

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

**QUORUM-COLORATION OPTIMALE EN TEMPS LINEAIRE
POUR LES ARBRES PARFAITS DONT LES SOMMETS DE MEME
PROFONDEUR ONT MEME DEGRE**

Par

Wissam BOUMALHA et Asmaa ISSAD

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida	Président
S. KERDJOUJ	M C A, U. de Blida	Examinatrice
R. SAHBI	M C B, ESSA. Alger	Encadrant

Soutenu à Blida, le 05 Septembre 2022

RESUME

Une partition $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de l'ensemble des sommets V d'un graphe G en k classes de couleurs V_i , avec $1 \leq i \leq k$, est appelée *quorum-coloration* si pour tout sommet $v \in V$, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé $N[v]$ de v ont la même couleur que v . La cardinalité maximum d'une quorum-coloration de G est appelée *nombre de quorum-coloration* de G et est notée par $\psi_q(G)$. Une quorum-coloration de cardinalité $\psi_q(G)$ est une ψ_q -coloration de G . La détermination du nombre de quorum-coloration ou la conception d'un algorithme linéaire le calculant dans un arbre N -aire parfait a été posée récemment comme problème ouvert par Sahbi [25]. Dans ce mémoire, nous résolvons ce problème en concevant un algorithme linéaire trouvant une ψ_q -coloration mais aussi le nombre de quorum-coloration de n'importe quel arbre parfait dont les sommets de même profondeur ont le même degré.

ABSTRACT

A partition $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ of the vertices set V of a graph G into k color classes V_i , with $1 \leq i \leq k$ is called a quorum coloring if for every vertex $v \in V$, at least half of the vertices in the closed neighborhood $N[v]$ of v have the same color as v . The maximum cardinality of a quorum coloring of G is called the quorum coloring number of G and is denoted by $\psi_q(G)$. A quorum coloring of order $\psi_q(G)$ is a ψ_q -coloring. The determination of the quorum coloring number or design a linear-time algorithm computing it in a perfect N -ary tree was recently raised by Sahbi [25] as an open problem. In this thesis, we answer this problem by designing a linear-time algorithm for finding both a ψ_q -coloring and the quorum coloring number of every perfect tree whose the vertices of same depth have the same degree.

REMERCIEMENTS

Nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide apportée par notre encadrant en la personne de Monsieur Rafik SAHBI, Maître de Conférences à l'Ecole Supérieure des Sciences Appliquées d'Alger. Nous remercions vivement pour la patience avec laquelle il a su orienter nos recherches. Il n'a à aucun moment cessé de nous pousser à aller de l'avant par ses encouragements. Aussi, son œil critique nous a été très précieux dans la structuration de notre travail et l'amélioration de la qualité de ses différentes parties.

Nos remerciements s'adressent également à Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida 1, pour avoir accepté de présider le jury .

De même, nous tenons à remercier Madame Samia KERDJOUDJ, Maître de Conférences à l'Université de Blida 1, de nous avoir accordé de son temps précieux pour examiner notre travail ; nous espérons qu'elle sera satisfaite par ce dernier.

Nous n'oublions pas de remercier nos familles respectives pour le soutien et les conseils prodigués durant toute la période de préparation de ce mémoire, leur présence et les sacrifices qu'ils ont dû faire pour faire de nous ce que nous sommes devenues aujourd'hui.

Nos remerciements vont à tous nos enseignants pour leur générosité et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Un grand merci à toutes les personnes qui nous ont aidé et soutenu de près ou de loin, en espérant que ce travail soit à la hauteur.

Wissam BOUMALHA

Asmaa ISSAD

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	iii
LISTE DES ILLUSTRATIONS	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
1 Background de la théorie des graphes	3
1.1 Généralités sur les graphes	3
1.1.1 Graphes non orientés, ordre d'un graphe, incidence et adjacence	3
1.1.2 Graphe simple	4
1.1.3 Voisinage, degré d'un sommet	5
1.2 Relations sur les graphes	5
1.2.1 Sous-graphes, sous-graphes induits	5
1.2.2 Isomorphisme	5
1.2.3 Graphes complémentaires	6
1.3 Opérations sur les graphes	7
1.3.1 Réunion	7
1.3.2 Graphes joints	7
1.3.3 Couronnes	7
1.3.4 Produit cartésien de deux graphes	7
1.4 Chaînes, connexité et metrique des graphes	7
1.4.1 Chaînes	7
1.4.2 Connexité, isthmes	8
1.4.3 Distance	9
1.4.4 Diamètre	9
1.5 Quelques types de graphes	9

1.5.1	Cycles et maille	9
1.5.2	Arbres	10
1.5.3	Graphes réguliers, graphes complets, graphes multipartis	11
1.5.4	Graphes grilles, hypercubes	12
1.6	Quelques invariants de graphes	13
1.6.1	Nombre d'indépendance	13
1.6.2	Nombre de clique	13
1.6.3	Nombre de couplage	14
1.6.4	Nombre chromatique	14
1.6.5	Nombre de domination	15
1.6.6	Nombres d'alliance défensive	15
2	Quorum-colorations des graphes : définitions et principaux résultats	17
2.1	Définition des quorum-colorations	17
2.2	Résultats fondamentaux	19
2.3	Valeurs exactes	22
2.4	Bornes sur le nombre de quorum-coloration	29
2.5	Complexité et problèmes ouverts récents	30
3	Contribution : ψ_q-coloration et nombre de quorum-coloration des arbres parfaits dont les sommets de même profondeur ont le même degré	32
3.1	Préliminaires	32
3.2	Existence d'une ψ_q -coloration rentable	33
3.2.1	Application de l'algorithme 1 :	35
3.3	ψ_q -coloration et nombre de quorum-coloration en temps linéaire	40
3.3.1	Application de l'algorithme 2 :	42
	Conclusion et perspectives	47
	References	50

LISTE DES ILLUSTRATIONS

1.1 Exemple de graphe non orienté	4
1.2 Exemple de sous-graphe et de sous-graphe induit	6
1.3 Exemples des graphes isomorphes	6
1.4 Exemple de graphes complémentaires	6
1.5 Graphes joints, couronnes et réunion de deux graphes	8
1.6 Exemple de la chaîne P_4	8
1.7 Exemple de Graphe non connexe et Graphe connexe	9
1.8 Exemple d'un cycle C_5	10
1.9 Exemple darbre	10
1.10 Exemple d'arbre binaire	10
1.11 Exemple d'une chenille	11
1.12 Exemple dun graphe biparti complet, d'un graphe complet, d'un graphe 3- régulier et d'une étoile	12
1.13 Grilles	12
1.14 Exemple d'indépendant maximum	13
1.15 Exemple de clique maximum	13
1.16 Exemple de couplage maximum	14
1.17 Exemple de colorations	15
1.18 Paramètres d'alliance	16
2.1 Exemple de ψ_q -coloration	19
2.2 Exemple de ψ_q -coloration d'une réunion disjointe	20
2.3 Exemples de ψ_q -colorations dune chaîne et dun cycle	23
2.4 Exemple de ψ_q -coloration dun graphe complet	24
2.5 Exemple de ψ_q -coloration dun étoile	24

2.6	Exemples de ψ_q -colorations de graphes bipartis complets	24
2.7	Illustration d'une ψ_q -coloration d'une couronne $K_n \circ \overline{K}_n$	25
2.8	Illustration d'une ψ_q -coloration d'un Grille	25
2.9	Exemple de ψ_q -coloration dun hypercube	26
2.10	Exemple de ψ_q -coloration dun graphe 3-régulier	26
2.11	Illustration d'une ψ_q -coloration d'un arbre binaire	27
2.12	Graphes G vérifiant $\psi_q(G \circ K_1) = \psi_q(G) + 2$	27
2.13	Exemple de ψ_q -coloration de $K_r + \overline{K}_s$ avec $r + s$ impair	28
2.14	Graphes H d'ordre n vérifiant $\psi_q(H) = n - 1$	28
3.1	35
3.2	36
3.3	37
3.4	Première quorum-coloration d'un arbre localement $N_{i,j}$ -aire parfait obtenue avec l'Algorithme 2	49
3.5	Deuxième quorum-coloration de l'arbre localement $N_{i,j}$ -aire parfait de la FIGURE 3.4 obtenue avec l'Algorithme 2	50

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Valeurs exactes de $\psi_q(G)$	23
2.2	Bornes sur le nombre de quorum-coloration	29
2.3	Bornes du nombre de quorum-coloration(suite)	30
2.4	Complexité algorithmique	30

INTRODUCTION

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec Euler au XVIII^{ème} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes tels que :

- Le problème des ponts de Königsberg dont les habitants se demandaient s'il était possible de partir d'un quartier quelconque de la ville et de traverser tous ses ponts sans passer deux fois par le même pont et de revenir à leur point de départ.
- La marche du cavalier sur l'échiquier.
- Le problème de coloriage de cartes géographiques, etc...

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie et les sciences sociales. Elle constitue de nos jours une branche à part entière des mathématiques discrètes et ce depuis et grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter une structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ... Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les problèmes de partitionnement de graphes sont largement rencontrés dans les problèmes de recherche liés aux sciences et aux technologies de l'information. La *quorum-coloration* des graphes est un problème de partition des sommets d'un graphe introduit en 2013 par les mathématiciens américains Sandra Hedetniemi, Stephen Hedetniemi, Renu Laskar et le mathématicien hollandais Henry Mulder [19] comme suit.

Une *quorum-coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de V en k classes de couleurs telle que pour tout sommet $v \in V$, si $v \in V_i$, pour un certain $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors au moins la moitié des sommets voisins de v appartiennent à V_i pour un certain $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors au moins la moitié des sommets voisins de v appart

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème du quorum-coloration dans une classe particulière d'arbres. Pour ce faire, nous avons organisé le document de la manière suivante : dans le Chapitre 1, nous rappelons quelques définitions et notions de bases sur la théorie des graphes, dans le Chapitre 2 nous recueillons quelques résultats fondamentaux sur la quorum-coloration sous forme de résumé d'état de l'art, puis dans le Chapitre 3 nous résolvons un problème ouvert récemment posé en guise de contribution. Enfin, nous cloterons ce mémoire par une conclusion et quelques problèmes ouverts offrant ainsi des perspectives de recherche pour les désireux de poursuivre nos travaux.

Chapitre 1

Background de la théorie des graphes

Dans ce chapitre, il s'agit de donner les définitions de base de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. Ainsi, dans la Section 1.1 nous définissons la notion de graphe simple, d'adjacence et de degré. Dans les Sections 1.2 et 1.3, quelques relations et opérations sur les graphes sont rappelées. La Section 1.4 est dédiée aux notions de connexité et de distance. Enfin, les Sections 1.5 et 1.6 listent quelques types de graphes très utilisés en théorie des graphes et quelques invariants qui sont le centre d'intérêt dans beaucoup d'études menées par les théoriciens des graphes depuis quelques décennies. La théorie de la complexité algorithmique, bien qu'en relation avec notre travail, n'est pas abordée ici mais peut être appréhendée à travers les livres de Garey et Johnson et de Papadimitriou [12, 24]. Pour plus de détails et d'approfondissement concernant la théorie des graphes, nous conseillons vivement les références [3, 4, 5, 7, 8].

1.1 Généralités sur les graphes

1.1.1 Graphes non orientés, ordre d'un graphe, incidence et adjacence

Définition 1.1 *Un graphe non orienté G est un triplet (V, E, ϕ) où :*

- V est un ensemble non vide de points appelés sommets de G , noté également $V(G)$.
- E , noté également $E(G)$, est un ensemble de lignes appelées arêtes de G , reliant certaines paires de sommets de G .

Les cardinalités des ensembles V et E , $|V|$ et $|E|$, sont appelées respectivement ordre et taille du graphe G et elles sont notées respectivement par n et m .

- ϕ est une fonction dite d'incidence qui associe à chaque arête e de E une paire de sommets u et v de V non nécessairement distincts appelés extrémités de l'arête e et dits adjacents ou voisins dans G ; aussi, on dit que e relie entre u et v ou qu'elle leur est incidente, et on écrit $e = uv$. En particulier, si $u = v$ alors l'arête e est appelée boucle.
Notons que deux arêtes distinctes de E peuvent avoir les mêmes extrémités, auquel cas

elles sont dites arêtes parallèles.

Exemple 1.1

Dans la FIGURE 1.1 :

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}; E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$$

- Les sommets v_1 et v_2 sont adjacents.
- L'arête e_2 est incidente au sommet v_2 et au sommet v_6 .
- L'arête e_8 est une boucle tandis que les arêtes e_3 et e_4 sont parallèles.

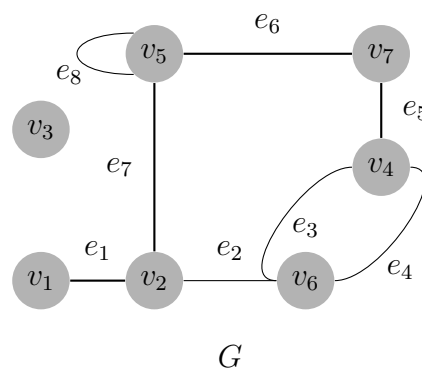


FIGURE 1.1 – Exemple de graphe non orienté

1.1.2 Graphe simple

Un graphe non orienté est dit *simple* s'il ne possède ni boucles, ni arêtes parallèles.

Remarque 1.1 Dans un graphe simple, chaque arête est associée à une unique paire de sommets, autrement dit, la fonction incidence est injective. Par conséquent, un graphe $G = (V, E, \phi)$ sera dorénavant désigné seulement par $G = (V, E)$. Autrement dit le couple représenté respectivement par ses ensembles de sommets et d'arêtes, où une arête d'extrémités u et v sera notée de façon unique par uv .

Remarque 1.2 Tous les graphes considérés dans la suite de ce mémoire sont simples et finis.

1.1.3 Voisinage, degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *voisinage ouvert* d'un sommet $v \in V$ dans G est l'ensemble défini par $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$, et son *voisinage fermé* dans G est l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Le *degré* d'un sommet $v \in V$ dans G , noté $d_G(v)$, est égal au nombre de sommets adjacents à v , c'est-à-dire, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré 0 est dit *isolé* et un sommet de degré 1 est appelé *feuille* ou sommet *pendant*. L'ensemble des sommets pendants de G est noté $L(G)$, ou L lorsqu'il n'y a aucun doute sur G . Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support*. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$. Aussi, on désigne par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement le degré minimum et le degré maximum dans G .

Exemple 1.2

En supprimant les boucles et les arêtes parallèles dans la FIGURE 1.1, on a :

- $N_G(v_2) = \{v_1, v_5, v_6\}$ et $N_G[v_2] = N_G(v_2) \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$.
- $d_G(v_2) = 3$.
- Les sommets v_1 et v_3 sont respectivement pendant et isolé dans G et v_2 est un sommet support.

1.2 Relations sur les graphes

1.2.1 Sous-graphes, sous-graphes induits

Un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Dans ce cas, on écrit $H \subseteq G$ et on dit également que le graphe H est inclus dans le graphe G . Le *sous graphe induit* de G par S , noté $G[S]$, est le sous-graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement S et $E(S) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in S\}$ des arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S (FIGURE 1.2).

1.2.2 Isomorphisme

Un *isomorphisme* entre deux graphes G et G' de même ordre et de même taille, est une application bijective ϕ de $V(G)$ vers $V(G')$ telle que pour tous $u, v \in V(G)$ $uv \in E(G)$ si et seulement si $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$ (FIGURE 1.3). Dans ce cas, on dit des graphes G et G' qu'ils

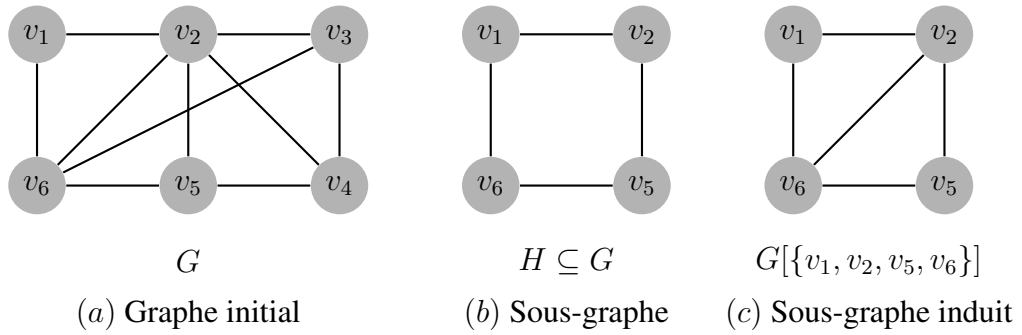


FIGURE 1.2 – Exemple de sous-graphe et de sous-graphe induit

sont *isomorphes* et on écrit $G \simeq G'$. On dit aussi que ϕ préserve l'adjacence de G dans G' .

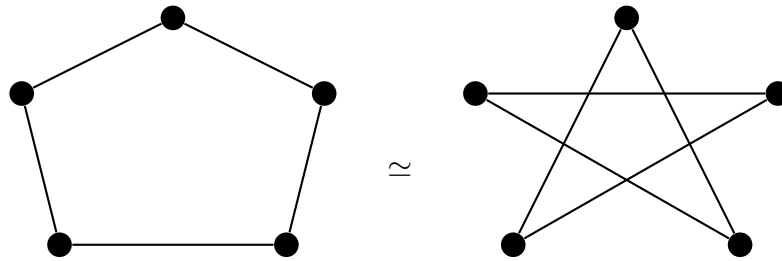


FIGURE 1.3 – Exemples des graphes isomorphes

1.2.3 Graphes complémentaires

Le graphe *complémentaire* d'un graphe $G = (V, E)$, noté \bar{G} , est le graphe ayant pour ensemble de sommets V et pour ensemble d'arêtes l'ensemble $\{uv \mid u, v \in V \text{ et } uv \notin E\}$ (FIGURE 1.4).

