset U_{i=1}^k B(x_i, \frac{1}{n})$ et soit $P_n : K \to conv(F_n)$ une projection de Schauder, comme C est convexe et F_n une partie de C alors $conv(F_n) \subset C$ est un sous-ensemble convexe et compact. On définit $f_n : conv(F_n) \to conv(F_n), f_n = P_n \circ f_{|_{conv(F_n)}}$. Par le théorème de Brouwer $(f_n)_{n\in N}$ possède au moins un point fixe y_n i.e $f_n(y_n) = y_n$. Or $(f(y_n))_{n\in N} \subset K$ qui est compact et donc la suite $(f(y_n))_{n\subset N}$ possède une sous-suite convergente qu'on notera de la même manière. On pose

$$y = \lim_{n\to\infty} f(y_n). \tag{3.3.1}$$

Et on a $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \subset C$ car $(f(y_n))_{n\in N} \subset K \subset C$ fermé d'où contient les limites de toutes ses suites convergentes.

Montrons $f(y) = y$. En effet

$$\|f_n(y_n) - f(y_n)\| = \|P_n(f_n(y_n) - f(y_n))\| < \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} y &= \lim_{n\to+\infty} f(y_n), \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n(y_n), \\ &= \lim_{n\to+\infty} y_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

D'après l'égalité (3.3.1) et par la continuité de f, on obtient : $f(y) = y$.

Par conséquent f admet un point fixe. $\square$

3.3.1 Application du théorème de Schauder aux équations intégrales de Fredholm

Théorème 3.5. *[1] On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt \quad -\infty < a \leq b < +\infty \tag{3.3.2}$$

Supposant que $f(.)$ est une fonction bornée et $K(x,t,y)$ satisfait les conditions suivantes

1) $|K(x,t,y)| \leq g_1(x)g_2(t)\phi(|y|)$,

2) $|\frac{\partial k}{\partial y}\varphi(x,t,y)| \leq g_1(x)g_2(t)\psi(|y|)$.

où $g_1(.)$ est une fonction positive, bornée et mesurable, $\phi(.)$ est une fonction positive et mesurable qui vérifie la condition

$$\sup_{y\geq 0}\frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty.$$

Et $\psi(.)$ est une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on suppose qu'il existe une fonction strictement positive et continue $\mu(.)$ qui vérifie la condition suivante

$$\|g_1.\mu\|_\infty\|\frac{g_2}{\mu}\| < \frac{1}{L}.$$

Sous ces conditions, l'équation intégrale non linéaire (3.3.2) admet une solution dans $C[a,b]$

Démonstration. On note par $\|.\|_\mu$ la norme définit sur $X = C[a,b]$ par $\|\varphi\|_\mu = \underset{x\in[a,b]}{sup}|\mu(x)\varphi(x)|$, l'espace X muni de la norme $\|.\|_\mu$ est un espace de Banach. Soit $r \geq 0$ est un nombre réel positif, et soit B_r la boule fermée de X défini par

$$(B_r) = \varphi \in C[a,b]; \quad \|\varphi\|\mu \leq r.$$

C'est clair que B_r est un sous-ensemble fermé et convexe de X. Alors, démontrer quel'opérateur T associé avec l'équation (3.3.2) est continue sur X. La conclusion est

$$T(B_r) \subset B_r, \quad \forall r \geq \frac{\|f\|\mu}{1 - L\|g_1\|_\mu\|\frac{g_2}{\mu}\|_1} = r_0.$$

D'après le théorème du point fixe de schauder, l'équation intégrale non linéaire (3.3.2) admet une solution dans (B_{r_0}) et par suite elle admet une solution dans $C[a,b]$. □

3.3.2 Application du théorème de Schauder aux équations intégrales de Volterra

Théorème 3.6. *[1] Soit l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt \quad (a \leq x \leq b). \tag{3.3.3}$$

Telle que $K : [a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes

1. $K(x,t,0) = 0$ *pour tout* $x,t \in [a,b]$,
2. $\frac{\partial K(x,t,z)}{\partial z} < |\frac{1-\|f\|}{b-a}|$.

Alors pour tout $f \in C[a,b]$ telle que $\|f\| < 1$ l'équation (3.3.3) admet une solution $\varphi \in C[a,b]$

Démonstration. 1) On va montrer que $T(B(0;1)) \subset B(0;1)$ i.e. Si $\|\varphi\| \leq 1$, alors $\|T\varphi\| \leq 1$.

En effet

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\| &= \|f(x) + \textstyle\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\|, \\
&\leq \|f(x)\| + \|\textstyle\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\| \\
&\leq \|f(x)\| + \textstyle\int_a^x |K(x,t,\varphi(t))|dt, \\
&\leq \|f(x)\| + \textstyle\int_a^x |K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,0)|dt, \\
&\leq \|f(x)\| + \textstyle\int_a^x |(\varphi - 0)\frac{\partial k(x,t,\varphi(t))}{\partial \varphi}|dt, \\
&\leq \|f(x)\| + \|\varphi\| \tfrac{1-\|f(x)\|}{b-a}(b-a) < 1.
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur T est bien définie.

2) On va montrer que l'opérateur T est un opérateur continue :

soit φ_1 et $\varphi 2 \in C[a,b]$, donc pour tout $x, t \in C[a,b]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)\| &\leq \textstyle\int_a^x |(K(x,t,\varphi_1(t) - K(x,t,\varphi_2(t))dt|, \\
&\leq \textstyle\int_a^x |(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\partial k(x,t,\varphi(t))}{\partial \varphi}|dt, \\
&\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| \tfrac{1-\|f(x)\|}{b-a}(b-a), \\
&\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.
\end{aligned}$$

3) On va montrer que l'opérateure T est relativement compact. En effet on utilise le théorème d'Ascoli-Arzela.

T est équicontinue :

comme k est continue est continue par rapport *à* la 1-ère et la 2-ième variable sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, et comme la 3-ième variable est lipschitzienne donc K est uniformément continue, d'o*ù* :

$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ |t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| < \delta \implies |K(x_1,t_1,\varphi(t_1)) - K(x_2,t_2,\varphi(t_2))| < \varepsilon$

Ainsi, $\forall \varphi \in C[a,b]$, ona :

$$\begin{aligned}
\|T\varphi(x_1) - T\varphi(x_2)\| &\leq \textstyle\int_a^x |K(x_1,t_1,\varphi(t_1)) - K(x_2,t_2,\varphi(t_2))|dt, \\
&\leq \varepsilon(b-a), \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que T est équicontinue.

T est borné :

Soit $\varphi \in C[a,b]$, alors $\forall t \in [a,b]$ on a :

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(t)\| &= \|f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\|, \\ &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x,t,\varphi(t))|dt, \\ &\leq 1 + \sup_{x\in[a,b]} \|K(x,.,.)\|(b-a) = \alpha. \end{aligned}$$

D'oừ l'opérateur T est borné.

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela l'opérateur T est relativement compact.

D'après le théorème Schauder T admet un point fixe, d'oừ l'équation admet une solution.

$\square$

CHAPITRE

4

QUELQUES MÉTHODES DIRECTES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

4.1 Méthode de réduction par dérivation

La règle de dérivation de Leibnitz peut être utilisé pour résoudre des équations intégrales, nous allons maintenant énoncés cette règle.

Soit $f(x,t)$ continue et $\frac{df}{dt}$ continue dans un domaine du plan (x,t) qui comprende rectangle.

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,t)dt.$$

La fonction dérivée de F(x) existe et elle est donnée par

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,t)dt = g'(x)f(x,g(x)) - h'(x)f(x,h(x)) + \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{d}{dx}f(x,t)dt.$$

Exemple 4.1. *L'exemple suivant illustre la méthode de résolution directe.*

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt. \tag{4.1.1}$$

supposons

$$y(x) = \int_0^x e^{-t}\varphi(t)dt.$$

En appliquant la règle de dérivation de Leibnitz on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-x}\varphi(x), \\ e^x y'(x) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.1.1) on trouve

$$\begin{aligned} e^x y'(x) &= x - e^x \textstyle\int_0^x e^{-t}\varphi(t)dt, \\ e^x y'(x) &= x - e^x y(x). \end{aligned}$$

Alors

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \quad y(0) = 0. \tag{4.1.2}$$

Ensuite, on cherche la solution de (4.1.2)

On a

$$S_G = S_H + S_P.$$

La solution homogène

$$y'(x) + y(x) = 0,$$

$$y(x) = ce^{-\int 1dx} = ce^{-x}.$$

La solution particulière

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)e^{-x}, \\ y'(x) &= c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}, \\ e^x y'(x) &= [c'(x) - c(x)] = x - c(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} c'(x) &= x, \\ c(x) &= \tfrac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

la solution générale est

$$y(x) = (c + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}.$$

En utilisant le fait que $\varphi(0) = 0$, *on obtient :*

$$c = 0$$

D'où la solution

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x.$$

4.2 Cas du noyau dégéneré pour les équations intégrales de Fredholm

Le noyau $K(x,t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions ded x seul par des fonctions de t seul, i.e, il de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t); \tag{4.2.1}$$

les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes L'équation intégrale à noyau dégénéré (4.2.1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b [\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)]\varphi(t)dt = f(x), \tag{4.2.2}$$

se résout comme suit.

Récrivons (4.2.2) :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt \tag{4.2.3}$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt = C_k, \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{4.2.4}$$

L'égalité (4.2.3) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{4.2.5}$$

avec C_k des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue).

