

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة سعد دحلب البليدة 1
UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématique et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Réalisé par :

BEDRI MAROUA & CHERRATI HADJER

LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D'ADOMIAN

Devant Jury:

Mr. R. BOUDJEMAA

MCA / U. BLIDA 1

Président.

Mme. N. MESSAOUDI

MCB / U. BLIDA 1

Examinatrice.

Mme. L. BETROUNI

MCA / U. BLIDA 1

Promotrice.

Promotion 2021-2022

Remerciement

*Nous voudrions à remercier avant tout Allah de nous
donner le courage, la sagesse et la force pour
réaliser ce travail*

*Nos profonds remerciements pour notre promotrice
Mme Betrouni Latifa qui nous permis de profiter de
son inestimable expérience et qui nous aidée et
soutenue tout au long de ce travail*

*Nous voudrions à remercier les membres du jury
Vous nous faites un grand honneur en acceptant de
juger ce travail*

*Nous exprimons notre plus sincère gratitude à nos
professeurs pour leurs*

*Conseils et leurs rigueurs scientifiques ont
énormément contribué à nos formations tout au long
de ces cinq ans*

*Nous voudrions à exprimer nos plus grandes estime
et nos profondes affections à nos chers parents pour
leur encouragement, leur patience et leur grand
soutien durant toutes ces années d'études*

*Nous voudrions également à remercier tous nos
amies et camarades pour leur sincère amitié et leur
précieux soutien*

Dédicace

*Nous dédions ce modeste travail et nos profondes
gratitudes*

A nos chères mères .

*Vous avez supporter pour nous les soins et consentir
les efforts pour notre éducation aucune dédicace ne
saurait exprimer tout le respect et l'amour que nous
vous portons , vous nous avez toujours fait confiance
Veuillez trouver en ce travail la consolation et le
témoin de la patience .*

A nos chers pères .

*Malgré les grandes responsabilités qu'assument dans
vos travaux autant que pères de famille , vous avez
toujours été près de nous , pour nous écouter et de
nous soutenir , nous suivre et nous encourageons ,
puisse ce travail diminuer vos souffrances et vous
porter bonheur .*

A nos chères frères et sœurs .

*Nous vous réservons la plus grande partie de ce
travail , vous avez toujours été pour nous d'une aide
précieuse .*

Nous vous remercions pour tous les bienfaits .

*A tous nos amis et camarades de classe , puisse Allah
conserver notre amitié .*

*A tous les enseignants et les étudiants qui travaillent
dure pour développer leurs connaissances et pour
enrichir leur savoir scientifique et culturel*

A toute la promotion 2021/2022

A tous ceux qui ont eu et qui ont confiance en nous

RÉSUMÉ

Les équations intégrales interviennent dans de nombreux domaines comme la physique, la biologie, la médecine et l'économie. Il existe plusieurs types d'équations intégrales linéaires et non linéaires comme les équations intégrales de Volterra, les équations intégrales de Fredholm, les équations intégrales mixtes, les équations intégrales singulières, les équations intégro-différentielles. Il existe aussi plusieurs méthodes de résolution pour quelques types d'équations. Cependant, dans la plupart des cas, on ne peut pas trouver la solution exacte; donc, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques, pour l'obtention d'une solution approchée. Dans ce mémoire nous présentons la méthode de décomposition d'Adomian qui donne la solution sous forme d'une série. Le but est de comparer les résultats obtenus par cette méthode par rapport à la solution exacte lorsqu'elle existe.

Nous avons utilisé la programmation MATLAB pour les calculs numérique.

Mots clés: Équation intégrale non linéaire, Équation intégrale linéaire, Méthode de décomposition d'adomain, Équations intégrale de Volterra, Équation intégrale de Fredholm

ABSTRACT

Integral equations are involved in many fields such as physics, biology, medicine and economy. There are several types of linear and nonlinear integral equations such as the Volterra integrals equations, Fredholm integrals equations, mixed integral equations, singular integral equations, integro-differential equations. There are also many methods to solve some types of equations. However, in most types, the exact solution can not be found. So, it is necessary to use numerical methods to give the approximated solution. In this thesis we present the decomposition method of Adomian, which gives a solution in series form. The purpose is to compare the results with the exact solution if it exists. We used MATLAB programming for numerical calculations.

Keywords: Nonlinear integral equation, Linear integral equation, Adomain decomposition method, Volterra integral equation, Fredholm integral equation

Contents

1	GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES	7
1.1	Notions préliminaires	7
1.1.1	Fonctions mesurables	7
1.2	Définition d'une équation intégrale	8
1.3	Exemple D'équation Bratu	9
1.4	Classification des équations intégrales:	10
1.4.1	Équations intégrales linéaires de Fredholm	10
1.4.2	Équations intégrales linéaires de Volterra	11
1.4.3	Équations intégrales différentielles linéaires de Fredholm	12
1.4.4	Équations intégrales différentielles linéaires de Volterra	12
1.4.5	Équations intégrales mixtes	13
1.4.6	Équations intégrales Singulières	14
1.4.7	Équations intégrales non-linéaires de Fredholm	14
1.4.8	Équations intégrales non-linéaires de Volterra	15
1.5	Les types de noyaux	16
2	MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES	17
2.1	Théorème d'existence et d'unicité de solution pour des équations intégrales non linéaires de Fredholm	17
2.2	Théorème d'existence et d'unicité de solution pour des équations intégrales non-linéaires de Volterra	19
2.3	Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra	20
2.4	Les méthodes directes	22

2.4.1	Problèmes avec conditions initiales	22
2.4.2	Problèmes aux limites de second type	23
2.4.3	Équation intégrale à noyau dégénéré	24
2.5	La conversion d’une équation intégrale de Volterra de 1ère espèce à une équation de seconde espèce	26
2.5.1	Conversion d’une équation intégrale linéaire de Volterra	26
2.5.2	Conversion d’une équation intégrale non-linéaire de Volterra	27
2.6	Méthode de la résolvante	28
2.6.1	Équation intégrale de Volterra	28
2.6.2	Équation intégrale de Fredholm	30
2.7	Méthode de la solution en série	31
2.7.1	Cas d’une équation intégrale linéaire	31
2.7.2	Cas non-linéaire	34
2.8	Méthode des approximations successives	37
2.8.1	Cas linéaire	37
2.8.2	Cas non-linéaire	40
3	LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D’ADOMIAN	44
3.1	Présentation de la méthode d’Adomian	44
3.2	Calcul des polynôme d’Adomian	46
3.3	Application de la méthode d’Adomian aux équations intégro- différentielles linéaires	49
3.3.1	Équations intégro-différentielles de Volterra	49
3.4	Application de la méthode aux équations intégrales linéaires de Fredholm	51
3.5	Application de la méthode aux équations intégrales linéaires de Volterra	53
3.6	Application de la méthode d’Adomian aux équations différentielles ordinaire	56
3.7	Application de la méthode d’Adomian aux équations intégro-différentielles non-linéaires	57
3.7.1	Équation intégro-différentielle de Volterra	57
3.7.2	Équation intégro-différentielle de Fredholm	58

3.8	Application de la méthode aux équations intégrales non-linéaires de Fredholm	59
3.9	Application de la méthode aux équations intégrales non linéaires de Volterra	61
3.10	Application de la méthode d'Adomian aux équations intégrales de Volterra non-linéaires faiblement singulières	63
3.11	Méthode d'Adomian modifiée	64
3.11.1	La méthode d'Adomian redémarée	66
4	RÉSULTATS NUMÉRIQUES	68
4.1	Exemples	68
	Bibliography	76

INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années, le sujet des équations fonctionnelles occupe une place prépondérante dans l'attention de mathématiciens. Ces dernières années cette attention s'est portée sur un type particulier d'équations fonctionnelles: les équations intégrales. De telles équations se produisent largement dans divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique. Les équations intégrales offrent une technique puissante pour résoudre une variété de problèmes pratiques. [6].

Dans ce mémoire nous avons présenté une des méthodes approchées de résolution pour différents types d'équations intégrales, c'est la méthode décompositionnelle d'Adomian. Cette méthode a été développée en 1981 par le professeur George Adomian (un mathématicien américain d'origine arménienne) pour résoudre des équations intégrales et différentielles linéaires et non-linéaires. Cette méthode est basée sur la décomposition de la solution dans le cas linéaire, et de l'opérateur dans le cas non-linéaires en série. Nous avons donné aussi les nouvelles modifications sur cette méthode, qui ont contribué à minimiser les étapes de calcul, pour arriver plus rapidement aux solutions approchées ou bien à la solution exacte si elle existe, il s'agit de la méthode modifiée d'Adomian et la méthode redémarrée d'Adomian. Nous présentons dans ce mémoire des exemples qui montrent l'efficacité de ces modifications.

Le mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions préliminaires, ainsi que la définition d'une équation intégrale. Ensuite, nous avons cité les différentes classes d'équations intégrales qui peuvent être classées en deux grandes catégories: les équations intégrales linéaires et les équations intégrales non-linéaires. En fait, les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. A ces deux autres types, s'ajoutent les équations intégrales différentielles, les équations intégrales singulières, et les équations mixtes.

Dans le deuxième chapitre nous présentons d'abord un théorème d'existence et d'unicité pour les équations intégrales non-linéaires. Ensuite, la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles. De plus, nous présentons aussi la conversion d'une équation intégrale de première espèce à une équation intégrale de deuxième espèce. Le but de cette conversion est de faciliter l'application des méthodes qui ne peuvent pas être appliquées sur les équations intégrales de première espèce. Enfin, nous présentons quelques méthodes élémentaires, à savoir la méthode de résolution directe, la méthode de la résolvante pour le cas linéaire, la méthode de solution en série, la méthode des approximations successives.

Nous avons consacré le quatrième chapitre à l'étude de la méthode décompositionnelle d'Adomian, avec ses étapes en détails, ainsi que le principe de calcul des polynômes d'Adomian et leurs applications sur différents types d'équations intégrales et différentielles. Illustratifs sont également présentés des exemples.

Le dernier chapitre contient une étude comparative entre les résultats obtenus par la méthode décompositionnelle d'Adomian et la solution exacte. Les exemples de ce chapitre sont traités par le logiciel Matlab.

CHAPTER

1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Dans ce chapitre, on introduit quelques définitions et notations qui seront utilisés dans ce qui suit. On s'intéresse à l'étude de quelques équations intégrales linéaires et non linéaires et nous avons donné leur classification, ensuite nous avons cité les différents types de noyaux.

1.1 Notions préliminaires

1.1.1 Fonctions mesurables

La mesurabilité des fonctions réelles est une propriété faible, au sens où elle constitue une exigence minimale, toujours vérifiée en mathématiques appliquées[20]

Définition 1.1. *une classe τ des parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ – algèbre si elle vérifie les trois axiomes suivants:*

(i) $E \in \tau$

(ii) pour tout $A \subseteq E, A \in \tau \iff A^c \in \tau$

(iii) Si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de τ , alors $\bigcup_n A_n \in \tau$ on dit alors que (E, τ) est un espace mesurable et les éléments de τ sont appelés les ensembles mesurables.

Définition 1.2. La fonction indicatrice du sous-ensemble A de l'espace E , notée I_A , est définie par :

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la plus simple des fonctions mesurables.

1.2 Définition d'une équation intégrale

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations \int . [10],[15]

En général φ est l'inconnue de l'équation de la forme:

$$\int_E k(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad (1.2.1)$$

où $x \subseteq E$ telle que E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E , λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et K une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (1.2.1)

On peut classifier les équations intégrales comme suit:

i. On prend

Si $k(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)\varphi(t)$, alors l'équation (1.2.1) devient linéaire.

Si $k(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)F(\varphi(t))$, alors l'équation intégrale (1.2.1) devient non linéaire, avec F c'est une fonction non-linéaire.

ii. Le type le plus général d'une équation intégrale est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, \varphi(t))dt, \quad (1.2.2)$$

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation :

1. Si $h(x) = 0$ l'équation (1.2.2) s'écrit:

$$f(x) + \lambda \int_E k(x, t, \varphi(t))dt = 0,$$

et s'appelle équation intégrale de première espèce.