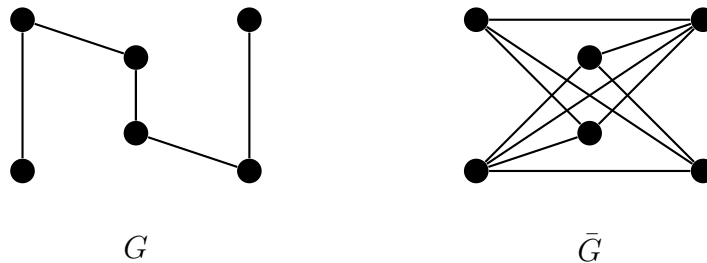


FIGURE 1.4 – Exemple de graphes complémentaires

1.3 Opérations sur les graphes

1.3.1 Réunion

La *réunion* de deux graphes G et H est le graphe noté $G \cup H$ ayant comme ensembles de sommets et d'arêtes les ensembles $V(G) \cup V(H)$ et $E(G) \cup E(H)$, respectivement (FIGURE 1.5 (a)).

1.3.2 Graphes joints

Le graphe *joint* de deux graphes G et H , noté $G + H$, est le graphe obtenu à partir de $G \cup H$ en joignant tout sommet de G à tout sommet de H (FIGURE 1.5 (b)).

1.3.3 Couronnes

Le graphe *couronne* de deux graphes G et H dans cet ordre, noté $G \circ H$, est le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chacun de ses sommets v par $v + H$ (FIGURE 1.5 (c)).

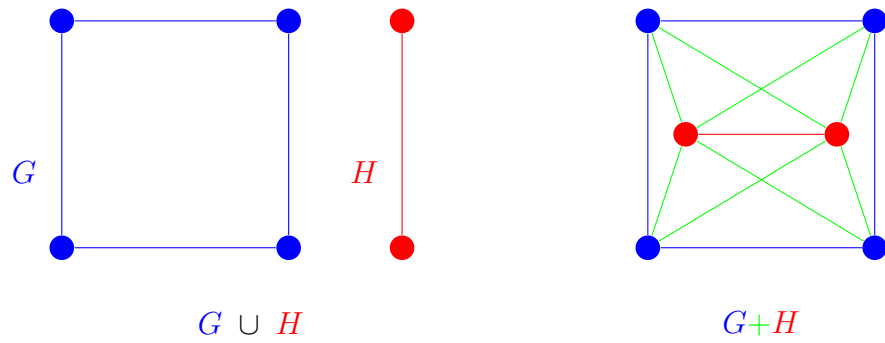
1.3.4 Produit cartésien de deux graphes

Le *produit cartésien* de deux graphes G et H est le graphe noté $G \square H$, dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et tel que deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ sont adjacents dans $G \square H$ si et seulement si soit $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, soit $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E(H)$ (FIGURE 1.5 (d)).

1.4 Chaînes, connexité et métrique des graphes

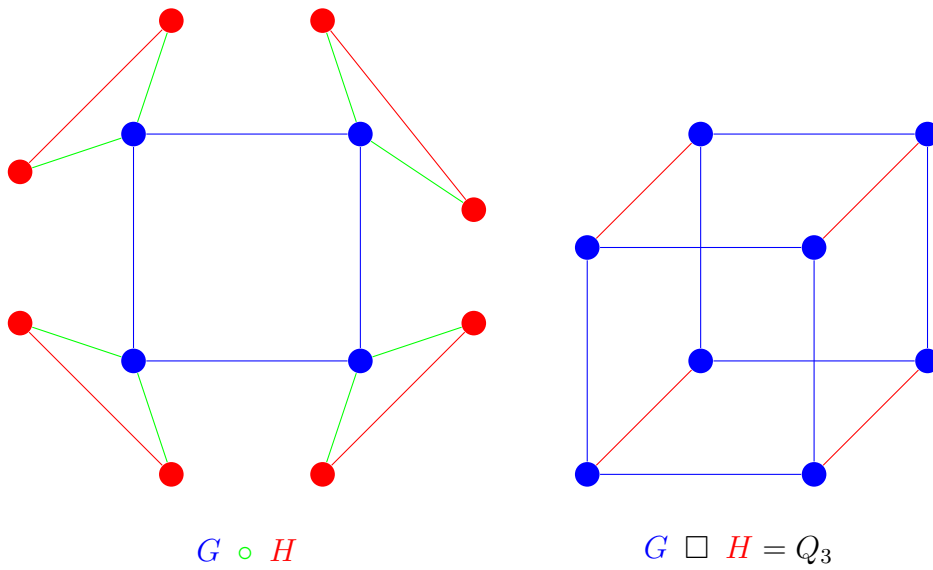
1.4.1 Chaînes

- Pour tout entier $n \geq 2$, la *chaîne* P_n d'ordre n (ou de *longueur* $n - 1$), est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et dont l'ensemble d'arêtes est $\{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, n - 1\}\}$, où les sommets v_1 et v_n sont appelés extrémités de la chaîne P_n (FIGURE 1.6); pour $n = 1$, on convient que P_1 est le graphe trivial d'ordre 1.
- Si u et v sont deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$, on appelle chaîne d'ordre n et d'extrémités u et v tout sous-graphe de G isomorphe à P_n ayant pour extrémités les sommets u et v ; dans ce cas, on dit que la chaîne en question *relie* les sommets u et v .



(a) Graphes initiaux (réunion)

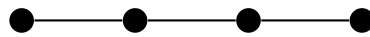
(b) Graphe joint



(c) Couronne

(d) Produit cartésien

FIGURE 1.5 – Graphes joints, couronnes et réunion de deux graphes

 P_4 FIGURE 1.6 – Exemple de la chaîne P_4

1.4.2 Connexité, isthmes

- Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets du graphe est reliée par une chaîne. Un graphe *non connexe* est une réunion disjoint de plusieurs sous graphes connexes

appelé composantes connexes (FIGURE 1.7).

- Une arête e d'un graphe G est un isthme si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. Par exemple, l'arête centrale d'une chaîne P_4 est un isthme.

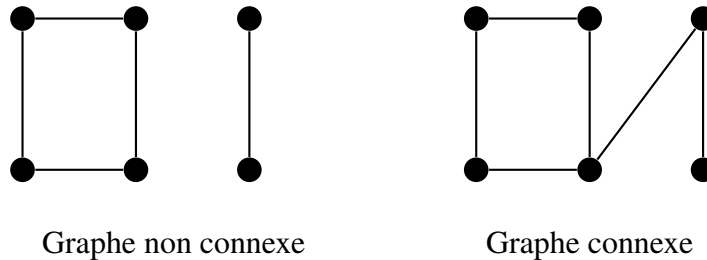


FIGURE 1.7 – Exemple de Graphe non connexe et Graphe connexe

1.4.3 Distance

La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G est la longueur d'une plus courte chaîne joignant u à v dans G , notée $d_G(v, u)$.

1.4.4 Diamètre

Le *diamètre* d'un graphe G est la plus longue chaîne entre deux sommets dans un graphe G , notée $diam(G)$. Une chaîne de longueur égale au diamètre du graphe est dite *diamétrale*. Par exemple, dans la FIGURE 1.10 on a $diam(G) = 6$.

1.5 Quelques types de graphes

1.5.1 Cycles et maille

- Le cycle C_n d'ordre n ($n \geq 3$) est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ et dont l'ensemble d'arêtes est $\{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{v_1 v_n\}$ (FIGURE 1.8).

En particulier, le cycle C_3 est appelé *triangle*.

- Un cycle d'ordre n d'un graphe G est un sous-graphe de G isomorphe à C_n . Un graphe ne contenant aucun cycle est dit *sans cycles* ou *acyclique*.

- La maille d'un graphe connexe G , notée $g(G)$ (ou simplement g lorsqu'il n'y a pas de doute sur G), est la longueur du plus petit cycle dans G . Par exemple, on a dans les

FIGURES 1.5 (b) et 1.5 (c) que $g = 3$, tandis que dans la FIGURE 1.5 (d) on a $g = 4$.

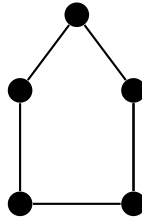


FIGURE 1.8 – Exemple d'un cycle C_5

1.5.2 Arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle (FIGURE 1.9). Nous allons définir dans les paragraphes qui suivent quelques arbres particuliers.

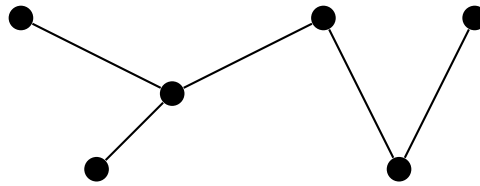


FIGURE 1.9 – Exemple darbre

Arbres binaires

Dans ce mémoire, on désigne par *arbre binaire* tout arbre T dont chaque sommet est de degré au plus 3, c'est-à-dire, tel que $\Delta(T) \leq 3$ (FIGURE 1.10).

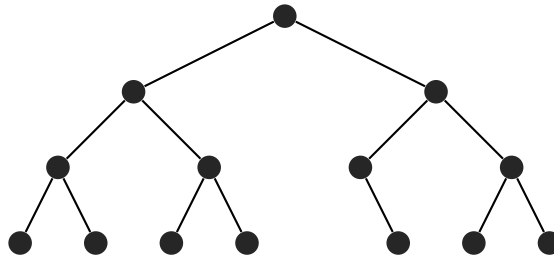


FIGURE 1.10 – Exemple d'arbre binaire

Chenilles

Une chenille est un arbre d'ordre $n \geq 3$ pour lequel la suppression des feuilles a pour résultat une chaîne appelée *épine* (FIGURE 1.11). Si $v_1 \dots v_m$ sont les sommets de l'épine d'une chenille C et si pour tout entier $i \in \{1, \dots, m\}$ le sommet v_i est adjacent à d_i feuilles dans C , on convient dans ce mémoire de désigner T par $C(d_1, d_2, \dots, d_m)$.

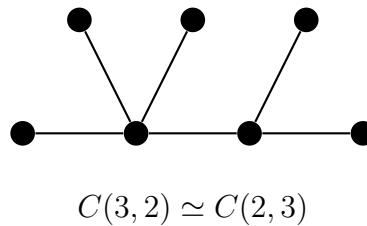


FIGURE 1.11 – Exemple d'une chenille

1.5.3 Graphes réguliers, graphes complets, graphes multipartis

- Un graphe G est dit k -régulier si tout sommet de G est de degré k dans G , autrement dit, si pour tout sommet $v \in V$ on a $d_G(v) = k$. En particulier, si $k = 3$ alors G est appelé graphe *cubique* (FIGURE 1.12 (c)).
- Un graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est un graphe connexe d'ordre n qui est $(n - 1)$ -régulier (FIGURE 1.12 (b)). Ainsi, tous les sommets d'un graphe complet K_n sont deux à deux adjacents. Le graphe complémentaire d'un graphe complet K_n est appelé graphe *stable* ou *co-complet* d'ordre n . Ainsi, les sommets d'un graphe stable sont tous deux à deux non adjacents.
- Un graphe G est dit *multiparti* si $V(G)$ peut être partitionné en p sous-ensembles stables A_1, A_2, \dots, A_p ($p \geq 2$). De plus, si $G = \overline{K_{n_1}} + \overline{K_{n_2}} + \dots + \overline{K_{n_p}}$, alors G est dit *multiparti complet* et est noté dans ce cas par K_{n_1, n_2, \dots, n_p} . Un graphe multiparti avec $p = 2$ est appelé graphe *biparti*, avec $p = 3$ il est dit *triparti*,... (FIGURE 1.12 (a)). Une *étoile* est un graphe biparti complet $K_{1,r}$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ (FIGURE 1.12 (d)).

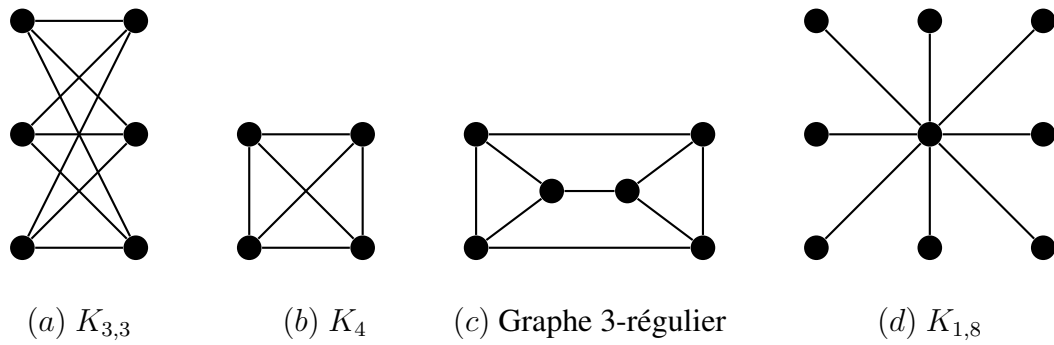


FIGURE 1.12 – Exemple dun graphe biparti complet, d’un graphe complet, d’un graphe 3-régulier et d’une étoile

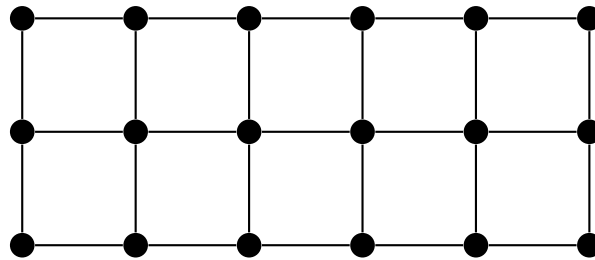
1.5.4 Graphes grilles, hypercubes

Un *graphe grille* $G_{m,n}$ ($n \geq m \geq 2$) est le produit cartésien des chaînes P_n et P_m (FIGURE 1.13).

Un *hypercube* de dimension n ou *n-cube* Q_n est défini par la relation réursive suivante :

$$\begin{cases} Q_1 = K_2; \\ Q_n = Q_{n-1} \square K_2, \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 2$$

Dans (FIGURE 1.5 (d)) on a un exemple d’un produit cartisien de graphes.



$G_{3,6}$

Exemple de graphe grille

FIGURE 1.13 – Grilles

1.6 Quelques invariants de graphes

1.6.1 Nombre d'indépendance

Un sous-ensemble de sommets S d'un graphe G est dit *stable* ou *indépendant* si ses sommets sont deux à deux non adjacents. Le nombre d'*indépendance* de G , noté $\beta_1(G)$, est la cardinalité maximum d'un ensemble indépendant de G (FIGURE 1.14). Pour approfondir ses connaissances sur l'indépendance dans les graphes, nous renvoyons le lecteur au survey [6].

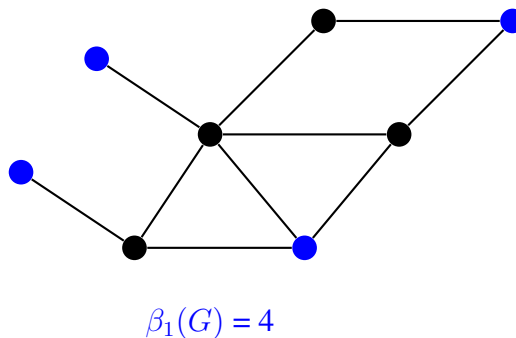


FIGURE 1.14 – Exemple d'indépendant maximum

1.6.2 Nombre de clique

Un sous-ensemble de sommets K d'un graphe G est appelé *clique* si le sous-graphe de G induit par K est un graphe complet. La cardinalité maximum d'une clique de G est appelée *nombre de clique* et est notée par $\omega(G)$ (cf. [13]) (FIGURE 1.15).

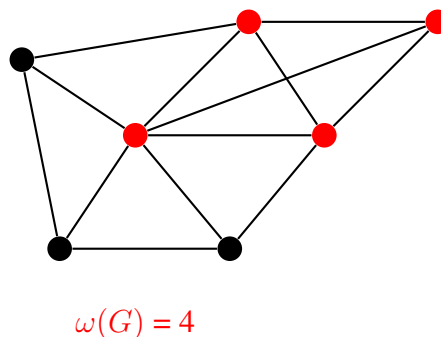


FIGURE 1.15 – Exemple de clique maximum

1.6.3 Nombre de couplage

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de $E(G)$ deux à deux non adjacentes. Le nombre de *couplage* de G , noté $\mu(G)$, est égal à la cardinalité maximum d'un couplage de G . Par exemple, on peut vérifier dans la FIGURE 1.16 que l'ensemble $\{e_1, e_3, e_6, e_8\}$ est un couplage maximum et que par conséquent, $\mu(G) = 4$ ([22]).

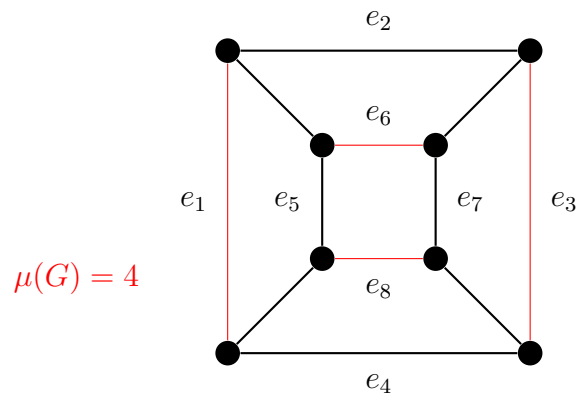


FIGURE 1.16 – Exemple de couplage maximum

1.6.4 Nombre chromatique

On appelle *coloration propre* d'un graphe $G = (V, E)$ (FIGURE 1.17) toute application $\pi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, où $k \in \mathbb{N}^*$, telle que deux sommets adjacents quelconques ne reçoivent pas la même couleur. Une coloration propre utilisant K couleurs est notée une K -coloration propre. Le *nombre chromatique* de G , noté $\chi(G)$, est égal à la cardinalité minimum d'une coloration propre de G (voir [20, 21]). Dans la suite de ce mémoire, une coloration d'un graphe G désignera simplement une attribution de couleurs aux sommets de G .