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se raméne à la recherche des constantes $C_k(k = 1, 2, ..., n)$. Aprés avoir porté (4.2.5) dans l'équation intégrale (4.2.2) et effectué des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{m=1}^{n}(C_m - \int_a^b b_m(t)[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)]dt)a_m(x) = 0.$$

Les fonctions $a_m(x)(m = 1, 2, ..., n)$ étant linéairement indépendantes il en résule que

$$C_m - \int_a^b b_m(t)[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k]dt = 0$$

Ou

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t)dt = \int_a^b b_m(t)f(t)dt \qquad (m = 1, 2, ..., n).$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notions

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t)dt.$$

Nous obtenons

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = f_m \quad (m = 1, 2, ..., n),$$

ou, sous forme développée,

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - ... - \lambda a_{1n}C_n & = & f_1, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - ... - \lambda a_{2n}C_n & = & f_2, \\ .... & & \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - ... + (1-\lambda a_{nn})C_n & = & f_n. \end{array}\right. \tag{4.2.6}$$

Pour trouver les C_k, nous avons donc un système de n équation linéaires à n inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & ... & -\lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & 1-\lambda a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système (4.2.6) admet une solution unique $C_1, C_2, ..., C_n$ obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} 1-\lambda a_{11} & ... & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} f_1 & ... & \lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & ... & -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} f_1 & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\lambda a_{n1} & ... & -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} f_n & ... & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.2.8}$$

$(k = 1, 2, ..., n)$.

L'équation intégrale (4.2.2) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

avec les coefficients $C_k (K = 1, 2, .., n)$ donnés par les formiles (4.2.8).

Remarque 4.1. *On obtient le système (4.2.6) ou bien en multipliant successivement les deux membres de (4.2.5) par $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$, puis en intégrant de a à b, ou bien en portant dans (4.2.4) l'expression de $\varphi(x)$ où l'on fait $x = t$.*

Exemple 4.2. *Soit l'équation intégrale donnée par :*

$$\varphi(x) = \sin x - \cos x + x \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt. \tag{4.2.9}$$

On pose :

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt.$$

Alors l'équation (4.2.9) devient

$$\varphi(x) = \sin x - \cos x + c_1 x.$$

Donc

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t (\sin t - \cos t + c_1 t) dt.$$

Par conséquent :

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t \sin t dt - \int_0^{\pi} \cos^2 t dt + c_1 \int_0^{\pi} t \cos t dt. \tag{4.2.10}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \int_0^\pi \cos t \sin t dt & = & 0, \\ \int_0^\pi \cos^2(t) dt & = & \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^\pi t \cos t dt & = & -2. \end{array}$$

En remplaçant dans (4.2.10) *on aura*

$$\begin{cases} 3c_1 & = & -\frac{\pi}{2}, \\ c_1 & = & -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Enfin

$$\varphi(x) = \sin x - \cos x - \frac{\pi}{6} x.$$

Exemple 4.3. *Résoudre l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt.$$

$$\varphi(x) = x + x\int_0^1 \varphi(t)dt + \int_0^1 t\varphi(t)dt. \tag{4.2.11}$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & \int_0^1 \varphi(t)dt, \\ c_2 & = & \int_0^1 t\varphi(t)dt. \end{array}$$

En remplaçant c_1 et c_2 dans l'équation (4.2.11) *on trouve*

$$\varphi(x) = x + xc_1 + c_2. \tag{4.2.12}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & x + xc_1 + c_2, \\ c_1 & = & \int_0^1 (1+c_1)t + c_2 dt, \\ c_1 & = & \frac{1}{2}(1+c_1) + c_2. \end{array}$$

Alors on obtient

$$\frac{1}{2}c_1 - c_2 = \frac{1}{2}. \tag{4.2.13}$$

Et aussi

$$\begin{array}{rcl} c_2 & = & \int_0^1 t\varphi(t)dt, \\ c_2 & = & \int_0^1 t[(1+c_1)t + c_2]dt, \\ c_2 & = & (1+c_1)\int_0^1 t^2 dt + c_2 \int_0^1 t dt. \end{array}$$

On obtient

$$\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{3}c_1 = \frac{1}{3}. \tag{4.2.14}$$

Le système algébrique de (5.1.2) $\wedge$ (6.2.15) *est donné par*

$$\begin{cases} 2c_1 - 4c_2 &= 2, \\ 3c_2 - 2c_1 &= 2. \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$\begin{cases} c_1 &= -7, \\ c_1 &= -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Alors la solution (4.2.12) *devient*

$$\varphi(x) = -6x - 4.$$

Exemple 4.4.

$$\varphi(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt\varphi^2(t)dt \tag{4.2.15}$$

posons

$$c = \int_0^1 t\varphi^2(t)dt.$$

En remplaçant c *dans la formule* (4.2.15) *on obtient*

$$\varphi(x) = (\frac{7}{8} + \frac{1}{2}c)x. \tag{4.2.16}$$

Alors

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 t(\tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2}c)^2 t^2 dt, \\ 4c &= \tfrac{49}{64} + \tfrac{7}{8}c + \tfrac{1}{4}c^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{49}{64} - \frac{25}{8}c + \frac{1}{4}c^2 = 0. \tag{4.2.17}$$

On multiplie (4.2.17) *par* 64 *on obtient*

$$\begin{aligned} 49 - 200c + 16c2 &= 0, \\ (4c-1)(4c-49) &= 0, \end{aligned}$$

Donc $\quad c = \frac{1}{4} \vee c = \frac{49}{4}$.

Il existe deux solutions : $\varphi(x) = x$, *et* $\varphi(x) = 7x$.

CHAPITRE

5

QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

5.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives également appelée la méthode des itérations de Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes à valeur initiale ou des équations intégrales. Dans cette méthode, nous remplaçons la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe intégral de l'équation de Volterra par toute fonction continue à valeurs réelles sélectionnée $\varphi_0(x)$, appelée l'aapproximation zéro. Cette substitution donnera la première approximation $\varphi_1(x)$[2].

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt. \tag{5.1.1}$$

Il est évident que $\varphi_1(x)$ est continue si $f(x)$, $k(x,t)$ et φ_0 sont continue. La deuxième approximation $\varphi_2(x)$ peut être obtenu de la même façon en remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (5.1.1) par $\varphi_1(x)$.

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt. \tag{5.1.2}$$

En continuant ainsi, nous obtenons une suite infinie des fonctions.

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x).$$

Qui satisfaisait la relation de récurrence suivante :

$$\varphi_n = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1. \tag{5.1.3}$$

La question de convergence de $\varphi_n(x)$ vers la solution de l'équation φ est justifiée par le théorème suivant

Théorème 5.1. *[15] Si $f(x)$ est continue sur l'intervalle $0 \leq x \leq a$, et que le noyau $K(x,t)$ et aussi continue sur le triangle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, la suite des approximations successives $\varphi_n(x), n \geq 0$, converge vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale à l'étude.*

Exemple 5.1. *Soit l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \tag{5.1.4}$$

On choist $\varphi_0(x) = 0$,. Alors :

$$\varphi_1(x) = x.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= x - \textstyle\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt, \\
\varphi_2(x) &= x - x \textstyle\int_0^x tdt + \int_0^x t^2 dt, \\
\varphi_2(x) &= x - \tfrac{1}{6}x^3.
\end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= x - \textstyle\int_0^x (x-t)(t - \frac{1}{6}t^3)dt, \\
\varphi_3(x) &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + (\tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{30})x^5, \\
\varphi_3(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!}.
\end{aligned}$$

La solution $\varphi(x)$ de (5.1.4) est

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = sin(x).$$

Exemple 5.2. *Voici un autre exemple*

$$\varphi(x) = x + \delta x \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)dt.$$

On choisit $\varphi_0(x) = 0$. *Alors on obtient les itérations suivantes*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x,\\
\varphi_2(x) &= x + \delta x \textstyle\int_{-1}^{1} t\varphi_1(t),\\
\varphi_2(x) &= x + \delta x \textstyle\int_{-1}^{1} t^2dt,\\
\varphi_2(x) &= x + \tfrac{2\delta x}{3},\\
\varphi_3(x) &= x + \delta x \textstyle\int_{-1}^{1} t^2(1 + \tfrac{2\delta x}{3})dt,\\
\varphi_3(x) &= = (1 + \tfrac{2\delta x}{3} + (\tfrac{2\delta}{3})^2)x.
\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_n(x) = (1 + \frac{2\delta}{3} + (\frac{2\delta}{3})^2 + \cdots + (\frac{2\delta}{3})^n)x.$$

C'est une série géométrique donc

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1 - \frac{2\delta x}{3}}, \quad si|x| < 1$$

Alors la solution devient

$$\varphi(x) = \frac{3}{3 - 2\delta}.$$

Exemple 5.3. *Utiliser la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :*

$$\varphi(x) = 4x - \frac{16x^3}{3} - \frac{4x^4}{3} + \int_0^x (x - t + 1)\varphi^2(t)dt. \tag{5.1.5}$$

On choisit

$$\varphi_0(x) = 0. \tag{5.1.6}$$

La formule d'itération qui permet de trouver la suite des solutions approchées est donnée par

$$\varphi_{n+1} = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x - t + 1)\varphi_n^2(t)dt. \tag{5.1.7}$$

