République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saâd Dahlab de Blida 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du Diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Sur la Dérivation Fractionnaire

Présenté par :

Belkadi Adlen

Soutenu le 15/09/2022 devant **le Jury composé de** :

M. Boudjemaa Redouane	**MCA, USD-BLIDA 1**	**Président**
M. Benbachir Maamar	**PROF, Ecole supérieure de Mathématiques**	**Encadrant**
M. Chaouchi Belkacem	**MCA, Université de Khemis Miliana**	**Examinateur**
M. Chouikrat Abdelkader	**MAA, USD-BLIDA 1**	**Examinateur**

Année universitaire : 2021/2022

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu, dont la grâce de bonnes actions est accomplie, et mon succès n'est que par Dieu, sur lui je me suis appuyé, et à lui je me repens, sincères remerciements à mon Seigneur pour cet acte. Mon Seigneur m'a servi des proches, amis, collègues et professeurs. J'ai eu l'honneur de les rencontrer et de les accompagner sur ce chemin jusqu'à ce que j'atteigne le point de départ. Certes, c'est le début. Le voyage est toujours dans la poursuite des mathématiques, en particulier l'aspect analytique de celui-ci seulement au début. Ceux qui m'ont aidé dans la connaissance et la morale (et la connaissance sans morale est comme un arbre sans feuilles), parmi eux se trouve mon enseignant et professeur, Prof. Benbachir, qui était une raison majeure pour mon entrée dans ce sujet de recherche. Il a réalisé ce que j'aime et ce qui m'excite et m'a proposé ce thème, ce fut le modeste résultat entre vos mains qui rapportera de plus en plus. De même monsieur Chouikrat, qui est l'un des meilleurs en qualité et humidité, puis professeur Hachama, qui me dit souvent que je connais vos pensées. Mon enseignant Hadef, qui a un sourire distinctif, et monsieur Boukabous, que je n'ai rencontré que peu de temps, mais j'ai de la compagnie et de fraternité avec lui, l'enseignant Hassas et la liste peut être plus longue. Ainsi que mes amis et camarades, que Dieu les protèges tous.

DÉDICACE

À ma chère mère bien-aimée, que Dieu la sauve

Résumé

Dans la dernière décennie, la dérivation fractionnaire a connu une montée spectaculaire, des livres, monographies et articles ont vu le jour, ces documents s'adressent au public averti et de haut niveau. Dans ce travail, on va revoir des différents types de dérivation fractionnaire d'une façon détaillée ce qui permettera au lecteur moins armé de pouvoir suivre cette nouvelle tendance en analyse mathématique.

Abstract

In the last decade, fractional derivation has experienced a spectacular rise, books, monographs and articles have emerged, these documents are addressed at the specialized public and high level. In this work, we will review the different types of fractional derivation in detail, and we will allow the less experienced reader to be able to follow this new trend in mathematical analysis.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

1 NOTIONS DE BASES **3**

1.1 Fonction Factorielle 3

1.2 Fonction Gamma 6

1.2.1 Domaine de Définition de la Fonction Gamma 7

1.3 Fonction Béta 14

2 DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE CLASSIQUE : APPROCHE DE RIEMANN-LIOUVILLE ET APPROCHE DE CAPUTO **17**

2.1 L'Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 17

2.1.1 La Théorie de Riemann-Liouville 17

2.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 34

2.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo 48

2.3.1 La Relation entre les Dérivées Fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo 49

3 DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE AU SENS DE HADAMARD **56**

3.1 Intégrale Fractionnaire et Dérivée Fractionnaire au sens de Hadamard . . . 56

3.1.1 Avant la Définition de l'Intégrale de Hadamard 56

3.1.2 Estimations Utiles 66

3.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard 89

3.2.1 La Relation entre la Dérivée Fractionnaire au sens de Hadamard et la Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard 90

4 CALCUL FRACTIONNAIRE GÉNÉRAL **97**

4.1 Intégrale Fractionnaire et Dérivée Fractionnaire d'une Fonction par rapport à une autre Fonction 97

4.2 La Dérivée Fractionnaire Psi-Caputo 117

4.2.1 La Relation entre la Dérivée Fractionnaire Psi-RL et la Dérivée Fractionnaire Psi-Caputo 118

4.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Hilfer 120

4.4 La Dérivé Fractionnaire de Psi-Hilfer 121

Conclusion **125**

Bibliographie **126**

INTRODUCTION

Ce travail est concentré sur quelques types de dérivées fractionnaires avec leur importantes propriétés illustrées par des exemples. Ce mémoire se devise en quatre chapitres ;
Chapitre 1 ; On s'intéresse à deux fonctions qui jouent un rôle déterminant dans le calcul fractionnaire, il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Béta.
Chapitre 2 ; On verra une avant première sur la dérivation fractionnaire, nous saurons que l'intégrale fractionnaire est la colonne vertébrale pour la dérivée fractionnaire. Les deux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo seront au menu.
Chapitre 3 ; On passe à deux autres types de dérivations ; Hadamard et Caputo-Hadamard.
Chapitre 4 ; On fera un résumé pour les dérivées fractionnaires vues ou non . Grâce à la fonction Psi, on définit la dérivée fractionnaire appelée Psi-Hilfer et qui généralise plusieurs types de dérivées fractionnaires.

Après cela, on veut vous informer d'une remarque sur les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires ; tout ce que vous verrez dans la définition de l'intégrale (ou bien dérivée) fractionnaire s'appelle intégrale (ou bien dérivée) fractionnaire *finie* sur côté gauche si "a" est un élément finie, et intégrale (ou bien dérivée) fractionnaire *infinie* sur côté gauche si "a" un est élément infinie ; $a = -\infty$ dans le cas pour Riemann-Liouville (RL) et Caputo , $a = 0^+$ dans le cas pour Hadamard et Caputo-Hadamard. On a éloigné de ces expressions dans ce mémoire pour ne pas rendre les choses plus compliquées, floues ou répétitives.

D'un autre côté on définit l'intégrale fractionnaire finie sur côté droite au sens de RL (on choisit sens RL pour juste un exemple illustratif) par ;

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\ dt\ .$$

Vous comprendrez cette intégrale et ce que on veux vous dire, après vous lirez chapitre $\{1, 2\}$

CHAPITRE

1

NOTIONS DE BASES

1.1 Fonction Factorielle

Définition 1.1.1. *on définit la fonction factorielle naturelle par ;*

$$F(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! \ , \qquad \forall n \geq 1. \tag{1.1.1}$$

Ce qui suit justifie l'obtention de la fonction factorielle ;

Soit :

La variable réelle $\theta > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta}. \tag{1.1.2}$$

En effet :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{-\theta x} dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta x} \right]_0^t = \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{\theta} \left(e^{-\theta t} - 1 \right) = -\frac{1}{\theta} \lim_{t \to +\infty} e^{-\theta t} + \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} \ .$$

On observe que la condition $\theta > 0$ est nécessaire pour avoir,

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\theta t} = 0.$$

On dérive les deux membres de l'égalité (1.1.2) par rapport à θ, on obtient :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right),$$
$$-\int_0^{+\infty} x e^{-\theta x} dx = -\frac{1}{\theta^2} \ ,$$

alors :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta^2}. \tag{1.1.3}$$

On dérive encore une fois la formule obtenue (1.1.3) par rapport à θ, on obtient :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-\theta x} dx\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\theta^2}\right)$$
$$\Rightarrow -\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x} dx = -\frac{2}{\theta^3}$$
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x} dx = \frac{2}{\theta^3}.$$

Si on repète l'opération n fois on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\theta x} dx = \frac{(n-1)!}{\theta^n}, \qquad \forall n \geq 1. \tag{1.1.4}$$

On démontre (1.1.4) par raisonnement par récurrence :

Soit :

$$\forall n \geq 1 \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\theta x} dx = \frac{(n-1)!}{\theta^n} \ \text{..........} \ P(n) \ .$$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie pour $n \geq 1$;

Pour n=1 :

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{-\theta x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta},$$

d'autre part

$$\frac{(1-1)!}{\theta} = \frac{0!}{\theta} = \frac{1}{\theta},$$

donc P(1) est vérifiée.

On suppose que P(n) est vraie, alors :

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\theta x}dx = \frac{(n-1)!}{\theta^n}.$$

On montre que P(n+1) reste vraie ;

$$\int_0^{+\infty} x^{n}e^{-\theta x}dx = \frac{n!}{\theta^{n+1}}.$$

Par une intégration par partie de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{n}e^{-\theta x}dx,$$

on obtient ;

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n}e^{-\theta x}dx &= \left[-\frac{1}{\theta}x^n e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{\theta}e^{-\theta x}nx^{n-1}dx \\ &= 0 + \frac{n}{\theta}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\theta x}dx.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n}e^{-\theta x}dx =& \frac{n}{\theta}\frac{(n-1)!}{\theta^n} \\ =& \frac{n!}{\theta^{n+1}},\end{aligned}$$

donc, P(n+1) est vraie , alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie , donc (1.1.4) est bien vérifiée.

Si on pose $\theta = 1$, l'équation (1.1.4) prend la forme :

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)! \ , \qquad \forall n \geq 1.$$

(C.Q.F.D)

1.2 Fonction Gamma

Définition 1.2.1. *La fonction* Γ *d'Euler est définie par ;*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \ , \tag{1.2.1}$$

$$\textit{tels que : } Re(\alpha) > 0 \ .$$

Elle généralise la fonction factorielle aux valeurs réelles ou complexes,
en effet : $\Gamma(n) = (n-1)!$ *, pour* $n \geq 1$ *.*

Remarque :

On a :

$$\Gamma(1) = 1 \ . \tag{1.2.2}$$

En effet :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+1) = 1.$$

Ou bien ; $\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1.$

Lemme 1.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$ *:*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{1.2.3}$$

Preuve :

Soit :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1-1}e^{-x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx.\end{aligned}$$

On fait l'intégration par partie, tels que :

$\int u' \ v = u \ v - \int u \ v'$,

$u' = e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad u = -e^{-x}$,

$v = x^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad v' = \alpha \ x^{\alpha-1}$,

donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ &= \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad , \qquad \textit{d'après (1.2.1) on obtient :} \\ &= \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

1.2.1 Domaine de Définition de la Fonction Gamma

On démontre que la fonction Gamma est bien définie pour $\alpha > 0$:

Pour $\alpha = 1$:

d'après (1.2.2) , $\Gamma(1) = 1$,

donc pour $\alpha = 1$, la fonction Γ existe et finie.

Pour $\alpha > 1$:

Soit :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

soit : A un element de $]0,\infty[$, on a :

$$\Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_0^{A} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{I} + \underbrace{\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,}_{J}$$

donc :

$\Gamma(\alpha) = I + J$,

tels que :

I est finie car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un compact.

D'un autre côté ,

soit :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}x^{\alpha-1}e^{-x} = 0 \qquad , \quad \alpha > 1,$$

i.e

$$\forall\epsilon > 0 \ , \ \exists B(\epsilon) > 0 \ , \ \forall x > B(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left|x^{\frac{3}{2}}x^{\alpha-1}e^{-x}\right| < \epsilon.$$

On choisit $\epsilon = 1$,

donc : $\left|x^{\frac{3}{2}}x^{\alpha-1}e^{-x}\right| < 1$, sachant que : $x^{\frac{3}{2}}x^{\alpha-1}e^{-x} > 0$ *pour* $\forall x > 0$,

donc : $x^{\frac{3}{2}}x^{\alpha-1}e^{-x} < 1 \implies x^{\alpha-1}e^{-x} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\implies \int_{B(1)}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int_{B(1)}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx < +\infty,$$

car : $\int_{B(1)}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente i.e finie,

parce que elle est présentée l'intégrale de Riemann [3/2 > 1],

posons B(1)=A , donc : $\int_{A}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente, d'après le critère de comparaison,

alors : J est finie,

on déduit que la fonction Γ est finie pour $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha < 1$:

Soit :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

soit : c un nombre réel plus proche à 0 et A fixe dans [c,+∞[,

$$\implies \Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{K} + \underbrace{\int_c^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{L} + \underbrace{\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{M},$$

donc : $\Gamma(\alpha) = K + L + M$.

Soit :

$$K = \int_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad , \quad 0 < \alpha < 1,$$

on a : $x^{\alpha-1}e^{-x} \simeq_{v(0)} x^{\alpha-1}$, donc : $\int_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}dx \simeq_{v(0)} \int_0^c x^{\alpha-1}dx$,

et $\int_0^c \frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$ convergente d'après l'intégrale de Riemann ; $(0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < 1-\alpha < 1)$,

donc : $\int_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente d'après le critère d'équivalence,

donc K existe et est finie.

L est finie car la fonction $x^{\alpha-1}e^{-x}$ est une fonction continue sur le compact [c, A].

M est finie aussi : la même technique appliquée à J .

alors on conclut que la fonction Γ est finie pour $0 < \alpha < 1$.

Donc la fonction Γ est bien définie pour α strictement positif .

On démontre que la fonction Gamma est bien définie pour $Re(\alpha) > 0$:

On prend $\alpha \in \mathbb{C}$, α =a+ib,

tels que :

$Re(\alpha) > 0$ ie a>0,

$\forall Im(\alpha) \in \mathbb{R}$ ie $\forall b \in \mathbb{R}$,

pour généraliser la fonction Γ sur $\mathbb{C}$.

Soit :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a+ib-1} e^{-x} dx$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1+ib} e^{-x} dx \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} x^{ib} dx$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} e^{\ln x^{ib}} dx \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} e^{ib \ln x} dx$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \left(\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)\right) dx$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \cos(b \ln x) dx}_{P} + i \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \sin(b \ln x) dx,}_{Q}$$

donc la fonction Γ est bien définie si et seulement si P et Q sont convergentes ,

alors :

$$|P| = \left| \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \cos(b \ln x) dx \right|$$

$$\Longrightarrow |P| \leq \int_0^{+\infty} \left| x^{a-1} e^{-x} \cos(b \ln x) \right| dx$$

$$\Longrightarrow |P| \leq \int_0^{+\infty} |\underbrace{x^{a-1} e^{-x}}_{>0}| \underbrace{|\cos(b \ln x)|}_{\leq 1} dx$$

$$\Longrightarrow |P| \leq \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

donc : P est absolument convergente si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ est convergente, et on a déjà étudie $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ qui est convergente pour $a > 0$, alors P est absolument convergente pour $a > 0$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, donc P est convergente pour $\forall Re(\alpha) > 0$,

et on fait la même chose pour Q ,

donc : la fonction Γ est bien définie pour $Re(\alpha) > 0$ et $Im(\alpha)$ quelconque .

Prolongement de la fonction Gamma à $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^-$:

On commence par prolonger la fonction Gamma définie sur $\{\alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } Re(\alpha) \geq 0\}$ à la bande $M_{-1} = \{\alpha \in \mathbb{C}^*/\{-1\} \text{ et } 0 > Re(\alpha) \geq -1\}$ en utilisant la relation :

$$\alpha \in M_{-1} \ ; \ \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

Ce prolongement peut être itéré indéfiniment , ce qui nous donnera un prolongement de la fonction Gamma à $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^-$ par la relation :

$$\alpha \in M_{-k} \ ; \ \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(\alpha)\ (\alpha+1)\ ...\ (\alpha+k-1)}.$$

Avec $M_{-k} = \{\alpha \in \mathbb{C}^*/\{-k\} \text{ et } -k+1 > Re(\alpha) \geq -k\}$.

Remarque :

Si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, alors $|\Gamma(\alpha)| = \infty$

Résultat :

On conclut que la fonction Γ est bien définie pour $\alpha \in \{\mathbb{C}/\mathbb{Z}^-\}$.

Exemple 1.2.1. *Calcule* $\Gamma(1/2)$ *:*

Soit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx,$$

on pose : $\sqrt{x} = y \Longrightarrow x = y^2$, $dx=2ydy$ $/ x=0 \Longrightarrow y=0 / (x \longrightarrow +\infty) \Longrightarrow (y \longrightarrow +\infty)$*,*

alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{y} 2ydy$$
$$\Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{I}.$$

On pose :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz,$$
$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

alors :

$$I_1.I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$
$$I_1.I_2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-z^2-t^2} dz\ dt,$$

on pose : $\quad z = r\cos\theta \quad , \quad t = r\sin\theta \quad / \quad dz\ dt = r\ dr\ d\theta,$

$(\ z \in [0, +\infty[\ \wedge\ t \in [0, +\infty[\ ) \quad \Longrightarrow \quad (\ r \in [0, +\infty[\ \wedge\ \theta \in [0, \pi/2]\ ),$

donc :

$$I_1.I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}\ r\ dr\ d\theta,$$
$$\{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\}$$
$$\Longrightarrow I_1.I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\ dr\ d\theta,$$
$$\{dr^2 = 2rdr\}$$
$$\Longrightarrow I_1.I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\ dr^2\ d\theta$$
$$\Longrightarrow I_1.I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}\ d\theta$$
$$\Longrightarrow I_1.I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta$$
$$\Longrightarrow I_1.I_2 = \frac{\pi}{4},$$

donc si on pose $I_1 = I_2 = I$

alors :

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ . \tag{1.2.4}$$

Exemple 1.2.2. *Calcule* $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$ *pour* $n \geq 0$ *:*

Soit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \ \{\textit{selon}\ (1.2.3)\}$$

d'aprés (1.2.4) *, on obtient :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ , \tag{1.2.5}$$

un autre cas ;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)=\Gamma\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)+1\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\quad , \{selon\ (1.2.3)\}$$

d'après (1.2.5) *, on obtient :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{3}{2^2}\ \sqrt{\pi}\ , \tag{1.2.6}$$

un autre ;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)=\Gamma\left(\left(\frac{1}{2}+2\right)+1\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)\quad , \{selon\ (1.2.3)\}$$

d'après (1.2.6) *, on obtient :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)=\frac{3*5}{2^3}\ \sqrt{\pi}\ , \tag{1.2.7}$$

un autre cas pour plus précise ;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+4\right)=\Gamma\left(\left(\frac{1}{2}+3\right)+1\right)=\left(\frac{1}{2}+3\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)\quad , \{selon\ (1.2.3)\}$$

d'après (1.2.7) *, on obtient :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+4\right)=\frac{3*5*7}{2^4}\ \sqrt{\pi}\ ,$$

ainsi de suite , jusqu'à obtenir le résultat suivant :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{1*3*5*7*.......*(2n-1)}{2^n}\ \sqrt{\pi}\ ,$$

sachant que ;

$$1*3*5*7*.......*(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\ (n-1)!}\ ,$$

alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\ (n-1)!\ 2^n}\ \sqrt{\pi}\ =\ \frac{2\ (2n-1)!}{4^n\ (n-1)!}\ \sqrt{\pi}\ =\ \frac{2n\ (2n-1)!}{4^n\ n\ (n-1)!}\ \sqrt{\pi}\ ,$$

donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n\ n!}\ \sqrt{\pi} \qquad ,\forall n\geq 0\ . \tag{1.2.8}$$

On passe au raisonnemnt par récurrence pour démontrer (1.2.8).