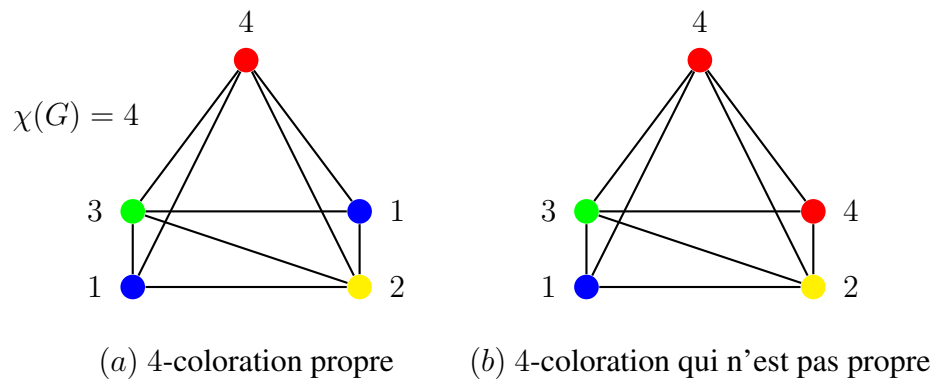


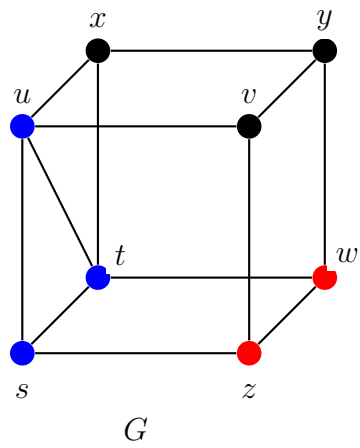
FIGURE 1.17 – Exemple de colorations

1.6.5 Nombre de domination

Un *ensemble dominant* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V - D$ soit adjacent à au moins un sommet de D . La plus petite cardinalité possible d'un ensemble dominant dans G est appelée *nombre de domination* de G et est notée $\gamma(G)$. Par exemple, dans la FIGURE 1.18 on a l'ensemble dominant est $\{t, v\}$ alors $\gamma(G)=2$. La domination dans les graphes est l'un des sujets les plus traités en théorie des graphes, ce qui lui a valu la publication du livre [16] référence en la matière. On pourra également se référer à l'ouvrage [14] plus récent.

1.6.6 Nombres d'alliance défensive

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une partie S de V est appelée *alliance défensive* (respectivement *alliance défensive forte*) de G si tout sommet $v \in S$ satisfait l'inégalité $|N_G[v] \cap S| \geq |N_G[v] \cap (V \setminus S)|$ (respectivement $|N_G(v) \cap S| \geq |N_G(v) \cap (V \setminus S)|$). Le *nombre d'alliance défensive* (respectivement *nombre d'alliance défensive forte*) de G , noté $a(G)$ (respectivement $\hat{a}(G)$) est égal à la cardinalité minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte) de G (FIGURE 1.18). Les alliances dans les graphes ont été largement étudiées par différents auteurs durant ces deux dernières décennies. Pour plus de détails sur ce sujet, consulter les références [9, 10, 11, 15, 17, 18, 23, 32]



$$a(G) = 2 \quad \text{et} \quad \hat{a}(G) = 3$$

FIGURE 1.18 – Paramètres d'alliance

Chapitre 2

Quorum-colorations des graphes : définitions et principaux résultats

Dans le présent chapitre, nous définissons dès la Section 2.1 le concept central de notre mémoire à savoir la *quorum-coloration* des graphes. Dans la Section 2.2, nous énonçons et commentons quelques résultats fondamentaux sur les quorum-colorations nécessaires à la compréhension du Chapitre 3. Viennent alors les Sections 2.3 et 2.4 regroupant respectivement les valeurs exactes et les bornes du nombres de quorum-coloration déjà établies dans la littérature. Enfin, nous concluons le chapitre par un aperçu de la complexité algorithmique de différents problèmes de décision associés à la quorum-coloration des graphes et listons quelques problèmes ouverts non encore résolus dont un en particulier constitue l'objet du Chapitre 3, chapitre dans lequel nous résoudrons à ce problème.

2.1 Définition des quorum-colorations :

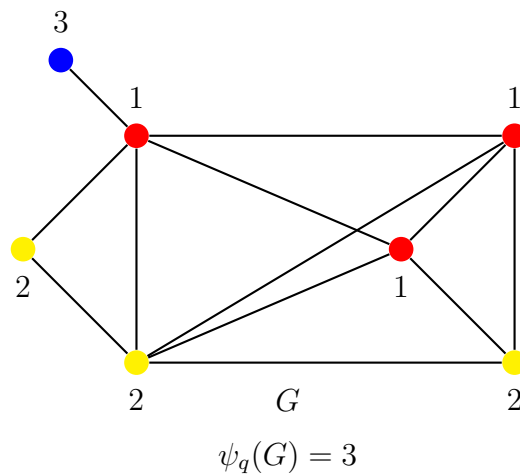
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une partition $\Pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de l'ensemble des sommets V en k classes de couleurs V_1, V_2, \dots, V_k est appelée *quorum-coloration* si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et tout sommet $v \in V_i$, au moins la moitié des sommets du voisinage fermé $N_G[v]$ a la même couleur que le sommet v ou de manière équivalente appartient à V_i , ce qui équivaut formellement à $|N_G[v] \cap V_i| \geq \frac{|N_G[v]|}{2}$. Dans ce cas, on dit que tout sommet $v \in V_i$ est *sommet quorum*. La cardinalité maximum d'une quorum-coloration de G est appelé nombre de quorum-coloration de G et est notée $\psi_q(G)$. Une quorum-coloration d'ordre $\psi_q(G)$ est dite *ψ_q -coloration* de G . Ainsi, tout graphe admet une quorum-coloration d'ordre 1, correspondant au cas où tous les sommets de V ont même couleur. L'objectif premier dans l'étude des quorum-colorations est de colorer les sommets d'un graphe avec un nombre maximum de couleurs de sorte à obtenir une quorum-coloration.

Les quorum-colorations ont été introduites en 2013 par Hedetniemi, Hedetniemi, Laskar et Mulder [19] et est liée à la notion largement étudiée d'alliance défensive (consulter les ré-

férences [10, 11, 15, 23, 31, 32, 33] pour un état de l'art) dont l'étude a été initiée en 2004 par Hedetniemi, Hedetniemi et Kristiansen [18]. En effet, rappelons qu'un ensemble de sommets S d'un graphe $G = (V, E)$ est une alliance défensive si pour tout sommet $v \in S$, $|N_G[v] \cap S| \geq |N_G[v] \cap (V \setminus S)|$. A partir de cette définition, on peut voir sans peine que quorum-coloration n'est autre qu'une autre appellation pour désigner une partition en alliances défensives (cf. [9, 17]).

Les quorum-colorations admettent des applications en classification des données (voir [23, 27, 31]) où l'étape initiale consiste à modéliser un réseau de données par un graphe dans lequel chaque sommet correspond biunivoquement à une donnée de sorte que deux sommets du graphe soient voisins si et seulement si les données qu'ils représentent partagent un nombre minimum de caractéristiques commune fixé préalablement une fois pour toutes. Alors, l'objectif est de partitionner l'ensemble des sommets du graphe ainsi obtenu en un maximum de sous-ensembles tels que chaque sommet de chacun de ces sous-ensembles ait au moins la moitié de ses voisins dans son sous-ensemble, ce qui assure l'obtention d'une quorum-coloration aussi fine que possible.

Exemple 2.1 *Dans la FIGURE 2.1, les sommets du graphe G de même couleur sont des sommets quorum. Aussi, comme G contient quatre sommets de degré au moins 4, chacun d'eux doit être dans une classe contenant au moins trois sommets. Comme G est d'ordre 7, on peut déduire aisément que l'on ne peut créer plus de trois classes dans G . Par conséquent, $\psi_q(G) = 3$.*

FIGURE 2.1 – Exemple de ψ_q -coloration

2.2 Résultats fondamentaux

Cette section est consacrée à l'énoncé de quelques résultats fondamentaux sur les quorum-colorations qui ont été précédemment établis dans la littérature et dont certains seront utilisés dans ce travail notamment dans le Chapitre 3. Le premier d'entre eux est une relation linéaire entre le nombre de quorum-coloration d'un graphe non connexe et ceux de ces composantes connexes.

Proposition 2.1 [9] *Soit G un graphe non connexe dont les composantes sont G_1, G_2, \dots, G_r ($r \geq 1$). Alors*

$$\psi_q(G) = \sum_{1 \leq i \leq r} \psi_q(G_i).$$

Le résultat suivant fournit le maximum et le minimum du nombre de quorum-coloration d'un graphe non connexe d'ordre au moins trois. Cependant, on peut facilement voir que ce résultat reste vrai pour tout graphe et tout ordre.

Proposition 2.2 [9] *Soit G est un graphe non connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$1 \leq \psi_q(G) \leq n.$$

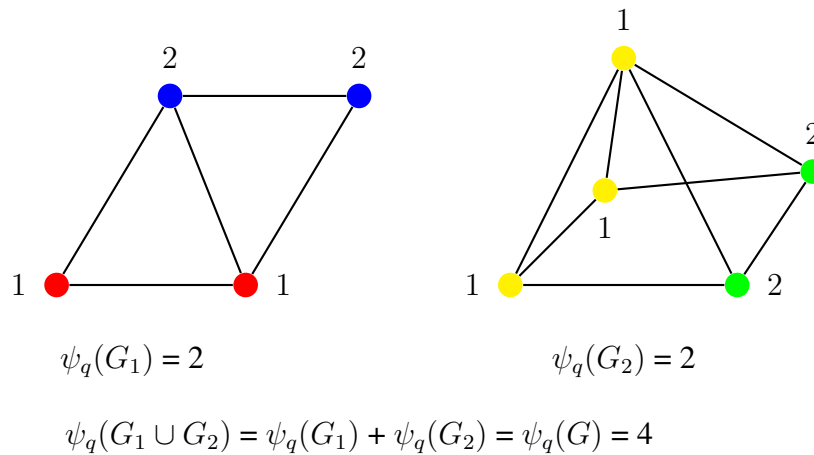


FIGURE 2.2 – Exemple de ψ_q -coloration d'une réunion disjointe

Les deux propositions suivantes fournissent les graphes atteignant les bornes de la Proposition 2.2.

Proposition 2.3 [19] *Pour le graphe complet K_n d'ordre impair, $\psi_q(K_n) = 1$, tandis que pour tout graphe complet K_n d'ordre pair, $\psi_q(K_n) = 2$.*

Proposition 2.4 [19] *Soient G un graphe sans sommets isolés et $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ une quorum-coloration de G . Pour tout classe V_i , si $|V_i| = 1$ alors, l'unique sommet de V_i est un sommet pendant, sinon $|V_i| \geq 2$.*

Le résultat suivant a été prouvé par Hedetniemi *et al*[19]. Il dit que dans une ψ_q -coloration, le sous-graphe induit par une classe de quorum est toujours connexe.

Proposition 2.5 [19] *Soit G est un graphe, et soit $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ est un ψ_q -coloration quelconque de G . Alors, pour tout i , $1 \leq i \leq k$, le sous graphe induit $G[V_i]$ est connexe.*

Dans [25], Sahbi a prouvé l'observation suivante qui fournit quatre assertions équivalentes à la propriété de sommet quorum dont la deuxième sera utilisée dans le Chapitre 3.

Observation 1 [25] Soit $G = (V, E)$ est un graphe, $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ une quorum coloration de G et $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. V_i est une classe quorum.
2. Pour tout sommet $v \in V_i$, $|N_G[v] \cap V_i| \geq \left\lceil \frac{|N_G[v]|}{2} \right\rceil$.
3. Pour tout sommet $v \in V_i$, $|N_G[v] \cap V_i| \geq |N_G[v] \cap (V \setminus V_i)|$.
4. Pour tout sommet $v \in V_i$, $d_{V_i}(v) + 1 \geq d_{V \setminus V_i}(v)$.
5. Pour tout sommet $v \in V_i$, $d_{V_i}(v) \geq \left\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \right\rfloor$.

Comme conséquences de l'Observation 1, l'auteur [25] a déduit les trois corollaires suivants.

Corollaire 2.1 [25] Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ une quorum coloration de G . Alors pour tout sommet $v \in V_i$, telle que $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ $|V_i| \geq \left\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \right\rfloor + 1$.

Corollaire 2.2 [25] Soit $G = (V, E)$ est un graphe, une partition $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ admet ψ_q -coloration de G , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ un entier positif et $v \in V_i$ un sommet tel que $d_G(v) = \max_{u \in V_i} d_G(u)$. Alors $|V_i| = 1$ si et seulement si $d_G(v) \leq 1$.

Corollaire 2.3 [25] Soit $G = (V, E)$, $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ une ψ_q -coloration de G et $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ un entier positif. Alors $|V_i| \geq 2$ si et seulement si V_i contient un sommet de degré au moins 2.

Le Corollaire 2.1 fournit une borne inférieure d'une classe de quorum en termes de degré maximum contient de ses sommets, tandis que le Corollaire 2.2 stipule que le sommet unique d'une classe de quorum singleton est nécessairement pendant ou isolé. Enfin, le Corollaire 2.3, obtenu par contraposition du Corollaire 2.2, montre que tout sommet de degré au moins deux est contenu dans une classe de quorum d'ordre au moins deux dans toute ψ_q -coloration, mais ce résultat peut facilement être étendu à une quorum-coloration qui n'est pas nécessairement une ψ_q -coloration.

Nous terminons la section par la proposition suivante et ses trois corollaires établis dans [28] fournissant des conditions suffisantes pour que le nombre de quorum-coloration d'un graphe donné soit égal à une valeur fixée dans l'intervalle des bornes de la Proposition 2.2.

Proposition 2.6 [28] *Pour toute ψ_q -coloration π d'un graphe G d'ordre n et tout sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \pi$, on a $\psi_q(G) \leq |\mathcal{A}| + n - |\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A|$, avec égalité si et seulement si pour tout sommet $v \in V(G) \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ on a $d_G(v) \leq 1$.*

Corollaire 2.4 [28] *Pour toute ψ_q -coloration π d'un graphe G d'ordre n , si $\psi_q(G) = n - k$, avec $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ alors, pour tout $\mathcal{A} \subseteq \pi$, $|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A| \leq k + |\mathcal{A}|$, avec égalité si et seulement si pour tout sommet $v \in V(G) \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, on a $d_G(v) \leq 1$.*

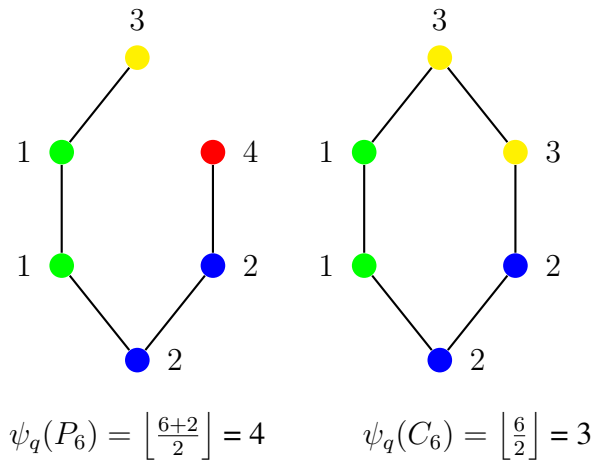
Corollaire 2.5 [28] *Pour toute ψ_q -coloration π d'un graphe G d'ordre n , si $\psi_q = n - k$ alors pour tout $A \in \pi$, $|A| \leq k + 1$ avec égalité si et seulement si pour tout sommet $v \in V(G) \setminus A$ on a $d_G(v) \leq 1$.*

Corollaire 2.6 [28] *Pour toute ψ_q -coloration π d'un graphe G d'ordre n , $\psi_q(G) = n - k$ alors pour tout sommet $v \in V(G)$ on a $d_G(v) \leq 2k + 1$.*

2.3 Valeurs exactes

Nous avons regroupé dans cette section tous les résultats qui ont trait aux valeurs exactes du nombre de quorum-coloration dans des classes usuelles de graphes ou dans des graphes généraux, réguliers ou autres dont les degrés maximum et minimum ainsi que la maille, entre autres invariants, satisfont certaines conditions. Ce travail a précédemment été accompli de manière exhaustive dans le Chapitre 2 de [2] ou de celui de [28] en énonçant ces résultats dans une chronologie judicieusement choisie par les auteurs. Pour notre part, nous avons fait le choix dans ce mémoire de synthétiser ces résultats à travers un tableau (TABLES 2.1) pour offrir au lecteur un exposé de forme différente de ce qu'il peut trouver dans les références antérieures et une vue d'ensemble des résultats pour une meilleure lisibilité.