En substituant (5.1.6) dans (5.1.7) on obtient les approximations :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 0, \\
\varphi_1(x) &= 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \textstyle\int_0^x (x-t+1)\varphi_0^2(t)dt, \\
&= 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4, \\
\varphi_2(x) &= 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \textstyle\int_0^x (x-t+1)\varphi_1^2(t)dt, \\
&= 4x + (\tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{16}{3}x^3) + (\tfrac{4}{3}x^4 - \tfrac{4}{3}x^4) - \tfrac{128}{15}x^5 - \tfrac{16}{5}x^6 + \cdots, \\
\varphi_3(x) &= 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{-4}{3}x^4 + \textstyle\int_0^x (x-t+1)\varphi_2^2(t)dt, \\
&= 4x + (\tfrac{128}{15}x^5 - \tfrac{128}{15}x^5) + (\tfrac{16}{5}x^6 - \tfrac{16}{5}x^6) + \cdots.
\end{aligned}$$

La solution $\varphi(x)$ de (5.1.5) est donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = 4x. \tag{5.1.8}$$

5.2 Méthode de Newton-Kantrovish

Dans cette section on s'intéresse à l'équation intégrale non linéaire sous la forme Urysohn. Ce type d'équation intégrale est défini sous la forme générale suivante

$$y(x) = f(x) + \int_\Omega K(x,t,y(t))dt, \quad \Omega = (a,x) \vee \Omega = (a,b). \tag{5.2.1}$$

Pour approximer (5.2.1) nous utilisons la méthode de "Newton-Kantrovish". Dans cette méthode, nous considérons une solution initiale de $y(x)$, disons $y_0(x)$. Puis en utilisant le processus suivant :

$$y_k(x) = y_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x), \quad k \geq 1. \tag{5.2.2}$$

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_\Omega K_y^{'}(x,t,y_{k-1}(t))\varphi_{k-1}(t)dt. \tag{5.2.3}$$

$$\varepsilon_{k-1} = f(x) + \int_\Omega k(x,t,y_{k-1}(t))dt - y_{k-1}. \tag{5.2.4}$$

Nous résolvons une équation intégrale linéaire au lieu d'une équation intégrale non linéaire [10].

5.2.1 Cas d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm

La forme générale de l'équation intégrale de Fredholm non linéaire pour la forme d'Urysohn est comme suit

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t,y(t))dt, \quad a \leq x \leq b. \tag{5.2.5}$$

On applique la méthode de " Newton-Kantrovish "pour résoudre l'équation (5.2.5).
À chaque étape de l'algorithme, une équation intégrale linéaire pour la correction $\varphi_{k-1}(x)$ est résolu. Sous certaines conditions, le processus (5.2.2) a un taux de convergence élevé, cependant, c'est assez compliqué, car à chaque itération il faut obtenir le nouveau noyau $K_y'(x,t,y_{k-1}(t))$ pour Eq (5.2.3)[10].

Exemple 5.4. *[10] On considère l'équation intégrale de Fredholm suivant*

$$y_{(x)} = \int_0^1 xty^2(t)dt - \frac{5}{12}x + 1$$

On pose

$$y_0(x) = 1$$

En remplçant $y_0(x)$ dans (5.2.4) on trouve

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(x) &= f(x) + \textstyle\int_0^1 xty_0^2(t)dt - y_0^(x), \\
\varepsilon_0(x) &= -\tfrac{5}{12}x + 1 + \textstyle\int_0^1 xtdt - 1, \\
\varepsilon_0(x) &= \tfrac{1}{12}x.
\end{aligned}$$

Par la suite nous calculons l'équation (5.2.3)

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{12}x + 2x\int_0^1 t\varphi_0(t)dt.$$

On pose

$$c_1 = \int_0^1 t\varphi_0(t)dt.$$

Et par la méthode de noyaux dégénérés on trouve

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{12}x + 2xc_1. \tag{5.2.6}$$

Donc

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 t(\tfrac{1}{12}t + 2tc_1)dt, \\ c_1 &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{2}{3}c_1, \\ c_1 &= \tfrac{1}{12}. \end{aligned}$$

En substituant la solution de c_1 dans l'équation (5.2.6) nous obtenons

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{12}x + 2x\frac{1}{12} = \frac{1}{4}x,$$

i.e

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \varphi_0, \\ y_1(x) &= 1 + \tfrac{1}{4}x. \end{aligned}$$

Pour rapprocher les résultats plus, nous poursuivons le processus d'itération. D'abord on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= -\tfrac{5}{12}x + 1 + x\int_0^1 t(1+\tfrac{1}{4}t)^2 dt - 1 - \tfrac{1}{4}x, \\ \varepsilon_1(x) &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{64}x + \tfrac{1}{6}x, \\ \varepsilon_1(x) &= \tfrac{1}{64}x. \end{aligned}$$

Par la suite L'équation $\varphi_1(x)$ est donné comme suit

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{64}x + 2x\int_0^1 t(t + \frac{1}{4}t\varphi_1(t))dt.$$

On pose

$$c_2 = \int_0^1 t(t + \frac{1}{4}t)\varphi_1(t)dt.$$

D'après la méthode de noyau dégénéré on trouve

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{64}x + 2xc_2. \tag{5.2.7}$$

i.e

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_0^1 t(1+\tfrac{1}{4}t)(\tfrac{1}{64}t + 2tc_2)dt, \\ c_2 &= \tfrac{1}{192} + \tfrac{2}{3}c_2 + \tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{8}c_2, \\ c_2 &= \tfrac{114}{3840}. \end{aligned}$$

En substituant la solution de c_2 dans l'équation (6.2.13) nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \tfrac{1}{64}x + 2x\tfrac{114}{3840}, \\ \varphi_1(x) &= \tfrac{3}{40}x. \end{aligned}$$

i.e

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{40}x.$$

La différence maximale entre la solution exacte $y(x) = 1 + \frac{1}{3}x$ et la solution approximative $y_2(x)$ est observé à $x = 1$ et est inférieur à 0.5.

Remarque 5.1. *Cette solution n'est pas unique. L'autre solution peut-être obtenue en prenant la fonction $y_0(x) = 1 + 0,8x$ pour la valeur initiale d'approximation. Dans ce cas, nous pouvons répéter la séquence d'approximations ci-dessus et obtenir les résultats suivants (le coefficient numérique de x est arrondi).*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 1.15x, \\ y_2(x) &= 1 + 1.02x, \\ y_3(x) &= 1 + 1.02x. \end{aligned}$$

Et les approximations précédentes tendent vers la solution exacte $y(x) = 1 + x$.

5.2.2 Cas d'une équation intégrale non linéaire de Volterra

La forme générale de l'équation intégrale de Volterra non linéaire pour la forme d'Urysohn est comme suit

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, y(t))dt, \quad a \leq x \leq b. \tag{5.2.8}$$

Un mérite des méthodes d'itération lorsqu'elles sont appliquées aux équations linéaires de Volterra du second type est leur convergence inconditionnelle sous de faibles restrictions sur le noyau et le membre droit. Lors de la résolution d'équations non linéaires, le domaine d'applicabilité de la méthode des itérations simples est plus petit, et si le processus est toujours convergent, alors, dans de nombreux cas, le taux de convergence peut être très lent. Une méthode efficace qui permet de surmonter les complications indiquées est la méthode de "Newton-Kantorovich". L'objectif principal de cette méthode est la résolution de l'intégrale non linéaire équations de seconde espèce à bornes d'intégration constantes.

Exemple 5.5. *Voisi l'exemple suivant qui illustre la méthode de Newton-kantrovish.*

$$\varphi(x) = -x + \int_0^x t\varphi(t)^2 dt.$$

On pose

$$y_0(x) = 0.$$

En remplaçant $y_0(x)$ *dans* (5.2.4) *on trouve*

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= f(x) + \int_0^x t y_0^2(t)dt - y_0(x),\\ \varepsilon_0(x) &= -x.\end{aligned}$$

Par la suite nous calculons (5.2.3)

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \varepsilon_0(x) + 2\int_0^x t y_0(t)\varphi_0(t)dt,\\ \varphi_0(x) &= -x.\end{aligned}$$

i.e

$$y_1(x) = -x.$$

Pour rapprocher les résultats plus, nous poursuivons le processus d'itération.

D'abord on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x) &= f(x) + \int_0^x t y_1^2(t)dt - y_1(x),\\ \varepsilon_1(x) &= -x + \int_0^x t^3 dt + x,\\ \varepsilon_1(x) &= \tfrac{1}{4}x^4.\end{aligned}$$

Par la suite l'équation $\varphi_1(x)$ *est donné comme suite*

$$\varphi_1(x) = \varepsilon_1(x) - 2\int_0^x \varphi_1(t)dt$$

Pour déterminer $\varphi_1(x)$ *on applique la méthode des approximations successives .*

On pose

$$\varphi_1^{(0)} = 0.$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= \tfrac{1}{4}x^4,\\ \varphi_1^{(2)} &= \tfrac{1}{4}x^4 - 2\int_0^x \tfrac{1}{4}t^6 dt = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{14}x^7,\\ \varphi_1^{(3)} &= \tfrac{1}{4}x^4 - 2\int_0^x t^2(\tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{14}t^7)dt = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{14}x^7 + \tfrac{1}{70}x^{10}.\end{aligned}$$

ie

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1 + \varphi_1,\\ y_2(x) &= -x + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{14}x^7 + \tfrac{1}{70}x^{10}.\end{aligned}$$

Pour rapprocher les résultats plus, nous poursuivons le processus d'itération. D'abord on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2(x) &= -x + \int_0^x t(-t + \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{14}t^7 + \tfrac{1}{70}t^{10})^2 dt + x - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{14}x^7 - \tfrac{1}{70}x^{10}, \\
\varepsilon_2(x) &= \tfrac{1}{160}x^{10} - \tfrac{9}{1820}x^{13} + \tfrac{3}{3920}x^{16} - \tfrac{1}{9310}x^{19} + \tfrac{1}{107800}x^{22}.
\end{aligned}$$

Par la suite nous calculons (5.2.3)

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \varepsilon_2(x) + 2\int_0^x t y_2(t)\varphi_2(t)dt, \\
\varphi_2(x) &= \varepsilon_2(x) + 2\int_0^x t(-x + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{14}x^7 + \tfrac{1}{70}x^{10})\varphi_2(x)dt.
\end{aligned}$$

Pour déterminer $\varphi_2(x)$ on applique la méthode des approximations successives .