Soit :

$$\forall n\geq 0\quad ,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n\ n!}\ \sqrt{\pi}\ ....\ P(n)\ ,$$

on démontre par récurrence que P(n) est vraie pour $n\geq 0$ *;*

Pour n = 0 :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+0\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ ,\quad \{selon\ (1.2.4)\}$$

d'autre part on a ;

$$\frac{(2*0)!}{4^0\ 0!}\ \sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\ ,$$

donc P(0) est vérifiée .

On suppose que P(n) est vraie :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n\ n!}\ \sqrt{\pi}\ .$$

On démontre que pour P(n+1) est vraie , tels que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+(n+1)\right)=\ \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\ (n+1)!}\ \sqrt{\pi}\ ,$$

soit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)=\left(\frac{1}{2}+n\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\quad ,\ \{selon\ (1.2.3)\}$$

d'après l'hypothèse , on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)=\left(\frac{1}{2}+n\right)\ \frac{(2n)!}{4^n\ n!}\ \sqrt{\pi}=\frac{(2n+1)(2n)!}{2*4^n\ n!}\ \sqrt{\pi}=\frac{(2n+2)(2n+1)!}{2(n+1)2*4^n\ n!}\ \sqrt{\pi}\ ,$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+(n+1)\right)=\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\ (n+1)!}\ \sqrt{\pi}\ ,$$

donc P(n+1) est vérifiée pour , alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie , donc (1.2.8) *est bien vérifiée.*

1.3 Fonction Béta

Définition 1.3.1. *C'est une fonction spéciale de type d'Euler définie par :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1.3.1}$$

tels que : Re(p)>0 , Re(q)>0.

Lemme 1.3.1. ***La symétrie de la fonction Béta***

Soit $Re(p) > 0$, $Re(q) > 0$ *:*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p). \tag{1.3.2}$$

Preuve :

Soit :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

on pose : 1-x=t $\Longrightarrow$ *x=1-t / dx=-dt / x=0* $\Longrightarrow$ *t=1 , x=1* $\Longrightarrow$ *t=0,*

alors :

$$\beta(p,q) = \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)$$
$$\Longrightarrow \beta(p,q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$$
$$\Longrightarrow \beta(p,q) = \beta(q,p).$$

Lemme 1.3.2. ***La forme trigonométrique de la fonction Béta***

Soit $Re(p) > 0$, $Re(q) > 0$ *:*

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^{2p-1}\ (sin\theta)^{2q-1}\ d\theta. \tag{1.3.3}$$

Preuve :

Soit :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

on pose : $x{=}\cos^2\theta \Longrightarrow 1{-}x{=}1{-}\cos^2\theta{=}\sin^2\theta$ / $dx{=}{-}2\cos\theta\sin\theta\ d\theta,$

$x{=}0 \Longrightarrow \theta = \pi/2$, $x{=}1 \Longrightarrow \theta = 0,$

donc :

$$\beta(p,q)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(cos\theta)^{2p-2}\ (sin\theta)^{2q-2}\ (-2)cos\theta\ sin\theta\ d\theta$$
$$\Longrightarrow\beta(p,q)=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2p-1}\ (sin\theta)^{2q-1}\ d\theta.$$

Lemme 1.3.3. ***La relation entre les deux fonctions Gamma et Béta***

Soit $Re(p)>0$, $Re(q)>0$ *:*

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.3.4}$$

Preuve :

Soit :

$$\Gamma(p)=\int_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx,$$

on pose : $x{=}t^2$, $dx{=}2tdt$ / $x{=}0\Longrightarrow t{=}0$, $(x\longrightarrow+\infty)\Longrightarrow(t\longrightarrow+\infty)$

alors :

$$\Gamma(p)=\int_{0}^{+\infty}t^{2p-2}e^{-t^2}2tdt\quad\Longrightarrow\quad\Gamma(p)=2\int_{0}^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt,$$

on pose aussi :

$$\Gamma(q)=2\int_{0}^{+\infty}y^{2p-1}e^{-y^2}dy,$$

donc :

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_{0}^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt\int_{0}^{+\infty}y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$
$$\Longrightarrow\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}t^{2p-1}\ y^{2q-1}\ e^{-t^2-y^2}\ dt\ dy,$$

on pose : $t=r\ cos\theta$, $y=r\ sin\theta$ / $dt\ dy=r\ dr\ d\theta$,

$(\ t\in[0,+\infty[\ \wedge\ y\in[0,+\infty[\ )\Longrightarrow(\ r\in[0,+\infty[\ \wedge\ \theta\in[0,\pi/2]\ ),$

alors :

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{+\infty}r^{2p-1}\ (cos\theta)^{2p-1}\ r^{2q-1}\ (sin\theta)^{2q-1}\ e^{-r^2cos^2\theta-r^2sin^2\theta}\ r\ \ dr\ d\theta$$
$$\Longrightarrow\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{+\infty}r^{2p+2q-2}\ e^{-r^2}\ (cos\theta)^{2p-1}\ (sin\theta)^{2q-1}\ r\ dr\ d\theta$$
$$\Longrightarrow\Gamma(p).\Gamma(q)=\underbrace{2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2p-1}(sin\theta)^{2q-1}\ d\theta}_{I}\underbrace{\int_{0}^{+\infty}(r^2)^{p+q-1}\ e^{-r^2}dr^2}_{J},$$

d'après (1.3.3), *on obient :* $I{=}\beta(p,q)$,

d'autre part ,

si on pose : $r^2 = s$ / *r=0* $\Longrightarrow$ *s=0* , ($r\longrightarrow +\infty$) $\Longrightarrow$ ($s \longrightarrow +\infty$),

alors J devient :

$$J = \int_0^{+\infty} s^{p+q-1}e^{-s}ds \quad \Longrightarrow \quad J = \Gamma(p+q),$$

donc : $\Gamma(p).\Gamma(q) = \beta(p,q).\Gamma(p+q)$

$\Longrightarrow \quad \beta(p,q) = \Gamma(p).\Gamma(q) \;/\; \Gamma(p+q).$

CHAPITRE

2

DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE CLASSIQUE : APPROCHE DE RIEMANN- LIOUVILLE ET APPROCHE DE CAPUTO

2.1 L'Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

2.1.1 La Théorie de Riemann-Liouville

La théorie fractionnaire de Riemann-Liouville (RL) consiste à la définition de la dérivée au sens RL . Pour se faire, on commence par des intégrales d'ordres arbitraires en utilisant une formule récurrente de primitive d'une fonction continue ;

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(s)ds, \tag{2.1.1}$$

alors :

$$I_a^2 f(x) = I_a^1 \; I_a^1 f(x) = \int_a^x I_a^1 f(t) \; dt \; , \qquad \{a < s < t < x < b\}$$

donc ;

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^t f(s) \; ds \; dt. \tag{2.1.2}$$

(2.1.2), pour passer d'une double intégrale à une seule intégrale on utilise la méthode suivante : 1^{er} Méthode : Par l'intégrale par partie :

Soit :

$\int u' \; v = u \; v - \int u \; v'$,

tels que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = 1 \Longrightarrow u = t,$$
$$v = \int_a^t f(s)ds \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = v' = f(t),$$

alors : (2.1.2) devient :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s)ds \right]_a^x - \int_a^x tf(t)dt \\ &= x \underbrace{\int_a^x f(s)ds}_{I} - a \underbrace{\int_a^a f(s)ds}_{0} - \int_a^x tf(t)dt, \end{aligned}$$

dans I en change "s" par "t" , car "s" est une variable muette.

$$\Longrightarrow I_a^2 f(x) = x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$
$$\Longrightarrow I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

2^{eme} Méthode : On applique la méthode de Fubini-Tonelli :

Soit :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^t f(s) \; ds \; dt,$$

La méthode de Fubini-Tonelli permet d'inverse l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \int_s^x f(s)\ dt\ ds \\ &= \int_a^x f(s) \underbrace{\int_s^x dt}_{(x-s)}\ ds \\ &= \int_a^x f(s)(x-s)\ ds, \end{aligned}$$

on pose s=t, on obtient :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\ dt. \tag{2.1.3}$$

En intégrant une nouvelle fois , on obtient :

$$I_a^3 f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)\ dt,$$

ainsi de suite jusqu'à :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\ dt. \tag{2.1.4}$$

On démontre (2.1.4) par récurrence.

Soit P(n) définie par :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\ dt \quad , \forall n \geq 1 \ \ ....P(n).$$

Pour n=1 :

$$\begin{aligned} I_a^1 f(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t)\ dt, \\ I_a^1 f(x) &= \int_a^x f(t)\ dt, \end{aligned}$$

elle vérifiée d'après (2.1.1).

On suppose que P(n) est vraie :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\ dt.$$

On démontre que P(n+1) est vraie :

$$I_a^{n+1} f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ dt.$$

Soit :

$$I_a^{n+1} f(x) = I_a^1 \; I_a^n f(x),$$

d'après l'hypothèse on obtient :

$$I_a^{n+1} f(x) = \int_a^x \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) \; ds \; dt,$$

d'après la méthode de Fubini-Tonelli on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^{n+1} f(x) &= \int_a^x \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) \; dt \; ds \\
&= \int_a^x f(s) \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \; dt \; ds \\
&= \int_a^x f(s) \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n}(t-s)^n \right]_s^x ds \\
&= \int_a^x f(s) \frac{1}{n!} (x-s)^n ds,
\end{aligned}$$

on pose s=t, on obtient :

$$I_a^{n+1} f(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

alors : P(n+1) est vrai, donc : par le principe de récurrence P(n) est vraie , alors : (2.1.4) est vérifiée.

Définition 2.1.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > 0$, on définit l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \tag{2.1.5}$$

On remarque que $I_a^\alpha f$ est du moins une généralisation (formellement) de l'intégrale $I_a^n f$ au valeurs réelles ou complexe .

Remarque : *La définition précednete reste valable pour $]a, b[$, si a ou b des éléments infinies $(a = -\infty, b = +\infty)$.*

Exemple 2.1.1. *Soit $Re(\beta) > -1$ et $Re(\alpha) > 0$:*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \; (x-a)^{\alpha+\beta} \; . \tag{2.1.6}$$

Preuve :

Soit :

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta \ dt,$$

on pose :

$$\tau = \frac{t-a}{x-a} \qquad (*),$$

$$t = a \Longrightarrow \tau = 0 \quad , \quad t = x \Longrightarrow \tau = 1,$$

$$(*) \Longrightarrow \tau(x-a) = t-a$$

$$\Longrightarrow (x-t) + \tau(x-a) = x-t+t-a$$

$$\Longrightarrow (x-t) = (x-a) - \tau(x-a)$$

$$\Longrightarrow (x-t) = (x-a)(1-\tau),$$

$$(*) \Longrightarrow dt = (x-a)d\tau,$$

alors :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta (x-a)^\beta (x-a) \ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \underbrace{\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{(\beta+1)-1} \ d\tau}_{\beta(\alpha,\beta+1)} \qquad \text{, d'après (1.3.1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \quad \underbrace{\beta(\alpha,\beta+1)}_{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)/\Gamma(\alpha+\beta+1)} \qquad \text{, d'après (1.3.4)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

alors :

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \ (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Remarque :

D'après (2.1.6) *, la fonction* Γ *est bien définie ssi :* $Re(\beta+1) > 0 \Longrightarrow Re(\beta) > -1$ *,et* $Re(\alpha) > 0$.

Exemple 2.1.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$ *:*

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \ (x-a)^\alpha. \tag{2.1.7}$$

Preuve :

Soit :

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\alpha} \left[-(x-t)^\alpha\right]_a^x\ ,$$

alors :

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\ (x-a)^\alpha.$$

Exemple 2.1.3. *Soit* $Re(\alpha) > 0$ *:*

$$I_0^\alpha\ x^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\ x^{2\alpha-1}. \tag{2.1.8}$$

Preuve :

D'après (2.1.6) *et pour* a*=0,* $\beta = \alpha - 1$*, on obtient :*

$$I_0^\alpha\ x^{\alpha-1} = \frac{\Gamma((\alpha-1)+1)}{\Gamma(\alpha+(\alpha-1)+1)}\ x^{\alpha+(\alpha-1)},$$

alors :

$$I_0^\alpha\ x^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\ x^{2\alpha-1}.$$

Exemple 2.1.4. *Soit* $Re(\alpha) > 0\ ,\ a = -\infty\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}_+^*$ *:*

$$I_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^\alpha}\ . \tag{2.1.9}$$

Preuve :

Soit :

$$I_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1}\ e^{\lambda t}\ dt,$$

on pose :

$$x - t = \tau \implies t = x - \tau \implies dt = -d\tau,$$

$$t = x \implies \tau = 0\ \ ,\ \ (t \longrightarrow\ -\infty) \implies (\tau \longrightarrow\ +\infty),$$

alors :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha\ e^{\lambda x} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^0 \tau^{\alpha-1}\ e^{\lambda(x-\tau)}\ (-d\tau) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1}\ e^{-\lambda\tau}\ d\tau\ e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

on pose :

$$\lambda\tau = y \implies \tau = \frac{y}{\lambda} \implies d\tau = \frac{dy}{\lambda},$$

$$\tau = 0 \implies y = 0 \quad , \quad (\tau \longrightarrow +\infty) \implies (y \longrightarrow +\infty) \; ; \; car \quad \lambda \in \mathbb{C}_{+}^{*},$$

alors :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} \; e^{\lambda x} &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \; e^{-y} \; \frac{dy}{\lambda} \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy}_{\Gamma(\alpha)} \; \frac{1}{\lambda^{\alpha}}, \end{aligned}$$

alors :

$$I_a^{\alpha} \; e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\alpha}} \; .$$

Exemple 2.1.5. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $a = -\infty$, $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$I_a^{\alpha} \cos x = \cos\left((x - \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right) \; . \tag{2.1.10}$$

$$I_a^{\alpha} \sin x = \sin\left((x - \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right) \; . \tag{2.1.11}$$

Preuve :

Sachant que :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

alors : $I_a^{\alpha} e^{ix} = I_a^{\alpha} \cos x + i \; I_a^{\alpha} \sin x,$

et d'après (2.1.9) *si on pose* $\lambda = i$, *tels que* $i \in \mathbb{C}_{+}^{*}$,

donc : $I_a^{\alpha} \cos x + i \; I_a^{\alpha} \sin x \; = \dfrac{e^{ix}}{i^{\alpha}},$

avec : $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$, *tels que* $k \in \mathbb{N}$,

donc : $I_a^{\alpha} \cos x + i \; I_a^{\alpha} \sin x \; = \dfrac{e^{ix}}{e^{i\alpha(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}} = e^{i(x - \alpha(\frac{\pi}{2}+2k\pi))},$

donc : $I_a^{\alpha} \cos x + i \; I_a^{\alpha} \sin x \; = \cos\left(x - \alpha(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right) + i \; \sin\left(x - \alpha(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right),$

alors :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} \cos x &= \cos\left((x - \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right) \; , \\ I_a^{\alpha} \sin x &= \sin\left((x - \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right) \; . \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. *Soit :* $f \in C^0([a,b])$, *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que ; Re(α) >0,Re(β)>0, alors :*

$$I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{2.1.12}$$

Preuve :

Soit : $\{Re(\alpha) > 0\ ,\ Re(\beta) > 0\}$

$$I_a^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)\ dt,$$

et d'autre part :

$$I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ I_a^{\beta}\ f(t)\ dt,$$

$$\text{avec :}\quad I_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\ ds,$$

alors :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\ ds\ dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s)\ ds\ dt, \end{aligned}$$

{*on utilise la méthode de Fubini-Tonelli pour inverser l'ordre de l'intégration* }

alors :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s)\ dt\ ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1}\ dt\ ds, \end{aligned}$$

$$\text{on pose :}\quad \tau = \frac{t-s}{x-s} \quad (*)$$

$$t = s \Longrightarrow \tau = 0\ ,\ t = x \Longrightarrow \tau = 1,$$

$$\begin{aligned} (*) &\Longrightarrow (t-s) = \tau(x-s) \\ &\Longrightarrow -t = -s - \tau(x-s) \\ &\Longrightarrow x - t = x - s - \tau(x-s) \\ &\Longrightarrow (x-t) = (x-s)(1-\tau), \end{aligned}$$

$$(*) \Longrightarrow dt = (x-s)d\tau,$$

alors :

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\int_0^1 (x-s)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}(x-s)^{\beta-1}(x-s)\ d\tau\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}\underbrace{\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\ d\tau}_{\beta(\alpha,\beta)}\ ds \quad ,\{d'après\ (1.3.1)\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}\ ds\ \underbrace{\beta(\alpha,\beta)}_{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \quad ,\{d'après\ (1.3.4)\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}\ ds,
\end{aligned}$$

si on pose s=t, on obtient :

$$I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\ dt,$$

$$I_a^{\alpha}\ I_a^{\beta}\ f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

Proposition 2.1.2. *Soit :* $f \in C^0([a,b])$, *pour* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que Re(α) >1 ,*

alors :

$$\frac{d}{dx} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x). \tag{2.1.13}$$

Preuve :

Soit : $\{Re(\alpha) > 1\}$

$$I_a^{\alpha-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\ dt,$$

d'autre part :

$$\frac{d}{dx} I_a^{\alpha} f(x) = \frac{d}{dx}\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\ dt.$$

Rappel :

Règle de dérivation de Leibnitz :

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,t)\ dt = g'(x)\ f(x,g(x)) - h'(x)\ f(x,h(x)) + \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{d}{dx}\ f(x,t)\ dt. \tag{2.1.14}$$

alors : d'après (2.1.14)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[x' \underbrace{(x-x)^{\alpha-1}}_{0} f(x) - \underbrace{a'}_{0} (x-a)^{\alpha-1} f(a) + \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \\
&= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \\
&= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \qquad , \{d'\text{après } (1.2.3)\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt, \\
&\Longrightarrow \frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x).
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.3. *Soit :* $f \in C^0([a,b])$*, pour* $\alpha, \in \mathbb{C}$ *tels que* $Re(\alpha) > n$, $\forall n \geq 1$*, alors :*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x). \tag{2.1.15}$$

{*c'est une généralisation de* (2.1.13)}

Preuve :

On pose :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x) \quad , \forall n \geq 1 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ P(n),$$

avec $Re(\alpha) > n$*.*

On démontre par récurrence que $P(n)$ *est vraie :*

On vérifie pour n=1 :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^1 I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x) \quad , avec \ \ Re(\alpha) > 1,$$

elle est vérifiée pour n=1, d'après (2.1.13)*.*

On suppose que $P(n)$ *est vrai :*

tels que ; $Re(\alpha) > n$*, on a :*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x).$$

On démontre que P(n+1) est vérifiée, tels que :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{\alpha} f(x) = \ I_a^{\alpha-n-1} f(x)\ ,$$

$$\textit{tels que } Re(\alpha) > n+1.$$

Soit :

Re(α) > n+1 > n ,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right) \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} I_a^{\alpha} f(x)}_{I_a^{\alpha-n} f(x)} \qquad ,\{\textit{d'aprés l'hypothèse}\}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{\alpha} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\ I_a^{\alpha-n} f(x)}_{I_a^{(\alpha-n)-1}},$$

sachant que Re(α) >n+1 $\Longrightarrow$ Re(α)-n>1,donc daprès (2.1.13), on obtient :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha-n-1}\ ,$$

donc P(n+1) est vérifiée, alors d'après le principe de récurrence on obtient que P(n) est vraie pour , donc (2.1.15) est vérifiée.