Graphe	Nombre de quorum-coloration	Réf
P_n (FIGURE 2.3)	$\psi_q(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$	[19]
C_n (FIGURE 2.3)	$\psi_q(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	[19].
K_n (FIGURE 2.4)	$\psi_q(K_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \\ 2, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$	[19].
$K_{1,n}$ (FIGURE 2.5)	$\psi_q(K_{1,n}) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$	[19]
$K_{m,n}$ (FIGURE 2.6)	$\psi_q(K_{m,n}) = \begin{cases} 3 & \text{si } m = n = 3; \\ 2 & \text{sinon si } m \geq 2, n \geq 2. \end{cases}$	[19].
$K_n \circ \overline{K_n}$ (FIGURE 2.7)	$\psi_q(K_n \circ \overline{K_n}) = n^2 + 1$	[19]
$G_{m,n}$ (FIGURE 2.8)	<ul style="list-style-type: none"> • $\psi_q(G_{1,n}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ • $\psi_q(G_{2,n}) = n$ • $\psi_q(G_{3,n}) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ est impair;} \\ n + 1, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$ • $\psi_q(G_{m,n}) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + m + n - 2$ 	[17]
Q_n (FIGURE 2.9)	$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	[9]
3-régulier G (FIGURE 2.10)	$\psi_q(G) = \mu(G)$	[17][19]
Arbre binaire T (FIGURE 2.11)	$\psi_q(T) = \mu(T[V \setminus L]) + L $	[28]
$G \in \{\overline{K_2}, P_3, K_{1,3}, 2K_2, K_1 \cup K_2\}$ (FIGURE 2.12)	$\psi_q(G \circ K_1) = \psi_q(G) + 2$	[28]
$K_r + \overline{K_s}$ où $r + s \geq 3$ est impair (FIGURE 2.13)	$\psi_q(G) = 1$	[19]
G d'ordre n , réunion disjointe des graphes H , sK_1 et tK_2 , où $H \in \{K_{1,\ell}; C(k_1, k_2)\}$ avec $s, t \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{2, 3\}$ et $k_1, k_2 \in \{1, 2\}$ (FIGURE 2.14)	$\psi_q(G) = n - 1$	[28]

TABLE 2.1 – Valeurs exactes de $\psi_q(G)$ FIGURE 2.3 – Exemples de ψ_q -colorations d'une chaîne et d'un cycle

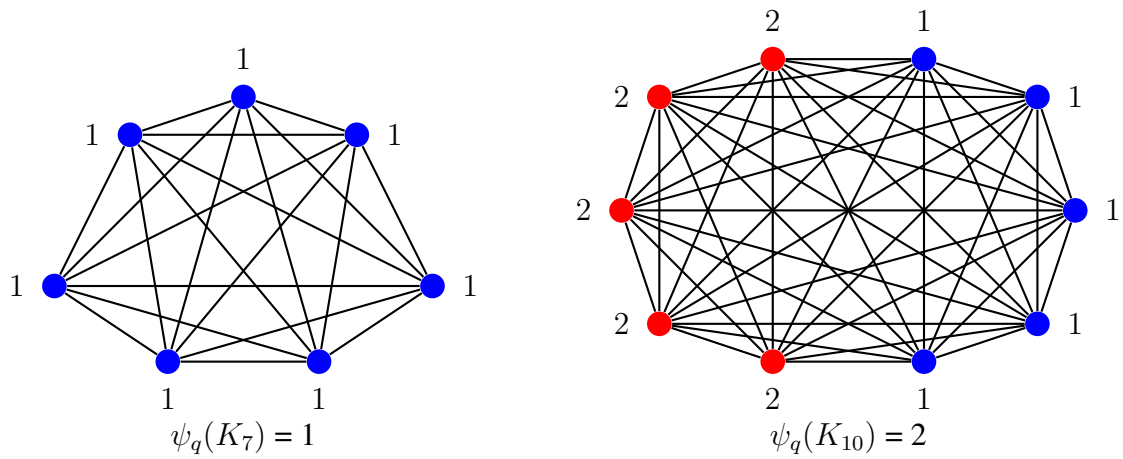


FIGURE 2.4 – Exemple de ψ_q -coloration d'un graphe complet

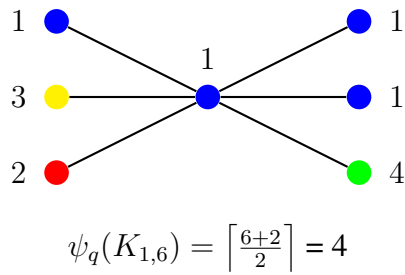


FIGURE 2.5 – Exemple de ψ_q -coloration d'une étoile

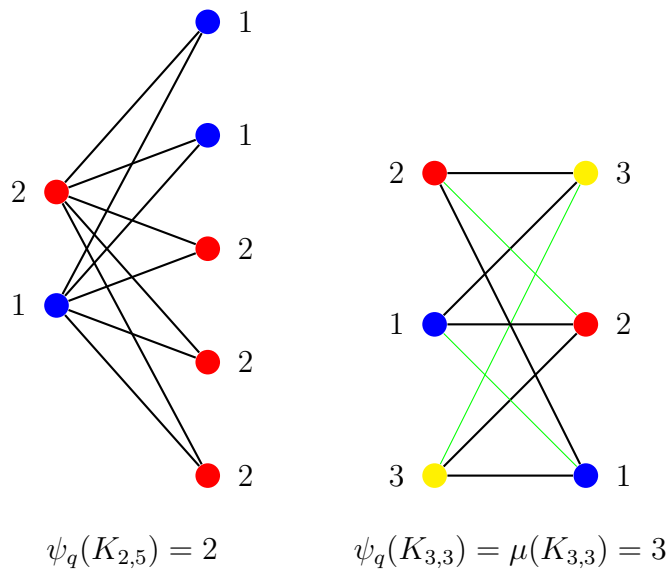


FIGURE 2.6 – Exemples de ψ_q -colorations de graphes bipartis complets

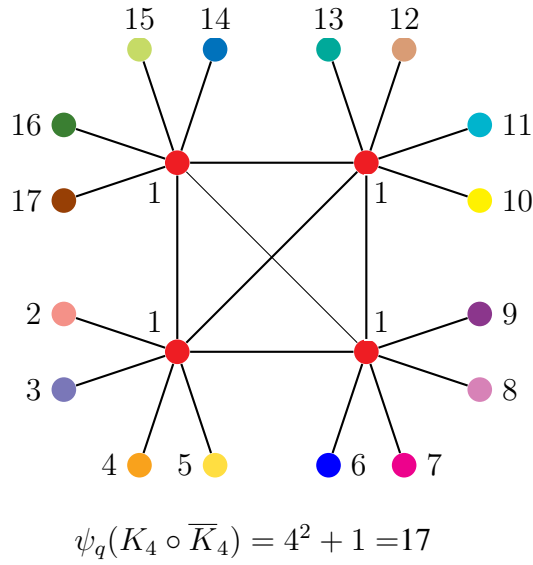


FIGURE 2.7 – Illustration d’une ψ_q -coloration d’une couronne $K_n \circ \overline{K}_n$

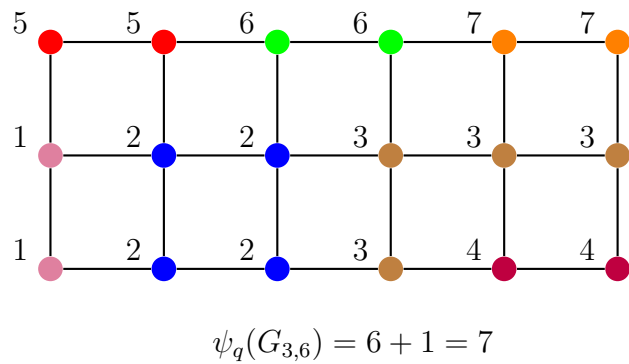
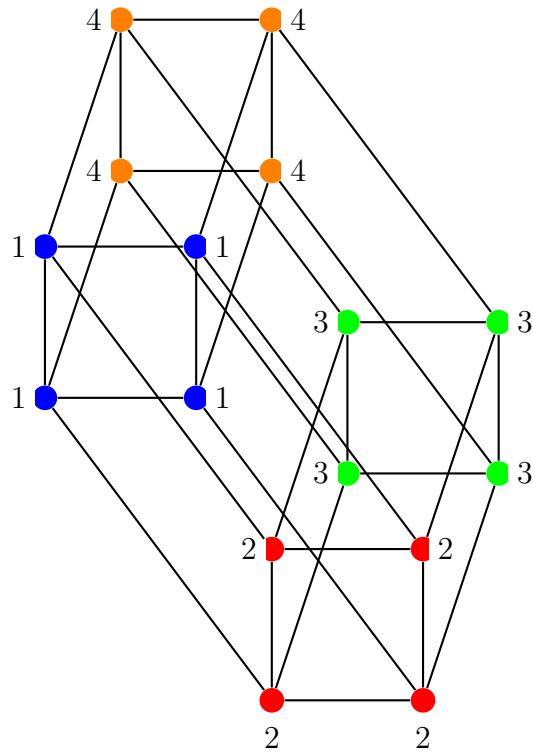
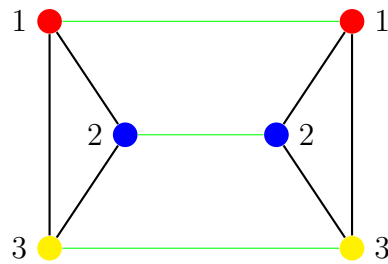


FIGURE 2.8 – Illustration d’une ψ_q -coloration d’un Grille



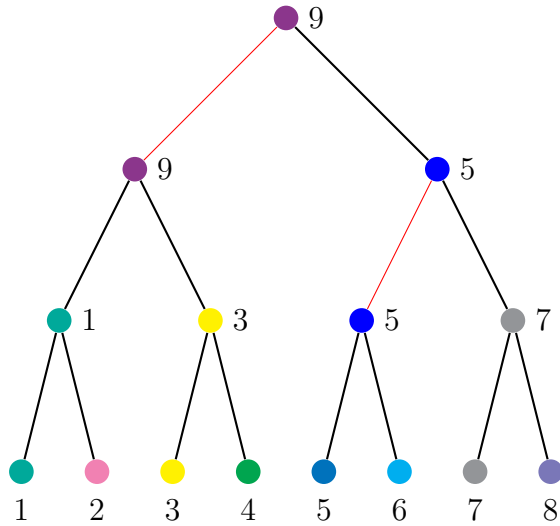
$$\psi_q(Q_4) = 2^{\lceil \frac{4}{2} \rceil} = 4$$

FIGURE 2.9 – Exemple de ψ_q -coloration d'un hypercube



$$\psi_q(G) = \mu(G) = 3$$

FIGURE 2.10 – Exemple de ψ_q -coloration d'un graphe 3-régulier



$$\psi_q(T) = \mu(T[V \setminus L]) + |L| = 2 + 8 = 10$$

FIGURE 2.11 – Illustration d'une ψ_q -coloration d'un arbre binaire

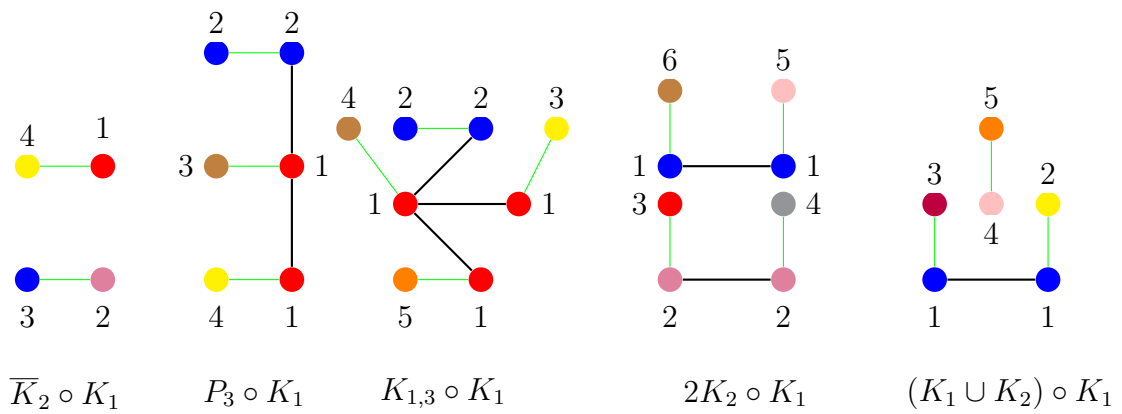
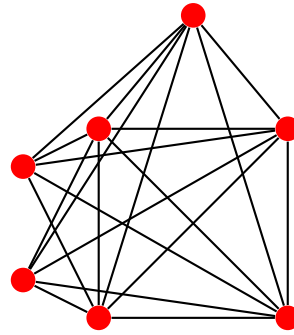


FIGURE 2.12 – Graphes G vérifiant $\psi_q(G \circ K_1) = \psi_q(G) + 2$



$$\psi_q(K_4 + \overline{K}_1) = 1$$

FIGURE 2.13 – Exemple de ψ_q -coloration de $K_r + \overline{K}_s$ avec $r + s$ impair

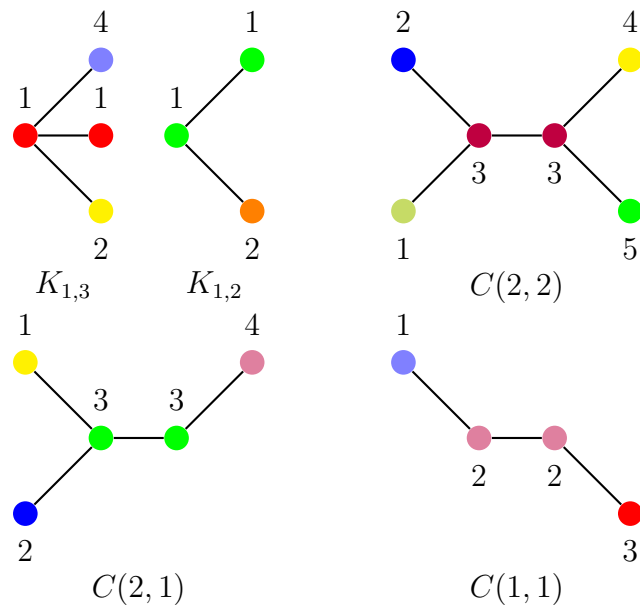


FIGURE 2.14 – Graphes H d'ordre n vérifiant $\psi_q(H) = n - 1$

2.4 Bornes sur le nombre de quorum-coloration

Dans cette section, nous reprenons le travail de synthétisation en tableau fait dans la Section 2.3 mais cette fois-ci pour tous les résultats établissant des bornes du nombre de quorum-coloration de certaines structures graphiques (TABLES 2.1, 2.2 et 2.3), l'objectif étant toujours de se distinguer dans la façon de présenter ces informations par rapport à ce qui a déjà été proposé par d'autres auteurs tout en rendant les données plus lisibles.

Graphe G d'ordre n et de maille g	Bornes de $\psi_q(G)$	Références
G connexe avec $n \geq 3$	$1 \leq \psi_q(G) \leq n$	([9])
G connexe avec $n \geq 3$	$1 \leq \psi_q(G) \leq \left\lfloor n + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4n}}{2} \right\rfloor$	([9])
$\delta(G) \geq 2$	$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	([19])
G quelconque	$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lceil \frac{\delta+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor$	([9])
$a(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et $\delta(G) \geq 2$	$\psi_q(G) \leq \frac{n}{a(G)} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	([19])
$\delta(G) \geq 2$	$\psi_q(G) \leq \mu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	([19])
G connexe contenant un isthme	$\psi_q(G) \geq 2$	([19])
$g \geq 3$ et $\delta(G) \geq 4$	$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{g} \right\rfloor$	([9])
G 4 ou 5-régulier	$\psi_q(G) \leq \frac{n}{g}$	([19])
G 4-régulier sans triangle	$\psi_q(G) \leq \frac{\mu(G)}{2}$	([19])
G r -régulier	$\psi_q(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor$	([9])
G r -régulier avec $r \geq 3$ et $g \geq 5$	$\psi_q(G) \leq \frac{n}{1+(g-2)\left\lceil \frac{r-3}{2} \right\rceil}$	([9])
$G = T$ un arbre binaire	$\psi_q(T) \geq n - \mu(T)$	([9])
$G = T$ un arbre d'ordre $n \geq 3$	$\psi_q(T) \leq \left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor$	([9])
$G = T$ un arbre	$\psi_q(T) \geq \left\lfloor \frac{\text{diam}(T)}{2} \right\rfloor$	([28])
$n \geq 4$	$\psi_q(G) + \psi_q(\overline{G}) \leq n + 2$	([30])
$g \geq 5$	$\psi_q(G) + \psi_q(\overline{G}) \geq 3$	([28])
G connexe admet une prtition satisfaisante	$\psi_q(G) \geq n + 2$	([30])
G connexe n'admet pas de partition satisfaisante	$\psi_q(G \circ K_1) \geq n + 1$	([30])
G quelconque	$\psi_q(G \circ K_1) \geq \psi_q(G) + 1$	([30])
$n \geq 3$	$\psi_q(G \circ K_1) \geq \psi_q(G) + 2$	([30])
$n \geq 5$	$\psi_q(G \circ K_1) \geq \psi_q(G) + 3$	([28])
G quelconque	$\psi_q(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{n - \left\lfloor \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil} \right\rfloor$	([30])

TABLE 2.2 – Bornes sur le nombre du quorum-coloration

Graphe G d'ordre n et de maille g	Bornes de $\psi_q(G)$	Réf
G quelconque	$\psi_q(G) \geq 1 + n - \left\lfloor \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rfloor$	[(30)]
$G = T$ un arbre	$\psi_q(T) \geq \mu(T[V \setminus L]) + L - \sum_{v \in (V \setminus L)} \left(\left\lfloor \frac{d_T(v)}{2} \right\rfloor - 1 \right)$	[(28)]
G quelconque	$\psi_q(G) \times \psi_q(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$	[(30)]
$\Delta(G) \geq 2$	$\psi_q(G) \leq n - 2$	[(28)]

TABLE 2.3 – Bornes du nombre de quorum-coloration(suite)

2.5 Complexité et problèmes ouverts récents

Comme dans toute étude d'invariants de graphe, l'étude de la complexité des algorithmes qui permettraient le calcul du nombre de quorum-coloration de certains types de graphes n'est pas en reste. Pour résumer la situation concernant cet aspect de l'étude, tous les problèmes de décisions associés au nombre de quorum-coloration auxquels on s'est jusqu'à présent intéressé des graphes sans sommets isolés ni pendants sont NP -complets (voir [26, 30]). Néanmoins, Sahbi [25] a montré que le problème devient linéaire dans les arbres binaires. Tous ces résultats sont résumés dans la TABLE 2.4.

Problème de décision	Complexité	Réf
QUORUM-COLORATION EQUILIBREE Instance : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre pair. Question : Existe-t-il une quorum-coloration $\{V_1, V_2\}$ de G telle que $ V_1 = V_2 $?	NP -complet	[1]
QUORUM-ONE Instance : Un graphe $G = (V, E)$. Question : A-t-on $\psi_q(G) > 1$?	NP -complet	[26]
QUORUM-K Instance : Un graphe $G = (V, E)$, un entier positif $K \leq V $. Question : A-t-on $\psi_q(G) \geq K$?	NP -complet	[30]
4-REGULAR QUORUM Instance : Un graphe 4-régulier $G = (V, E)$, un entier positif $K \leq V $. Question : A-t-on $\psi_q(G) \geq K$?	NP -complet	[26]
5-REGULAR QUORUM Instance : Un graphe 5-régulier $G = (V, E)$, un entier positif $K \leq V $. Question : A-t-on $\psi_q(G) \geq K$?	NP -complet	[28]

TABLE 2.4 – Complexité algorithmique

Pour clore ce chapitre, notons que Hedetniemi *et al* [19] et Sahbi [25] ont respectivement posé les deux problèmes ouverts suivants qui restent encore sans réponse.

Problème 1. Pouvez-vous concevoir un algorithme linéaire pour calculer la valeur de $\psi_q(T)$ pour tout arbre T ?

Problème 2. Déterminer la valeur exacte du nombre de quorum-coloration d'un arbre N -aire complet ou concevoir un algorithme linéaire le calculant.