2. Si $h(x) = c$ (où c est une constante non nulle), l'équation (1.2.2) s'écrit:

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, \varphi(t))dt,$$

et s'appelle équation intégrale de second espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.2.2) est appelée équation intégrale de troisième espèce.

1.3 Exemple D'équation Bratu

Le problème standard de Bratu [19] a été utilisé pour modéliser un problème de combustion dans plateforme numérique. Le modèle de Bratu apparaît dans un certain nombre d'applications telles que l'allumage du combustible de la théorie de la combustion thermique et dans le modèle Chandrasekhar de l'expansion de l'univers. Un important travail de recherche a été consacré à l'étude du Problème de Bratu. Plusieurs techniques numériques, telles que la méthode de différence finie, approximation par éléments finis, méthode des résidus pondérés, ont été mis en œuvre indépendamment pour gérer le Modèle numérique de Bratu.

Considérons le problème aux limites de Bratu dans Les coordonnées planes unidimensionnelles données sous la forme:

$$\begin{cases} \varphi^2(x) + \lambda e^{\varphi(x)} = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où la solution exacte de ce problème est:

$$\varphi^*(x) = 2 \ln \left(C \sec \frac{C(2x-1)}{4} \right) - \ln(2),$$

Veillez consulter la référence[19].

1.4 Classification des équations intégrales:

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et les équations intégrales non-linéaires. [16],[13],[2],[15]

On considère dans ce qui suit l'espace mesurable $E = [a(x); b(x)]$. L'équation (1.2.2) devient:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{b(x)}^{a(x)} k(x, t, \varphi(t))dt, \quad (1.4.1)$$

deux cas seront considérés dans ce qui suit :

1. $a(x) = a, \quad b(x) = b,$

telle que a et b sont des constantes , et l'équation (1.4.1) est appelée équation de Fredholm.

2. $a(x) = a, \quad b(x) = x,$

telle que x est un variable dans l'espace mesurable E , l'équation (1.4.1) est appelée équation de volterra.

1.4.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt,$$

et de première espèce de la forme:

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt,$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles telle que: $x, t \in [a, b]$, λ un paramètre non nul réel ou complexe.

Si $f(x) = 0$, l'équation est dite homogène et s'écrit de la forme suivante :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt,$$

Exemple 1.1. Les équations suivantes représentent des équations intégrales de Fredholm:

$$\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)dt,$$

cette équation est de seconde espèce et admet une solution $\varphi(x) = 1$.

$$x + 1 - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - t)\varphi(t)dt,$$

cette équation est de première espèce.

1.4.2 Équations intégrales linéaires de Volterra

On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt,$$

où $\varphi(x)$ est fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul réel ou complexe.

si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt,$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, a une inconnue $\varphi(x)$ de la forme:

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt,$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Exemple 1.2. On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce:

$$\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)dt,$$

qui admet une solution donnée par $\varphi(x) = xe^x$. De même pour l'équation intégrale de Volterra de première espèce:

$$x^3 = \int_0^x (x - t)^2\varphi(t)dt,$$

qui admet une solution donnée par $\varphi(x) = 3$.

Remarque 1.1. *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition*

$$k(x, t) = 0 \quad \text{pour } x < t$$

1.4.3 Équations intégro-différentielles linéaire de Fredholm

L'équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm apparait sous la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt,$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la n -ième dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 1.3. *Voici deux exemples des équations intégro-différentielles de Fredholm:*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi(t)dt, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi(t)dt, \\ \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = 1. \end{cases}$$

1.4.4 Équations intégro-différentielles linéaires de Volterra

L'équation intégro-différentielle linéaire de Volterra apparait dans la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt,$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la n ème dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 1.4. *Les exemples suivants pour les équations intégro-différentielle de Volterra:*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x t\varphi(t)dt, \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x t\varphi(t)dt, \\ \varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = 1. \end{cases}$$

1.4.5 Équations intégrales mixtes

Nous avons classifié les équations intégrales mixtes comme suite:

1.4.5.1 Équation intégrale de Fredholm-Volterra

On appelle équation de Fredholm-Volterra une équation de la forme pour $t \in [0, T], T < \infty$

$$h(x)\varphi(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y, t)dy + \lambda \int_0^t F(t, s)\varphi(x, s)ds = f(x, t),$$

La fonction h détermine le type de l'équation intégrale.

1.4.5.2 Équation intégrale de Volterra-Fredholm

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme pour $t \in [0, T], T < \infty$

$$h(x)\varphi(x, t) + \int_0^t \int_a^b K(x, t)F(t, s)\varphi(y, s)dyds = f(x, t),$$

1.4.5.3 Équations intégro-différentielles de Volterra -Fredholm

Les équations intégro-différentielles apparaissent sous les deux formes suivantes:

$$\varphi^n(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt.$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la nième dérivé de $\varphi(x)$.

Dans le cas ou φ depend de deux variables on peut avoir des équations du type pour $(x, t) \subseteq \Omega \times [0, \tau]$

$$\varphi^n(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, \varphi(\xi, \tau))d\xi d\tau,$$

où $f(x, t)$ et $F(x, t, \xi, \tau, \varphi(\xi, \tau))$ sont des fonctions analytiques dans $D = \Omega \times [0, \tau]$ et Ω est un sous ensemble fermé de R^n , $n = 1, 2, 3$ $\varphi(x)$ et $\varphi(x, t)$ sont des fonctions inconnues. Voici deux exemple qui illustrent respectivement une équation intgro-différentielles de Volterra - Fredholm.

Exemple 1.5.

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - \int_0^1 t\varphi(t)dt, & 0 \leq x, t \leq 1 \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau, & 0 \leq x, t \leq 1 \\ \varphi(0, t) = t^3. \end{cases}$$

1.4.6 Équations intégrales Singulières

Les équations intégrales de Volterra du première espèce et seconde espèce respectivement:

$$f(x) = \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)\varphi(t)dt,$$

et

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)\varphi(x)dt,$$

sont dites singulières si l'une des limites d'intégration $g(x)$, $h(x)$ ou les deux sont infinis. De plus, les deux équations précédentes sont dites singulières si le noyau $K(x, t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

$$f(x) = \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a}\varphi(t)dt, \quad 0 < a < 1$$

où de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a}\varphi(t)dt, \quad 0 < a < 1$$

Exemple 1.6. Voici un exemple d'une équation intégrale singulière d'Abel où l'on a la valeur $a = \frac{1}{3}$:

$$\varphi(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\varphi(t)dt,$$

1.4.7 Équations intégrales non-linéaires de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt = 0,$$

où $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul réel ou complexe, $F(\varphi(t))$ est une fonction non linéaire de $\varphi(t)$.

Une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est de la forme:

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

où c est une constante non nulle et troisième espèce de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

Exemple 1.7. On peut prendre comme exemple l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm de seconde espèce:

$$\varphi(x) = \tan(x) - \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{1}{1 + \varphi(t)^2} dt,$$

qui admet comme solution la fonction $\varphi(x) = \tan(x)$.

1.4.8 Équations intégrales non-linéaire de Volterra

On appelle une équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

où $\varphi(x)$ est fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel, $F(\varphi(t))$ est une fonction non linéaire de $\varphi(t)$.

L'équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce est exprimée sous la forme:

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

Exemple 1.8. On choisit comme exemple l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce:

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x\varphi^3(t)dt,$$

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce:

$$\int_0^x \varphi^2(t)dt = 1.$$

1.5 Les types de noyaux

La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale. On peut distinguer les types de noyaux suivants: [7]

1. **Noyau symétrique:** Un noyau $k(x, t)$ est symétrique (ou complexe symétrique) si

$$k(x, t) = \bar{k}(t, x).$$

où la barre désigne le complexe conjugué. Un noyau réel $k(x, t)$ est symétrique si

$$k(x, t) = k(t, x).$$

2. **Noyau séparable ou dégénéré:** Un noyau $k(x, t)$ est dit séparable ou dégénéré s'il peut être exprimé comme la somme d'un nombre fini de termes, dont chacun est le produit d'une fonction de x uniquement et d'une fonction de t uniquement, c'est-à-dire

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t).$$

3. **Noyau non dégénéré:** Un noyau $k(x, t)$ est dit non dégénéré s'il ne peut être séparés en fonction de x et en fonction de t . Par exemple e^{xt} , $\sqrt{x+t}$ sont les noyaux non dégénérés.

CHAPTER

2

MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

Dans ce chapitre, Nous avons présenté d'abord les théorèmes que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés et la liaison entre les équations intégrales et les équations différentielles. Ensuite nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques classiques et élémentaires.

2.1 Théorème d'existence et d'unicité de solution pour des équations intégrales non linéaires de Fredholm

Le théorème du point fixe de Banach peut être utilisé pour prouver le résultat suivant[14]:

Théorème 2.1. *On suppose que $k(x,t,z)$ est définie et continue sur l'ensemble $\Phi(a,b) \times R$ et qu'elle satisfait la condition de Lipschitz suivant:*

$$|k(x,t,z_1) - k(x,t,z_2)| < C|z_1 - z_2|.$$

telle que C est un constant non nul. On suppose aussi que f est continue $f \in [a, b]$ alors l'équation intégrale de Fredholm non linéaire

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt,$$

a une solution unique sur $[a, b]$ pour tout

$$|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}.$$

Preuve:

On considère $C[a, b]$ l'espace des fonctions à valeurs réelles qui sont continues sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la distance

$$d(u, v) = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)|.$$

Il peut être démontré que l'opérateur

$$F : C[a, b] \rightarrow C[a, b],$$

définie par

$$F(u) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt,$$

est une contraction pour les valeurs restrictes indiquées dans le théorème.

pour tout $u, v \in [a, b]$, On a pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |Fu(x) - Fv(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^b k(x, t, u(t)) - k(x, t, v(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| C(b-a) d(u, v), \end{aligned}$$

donc par passage on obtient

$$d(Fu, Fv) \leq |\lambda| C(b-a) d(u, v).$$

si $\alpha = |\lambda| C(b-a) < 1$

Alors F est une contraction de $C[a, b]$.

2.2 Théorème d'existence et d'unicité de solution pour des équations intégrales non-linéaires de Volterra

On peut utiliser le théorème du point fixe de Banach dans le cas d'équation de Volterra sous restriction sur λ .

Théorème 2.2. [14] On suppose que $k(x, t, z)$ est définie et continue sur l'ensemble $\Gamma(a, b) \times \mathbb{R}$ et satisfait la condition de Lipschitz suivante:

$$|k(x, t, z_1) - k(x, t, z_2)| < C|z_1 - z_2|.$$

On suppose aussi que f est continue $f \in [a, b]$ alors l'équation intégrale de Volterra non linéaire

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt,$$

a une solution unique sur $[a, b]$ pour toute valeur λ où $a \leq x \leq b$

Preuve: On considère $C[a, b]$ l'espace des fonctions à valeurs réelles qui sont continue sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la distance

$$d(u, v) = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)|.$$

s'il peut être démontré que l'opérateur

$$V : C[a, b] \rightarrow C[a, b],$$

définie par

$$V(u) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt,$$

On remarque que $u, v \in [a, b]$, On a pour tout $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |Vu(x) - Vv(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^x k(x, t, u(t)) - k(x, t, v(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| C(b-a) d(u, v), \end{aligned}$$

On compose encore une fois et on obtient

$$\begin{aligned} |V^2u(x) - V^2v(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^x k(x, t, Vu(t)) - k(x, t, Vv(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^x |Vu(t) - Vv(t)| dt \\ &\leq |\lambda|^2 C^2 \frac{(b-a)^2}{2!} d(u, v). \end{aligned}$$

après n itérations. On obtient

$$|V^n u(x) - V^n v(x)| \leq |\lambda|^n C^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(u, v),$$

donc

$$d(V^n u - V^n v) \leq |\lambda|^n C^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(u, v).$$

pour n assez grand

$$\frac{|\lambda|^n C^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

donc V^n est une contraction.