On pose

$$\varphi_2^{(0)} = 0,$$

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{23}{1120}x^{10} - \frac{1}{1820}x^{13} - \frac{1}{7840}x^{16} + \frac{1}{9340}x^{19} + \frac{1}{107800}x^{22}.$$

Pour zéro approximation on obtient la solution suivante

$$y_3(x) = -x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{70}x^10 + \frac{23}{1120}x^{10} - \frac{1}{1820}x^{13} - \frac{1}{7840}x^{16} + \frac{1}{9340}x^{19} + \frac{1}{107800}x^{22}.$$

5.3 Méthode de quadrature

On rappelle qu'une fonctionnelle linéaire sur $C(I)$ est une forme linéaire sur $C(I)$. O*ù* $C(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions définis sur $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. [13]

Définition 5.1. *[13] On appelle formule (ou méthode) de quadrature à $n+1$ points sur $C(I)$ toute fonctionnelle linéaire φ_n définie par :*

$$\forall f \in C(I), \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

où n est un entier naturel non nul, $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de points deux à deux distincts dans l'intervalle I et $(\lambda_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de réels non tous nuls.

Exemple 5.6. *Pour $I = [a, b]$ intervalle fermé borné, en prenant les points $x_{n,k}$ équidistants dans I, c'est -à-dire :*

$$x_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n}(0 \leq k \leq n)$$

et les coefficients $\lambda_{n,k}$ tous égaux à $\frac{b-a}{n}$ pour k compris entre 0 et $n-1$ le coefficient $\lambda_{n,n}$ étant nul, on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$\varphi_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_{n,k})$$

et on sait que

$$\forall f \in C(I) \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(f) = \int_a^b f(X)dX.$$

De manière plus générale, en choisissant pour tout entier K compris entre 0 et $n-1$ un réel $\varepsilon_{n,k}$ dans l'intervalle $[X_{n,k}, X_{n,k+1}[$, les sommes de Riemann :

$$\varphi_n(f) = \frac{b-a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_{n,k})$$

définissent une méthode de quadrature sur $C(I)$ qui est exacte sur l'ensemble des fonctions constantes et pour toute fonction f dans $C(I)$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \int_a^b f(X)dX.$$

Définition 5.2. *[13] Les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale, par des méthodes numériques (trapèze, simpson).*
On considère l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{5.3.1}$$

Où a, b et les fonctions f, k sont données. Notre but est d'approcher la fonction φ sur l'intervalle $[a, b]$. Il existe plusieurs approches qui utilise les formules de quadrature pour la résolution des équations intégrales. Dans ce qui suit, nous allons présenter une méthode classique et raisonnablement intuitive basée sur la règle d'intégration du trapèze.[12]

5.3.1 Méthode des trapèzes

[12] Intuitivement, on peut obtenir une solution approchée pour l'équation (5.3.1) en utilisant le processus suivant. Soit la donnée d'un pas de discrétisation $h > 0$ on se donne

une partition équidistante

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Pour obtenir une approximation de $u(x_n)$, l'idée est de remplacer l'intégrale dans (5.3.1) par une somme finie. Si, on note U_n la valeure approchée de $u(x_n)$, alors pour $n \geq 1$ on a

$$U_n = f(x_n) + h(\frac{1}{2}k(x_n, x_0)U_0 + \sum_{i=1}^{n-1} k(x_n, x_i)U_i + \frac{1}{2}k(x_n, x_n)U_n). \tag{5.3.2}$$

Exemple 5.7. *On va résoudre l'exemple de Fredholm suivante par la méthode de quadrature*

$$\varphi(x) = x^2 + \int_0^1 e^{|x-t|}\varphi(t)dt.$$

Pour $n = 2$ on va calculer la solution dans les points $x = 0$ et $x = 1$ en utilisent la formule des trapèzes on aura

$$\begin{aligned} u(0) &= f(0) + \tfrac{1}{2}(k(0,0)u(0) + k(0,1)u(1)), \\ u(1) &= f(1) + \tfrac{1}{2}(k(1,0)u(0) + k(1,1)u(1)). \end{aligned}$$

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} u(0) &= \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(1), \\ u(1) &= 1 + \tfrac{1}{2}u(0) + \tfrac{1}{2}u(1). \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient

$$u(0) = -0.8509 \quad et \quad u(1) = -0.31310.$$

*Pour n=4, pour facilité les calculules on va utilisé le programme de **Maltab** on obtient*

$$\begin{cases} u(0) = -1.1256, \\ u(\frac{1}{3}) = -0.8228, \\ u(\frac{2}{3}) = -0.5888, \\ u(1) = -0.3871. \end{cases}$$

CHAPITRE

6

MÉTHODES DE PROJECTION

6.1 Méthode de Bubnov-Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{6.1.1}$$

Par la méthode de Boubnov-Galerkin. On travaille dans l'espace $X = L^2([a,b])$ muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, on choisit un système des fonctions $\{u_n(x)\}$ complet dans $L^2([a,b])$ et tel que, quelles que soient n, les fonctions $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approché $\varphi_n(x)$ de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \tag{6.1.2}$$

Les coefficients $a_k(k=1,2,...,n)$ se définissent à partir du système linéaire

$$\langle \varphi_n(x), u_k(x)\rangle = \langle f(x), u_k(x)\rangle + \langle \delta \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, u_k(x)\rangle.$$

Ou $\langle f,g\rangle$ désigne $\int_a^b f(x)g(x)dx$ et où on remplace $\varphi_n(x)$ par $\sum_{k=1}^n a_k u_k(x)$.

Si la valeur de λ dans (6.1.1) n'est pas un nombre caractéristique, alors pour n suffisament grand le système admet une solution unique, et la solution appochée $\varphi_n(x)$ de (6.1.2) tend dans la métrique de $L^2([a,b])$ vers la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (6.1.1) [7].

Théorème 6.1. *Soit H un espace de Hilbert. Prenons un système de polynôme de Legendre $\{l_n\}_{n\in N}$ complet sur $[-1,1]$ qui forme un système orthonormé de H.*

Soit $V=\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}$ une famille finie de vecteurs de H.

Soit F_k le sous-espace vectoriel engendré par V. F_k est de dimension finie alors F_k est un fermé de H, et $x\in H$ alors

$$P_{Fk} = \sum_{i=1}^k c_i(x) l_i,$$

avec

$$c_i(x) = \frac{2n+1}{2}\langle x, l_i\rangle.$$

Démonstration. On a

$P_F(x)=a \iff \langle x-a,b\rangle = 0, \forall \quad b\in F$. D'aprés le théorème de la projection orthogonale. pour montrer que $P_{Fk}=\sum_{i=1}^n c_i(x)l_i$ il suffit de prouver que

$$\begin{array}{lcl} x-P_{Fk}(x)\perp F_k & \iff & \langle x-P_{Fk}(x), z\rangle = 0, \forall z\in F_k, \\ Soit \quad z\in F_k & \iff & z=\sum_{i=1}^k \lambda_i l_i, \\ \langle x-P_{Fk}(x), z\rangle & = & \langle x-\sum_{i=1}^k c_i(x)l_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i l_i\rangle, \\ & = & \langle x, \sum_{i=1}^k \lambda_i l_i\rangle - \langle \sum_{i=1}^k c_i(x) l_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i l_i\rangle. \end{array}$$

On pose

$$(*) = \langle \sum_{i=1}^k c_i(x)l_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i l_i\rangle.$$

Alors

$$\begin{array}{lcl} (*) & = & \langle c_1(x)l_1 + c_2(x)l_2 + ... + c_k(x)l_k, \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + ... + \lambda_k l_k\rangle, \\ & = & c_1(x)\bar{\lambda}_1\langle l_1,l_1\rangle + c_2(x)\bar{\lambda}_2\langle l_2,l_2\rangle + ... + c_k(x)\bar{\lambda}_k\langle l_k,l_k\rangle, \\ & = & \frac{2}{2n+1}\sum_{i=1}^k c_i(x)\bar{\lambda}_i, \\ & = & \sum_{i=1}^k \langle x, l_i\rangle\bar{\lambda}_i. \end{array}$$

D'où
$$\langle x - P_{Fk}(x), z\rangle = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}\langle x, p_i\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle x, p_i\rangle\bar{\lambda}_i = 0.$$

□

6.1.1 Applications

Exemple 6.1. *Soit l'équation intégrale de Fredholm :*
$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1}(xt + x^2)\varphi(t)dt \tag{6.1.3}$$