Chapitre 3

Contribution : ψ_q -coloration et nombre de quorum-coloration des arbres parfaits dont les sommets de même profondeur ont le même degré

Dans ce chapitre, nous répondons au Problème 2 énoncé dans la Section 2.5. Pour ce faire, nous concevons un algorithme linéaire trouvant une ψ_q -coloration ainsi que le nombre de quorum-coloration de n'importe quel arbre *parfait*¹ dont les sommets de même profondeur ont même degré. Ceci s'effectue en trois temps : dans la Section 3.1, nous introduisons quelques définitions, terminologie et notations commodes que nous utilisons dans ce chapitre pour désigner certains objets ; dans la Section 3.2 nous montrons que tout arbre *parfait* admet une ψ_q -coloration où chaque sommet non pendant satisfait la propriété de sommet quorum avec égalité, puis dans la Section 3.3 nous trouvons une telle ψ_q -coloration ainsi que le nombre de quorum-coloration dans les arbres parfaits dont les sommets de même profondeur ont même degré grâce à un algorithme linéaire que nous concevons. A noter que le contenu de ce chapitre a été soumis pour publication [29].

3.1 Préliminaires

Définitions, terminologie et notations

— Étant donnée deux quorum-colorations π_1 et π_2 d'un graphe G , on dit que π_1 est *meilleure* que π_2 si $|\pi_1| \geq |\pi_2|$. Pour une quorum-coloration π d'un graphe G et tout sommet $v \in V(G)$, on note la classe de v relativement à π par $\pi(v)$ c'est à dire pour chaque sommet de l'ensemble $\pi(v)$ a la même couleur que la couleur de sommet v . Une quorum-coloration d'un graphe G est dite *rentable* si tout sommet de $V(G) \setminus L(G)$ satisfait la propriété de sommet quorum avec égalité, c'est-à-dire, si pour tout sommet $v \in V(G) \setminus L(G)$ on a $|N_G[v] \cap \pi(v)| = \frac{|N_G[v]|}{2}$. un arbre $T = (V, E)$ avec un sommet distingué r appelé *racine* de T . Un sommet v est dit *père* d'un sommet w dans un arbre enraciné

1. Cette notion est définie dans la Section 3.1 de ce chapitre.

- $T = (V, E, r)$ si $vw \in E$ et $d_T(w, r) = d_T(v, r) + 1$, auquel cas w est dit *enfant* de v . Deux sommets possédant le même père dans un arbre enraciné $T = (V, E, r)$ sont dits *frères*. Un sommet x est un *descendant* d'un autre sommet v dans un arbre enraciné $T = (V, E, r)$ si $d_T(v, x) = d_T(x, r) - d_T(v, r)$; en particulier, on a $d_T(x, r) > d_T(v, r)$.
- On appelle arbre *parfait* tout arbre enraciné $T = (V, E, r)$ dont les feuilles se trouvent toutes à la même distance h de la racine r , distance qu'on appelle *hauteur* de T , et qui est définie par $h = \max_{v \in V} d_T(r, v)$. Aussi, on note par D_i l'ensemble $\{v \in V \mid d_T(r, v) = i\}$ des sommets d'un arbre complet $T = (V, E, r)$ qui sont à distance i de r appelée *profondeur* des sommets de D_i , pour tout $i \in \{0, 1, \dots, h\}$. On pose également $D_i = \{v_{i,j}\}_{1 \leq j \leq \ell_i}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, h\}$ (en particulier, $r = v_{0,1}$, $\ell_i = |D_i|$).
 - Un arbre parfait $T = (V, E, r)$ est dit N_i -*aire par niveaux* si pour tout entier $i \in \{1, \dots, h - 1\}$, les sommets de D_i ont tous le même degré $N_i + 1$, si $i=0$ le degré de r égale N_0 . c'est-à-dire, tous les sommets se trouvant à une même profondeur i ont le même nombre d'enfants N_i . En particulier, les sommets frères d'un arbre N_i -aire parfait par niveaux ont tous le même degré, et si $N_i = N$ pour un entier $N \geq 2$ et tous entiers $i \in \{0, \dots, h - 1\}$ et $j \in \{1, \dots, \ell_i\}$, alors T est appelé simplement *arbre N -aire parfait* (en particulier, si $N = 2$ alors T est appelé arbre *binnaire parfait*).

Remarque 3.1 Notons à partir des définitions que tout arbre N -aire parfait est aussi N_i -aire parfait par niveaux avec $N_i = N$ pour tous entiers $i \in \{0, 1, \dots, h - 1\}$ et $j \in \{1, \dots, \ell_i\}$, mais que clairement, le contraire n'est pas vrai.

3.2 Existence d'une ψ_q -coloration rentable

Avant de prouver le principal résultat de ce mémoire, nous montrons d'abord que nous pouvons modifier n'importe quelle quorum-coloration d'un arbre parfait pour en obtenir une meilleure qui soit rentable.

Théorème 3.1

Soient $T = (V, E, r)$ un arbre parfait et π_0 une quorum-coloration de T . Alors, il existe une quorum-coloration rentable de T qui est meilleure que π_0 .

Preuve. Soit π_0 une quorum-coloration de l'arbre parfait T . On déroule l'algorithme suivant que l'on note par Algorithme 1.

- Pour $i = 0$ à $h - 1$ et $j = 1$ à ℓ_i , exécuter les deux étapes suivantes.
 1. Pour $|N_T[v_{i,j}] \cap \pi_i(v_{i,j})| > \lceil \frac{|N_T[v_{i,j}]|}{2} \rceil$, choisir arbitrairement un sous-ensemble $S_{i,j}$ de $\pi_i(v_{i,j}) \cap D_{i+1}$ de sorte que $|N_T[v_{i,j}] \cap \pi_i(v_{i,j})| - |S_{i,j}| = \lceil \frac{|N_T[v_{i,j}]|}{2} \rceil$, colorer les sommets de $S_{i,j}$ avec $|S_{i,j}|$ nouvelles couleurs et pour tout sommet $v \in S_{i,j}$, attribuer la nouvelle couleur de v à tous les descendants de v qui étaient dans $\pi_i(v)$; on note la coloration obtenue par π'_i . Puis, passer à l'étape 2.
 2. Pour tout sommet $v \in S_{i,j}$ tel que $|N_T[v] \cap \pi'_i(v)| < \lceil \frac{|N_T[v]|}{2} \rceil$ (notons dans ce cas que nous avons nécessairement $|N_T[v] \cap \pi'_i(v)| = \lceil \frac{|N_T[v]|}{2} \rceil - 1$ puisqu'en passant de π_i à π'_i , l'unique voisin de v qui n'a plus la couleur de v est $v_{i,j}$ impliquant que $|\pi_i(v)| - |\pi'_i(v)| = 1$), attribuer la couleur de v à un sommet arbitrairement choisi w de $(N_T(v) \cap D_{i+2}) \setminus \pi'_i(v)$ et à tous les descendants de w qui appartenaient à $\pi'_i(w)$; alors, on voit sans difficulté que la coloration obtenue est une quorum-coloration que nous désignons par π_{i+1} .

L'Algorithme 1 doit se terminer puisque T est d'ordre fini. A la fin de l'algorithme, nous obtenons clairement une quorum-coloration rentable π_h en vertu des étapes 1 et 2. En outre, à chaque itération de l'Algorithme 1 pour un certain $i \in \{0, \dots, h - 1\}$ et un certain $j \in \{1, \dots, \ell_i\}$, le nombre de couleurs augmente d'au moins d'une unité à l'exécution de l'étape 1, tandis qu'il décroît d'au plus une couleur à l'exécution de l'étape 2 et par conséquent, le nombre de couleurs ne diminue pas. On en déduit donc que π_h est meilleure que π_0 , ce qui conclue la preuve. \square

La preuve du Théorème 3.1 montre que l'on peut, à partir d'une quorum-coloration π_0 d'un arbre parfait T , obtenir une quorum-coloration de T meilleure que π_0 et qui soit rentable. Comme conséquence, si π_0 est une ψ_q -coloration alors l'Algorithme 1 se conclut par une ψ_q -coloration rentable de T en sortie.

3.2.1 Application de l'algorithme 1 :

Soient $T = (V, E, r)$ un arbre parfait et π_0 une quorum-coloration de T . Alors, il existe une quorum-coloration rentable de T qui est meilleure que π_0 .

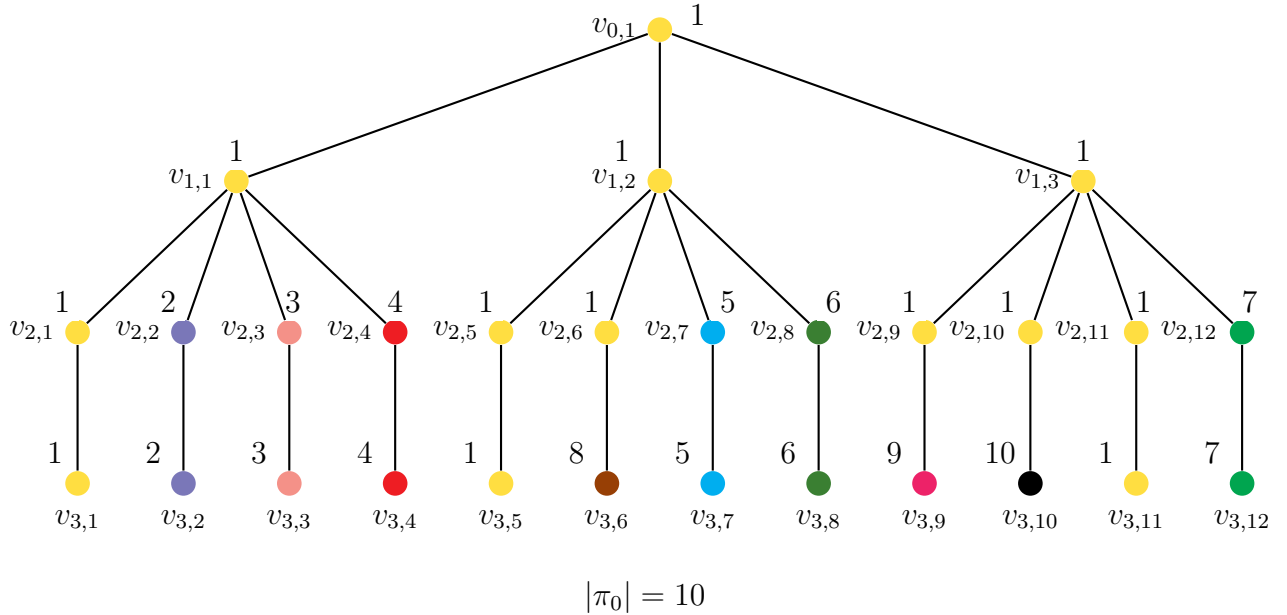


FIGURE 3.1

Première itération :

Nous avons $h = \max_{v \in V} d_T(r, v) = 3$; $h - 1 = 2$; $l_0 = 1$, pour $i=0$ à 2 et $j=1$ à l_0 on a :

Si $i = 0$; $j = 1$; $D_0 = \{v_{0,1}\}$; $l_0 = |D_0| = 1$; $D_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}\}$; $|N_T[v_{0,1}] \cap \pi_0(v_{0,1})| = 4$ et $\lceil \frac{|N_T[v_{0,1}]|}{2} \rceil = 2$. Puisque $4 > 2$, on choisi arbitrairement un sous-ensemble $S_{0,1}$ de $\{\pi_0(v_{0,1}) \cap D_1\} = \{D_1\}$ de sorte que $|N_T[v_{0,1}] \cap \pi_0(v_{0,1})| - |S_{0,1}| = \lceil \frac{|N_T[v_{0,1}]|}{2} \rceil$ alors $|S_{0,1}| = 2$ et $S_{0,1} = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$.

- On attribue des nouvelles couleurs pour les sommets de $S_{0,1}$ on a $v_{1,1}$ c'est la couleur 11 et $v_{1,2}$ c'est la couleur 12.
- On attribue la nouvelle couleur de $v_{1,1}$ à tous les descendants de $v_{1,1}$ qu'ont la couleur de $v_{1,1}$ et de même pour le sommet $v_{1,2}$ (voir FIGURE 3.1).

On note la coloration obtenue par π'_0 .

Les sommets du $s_{0,1}$ sont des sommets quorum ? (voir (FIGURE 3.2))

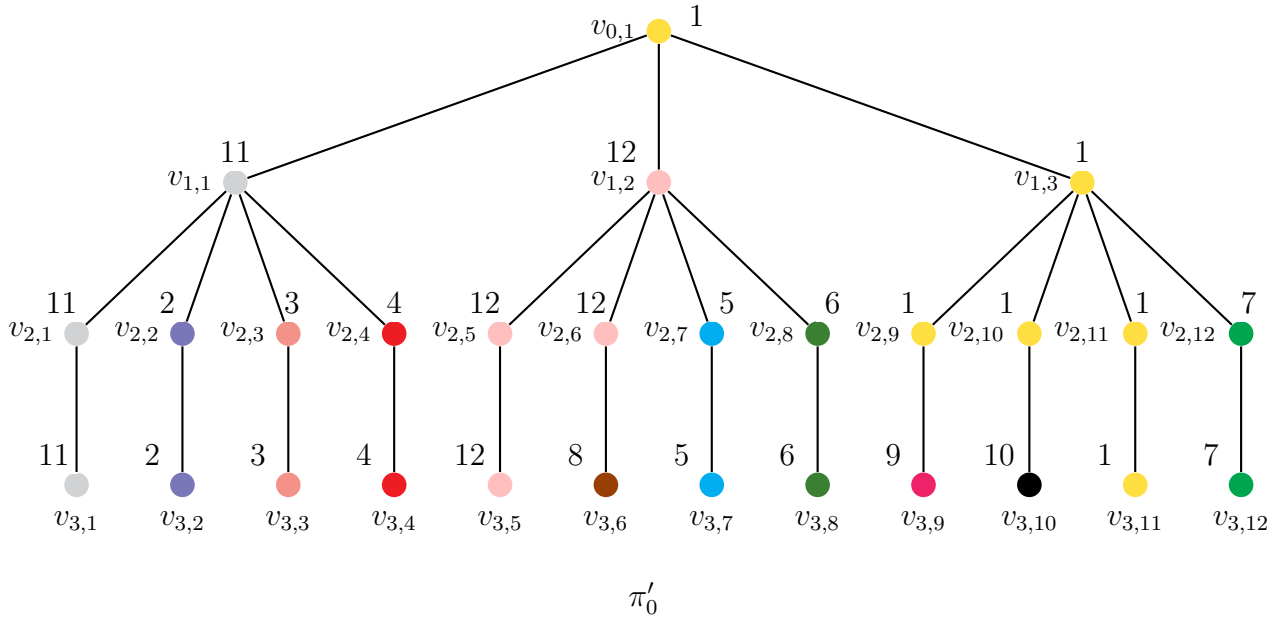


FIGURE 3.2

Nous avons $|N_T[v_{1,1}] \cap \pi'_0(v_{1,1})| = 2 < \lceil \frac{|N_T[v_{1,1}]|}{2} \rceil = 3$, le sommet $v_{1,1}$ ne satisfait pas la propriété de sommet quorum donc dans ce cas on choisi arbitrairement un sommet w de l'ensemble $\{(N_T(v) \cap D_2) \setminus \pi'_0(v_{1,1})\} = \{v_{2,2}; v_{2,3}; v_{2,4}\}$ (nous choisissons $w = v_{2,2}$) et nous donnerons la couleur de sommet $v_{1,1}$ et à tous les sommets descendants de w qui appartenait à $\pi'_0(w)$ (voir (FIGURE 3.3)).

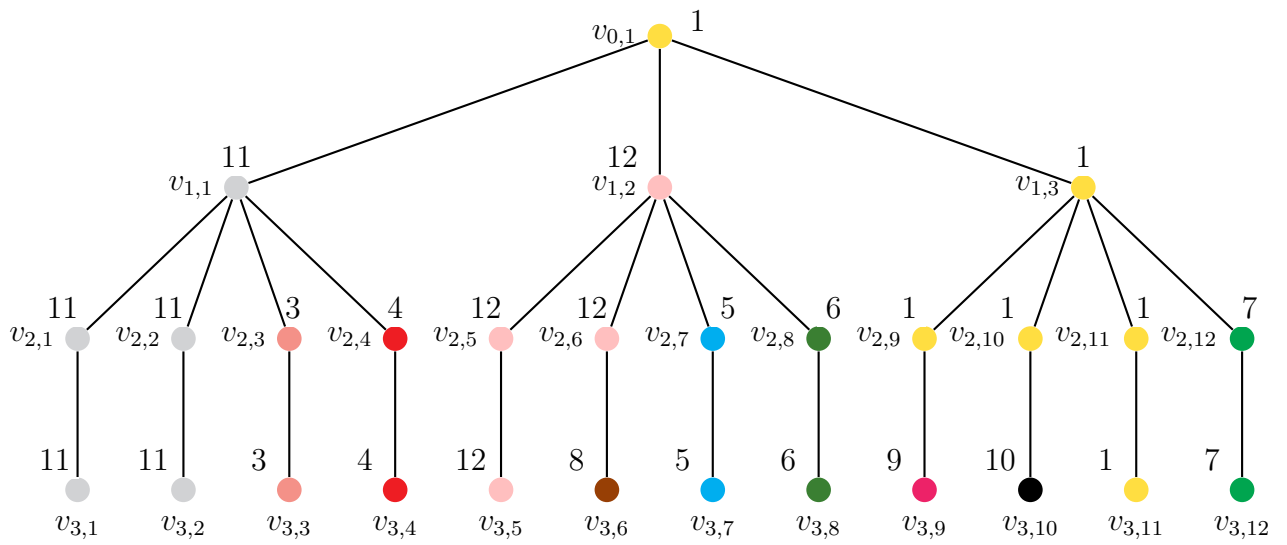
Nous avons $|N_T[v_{1,2}] \cap \pi'_0(v_{1,2})| = 3 = \lceil \frac{|N_T[v_{1,2}]|}{2} \rceil = 3$, le sommet $v_{1,2}$ satisfait la propriété de sommet quorum avec égalité. On désignons la coloration obtenu par π_1

Nous avons ajouté la couleur 11 de sommet $v_{1,1}$ mais nous avons perdu la couleur 2 de sommet $v_{2,2}$, et pour le sommet $v_{1,2}$ nous avons ajouté la couleur 12 donc $|\pi_1| = 11$

Deuxième itération :

$i = 1$ à 2 et $j = 1$ à $l_1 = 3$, les sommets $v_{1,1}$ et $v_{1,2}$ satisfait la propriété de quorum-coloration avec égalité. Et pour le sommet $v_{1,3}$ nous avons $|N_T[v_{1,3}] \cap \pi_1(v_{1,3})| = 5 > \lceil \frac{|N_T[v_{1,3}]|}{2} \rceil = 3$ on choisi arbitrairement un sous-ensemble $S_{1,3}$ de $\pi_1(v_{1,3}) \cap D_2 = \{v_{2,9}; v_{2,10}; v_{2,11}\}$ de sorte que $|N_T[v_{1,3}] \cap \pi_1(v_{1,3})| - |S_{1,3}| = \lceil \frac{|N_T[v_{1,3}]|}{2} \rceil$ alors $|S_{1,3}| = 2$ et $S_{1,3} = \{v_{2,10}, v_{2,11}\}$.