2.3 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire [13]

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y = F(x), \quad (2.3.1)$$

à coefficients continus $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a^2(x) y = F(x), \quad (2.3.2)$$

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1. \quad (2.3.3)$$

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x), \quad (2.3.4)$$

D'où, vu les conditions initiales (2.3.3), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + c_1x + c_0. \quad (2.3.5)$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \cdots \int_{x_0}^x}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz. \quad (2.3.6)$$

compte tenu de (2.3.4) et (2.3.5) mettons l'équation différentielle (2.3.2) sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + c_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + c_1xa_2(x) + c_0a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x), \quad (2.3.7)$$

En posant

$$k(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)],$$

$$f(x) = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x),$$

nous ramenons l'équation (2.3.7) à la forme suivante:

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt + f(x).$$

c'est à dire nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Exemple 2.1. Soit l'équation différentielle

$$y'' - y' \sin x + e^x y = x,$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Posons

$$y'' = \varphi(x).$$

alors

$$y' = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0)y' = \int_0^x \varphi(t)dt + 1.$$

$$y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + y'(0)x + y(0)y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + x + 1.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) - \sin x \left[\int_0^x \varphi(t)dt + 1 \right] + e^x \left[\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + x + 1 \right] = x.$$

c'est à dire

$$\varphi(x) = x - \sin x + e^x(x-1) + \int_0^x [\sin x - e^x(x-t)]\varphi(t)dt.$$

2.4 Les méthodes directes

2.4.1 Problèmes avec conditions initiales

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant [3]:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = g(x, \varphi(x)), & 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = \varphi_0, & \varphi'(0) = \varphi'_0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

L'intégration des deux cotés de l'équation différentielle associée de 0 à x, donne

$$\varphi'(x) = \varphi'_0 + \int_0^x g(t, \varphi(t))dt$$

En intégrant une seconde fois,

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi'_0 x + \int_0^x \int_0^s g(t, \varphi(t))dtds$$

En utilisant la relation (2.3.6) on obtient

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi'_0 x + \int_0^x (x-t)g(t, \varphi(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.4.2)$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de second espèce.

Exemple 2.2. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \varphi''(x) + e^{-2x}\varphi^3(x) = 2e^x, \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1, \end{cases}$$

Après l'intégration des deux cotés de l'équation de notre exemple :

$$\varphi'(x) = \varphi'(0) + 2 \int_0^x e^t dt + \int_0^x e^{-2t} \varphi^3(t) dt,$$

Après une seconde intégration, on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(0) - t|_0^x + 2e^{-2t}|_0^x + \int_0^x \int_0^x (x-t)e^{-2t} \varphi^3(t) dt,$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = 2e^{-x} - x - 1 + \int_0^x (x-t)e^{-2t} \varphi^3(t) dt.$$

2.4.2 Problèmes aux limites de second type

On considère le problème de Dirichlet suivant [3]:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = g(x, \varphi(x)), & 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = \varphi_0, \varphi(1) = \varphi_1, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

De la même manière, on intègre les deux cotés entre 0 à x , on obtient

$$\varphi'(x) = c + \int_0^x g(t, \varphi(t)) dt$$

et

$$\varphi(x) = \varphi_0 + cx + \int_0^x (x-t)g(t, \varphi(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.4.4)$$

Pour déterminer la constante c , on prend $x = 1$ et on utilise la condition $\varphi(1) = \varphi_1$, ce qui donne

$$c = \varphi_1 - \varphi_0 - \int_0^1 (1-t)g(t, \varphi(t)) dt$$

Ainsi, l'équation (2.4.4) devient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)x - \int_0^x (x-t)g(t, \varphi(t)) dt + x \int_0^1 (1-t)g(t, \varphi(t)) dt, \\ &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)x - \int_0^x t(1-x)g(t, \varphi(t)) dt + \int_x^1 x(1-t)g(t, \varphi(t)) dt, \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$\varphi(x) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)x - \int_0^1 k(x, t)g(t, \varphi(t)) dt, \quad (2.4.5)$$

ou

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x) & t \leq x \\ x(1-t) & t \geq x \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Exemple 2.3. Soit le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = K \sinh(K\varphi(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \end{cases} \quad (2.4.7)$$

On intègre deux fois l'équation (2.4.7) entre 0 à x , on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(1) - \varphi(0))x - \int_0^1 k(x, t)K \sinh(K\varphi(t))dt,$$

avec

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x) & t \leq x \\ x(1-t) & t \geq x \end{cases}$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = x + K(x-1) \int_0^x t \sinh(K\varphi(t))dt + Kx \int_x^1 (1-t) \sinh(K\varphi(t))dt.$$

2.4.3 Équation intégrale à noyau dégénéré

Le noyau $k(x, t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produit de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, i.e. il est de la forme suivante [13]

$$k(x, t) = \sum_{k=0}^n a_k(x)b_k(t), \quad (2.4.8)$$

Les fonctions $a_k(x), b_k(t)$, ($k=1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes.

2.4.3.1 Méthode de noyau dégénéré

Soit l'équation de Fredholm à noyau dégénéré suivant:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=0}^n a_n(x)b_n(t) \right] \varphi(t)dt = f(x), \quad (2.4.9)$$

pour trouver les C_k , nous avons donc un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & \cdots & -2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix}$$

si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système admet une solution unique C_1, C_2, \dots, C_n obtenue moyennant les formules de Cramer

$$G_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \cdots & -\lambda_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+2} & \cdots & -2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \cdots & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix} \quad (2.4.14)$$

avec $k = 1, \dots, n$ L'équation intégrale (2.4.9) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définis par l'égalité:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x),$$

avec les coefficient $C_k, k = 1, \dots, n$ donnée par les formules (2.4.14).

2.5 La conversion d'une équation intégrale de Volterra de 1ère espèce à une équation de seconde espèce

2.5.1 Conversion d'une équation intégrale linéaire de Volterra

La forme générale d'une équation intégrale de 1ère espèce est donnée par [2]:

$$f(x) = \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt,$$

Où f et k sont des fonctions réelles données et $\varphi(x)$ est la fonction à déterminer. Dans le cas où f et k sont dérivables et $k(x, x) \neq 0$ on peut dériver l'équation pour la convertir en une équation de deuxième espèce et la résoudre par la méthode de notre choix. En utilisant

Leibnitz

$$f'(x) = k(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{dk}{dx}(x, t)\varphi(t)dt,$$

dans le cas où $k(x, x) \neq 0$ on divise pour avoir

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x, x)} - \int_0^x \frac{dk}{dx}(x, t) \frac{1}{k(x, x)} \varphi(t)dt,$$

$$\varphi(x) = g'(x) + \int_0^x G(x, t)\varphi(t)dt,$$

dans le cas $k(x, x) = 0$ on peut dériver deux fois.

Exemple 2.4. *Considérons l'équation intégrale de Volterra de 1ère espèce :*

$$x \sinh x = 2 \int_0^x \sinh(x-t)\varphi(t)dt,$$

Après la dérivation des deux cotés de cette dernière, on obtient :

$$\sinh x + x \cosh x = 2 \int_0^x \cosh(x-t)\varphi(t)dt,$$

comme $\sinh(0) = 0$ on dérive une seconde fois

$$\cosh x + \cosh x + x \sinh x = 2 \cosh(0)\varphi(x) + 2 \int_0^x \sinh(x-t)\varphi(t)dt,$$

donc

$$\varphi(x) = \cosh x + \frac{1}{2}x \sinh x - \int_0^x \sinh(x-t)\varphi(t)dt.$$

2.5.2 Conversion d'une équation intégrale non-linéaire de Volterra

Dans le cas d'une équation du type[2]:

$$f(x) = \int_0^x k(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

où f, k et F sont des fonctions à valeurs réelles et F admet un , on pose

$$F\varphi(t) = v(t)$$

Après la substitution de cette dernière dans l'équation de Volterra, on obtient

$$f(x) = \int_0^x k(x, t)v(t)dt,$$

on peut résoudre l'équation par rapport à v et on obtient après $\varphi(x)$ par la formule

$$\varphi(t) = F^{-1}(v(t))$$

Exemple 2.5. *Considérons l'équation non-linéaire de Volterra de 1ère espèce:*

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\sin 2x = \int_0^x (x-t)\varphi^2(t)dt,$$

on pose

$$\varphi^2(t) = v(t).$$

l'équation de notre exemple devient

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\sin 2x = \int_0^x (x-t)v(t)dt,$$

par dérivation (Leibnitz) on trouve:

$$-\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\cos 2x = \int_0^x v(t)dt,$$

on dérive une seconde fois

$$1 - \sin 2x = v(x),$$

comme

$$\begin{aligned} 1 - \sin 2x &= (\cos x - \sin x)^2, \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x), \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(x) = \pm(\cos(x) - \sin(x)).$$

2.6 Méthode de la résolvante

2.6.1 Équation intégrale de Volterra

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce suivante [17],[13]:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{2.6.1}$$

Supposons que $k(x, t)$ est continue sur $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq x$ et encore $f(x)$ continue sur $[a, b]$, la solution de l'équation (2.6.1) est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) \varphi(t) dt, \quad (2.6.2)$$

$R(x, t, \lambda)$ s'appelle la résolvante de l'équation de Volterra de seconde espèce (2.6.2) nous cherchons la résolvante $R(x, t, \lambda)$. Pour cela nous cherchons la solution de l'équation (2.6.2) sous la forme d'une série entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \lambda^n \quad (2.6.3)$$

portons formellement cette série dans (2.6.2), il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \lambda^n = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \lambda^n dt,$$

en procédant par identification nous obtenons

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_1(x) &= \int_a^x k(x, t) y_0(t) dt = \int_a^x k(x, t) f(t) dt \\ y_2(x) &= \int_a^x k(x, t) y_1(t) dt = \int_a^x k_2(x, t) f(t) dt \\ y_3(x) &= \int_a^x k(x, t) y_2(t) dt = \int_a^x k_3(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

on établit de façon analogue qu'en générale on a

$$y_n(x) = \int_a^x k_n(x, t) f(t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6.4)$$

Ici on a

$$k_n(x, t) = \int_t^x k(x, z) k_{n-1}(z, t) dz, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.6.5)$$

et on a les relations $k_1(x, t) = k(x, t)$ et $k_n(x, t) = 0$ si $t > x$. Les fonctions $k_n(x, t)$ définis par (2.6.4) s'appellent noyaux itérés, les noyaux ont les propriétés suivantes

$$k_n(x, t) = \int_t^x k_m(x, s) k_{n-m}(s, t) ds \quad (2.6.6)$$

compte tenu de (2.6.4) et (2.6.5) l'égalité (2.6.3) peut s'écrire:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_a^x k_v(x, t) f(t) dt,$$

Ainsi d'après (2.6.2) la résolvante est définie par la série

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v k_{v+1}(x, t).$$

2.6.2 Équation intégrale de Fredholm

Soit l'équation intégrale de Fredholm [17],[13]

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (2.6.7)$$

On pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \lambda^n, \quad (2.6.8)$$

Avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \int_a^b k(x, t) f(t) dt, \\ \Psi_2(x) &= \int_a^b k(x, t) \Psi_1(x) dt = \int_a^b k_2(x, t) f(t) dt, \\ \Psi_3(x) &= \int_a^b k(x, t) \Psi_2(x) dt = \int_a^b k_3(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

ici on a

$$k_n(x, t) = \int_a^b k(x, z) k_{n-1}(z, t) dz, \quad (2.6.9)$$

Avec

$$k_1(x, t) = k(x, t)$$

on a aussi

$$k_n(x, t) = \int_t^x k_m(x, s) k_{n-m}(s, t) ds. \quad (2.6.10)$$

La résolvante de l'équation (2.6.7) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x, t) \lambda^{n-1}$$

cette série est la série de Neumann du noyau $k(x, t)$. Elle est convergente si

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

$$M = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt}$$

Exemple 2.6. On cherche les itérés du noyau $k(x, t) = e^{(x-t)}$ par l'utilisation des formules (2.7.21) on obtient

$$\begin{aligned} k_1(x, t) &= k(x, t) = e^{(x-t)} \\ k_2(x, t) &= \int_t^x k(x, z) k_1(z, t) = (x-t) e^{(x-t)} \\ k_3(x, t) &= \int_t^x k(x, z) k_2(z, t) = \frac{(x-t)^2}{2!} e^{(x-t)} \\ k_4(x, t) &= \int_t^x k(x, z) k_3(z, t) = \frac{(x-t)^3}{3!} e^{(x-t)} \\ &\vdots \\ k_{n+1}(x, t) &= \int_t^x k(x, z) k_n(z, t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^{(x-t)} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{(x-t)} \frac{(x-t)^n}{n!} \\ &= e^{(\lambda+1)(x-t)}. \end{aligned}$$

2.7 Méthode de la solution en série

2.7.1 Cas d'une équation intégrale linéaire

Une fonction réelle $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tout ordres telles que la série de Taylor en tout point b de son domaine [2]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k, \quad (2.7.1)$$

qui converge vers $f(x)$ dans φ_n voisinage de b pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme suit:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.7.2)$$

où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente.