On résout cette équation par la méthode de Galerkin. On choisit le système de polynômes de Legendre $P_n(x)$ et on cherche une solution approchée $\varphi_3(x)$ de la forme
$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2}. \tag{6.1.4}$$

On remplace (6.1.4) dans (6.1.3) :
$$a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2} = 1 + \int_{-1}^{1}(xt + x^2)(a_1 + a_2t + a_3\frac{3t^2-1}{2})dt.$$

Après avoir calculé l'intégrale on obtient :
$$a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2} = 1 + \frac{2x}{3}a_2 + 2x^2a_1. \tag{6.1.5}$$

On multiplie (6.1.5) par 1 et on intègre par rapport à x
$$\int_{-1}^{1} a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2}dx = \int_{-1}^{1}(1 + \frac{2x}{3}a_2 + 2x^2a_1)dx$$

On obtient
$$2a_1 = 2 + \frac{4}{3}a_1,$$

Donc
$$a_1 = 3.$$

On multiplie (6.1.5) par x et on intègre par rapport àx on obtient :
$$\int_{-1}^{1}(a_1x + a_2x^2 + a_3\frac{3x^3-x}{2})dx = \int_{-1}^{1}(x + \frac{2x^2}{3}a_2 + 2x^3a_1)dx$$

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}a_2 &= \tfrac{4}{9}a_2,\\ a_2 &= 0.\end{aligned}$$

On multiplie (6.1.5) *par* $\frac{3x^2-1}{2}$ *et on intègre par rapport à* x *on obtient :*

$$\int_{-1}^{1}(a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2})(\frac{3x^2-1}{2})dx = \int_{-1}^{1}(1 + \frac{2x}{3}a_2 + 2x^2a_1)(\frac{3x^2-1}{2})dx$$

Par conséquent

$$\frac{8}{15}a_1 = \frac{2}{5}a_3,$$

C.à.d

$$a_3 = 4.$$

Donc la solution est

$$\varphi_3(x) = 3 + 6x^2 - 2 = 1 + 6x^2.$$

Cette solution coincide avec la solution exacte.

Exemple 6.2. *On va résoudre le même exemple précédent mais cette fois on utilise les polynômes de Tchebychev.*

$$\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1}(xt + x^2)\varphi(t)dt. \tag{6.1.6}$$

Cherchons une solution approchée $\varphi_3(x)$ *sous la forme*

$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2x + a_3(2x^2 - 1). \tag{6.1.7}$$

En remplaçant (6.1.7) *dans* (6.1.6) *on obtient*

$$a_1 + a_2x + a_3(2x^2 - 1) = 1 + \int_{-1}^{1}(xt + x^2)(a_1 + a_2t + a_3(2t^2 - 1)dt.$$

Ce qui donne :

$$a_1 + a_2x + a_3(2x^2 - 1) = 1 + \frac{2}{3}a_2x + 2a_1x^2 - \frac{2}{3}x^2a_3. \tag{6.1.8}$$

En multipliant (6.1.8) *par 1 et en intégrant par rapport à* x *nous obtenons*

$$\frac{2}{3}a_1 = 2 + \frac{2}{9}a_3. \tag{6.1.9}$$

En multipliant (6.1.8) *par* x *et en intégrant par rapport à* x *nous obtenons*

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}a_2 &= \tfrac{4}{9}a_2, \\ a_2 &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant (6.1.8) *par* $2x^2 - 1$ *et en intégrant par rapport à* x *nous obtenons*

$$-\frac{2}{3}a_1 + \frac{14}{15}a_3 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{15}a_1 - \frac{4}{45}a_3.$$

On résout ensuite le système suivant

$$\begin{cases} \tfrac{2}{3}a_1 - \tfrac{2}{9}a_3 &= 2, \\ \tfrac{2}{9}a_2 &= 0, \\ -\tfrac{14}{15}a_1 + \tfrac{46}{45} &= -\tfrac{2}{3}. \end{cases}$$

On obtient

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 3.$$

Donc la solution est

$$\varphi_3(x) = 1 + 6x^2.$$

Remarque 6.1. *On remarque que si on utilise les polynômes de Legendre où bien le polynôme Tchebychev dans la même équation intégrale on obtient le même solution.*

Exemple 6.3. *Voici un autre exemple*

$$\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^{1}(xt^2 - x)\varphi(t)dt. \tag{6.1.10}$$

Choisissons pour système complet sur $[-1, 1]$ *un système de polynômes de Legendre* $P_n(x)$ *et cherchons une solution approchée* $\varphi_3(x)$ *de la forme*

$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2 - 1}{2}. \tag{6.1.11}$$

En remplaçant (6.1.11) *dans* (6.1.10)

$$a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2 - 1}{2} = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^{1}(xt^2 - x)(a_1 + a_2t + a_3\frac{3t^2 - 1}{2})dt.$$

Où

$$a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2 - 1}{2} = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}xa_1 + \frac{4}{15}a_3x. \tag{6.1.12}$$

On multiplie (6.1.12) par 1 et on intègre par rapport à x on obtient :

$$\int_{-1}^{1}(a_1 + a_2 x + a_3 \tfrac{3x^2-1}{2})dx \quad = \quad \int_{-1}^{1}(1 + \tfrac{4}{3}x - \tfrac{4}{3}x a_1 + \tfrac{4}{15}a_3 x)dx,$$

$$2a_1 = 2.$$

C.à.d

$$a_1 = 1.$$

On multiplie (6.1.12) par x et on intègre par rapport à x on obtient :

$$\int_{-1}^{1}(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 \frac{3x^3 - x}{2})dx = \int_{-1}^{1}(x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^2 a_1 + \frac{4}{15}a_3 x^2)dx,$$

$$\frac{-2}{3}a_2 = \frac{8}{45}a_3.$$

On multiplie (6.1.12) par $\frac{3x^2-1}{2}$ et on intègre par rapport à x on obtient :

$$\int_{-1}^{1}(a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2})(\frac{3x^2-1}{2})dx = \int_{-1}^{1}(1 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x a_1 + \frac{4}{15}a_3 x)(\frac{3x^2-1}{2})dx,$$

$$\frac{-8}{20}a_3 = 1 - 1.$$

Alors

$$a_3 = 0.$$

Donc

$$a_2 = 0.$$

D'où la solution est

$$Q_3(x) = 1.$$

Cette solution coincide avec la solution exacte.

Exemple 6.4. *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^1 2e^x e^t \varphi(t)dt. \tag{6.1.13}$$

La solution exact $\varphi(x) = e^{x-2}$.

Choisissons pour système complet sur $[0, 1]$ un système de polynôme d'Hermite $H_n(x)$ et cherchons une solution approchée $\varphi_3(x)$ de la forme

$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2 x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.1.14}$$

En repmlaçant (6.1.14) *dans* (6.1.13) *on obtient*

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) = e^x - \int_0^1 (2e^xe^t)(a_1 + a_2t + a_3(t^2 - 1))dt.$$

Donc

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) = e^x + 2e^x(a_1 - a_2 + a_3 - a_1e). \tag{6.1.15}$$

En multipliant successivement les deux membres de l'équation (6.1.15) *par* $1, x, x^2 - 1$ *et en intégrant par rapport á* x *de 0 à 1, nous obtenous*

$$\begin{cases} a_1(4e - 2e^2 - 3) + a_2(\frac{3}{2} - 2e) + a_3(2e - \frac{4}{3}) & = & 1 - e, \\ a_1(\frac{3}{2} - 2e) - \frac{7}{3}a_2 + \frac{9}{4}a_3 & = & -1, \\ a_1(2e - \frac{4}{3}) + \frac{9}{4}a_2 - \frac{38}{15}a_3 & = & 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient

$$a_1 = 0.2506690599, a_2 = 0.115185933, a_3 = 0.1135741725.$$

Alors La solution approchée est

$$\varphi(x) \approx 0.1370948874 + 0.2506690599x + 0.1135741725x^2.$$

x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur absolue
0.0	0.135335283	0.1370948874	0.0017596044
0.1	0.149568619	0.1632975351	0.0137289161
0.2	0.165298888	0.191771666	0.026472778
0.3	0.182683524	0.2225172808	0.0398337568
0.4	0.201896518	0.25553437896	0.0534472716
0.5	0.22313016	0.2908229604	0.0676928004
0.6	0.246596963	0.32838302544	0.08178606244
0.7	0.272531793	0.368214573855	0.095682780855
0.8	0.301194211	0.41031760572	0.10912339472
0.9	0.332871083	0.4546921215	0.1218210385

1	0.367879441	0.5013381198	0.1334586788

TABLE 6.1 – Solutions numériques en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple **6.4**

Exemple 6.5. *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4}\int_0^1 (x-t)\varphi^2(t)dt. \tag{6.1.16}$$

la solution exacte est $\varphi(x) = e^x$.