— On attribue des nouvelles couleurs pour les sommets de $S_{1,3}$, nous donnons la couleur 2



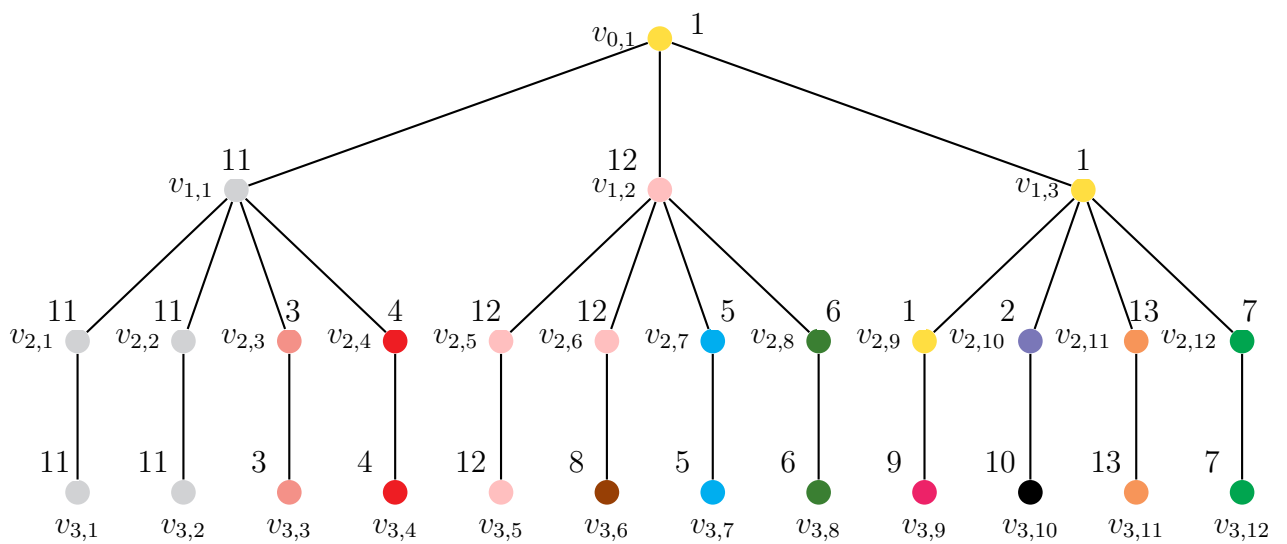
$|\pi_1| = 11$

FIGURE 3.3

à le sommet $v_{2,10}$ et la couleur 13 à le sommet $v_{2,11}$.

- On attribue la nouvelle couleur de $v_{2,10}$ à tous les descendants de ce sommet, et de même pour le sommet $v_{2,11}$ (voir FIGURE 3.3).

On note la coloration obtenue par π'_1



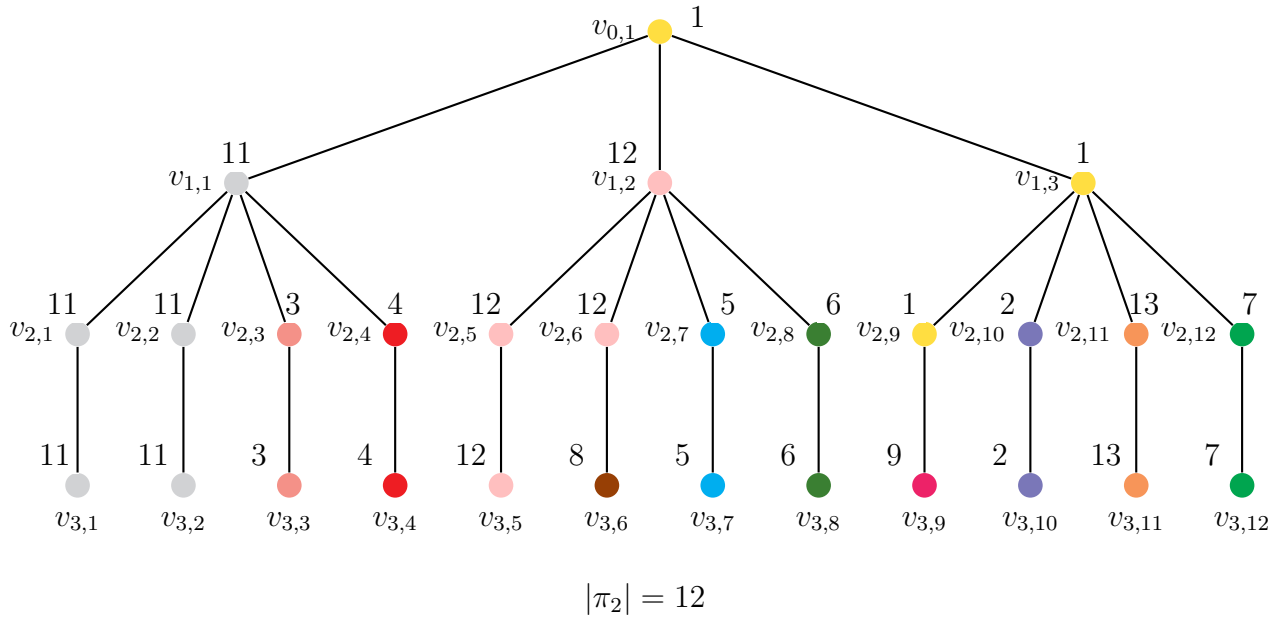
π'_1

les sommets de $S_{1,3}$ sont des sommets quorum ?

Nous avons $|N_T[v_{2,10}] \cap \pi'_1(v_{2,10})| = 1 < \lceil \frac{|N_T[v_{2,10}]|}{2} \rceil = 2$, le sommet $v_{2,10}$ ne satisfait pas la propriété de sommet quorum donc dans ce cas on choisi arbitrairement un sommet $w = v_{3,10}$ de l'ensemble $N_T(v_{2,10}) \cap D_3 \setminus \pi'_1(v_{2,10}) = \{v_{3,10}\}$ et nous donnerons la couleur de sommet $v_{2,10}$.

Nous avons $|N_T[v_{2,11}] \cap \pi'_1(v_{2,11})| = 2 = \lceil \frac{|N_T[v_{2,11}]|}{2} \rceil$, le sommet $v_{2,11}$ satisfait la propriété de sommet quorum avec égalité. On désignons la coloration obtenu par π_2

Nous avons ajouté la couleur 2 du sommet $v_{2,10}$ mais nous avons perdu la couleur 10 du sommet $v_{3,10}$, et pour le sommet $v_{2,11}$ nous avons ajouté la couleur 13 donc $|\pi_2| = 12$



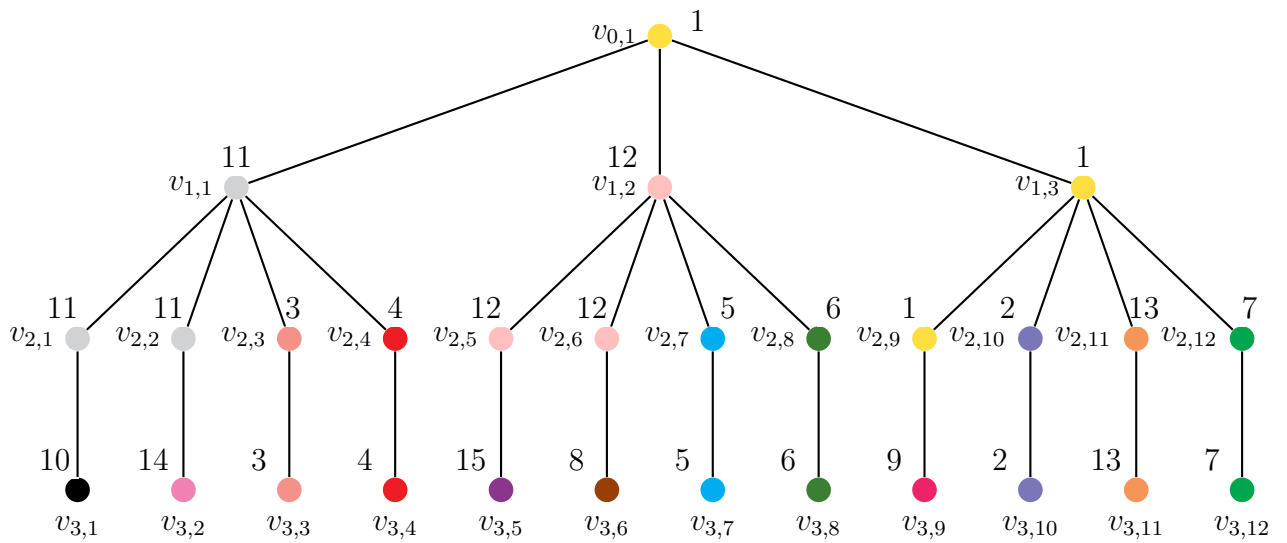
Troisième itération : Pour $i = 2$ et $j = 1$ à $l_2 = 12$.

les sommets $v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,6}, v_{2,7}, v_{2,8}, v_{2,9}, v_{2,10}, v_{2,11}, v_{2,12}$. Satisfont la propriété de quorum-coloration avec égalité. Et pour le sommet $v_{2,1}$ nous avons $|N_T[v_{2,1}] \cap \pi_2(v_{2,1})| = 3 > \lceil \frac{|N_T[v_{2,1}]|}{2} \rceil = 2$ on choisi arbitrairement un sous-ensemble $S_{2,1}$ de $\pi_2(v_{2,1}) \cap D_3 = \{v_{3,1}\}$ de sorte que $|N_T[v_{2,1}] \cap \pi_2(v_{2,1})| - |S_{2,1}| = \lceil \frac{|N_T[v_{2,1}]|}{2} \rceil$ alors $|S_{2,1}| = 1$ et $S_{2,1} = \{v_{3,1}\}$.

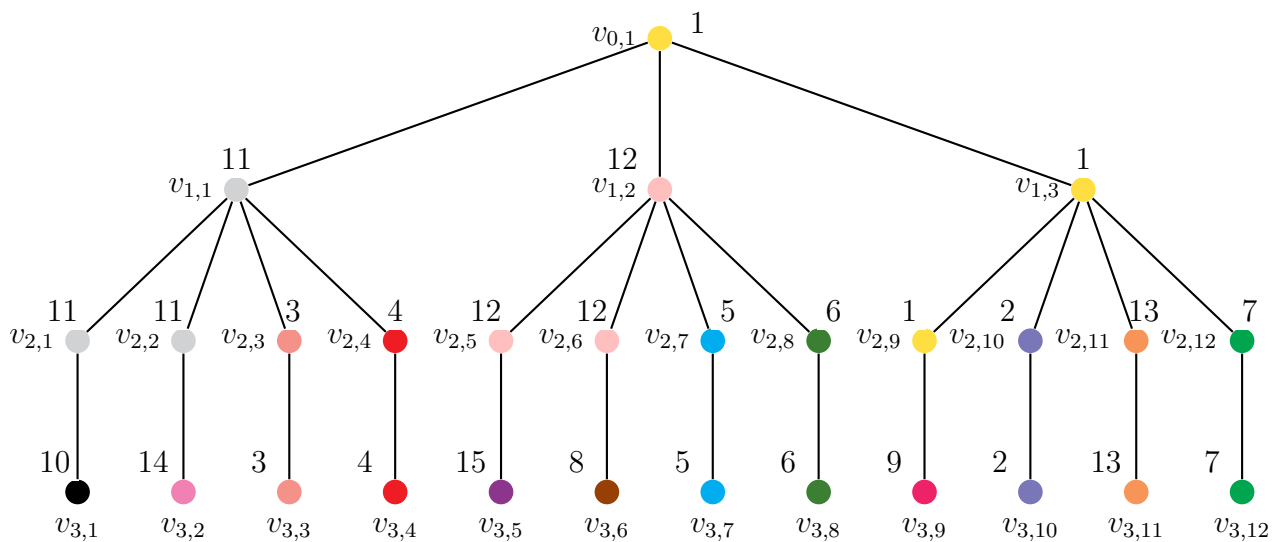
— On attribua la nouvelle couleur 10 pour le sommet de $S_{2,1}$.

Le même travaille avec les sommets $v_{2,2}$ et $v_{2,5}$, donc nous avons ajouté 3 nouvelle couleurs

On note la coloration obtenue par π'_2



π'_2



$|\pi_3| = \psi_q(T) = 15$

On désigne la coloration obtenue par π_3

Corollaire 3.1
 Tout arbre parfait admet une ψ_q -coloration rentable.

Nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires permettant d'établir notre résultat central dans la section suivante.

3.3 ψ_q -coloration et nombre de quorum-coloration en temps linéaire

Théorème 3.2 *Pour tout arbre N_i -aire parfait par niveaux T d'ordre n , on peut à la fois trouver une ψ_q -coloration rentable et calculer $\psi_q(T)$ en $O(n)$.*

Preuve. Soit $T = (V, E, r)$ un arbre N_i -aire parfait par niveaux d'ordre n . Nous appliquons l'algorithme suivant qu'on désigne par l'Algorithme 2 (voir FIGURE ??).

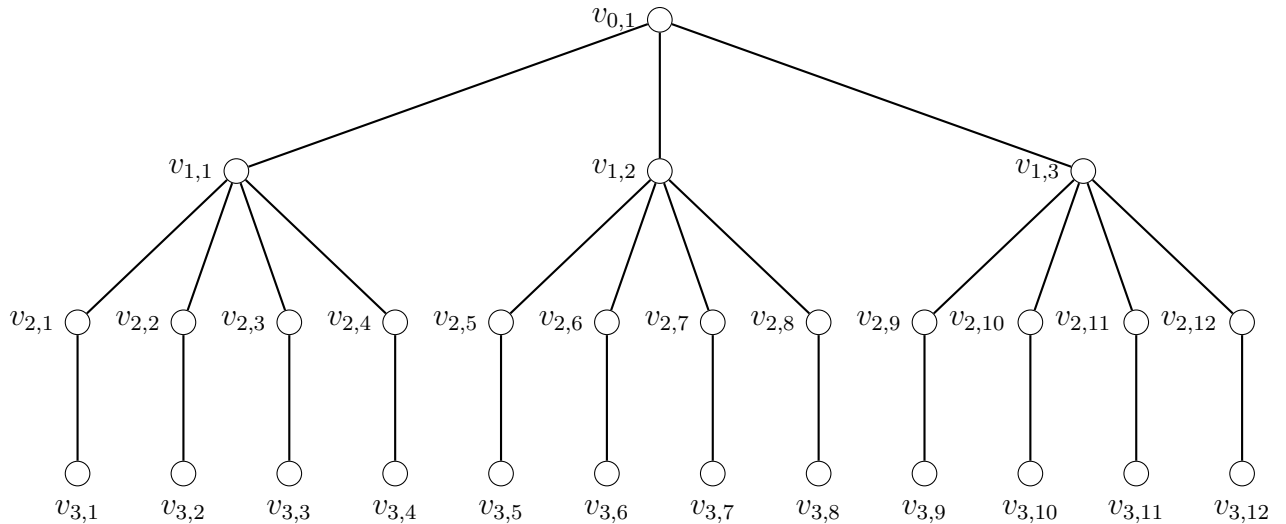
1. Attribuer une couleur à r et passer à l'étape 2.
2. Attribuer arbitrairement la couleur de r à exactement $\lfloor \frac{N_0}{2} \rfloor$ de ses enfants, colorer ses $\lceil \frac{N_0}{2} \rceil$ enfants restants avec $\lceil \frac{N_0}{2} \rceil$ nouvelles couleurs et poser $\alpha_1^1 = \lceil \frac{N_0}{2} \rceil + 1$. Puis, passer à l'étape 3.
3. Pour $i = 1$ à $h - 1$ et $j = 1$ à ℓ_i , considérer les deux cas mutuellement exclusifs suivants.
 - (i) Si $v_{i,j}$ a la même couleur que son père, alors attribuer arbitrairement la couleur de $v_{i,j}$ à exactement $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor - 1$ de ses enfants, colorer ses $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor + 1$ enfants restants avec $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor + 1$ nouvelles couleurs et poser $\alpha_{i+1}^j = \lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor + 1$.
 - (ii) Sinon, si $v_{i,j}$ n'a pas la même couleur que son père, alors attribuer arbitrairement la couleur de $v_{i,j}$ à exactement $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor$ de ses enfants, colorer ses $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor$ enfants restants avec $\lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor$ nouvelles couleurs et poser $\alpha_{i+1}^j = \lfloor \frac{N_i}{2} \rfloor$.
4. Poser $\alpha = \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=1}^{\ell_i} \alpha_{i+1}^j$.