2.7.1.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Dans cette section nous présenterons une méthode utile, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrales de Volterra. Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2.7.3)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor en (2.7.2). La substitution de (2.7.2) dans les deux cotés de (2.7.3) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (2.7.4)$$

ou pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt, \quad (2.7.5)$$

ou $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$, L'équation intégrale (2.7.3) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.7.4) ou (2.7.5) ou au lieu d'intégrer la fonction inconnue $\varphi(x)$, les termes de la forme t^n , $n \geq 0$ seront intégrés. Nous intégrons d'abord le membre de droite de l'intégrale dans (2.7.4) ou (2.7.5), et collectons les coefficients de puissances similaires de x . Nous assimilons ensuite les coefficients de puissances similaires de x des deux cotés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence dans a_j , $j \geq 0$, la solution en série suit immédiatement la substitution des coefficients dérivés dans (2.7.2). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. On résout l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de solution en série.

Exemple 2.7. Considérez l'équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce:

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (x - t) \varphi(t) dt, \quad (2.7.6)$$

En substituant $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.7.7)$$

dans les deux côtés de l'équation de (2.7.6) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \right) dt,$$

L'évaluation du côté droit conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n x^{n+2},$$

qui peut être réécrit comme

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} a_{n-2} x^n, \quad (2.7.8)$$

ou équivalent

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{12} a_2 x^4 + \dots, \quad (2.7.9)$$

L'équation des coefficients de même puissances de x des deux côtés de (2.7.8) donne la

$$\text{relation réccurente} \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Ce résultat peut être combiné pour obtenir

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)!}, \quad n \geq 0 \quad (2.7.10)$$

La substitution de ce résultat dans (2.7.7), donne la solution en série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

qui converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = \sinh x.$$

Il est intéressant de souligner que ce résultat peut également être obtenu en assimilant les

$$\text{coefficients des mêmes termes des deux côtés de (2.7.9), où l'on trouve } \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = \frac{1}{3!}, \\ a_4 = 0. \end{array} \right.$$

Ceci conduit au même résultat obtenu précédemment en résolvant la relation de récurrence.

2.7.1.2 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ des équations intégrales de Fredholm [2]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.7.11)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (2.7.2), où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente. Substituer (2.7.2) dans les deux côtés de (2.7.11)

$$\sum_{n=0}^n a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (2.7.12)$$

pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)dt, \quad (2.7.13)$$

puis nous suivons les mêmes étapes que pour la méthode de Volterra de seconde espèce.

2.7.2 Cas non-linéaire

2.7.2.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)F(\varphi(t))dt, \quad (2.7.14)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.7.2), où les coefficients sont déterminés de manière récurrente. La substitution de (2.7.2) des deux côtés

de (2.7.14) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t)F(a_0 + a_1t + a_2t^2)dt, \quad (2.7.15)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$. L'équation intégrale (2.7.14) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (2.7.15) ou en intégrant le terme non linéaire $F(\varphi(x))$, les termes de la forme t^n , $n \geq 0$ seront intégrés.

Nous intégrons d'abord le membre de droit de l'intégrale dans (2.7.14) ou (2.7.15) et nous collectons les coefficients de x . Nous assimilons ensuite les coefficients des mêmes puissances de x des deux cotés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence dans a_j , $j \geq 0$. La résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients a_j , $j \geq 0$. Après avoir déterminé les coefficients a_j , $j \geq 0$ la solution en série suit immédiatement la substitution des coefficients dérivés dans (2.7.2) la solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. (Voir la référence [2]).

Exemple 2.8. Nous considérons l'équation intégrale non-linéaire de Volterra:

$$\varphi(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)\varphi^2(t)dt, \quad (2.7.16)$$

La substitution de la série (2.7.7) dans les deux cotés de (2.7.16) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)^2 dt, \quad (2.7.17)$$

En intégrant l'intégrale du côté droit de (2.7.17), en utilisant la méthode de Taylor série de $\sin x$, $\cos x$ et $\sin 2x$, et égalant les coefficients de puissances similaires de x on trouve

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 + \dots = 1 + x + \frac{1}{2}(a_0^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}(a_0a_1 - 1)x^3 + \frac{1}{12}(a_1^2 + 2a_0a_2 - 1)x^4 + \dots,$$

L'équation des coefficients de puissances similaires de x des deux cotés donne

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 1 + x.$$

2.7.2.2 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation de Fredholm [2]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t)F(\varphi(t))dt, \quad (2.7.18)$$

existe et est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.7.2) où les coefficients seront déterminés de façon récurrente, la substitution (2.7.2) des deux cotés de (2.7.18) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_0^1 k(x, t)F\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt, \quad (2.7.19)$$

pour simplifier

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^1 k(x, t)F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)dt, \quad (2.7.20)$$

puis nous suivons les mêmes étapes que pour la méthode de Volterra de second espèce dans le cas non linéaire.

Exemple 2.9. Nous considérons l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)\varphi^2(t)dt. \quad (2.7.21)$$

La substitution de la série (2.7.12) dans l'équation de l'exemple donne:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)\varphi^2(t)dt.$$

en procédant comme avant on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = \frac{1}{2!}, \\ a_3 = \frac{1}{3!}, \\ a_4 = \frac{1}{4!}, \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{n!} \end{array} \right.$$

cela donne la solution sous forme de série

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

Donc, la solution exacte est donnée par:

$$\varphi(x) = e^x$$

2.8 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives, également appelée méthode de l'itération de Picard, fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeurs initiales ou des équations intégrales. [9].

2.8.1 Cas linéaire

2.8.1.1 Équation intégrale linéaire de Volterra

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.8.1)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $f(x)$ est une fonction donnée, λ est un paramètre réel ou complexe et $K(x, t)$ est un noyau.

La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 0, \quad (2.8.2)$$

où l'approximation en zéro $\varphi_0(x)$ peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $\varphi_0(x)$, la plupart du temps nous choisissons 0, 1, x pour $\varphi_0(x)$, et en utilisant (2.8.3), plusieurs approximations successives φ_k , $k > 1$ seront déterminées comme:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \int_0^x k(x, t)\varphi_0(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \int_0^x k(x, t)\varphi_1(t)dt, \\ \varphi_3(x) &= f(x) + \int_0^x k(x, t)\varphi_2(t)dt, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= f(x) + \int_0^x k(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

La solution est déterminée en utilisant la limite

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

Exemple 2.10. Voici un exemple d'application de la méthode des approximations à une équation intégrale de Volterra du second espèce:

$$\varphi(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi(t)dt, \quad (2.8.3)$$

pour obtenir l'approximation $\varphi_0(x)$ on choisit

$$\varphi_0(x) = 0.$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$\varphi_{n+1}(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0 \quad (2.8.4)$$

En remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (2.8.4), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi_0(t)dt = 6x - x^3 \\ \varphi_2(x) &= 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi_1(t)dt = 6x - \frac{1}{4}x^4 \\ \varphi_3(x) &= 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi_2(t)dt = 6x - \frac{1}{20}x^5 \\ \varphi_4(x) &= 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi_3(t)dt = 6x - \frac{1}{120}x^6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution $\varphi(x)$ est

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = 6x$$

2.8.1.2 Équation intégrale linéaire de Fredholm

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad (2.8.5)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $f(x)$ est une fonction donnée, λ est un paramètre réel ou complexe et $K(x,t)$ est un noyau.

La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 0, \quad (2.8.6)$$

La solution est déterminée en utilisant la limite

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) \quad (2.8.7)$$

où l'approximation en zéro $\varphi_0(x)$ peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $\varphi_0(x)$, la plupart du temps nous choisissons $0, 1, x$ pour $\varphi_0(x)$, et en utilisant (2.8.6), plusieurs approximations successives $\varphi_k, k \geq 1$ seront déterminées comme:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_0(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_1(t)dt, \\ \varphi_3(x) &= f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_2(t)dt, \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_n(t)dt. \end{aligned}$$

La méthode des approximations successives sera illustrée par l'étude de l'exemple suivant dans le cas d'une équation de Fredholm

Exemple 2.11.

$$\varphi(x) = x + e^x + \int_0^1 xt\varphi(t)dt, x \in [0, 1] \quad (2.8.8)$$

pour l'approximation zéro $\varphi_0(x)$, nous pouvons sélectionner

$$\varphi_0(x) = 0,$$

La méthode des approximations successives est donnée par le schéma itératif suivant:

$$\varphi_{n+1}(x) = x + e^x + \int_0^1 xt\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0. \quad (2.8.9)$$

En remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (2.8.9), on obtient:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x + e^x + \int_0^1 xt\varphi_0(t)dt = x + e^x \\
\varphi_2(x) &= x + e^x + \int_0^1 xt\varphi_1(t)dt = e^x + \frac{1}{3}x \\
\varphi_3(x) &= x + e^x + \int_0^1 \varphi_2(t)dt = e^x + \frac{1}{9}x \\
\varphi_4(x) &= x + e^x + \int_0^1 \varphi_3(t)dt = e^x + \frac{1}{27}x \\
&\vdots \\
\varphi_{n+1}(x) &= x + e^x + \int_0^1 \varphi_n(t)dt = e^x + \frac{1}{3^n}x
\end{aligned}$$

la solution de l'équation (2.8.8) donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = e^x$$

2.8.2 Cas non-linéaire

2.8.2.1 Équation intégrale non-linéaire de Volterra

Considérons l'équation intégrale non-linéaire de Volterra du second espèce [2]:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi(t))dt, \quad (2.8.10)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $K(x,t)$ est un noyau. La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi_n(t))dt, \quad n \geq 0, \quad (2.8.11)$$

où l'approximation en zéro $\varphi_0(x)$ peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $\varphi_0(x)$, la plupart du temps nous choisissons $0, 1, x$ pour $\varphi_0(x)$, et en utilisant (2.8.11), plusieurs approximations successives φ_k , $k \geq 1$ seront déterminées comme:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi_0(t))dt,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi_1(t))dt,$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi_2(t))dt, \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi_n(t))dt, \quad n \geq 0,\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution $\varphi(x)$ est obtenue en utilisant

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

Exemple 2.12. Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) = x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi(t)} dt, \quad (2.8.12)$$

Pour l'approximation zéro $\varphi_0(x)$, on peut choisir

$$\varphi_0(x) = x,$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$\varphi_{n+1}(x) = x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi_n(t)} dt, \quad (2.8.13)$$

En remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (2.8.13), on obtient les approximations:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= x, \\ \varphi_1(x) &= x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi_0(t)} dt = x, \\ \varphi_2(x) &= x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi_1(t)} dt = x, \\ \varphi_3(x) &= x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi_2(t)} dt = x, \\ \varphi_4(x) &= x(1 - e^x) + \int_0^x e^{x-t} e^{\varphi_3(t)} dt = x.\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution $\varphi(x)$ est donnée par:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = x.$$

2.8.2.2 Équation intégrale non linéaire de Fredholm

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm du second espèce[2]:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi(t))dt, \quad (2.8.14)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $K(x,t)$ est un noyau. La méthode des approximations successives présente la relation de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi_n(t))dt, \quad n \geq 0. \quad (2.8.15)$$

où le choix de $\varphi_0(x)$ peut être n'importe quelle fonction à valeurs réelles. généralement on prend $\varphi_0(x)$ égale à 0, 1, x ou $f(x)$.

$$\varphi_1(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi_0(t))dt,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi_1(t))dt,$$

$$\varphi_3(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi_2(t))dt,$$

⋮

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)F(\varphi_n(t))dt, \quad n \geq 0,$$

Par conséquent, la solution $\varphi(x)$ est obtenu en passant à la limite

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

Exemple 2.13. Utilisons la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi^2(t))dt, \quad (2.8.16)$$

On choisit

$$\varphi_0(x) = 1 \quad (2.8.17)$$

En utilisant la formule itérative des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi_n^2(t))dt, \quad n \geq 0 \quad (2.8.18)$$

En substituant (2.8.17) dans (2.8.18) on obtient

$$\varphi_1(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi_0^2(t))dt = e^x + 0.872298221,$$

$$\varphi_2(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi_1^2(t))dt = e^x + 0.989584681,$$

$$\varphi_3(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi_2^2(t))dt = e^x + 0.999133563,$$

$$\varphi_4(x) = e^x + \frac{1}{144}(131 - e^2) + \frac{1}{36} \int_0^1 t(1 - \varphi_3^2(t))dt = e^x + 0.999927807,$$

⋮

Par conséquent, la solution $\varphi(x)$ est donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = e^x + 1,$$

CHAPTER

3

LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D'ADOMIAN

Dans ce chapitre on s'intéresse à la méthode de décomposition d'Adomian (MDA) qui a été introduite et développée par le professeur George Adomian en 1981. Cette dernière permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différent types (équation intégrale, équation différentielle...) dans le cas linéaire et non linéaire.