Choisissons pour système complet sur $[0, 1]$ *un système de polynômes d'Hermite* $H_n(x)$ *et cherchons une solution approchée* $\varphi_3(x)$ *de la forme*

$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.1.17}$$

En remplaçant (6.1.17) *dans* (6.1.16)

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4}\int_0^1 (x-t)(a_1 + a_2t + a_3(t^2 - 1))^2 dt.$$

On pose

$$J = \int_0^1 (x-t)(a_1 + a_2t + a_3(t^2 - 1))^2 dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{1}{2}a_1a_3 - \frac{2}{3}a_1a_2 + \frac{4}{15}a_2a_3 + a_1^2x + \frac{1}{3}a_2^2x + \frac{8}{15}a_3^2x - \frac{1}{2}a_1^2 \\ & -\frac{1}{4}a_2^2 - \frac{a_3^2+}{6} + a_1a_2x - \frac{4}{3}a_1a_3 - \frac{1}{2}a_2a_3x - \frac{1}{2}a_2a_3x. \end{aligned}$$

Donc

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) = e^x + + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4}J \tag{6.1.18}$$

En multipliant successivement les deux membres de l'équation (6.1.18) *par* $1, x, x^2 - 1$ *et en intégrant par rapport á* x *de 0 à 1, nous obtenous le système non linéaire suivant*

$$\begin{cases} a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{2}{3}a_3 + \frac{1}{48}a_2^2 - \frac{1}{240}a_2a_3 + \frac{1}{24}a_1a_2 + \frac{1}{40}a_3^2 + \frac{1}{24}a_1a_3 & = e - 1.274316006, \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{48}a_1^2 + \frac{7}{144}a_1a_3 + \frac{1}{288}a_2^2 + \frac{1}{120}a_2a_3 - \frac{17}{720}a_3^2 & = 0.8628419969, \\ \frac{8}{15}a_3 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{48}a_2 - \frac{7}{144}a_1a_2 - \frac{1}{48}a_2^2 + \frac{19}{1440}a_2a_3 + \frac{1}{180}a_3^2 & = 0.8171226625. \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode numérique de Newton [3]. Les calculs sont effectués par un programme Matlab on obtient les résultats suivants .

$$a_1 = 0.4721, \quad a_2 = 2.0068, \quad a_3 = 0.2391.$$

D'où la solution approchée est

$$\varphi_3(x) \approx 0.2333 + 2.0068x + 0.2391x^2.$$

x	Solution exact	Solution approchée	Erreur absolue
0.0	1	0.2333	0.7667
0.1	1.1051	0.4363	0.6688
0.2	1.2214	0.6442	0.5772
0.3	1.3498	0.8568	0.493
0.4	1.4918	1.0742	0.4176
0.5	1.6487	1.2964	0.3523
0.6	1.8221	2.125496	0.3033
0.7	2.0137	1.7552	0.2585
0.8	2.2255	1.9917	0.2338
0.9	2.4596	2.2330	0.2266
1	2.7182	2.47928	0.239

Table 6.2 – Solutions numériques en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple **6.5**

6.2 Méthode de Collocation

On considère l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{6.2.1}$$

On veut discrétiser l'équation (6.2.1) et convertir cette équation à un système d'équations linéaires. Pour cela, on choisit la méthode de collocation comme l'une des méthodes de projection. Dans ce processus, on a besoin d'une base. Pour cela, on choisit des polynômes orthogonaux (Legendre, Hermite, Tchebychev,...,) [9].

Maintenant, on estime la fonction inconnue $\varphi(t)$ sous la forme

$$\varphi(t) \approx P_m(f(t)) = \sum_{i=0}^{m} a_i L_i(t), \tag{6.2.2}$$

En substituant(6.2.2) dans (6.2.1), on obtient

$$\sum_{i=0}^{m} a_i L_i(x) = \int_a^b K(s,t) \sum_{i=0}^{m} a_i L_i(t) dt + f(x).$$

On définit donc l'équation résiduelle comme

$$R_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i L_i(x) - \int_a^b K(x,t) \sum_{i=0}^{m} a_i L_i(t) dt - f(x).$$

Pour déterminer les coefficients inconnus a_i, on sélectionne des points de collocation tels que

$$R_m(x_j) = 0, \quad j = 0, ..., m$$

Pour notre cas, on va choisir des noeuds $\{x_0, x_1, \cdot\cdot\cdot, x_m\}$ comme des points distincts, on se donne une partition équidistante.

i.e

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

De sorte on obtient un système d'équations linéaires $A_m X = b_m$ où

$$\begin{array}{rcl} A_m & = & [L_i(x_j) - \int_a^b k(x_j,t) L_i(t) dt]_{j=0}^m, \quad i = 0, ..., m, \\ b_m & = & [f(x_j)], \quad j = 0, ..., m, \\ X^T & = & [a_i]_{i=0}^m. \end{array}$$

6.2.1 Applications

Exemple 6.6. *On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = 5x - 2x^2 - \int_{-1}^{1} (x^2 t^3 - x^3 t^2) \varphi(t) dt.$$

On résout cette équation par la méthode de Collocation, en utilisant les trois points -1,0,1 et la base formée par les trois premier polynômes de Legendre $P_n(x)$.
i.e

$$\varphi_3(x) = a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Donc

$$a1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - \int_{-1}^{1} (x^2 t^3 - x^3 t^2)(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}) dt = 5x - 2x^2. \quad (6.2.3)$$

Maintenant pour trouver toute l'intégrale. Il faut déterminer a_1 *,*a_2 *et* a_3 *. Alors on a besoin de trois équations. Donc, on chosit* x_j *dans l'intervalle* $[-1, 1]$ *qui donne trois équations. D'abord en remplaçant* x *par 0 dans l'équation* (6.2.3) *on obtient*

$$a_1 - \frac{a_3}{2} = 0.$$

Ensuite en remplaçant x *par -1 dans l'équation* (6.2.3) *on obtient*

$$\begin{array}{lcl} a_1 - a_2 + a_3 - \int_{-1}^{1} (t^3 + t^2)(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2}) & = & -7, \\ 27a_1 - 21a_2 & = & -105. \end{array}$$

Enfin en remplaçant x *par 1 dans l'équation* (6.2.3) *on obtient*

$$\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 - \int_{-1}^{1} (t^3 - t^2)(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2} & = & 3, \\ 63a_1 + 9a_2 & = & 45. \end{array}$$

Maintenant, les paramètres inconnus a_1, a_2, eta_3 *sont déterminés en résolvant le système*

$$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{2} a_3 & = & 0, \\ 27a_1 - 21a_a 2 & = & -105, \\ 63a_1 + 9a_2 & = & 45. \end{cases}$$

Donc

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 0.$$

Par conséquent la solution approchée est

$$\varphi(x) = 5x.$$

Cette solution est coincide avec la solution exacte.

Exemple 6.7. *On considère l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t\varphi(t)dt. \tag{6.2.4}$$

Résoudre cette équation par la méthode de collocation. En utilisant les trois points 0,$\frac{1}{2}$,1 et la base formée des trois premiers polynôme de Hermite $H_n(x)$. i.e.

$$\varphi_3(x) = a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.2.5}$$

En remplaçant (6.2.5) dans (6.2.4) on obtient

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2t(a_1 + a_2t + a_3(t^2 - 1))dt = 3x + 3x^2. \tag{6.2.6}$$

Maintenant pour trouver toute l'intégrale.Il faut déterminer a_1, a_2 et a_3. Alors nous avons besoin de trois équations. Donc, on choisit x_j dans l'intervalle [0, 1] qui donne trois équations. D'abord en remplaçant $x = 0$ dans l'équation (6.2.6) on obtient :

$$a_1 = a_3.$$

En suite en remplaçant $x = \frac{1}{2}$ dans l'équation (6.2.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{3}{4}a_3 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{4}t(a_1 + a_2t + a_3t^2 - a_3)dt &= \tfrac{9}{4}, \\
a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{3}{4}a_3 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{8}a_1 + \tfrac{1}{12}a_2 + \tfrac{1}{16}a_3 - \tfrac{1}{8}a_3) &= \tfrac{9}{4}, \\
168a_1 + 352a_2 &= 1728.
\end{aligned}$$

En fin remplaçant $x = 1$ dans l'équation (6.2.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 t(a_1 + a_2t + a_3t^2 - a_3)dt &= 6, \\
a_1 + a_2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{1}{4}a_3 - \tfrac{1}{2}a_3) &= 6, \\
42a_1 + 40a_2 &= 288.
\end{aligned}$$

On résout le système linéaire suivant

$$\begin{cases}
a_1 - a_3 = 0, \\
168a_1 + 352a_2 = 1728, \\
42a_1 + 40a_2 = 288.
\end{cases}$$

On obtient donc

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4.$$

Par conséquent la solution approchée est

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2.$$

Cette solution coincide avec la solution exacte.

Exemple 6.8. *On considère l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = sinx - cosx + \int_0^\pi xcos(t)\varphi(t)dt. \tag{6.2.7}$$

La solution exact $\varphi(x) = \sin x - \cos x - \frac{\pi}{6}x$.