L'Algorithme 2 doit se terminer puisque T est fini. Par l'Assertion 2 de l'Observation 1, cet algorithme se conclut en produisant une quorum-coloration rentable π de T en sortie grâce aux étapes 2 et 3. De plus, comme les sommets de T de même profondeur ont tous le même degré et jouent donc le même rôle dans T (en effet, leurs descendants se trouvant à une même distance ont tous même degré), alors en supprimant l'étiquetage « $v_{i,j}$ » de tous les sommets de T à la fin de l'Algorithme 2 on peut voir sans difficulté que toute quorum-coloration rentable de T peut s'obtenir en appliquant l'Algorithme 2 et que lorsque ce dernier utilise précisément toutes les couleurs utilisées par les classes de π , il sort toujours avec la même quorum-coloration rentable

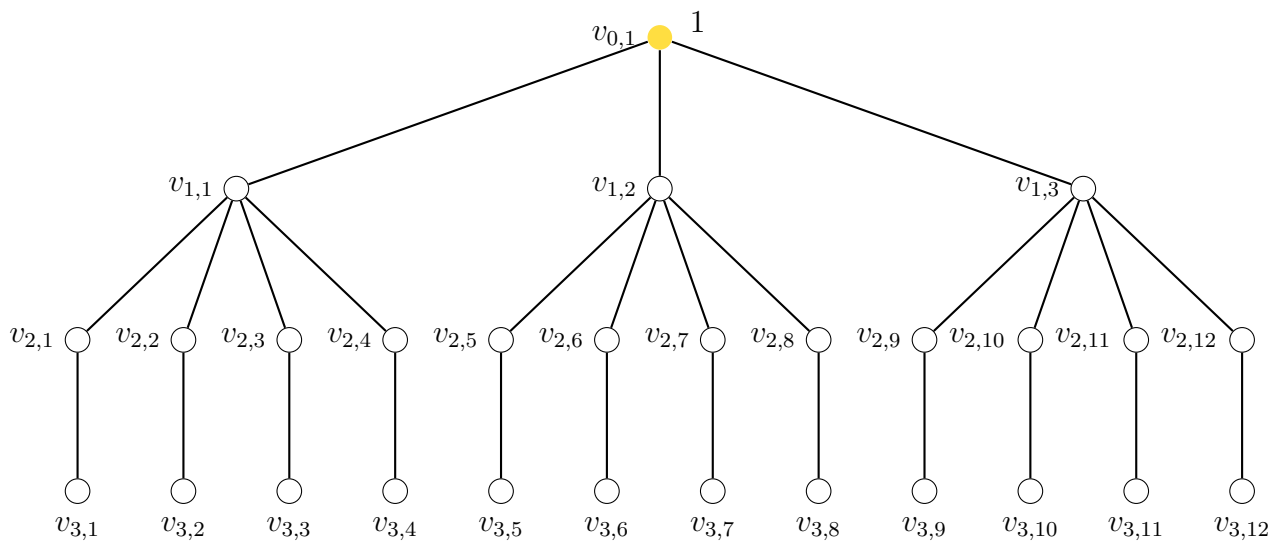
π à une permutation près des couleurs assignées aux sommets de T et ce indépendamment du choix arbitraire des enfants de $v_{i,j}$ qui prennent (ou non) la couleur de $v_{i,j}$, effectuée à chaque exécution de l'étape 3 pour certains i et j . Il s'en suit que π est l'unique quorum-coloration rentable de T à une permutation près des couleurs assignées à ses sommets et par conséquent, π est une ψ_q -coloration en vertu du Corollaire 3.1. Par ailleurs, d'une part le nombre total de tests de comparaison entre la couleur d'un sommet et celle de son père est majoré par l'ordre n de T . D'autre part, le nombre total d'affectations de couleurs est également majoré par n . En outre, le calcul des α_{i+1}^j nécessite au plus n opérations. Enfin, la somme calculée à l'étape 4 s'effectue en au plus n opérations. Par conséquent, le nombre total d'opérations élémentaires nécessaires pour à la fois trouver π et calculer $\psi_q(T) = \alpha_h$ est au plus égal à $2n + n + n < 4n$, d'où le théorème. \square

3.3.1 Application de l'algorithme 2 :

Soit $T = (V, E, r)$ un arbre N_i - aire parfait par niveau d'ordre $n=28$.

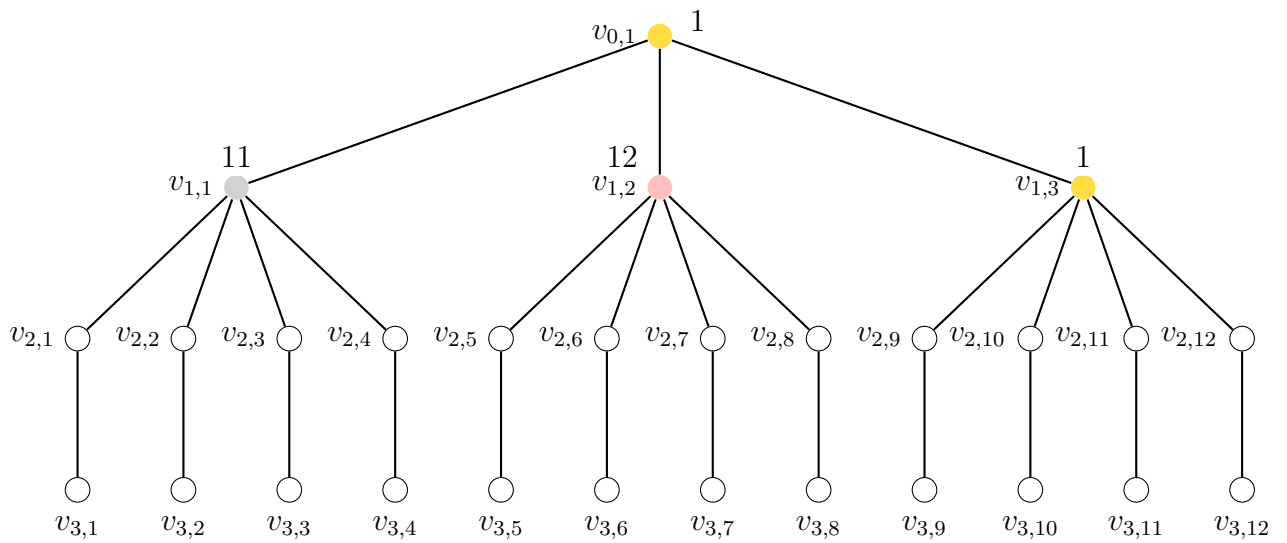


Attribuer une couleur à r .

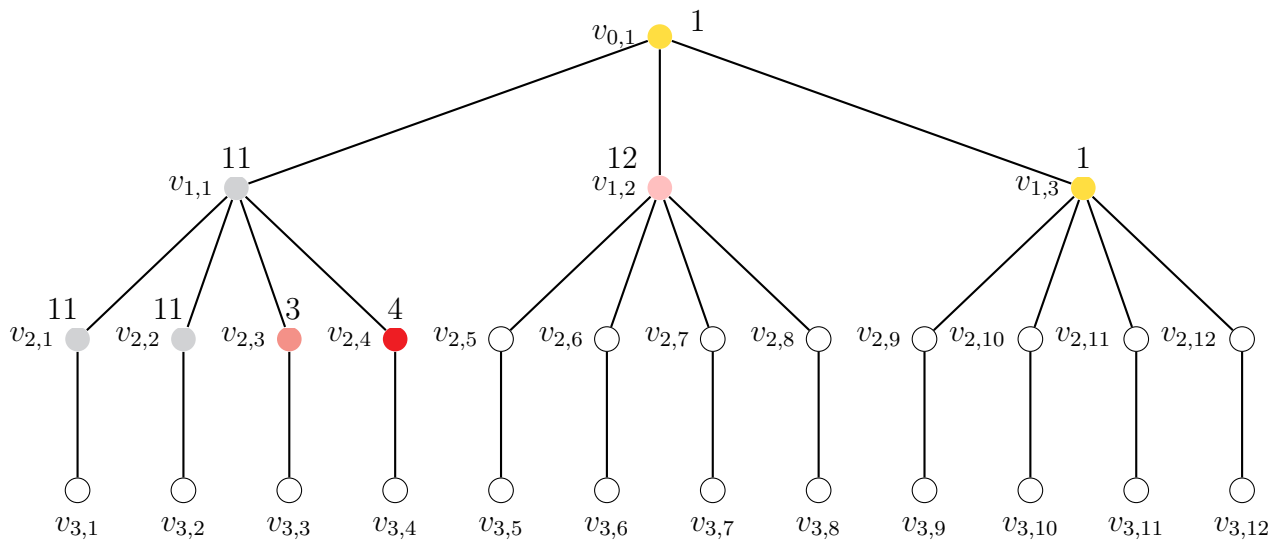


Attribuer arbitrairement la couleur de r à exactement $\lfloor \frac{N_0}{2} \rfloor = 1$ de ses enfants, colorer $\lceil \frac{N_0}{2} \rceil = 2$ enfants restants avec $\lceil \frac{N_0}{2} \rceil = 2$ nouvelles couleurs.

Pour $i = 1$; $N_1 = 4$ et $j = 1$ à $l_1 = 3$: le sommet $v_{1,1}$ n'a pas la même couleur que son père alors attribuer la couleur de $v_{1,1}$ à exactement $\lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor = 2$ de ses enfants; colorer ses $\lceil \frac{N_1}{2} \rceil = 2$ nouvelles couleurs.



$$\alpha_1^1 = \left\lfloor \frac{N_0}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + 1 = 3.$$

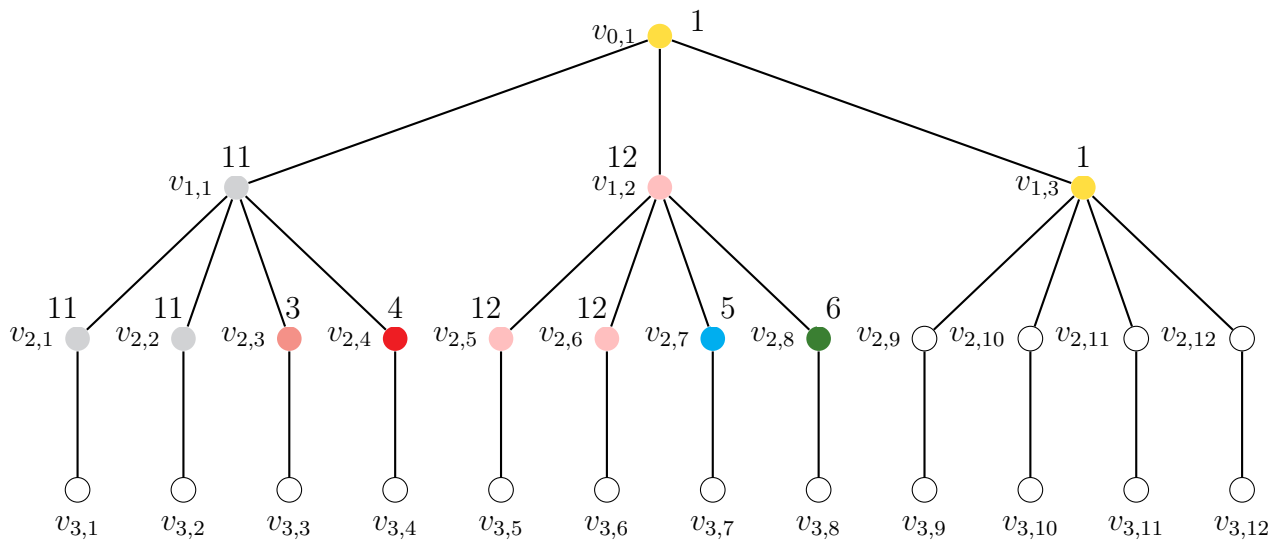


$$\alpha_2^1 = \left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2.$$

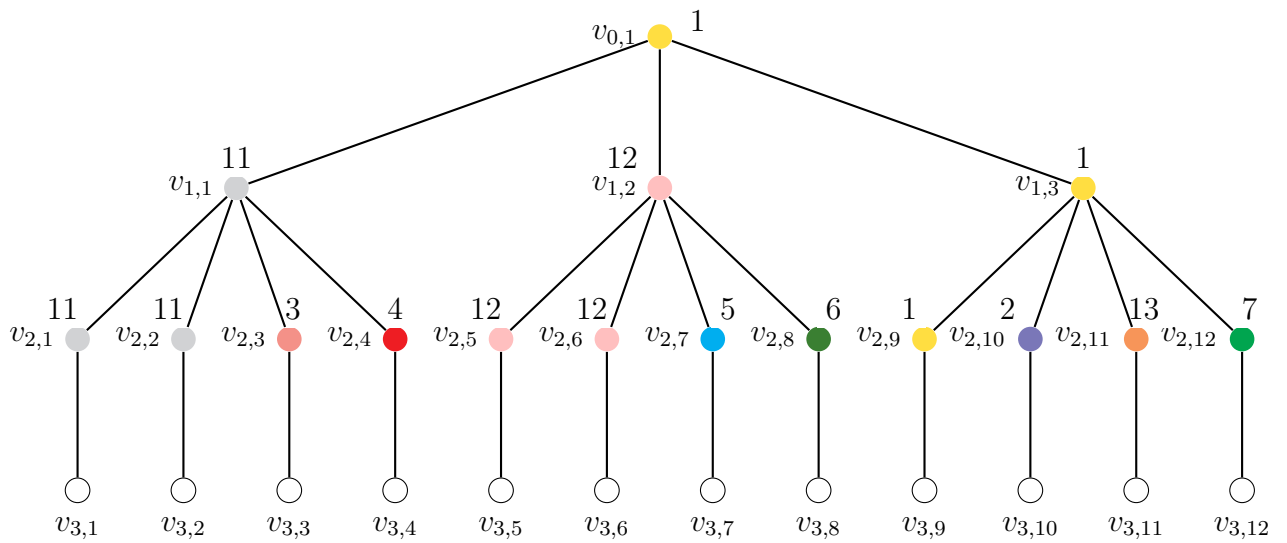
Le même travaille avec le sommet $v_{1,2}$.

Le sommet $v_{1,3}$ a la même couleur que son père alors attribuer la couleur de $v_{1,3}$ à exactement $\left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor - 1 = 1$ de ses enfants ; colorer ses $\left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor + 1$ restent avec $\left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ nouvelles couleurs .

Pour $i = 2$; $N_2 = 1$ et $j = 1$ à $l_1 = 12$: le sommet $v_{2,3}$ n'a pas la même couleur que son père alors attribuer la couleur de $v_{2,3}$ à exactement $\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = 1$ de ses enfants ; colorer ses $\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor$



$$\alpha_2^2 = \left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2.$$

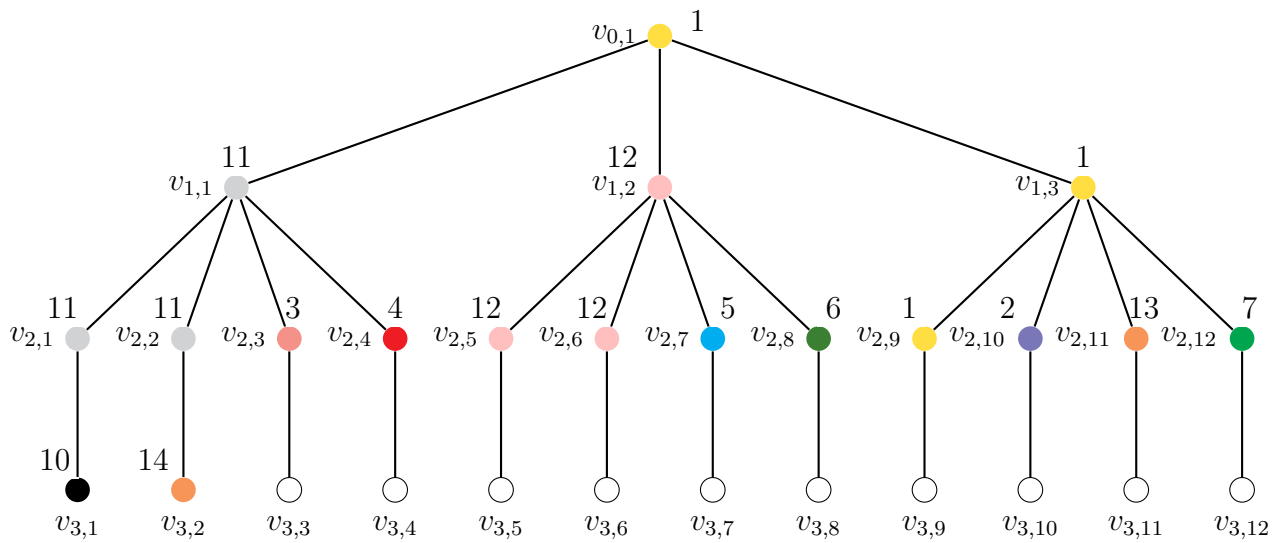


$$\alpha_2^3 = \left\lfloor \frac{N_1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

=0 nouvelles couleurs, le même travaille avec le sommet $v_{1,2}$.