3.1 Présentation de la méthode d'Adomian

Soit l'équation différentielle non-linéaire générale donné par [8]:

$$F\varphi = f, \tag{3.1.1}$$

où F est un opérateur différentielle non-linéaire et φ et f sont des fonctions de x . On peut récrire l'équation (3.6.1) sous la forme :

$$L\varphi + R\varphi + N\varphi = f, \quad (3.1.2)$$

où:

L : est un opérateur représentant la partie linéaire de F facilement inversible.

R : est un opérateur linéaire pour le rappel de la partie linéaire.

N : est un opérateur non-linéaire représente le terme non linéaire dans F .

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} , sur l'équation (3.1.2) on obtient:

$$L^{-1}L\varphi = L^{-1}f - L^{-1}R\varphi - L^{-1}N\varphi, \quad (3.1.3)$$

Puisque F a été considéré comme un opérateur différentiel et L est linéaire, L^{-1} représente une intégration avec des conditions initiales et $L^{-1}L\varphi$ donnerait une équation pour φ incorporant ces conditions, cela donne:

$$\varphi(x) = g(x) - L^{-1}R\varphi - L^{-1}N\varphi, \quad (3.1.4)$$

où $g(x)$ représente la fonction générée en intégrant f et en utilisant les conditions initiales.

La méthode de décomposition d'Adomian admet la décomposition en série infinie de composantes.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \quad (3.1.5)$$

Le terme non linéaire N est assimilé à un polynôme en série infinie

$$N\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (3.1.6)$$

où: A_n sont les polynômes d'Adomian qui peuvent être déterminés par:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\varphi(\lambda) \right]_{\lambda=0}, \quad (3.1.7)$$

On substitue (3.1.5) et (3.1.6) dans (3.1.4) on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} R\varphi_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

On trouve la relation réccursive suivante:

$$\begin{cases} \varphi_0 = g(x), \\ \varphi_{n+1} = L^{-1}R\varphi_n + L^{-1}A_n, n \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

La méthode d'Adomian [2] consiste à rechercher la solution sous forme d'une série:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x),$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

où les composantes φ_n , $n \geq 0$ seront déterminées de manière réccursive, la méthode de décomposition se préoccupe de trouver les composants $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ individuellement.

La détermination de ces composants peut être réalisé de manière simple grâce à une relation de réccurrence qui implique généralement des intégrales simples qui peuvent être facilement évaluées.

3.2 Calcul des polynôme d'Adomian

La technique d'Adomian est basée sur la décomposition de l'opérateur non-linéaire sous forme d'une série.

$$F\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

où F est l'opérateur non linéaire d'une équation, tel que chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme Adomian

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

Les étapes essentielles introduites par Adomian [2],[6],[12]. Pour calculer les polynômes Adomian sont les suivantes:

$$A_0 = F(\varphi_0),$$

$$A_1 = \varphi_1 F'(\varphi_0),$$

$$A_2 = \varphi_2 F'(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 F''(\varphi_0),$$

$$A_3 = \varphi_3 F'(\varphi_0) + \varphi_1 \varphi_2 F''(\varphi_0) + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 F'''(\varphi_0),$$

$$A_4 = \varphi_4 F'(\varphi_0) + \left(\frac{1}{2!} \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_3\right) F''(\varphi_0) + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 \varphi_2 F'''(\varphi_0) + \frac{1}{4!} \varphi_1^4 F^{(iv)}(\varphi_0),$$

⋮

Autres polynômes peuvent être générés de manière similaire:

1^{re} Cas :

on prend : $F(\varphi) = \varphi^2$, nous fixons d'abord:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

En substituant cette dernier on obtient:

$$F(\varphi) = (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots)^2,$$

l'expansion de l'expression du côté droit donne:

$$F(\varphi) = \varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi_1 + 2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2 + 2\varphi_0\varphi_3 + 2\varphi_1\varphi_2 + \dots,$$

Le développement de cette dernier peut être réorganisé en regroupant tous les termes avec la somme des indices des composantes , Cela signifie que nous pouvons réécrire cette dernière comme suit:

$$F(\varphi) = \underbrace{\varphi_0^2}_{A_0} + \underbrace{2\varphi_0\varphi_1}_{A_1} + \underbrace{2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2}_{A_2} + \underbrace{2\varphi_0\varphi_3 + 2\varphi_1\varphi_2}_{A_3} \\ + \underbrace{2\varphi_0\varphi_4 + 2\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2^2}_{A_4} + \underbrace{2\varphi_0\varphi_5 + 2\varphi_1\varphi_4 + 2\varphi_2\varphi_3}_{A_5} + \dots$$

Cela donne des polynômes Adomian pour $F(\varphi) = \varphi^2$ par:

$$A_0 = \varphi_0^2,$$

$$A_1 = 2\varphi_0\varphi_1,$$

$$A_2 = 2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2,$$

$$A_3 = 2\varphi_0\varphi_3 + 2\varphi_1\varphi_2,$$

$$A_4 = 2\varphi_0\varphi_4 + 2\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2^2,$$

$$A_5 = 2\varphi_0\varphi_5 + 2\varphi_1\varphi_4 + 2\varphi_2\varphi_3,$$

2^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = \varphi^3$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = \varphi_0^3,$$

$$A_1 = 3\varphi_0^2\varphi_1,$$

$$A_2 = 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_0\varphi_1^2,$$

$$A_3 = 3\varphi_0^2\varphi_3 + 6\varphi_0\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^3,$$

$$A_4 = 3\varphi_0^2\varphi_4 + 3\varphi_1^2\varphi_2 + 3\varphi_0\varphi_2^2 + 6\varphi_0\varphi_1\varphi_3,$$

3^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = \varphi^4$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = \varphi_0^4,$$

$$A_1 = 4\varphi_0^3\varphi_1,$$

$$A_2 = 4\varphi_0^3\varphi_2 + 6\varphi_0^2\varphi_1^2,$$

$$A_3 = 4\varphi_0^3\varphi_3 + 4\varphi_1^3\varphi_0 + 12\varphi_0^2\varphi_1\varphi_2,$$

4^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = \sin(\varphi)$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = \sin \varphi_0,$$

$$A_1 = \varphi_1 \cos \varphi_0,$$

$$A_2 = \varphi_2 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2!}\varphi_1^2 \sin \varphi_0,$$

$$A_3 = \varphi_3 \cos \varphi_0 - \varphi_1\varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{1}{3!}\varphi_1^3 \cos \varphi_0,$$

5^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = \cos(\varphi)$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = \cos \varphi_0,$$

$$A_1 = -\varphi_1 \sin \varphi_0,$$

$$A_2 = -\varphi_2 \sin \varphi_0 - \frac{1}{2!}\varphi_1^2 \cos \varphi_0,$$

$$A_3 = -\varphi_3 \sin \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_2 \cos \varphi_0 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 \sin \varphi_0,$$

6^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = \sinh(\varphi)$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = \sinh \varphi_0,$$

$$A_1 = \varphi_1 \cosh \varphi_0,$$

$$A_2 = \varphi_2 \cosh \varphi_0 + \frac{1}{2!} \varphi_1^2 \sinh \varphi_0,$$

$$A_3 = \varphi_3 \cosh \varphi_0 + \varphi_1 \varphi_2 \cosh \varphi_0 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3 \sinh \varphi_0,$$

7^{me} cas :

Pour $F(\varphi) = e^\varphi$. On a les polynômes d'Adomian suivants:

$$A_0 = e^{\varphi_0},$$

$$A_1 = \varphi_1 e^{\varphi_0},$$

$$A_2 = (\varphi_2 + \frac{1}{2!} \varphi_1^2) e^{\varphi_0},$$

$$A_3 = (\varphi_3 + \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3) e^{\varphi_0},$$

Les autres fonctions peuvent être traitées de façon similaire.

3.3 Application de la méthode d'Adomian aux équations intégral-différentielles linéaires

3.3.1 Équations intégral-différentielles de Volterra

Les équations intégral-différentielles linéaire de Volterra sont données sous la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt,$$

Où $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi}{dx^n}$, et $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions connues, $\varphi(x)$ est la solution inconnue.

Considérons l'équation intégral-différentielle de Volterra donnée par:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, \\ \varphi(0) = a_0, \quad \varphi'(0) = a_1 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

par l'intégration double de l'équation (3.3.1) de 0 à x, on obtient:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt\right), \quad (3.3.2)$$

où $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ sont les conditions initiales utilisés, et L^{-1} est un opérateur intégrale double.

Nous utilisons ensuite la série de décomposition d'Adomian

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x),$$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)dt\right). \quad (3.3.3)$$

Où de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_2(t)dt\right) + \dots \end{aligned}$$

Pour déterminer les composants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ de la solution $\varphi(x)$, Nous avons mis la relation de récurrence: [5]

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}f(x), \\ \varphi_{k+1} = L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_k(t)dt\right), \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Remarque 3.1. Les équations intégral-différentielles non-linéaires de Fredholm peuvent être traitées de la même manière.

Exemple 3.1. Considérons l'équation intégral-différentielle de Fredholm de seconde espèce:

$$\varphi'(x) = -1 + 24x + \int_0^1 \varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0, \quad (3.3.5)$$

Après l'intégration des deux membres de l'équation (3.3.5) on obtient:

$$\varphi(x) = 12x^2 - x + x \int_0^1 \varphi(t)dt,$$

On applique la méthode décompositionnelle d'Adomian à notre exemple, on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 12x^2 - x + x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt,$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 12x^2 - x, \\ \varphi_1(x) &= x \int_0^1 \varphi_0(t) dt = \frac{7}{2}x, \\ \varphi_2(x) &= x \int_0^1 \varphi_1(t) dt = \frac{7}{4}x, \\ \varphi_3(x) &= x \int_0^1 \varphi_2(t) dt = \frac{7}{8}x, \\ \varphi_4(x) &= x \int_0^1 \varphi_3(t) dt = \frac{7}{16}x. \\ &\vdots \end{aligned}$$

On remplace ces termes dans l'équation $\varphi(x)$, on trouve:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 12x^2 - x + \frac{7}{2}x + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}x + \frac{7}{16}x + \dots \\ \varphi(x) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots, \\ &= 12x^2 + 6x \end{aligned}$$

3.4 Application de la méthode aux équations intégrales linéaires de Fredholm

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce donnée par:[2]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b. \tag{3.4.1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles telle que: $a \leq t \leq b$, et λ un paramètre réel non nul ou complexe.