Proposition 2.1.4. *Soit : $f \in C^0([a,b])$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que Re(α) >0, alors :*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I_a^{\alpha} f = f. \tag{2.1.16}$$

Preuve :

D'après (2.1.7) on a :

$$I_a^{\alpha} 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\ (x-a)^{\alpha} \Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} I_a^{\alpha} 1 = \lim_{\alpha \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1}\ \underbrace{(x-a)^{\alpha}}_{1} \Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} I_a^{\alpha} 1 = 1 \quad (*).$$

Soit :

$$\begin{aligned}
|I_a^{\alpha} f(x) - f(x) I_a^{\alpha} 1| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\ dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x)\ dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(x))\ dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left| (f(t) - f(x)) \right| dt \qquad , \{\Gamma(\alpha) > 0, (x-t)^{\alpha-1} > 0\}.
\end{aligned}$$

Sachant que $f \in [a,b]$*, ie* f *est continue sur* $[a,b]$*, alors :*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x, t \in [a,b] \ ; \quad |t-x| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon,$$

$$\text{donc : } \ |t-x| < \delta \Longrightarrow -\delta < t - x < \delta \Longrightarrow x - \delta < t < \delta + x \quad (\Delta),$$

donc :

$$|I_a^\alpha f(x) - f(x) I_a^\alpha 1| \leq \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |(f(t) - f(x))| dt}_{K} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} |(f(t) - f(x))| dt}_{J},$$

d'après (Δ)*, alors :*

$$t \in [x-\delta, x] \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon,$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} |(f(t) - f(x))| \ dt < \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \ \epsilon \ dt \\
&\Longrightarrow J < \ \epsilon \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \ dt \\
&\Longrightarrow J < \ \epsilon \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \frac{1}{\alpha} \left[-(x-t)^\alpha\right]_{x-\delta}^{x} \\
&\Longrightarrow J < \ \epsilon \ \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

alors :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} J < \lim_{\alpha \to 0^+} \ \epsilon \ \frac{\overbrace{\delta^\alpha}^{1}}{\underbrace{\Gamma(\alpha+1)}_{1}} \Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} J < \ \epsilon \quad ie \quad \lim_{\alpha \to 0^+} J = 0.$$

D'autre part :

soit : $|f(t)-f(x)| \leq |f(t)|+|f(x)|$

$$et\,; \ \ |f(t)| \leq \overbrace{\sup_{t \in [a, x-\delta]} |f(t)|}^{M} \quad , \quad |f(x)| = c \qquad ,donc\,; \quad |f(t) - f(x)| \leq k \quad , \{k = M + c\}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta}(x-t)^{\alpha-1}|(f(t)-f(x))|\ dt \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta}(x-t)^{\alpha-1}k\ dt\\
&\Longrightarrow\ K \leq\ k\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta}(x-t)^{\alpha-1}\ dt\\
&\Longrightarrow\ K \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left[-(x-t)^{\alpha}\right]_a^{x-\delta}\\
&\Longrightarrow\ K \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left((x-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

alors :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\ K \leq \lim_{\alpha\to 0^+}\underbrace{\frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1}\ \underbrace{(\underbrace{(x-a)^{\alpha}}_{1}-\underbrace{\delta^{\alpha}}_{1})}_{0} \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}\ K\leq 0 \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}\ K=0,$$

sachant que ;

$$\begin{aligned}
&|I_a^{\alpha}f(x)-f(x)I_a^{\alpha}1| \leq K+J \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}|I_a^{\alpha}f(x)-f(x)I_a^{\alpha}1| \leq \lim_{\alpha\to 0^+}(K+J)\\
&\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}|I_a^{\alpha}f(x)-f(x)I_a^{\alpha}1|\leq 0\\
&\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^{\alpha}f(x)-f(x)I_a^{\alpha}1)=0\\
&\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}I_a^{\alpha}f(x)=f(x)\underbrace{\lim_{\alpha\to 0^+}I_a^{\alpha}1}_{1}\quad ,\ \{\textit{d'après } (*)\ \}\\
&\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+}I_a^{\alpha}f(x)=f(x).
\end{aligned}$$

Remarque : $I_a^0 f(x)=f(x)$.

Proposition 2.1.5. *Soit :* $f\in C^0([a,b])$, *pour* $\alpha\in\mathbb{C}$ *tels que Re(α) >0,*

alors :

$$\lim_{x\to a^+} I_a^{\alpha}f(x)=0. \tag{2.1.17}$$

Preuve :

Soit :

$$\begin{aligned}
|I_a^{\alpha}f(x)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\ dt\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}|f(t)|\ dt \quad ,\ et\ ;\ \ |f(t)|\leq \overbrace{\sup_{t\in[a,x]}|f(t)|}^{M}\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}\ dt,
\end{aligned}$$

alors :

$$|I_a^\alpha f(x)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha \Longrightarrow \lim_{x\to a}\ |I_a^\alpha f(x)| \leq \lim_{x\to a}\ \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{(x-a)^\alpha}_{0}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\ |I_a^\alpha f(x)| \leq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a}\ I_a^\alpha f(x) = 0.$$

Proposition 2.1.6. *Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$, $\forall n \geq 1$, alors :*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n f(x) = f(x). \tag{2.1.18}$$

Preuve :

$1^{\text{ère}}$*Méthode :*

On démontre par récurrence que :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^n f(x) = f(x)\ ,\ \forall n \geq 1\ ....P(n).$$

Pour n=1 :

$$\frac{d}{dx}\ I_a^1 f(x) = \frac{d}{dx}\ \int_a^x f(t)\ dt,$$

d'après (2.1.14), on obtient; $\displaystyle \frac{d}{dx}\ I_a^1 f(x) = \underbrace{x'}_{1} f(x) - \underbrace{a'}_{0} f(a) + \int_a^x \underbrace{\frac{d}{dx}f(t)}_{0}\ dt$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\ I_a^1 f(x) = f(x),$$

donc P(1) est vérifiée.

On suppose que P(n) est vraie :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n f(x) = f(x).$$

On démontre qu'elle est vraie pour P(n+1) :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{n+1} f(x) = \ f(x).$$

Soit :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{n+1} f(x) = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^n(I_a f)(x)}_{I_a f(x)} \quad ,\{\textit{d'après l'hypothèse}\}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{n+1} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} I_a f(x)}_{f(x)} \quad ,\{\textit{d'après } (2.1.14)\}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_a^{n+1} f(x) = f(x),$$

donc P(n+1) est vraie , alors d'après le principe de récurrence on obtient que P(n) est vrai, alors (2.1.18) est vérifiée.

$2^{ème}$*Méthode :*

D'après (2.1.15) ;

$$\begin{aligned}
&\textit{pour } Re(\alpha) > n \ , \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x),\\
&\textit{donc :} \quad \lim_{\alpha\to n^-} \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = \lim_{\alpha\to n^-} I_a^{\alpha-n} f(x)\\
&\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n f(x) = \lim_{\alpha\to n^-} I_a^{\alpha-n} f(x),\\
&\textit{si on pose } \ \alpha - n = \gamma, \ \textit{alors ;} \quad \lim_{\gamma\to 0^+} I_a^\gamma f(x) = f(x) \quad ,\{\textit{d'après } (2.1.16)\}\\
&\textit{donc :} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Remarque :

donc, d'après (2.1.15) et (2.1.18) on peut écrire comme suit ;

$$\forall Re(\alpha) \geq n \ , \ \textit{tels que } \ n \geq 1 \ ; \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x) \tag{2.1.19}$$

Proposition 2.1.7. *Soit* $f \in C^n([a,b])$, $n \geq 1$ *:*

$$I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a), \tag{2.1.20}$$

$$\textit{sachant que :} \qquad f^{(j)}(a) \equiv \lim_{x\to a} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^j f(x) \ .$$

Preuve :

Soit $f \in C^n([a,b])$, $n \geq 1$ *et* $Re(\alpha) > 0$ *, on a :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \ dt,$$

on fait une intégration par partie comme suit :

$\int u' \ v = u \ v - \int u \ v'$,

avec :

$u' = (x-t)^{\alpha-1} \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{1}{\alpha}(x-t)^\alpha$,

$v = f(t) \quad \Longrightarrow \quad v' = f'(t)$,

donc :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\left[-\frac{1}{\alpha}(x-t)^\alpha f(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{1}{\alpha}(x-t)^\alpha f'(t)\ dt\right),$$
$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)\ dt,$$

alors :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + I_a^{\alpha+1}f'(x)\ . \tag{2.1.21}$$

Si on fait l'intégration par partie une $2^{ème}$ *fois sur* $I_a^{\alpha+1}f'(x)$*, on obtient :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}f'(a) + I_a^{\alpha+2}f''(x),$$

ainsi de suite jusqu'à obtenue :

$$I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\ \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)}f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n}f^{(n)}(x). \tag{2.1.22}$$

Pour démontrer le résultat (2.1.22) il faut passer à la démonstration par récurrence.

Soit : $\forall n \geq 1,\ f \in C^n([a,b]),\ Re(\alpha) > 0$*;*

$$I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\ \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)}f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n}f^{(n)}(x)\ ....P(n).$$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie :

Pour n=1 :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + I_a^{\alpha+1}f'(x),$$

elle est vérifiée d'après (2.1.21) .

On suppose que P(n) est vraie :

$$\forall n \geq 1\ ,\ f \in C^n([a,b])\ ,\ Re(\alpha) > 0\ ; \qquad I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\ \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)}f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n}f^{(n)}(x).$$

On démontre que P(n+1) est vraie :

$$\forall n \geq 1, f \in C^{n+1}([a,b]), Re(\alpha) > 0\ ;\ I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n}\ \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)}f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n+1}f^{(n+1)}(x).$$

Soit :

$$I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(t)\ dt,$$

par une intégration par partie , on a :

$$I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \left(\left[\frac{-1}{(\alpha+n)} (x-t)^{\alpha+n} f^{(n)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{1}{(\alpha+n)} (x-t)^{\alpha+n} f^{(n+1)}(t) dt \right)$$

$$\Longrightarrow I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) = \frac{(x-a)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} f^{(n)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x),$$

on remplace cette dernière dans l'hypothèse, et on obtient :

$$I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + \frac{(x-a)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} f^{(n)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x),$$

$$I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x),$$

donc P(n+1) est vérifiée, et d'après le principe de récurrence P(n) est vraie, alors (2.1.22) *a été démontrée.*

Si on fait la limite quand α *tend vers* 0^+ *dans les deux cotée de* (2.1.22) *, on obtient :*

$$\underbrace{\lim_{\alpha \to 0^+} I_a^{\alpha} f(x)}_{f(x)} = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) \right) \quad , \{d'après\ (2.1.16)\}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j}}{\Gamma(1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{n} f^{(n)}(x),$$

alors :

$$I_a^{n} f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j}}{j!} f^{(j)}(a).$$

(C.Q.F.D)

2.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. *Soit f une fonction continue sur* $[a,b]$,$(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *;un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$ *et Re*$(\alpha) \in]n-1,n[$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$. *On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (RL) d'ordre* α *de la fonction f la fonction notée et définie par :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha} f(x). \tag{2.2.1}$$

En d'autres termes, on a :

$$^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\ \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ f(t)\ dt. \tag{2.2.2}$$

Avec : 0<n-Re(α)*<1 ,*

car : 0<n-1<Re(α)*<n* $\Longrightarrow$ *-n<-Re*(α)*<-n+1* $\Longrightarrow$ *0<n-Re*(α)*<1.*

Remarque :

Pour choisir la valeur de n d'après la valeur de α *qui est connue déjà, on prend : n=[Re*(α)*]+1,*

ex ; si $\alpha = 4.59$ *alors* n = *[4.59] + 1 = 4 + 1* $\Longrightarrow$ n = *5,*

si α = *0.17+2i alors* n = *[0.17] + 1 = 0 + 1* $\Longrightarrow$ n = *1.*

Exemple 2.2.1. *Soit Re*$(\beta) > -1$ *et Re*$(\alpha) \in]n-1,n[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$^{RL}D_a^{\alpha}\ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\ . \tag{2.2.3}$$

Preuve :

Soit :

$$^{RL}D_a^{\alpha}\ (x-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta},$$

d'après (2.1.6) *, on obtient :*

$$I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\ (x-a)^{n-\alpha+\beta}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}\ .$$

On pose : $\left(\frac{d}{dx}\right)^i (x-a)^{n-\alpha+\beta}$, *tels que* $i = 1, ..., n.$

Pour i=1 on obtient;

$\left(\frac{d}{dx}\right)(x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}.$

Pour i=2 on obtient;

$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)\left(\frac{d}{dx}\right)(x-a)^{n-\alpha+\beta-1},$

alors :

$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-2}.$

Anise de suite jusqu'à pour i=n, on obtient;

$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(n-\alpha+\beta-(n-1))(x-a)^{n-\alpha+\beta-n}$

$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}$.

{*on peut justifiée cette resulat par une démonstration par récurrence*}

Sachant que :

$$\begin{aligned}
&\Gamma(n-\alpha+\beta+1) = (n-\alpha+\beta)\ \Gamma(n-\alpha+\beta) \quad , \ \{\textit{d'après } (1.2.3)\}\\
\Longrightarrow &\Gamma(n-\alpha+\beta+1) = (n-\alpha+\beta)\ \Gamma(n-\alpha+\beta-1+1)\\
\Longrightarrow &\Gamma(n-\alpha+\beta+1) = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\ \Gamma(n-\alpha+\beta-1)\\
\Longrightarrow &\Gamma(n-\alpha+\beta+1) = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(\beta-\alpha+1)\ \Gamma(\beta-\alpha+1),\\
&\textit{donc :} \quad (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(\beta-\alpha+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \ .
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \ . \tag{2.2.4}$$

Alors :

$$^{RL}D_a^\alpha\ (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \ .$$

Exemple 2.2.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *:*

$$^{RL}D_a^\alpha\ 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{2.2.5}$$

Preuve :

Soit :

$$
\begin{aligned}
&{}^{RL}D_a^{\alpha}\ 1 = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha}\ 1,\\
&\text{d'après (2.1.7) , on obtient :}\quad I_a^{n-\alpha}\ 1 = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha},\\
&\text{donc :}\quad {}^{RL}D_a^{\alpha}\ 1 = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha},\\
&\text{d'après (2.2.4) on obtient :}\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha} = \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},
\end{aligned}
$$

alors :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}\ 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.
$$

{ *on peut obtenue cette résultat si on pose* β*=0 dans* (2.2.3) }

Remarque :

On remarque que la dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de RL de 1 n'est pas égal à zéro si et seulement si* α *n'appartient pas à* $\mathbb{N}^*$.