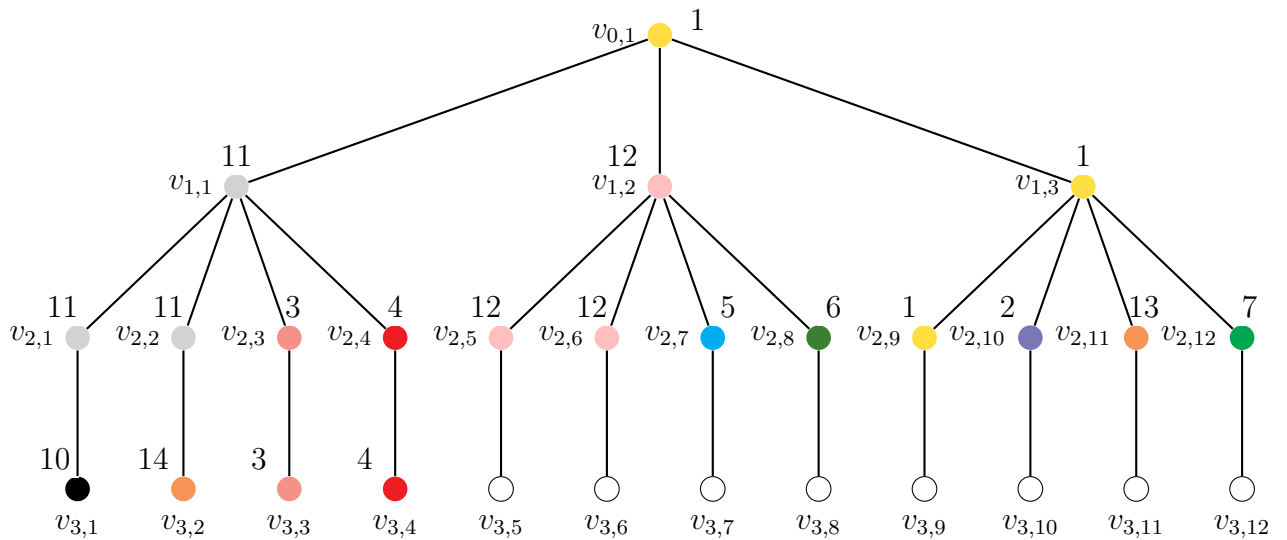
le sommet $v_{2,1}$ a la même couleur que son père alors attribuer la couleur de $v_{2,1}$ à exactement

$\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor - 1 = 1$ de ses enfants ; colorer ses $\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1$ restent avec $\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = 1$ nouvelles couleurs



$$\alpha_3^1 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$$

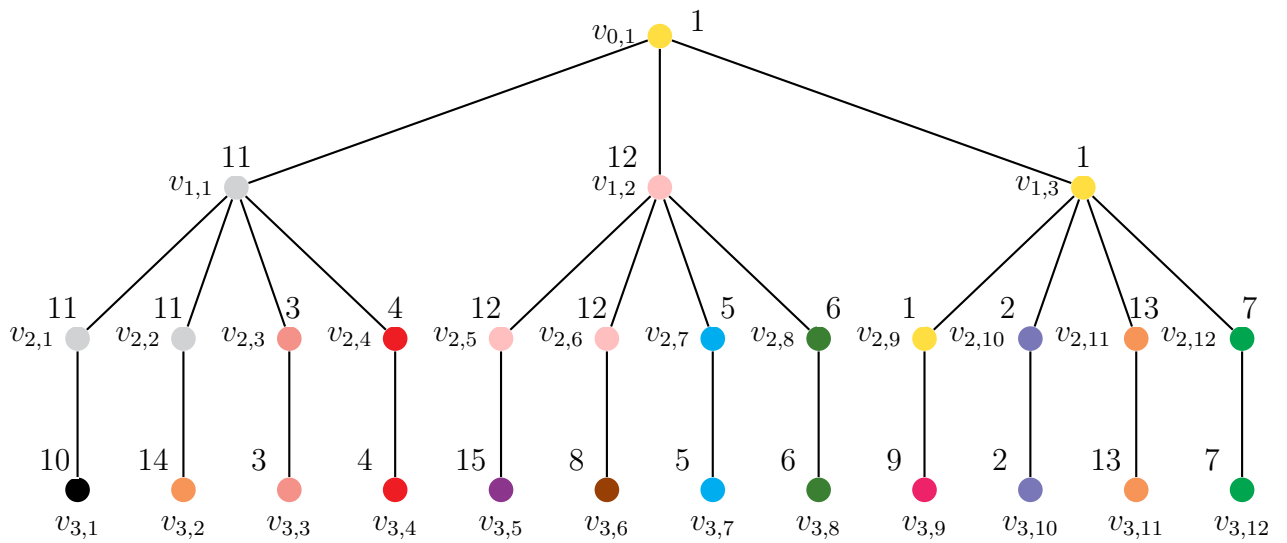
$$\alpha_3^2 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$$



$$\alpha_3^3 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

$$\alpha_3^4 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

Les quatre corollaires suivants découlent immédiatement du Théorème 3.2 et de la Remarque 3.1.



$$\alpha_3^5 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$$

$$\alpha_3^6 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$$

$$\alpha_3^7 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

$$\alpha_3^8 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

$$\alpha_3^9 = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$$

$$\alpha_3^{10} = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

$$\alpha_3^{11} = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

$$\alpha_3^{12} = \left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

Corollaire 3.2 Pour tout arbre N_i -aire parfait par niveaux T d'ordre n , on peut trouver une ψ_q -coloration rentable en $O(n)$.

Corollaire 3.3 Pour tout arbre N_i -aire parfait par niveaux T d'ordre n , on peut calculer $\psi_q(T)$ en $O(n)$.

Corollaire 3.4 Pour tout arbre N -aire parfait T d'ordre n , on peut trouver une ψ_q -coloration rentable en $O(n)$.

Corollaire 3.5 Pour tout arbre N -aire parfait T d'ordre n , on peut calculer $\psi_q(T)$ en $O(n)$.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, notre travail a consisté à concevoir un algorithme linéaire trouvant aussi bien une quorum-coloration de cardinalité maximum que le nombre de quorum-coloration de n'importe quel arbre enraciné dont les sommets de même profondeur ont même degré. Comme conséquence, cette algorithme s'applique sur les arbres N -aires parfaits puisque ces derniers ne sont qu'un cas particulier des précédents. Ainsi, ce résultat a permis de répondre affirmativement au problème ouvert récemment posé par SAHBI [25] (voir Problème 2, Section 2.5). Ceci étant, il subsiste encore trois questions intéressantes à étudier pour aller plus loin dans notre recherche. La première s'énonce comme suit :

Problème 3. Peut-on opérer des ajustements sur l'Algorithme 1 (l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.1) pour que ce dernier s'applique à n'importe quel arbre ?

Si la réponse au Problème 3 est affirmative, alors la conclusion qui en découlerait est plus généralement l'existence d'une ψ_q -coloration rentable pour n'importe quel arbre. En fait, ce qui change avec un arbre quelconque est le fait qu'à une profondeur donnée, certains sommets peuvent avoir des enfants tandis que d'autres peuvent n'en avoir aucun alors que dans un arbre parfait, tous sommet non pendant possède au moins un enfant. L'Algorithme 1 s'exécute d'ailleurs en considérant à chaque itération les enfants d'un sommet fixé ne satisfaisant pas la propriété de sommet quorum avec égalité.

Par ailleurs, on peut penser à généraliser quelque peu le travail effectué dans ce mémoire à des arbres parfaits dont les sommets frères ont le même degré ; nous les appellerons *arbres localement $N_{i,j}$ -aires parfaits*. Les enfants d'un sommets donné ne joueraient alors pas forcément le même rôle puisque les descendants de deux frères quelconques n'auraient pas forcément le même degré. En fait, les FIGURES 3.4 et 3.5 montrent que dans un arbre localement $N_{i,j}$ -aire parfait, l'Algorithme 2 (l'algorithme utilisé dans la preuve du Théorème 3.2) ne produit pas le même nombre de classes si l'on changeait le choix des sommets prenant la couleur du sommet père à certaines itérations. Ce qui nous amène à énoncer notre deuxième question :

Problème 4. Si l'on devait adapter l'Algorithme 2 à un arbre parfait dont les frères ont le même degré, comment effectuerait-on le choix des fils prenant la couleur du père (ou de manière équivalente de ceux qui ne la prennent pas) à l'étape 3 ?

L'étude des Problèmes 3 et 4 pourraient constituer deux étapes menant à la résolution du Problème 1.

Enfin, la troisième et dernière question est d'ordre combinatoire. En fait, il s'agit d'étudier la possibilité ou non de déterminer la valeur exacte du nombre de quorum-coloration d'un arbre N -aire complet et plus généralement d'un arbre N_i -aire parfait par niveaux. Pour une éventuelle approche inductive, on peut vérifier sans difficulté en utilisant la valeur exacte de la TABLE ?? du nombre de quorum-coloration d'un arbre binaire, que pour tout arbre binaire complet T d'ordre n et de hauteur h on a comme étape initiale de l'induction que

$$\psi_q(T) = \frac{2^{h+2}}{2^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor + 1} \right].$$

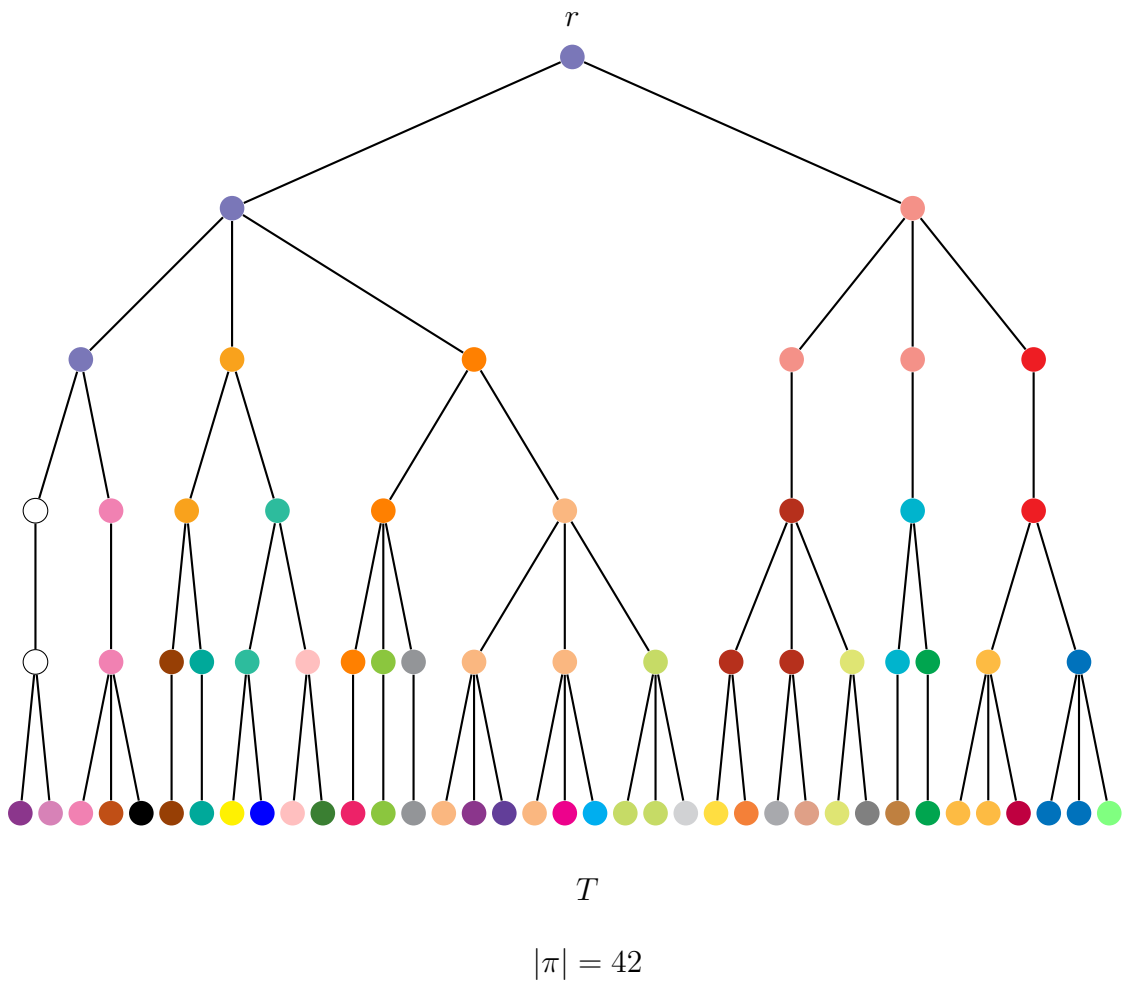


FIGURE 3.4 – Première quorum-coloration d'un arbre localement $N_{i,j}$ -aire parfait obtenue avec l'Algorithme 2

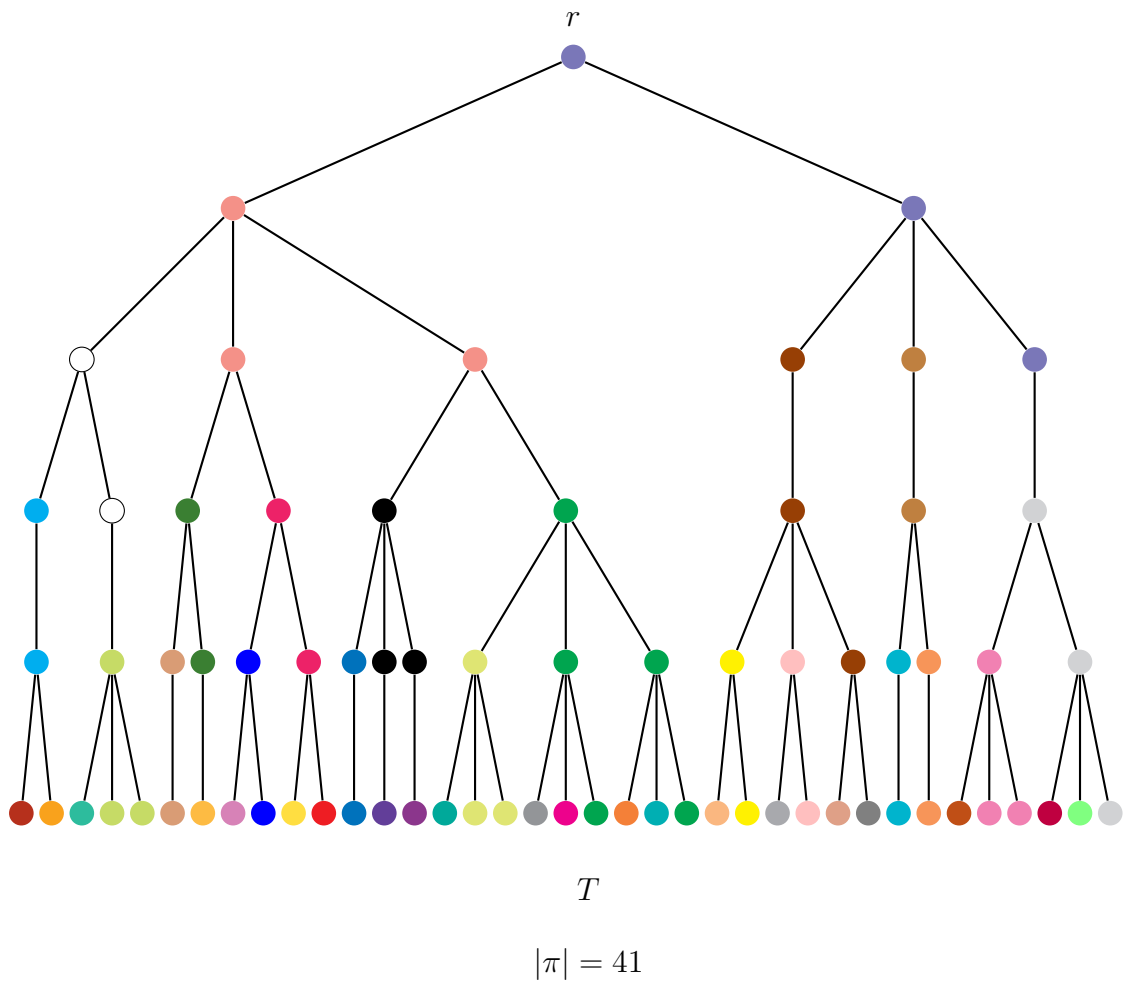


FIGURE 3.5 – Deuxième quorum-coloration de l'arbre localement $N_{i,j}$ -aire parfait de la FIGURE 3.4 obtenue avec l'Algorithme 2

REFERENCES

- [1] C. Bazgan, Zs. Tuza and D. Vanderpooten, Complexity and approximation of satisfactory partition problems, Proceedings of the 11th International Computing and Combinatorics Conference (COCOON), LNCS 3595 (2005), 829838.
- [2] Y. Belkina, A. Bennadji, *Sous-quorum-colorations de quelques classes darbres*, Mémoire de Master 2 en Mathématiques, Université de Blida 1, 2021.
- [3] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1970.
- [4] C. Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars, 3^{ème} édition, 1983.
- [5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph theory*, Springer, 2008.
- [6] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, *k-Domination and k-Independence in Graphs : A Survey*, Graph. Combin. 28, 1-55 (2012).
- [7] J. Cohen, *Théorie des graphes et algorithmes*, Miage, 2012.
- [8] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2017.
- [9] L. Eroh, R. Gera, *Alliance partition number in graphs*, Ars Combinatoria 103, 519-529 (2012).
- [10] H. Fernau, J.A. Rodriguez-Velazquez, *A survey on alliances and related parameters in graphs*, Electron. J. Graph Theory Appl. 2 (1), 70-86 (2014).
- [11] G. H. Fricke, L. M. Lawson, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *A note on Defensive Alliances in Graphs*, Bull. ICA 38, 37-41 (2003).
- [12] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, 1979.
- [13] M. Gondran, M. Minoux, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, 2009.
- [14] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Alliances and Related Domination Parameters*, dans Structures of Domination in Graphs 66, 47-77 (2021), Springer.

- [15] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Structures of Domination in Graphs*, Springer, 2021.
- [16] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [17] T.W. Haynes, J.A. Lachniet, *The alliance partition number of grid graphs*, AKCE Int. J. Graphs Combin. 4 (1), 51-59 (2007).
- [18] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, P. Kristiansen, *Alliances in graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 48, 157-177 (2004).
- [19] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, R. Laskar, H.M. Mulder, *Quorum colorings of graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb. 10 (1), 97-109 (2013).
- [20] M. Kubale, *Graph Colorings*, American Mathematical Society, 2004.
- [21] R.M.R. Lewis, *A Guide to Graph Colouring : Algorithms and Applications*, Springer International Publishing, 2016.
- [22] L. Lovász, M.D. Plummer, *Matching Theory*, North Holland 1986.
- [23] K. Ouazine, H. Slimani, A. Tari, *Alliances in graphs : Parameters, properties and applications-A survey*, AKCE Int. J. Graphs Comb. 15, 115-154 (2018).
- [24] C. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Springer, 1993.
- [25] R. Sahbi, *New sharp lower bound for the quorum coloring number of trees*, Inf. Process. Lett. 178, (2022) 106297.
- [26] R. Sahbi, *On the complexity of some quorum colorings problems of graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb. 17 (3), 784-787 (2020).
- [27] R. Sahbi, *Solutions to four open problems on quorum colorings of graphs*, RAIRO Oper. Res. 55 (4), (2021) 2385-2394.
- [28] R. Sahbi, *Sur la quorum-coloration des graphes*, Thèse de Doctorat d'état en Recherche Opérationnelle, Université Blida 1 (2021).
- [29] R. Sahbi, W. Boumalha, A. Issad, *Quorum coloring of maximum cardinality in linear time for a subclass of perfect trees*, soumis pour publication.

- [30] R. Sahbi, M. Chellali, *On some open problems concerning quorum colorings of graphs*, Discrete Applied Mathematics 247, 294-299 (2018).
- [31] K.H. Shafique, *Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering*, Ph. D. Thesis in Computer Science, University of Central Florida, (2004).
- [32] I.G. Yero, J.A. Rodríguez-Velázquez, *A survey on alliances in graphs : defensive alliances*, Util. Math. 105, 141-172 (2017).
- [33] I.G. Yero, S. Bermudo, J.A. Rodríguez-Velázquez, J.M. Sigarreta, *Partitioning a graph into defensive k -alliances*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27, 73-82 (2011).