On résout cette équation par la méthode de collocation, En utilisant les trois points 0, $\frac{\pi}{2}$, π *et la base formée des trois premier polynômes de Hermite* $H_n(x)$ *i.e.*

$$u_3(x) = a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.2.8}$$

En remplaçant (6.2.8) *dans* (6.2.7) *on obtient*

$$a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1) - \int_0^\pi (xcos(t))(a_1 + a_2t + a_3(t^2 - 1))dt = sinx - cosx. \tag{6.2.9}$$

D'abord en remplaçant $x = 0$ *dans l'équation* (6.2.9) *on obtient*

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &= -1, \\ a_1 &= a_3 - 1. \end{aligned}$$

En suite en remplaçant $x = \pi$ *dans l'équation* (6.2.9) *on obtient*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2\pi + a_3(\pi^2 - 1) - \textstyle\int_0^1 \pi cos(t)(a_1 + a_2t + a_3t^2 - a_3)dt &= 1, \\ a_1 + a_2\pi + a_3\pi^2 - a_3 + 2\pi(a_2 + \pi a_3) &= 1, \\ 3\pi a_2 + 3a_3\pi^2 &= 2. \end{aligned}$$

Enfin en posont $x = \frac{\pi}{2}$ *dans l'équation* (6.2.9) *on obtient*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2\tfrac{\pi}{2} + a_3(\tfrac{\pi^2}{4} - 1) - \textstyle\int_0^1 \frac{\pi}{2}cos(t)(a_1 + a_2t + a_3t^2 - a_3)dt &= 1, \\ a_1 + a_2\tfrac{\pi}{2} + a_3(\tfrac{\pi^2}{4} - 1) + \pi(a_2 + \pi a_3) &= 1, \\ 6a_2\pi + 5a_3\pi^2 &= 8. \end{aligned}$$

On résout le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = -1, \\ 3a_2\pi + 3a_3\pi^2 = 2, \\ 6a_2\pi + 5a_3\pi^2 = 8 \end{cases}$$

Enfin on trouve

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2} - 1, \quad a_2 = \frac{14}{3\pi}, \quad a_3 = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Donc la solution approchée est

$$\varphi(x) = -1 + \frac{14}{3\pi}\, x - \frac{4}{\pi^2} x^2.$$

Exemple 6.9. *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x - 2\int_0^1 e^x e^t \varphi(t)dt. \tag{6.2.10}$$

La solution exacte est $\varphi(x) = e^{x-2}$.

Prenant pour système complet sur $[0.1]$ *un système de polynômes de Hermite* $\{H_n\}$ *et cherchons une solution approchée* $\varphi_3(x)$ *de la forme*

$$\varphi_3(x) = 1.a_1 + a_2 x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.2.11}$$

En remplaçant (6.2.11) *dans* (6.2.10) *on obtient :*

$$a_1 + a_2 x + a_3(x^2 - 1) + 2\int_0^1 e^x e^t (a_1 + a_2 x + a_3(x^2 - 1)dt = e^x. \tag{6.2.12}$$

D'abord en remplaçant $x = 0$ *dans l'équation* (6.2.12) *on obtient :*

$$a_1(2e - 1) + 2a_2 - 3a_3 = 1.$$

Ensuite en remplaçant $x = \frac{1}{2}$ *dans l'équation* (6.2.12) *on obtient :*

$$a_1(1 - 2e^{\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}}) + a_2(\frac{1}{2} + 2e^{\frac{1}{2}}) - a_3(\frac{3}{4} + 2e^{\frac{1}{2}}) = e^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin en remplaçant $x = 1$ *dans l'équation* (6.2.12) *on obtient*

$$a_1(1 - 2e + 2e^2) + a_2(1 + 2e) - 2ea_3 = e.$$

On résout ensuite le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_1(2e-1) + 2a_2 - 3a_3 & = & 1, \\ a_1(1 - 2e^{\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}}) + a_2(\frac{1}{2} + 2e^{\frac{1}{2}}) - a_3(\frac{3}{4} + 2e^{\frac{1}{2}}) & = & e^{\frac{1}{2}}, \\ a_1(1 - 2e + 2e^2) + a_2(1 + 2e) - 2ea_3 & = & e. \end{cases}$$

On obtient

$$a_1 = 0.2489126532, a_2 = 0.118477589, a_3 = 0.1137573363.$$

Alors la solution approchée est

$$\varphi_3(x) = 0.1351553169 + 0.118477589x + 0.1137573363x^2.$$

x	Solution exact	Solution approchée	Erreur absolue
0.0	0.135335283	0.1351553169	0.0001799669
0.1	0.149568619	0.1481406491	0.0014279699
0.2	0.165298888	0.1634011281	0.0018977599
0.3	0.182683524	0.1809367538	0.0017467702
0.4	0.201896518	0.2007475263	0.0011489917
0.5	0.22313016	0.2228334454	0.00521438
0.6	0.246596963	0.2471945113	0.0005975483
0.7	0.272531793	0.2738307239	0.0012989309
0.8	0.301194211	0,3027420833	0.0195478723
0.9	0.332871083	0.3339285894	0.0010575064
1	0.367879441	0.36739024	0.000489201

TABLE 6.3 – Solutions numériques en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple **6.9**

Exemple 6.10. *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivant*

$$\varphi(x) = -\frac{2}{15} - \frac{83}{30}x + \frac{50}{21}x^2 + \int_0^1 (1 + xt + x^2t^2)\varphi^2(t)dt. \tag{6.2.13}$$

Pour résoudre cette équation par la méthode de collocation, on va choisir un système de polynômes d'Hermite $H_n(x)$ et on cherche une solution approchée $\varphi_3(x)$ de la forme

$$\varphi_3(x) = a_1 + a_2x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.2.14}$$

En remplaçant (6.2.14) dans (6.2.13) on obtient

$$a_1+a_2x+a_3(x^2-1)-\int_0^1 (1+xt+x^2t^2)(a_1+a_2t+a_3(t^2-1))^2dt = -\frac{2}{15}-\frac{83}{30}x+\frac{50}{21}x^2. \tag{6.2.15}$$

D'abord en remplaçant $x = 0$ dans l'équation (6.2.15) on obtient

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_3 - \int_0^1 (a_1 + a_2 t + a_3(t^2-1))^2 dt & = & -\frac{2}{15}, \\ 15a_1 - 15a_3 - 15a_1^2 - 15a_1a_2 + 20a_1 - 5a_2^2 + \frac{15}{2}a_2a_3 - 8a_3^2 & = & -2. \end{array}$$

En suite en remplaçant $x = \frac{1}{2}$ dans l'équation (6.2.15) on obtient

$$\begin{array}{rcl} a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{4}a_3 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+t+t^2)(a_1 + a_2 t + a_3(t^2-1))^2 dt & = & -\frac{129}{140}, \\ 140a_1 + 70a_2 - 105a_3 - \frac{560}{3}a_1^2 - \frac{1225}{6}a_1a_2 + 231a_1a_3 - \frac{427}{6}a_2^2 + \frac{189}{8}a_2a_3 - 89a_3^2 & = & -129. \end{array}$$

En fin en remplaçant $x = 1$ dans l'équation (6.2.15) on obtient

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 - \int_0^1 (1+t+t^2)(a_1 + a_2 t + a_3(t^2-1))^2 dt & = & -\frac{109}{210,} \\ 210a_1 + 210a_2 - 385a_1^2 + 455a_1a_2 + 441a_1a_3 - \frac{329}{2}a_2^2 + 196a_2a_3 - 163a_3^2 & = & -109. \end{array}$$

On obtient le système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} 15a_1 - 15a_3 - 15a_1^2 - 15a_1a_2 + 20a_1 - 5a_2^2 + \frac{15}{2}a_2a_3 - 8a_3^2 & = -2, \\ 140a_1 + 70a_2 - 105a_3 - \frac{560}{3}a_1^2 - \frac{1225}{6}a_1a_2 + 231a_1a_3 - \frac{427}{6}a_2^2 + \frac{189}{8}a_2a_3 - 89a_3^2 & = -129, \\ 210a_1 + 210a_2 - 385a_1^2 + 455a_1a_2 + 441a_1a_3 - \frac{329}{2}a_2^2 + 196a_2a_3 - 163a_3^2 & = -109. \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode numérique de Newton [3]. En effectuant les calculs par le programme de Matlab on obtient les résultats suivants

$$a_1 = 4, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 3.$$

D'où la solution approchée est

$$\varphi(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Cette solution coincide avec la solution exacte.

Exemple 6.11. *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivant :*

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4}\int_0^1 (x-t)\varphi^2(t)dt. \tag{6.2.16}$$

La solution exacte $\varphi(x) = e^{(x)}$.

On choisit un système de polynôme d'Hermite $H_n(x)$ et on cherche une solution approchée $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = a1 + a_2 x + a_3(x^2 - 1). \tag{6.2.17}$$

En remplaçant (6.2.17) *dans* (6.2.16) *on obtient*

$$a_1+a_2x+a_3(x^2-1)-\frac{1}{4}\int_0^1(x-t)(a_1+a_2x+a_3(x^2-1))^2dt=e^x+\frac{1}{16}(3-e^2). \quad (6.2.18)$$

D'abord en remplaçant x par 0 dans l'équation (6.2.16) *on obtient :*

$$\begin{aligned} a_1-a_3-\tfrac{1}{4}\int_0^1 -t(a_1+a_2t+a_3(t^2-1))^2dt &= 1+\tfrac{1}{16}(3-e^2), \\ a_1-a_3+\tfrac{a_1^2}{8}+\tfrac{a_1a_2}{6}-\tfrac{a_1a_2}{8}+\tfrac{a_2^2}{16}-\tfrac{a_2a_3}{15}+\tfrac{a_3^2}{24} &= 0.072568398. \end{aligned}$$

Ensuite en remplaçant x par $\frac{1}{2}$ dans l'équation (6.2.16) *on obtient :*

$$\begin{aligned} a_1+\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}\int_0^1(\tfrac{1}{2}-t)(a_1+a_2t+a_3(t^2-1))^2dt &= e^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{16}(3-e^2), \\ a_1+\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{240}((a_2+a_3)(10a_1+5a_2-6a_3)) &= 1.374405264. \end{aligned}$$