Exemple 2.2.3. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *:*

$$
{}^{RL}D_0^{\alpha}\ x^{\alpha-1} = 0. \tag{2.2.6}
$$

Preuve :

On pose *a=0* *et* $\beta = \alpha - 1$ *dans* (2.2.3) *et on obtient :*

$$
{}^{RL}D_0^{\alpha}\ x^{\alpha-1} = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)}}_{\infty}\ x^{-1},
$$

alors :

$$
{}^{RL}D_0^{\alpha}\ x^{\alpha-1} = 0.
$$

Exemple 2.2.4. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *:*

$$
{}^{RL}D_0^{\alpha}\ x^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1). \tag{2.2.7}
$$

{*on obtient cette résultat si on pose a=0 et* $\beta = \alpha$ *dans* (2.2.3)}

Exemple 2.2.5. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $a = -\infty$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}_+^*$ *:*

$$^{RL}D_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \tag{2.2.8}$$

Preuve :

Soit :

$$^{RL}D_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha} e^{\lambda x}$$

$$\text{d'après } (2.1.9),\ \text{on obtient :}\quad I_a^{n-\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{n-\alpha}},$$

$$\text{donc :}\quad {}^{RL}D_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^{n-\alpha}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{\lambda x}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}\ D_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^{n-\alpha}}\ \underbrace{\lambda\ \lambda\ \lambda......\lambda}_{n\ fois} e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda^{n-\alpha}}\ \lambda^n e^{\lambda x},$$

alors :

$$^{RL}D_a^\alpha\ e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}.$$

Exemple 2.2.6. *Soit* $a = -\infty$, $n-1 < Re(\alpha) < n$, *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$^{RL}D_a^\alpha \cos x = \cos\left((x + \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right). \tag{2.2.9}$$

$$^{RL}D_a^\alpha \sin x = \sin\left((x + \alpha\frac{\pi}{2}) + 2\alpha k\pi\right). \tag{2.2.10}$$

Preuve :

Sachant que :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$\text{alors :}\quad {}^{RL}D_a^\alpha e^{ix} = {}^{RL}D_a^\alpha \cos x + i\ {}^{RL}D_a^\alpha \sin x,$$

$$\text{d'après } (2.2.8)\ \text{si on pose } \lambda = i\ \ \text{tels que}\ \ i \in \mathbb{C}_+^*,$$

$$\text{donc :}\quad {}^{RL}D_a^\alpha \cos x + i\ {}^{RL}D_a^\alpha \sin x\ = i^\alpha\ e^{ix},$$

$$\text{avec :}\quad i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\quad ,\ \text{tels que}\ \ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{donc :}\quad {}^{RL}D_a^\alpha \cos x + i\ {}^{RL}D_a^\alpha \sin x\ = e^{i\alpha(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} e^{ix} = e^{i(x+\alpha(\frac{\pi}{2}+2k\pi))},$$

$$\text{donc :}\quad {}^{RL}D_a^\alpha \cos x + i\ {}^{RL}D_a^\alpha \sin x\ = \cos\left(x + \alpha(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right) + i\ \sin\left(x + \alpha(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right),$$

alors :

$$ {}^{RL}D_a^\alpha \cos x = \cos\left((x+\alpha\frac{\pi}{2})+2\alpha k\pi\right), $$
$$ {}^{RL}D_a^\alpha \sin x = \sin\left((x+\alpha\frac{\pi}{2})+2\alpha k\pi\right). $$

Proposition 2.2.1. *L'opérateur* ${}^{RL}D_a^\alpha$ *est linéaire .*

Soit : $h, g \in C^0([a,b])$, $\forall\ \delta,\eta \in \mathbb{R}$, *et pour* $Re(\alpha) \in]n-1,n[$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$;

$$ {}^{RL}D_a^\alpha(\delta\ h+\eta\ g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ (\delta\ h(t)+\eta\ g(t))\ dt \quad ,\{d'après\ (2.2.2)\} $$
$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ \delta\ h(t) + \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ \eta\ g(t)\ dt\right) $$
$$ = \left[\frac{\delta}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ h(t)\right] + \left[\frac{\eta}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ g(t)\ dt\right], $$

alors : ${}^{RL}D_a^\alpha(\delta\ h+\eta\ g) = \delta\ {}^{RL}D_a^\alpha\ h + \eta\ {}^{RL}D_a^\alpha\ g.$ $\qquad$ $(C.Q.F.D)$

Proposition 2.2.2. *Soit* $\alpha \in]n-1,n[$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in C^n([a,b])$,

alors :

$$ \lim_{\alpha\to n^-} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \tag{2.2.11} $$

$$ \lim_{\alpha\to (n-1)^+} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) = f^{(n-1)}(x) \tag{2.2.12} $$

Preuve :

Pour (2.2.11) *:*

D'après (2.1.20) *on a :* $\quad I_a^n\ f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a),$

$\{$*on ajoute l'opérateur* $I_a^{n-\alpha}$ *à les deux cotés de l'équation*$\}$

$$ I_a^{n-\alpha}\ I_a^n\ f^{(n)}(x) = I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right), $$

$\{$*on change l'ordre les deux intégrales* $I_a^{n-\alpha} I_a^n$ *, il devient* $I_a^n I_a^{n-\alpha}$ *, car d'après* (2.1.12) *;*

$I_a^\alpha I_a^\beta h = I_a^{\alpha+\beta} h = I_a^{\beta+\alpha} h = I_a^\beta I_a^\alpha h\}$

$\{$*après on ajoute l'opérateur* $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ *à les deux cotés de l'équation*$\}$

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^n\ I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right), $$

$\{$*d'après* (2.1.18) *dans la partie à gauche de l'équation, et d'après* (2.2.1) *dans la partie à droite de l'équation* $\}$

on obtient : $\quad I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right)$

$$\Longrightarrow \qquad I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^j,$$

d'après (2.2.3), *on obtient :*

$$I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha},$$

$\{$ *sachant que* $j! = \Gamma(j+1)\}$

alors :

$$I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-\alpha}\ , \tag{2.2.13}$$

donc :

$$\lim_{\alpha\to n^-} I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = \lim_{\alpha\to n^-}\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-\alpha}\right),$$

d'après (2.1.16), *on obtient :*

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\alpha\to n^-}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x)\ - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-n+1)}\ (x-a)^{j-n},$$

avec : $0 \le j \le n-1 \Longrightarrow 1-n \le j-n+1 \le 0$, *tels que* $1-n \le 0$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

donc : $\Gamma(j-n+1) = \infty \implies \dfrac{1}{\Gamma(j-n+1)} = 0$, $\{$*car*; $(j-n+1) \in \mathbb{Z}^-\}$

alors : $\quad \lim_{\alpha\to n^-}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x).$

Pour (2.2.12) *:*

d'après (2.2.13) ; $\quad I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-\alpha},$

donc : $\quad \lim_{\alpha\to(n-1)^+} I_a^{n-\alpha}\ f^{(n)}(x) = \lim_{\alpha\to(n-1)^+}\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-\alpha}\right),$

$$alors\ :\ I_a^1\ f^{(n)}(x)\ =\lim_{\alpha\to(n-1)^+}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-n+2)}\ (x-a)^{j-n+1},$$

$$donc\ :\ \int_a^x f^{(n)}(t)\ dt=\lim_{\alpha\to(n-1)^+}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)-\sum_{j=0}^{n-2}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-n+2)}(x-a)^{j-n+1}-\frac{f^{(n-1)}(a)}{\Gamma(1)}(x-a)^0$$

$\{avec\ :\ 0\le j\le n-2\Longrightarrow 2-n\le j-n+2\le 0\ ,\ tels\ que\ \ 2-n\le 0\ \ pour\ \ n\ge 2,$

$donc\ :\ \Gamma(j-n+2)=\infty\ \Longrightarrow\ \dfrac{1}{\Gamma(j-n+2)}=0\}$

$$alors\ :\ \int_a^x f^{(n)}(t)\ dt=\lim_{\alpha\to(n-1)^+}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)-f^{(n-1)}(a),$$

dans la partie à gauche de l'équation on fait une intégrale par partie comme suit ;

$$\int u'\ v=u\ v-\int u\ v',$$

$tels\ que\ :\ u'=f^{(n)}\Longrightarrow u=f^{(n-1)}\quad et\quad v=1\Longrightarrow v'=0,$

$$donc:\ \int_a^x f^{(n)}(t)\ dt=\Big[f^{(n-1)}(t)\ 1\Big]_a^x=f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a),$$

$$alors\ :\ f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)=\lim_{\alpha\to(n-1)^+}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)-f^{(n-1)}(a),$$

$$alors\ :\ \lim_{\alpha\to(n-1)^+}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)=f^{(n-1)}(x).$$

Remarque :

D'après (2.2.11) , (2.2.12) et pour $n\ge 1$, on peut écrire comme suit ;

pour $\alpha=n$, tels que $n\in\mathbb{N}$ on a ;

$$ {}^{RL}D_a^{n}f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\quad ,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.2.14}$$

Proposition 2.2.3. *Soit n-1<Re(α)<n tels que $n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathbb{C}^0([a,b])$:*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)\ =\ 0\ \iff\ f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}c_j\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}, \tag{2.2.15}$$

c_j ; des constantes arbitraires .

Preuve :

($\Longrightarrow$) Dans le sens directe :

Soit :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}f(x)\ =\ 0\ \Longrightarrow\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}f(x)=0\ \Longrightarrow\ I_a^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}f(x)=\underbrace{I_a^n0}_{0},$$

d'après (2.1.20)*, on obtient :*

$$I_a^{n-\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a) = 0,$$

si on pose :

$$c_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a). \tag{2.2.16}$$

Alors on obtient :

$$I_a^{n-\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j,$$

on compose les deux cotés de l'équation par I_a^{α} *, on obtient :*

$$I_a^{\alpha} I_a^{n-\alpha} f(x) = I_a^{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j,$$

d'après (2.1.12) *dans la partie à gauche de l'équation on obtient :*

$$I_a^{n} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \; I_a^{\alpha} (x-a)^j,$$

d'après (2.1.6) *dans la partie à droite de l'équation on obtient :*

$$I_a^{n} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \; \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \; (x-a)^{\alpha+j}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \; \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \; \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\alpha+j}$$

d'après (2.1.18) *dans la partie à gauche de l'équation et* (2.2.4) *dans la partie à droite de l'équation, on obtient ;*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \; \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \; \frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1-n)} (x-a)^{\alpha+j-n}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \; \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1-n)} \; (x-a)^{\alpha+j-n}, \qquad \textit{(C.Q.D.F)}$$

avec ; $c_j = \dfrac{1}{j!} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a)$, c_j *; des constantes arbitraires .*

($\Longleftarrow$) Dans le sens contraire :

Soit :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1-n)} \ (x-a)^{\alpha+j-n}$$
$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1-n)} \ {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\alpha+j-n},$$

d'après (2.2.3), on obtient :

$${}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)} \ \frac{\Gamma(\alpha+j-n+1)}{\Gamma(j-n+1)} \ (x-a)^{j-n}$$
$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+1)} \ (x-a)^{j-n},$$

avec : $0 \leq j \leq n-1 \Longrightarrow 1-n \leq j-n+1 \leq 0$ *, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

donc : (j-n+1)$\in \mathbb{Z}^-$*, alors :* $\Gamma(j-n+1) = \infty \Longrightarrow 1/\Gamma(j-n+1) = 0$,

alors : ${}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = 0.$ *(C.Q.F.D)*

Proposition 2.2.4. *Soit n-1<Re(α)<n tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathbb{C}^0([a,b])$ *:*

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \ I_a^{\alpha} f(x) = f(x). \tag{2.2.17}$$

Preuve :

Soit :

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \ I_a^{\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha} f(x)},$$

d'après (2.1.12), on obtient :

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \ I_a^{\alpha} f(x) = \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n \ I_a^{n} f(x)},$$

d'après (2.1.18), on obtient :

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \ I_a^{\alpha} f(x) = f(x).$$

Proposition 2.2.5. *Soit Re(α) > 0 tels que n =[Re(α)] + 1 et Re(β)>Re(α),* $f \in \mathbb{C}^0([a,b])$ *:*

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta-\alpha} f(x) \ . \tag{2.2.18}$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{I_a^{n-\alpha} I_a^{\beta} f(x)}\ , $$

d'après (2.1.12), on obtient :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n+\beta-\alpha} f(x)\ , $$

sachant que : Re(β) > Re(α) donc Re(β) - Re(α) +n >n, et d'après (2.1.15), on obtient :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{n+\beta-\alpha-n} \implies {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta-\alpha}\ . $$

Proposition 2.2.6. *Soit n-1<Re(α)<n tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *, 0<Re(β)<Re(α)* $-$ *[Re(α)]<1 et* $f \in \mathbb{C}^0([a,b])$ *:*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(x)\ . \tag{2.2.19} $$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{I_a^{n-\alpha} I_a^{\beta} f(x)}\ , $$

d'après (2.1.12), on obtient :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-(\alpha-\beta)} f(x)\ , $$

et pour appliquer (2.2.1) il faut que ; n-1<Re(α) $-$ *Re(β)<n ,*

sachant que ; n=[Re(α)] + 1, alors ; [Re(α)]+1-1 <Re(α) $-$ *Re(β) < [Re(α)] + 1 ,*

alors ; $Re(\alpha) - [Re(\alpha)] - 1 < Re(\beta) < Re(\alpha) - [Re(\alpha)]$ *,*

avec ; $0 < Re(\beta)$ *et 0<Re(α)* $-$ *[Re(α)] <1 ,*

alors, on déduit la condition, 0<Re(β)<Re(α) $-$ *[Re(α)]<1 ,*

donc on a vérifiée que n-1<Re(α) $-$ *Re(β)<n, alors maintenant on applique (2.2.1), et on obtient :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(x)\ . \qquad (C.Q.F.D) $$

Proposition 2.2.7. *Soit n-1<Re(α)<n tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathbb{C}^0([a,b])$ *:*

$$I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left[\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(x)\right]\ . \tag{2.2.20}$$

Preuve :

Soit :

$${}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = \underbrace{{}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\alpha}}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) \qquad \{car\,;\ d'après\ (2.2.17)\}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) - {}^{RL}D_a^{\alpha}\ I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(x) - I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x)\right] = 0$$

d'après (2.2.15), *on obtient :*

$$f(x) - I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}\ ,$$

avec : $c_j = \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a)\ ,\quad \{d'après\ (2.2.16)\}$

donc : $f(x) - I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a)\right] \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}\ ,$

sachant que : $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(a) \equiv \displaystyle\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(x)$ *et* $j! = \Gamma(j+1)\ ,$

alors : $f(x) - I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(x)\right]\ ,$

alors : $I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f(x)\right]\ .$

(C.Q.F.D)

Remarque :

Cas particulier : si 0<Re(α)<1 pour n=1 ,alors ;

$$I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{0+\alpha-1}}{\Gamma(0+1+\alpha-1)}\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^0 I_a^{1-\alpha} f(x)\right]$$

$$\Longrightarrow I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{x\to a^+} I_a^{1-\alpha} f(x)\right]\ ,$$

sachant que : $\displaystyle\lim_{x\to a^+} I_a^{1-\alpha} f(x) = 0\ ,\quad \{d'après\ (2.1.17)\}$

alors :

$$I_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) \quad ,\ pour\ \ 0 < Re(\alpha) < 1\ . \tag{2.2.21}$$

Proposition 2.2.8. *Soient* $n\text{-}1<Re(\alpha)<n$, $m\text{-}1<Re(\beta)<m$ *tels que* $n,m \in \mathbb{N}^*$, $n+m\text{-}1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$ *ou bien* $n+m\text{-}2<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m\text{-}1$, $f \in C^0([a,b])$ *:*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\ f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\beta}\ f(x)\right]}{\Gamma(j-m-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-m-\alpha}\ . \quad (2.2.22)$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ .$$

Dans le cas : $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^m}\ I_a^m\ I_a^{n-\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ , \quad \{d'\text{après } (2.1.18)\}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} I_a^{n+m-(\alpha+\beta)}\ I_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ , \quad \{d'\text{après } (2.1.12)\}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\ I_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ . \quad \{d'\text{après } (2.2.1)\}$$

Dans le cas : $n+m-2 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m-1$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1}}\ I_a^{m-1}\ I_a^{n-\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ , \quad \{d'\text{après } (2.1.18)\}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m-1} I_a^{n+m-1-(\alpha+\beta)}\ I_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ , \quad \{d'\text{après } (2.1.12)\}$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\ I_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x)\ . \quad \{d'\text{après } (2.2.1)\}$$

D'après (2.2.20)*, on obtient :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{j+\beta-m}}{\Gamma(j+1+\beta-m)}\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\beta} f(x)\right]\right)$$

$$\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left[\lim_{x\to a^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\beta} f(x)\right]}{\Gamma(j+1+\beta-m)}\ {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}(x-a)^{j+\beta-m}\ ,$$

d'après (2.2.3)*, on obtient :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}(x-a)^{j+\beta-m} &= \frac{\Gamma(j+\beta-m+1)}{\Gamma(j+\beta-m+1-\alpha-\beta)}\ (x-a)^{j+\beta-m-\alpha-\beta} \\ &= \frac{\Gamma(j+\beta-m+1)}{\Gamma(j+1-m-\alpha)}\ (x-a)^{j-m-\alpha}\ , \end{aligned}$$

alors :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left[\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\beta} f(x)\right]}{\Gamma(j+1-m-\alpha)}\ (x-a)^{j-m-\alpha}\ . $$

(C.Q.F.D)

Remarque :

Cas particuliers :

Si $0<Re(\beta)<1$ *alors* $m=1$, $n-1<Re(\alpha)<n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$,

$n<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+1$ *ou bien* $n-1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n$:

donc d'après (2.2.22) *on obtient :*

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta} f(x) &= {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \frac{\left[\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^0 I_a^{1-\beta} f(x)\right]}{\Gamma(0+1-1-\alpha)}\ (x-a)^{0-1-\alpha} \\ &= {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x) - \frac{\left[\lim_{x\to a^+} I_a^{1-\beta} f(x)\right]}{\Gamma(-\alpha)}\ (x-a)^{-1-\alpha}\ , \end{aligned} $$

d'après (2.1.17), *on obtient que :* $\lim_{x\to a^+} I_a^{1-\beta} f(x) = 0$,

alors :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x)\ . \tag{2.2.23} $$

Si $0<Re(\beta)<1$ *alors* $m=1$, $0<Re(\alpha)<1$ *alors* $n=1$,

$1<Re(\alpha)+Re(\beta)<2$ *ou bien* $0<Re(\alpha)+Re(\beta)<1$, *alors :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\ {}^{RL}D_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(x) = {}^{RL}D_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x)\ . \tag{2.2.24} $$

car ; d'après les procédures pour obtenir le résultat (2.2.22), *on déduit ce que suit ;*

$$ {}^{RL}D_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{RL}D_a^{\beta+\alpha}\ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left[\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha}\ f(x)\right]}{\Gamma(j-n-\beta+1)}\ (x-a)^{j-n-\beta} $$

et tels que $0<Re(\alpha)<1$ *alors* $n=1$ *donc, on obtient :*

$$ {}^{RL}D_a^{\beta}\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{RL}D_a^{\beta+\alpha}\ f(x)\ , \qquad \{\textit{le même raisonnement pour obtenir } (2.2.23) $$

sachant que ;

$$ {}^{RL}D_a^{\beta+\alpha}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\ f(x)\ , $$

et la première partie de l'égalité de l'équation (2.2.24) *est déjà démontrer, donc on conclut que ; le résultat* (2.2.24) *est bien vérifier .*

Note :

Pour mieux comprendre pourquoi on choisit deux cas pour $(Re(\alpha)+Re(\beta))$ *;*

soient $n\text{-}1<Re(\alpha)<n$ *et* $m\text{-}1<Re(\beta)<m$ *donc* $n+m\text{-}2<Re(\alpha)+Re(\beta)< n+m$*, alors d'après cette dernière il faut voir deux cas pour maintenir la définition de la dérivée fractionnaire, car il faut voir que* $(Re(\alpha)+Re(\beta))$ *appartient à l'intervalle ouvert avec des extrémités de cet intervalle sont des entiers naturel et la longueur de cet intervalle il faut égal à 1, donc on distingue deux cas ;*

$n+m\text{-}2<Re(\alpha)+Re(\beta)< n+m\text{-}1$ *ou bien* $n+m\text{-}1<Re(\alpha)+Re(\beta)< n+m$ *.*

2.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.3.1. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in C^n([a,b])$,$(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *; un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$ *. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* α *de la fonction* f*; la fonction notée et définie par :*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \ . \tag{2.3.1}$$