Soit φ la solution sous forme d'une série :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x). \tag{3.4.2}$$

En remplaçant (3.4.2) dans (3.4.1), nous aurons:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt. \quad (3.4.3)$$

La méthode de décomposition d'Adomian utilise les relations récursives suivantes:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi_n dt, \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3.2. Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm:

$$\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(t) \varphi(t) dt,$$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt,$$

Les termes de la série sont donnés comme suit:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \sin(x) \\ \varphi_{k+1}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(t) \varphi_k(t) dt, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, k=0, 1, \dots \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \sin(x), \\ \varphi_1(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \sin(x), \\ \varphi_2(x) &= \sin(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{4} \sin(x), \\ \varphi_3(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin(x) \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{8} \sin(x). \end{aligned}$$

La solution sous forme d'une série est donnée par:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots \\ &= \sin(x) + \sin(x) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right] \end{aligned}$$

$\varphi(x) = 2 \sin(x)$, c'est une solution exacte de l'exemple.

Exemple 3.3. Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm:

$$\varphi(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 \varphi(t) dt,$$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt,$$

on pose :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = e^x, \\ \varphi_{k+1}(x) = e^{-1} \int_0^1 \varphi_k(t) dt. \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= e^x, \\ \varphi_1(x) &= e^{-1} \int_0^1 \varphi_0(t) dt = 1 - e^{-1}, \\ \varphi_2(x) &= e^{-1} \int_0^1 \varphi_1(t) dt = e^{-1} - e^{-2}, \\ \varphi_3(x) &= e^{-1} \int_0^1 \varphi_2(t) dt = e^{-2} - e^{-3}, \end{aligned}$$

On obtient la solution sous forme d'une série est donnée par:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^x + 1 - e^{-1} + e^{-1} - e^{-2} + e^{-2} - e^{-3} + \dots, \\ \varphi(x) &= e^x + 1. \end{aligned}$$

cette solution concide avec la solution exacte égale à:

$$\varphi(x) = e^x + 1.$$

3.5 Application de la méthode aux équations intégrales linéaires de Volterra

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce donnée par[2]:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \tag{3.5.1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, x et t sont deux variables réelles telle que $t \in [a, b]$ et λ est un paramètre réel non nul ou complexe.

On substitue l'équation (3.4.3) dans l'équation (3.5.1), on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (3.5.2)$$

ou équivalent à :

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) [\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots] dt,$$

Les composantes $\varphi_n(x), n \geq 1$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminés de manière récursive [2]:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_n dt, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Exemple 3.4. Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra:

$$\varphi(x) = -2 + 2x + x^2 + \int_0^x (x - t) \varphi(t) dt, \quad (3.5.3)$$

On a $f(x) = -2 + 2x + x^2, \lambda = 1$ et $K(x, t) = x - t$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = -2 + 2x + x^2 + \int_0^x (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt.$$

qui est équivalent à:

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots = -2 + 2x + x^2 + \int_0^x (x - t) [\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots] dt.$$

Alors

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{k+1}(x) = \int_0^x (x - t) \varphi_k(t) dt. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= -2 + 2x + x^2, \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x (x - t) \varphi_0(t) dt = -x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^4, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x (x - t) \varphi_1(t) dt = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) &= -2 + 2x + x^2 + -x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^4 + -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 + \dots \\ &= -2 + 2(x + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots), \\ &= -2 + 2sh(x). \end{aligned}$$

c'est une solution exacte de l'exemple.

Exemple 3.5. Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra:

$$\varphi(x) = 3 + \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \varphi(t) dt,$$

On a $f(x) = 3, \lambda = \frac{1}{4}$ et $K(x, t) = xt^2$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum \varphi(t)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 3 + \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt,$$

c'est à dire:

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + = 3 + \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 [\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots] dt,$$

On peut écrire:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{K+1}(x) = \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \varphi_k(t) dt, k \geq 0 \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 3, \\ \varphi_1(x) &= \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \varphi_0(t) dt = \frac{1}{4} x^4, \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \varphi_1(t) dt = \frac{1}{112} x^8, \\ \varphi_3(x) &= \frac{1}{4} \int_0^x xt^2 \varphi_2(t) dt = \frac{1}{4928} x^{12}, \end{aligned}$$

donc on obtient la solution suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{112} x^8 + \frac{1}{4928} x^{12} + \dots$$

3.6 Application de la méthode d'Adomian aux équations différentielles ordinaire

Soit l'équation différentielle non-linéaire générale donné par [8]:

$$F\varphi = f, \tag{3.6.1}$$

où F est un opérateur différentielle non-linéaire et φ et f sont des fonctions de x .

La méthode de décomposition d'Adomian permet la décomposition en série infinie de composantes.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{3.6.2}$$

Le terme non linéaire N est assimilé à un Polynôme en série infinie

$$N\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{3.6.3}$$

où: A_n sont les polynômes Adomian. On substitue (3.6.2) et (3.6.3) dans (3.6.1) on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} R\varphi_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

On trouve la relation réccursive suivante:

$$\begin{cases} \varphi_0 = g(x), \\ \varphi_{n+1} = L^{-1}R\varphi_n + L^{-1}A_n, n \geq 0. \end{cases} \tag{3.6.4}$$

Exemple 3.6. On considère le problème de valeur initiale non linéaire

$$y' + e^y = \cos x - \tan x, \quad y(0) = 0$$

avec la solution exacte $y(x) = \ln \cos x$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= L^{-1}(\cos x - \tan x) - L^{-1}e^\varphi, \\ &= \sin x + \ln \cos x - L^{-1}e^\varphi. \end{aligned}$$

A_n sont des polynômes d'Adomian de terme non-linéaire e^y

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{\varphi_0}, \\ A_1 &= y_1 e^{\varphi_0}, \\ A_2 &= (\varphi_1 + \frac{1}{2!} \varphi_1^2) e^{\varphi_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

avec la méthode d'Adomian, nous obtenons la relation récursive

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sin x + \ln \cos x, \\ \varphi_1 &= -L^{-1} A_0 = -L^{-1} e^{\varphi_0} = -(e - 1), \\ \varphi_2 &= -L^{-1} A_1 = -L^{-1} \varphi_1 e^{\varphi_0} = \frac{1}{2} (e^{2 \sin x} - 1) - (e^{\sin x} - 1). \\ &\vdots \end{aligned}$$

on remplace ces derniers termes dans l'équation (3.6.2) on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \\ &= \ln \cos x. \end{aligned}$$

La méthode converge vers la solution exacte.

3.7 Application de la méthode d'Adomian aux équations intégrales non-linéaires

3.7.1 Équation intégrale-différentielle de Volterra

Les équations intégrales-différentielles non linéaires de Volterra sont données par:

$$\begin{cases} \varphi^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) \{R(\varphi(t)) + N(\varphi(t))\} dt, \\ \varphi^{(k)}(x) = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n - 1), n \geq 0 \end{cases} \quad (3.7.1)$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ est la dérivée nième de la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui sera déterminée, $K(x, t)$ est le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est une fonction analytique, $R(\varphi)$ et $N(\varphi)$ sont des fonctions linéaires et non linéaires de φ , respectivement et b_k sont les conditions initiales.

Pour $n = 0$, les équation (3.7.1) sont les équations intégrales non linéaires de Volterra.

En intégrant les deux côtés de l'équation (3.7.1) n -fois, on obtient:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k \varphi^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x k(x,t) \{R(\varphi(t)) + N(\varphi(t))\} dt \right), \quad (3.7.2)$$

où L est supposé inversible et L^{-1} est un opérateur intégrale n fois. La méthode Adomian standard définit la solution $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \quad (3.7.3)$$

où les composantes $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, sont généralement déterminés récursivement en utilisant la relation [1]:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k \varphi^k + L^{-1}(f(x)), \\ \varphi_{k+1} = L^{-1}(R\varphi_k) + L^{-1}(N\varphi_k), \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.7.4)$$

C'est la suggestion introduite par Adomian que la composante zéro φ_0 habituellement identifiée par toutes les fonctions qui ne sont pas incluses sous le signe intégral, et d'autres composants peuvent être déterminés de manière récursive comme indiqué ci dessus.

3.7.2 Équation intégrro-différentielle de Fredholm

Les équations intégrro-différentielles non-linéaires de Fredholm sont données par:

$$\begin{cases} \varphi^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t) \{R(\varphi(t)) + N(\varphi(t))\} dt, \\ \varphi^{(k)}(x) = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (3.7.5)$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ est la dérivée n -ième de la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui sera déterminée, $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est une fonction analytique, $R(\varphi)$ et $N(\varphi)$ sont des fonctions linéaires et non linéaires de φ , respectivement et b_k sont les conditions initiales.

Pour $n = 0$, l'équation (3.7.5) sont les équations intégrales non linéaires de Fredholm.

En intégrant les deux côtés de l'équation (2.7.21) n -fois, on obtient:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k \varphi^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x k(x,t) \{R(\varphi(t)) + N(\varphi(t))\} dt \right), \quad (3.7.6)$$

où L est supposé inversible et L^{-1} est un opérateur intégrale n fois. La méthode d'Adomian standard définit la solution $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \quad (3.7.7)$$

où les composantes $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, sont généralement déterminés récursivement en utilisant la relation:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k \varphi^k + L^{-1}(f(x)), \\ \varphi_{k+1} = L^{-1}(R\varphi_k) + L^{-1}(N\varphi_k), \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.7.8)$$

C'est la suggestion introduite par Adomian que la composante zéro φ_0 habituellement identifiée par toutes les fonctions qui ne sont pas incluses sous le signe intégral, et d'autres composants peuvent être déterminés de manière récursive comme indiqué ci dessus.

3.8 Application de la méthode aux équations intégrales non-linéaires de Fredholm

On considère l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm:

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t)) dt = f(x), \quad \lambda \neq 0 \quad (3.8.1)$$

où $f(x)$ est une fonction continue connue sur $[a, b]$, $F[\varphi(t)]$ est une fonction non-linéaire connue et $k(x, t)$ est la fonction noyau connue, continue et bornée $|k(x, t)| \leq M$ sur le carré $D = \{(x, t) : x \in [a, b], t \in [a, b]\}$ où M est la borne supérieur sur le carré D .

Le but est de trouver la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui est la solution de l'équation (3.8.1). la solution $\varphi(x)$ lors de l'application d'ADM est exprimée sous forme d'une série définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \quad (3.8.2)$$

où les composantes $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$ peuvent être calculées comme suit:

$$F[(\varphi(t))] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n[\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t)], \quad (3.8.3)$$

où les polynômes d'Adomian peuvent être évalués par la formule suivante :

$$A_n[\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \cdots + \varphi_n(t)] = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n \right]_{\lambda=0}, \quad (3.8.4)$$

substituant (3.8.2) et (3.8.1) dans l'équation (3.8.1), on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b k(x,t) A_n(t) dt \right], \quad (3.8.5)$$

Les composantes $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$ sont calculées à l'aide de la relation réccursive suivante:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \\ \varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda} \left[\int_a^b k(x,t) A_n(t) dt \right], \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.6)$$

Exemple 3.7. Soit l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = 4 + \lambda \int_0^1 t \varphi^2(t) dt,$$

après la substitution de (3.8.2) dans cette dernier on trouve l'équation suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 4 + \lambda \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt,$$

ou équivalente à

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) = 4 + \lambda \int_0^1 t [A_0(t) + A_1(t) + \cdots + A_n(t)] dt.$$

alors

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{k+1} = \lambda \int_0^1 A_k(t) dt, k \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.7)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x) &= 4, \\
 A_0(t) &= \varphi_0^2(t) = 16, \\
 \varphi_1(t) &= \lambda \int_0^1 t A_0(t) dt = 8\lambda, \\
 A_1(t) &= 2\varphi_0\varphi_1 = 64\lambda, \\
 \varphi_2(t) &= \lambda \int_0^1 t A_1(t) dt = 32\lambda^2, \\
 A_2(t) &= 2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2 = 320\lambda^2, \\
 \varphi_3(t) &= \lambda \int_0^1 t A_2(t) dt = 160\lambda^3, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 4 + 8\lambda + 32\lambda^2 + 160\lambda^3 + \dots$$

3.9 Application de la méthode aux équations intégrales non linéaires de Volterra

Considérons l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de second espèce donnée par:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(\varphi(t))dt, \tag{3.9.1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et $F(\varphi(t))$ est une fonction non linéaire de $\varphi(t)$.