Enfin en remplaçant x par 1 dans l'équation (6.2.16) *on obtient :*

$$\begin{cases} a_1+a_2-\frac{1}{4}\int_0^1(\frac{1}{2}(1-t)(a_1+a_2t+a_3(t^2-1))^2dt &= e^1+\frac{1}{16}(3-e^2), \\ a_1+a_2-\frac{a_1^2}{8}-\frac{a_1a_2}{12}+\frac{5a_1a_3}{24}-\frac{a_2^2}{48}+\frac{7a_2a3}{120}-\frac{11a_3^2}{120} &= 0.244396582. \end{cases}$$

On obtient le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_1-a_3+\frac{a_1^2}{8}+\frac{a_1a_2}{6}-\frac{a_1a_2}{8}+\frac{a_2^2}{16}-\frac{a_2a_3}{15}+\frac{a_3^2}{24} &= 0.072568398, \\ a_1+\frac{1}{2}a_2-\frac{3}{4}+\frac{1}{240}((a_2+a_3)(10a_1+5a_2-6a_3)) &= 1.374405264, \\ a_1+a_2-\frac{a_1^2}{8}-\frac{a_1a_2}{12}+\frac{5a_1a_3}{24}-\frac{a_2^2}{48}+\frac{7a_2a3}{120}-\frac{11a_3^2}{120} &= 0.244396582. \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode numérique de Newton [3]. En effectuant les calcules le programme de Matlab on obtient les résultats suivants :

$$a_1=1.1684, \quad a_2=1.4164, \quad a_3=0.8417.$$

Alors la solution approchée est

$$\varphi(x)=0.8417x^2+1.4164x+0.3267.$$

x	Solution exact	Solution approchée	Erreur absolue
0.0	1	0.3267	0.6733
0.1	1.1051	0.4767	0.6284

0.2	1.2214	0.6436	0.5778
0.3	1.3498	0.8273	0.5225
0.4	1.4918	1.0279	0.4639
0.5	1.6487	1.2453	0.4034
0.6	1.8221	1.4795	0.3426
0.7	2.0137	1.7306	0.2832
0.8	2.2255	1.9985	0.2270
0.9	2.4596	2.2832	0.1764
1	2.7182	2.5848	0.1335

Table 6.4 – Solutions numériques en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple **6.11**

CONCLUSION

Dans notre travail, on présente différents types d'équations intégrales avec des méthodes de résolution analytiques. Ensuit on étudie quelques théorèmes du point fixe : Banach, Schaulder. Ces derniers permettent de prouver l'existence de solution. Ensuite, on présente quelques méthodes numériques qui permettent d'approcher la solution lorsqu'elle existe. On se concentre sur les méthodes de projection : Galerkin et Collocation.

La stratégie de ces méthodes est basée sur la projection de notre équation dans un sous-espace de dimension finie, dans lequel on cherche *à* approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des élements de la base de ce sous-espace.

La méthode de collocation est une application de la méthode de projection, dand laquelle on choisit des noeuds ou des points équidistants.

Les coefficients a_j qui définissent la solution approchée seront déterminé à partir de la résolution d'un système algébrique non linéaire par la méthode de Newton.

On termine par une comparaison entre la méthode de Galerkin et la méthode de collocation. Enfait, on remarque que la méthode de Collocation est plus rapide que la méthode de Galerkin et ses calculs sont plus faciles, et que l'erreur en appliquant la méthod de collocation et moindre que celle de la méthode de Galerkin.

ANNEXE

Cette partie concerne l'implémentation Matlab

La méthode des trapèzes

```
clc ;clear all ;
a=input('donner a') ;
b=input('donner b') ;
n=input('donner n') ;
h=(b-a)/(n-1)

f=@(x)
k=@(x,t)
A=zeros(n,n) ;
B=zeros(n,1) ;
D=eye(n)
for i=1 :n

B(i)=-f((h*i)-h) ;
for j=1 :n
```

if ((j==1)||(j==n))

A(i,j)=(h/2)*k((h*i)-h,(h*j)-h)

else

A(i,j)=h*k((h*i)-h,(h*j)-h)

end

end

end

A=A-D

B

U=inv(A)*B

La méthode de Galerkin

clear all ;clc ;

syms x t a1 a2 a3

K=

$Qnx = 1 * a1 + a2 * x + a3 * (x^2 - 1)$

$Qnt = 1 * a1 + a2 * t + a3 * (t^2 - 1)$

$KQt = K * Qnt$

$KQx = K * Qnx$

$g = int(K * Qnt, t, 0, 1)$ $d1 = f(x) + g - Qnx$

d2=int(d1,x,0,1)

a1=solve(d2,a1)

a1=subs(a1)

d3=int(d1*x,x,0,1)

a2=solve(d3,a2)

a2=subs(a2)

$d4 = int(d1 * (x^2 - 1), x, 0, 1)$

$a3 = solve(d4, a3)$

$a3 = subs(a3)$

Qnxx=subs(Qnx)

Méthode de Newton

syms a1 a2 a3

f1(a1,a2,a3)=

f2(a1,a2,a3)=

f3(a1,a2,a3)=

a=[0.5 ;0.5 ;0.5] ;

n=6 ;

f1a1(a1,a2,a3)=diff(f1,a1) ;

f1a2(a1,a2,a3)=diff(f1,a2) ;

f1a3(a1,a2,a3)=diff(f1,a3) ;

f2a1(a1,a2,a3)=diff(f2,a1) ;

f2a2(a1,a2,a3)=diff(f2,a2) ;

f2a3(a1,a2,a3)=diff(f2,a3) ;

f3a1(a1,a2,a3)=diff(f3,a1) ;

f3a2(a1,a2,a3)=diff(f3,a2) ;

f3a3(a1,a2,a3)=diff(f3,a3) ;

f11 = matlabFunction(f1) ;

f22 = matlabFunction(f2) ;

f33 = matlabFunction(f3) ;

f1a11 = matlabFunction(f1a1) ;

f1a22 = matlabFunction(f1a2) ;

f1a33 = matlabFunction(f1a3) ;

f2a11 = matlabFunction(f2a1) ;

f2a22 = matlabFunction(f2a2) ;

f2a33 = matlabFunction(f2a3) ;

f3a11 = matlabFunction(f3a1) ;

f3a22 = matlabFunction(f3a2) ;

f3a33 = matlabFunction(f3a3) ;

for i=1 :n F=[f11(a(1),a(2),a(3)) ;f22(a(1),a(2),a(3)) ;f33(a(1),a(2),a(3))] ;

$$\begin{aligned} J &= [f_1a_11(a(1),a(2),a(3)), f1a22(a(1),a(2),a(3)), f1a33(a(1),a(2),a(3)); ... \\ & f2a11(a(1),a(2),a(3)), f2a22(a(1),a(2),a(3)), f2a33(a(1),a(2),a(3)); ... \\ & f3a11(a(1),a(2),a(3)), f3a22(a(1),a(2),a(3)), f3a33(a(1),a(2),a(3))]; \\ y &= \tfrac{-J}{F} \\ a &= a+y. \end{aligned}$$

end

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BACHIRI. *Théorèmes du point fixe et applications aux Equations intégrales*, mémoire de fin d'étude université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2017.

[2] H. BENALI. Introduction aux équations intégrales linéaires méthodes et applica-tions, un polycopié destiné aux étudiants de Master 1 mathématiques université Ibn Khaldoun de Tiaret, 2019.

[3] L.R BURDEN, J.D. FAIRES. *Numerical Analysis*, Cengage Learning, 2005.

[4] N.BOCCARA. *Analyse fonctionnelle une introduction pour physiciens*, édition marketing éditeur des préparations grandes écoles-médcine 32 rue Bargue Paris, 1984.

[5] T. BECHOUAT. *Résolution numérique d'une classe de problèmes inverses*, mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma, 2012.

[6] J.P DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentilles*, EDP Sciences,2006.

[7] M. KRASNOV, A. KISSÉLEV,G.MAKARENKO. *Équations Intégrales.* Edition Mir Mos-cou. Traduction Francaise Editions Mir, 1977.

[8] F. LA AIADI. Le théorème de point fixe de Krasnoselskii et ses Applications aus équations différentielles impulsives, mémoire pour l'obtention du diplôme de master université d'Adrar, 2017.

[9] K. MALEKNEJAD, K. NOURI, M.YOUSEFI. *Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical of integral equations*, School of Mathematics, Iran university of science and technologt Narmak, Tehran 16846, Iran, 2007.

[10] A.D. POLYANIN, A.V. MANZHIROV. *Handbook of integral equations*, CRC press, Boca Raton,London New York Washington, D.C, 1998.

[11] A.RAHMOUNE. *Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales*, thèse de doctorat université de Batna, 2011.

[12] A.RAHMOUNE. *Èquations intégrales linéaires et non linéaires*, Analyse et technique de résolution, 2018.

[13] J.E ROMBALDI. *Interpolation approximation analyse pour l'agrégation cours et exercices résolus*, vuibert,2005.

[14] O. REMILI EL HOUARI. *Équation intégrale de frontière exemples de résolution numérique*, mémoire pour obtenir le diplôme de Magister en mathématiques université d'Oran ES-Senia, 2011.

[15] A. WAZWAZ. *Linear and Non linear Integral Equations*, Higher education press Beijing, 2011.

[16] M.S ZEMYAN. *The Classical Theory of Integral Equations*, Springer Science Business Media LLC, 2012.

[17] D. G. ZILL. *A first course in differential equations with modelling applications* , Cengage Learning, 2012.

.

.