En d'autres termes, on a :

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \ dt \ , \tag{2.3.2}$$

$$\text{où ;} \quad f^{(n)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \ .$$

Exemple 2.3.1. *Soit* $Re(\beta) > -1$ *et* $Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$^{C}D_a^{\alpha} \ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \ (x-a)^{\beta-\alpha} \ . \tag{2.3.3}$$

Preuve :

D'après (2.3.1)*, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha} \ (x-a)^{\beta} = I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (x-a)^{\beta} \ ,$$

d'après (2.2.4)*, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha} \ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \ I_a^{n-\alpha} \ (x-a)^{\beta-n} \ ,$$

d'après (2.1.6)*, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha} \ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \ \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1+n-\alpha)} (x-a)^{\beta-n+n-\alpha} \ ,$$

alors :

$$^{C}D_a^{\alpha} \ (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \ (x-a)^{\beta-\alpha} \ .$$

Exemple 2.3.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *:*

$$^{C}D_a^{\alpha} \ 1 = 0 \ . \tag{2.3.4}$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ 1 = I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n 1 \quad , \textit{ avec ; } \left(\frac{d}{dx}\right)^n 1 = 0 \quad , \textit{ alors ; } {}^{C}D_a^{\alpha}\ 1 = I_a^{n-\alpha}0 \ , $$

donc :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ 1 = 0 \ . $$

Exemple 2.3.3. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $a = -\infty$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}_+^*$ *:*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha}\ e^{\lambda x} \ . \tag{2.3.5} $$

Soit :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{\lambda x} \Longrightarrow {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = I_a^{n-\alpha}\ \underbrace{\lambda.\lambda........\lambda}_{n fois} e^{\lambda x} \Longrightarrow {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = \lambda^n\ I_a^{n-\alpha}\ e^{\lambda x} \ , $$

d'après (2.1.9)*, on obtient :* $\quad {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = \lambda^n\ \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^{n-\alpha}}$,

alors :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha}\ e^{\lambda x} \ . $$

2.3.1 La Relation entre les Dérivées Fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo

Soit n-1<Re(α)<n où n $\in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a,b])$, $(-\infty < a < b < +\infty)$; un intervalle fini de $\mathbb{R}$, alors :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha}\ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\ (x-a)^{j-\alpha} \ . \tag{2.3.6} $$

Preuve :

d'après (2.1.20), on obtient :

$$ \begin{aligned} & I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \\ \Longrightarrow & I_a^{n-\alpha}\ I_a^n f^{(n)}(x) = I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right) \\ \Longrightarrow & \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^n}\ I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n\ I_a^{n-\alpha}}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right) \ , \end{aligned} $$

donc ; d'après (2.1.18) dans la partie à gauche de l'équation et d'après (2.2.1) dans la partie à droite de l'équation, on obtient :

$$I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x)} = {}^{RL}D_a^{\alpha} \ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \underbrace{{}^{RL}D_a^{\alpha} \ (x-a)^j} ,$$

d'après (2.3.1) dans la partie à gauche de l'équation et d'après (2.2.3) dans la partie à droite de l'équation, on obtient :

$${}^{C}D_a^{\alpha} \ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} \ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \ (x-a)^{j-\alpha} \ ,$$

sachant que ; $\quad j! = \Gamma(j+1)$

alors :

$${}^{C}D_a^{\alpha} \ f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} \ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)} \ (x-a)^{j-\alpha} \ . \qquad \text{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 2.3.1. *Soit* $\alpha \in]n-1, n[$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in C^n([a,b])$, *alors :*

$$\lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x) \ . \tag{2.3.7}$$

Preuve :

Soit :

$${}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \ \Longrightarrow \ \lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \lim_{\alpha \to n^-} I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \ ,$$

et d'après (2.1.16) *on obtient le* (2.3.7).

Remarque :

donc ; pour $\alpha = n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors ;*

$${}^{C}D_a^{n} f(x) = f^{(n)}(x) \ . \tag{2.3.8}$$

Proposition 2.3.2. *Soit n-1<Re(α)<n tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathbb{C}^n([a,b])$ *:*

$${}^{C}D_a^{\alpha} f(x) \ = \ 0 \ \Longrightarrow \ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j \ (x-a)^j \ , \tag{2.3.9}$$

w_j ; *des constantes arbitraires .*

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = 0 \;\Longrightarrow\; \underbrace{{}^{RL}D_a^{n-\alpha}\; I_a^{n-\alpha}}\, f^{(n)}(x) = \underbrace{{}^{RL}D_a^{n-\alpha}\; 0}_{0} \, , $$

$$ \text{d'après (2.2.17), on obtient :} \qquad f^{(n)}(x) = 0 \;\Longrightarrow\; \underbrace{I_a^{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x)} = \underbrace{I_a^{n}\; 0}_{0} \, , $$

$$ \text{et d'après (2.1.20), on obtient :} \qquad f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) = 0 \, , $$

on pose :

$$ w_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!} $$

alors :

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j (x-a)^j \; . \qquad\qquad \text{(C.Q.F.D)} $$

Proposition 2.3.3. *Soit n-1<Re(α)<n tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathbb{C}^n([a,b])$ *:*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\; I_a^{\alpha} f(x) = f(x) \; . \tag{2.3.10} $$

Preuve :

D'après (2.3.6), on obtient :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\; I_a^{\alpha} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha}\; I_a^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left[\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{\alpha} f(x)\right]}{\Gamma(j-\alpha+1)} \, (x-a)^{j-\alpha} \, , $$

sachant que :

$0 \leq j \leq n-1$ *et* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *donc* $0 \leq j < Re(\alpha) < n \Longrightarrow Re(\alpha) - j > 0$

donc :

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha - j} \quad , \text{ d'après (2.1.15)} \quad , \text{ pour } \; j = 0,1,2........, n-1 $$

$$ \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to a^+} I_a^{\alpha-j} = 0 \qquad , \text{ d'après (2.1.17)} $$

alors :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\; I_a^{\alpha} f(x) = \underbrace{{}^{RL}D_a^{\alpha}\; I_a^{\alpha} f(x)}_{f(x)} \qquad , \text{ d'après (2.2.17) , donc (2.3.10) est bien vérifie .} $$

Proposition 2.3.4. *Soit $Re(\alpha) > 0$ tels que n =[$Re(\alpha)$] + 1 et $Re(\beta)$>n, $f \in \mathbb{C}^n([a,b])$:*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta-\alpha} f(x)\ . \tag{2.3.11}$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{n-\alpha} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{\beta} f(x)}\ ,$$

d'après (2.1.15) "car ; Re(β)>n", on obtient : $\quad {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{n-\alpha} I_a^{\beta-n} f(x)$

d'après (2.1.12), on obtient : $\quad {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{\beta} f(x) = I_a^{(\beta-n)+(n-\alpha)} f(x) = I_a^{\beta-\alpha} f(x)\ .$

Proposition 2.3.5. *Soit n-1<Re(α)<n tels que $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathbb{C}^n([a,b])$:*

$$ I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}\ (x-a)^j\ . \tag{2.3.12}$$

Preuve :

Soit :

$$ I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \underbrace{I_a^{\alpha}\ I_a^{n-\alpha}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\ ,$$

d'après (2.1.12), on obtient : $\quad I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\ ,$

d'après (2.1.20), on obtient : $\quad I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\ .$ *(C.Q.F.D)*

Remarque :

Pour 0<Re(α)<1 tels que n=1, donc d'après (2.3.12) on obtient :

$$ I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \frac{f^{(0)}(a)}{\underbrace{\Gamma(0+1)}_{1}}\ \underbrace{(x-a)^0}_{1}$$

alors :

$$ I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a) \quad , \textit{pour} \ ; \quad 0 < Re(\alpha) < 1\ . \tag{2.3.13}$$

Proposition 2.3.6. *Soit n-1<Re(α)<n , m-1<Re(β)<m tels que $n,m \in \mathbb{N}^*$, n+m-1<Re(α)+Re(β)<n+m , $f \in C^{n+m}([a,b])$:*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha+\beta}\ f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}\ (x-a)^{j+m-\beta-\alpha}\ , \tag{2.3.14}$$

$$\textit{sachant que :} \quad \left[\left(\tfrac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right] = \lim_{x\to a}\left(\left(\tfrac{d}{dx}\right)^{j+m} f(x)\right) .$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\beta}\ f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)\ , \tag{2.3.15}$$

d'autre part d'après (2.1.20), on a :

$$I_a^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(a)\right)\right]\ ,$$

$$I_a^n\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]\ ,$$

on compose l'équation par ${}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}$*, on obtient :*

$${}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta} I_a^n\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]\right)\ ,$$

$${}^{C}D_a^{\alpha}\ \underbrace{I_a^{m-\beta} I_a^n}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{j!}\ {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

d'après (2.1.12), on obtient :

$${}^{C}D_a^{\alpha}\ \underbrace{I_a^{n+m-\beta}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{j!}\ {}^{C}D_a^{\alpha}\ I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

$${}^{C}D_a^{\alpha}\ \underbrace{I_a^{n+m-(\alpha+\beta)+\alpha}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{j!}\ {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

d'après la condition $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$ *et* $Re(\alpha) > 0$*, on applique (2.1.12) et on obtient :*

$$\underbrace{{}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha}} I_a^{n+m-(\alpha+\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{j!}\ {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

d'après (2.3.10), on obtient :

$$\underbrace{I_a^{n+m-(\alpha+\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} f(x)} = {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m} f(a)\right]}{j!}\ {}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

d'après la condition $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$ *, on applique* (2.3.1) *et on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \underbrace{^{C}D_a^{\alpha}I_a^{m-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{j!}\ ^{C}D_a^{\alpha}I_a^{m-\beta}(x-a)^j\ ,$$

d'après (2.3.15) *, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{j!}\ ^{C}D_a^{\alpha}\underbrace{I_a^{m-\beta}(x-a)^j}\ ,$$

d'après (2.1.6)*, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{j!}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+m-\beta)}\underbrace{^{C}D_a^{\alpha}(x-a)^{j+m-\beta}}\ ,$$

d'après (2.3.3)*, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{\Gamma(j+1+m-\beta)}\frac{\Gamma(j+m-\beta+1)}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}(x-a)^{j+m-\beta-\alpha}\ ,$$

$$^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}\ (x-a)^{j+m-\beta-\alpha}\ ,$$

alors :

$$^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j+m}f(a)\right]}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}\ (x-a)^{j+m-\beta-\alpha}\ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Note :

D'après la note posée dans la section précédente ; on a deux cas pour $(Re(\alpha)+Re(\beta))$ *sont :* $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$ *et* $n+m-2 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m-1$*. Dans cette proposition on a montré juste pour* $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$ *et on laisse l'autre cas* $''n+m-2 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m-1''$ *comme une question ouverte , mais pour le cas particulier on peut traiter cette dernière.*

Remarque :

Cas particulier pour $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* $0 < Re(\beta) < 1$ *; tels que n=1 et m=1 :*

Dans le cas $n+m-1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < n+m$ *, donc* $1 < Re(\alpha)+Re(\beta) < 2$ *;*

d'après (2.3.14) *, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\ ^{C}D_a^{\beta}f(x) = \ ^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(x) + \frac{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)f(a)\right]}{\Gamma(2-\beta-\alpha)}\ (x-a)^{1-\beta-\alpha}\ , \qquad (2.3.16)$$

$$\textit{sachant que :} \quad Re(\alpha)+Re(\beta)<2 \;\; \textit{donc} \;\; 2-Re(\alpha)-Re(\beta)>0 \;,$$
$$\textit{alors} \;\; \Gamma(2-\alpha-\beta) \;\; \textit{existe et finie} \;,$$
$$\textit{et} \;\; \left(\tfrac{d}{dx}\right) f(a) = \lim_{x\to a} \tfrac{d}{dx} f(x) \;.$$

Dans le cas $n+m-2<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m-1$ *, donc* $0<Re(\alpha)+Re(\beta)<1$ *; soit :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = \underbrace{I_a^{1-\alpha}} \; \frac{d}{dx} \; I_a^{1-\beta} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$
$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = \underbrace{I_a^{1-(\alpha+\beta)+\beta}} \; \frac{d}{dx} \; I_a^{1-\beta} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$

d'après la condition $0<Re(\alpha)+Re(\beta)<1$ *donc* $1-(Re(\alpha)+Re(\beta))>0$ *et* $0<Re(\beta)<1$ *, on peut appliquer* (2.1.12) *, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = I_a^{1-(\alpha+\beta)} \; \underbrace{I_a^{\beta}} \; \frac{d}{dx} \; I_a^{1-\beta} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$
$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = I_a^{1-(\alpha+\beta)} \; \underbrace{I_a^{1-(1-\beta)} \; \frac{d}{dx}} \; I_a^{1-\beta} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$

d'après (2.3.1) *(car ;* $0<1-Re(\beta)<1$ *, cela revient à* $0<Re(\beta)<1$ *) , on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = I_a^{1-(\alpha+\beta)} \; \underbrace{{}^{C}D_a^{(1-\beta)} \; I_a^{1-\beta}} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$

d'après (2.3.10) *, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = I_a^{1-(\alpha+\beta)} \; \frac{d}{dx} \; f(x) \;,$$

d'après (2.3.1) *sous la condition* $0<Re(\alpha)+Re(\beta)<1$ *, on obtient :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f(x) \;, \tag{2.3.17}$$

si on fait la même procédures pour ${}^{C}D_a^{\beta}\,{}^{C}D_a^{\alpha} f(x)$ *, on obtient :* ${}^{C}D_a^{\beta}\,{}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{C}D_a^{\beta+\alpha} f(x)$*, et il est évident que* ${}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f(x) = {}^{C}D_a^{\beta+\alpha} f(x)$ *, donc on résume que ;*

$$^{C}D_a^{\alpha}\;{}^{C}D_a^{\beta} f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f(x) = {}^{C}D_a^{\beta}\;{}^{C}D_a^{\alpha} f(x) \;, \tag{2.3.18}$$

$$\textit{pour ;} \;\; 0<Re(\alpha)<1 \;\;,\;\; 0<Re(\beta)<1 \;\; \textit{et} \;\; 0<Re(\alpha)+Re(\beta)<1 \;.$$

CHAPITRE

3

DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE AU SENS DE HADAMARD

3.1 Intégrale Fractionnaire et Dérivée Fractionnaire au sens de Hadamard

3.1.1 Avant la Définition de l'Intégrale de Hadamard

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$;($0 \leq a < b \leq +\infty$) . On définit l'intégrale de la fonction f par la fonction suivante :

$$ {}^{H}I_a^1 f(t) = \int_a^t \frac{f(s)}{s}\, ds \qquad \text{, tels que : } a < s < t < x < b \text{ .} \tag{3.1.1} $$

On passe à l'intégrale double de la fonction f :

$$
\begin{aligned}
{}^{H}I_a^2 f(x) &= {}^{H}I_a^1\ {}^{H}I_a^1 f(x) \\
\Longrightarrow {}^{H}I_a^2 f(x) &= \int_a^x \frac{1}{t}\ {}^{H}I_a^1 f(t)\ dt
\end{aligned}
$$

d'après (3.1.1), on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}^{H}I_a^2 f(x) &= \int_a^x \frac{1}{t} \int_a^t \frac{f(s)}{s}\ ds\ dt \\
\Longrightarrow {}^{H}I_a^2 f(x) &= \int_a^x \int_a^t \frac{f(s)}{s\ t}\ ds\ dt\ ,
\end{aligned}
$$

on utilise la méthode de Fubini-Tonelli pour inverse l'ordre d'intégration ,

alors :

$$
\begin{aligned}
{}^{H}I_a^2 f(x) &= \int_a^x \int_s^x \frac{f(s)}{s\ t}\ dt\ ds \\
&= \int_a^x \frac{f(s)}{s} \int_s^x \frac{1}{t}\ dt\ ds \\
&= \int_a^x \frac{f(s)}{s}\ [\log t]_s^x\ ds \\
&= \int_a^x \frac{f(s)}{s}\ (\log x - \log s)\ ds\ ,
\end{aligned}
$$

on pose s=t , donc ;

$$
{}^{H}I_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right) \frac{f(t)}{t}\ dt\ .
$$

En suite on passe à l'intégrale triple de la fonction f :

$$
\begin{aligned}
{}^{H}I_a^3 f(x) &= {}^{H}I_a^1\ {}^{H}I_a^2 f(x) \\
&= \int_a^x \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s\ t}\ ds\ dt\ ,
\end{aligned}
$$

et on fait la même méthode pour inverser l'ordre d'intégration,

donc :

$$
\begin{aligned}
{}^{H}I_a^3 f(x) &= \int_a^x \int_s^x \left(\log \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s\ t}\ dt\ ds \\
&= \int_a^x \frac{f(s)}{s} \int_s^x \left(\log \frac{t}{s}\right) \frac{1}{t}\ dt\ ds \\
&= \int_a^x \frac{f(s)}{s} \left[\frac{1}{2}\left(\log \frac{t}{s}\right)^2\right]_s^x\ ds \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x \left(\log \frac{x}{s}\right)^2\ \frac{f(s)}{s}\ ds\ ,
\end{aligned}
$$

on pose s=t ;

$$ {}^{H}I_a^3 f(x) = \frac{1}{2}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^2 \ \frac{f(t)}{t}\ dt\ . $$

Ainsi de suite jusqu'à arriver à la niemme intégrale de la fonction f :

$$ {}^{H}I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1} \ \frac{f(t)}{t}\ dt \quad ....P(n)\ . $$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie pour $n \geq 1$:

On vérifie pour n=1 :

$$ {}^{H}I_a^1 f(x) = \underbrace{\frac{1}{(0)!}}_{1}\int_a^x \underbrace{\left(\log\frac{x}{t}\right)^{0}}_{1} \ \frac{f(t)}{t}\ dt\ , $$

$$ {}^{H}I_a^1 f(x) = \int_a^x \ \frac{f(t)}{t}\ dt\ , $$

elle est vraie d'après (3.1.1), donc pour n=1 elle est vérifiée .