Nous substituons l'équation (3.8.2) dans l'équation non linéaire (3.9.1) pour obtenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt,$$

telle que les A_n sont des polynômes d'Adomian pour la fonction non-linéaire $F(\varphi(x))$ définis comme l'équation (3.5.1). Les composantes $\varphi_n(x), n \geq 0$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminé de manière récurrente [12] :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{k+1}(x) = \int_a^b k(x,t)A_k(t)dt, & k \geq 0 \end{cases} \tag{3.9.2}$$

ce qui donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_1(x) = \int_a^b k(x,t)A_0(t)dt, \\ \varphi_2(x) = \int_a^b k(x,t)A_1(t)dt, \\ \vdots \\ \varphi_{k+1}(x) = \int_a^b k(x,t)A_k(t)dt, \quad k \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.9.3)$$

Exemple 3.8. Soit l'équation intégrale non-linéaire de Volterra donnée par:

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \varphi^2(t)dt, \quad (3.9.4)$$

après la substitution de l'équation (3.8.2) dans cette dernière, on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x) = x - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)dt,$$

par identification des deux coté de l'équation on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x, \\ A_0(t) &= \varphi^2(x) = t^2, \\ \varphi_1(x) &= - \int_0^x A_0^2 dt = -\frac{x^3}{3}, \\ A_1(t) &= 2\varphi_0\varphi_1 = -\frac{2}{3}t^4, \\ \varphi_2(x) &= - \int_0^x A_1(t)dt = \frac{2}{15}x^5, \\ A_2(t) &= 2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2 = \frac{51}{135}t^6, \\ \varphi_3(x) &= - \int_0^x A_2(t)dt = -\frac{51}{945}x^7. \end{aligned}$$

On remplace ces termes dans l'équation (3.9.4) on trouve:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{51}{945}x^7 + \dots, \\ &= \tanh(x) \end{aligned}$$

3.10 Application de la méthode d'Adomian aux équations intégrales de Volterra non-linéaires faiblement singulières

Les équations intégrales de Volterra non-linéaires faiblement singulières du deuxième espèce sont donnés par [2]:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{(x-t)}} F(\varphi(t)) dt, \quad x \in [0, T] \quad (3.10.1)$$

et

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} F(\varphi(t)) dt, \quad 0 < a < 1, \quad x \in [0, T] \quad (3.10.2)$$

où β est une constante et $F(u(t))$ est une fonction non linéaire de $\varphi(t)$. L'équation (3.10.2) est connue sous le nom d'équation de Volterra faiblement singulière non linéaire généralisée. Les équations non-linéaire faiblement singulier et les équations généralisées non linéaires faiblement singulières (3.11.4) et (3.10.2) se trouvent sous la catégorie des équations singulières à noyaux singuliers

$$k(x, t) = \frac{\beta}{\sqrt{(x-t)}},$$

$$k(x, t) = \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha}, \quad 0 < a < 1,$$

respectivement. La méthode de décomposition d'Adomian sera appliquée sur l'équation de Volterra généralisée non linéaire faiblement singulière (3.10.2), car l'équation (3.10.1) est un cas particulier de l'équation généralisée avec $a = \frac{1}{2}$, $g(x) = x$. Pour déterminer le solution $\varphi(x)$ de (3.10.1).

On substitue la série de décomposition au terme $\varphi(x)$ dans (3.10.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.10.3)$$

telle que les A_n sont des polynômes d'Adomian pour la fonction non-linéaire $F(\varphi(x))$ définis comme (3.1.7).

Les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ sont généralement déterminées en utilisant la relation réccurente

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} A_0(t) dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} A_1(t) dt, \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^\alpha} A_2(t) dt, \\ &\vdots\end{aligned}$$

etc. Après avoir déterminé les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, la solution $\varphi(x)$ de (3.10.2) sera déterminée sous la forme d'une série. La série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Exemple 3.9. Soit l'équation intégrale non-linéaire de Volterra faiblement singulière [18]:

$$\varphi(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\pi x^2 - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \varphi^3(t) dt, \quad I = [0, 2] \quad (3.10.4)$$

On substitue la série de décomposition au terme $\varphi(x)$ dans (3.10.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\pi x^2 - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^3(t) dt,$$

En utilisant la relation de récurrence, nous posons

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\pi x^2, \\ \varphi_1(x) = - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \varphi_0^3(t) dt = -\frac{3}{8}\pi x^2 - \frac{36}{35}\pi x^{\frac{7}{2}} - \frac{1701}{16384}\pi^3 x^5 - \frac{36}{1001}\pi^3 x^{\frac{13}{2}}, \end{cases}$$

Les termes de bruit $\pm \frac{3}{8}\pi x^2$ apparaissent entre $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$. En annulant le terme de bruit $-\frac{3}{8}\pi x^2$ à partir de $\varphi_0(x)$ et en vérifiant que le terme non annulé dans $\varphi_0(x)$ justifie l'équation (3.10.4), la solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

3.11 Méthode d'Adomian modifiée

La méthode de décomposition modifiée, fournit la solution exacte en ne calculant que très peu d'itérations, principalement deux itérations, de la décomposition en série. De plus, la

technique modifiée peut donner la solution exacte pour les équations non linéaires sans tout besoin aux polynômes dits d'Adomian de grand nombres. Bien que cette légère variation soit assez simple, elle démontre la fiabilité et la puissance de la méthode modifiée.

Dans le cas où $f(x)$ est un polynôme, les composantes de φ sont obtenues très facilement.

Par contre si $f(x)$ est une combinaison de plusieurs fonctions trigonométriques ou hyperboliques des difficultés se présentent.

On peut utiliser la méthode légèrement modifiée pour simplifier les calculs.

Dans ce cas, la méthode est basé sur la décomposition de $f(x)$ en deux fonctions [2]:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

On identifie

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f_1(x) \text{ (ou } f_2(x)), \\ \varphi_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt, \\ \vdots \\ \varphi_{k+1}(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_k(t)dt, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.11.1)$$

Exemple 3.10. Voici un exemple d'application de la modifiée de la méthode d'Adomian à une équation intégrale de Volterra du second espèce:

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - xe^2 + \int_0^x e^{x^2-t^2-1} e^{\varphi(t)} dt,$$

On cherche $\varphi(x)$ sous la forme d'une série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1 + x^2 - xe^2 + \int_0^x e^{x^2-t^2-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt,$$

On applique la méthode d'Adomian modifiée, on obtient:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 + x^2, \\ A_0 = e^{\varphi_0} = e^{1+t^2}, \\ \varphi_1(x) = -xe^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2-1} e^{\varphi_0(t)} dt = 0, \\ A_1 = \varphi_1 e^{\varphi_0} = 0, \\ \varphi_2(x) = \int_0^x e^{x^2-t^2-1} e^{\varphi_0(t)} dt. \end{cases} \quad (3.11.2)$$

A partir du φ_1 tous les termes s'anull. la solution est donnée comme suit:

$$\varphi(x) = \varphi_0 = 1 + x^2$$

3.11.1 La méthode d'Adomian redémarrée

C'est une nouvelle méthode basée sur la méthode d'Adomian standard pour résoudre des équations algébriques. Babolian et al [4],[8] ont appliqué la méthode d'Adomian redémarrée aux équations intégrales non linéaires et aux équations intégro-différentielles non linéaires.

Dans cette méthode, nous utilisons la méthode Adomian modifiée qui proposait une légère variation uniquement sur les composantes 0 et 1. La convergence de la méthode est plus rapide que la méthode Adomian standard. Si nous considérons une équation non linéaire générale et appliquons la MDA pour la résoudre.

3.11.1.1 Principe de la méthode

On choisit $m \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ deux petites valeurs.

Etape1:

On Applique la méthode d'Adomian sur les équations intégrales et on calcul: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$.

posons:

$$\phi' = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k$$

Etape2:

Soit Z la fonction propre qui sera ensuite déterminée pour $j = 2 : m$, $Z = \phi^{j-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = Z, \\ \varphi_1 = f - Z + A_0, \\ \varphi_2 = A_1, \\ \varphi_{k+1} = A_k, \\ \phi^j = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k. \end{array} \right. \quad (3.11.3)$$

Remarque 3.2. ϕ^m peut être considéré comme une approximation de l'équation intégrale.

La méthode d'Adomian donne généralement la somme des premiers termes comme une approximation de Z , Dans cet méthode, nous pouvons mettre à jour φ_0 à chaque étape, mais nous ne calculons pas les termes avec un grand indice, donc m et k sont considérés petit.

Exemple 3.11. Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{6} + \int_0^1 (\varphi(t) + \varphi^2(t))dt. \quad (3.11.4)$$

En appliquant la méthode d'Adomian redémarrée sur l'équation (3.11.4), avec $n=2$ et $m=3$, on obtient :

Etap1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = x - 0.833333333, \\ \varphi_1(x) = -0.138888888, \\ \varphi_2(x) = \int_0^x (\varphi_1(t) + \varphi_1^2(t))dt = -0.046296296, \\ \phi^1 = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = x - 1.018518519, \end{array} \right. \quad (3.11.5)$$

Etap2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = x - 1.018518519, \\ \varphi_1(x) = \int_0^x (\varphi_0(t) + \varphi_1^2(t))dt = -0.166323731, \\ \varphi_2(x) = \int_0^x (\varphi_1(t) + \varphi_1^2(t))dt = -0.0061013819, \\ \phi^1 = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = x - 1.178682111, \end{array} \right. \quad (3.11.6)$$

Etap3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = x - 1.178682111, \\ \varphi_1(x) = \int_0^x (\varphi_0(t) + \varphi_1^2(t))dt = -1.34744795, \\ \varphi_2(x) = \int_0^x (\varphi_1(t) + \varphi_1^2(t))dt = 0.04815103, \\ \phi^1 = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = x - 1.265270451, \end{array} \right. \quad (3.11.7)$$

CHAPTER

4

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, on a traité trois exemples numériques pour illustrer la méthode d'Adomian. On commence par donner deux exemples d'équations intégrales linéaires et on finit par un exemple non linéaire. Le but en fait est de faire une comparaison entre la solution obtenue par la méthode d'Adomian avec la solution exacte. Les calculs sont effectués en utilisant le logiciel MATLAB.

4.1 Exemples

Exemple 4.1. *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi(t)dt$$

La solution exacte de cette équation est

$$\varphi(x) = 6x$$

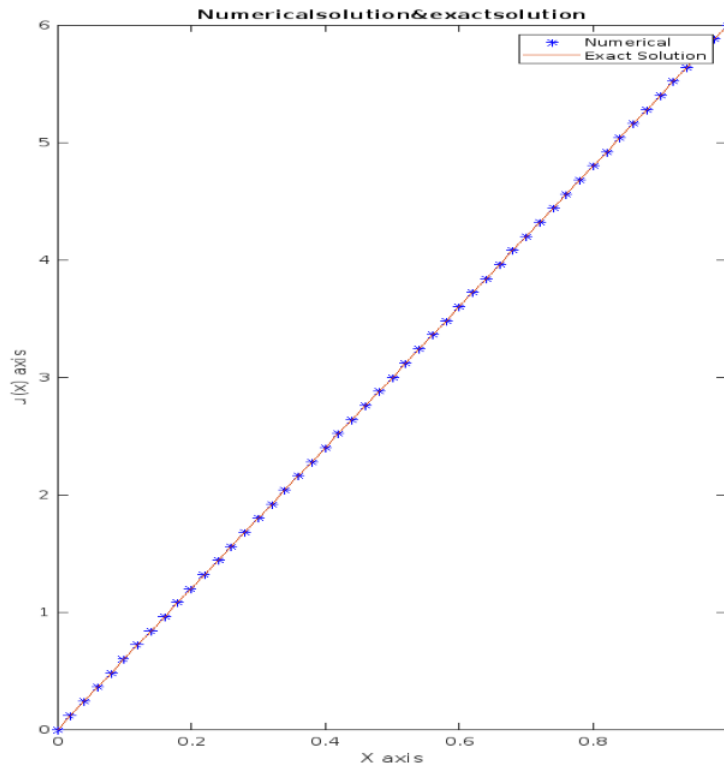
La solution approchée $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian, on prend $x \in [0, 1]$.