On suppose que pour P(n) est vraie , on a :

$$ {}^{H}I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1} \ \frac{f(t)}{t}\ dt\ . $$

On démontre que P(n+1) est vraie , tels que :

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \ \frac{1}{n!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n} \ \frac{f(t)}{t}\ dt\ . $$

Soit :

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \ {}^{H}I_a^1 \ {}^{H}I_a^n f(x)\ , $$

d'après l'hypothèse on obtient :

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\ \int_a^x \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-1} \ \frac{f(t)}{s\ t}\ ds\ dt\ , $$

on applique la méthode de Fubini-Tonelli pour inverser l'ordre d'intégration :

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\ \int_a^x \frac{f(s)}{s} \overbrace{\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-1} \ \frac{1}{t}\ dt}\ ds\ , $$

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\ \int_a^x \frac{f(s)}{s} \left[\frac{1}{n}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n}\right]_s^x\ ds\ , $$

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{n(n-1)!}\ \int_a^x \frac{f(s)}{s} \left[\left(\log\frac{x}{s}\right)^{n} - \underbrace{\left(\log\frac{s}{s}\right)^{n}}_{0}\right]\ ds\ , $$

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!}\ \int_a^x \frac{f(s)}{s} \left(\log\frac{x}{s}\right)^{n}\ ds\ , $$

on pose s = t, alors ;

$$ {}^{H}I_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^n \frac{f(t)}{t}\ dt\ , \qquad \text{(C.Q.F.D)} $$

donc d'après le principe de récurrence P(n) est vraie pour $n \geq 1$,

alors :

$$ \forall n \geq 1\ , \qquad {}^{H}I_a^{n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ . \tag{3.1.2} $$

Définition 3.1.1. *Soit f une fonction continue sur* $]a, b[$ $(0 \leq a < b \leq +\infty)$ *; un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}^+$, *Re*$(\alpha) > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *. On définit l'intégrale fractionnaire d'ordre* α *au sens de* ***Hadamard*** *de la fonction f par :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ , \tag{3.1.3} $$

tels que $a<x<b$ *.*

Si $a=0$ *, alors on donne l'intégrale fractionnaire par :*

$$ {}^{H}I_{0^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ . \tag{3.1.4} $$

On peut généraliser l'intégrale fractionnaire (3.1.4) *avec* $\mu \in \mathbb{C}$, *et on définit cette intégrale par :*

$$ {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ . \tag{3.1.5} $$

Définition 3.1.2. *Soit f une fonction continue sur* $]a, b[$ $(0 \leq a < b \leq +\infty)$ *; un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}^+$, *Re*$(\alpha) \in\ ]n-1, n[$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ $\{$ *ou bien* $n = [Re(\alpha)] + 1$ *pour Re*$(\alpha) > 0$ $\}$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens* ***Hadamard*** *de la fonction f par la fonction suivante :*

$$ {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) = \delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x)\ , \tag{3.1.6} $$

$$ \text{avec ;} \qquad \delta = x\ \frac{d}{dx} \implies \delta^n = \left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n\ . $$

En d'autres termes, on a :

$$ {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ . \tag{3.1.7} $$

Si a=0, alors :

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+} f(x) = \delta^n \; {}^{H}I^{n-\alpha}_{0^+} f(x) \; . \tag{3.1.8} $$

En dautres termes, on a :

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x \; \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} \; dt \; . \tag{3.1.9} $$

On peut généraliser (3.1.8) *avec* $\mu \in \mathbb{C}$ *et on définit :*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu} \; f(x) = x^{-\mu} \; \delta^n \; x^{\mu} \; {}^{H}I^{n-\alpha}_{0^+,\mu} \; f(x) \; . \tag{3.1.10} $$

En dautres termes, on a :

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \; x^{-\mu} \left(x \; \frac{d}{dx} \right)^n x^{\mu} \; \int_0^x \left(\frac{t}{x} \right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} \; dt \; . \tag{3.1.11} $$

Remarque :

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$ {}^{H}D^{n}_{a} \; f(x) = \delta^n \; f(x) \; . \tag{3.1.12} $$

$$ {}^{H}D^{n}_{0^+,\mu} \; f(x) = x^{-\mu} \; \delta^n \; x^{\mu} \; f(x) \; . \tag{3.1.13} $$

Exemple 3.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ *et* $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha+\beta-1} \; . \tag{3.1.14} $$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \; \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-1} \; \frac{dt}{t} \qquad , \; \{ \textit{d'après } (3.1.3) \} $$

$$ \textit{on pose :} \qquad \tau = \frac{\log \frac{t}{a}}{\log \frac{x}{a}} $$

$$ \textit{avec :} \qquad (\; t = x \Longrightarrow \tau = 1 \quad / \quad t = a \Longrightarrow \tau = 0 \;) \; , $$

alors :

$$\left(\ \log\frac{t}{a}=\tau\log\frac{x}{a}\ \right)\quad\Longrightarrow\quad\left(\ \frac{dt}{t}=d\tau\ \ \log\frac{x}{a}\ \right)\ ,$$

et d'autre part on a :

$$\log\frac{t}{a}=\log\left(\frac{x}{a}\right)^{\tau}\quad\Longrightarrow\quad\frac{t}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\tau}\quad\Longrightarrow\quad\frac{t}{a}\ \frac{a}{x}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\tau}\ \frac{a}{x}\quad\Longrightarrow\quad\frac{t}{x}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\tau-1}$$
$$\Longrightarrow\quad\frac{x}{t}=\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\tau}\quad\Longrightarrow\quad\left(\ \log\frac{x}{t}=(1-\tau)\log\frac{x}{a}\ \right)\ ,$$

donc :

$${}^{H}I_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\log\frac{x}{a}\ d\tau\ ,$$
$${}^{H}I_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\ \underbrace{\int_0^1\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau}_{\beta(\beta,\alpha)}\ ,$$

donc, d'après (1.3.1) *et* (1.3.4)*, on obtient :*

$${}^{H}I_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\ \frac{\Gamma(\beta)\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ ,$$

alors :

$${}^{H}I_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\ .$$

Exemple 3.1.2. *Soit* $Re(\alpha)>0$, $n=[Re(\alpha)]+1$, $Re(\beta)>0$ *et* $0<a<b<+\infty$ *:*

$${}^{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}\ . \tag{3.1.15}$$

Preuve :

Soit :

$${}^{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\qquad\qquad\{\textit{d'après } (3.1.6)\}$$

et d'après (3.1.14)*, on obtient :*

$${}^{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\ \delta^n\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\ ,$$

$$\textit{avec :}\qquad\delta^n=\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n\ .$$

On pose : $\left(x\ \dfrac{d}{dx}\right)^i \left(\log\dfrac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}$, *tels que* $i=1,.......,n$.

Pour i=1 on obtient ;

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = x\ (n-\alpha+\beta-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1-1}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\log\frac{x}{a}\right)}_{\frac{1}{x}},$$

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = (n-\alpha+\beta-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1-1}\ .$$

Pour i=2 on obtient ;

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^2\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = \left(x\ \frac{d}{dx}\right)\left((n-\alpha+\beta-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1-1}\right)\ ,$$

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^2\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-1-1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1-2}\ .$$

Anise de suite jusqu'à pour i=n, on obtient ;

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)......(\beta-\alpha)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}\ .$$

{*on peut justifiée cette resulat par une démonstration par récurrence*}

Sachant que ;

$$\begin{aligned}\Gamma(n-\alpha+\beta) &= \Gamma(n-\alpha+\beta-1+1)\\ &= (n-\alpha+\beta-1)\ \Gamma(n-\alpha+\beta-1) \quad , \{d'après\ (1.2.3)\\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2).......(n-\alpha+\beta-n)\ \Gamma(n-\alpha+\beta-n)\\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2).......(\beta-\alpha)\ \Gamma(\beta-\alpha)\ ,\end{aligned}$$

donc :

$$(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2).......(\beta-\alpha) = \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ ,$$

alors :

$$\delta^n\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} = \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}\ , \tag{3.1.16}$$

donc :

$${}^H D_a^\alpha\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}\ .$$

Exemple 3.1.3. *Si* $\beta = 1$ *et* $Re(\alpha) > 0$ *avec* $n = [Re(\alpha)] + 1$ *,*
donc d'après (3.1.14)*, on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{1-1} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+1-1} \quad , $$

alors :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha}\ 1 \ = \ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \ . \tag{3.1.17} $$

D'après (3.1.15)*, on obtient :*

$$ {}^{H}D_a^{\alpha}\ 1 \ = \ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \ \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \ . \tag{3.1.18} $$

Exemple 3.1.4. *Soit* $Re(\alpha) > 0,\ \beta, \mu \in \mathbb{C}$ *tels que* $(\beta + \mu) \in \mathbb{C}_+^*$ *et* $a = 0$ *:*

$$ {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha}\ x^{\beta} = \ (\beta+\mu)^{-\alpha}\ x^{\beta}\ . \tag{3.1.19} $$

Preuve :

Soit :

$$ \begin{aligned} {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha}\ x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0^+}^{x} \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\ \frac{t^{\beta}}{t}\ dt \qquad , \{\text{d'après (3.1.5)}\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0^+}^{x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\ \frac{t^{\beta+\mu}}{x^{\mu}}\ \frac{dt}{t}\ , \end{aligned} $$

on pose : $\tau = \ \log \dfrac{x}{t}$,

donc ; $(t \longrightarrow 0^+) \implies (\tau \longrightarrow +\infty) \quad / \quad t = x \implies \tau = 0$,

donc ; $e^{\tau} = \dfrac{x}{t} \implies \dfrac{t}{x} = e^{-\tau} \implies t = x\ e^{-\tau}$,

donc ; $dt = -x\ e^{-\tau}\ d\tau$,

alors :

$$ \begin{aligned} {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha}\ x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} \tau^{\alpha-1}\ \frac{x^{\beta+\mu}\ e^{-\tau(\beta+\mu)}}{x^{\mu}}\ \frac{-x\ e^{-\tau}}{x\ e^{-\tau}}\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ x^{\beta} \int_{0}^{+\infty} \tau^{\alpha-1}\ e^{-\tau(\beta+\mu)}\ d\tau\ , \end{aligned} $$

on pose : $\quad y \;=\; \tau\ (\beta+\mu)$,

donc ; $\quad \tau = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad / \quad (\tau \longrightarrow +\infty) \quad \Longrightarrow \quad (y \longrightarrow +\infty) \ \ \{car\,;\, (\beta+\mu) \in \mathbb{C}_+^*$,

donc ; $\quad \tau = \dfrac{y}{(\beta+\mu)} \quad \Longrightarrow \quad d\tau = \dfrac{dy}{(\beta+\mu)}$,

alors :

$$\begin{aligned} {}^H I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ x^{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(\beta+\mu)^{\alpha-1}}\ e^{-y}\ \frac{dy}{(\beta+\mu)} \\ &= x^{\beta}\ (\beta+\mu)^{-\alpha}\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\ e^{-y}\ dy}_{\Gamma(\alpha)}\ , \end{aligned}$$

d'après (1.2.1)*, on obtient :*

$${}^H I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} = \ (\beta+\mu)^{-\alpha}\ x^{\beta}\ .$$

Remarque :

Cas particulier pour $\ \beta \in \mathbb{C}_+^*\ $ *c.à.d pour* $\ \mu = 0$,

donc d'après (3.1.19)*, on obtient :*

$${}^H I^{\alpha}_{0^+}\ x^{\beta} = \ \beta^{-\alpha}\ x^{\beta}\ . \tag{3.1.20}$$

Exemple 3.1.5. *Soit* $\ Re(\alpha) > 0$, $\ n = [Re(\alpha)] + 1$, $\ \beta, \mu \in \mathbb{C}\ $ *tels que* $\ (\beta+\mu) \in \mathbb{C}_+^*$ *et* $\ a = 0$ *:*

$${}^H D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} = \ (\beta+\mu)^{\alpha}\ x^{\beta}\ . \tag{3.1.21}$$

Preuve :

Soit :

$${}^H D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} = x^{-\mu}\ \delta^n\ x^{\mu}\ {}^H I^{n-\alpha}_{0^+,\mu}\ t^{\beta} \qquad , \ \{d'après\ (3.1.10)\}$$

donc d'après (3.1.19)*, on obtient :*

$$\begin{aligned} {}^H D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} &= x^{-\mu}\ \delta^n\ x^{\mu}\ (\beta+\mu)^{\alpha-n}\ x^{\beta} \\ &= x^{-\mu}\ (\beta+\mu)^{\alpha-n}\ \underbrace{\delta^n\ x^{\beta+\mu}}\ . \end{aligned}$$

$$\textit{On pose :} \quad \left(x\ \frac{d}{dx}\right)^i\ x^{\beta+\mu} \qquad , \textit{ tels que ; } i = 1, 2, ..., n\ .$$

Pour $i = 1$ *on obtient ;*

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)\ x^{\beta+\mu} = x\ (\beta+\mu)\ x^{\beta+\mu-1} = (\beta+\mu)\ x^{\beta+\mu}\ .$$

Pour $i = 2$ *on obtient ;*

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^2\ x^{\beta+\mu} = \left(x\ \frac{d}{dx}\right)\left(x\ \frac{d}{dx}\right)\ x^{\beta+\mu} = \left(x\ \frac{d}{dx}\right)(\beta+\mu)\ x^{\beta+\mu} = x(\beta+\mu)^2\ x^{\beta+\mu-1}\ ,$$

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^2\ x^{\beta+\mu} = (\beta+\mu)^2\ x^{\beta+\mu}\ .$$

Ainsi de suite jusquà pour i=n, on obtient ;

$$\left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n\ x^{\beta+\mu} = (\beta+\mu)^n\ x^{\beta+\mu}\ .$$

Alors :

$$\delta^n\ x^{\beta+\mu} = (\beta+\mu)^n\ x^{\beta+\mu}\ , \tag{3.1.22}$$

donc :

$${}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} = x^{-\mu}\ (\beta+\mu)^{\alpha-n}\ (\beta+\mu)^n\ x^{\beta+\mu}\ ,$$

alors :

$${}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ x^{\beta} = (\beta+\mu)^{\alpha}\ x^{\beta}\ .$$

Remarque :

Cas particulier pour $\beta \in \mathbb{C}^*_+$ *c.à.d pour* $\mu = 0$

donc d'après (3.1.21)*, on obtient :*

$${}^{H}D^{\alpha}_{0^+}\ t^{\beta} = \beta^{\alpha}\ x^{\beta}\ . \tag{3.1.23}$$

3.1.2 Estimations Utiles

Rappel

Soit $\Omega = [a,b](-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini du réel axe $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. On désigne par $L^p(a,b)(1 \leq p \leq +\infty)$ l'ensemble de fonctions f mesurables de Lebesgue à valeurs complexes sur Ω pour lesquelles $||f||_p < +\infty$, où :

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < +\infty), \tag{3.1.24}$$

et

$$||f||_\infty = ess \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \, . \tag{3.1.25}$$

Ici, ess sup $|f(x)|$ est le maximum essentiel de la fonction $|f(x)|$.

Nous avons également besoin du L^p pondéré-espace avec le poids de puissance. Un tel espace, que on désigne par $X_c^p(a,b)$ $(c \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq +\infty)$, se compose des fonctions f mesurables de Lebesgue à valeurs complexes sur (a,b) pour lesquelles $||f||_{X_c^p(a,b)} < +\infty$, avec :

$$||f||_{X_c^p(a,b)} = \left(\int_a^b |t^c \ f(t)|^p \ \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < +\infty), \tag{3.1.26}$$

et

$$||f||_{X_c^\infty} = ess \sup_{a \leq x \leq b} (x^c |f(x)|) \ . \tag{3.1.27}$$

En particulier , si $c = \frac{1}{p}$, l'espace $X_c^p(a,b)$ coïncide avec l'espace $L^p(a,b)$:

$$X_{1/p}^p(a,b) = L^p(a,b) \ . \tag{3.1.28}$$

Théorème 3.1.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $1 \leq p < +\infty$, $0 < a < b < +\infty$ *; alors l'opérateur* ${}^H I_a^\alpha$ *est bornée dans* $L^p(a,b)$ *comme suit :*

$$\left\| {}^H I_a^\alpha f \right\|_p \leq K \ \|f\|_p \ , \tag{3.1.29}$$

avec

$$K = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^{1-(1/p)} \left(\int_0^{\log \frac{b}{a}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^\tau \ d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{3.1.30}$$

En particulier si $p = +\infty$ *;*

$$\left\| {}^{H}I_a^{\alpha} f \right\|_{\infty} \leq K \ \|f\|_{\infty} \ , \tag{3.1.31}$$

avec

$$K = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \ \left(\log \frac{b}{a}\right)^{Re(\alpha)} \ . \tag{3.1.32}$$

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $Re(\alpha) > 0 \ , \ 1 \leq p < +\infty \ , \ 0 < a < b < +\infty$ *:*

$$\left\| {}^{H}I_a^{\alpha} f \right\|_{p} = \left(\int_a^b \left| {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) \right|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} \frac{f(t)}{t} \ dt \right|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

on applique l'inégalité de Minkowsky généralisée , on obtient :

$$\left\| {}^{H}I_a^{\alpha} f \right\|_{p} \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^b \left(\int_t^b \left| \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} \frac{f(t)}{t} \right|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \ dt \ ,$$

$$\left\| {}^{H}I_a^{\alpha} f \right\|_{p} \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^b \frac{|f(t)|}{t} \left(\underbrace{\int_t^b \left| \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} \right|^p \ dx}_{H(t)} \right)^{\frac{1}{p}} \ dt \ ,$$

soit :

$$H(t) = \int_t^b \left| \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha - 1} \right|^p \ dx \ ,$$

on pose : $\tau = \log \dfrac{x}{t}$,

$$x = t e^{\tau} \implies dx = t \ e^{\tau} \ d\tau \ ,$$

$$x = t \implies \tau = 0 \quad / \quad x = b \implies \log \frac{b}{t} \ ,$$

donc :

$$H(t) = \int_0^{\log \frac{b}{t}} \left| \tau^{\alpha - 1} \right|^p \ t \ e^{\tau} \ d\tau = \int_0^{\log \frac{b}{t}} \left| \tau^{Re(\alpha) + iIm(\alpha) - 1} \right|^p \ t \ e^{\tau} \ d\tau \ ,$$

$$H(t) = \int_0^{\log \frac{b}{t}} \left| \tau^{Re(\alpha) - 1} \right|^p \ \left| \tau^{iIm(\alpha)} \right|^p \ t \ e^{\tau} \ d\tau \ ,$$

sachant que : $\left|\tau^{Re(\alpha)-1}\right| = \tau^{Re(\alpha)-1}$, $\{car \ \ \tau > 0\}$

$$\left|\tau^{iIm(\alpha)}\right| = \left|e^{iIm(\alpha)log(\tau)}\right| = |cos(Im(\alpha)log(\tau)) + i \ sin(Im(\alpha)log(\tau))| \ ,$$

$$\left|\tau^{iIm(\alpha)}\right| = \sqrt{cos^2(Im(\alpha)log(\tau)) + sin^2(Im(\alpha)log(\tau))} = 1 \ ,$$

donc :

$$H(t) = \int_0^{\log \frac{b}{t}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ t \ e^{\tau} \ d\tau \ ,$$

alors :