Le tableau suivant donne une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par différente valeur de n :

x	solution exacte	solution approchée	erreur absolue
0	0	0	0
0.1000	0.6000	0.6000	0.0000
0.2000	1.2000	1.2000	0.0000
0.3000	1.8000	1.8000	0.0000
0.4000	2.4000	2.4000	0.0000
0.5000	3.0000	3.0000	0.0000
0.6000	3.6000	3.6000	0.0000
0.7000	4.2000	4.1999	0.0001
0.8000	4.8000	4.7998	0.0002
0.9000	5.4000	5.3994	0.0006
1.0000	6.0000	5.9988	0.0012

Tableau 4.1: Comparaison entre la solution obtenue parla MDA et la solution exacte.

[!h]



Exemple 4.2. Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

La solution exacte de cette équation est

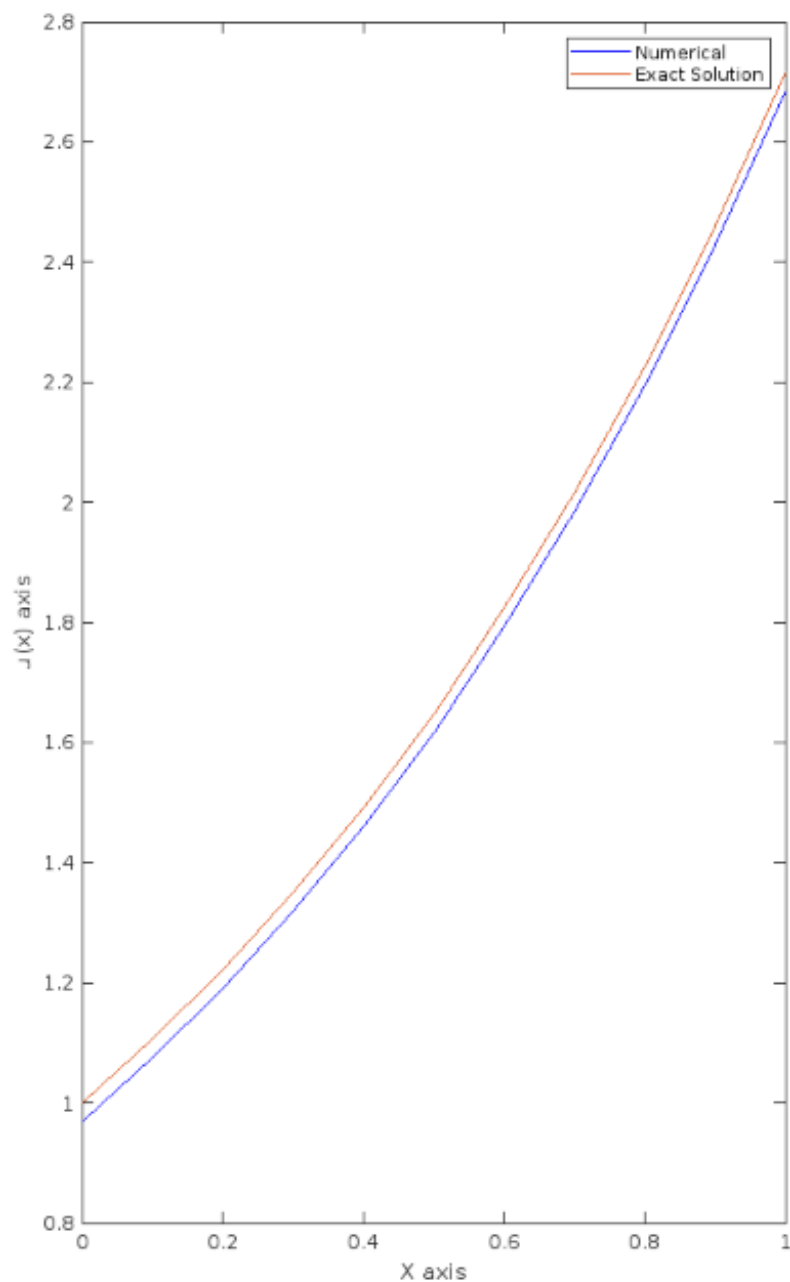
$$\varphi(x) = e^x$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian, on prend $x \in [0, 1]$.

Le tableau suivant donne une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par différentes valeurs de n :

x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>erreur absolue</i>
0	1.0000	0.9688	0.0312
0.1000	1.1052	1.0739	0.0313
0.2000	1.2214	1.1902	0.0313
0.3000	1.3499	1.3186	0.0313
0.4000	1.4918	1.4606	0.0313
0.5000	1.6487	1.6175	0.0313
0.6000	1.8221	1.7909	0.0312
0.7000	2.0138	1.9825	0.0313
0.8000	2.2255	2.1943	0.0313
0.9000	2.4596	2.4284	0.0313
1.0000	2.7183	2.6870	0.0312

Tableau 4.2: Comparaison entre la solution obtenue par la MDA et la solution exacte.



Exemple 4.3. *Considérons l'équation intégrale non linéaire:*

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \varphi^2(t) dt$$

La solution exacte de cette équation est

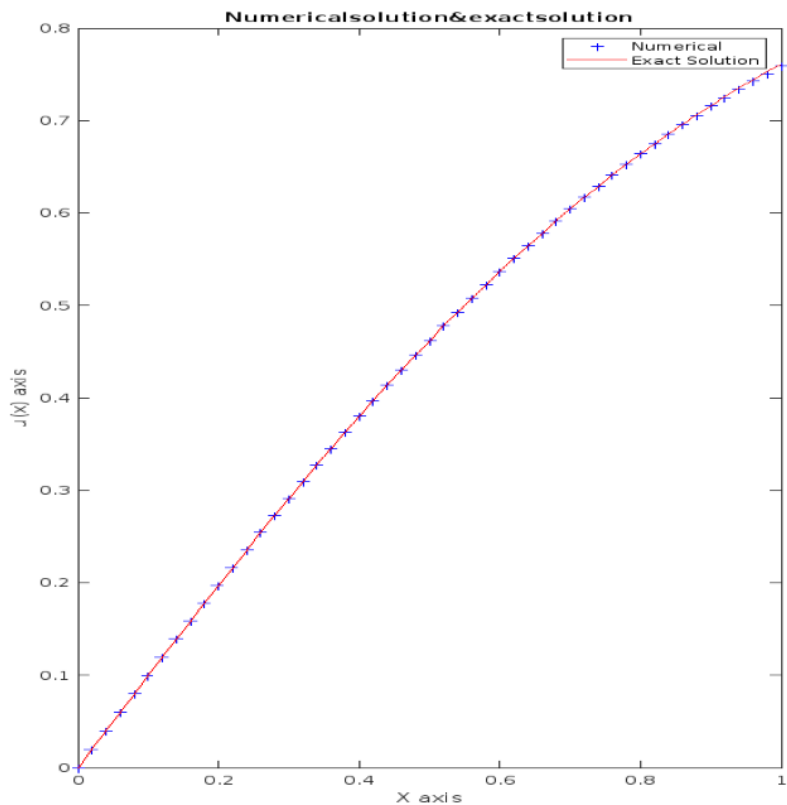
$$\varphi(x) = \tanh(x)$$

La solution approchée $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian, on prend $x \in [0, 1]$

Le tableau suivant donne une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par différentes valeurs de n :

x	solution exacte	solution approchée	erreur
0	0	0	0
0.1000	0.0997	0.0997	0.0000
0.2000	0.1974	0.1974	0.0000
0.3000	0.2913	0.2913	0.0000
0.4000	0.3799	0.3799	0.0000
0.5000	0.4621	0.4621	0.0000
0.6000	0.5370	0.5370	0.0000
0.7000	0.6044	0.6043	0.0000
0.8000	0.6640	0.6639	0.0002
0.9000	0.7163	0.7156	0.0007
1.0000	0.7616	0.7590	0.0026

Tableau 4.3: Comparaison entre la solution obtenue par MDA et la solution exacte



CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté la méthode de décomposition d'Adomian MDA qui sert à déterminer la solution approchée des équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra et de Fredholm. Nous avons choisis de traiter des exemples pour comparer la solution approchée obtenue par la méthode d'Adomian avec la solution exacte. Dans le cas des équations intégrales linéaires nous avons montré que l'erreur absolue tend vers zéro; et dans le cas des équations intégrales non linéaires La comparaison a montré que la méthode de décomposition d'Adomian est plus précise et rapide que la méthode des approximations successives. Ce qui prouve l'efficacité de cette méthode.

BIBLIOGRAPHY

- [1] A.M.WAZWAZ, *A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations*, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 2, 1703-1712, 2006, Elsevier.
- [2] A.M.WAZWAZ, *Linear and nonlinear integral equations*, 639, 2011, Springer.
- [3] A.RAHMOUNE, *équations intégrales linéaires et non linéaires*, *Equations intégrales linéaires et non linéaires*, *Analyse et techniques de résolution*, 44-46, 2018.
- [4] E.BABOLIAN, A. DAVARI, *Numerical implementation of Adomian decomposition method*, *Applied mathematics and computation*, 153, 1, 301-305, 2004, Elsevier.
- [5] K.BEN AMARA, *Quelques méthodes pour la résolution des équations intégrales différentielles*, *université de Kasdi Merbah*, 2015.
- [6] G.ADOMIAN, *Solving frontier problems of physics: the decomposition method*, 60, 2013, Springer Science & Business Media.
- [7] P.K.SAHU, *Numerical Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Integral Equations*, 2016.

- [8] M.ALMAZMUMY, F.A.HENDI, H.O.BAKODAH, H.ALZUMI, *Recent modifications of Adomian decomposition method for initial value problem in ordinary differential equations, 2012, Scientific Research Publishing.*
- [9] M.RAHMAN, *Integral equations and their applications, 2007, WIT press.*
- [10] M.GUESBA, *Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de Magister université de Msila, 2012.*
- [11] S.H.BEHIRY, R.A.ABD-ELMONEM, A.M.GOMAA, *Discrete Adomian decomposition solution of nonlinear Fredholm integral equation, Ain Shams Engineering Journal, 1, 1, 97-101, 2010, Elsevier.*
- [12] SH.JAVADI, A.DAVARI, E.BABOLIAN, *Numerical implementation of the Adomian decomposition method for nonlinear Volterra integral equations of the second kind, International Journal of Computer Mathematics, 84, 1, 75-79, 2007, Taylor & Francis.*
- [13] S.KRASNOV, A.KISSELEV, G.MAKARENKO, *équations intégrales, problèmes et exercices, éditions Mir, Moscou, Traduction française Editions Mir, 1977.*
- [14] S.M.ZEMYAN, *The classical theory of integral equations: a concise treatment, 2012, Springer Science & Business Media.*
- [15] F.BACHIRI, *Théorèmes du point fixe et Applications aux Equations intégrales, 2017, Université Mohamed Boudiaf-M'sila,*
- [16] Y.CHERRUALT, S.VIRGINIE, *Short papers: The resolution of non-linear integral equations of the first kind using the decompositional method of Adomian, Kybernetes, 1997, MCB UP Ltd.*
- [17] R.OMAR HOUARI, *Equations integrales de frontière exemple de resolution numerique, 2011, Université d'Oran1-Ahmed Ben Bella.*

- [18] A.M.WAZWAZ, *A reliable technique for solving the weakly singular second-kind Volterra-type integral equations*, *Applied mathematics and computation*, 80, 2-3, 287-299, 1996, Elsevier.
- [19] A.M.WAZWAZ, *Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations*, *Applied Mathematics and Computation*, 166, 3, 652-663, 2005, Elsevier.
- [20] Y.CAUMEL, *Cours d'analyse fonctionnelle et complexe*, 2009, Éditions Cépaduès.