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^b \frac{|f(t)|}{t} \left(\int_0^{\log \frac{b}{t}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ t \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \ dt \ ,$$

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^b \frac{|f(t)|}{t^{1-(1/p)}} \left(\int_0^{\log \frac{b}{t}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \ dt \ ,$$

sachant que : $t > a \implies 1/t < 1/a$ *, donc :*

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^b \frac{|f(t)|}{a^{1-(1/p)}} \left(\int_0^{\log \frac{b}{a}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \ dt \ ,$$

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|a^{1-(1/p)}} \left(\int_0^{\log \frac{b}{a}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \ \underbrace{\int_a^b |f(t)| \ dt} \ ,$$

soit :

$$\int_a^b |f(t)| \ dt \leq ||f||_p \ (b-a)^{1/q} \quad , \ \{\textit{grâce à l'inégalité de Hölder}\}$$

$$avec\,; \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad , \quad 1 \leq p, q < +\infty$$

alors :

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \frac{(b-a)^{1/q}}{|\Gamma(\alpha)|a^{1-(1/p)}} \left(\int_0^{\log \frac{b}{a}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \ ||f||_p \ ,$$

$$1/q \ = \ 1\text{-}(1/p) \ ,$$

alors :

$$\left\|{}^H I_a^{\alpha} f\right\|_p \ \leq \ \underbrace{\frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \left(\frac{b}{a} - 1\right)^{1-(1/p)} \left(\int_0^{\log \frac{b}{a}} \tau^{(Re(\alpha)-1)p} \ e^{\tau} \ d\tau\right)^{\frac{1}{p}}}_{K} \ ||f||_p \ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Théorème 3.1.2.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $1 \leq p < +\infty$, $c \in \mathbb{R}$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$ *tels que* $Re(\mu) > c$ *; alors l'opérateur* ${}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}$ *est bornée dans* $X^p_c(\mathbb{R}^+)$ *comme suit :*

$$\left\| {}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu} f \right\|_{X^p_c} \leq K \, \|f\|_{X^p_c} \ , \tag{3.1.33}$$

avec

$$K = [Re(\mu) - c]^{-Re(\alpha)} \ . \tag{3.1.34}$$

En particulier si $c<0$ $\{\mu = 0\}$ *l'opérateur* ${}^{H}I^{\alpha}_{0^+}$ *est bornée dans* $X^p_c(\mathbb{R}^+)$ *par :*

$$\left\| {}^{H}I^{\alpha}_{0^+} f \right\|_{X^p_c} \leq K \, \|f\|_{X^p_c} \ , \tag{3.1.35}$$

avec

$$K = [-c]^{-Re(\alpha)} \ . \tag{3.1.36}$$

Lemme 3.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $0 < a < b < +\infty$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$ *puis pour* $f \in L^p(a,b)$ *;*

$$\lim_{x \to a^+} \ {}^H I_a^\alpha f(x) = 0 \ . \tag{3.1.37}$$

Preuve :

Soit :

$$\begin{aligned} \left|{}^H I_a^\alpha f(x)\right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} \ dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(t)|}{t} \ dt \ , \end{aligned}$$

$$\textit{avec :} \qquad |f(t)| \ \leq \ \overbrace{\sup_{t \in [a,x]} |f(t)|}^{M} \ ,$$

donc :

$$\begin{aligned} \left|{}^H I_a^\alpha f(x)\right| \ &\leq \ \frac{M}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{t} \ dt \\ &\leq \ \frac{M}{|\Gamma(\alpha)|} \left[\frac{-1}{\alpha} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha} \right]_a^x \\ &\leq \ \frac{M}{\alpha \ |\Gamma(\alpha)|} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \ , \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a^+} \left|{}^H I_a^\alpha f(x)\right| \ \leq \ \lim_{x \to a^+} \frac{M}{\alpha \ |\Gamma(\alpha)|} \underbrace{\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha}}_{0} \\ \Longrightarrow &\lim_{x \to a^+} \left|{}^H I_a^\alpha f(x)\right| \ \leq \ 0 \\ \Longrightarrow &\lim_{x \to a^+} \ {}^H I_a^\alpha f(x) = 0 \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} \end{aligned}$$

Lemme 3.1.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $0 < a < b < +\infty$ *puis pour* $f \in C^0([a,b])$ *;*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \ {}^H I_a^\alpha f(x) = f(x) \ . \tag{3.1.38}$$

Preuve :

D'après (3.1.17) *on a :*

$${}^H I_a^\alpha \ 1 \ = \ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \ \Longrightarrow \ \lim_{\alpha \to 0^+} \ {}^H I_a^\alpha \ 1 \ = \lim_{\alpha \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1} \underbrace{\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha}}_{1} \ ,$$

alors :

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \ {}^H I_a^\alpha \ 1 = 1 \quad (\Phi)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\left| \ {}^H I_a^\alpha f(x) - f(x) \ {}^H I_a^\alpha 1 \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} \ dt - f(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{t} \ dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \ \frac{1}{t} \ (f(t)-f(x)) \ dt \right| \\
&\leq \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \ \frac{1}{t} \ |f(t)-f(x)| \ dt \ ,
\end{aligned}$$

sachant que $f \in C^0([a,b])$ *ie* f *est continue sur* $[a,b]$, *alors :*

$\forall \ \epsilon > 0 \ , \ \exists \ \delta > 0 \ , \ \ \forall \ x, t \in [a,b] \ ; \ \ |t-x| < \delta \implies |f(t)-f(x)| < \epsilon$

donc ; $|t-x| < \delta \implies -\delta < t - x < \delta \implies x - \delta < t < x + \delta$

alors :

$$\left|{}^H I_a^\alpha f(x) - f(x) \ {}^H I_a^\alpha 1\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\underbrace{\int_a^{x-\delta} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} |f(t)-f(x)| \frac{dt}{t}}_{Z} + \underbrace{\int_{x-\delta}^{x} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} |f(t)-f(x)| \frac{dt}{t}}_{W} \right]$$

d'après la definition de la continuité de la fonction f on a ;

si $t \in [x-\delta, x]$ *alors* $|f(t)-f(x)| < \epsilon$

donc ;

$$\begin{aligned}
W &\leq \ \epsilon \int_{x-\delta}^{x} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \\
\implies W &\leq \ \epsilon \left[\frac{-1}{\alpha} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} \right]_{x-\delta}^{x} \\
\implies W &\leq \ \frac{\epsilon}{\alpha} \left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha} \ ,
\end{aligned}$$

et d'autre part on a :

$$|f(t)-f(x)| < |f(t)| + |f(x)|$$

$$\textit{avec :} \quad |f(t)| \leq \overbrace{\sup_{t\in[a,x-\delta]} |f(t)|}^{M} \quad , \ \textit{et on pose} \ ; \ |f(x)| = A$$

donc ;

$$|f(t)-f(x)| < \underbrace{M+A}_{c} \quad , \quad \textit{tels que} \;;\; t\in[a,x-\delta]$$

$$\Longrightarrow Z \leq \; c\int_a^{x-\delta}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}$$

$$\Longrightarrow Z \leq \; c\left[\frac{-1}{\alpha}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\right]_a^{x-\delta}$$

$$\Longrightarrow Z \leq \; \frac{c}{\alpha}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}-\left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha}\right)$$

alors :

$$\left|{}^{H}I_a^{\alpha}f(x)-f(x)\;{}^{H}I_a^{\alpha}1\right| \leq \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{c}{\alpha}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}-\left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha}\right)+\frac{\epsilon}{\alpha}\left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha}\right] \;,$$

donc :

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\left|{}^{H}I_a^{\alpha}f(x)-f(x)\;{}^{H}I_a^{\alpha}1\right| \leq \; \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1}\left[c\underbrace{\left(\underbrace{\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha}}_{1}-\underbrace{\left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha}}_{1}\right)}_{0}+\epsilon\underbrace{\left(\log\frac{x}{x-\delta}\right)^{\alpha}}_{1}\right]$$

$$\Longrightarrow \; \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\left|{}^{H}I_a^{\alpha}f(x)-f(x)\;{}^{H}I_a^{\alpha}1\right| \leq \; \epsilon$$

$$\Longrightarrow \; \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\left|{}^{H}I_a^{\alpha}f(x)-f(x)\;{}^{H}I_a^{\alpha}1\right| = 0$$

$$\Longrightarrow \; \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}(\;{}^{H}I_a^{\alpha}f(x)-f(x)\;{}^{H}I_a^{\alpha}1) = 0$$

$$\Longrightarrow \; \lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\;{}^{H}I_a^{\alpha}f(x) = f(x)\underbrace{\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\;{}^{H}I_a^{\alpha}1}_{1} \;,$$

d'après (Φ) *on obtient ;*

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}\;{}^{H}I_a^{\alpha}f(x) = f(x)\;. \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 3.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$ *;*

$A_1)$ *Si* $0 < a < b < +\infty$, *puis pour* $f \in L^p(a,b)$ *:*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta}\ f(x) = {}^{H}I_a^{\alpha+\beta}\ f(x)\ . \tag{3.1.39}$$

$A_2)$ *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $Re(\mu) > c$, $a = 0$, *puis pour* $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ *:*

$$ {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta}\ f(x) = {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha+\beta}\ f(x)\ . \tag{3.1.40}$$

Preuve :

Pour (3.1.39) ***:***

D'après (3.1.3)*, on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ ,$$

d'autre part on a :

$$ {}^{H}I_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{s}\ ds\ ,$$

donc :

$$\begin{aligned}
{}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{{}^{H}I_a^{\beta} f(t)}{t}\ dt \\
\Longrightarrow {}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{t}\ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{s}\ ds\ dt \\
\Longrightarrow {}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{t\ s}\ ds\ dt\ ,
\end{aligned}$$

pour passer de double intégrale à une seule intégrale, il faut faire la méthode de Fubini-Tonelli pour inverser l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_s^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{t\ s}\ dt\ ds\ , \\
{}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(s)}{s} \underbrace{\int_s^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t}}\ ds\ ,
\end{aligned}$$

$$\textit{on pose :} \qquad \tau = \frac{\log \frac{t}{s}}{\log \frac{x}{s}} \ ,$$

donc :

$$t = x \implies \tau = 1 \quad / \quad t = s \implies \tau = 0 \ ,$$

$$\left(\log \frac{t}{s} = \tau \ \log \frac{x}{s} \right) \implies \left(\frac{dt}{t} = \ \log \frac{x}{s} \ d\tau \right) \ ,$$

$$\frac{t}{s} = \left(\frac{x}{s}\right)^{\tau} \implies \frac{t}{s} \ \frac{s}{x} = \left(\frac{x}{s}\right)^{\tau} \ \frac{s}{x} \implies \frac{x}{t} = \left(\frac{x}{s}\right)^{1-\tau} \implies \left(\log \frac{x}{t} = (1-\tau) \log \frac{x}{s} \right) \ ,$$

alors :

$$^{H}I_a^{\alpha} \ ^{H}I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \ \int_a^x \frac{f(s)}{s} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\beta-1} \log \frac{x}{s} \ d\tau \ ds \ ,$$

$$^{H}I_a^{\alpha} \ ^{H}I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \ \int_a^x \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \ \frac{f(s)}{s} \ ds \underbrace{\int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1} d\tau}_{\beta(\beta,\alpha)} \ ,$$

d'après (1.3.1) *et* (1.3.4)*, on obtient :*

$$^{H}I_a^{\alpha} \ ^{H}I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \ \int_a^x \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \ \frac{f(s)}{s} \ ds \ \frac{\Gamma(\beta) \ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \ ,$$

$$^{H}I_a^{\alpha} \ ^{H}I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ \int_a^x \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \ \frac{f(s)}{s} \ ds \ ,$$

$$^{H}I_a^{\alpha} \ ^{H}I_a^{\beta} f(x) = \ ^{H}I_a^{\alpha+\beta} f(x) \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Pour (3.1.40) **:**

D'après (3.1.5)*, on obtient :*

$$^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(t)}{t} \ dt \ ,$$

d'autre part on a :

$$^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \ \int_a^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\mu} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{s} \ ds \ ,$$

donc :

$$^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha} \ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \ \frac{^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta} f(t)}{t} \ dt$$

$$\implies {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha} \ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \ \frac{1}{t} \ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \ \int_a^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\mu} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{s} \ ds \ dt$$

$$\implies {}^{H}I_{0^+,\mu}^{\alpha} \ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \ \int_a^x \int_a^t \left(\frac{s}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \ \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{t \ s} \ ds \ dt \ ,$$

on applique la méthode de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$
{}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\ \int_a^x \int_s^x \left(\frac{s}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\ \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{f(s)}{t\ s}\ dt\ ds\ ,
$$

$$
{}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\ \int_a^x \left(\frac{s}{x}\right)^{\mu} \frac{f(s)}{s} \underbrace{\int_s^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\ \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t}}\ ds\ ,
$$

donc on pose le même changement variable qui on déjà lancé précédemment $\{\tau = (\log\frac{t}{s})/(\log\frac{x}{s})\}$ *et on fait le même travail, on obtient :*

$$
{}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ \int_a^x \left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\ \left(\frac{s}{x}\right)^{\mu} \frac{f(s)}{s}\ ds\ ,
$$

$$
{}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu}f(x) = {}^{H}I^{\alpha+\beta}_{0^+,\mu}f(x)\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}
$$

Remarque : $\{pour A_2\}$

En particulier si $\mu = 0$ *avec* $c < 0$ *donc ;*

$$
{}^{H}I^{\alpha}_{0^+}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+}f(x) = {}^{H}I^{\alpha+\beta}_{0^+}f(x)\ . \tag{3.1.41}
$$

Proposition 3.1.2. *Soit* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Re(\alpha) \in]n-1, n[$ *et* $1 \le p \le +\infty$ *;*

$B_1)$ *Si* $0 < a < b < +\infty$, *puis pour* $f \in L^p(a,b)$:

$$
\delta^n\ {}^{H}I^{n}_{a}\ f(x) = f(x)\ . \tag{3.1.42}
$$

$$
{}^{H}D^{\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\alpha}_{a}\ f(x) = f(x)\ . \tag{3.1.43}
$$

$B_2)$ *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $Re(\mu) > c$, $a = 0$, *puis pour* $f \in X^p_c(\mathbb{R}^+)$:

$$
x^{-\mu}\ \delta^n\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n}_{a}\ f(x) = f(x)\ . \tag{3.1.44}
$$

$$
{}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^+,\mu}\ f(x) = f(x)\ . \tag{3.1.45}
$$

Preuve :

Pour (3.1.42) ***:***

On pose :

$$
\delta^n\ {}^{H}I^{n}_{a}\ f(x) = f(x)\ \ ....P(n)\ .
$$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie pour $n \geq 1$ *;*

Pour n=1 :

$$\delta \ {}^{H}I_a^1 \ f(x) = x \ \underbrace{\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{t} \ dt} \ , \qquad \{voir\ (3.1.1)\}$$

on applique la règle de dérivation de Leibnitz, donc d'après (2.1.14)*, on obtient :*

$$\delta \ {}^{H}I_a^1 \ f(x) = x \ \frac{f(x)}{x} = f(x) \ ,$$

donc pour n=1 est vérifiée .

On suppose que P(n) est vraie :

$$\delta^n \ {}^{H}I_a^n \ f(x) = f(x) \ .$$

On démontre que P(n+1) est vraie, tels que :

$$\delta^{n+1} \ {}^{H}I_a^{n+1} \ f(x) = \ f(x) \ .$$

Soit :

$$\delta^{n+1} \ {}^{H}I_a^{n+1} \ f(x) = \delta \ \underbrace{\delta^n \ {}^{H}I_a^n \ \ {}^{H}I_a^1 \ f(x)}_{{}^{H}I_a^1 \ f(x)} \ ,$$

d'après l'hypothèse , on obtient :

$$\begin{aligned} &\delta^{n+1} \ {}^{H}I_a^{n+1} \ f(x) = \delta \ \ {}^{H}I_a^1 \ f(x) \\ \Longrightarrow \ &\delta^{n+1} \ {}^{H}I_a^{n+1} \ f(x) = f(x) \ , \qquad \{on\ vu\ ça\ dans\ le\ cas\ pour\ n{=}1\} \end{aligned}$$

donc P(n+1) est vérifiée , alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie, donc (3.1.42) *est bien démontrée pour* $n \geq 1$ *.*

Pour (3.1.43) ***:***

Soit :

$${}^{H}D_a^{\alpha} \ {}^{H}I_a^{\alpha} \ f(x) = \delta^n \ \underbrace{{}^{H}I_a^{n-\alpha} \ {}^{H}I_a^{\alpha} \ f(x)} \ , \qquad \{voir\ (3.1.6)\}$$

{*d'après* (3.1.39)*,on obtient :*} $\quad {}^{H}D_a^{\alpha} \ {}^{H}I_a^{\alpha} \ f(x) = \delta^n \ {}^{H}I_a^n \ f(x) \ ,$

{ *d'après* (3.1.42)*, on obtient :*} $\quad {}^{H}D_a^{\alpha} \ {}^{H}I_a^{\alpha} \ f(x) = f(x) \ .$ $\qquad$ *(C.Q.F.D)*

Pour (3.1.44) **:**

On pose :

$$x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\ f(x) = f(x) \quad ....P(n)\ ,$$

$$\text{avec ,}\quad {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\ \int_{0}^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\frac{f(t)}{t}\ dt\ . \qquad \{voir\ (3.1.5)\}$$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie pour $n \geq 1$ *;*

Pour n=1 :

$$x^{-\mu}\ \delta\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x) = x^{-\mu}\ x\ \frac{d}{dx}\ x^{\mu}\int_{0}^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\frac{f(t)}{t}\ dt = x^{-\mu}\ x\ \underbrace{\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} t^{\mu}\ \frac{f(t)}{t}\ dt}\ ,$$

on applique la règle de dérivation de Leibnitz, donc d'après (2.1.14)*, on obtient :*

$$x^{-\mu}\ \delta\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x) = x^{-\mu}\ x\ x^{\mu}\ \frac{f(x)}{x} = f(x)\ ,$$

donc pour n=1 est vérifiée .

On suppose que pour P(n) est vraie :

$$x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\ f(x) = f(x)\ .$$

On démontre que P(n+1) est vraie, tels que :

$$x^{-\mu}\ \delta^{n+1}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n+1}_{0^{+},\mu}\ f(x) = \ f(x).$$

Soit :

$$\begin{aligned} x^{-\mu}\ \delta^{n+1}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n+1}_{0^{+},\mu}\ f(x) &= x^{-\mu}\ \delta\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\quad {}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x) \\ &= x^{-\mu}\ \delta\ x^{\mu}\ \underbrace{x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\quad {}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x)}_{{}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x)}\ , \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse on obtient :

$$\begin{aligned} & x^{-\mu}\ \delta^{n+1}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n+1}_{0^{+},\mu}\ f(x) = x^{-\mu}\ \delta\ x^{\mu}\quad {}^{H}I^{1}_{0^{+},\mu}\ f(x) \\ \Longrightarrow\ & x^{-\mu}\ \delta^{n+1}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n+1}_{0^{+},\mu}\ f(x) = f(x)\ , \qquad \{on\ vu\ ça\ dans\ le\ cas\ pour\ n{=}1\} \end{aligned}$$

donc P(n+1) est vérifiée , alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie, donc (3.1.44) *est bien démontrée pour* $n \geq 1$.

Pour (3.1.45) ***:***

Soit :

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ f(x) = x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ \underbrace{{}^{H}I^{n-\alpha}_{0^{+},\mu}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^{+},\mu} f(x)}\ , \qquad \{voir\ (3.1.10)\} $$

d'après (3.1.40)*,on obtient :* $\quad {}^{H}D^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ f(x) = x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ \ {}^{H}I^{n}_{0^{+},\mu}\ f(x)$

d'après (3.1.44)*, on obtient :* $\quad {}^{H}D^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ f(x) = f(x)\ .$ $\qquad$ *(C.Q.F.D)*

Remarque : $\{pour B_2\}$

En particulier si $\mu = 0$ *avec* $c < 0$ *donc ;*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^{+}}\ {}^{H}I^{\alpha}_{0^{+}} f(x) = f(x)\ . \tag{3.1.46} $$

Proposition 3.1.3. *Soit* $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$, $Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $Re(\beta) > Re(\alpha)$ *et* $1 \le p \le +\infty$ *;*

$C_1)$ *Si* $0 < a < b < +\infty$, *puis pour* $f \in L^{p}(a,b)$:

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\beta}_{a} f(x) = \ {}^{H}I^{\beta-\alpha}_{a} f(x)\ . \tag{3.1.47} $$

$C_2)$ *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $Re(\mu) > c$, $a = 0$, *puis pour* $f \in X^{p}_{c}(\mathbb{R}^{+})$:

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^{+},\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^{+},\mu} f(x) = \ {}^{H}I^{\beta-\alpha}_{0^{+},\mu} f(x)\ . \tag{3.1.48} $$

Preuve :

Pour (3.1.47) ***:***

Soit :

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\beta}_{a} f(x) = \ \delta^{n} \underbrace{{}^{H}I^{n-\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\beta}_{a} f(x)}\ , \qquad \{voir (3.1.6)\} $$

d'après (3.1.39)*, on obtient :*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\beta}_{a} f(x) = \ \delta^{n}\ {}^{H}I^{n-\alpha+\beta}_{a} f(x) = \ \delta^{n} \underbrace{{}^{H}I^{n+(\beta-\alpha)}_{a} f(x)}\ , $$

d'après (3.1.39)*, car* $Re(\beta) > Re(\alpha)$ *donc* $Re(\beta) - Re(\alpha) > 0$ *et* $n \ge 1$*, on obtient :*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{a}\ {}^{H}I^{\beta}_{a} f(x) = \underbrace{\delta^{n}\ {}^{H}I^{n}_{a}}\ {}^{H}I^{\beta-\alpha}_{a} f(x)\ , $$

d'après (3.1.42), *on obtient :*

$$ {}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}I_{a}^{\beta} f(x) = {}^{H}I_{a}^{\beta-\alpha} f(x)\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

Pour (3.1.48) ***:***

Soit :

$$ {}^{H}D_{0^{+},\mu}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ \underbrace{{}^{H}I_{0^{+},\mu}^{n-\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x)}\ , \qquad \{voir(3.1.10)\} $$

d'après (3.1.40), *on obtient :*

$$ {}^{H}D_{0^{+},\mu}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ \underbrace{{}^{H}I_{0^{+},\mu}^{n+(\beta-\alpha)} f(x)}\ , $$

d'après (3.1.40), *on obtient :*

$$ {}^{H}D_{0^{+},\mu}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = \underbrace{x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{n}}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta-\alpha} f(x)\ , $$

d'après (3.1.44), *on obtient :*

$$ {}^{H}D_{0^{+},\mu}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta-\alpha} f(x)\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

Remarque : $\{pourC_1\}$

En particulier si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$ {}^{H}D_{a}^{n}\ {}^{H}I_{a}^{\beta}\ f(x) = {}^{H}I_{a}^{\beta-n}\ f(x)\ , \tag{3.1.49} $$

d'après (3.1.12) *on peut écrire comme suit :*

$$ \delta^{n}\ {}^{H}I_{a}^{\beta}\ f(x) = {}^{H}I_{a}^{\beta-n}\ f(x)\ . \tag{3.1.50} $$

Remarque : $\{pourC_2\}$

En particulier si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$ {}^{H}D_{0^{+},\mu}^{n}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta-\alpha} f(x)\ , \tag{3.1.51} $$

d'après (3.1.13) *on peut écrire comme suit :*

$$ x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta} f(x) = {}^{H}I_{0^{+},\mu}^{\beta-n} f(x)\ . \tag{3.1.52} $$

Quand $\mu = 0$, *alors :*

$$ {}^{H}D_{0^{+}}^{\alpha}\ {}^{H}I_{0^{+}}^{\beta} f(x) = {}^{H}I_{0^{+}}^{\beta-\alpha} f(x)\ . \tag{3.1.53} $$

Proposition 3.1.4. *Soit* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $0 < Re(\beta) < Re(\alpha) - [Re(\alpha)]$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$ *;*

$E_1)$ *Si* $0 < a < b < +\infty$, *puis pour* $f \in L^p(a,b)$ *:*

$$^{H}D_{a}^{\alpha}\ ^{H}I_{a}^{\beta}f(x) = \ ^{H}D_{a}^{\alpha-\beta}f(x)\ . \tag{3.1.54}$$

$E_2)$ *Si* $\mu \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $Re(\mu) > c$, $a = 0$, *puis pour* $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ *:*

$$^{H}D_{0^+,\mu}^{\alpha}\ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta}f(x) = \ ^{H}D_{0^+,\mu}^{\alpha-\beta}f(x)\ . \tag{3.1.55}$$

Preuve :

Pour (3.1.54) ***:***

Soit :

$$^{H}D_{a}^{\alpha}\ ^{H}I_{a}^{\beta}f(x) = \delta^n\ \underbrace{^{H}I_{a}^{n-\alpha}\ ^{H}I_{a}^{\beta}f(x)}\ , \qquad \{voir(3.1.6)\}$$

d'après (3.1.39), *on obtient :*

$$^{H}D_{a}^{\alpha}\ ^{H}I_{a}^{\beta}f(x) = \ \delta^n\ ^{H}I_{a}^{n-\alpha+\beta}f(x) = \ \delta^n\ ^{H}I_{a}^{n-(\alpha-\beta)}f(x)\ ,$$

et pour appliquer (3.1.6) *il faut que ;* *n-1<*$Re(\alpha) - Re(\beta)$*<n ,*

sachant que ; *n=*$[Re(\alpha)]$ *+ 1, alors ;* $[Re(\alpha)]$*+1-1 <*$Re(\alpha) - Re(\beta) < [Re(\alpha)] + 1$

alors ; $Re(\alpha) - [Re(\alpha)] - 1 < Re(\beta) < Re(\alpha) - [Re(\alpha)]$ *, avec ;* $0 < Re(\beta)$ *,*

alors, on déduit la condition, 0<$Re(\beta)$*<*$Re(\alpha) - [Re(\alpha)]$ *,*

donc on a vérifiée que *n-1<*$Re(\alpha) - Re(\beta)$*<n, alors maintenant on applique* (3.1.6)*, et on obtient :*

$$^{H}D_{a}^{\alpha}\ I_{a}^{\beta}f(x) = \ ^{H}D_{a}^{\alpha-\beta}f(x)\ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Pour (3.1.55) ***:***

Soit :

$$^{H}D_{0^+,\mu}^{\alpha}\ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta}f(x) = x^{-\mu}\ \delta^n\ x^{\mu}\ \underbrace{^{H}I_{0^+,\mu}^{n-\alpha}\ ^{H}I_{0^+,\mu}^{\beta}f(x)}\ , \qquad \{voir(3.1.10)\}$$

d'après (3.1.40), *on obtient :*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu} f(x) =\ x^{-\mu}\ \delta^{n}\ x^{\mu}\ {}^{H}I^{n-(\alpha-\beta)}_{a} f(x)\ , $$

et pour appliquer (3.1.10) *il faut que ;* $n\text{-}1<Re(\alpha)-Re(\beta)<n$ *, et elle est vérifiée grâce à la condition* $0<Re(\beta)<Re(\alpha)-[Re(\alpha)]$, *donc :*

$$ {}^{H}D^{\alpha}_{0^+,\mu}\ {}^{H}I^{\beta}_{0^+,\mu} f(x) =\ {}^{H}D^{\alpha-\beta}_{0^+,\mu} f(x)\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

Proposition 3.1.5. *Soit* $f\in C^{n}([a,b])$ *tels que* $n\in\mathbb{N}^{*},\ 0<a<b<+\infty$ *:*

$$ {}^{H}I^{n}_{a}\ \delta^{n} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j}\ . \tag{3.1.56} $$

Preuve :

Soit : $Re(\alpha)>0$, $f\in C^{n}([a,b])$ *tels que* $n\in\mathbb{N}^{*},\ 0<a<b<+\infty$ *et d'après* (3.1.3) *on a :*

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \int_{a}^{x} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\ dt\ . $$

On fait une intégration par partie sur ${}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x)$ *:*

$\int u'\ v = u\ v - \int u\ v'$,

tels que :

$$ \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = u' = \frac{1}{t}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \quad\Longrightarrow\quad u = -\frac{1}{\alpha}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\ , \\ &v = f(t) \quad\Longrightarrow\quad v' = \frac{d}{dt} f(t)\ , \end{aligned} $$

donc :

$$ \begin{aligned} {}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ \left(\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} f(t)\right]_{a}^{x} + \frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\frac{d}{dt} f(t)\ dt\right)\ , \\ {}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\ \int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\frac{\left(t\frac{d}{dt}\right) f(t)}{t}\ dt\ , \\ {}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\ \int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\frac{\delta f(t)}{t}\ dt}\ , \end{aligned} $$

d'après (3.1.3), *on obtient :*

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a} f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \underbrace{{}^{H}I^{\alpha+1}_{a}\delta f(x)}\ . \tag{3.1.57} $$

On fait une autre intégration par partie sur ${}^{H}I_a^{\alpha+1}\delta f(x)$ *:*

soit :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+1}\delta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} \frac{\delta f(t)}{t}\, dt \ , $$

tels que :

$\int u'\ v = u\ v - \int u\ v'$,

$$ \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = u' = \frac{1}{t}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{1}{\alpha+1}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1} \quad , \\ &v = \delta f(t) \quad \Longrightarrow \quad v' = \frac{d}{dt}\delta f(t) \ , \end{aligned} $$

donc :

$$ \begin{aligned} {}^{H}I_a^{\alpha+1}\delta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\left[-\frac{\delta f(t)}{\alpha+1}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1} \right]_a^x + \frac{1}{\alpha+1}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1} \frac{d}{dt}\delta f(t)\, dt \right) \ , \\ {}^{H}I_a^{\alpha+1}\delta f(x) &= \frac{\delta f(a)}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+1} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1} \frac{\left(t\frac{d}{dt}\right)\delta f(t)}{t}\, dt} \ , \end{aligned} $$

sachant que :

$$ \begin{aligned} \delta f(a) &\equiv \lim_{x\to a} \delta f(x) \ , \\ \left(t\frac{d}{dt}\right)\delta f(t) &= \delta^2 f(t) \ , \end{aligned} $$

d'après (3.1.3), *on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+1}\delta f(x) = \frac{\delta f(a)}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+1} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+2}\delta^2 f(x) \ , \tag{3.1.58} $$

on remplace (3.1.58) *dans* (3.1.57) *, on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \frac{\delta f(a)}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+1} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+2}\ \delta^2 f(x) \ . $$

Ainsi de suite jusqu'à obtenue :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+n}\ \delta^n f(x) \ , \tag{3.1.59} $$

avec : $\quad \delta^j f(a) \equiv \lim_{x\to a} \delta^j f(x)$.

Pour démontrer le résultat (3.1.59), on passe à la démonstration par récurrence .

Soit : pour $Re(\alpha) > 0$ *et pour* $n \geq 1$ *:*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + {}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x) \quad ....P(n) $$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie :

Pour n=1 :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\delta^0 f(a)}{\Gamma(\alpha+1+0)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+0} + {}^{H}I_a^{\alpha+1} \; \delta f(x) \; , $$
$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha} + {}^{H}I_a^{\alpha+1} \; \delta f(x) \; , $$

elle est vérifiée d'après (3.1.57).

On suppose que P(n) est vraie :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + {}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x) \; . $$

On démontre que P(n+1) est vraie , tels que $f \in C^{n+1}([a,b])$ *:*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + {}^{H}I_a^{\alpha+n+1} \; \delta^{n+1} f(x) $$

on fait une intégration par partie sur ${}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x)$ *:*

soit :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n-1} \frac{\delta^n f(t)}{t} \, dt \; , \qquad \{voir \; (3.1.3)\} $$

tels que :

$\int u' \; v = u \; v - \int u \; v'$,

$$ \frac{du}{dt} = u' = \frac{1}{t} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n-1} \implies u = -\frac{1}{\alpha+n} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n} \; , $$
$$ v = \delta^n f(t) \implies v' = \frac{d}{dt} \delta^n f(t) \; , $$

donc :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \left(\left[-\frac{\delta^n f(t)}{\alpha+n} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n} \right]_a^x + \int_a^x \frac{1}{\alpha+n} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n} \frac{d}{dt} \delta^n f(t) \, dt \right) \; , $$
$$ {}^{H}I_a^{\alpha+n} \; \delta^n f(x) = \frac{\delta^n f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+n} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha+n} \frac{\delta^{n+1} f(t)}{t} \, dt}_{} \; , $$

d'après (3.1.3), *on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{\alpha+n}\ \delta^n f(x) = \frac{\delta^n f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+n} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+n+1}\ \delta^{n+1} f(x)\ , $$

on remplace cette résultat dans l'hypothèse , on obtient :

$$ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + \frac{\delta^n f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+n}} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+n+1}\ \delta^{n+1} f(x) $$

$$ \Longrightarrow {}^{H}I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+n+1}\ \delta^{n+1} f(x)\ , $$

donc P(n+1) est vérifiée, alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie , donc le résultat (3.1.59) *est bien vérifiée .*

On fait la limite quand α *tend vers* 0^+ *dans les deux cotée de* (3.1.59), *on obtient :*

$$ \underbrace{\lim_{\alpha\to 0^+}\ {}^{H}I_a^{\alpha} f(x)}_{f(x)} = \lim_{\alpha\to 0^+} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha+j} + \ {}^{H}I_a^{\alpha+n}\ \delta^n f(x) \right)\ , $$

d'après (3.1.38), *on obtient :*

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(0+1+j)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{0+j} + \ {}^{H}I_a^{0+n}\ \delta^n f(x) $$

$$ \Longrightarrow {}^{H}I_a^{n}\ \delta^n f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(1+j)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j}\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

Proposition 3.1.6. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *et* $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$ {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \iff f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}\ , \qquad (3.1.60) $$

avec $c_j \in \mathbb{R}$, *(j=0,1,2,.........,n-1) ; des constantes arbitraires .*

Preuve :

($\Longrightarrow$*) Dans le sens directe :*

Soit :

$$ {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \Longrightarrow \delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x) = 0 \Longrightarrow {}^{H}I_a^{n}\delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x) = \underbrace{{}^{H}I_a^{n}0}_{0}\ , $$

d'après (3.1.56)*, on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j \ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(a)}{\Gamma(1+j)} \ \left(\log \frac{x}{a}\right)^j = 0 \ , $$

sachant que :

$$ \delta^j \ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(a) \equiv \lim_{x \to a} \ \delta^j \ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x) \ , $$

on pose :

$$ c_j = \frac{1}{\Gamma(1+j)} \ \left[\lim_{x \to a} \ \delta^j \ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x)\right] \ , \tag{3.1.61} $$

alors :

$$ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^j \ , $$

on compose les deux cotés de l'équation par ${}^{H}D_a^{n-\alpha}$ *et on obtient :*

$$ \underbrace{{}^{H}D_a^{n-\alpha} \ {}^{H}I_a^{n-\alpha} f(x)} = \ {}^{H}D_a^{n-\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^j \ , $$

d'après (3.1.43)*, on obtient :*

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \underbrace{{}^{H}D_a^{n-\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^j} \ , $$

d'après (3.1.15)*, on obtient :*

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n} \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

(⟸) Dans le sens contraire :

Soit :

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n} \ , $$

on compose les deux cotés de l'équation par ${}^{H}D_a^{\alpha}$ *et on obtient :*

$$ {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \ \underbrace{{}^{H}D_a^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}} \ , $$

d'après (3.1.15)*, on obtient :*

$$ {}^H D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \, \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \, \frac{\Gamma(j+\alpha-n+1)}{\Gamma(j-n+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j-n} \quad , $$

$$ {}^H D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \, \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j-n} \quad , $$

avec ; $\;0 \le j \le n-1 \implies 1-n \le j-n+1 \le 0$ *, pour* $\;n \ge 1$

donc ; (j-n+1)$\in \mathbb{Z}^-$*, alors ;* $\;\Gamma(j-n+1) = \infty \implies 1/\Gamma(j-n+1) = 0$

alors ; $\;{}^H D_a^\alpha f(x) = 0\;$. *(C.Q.F.D)*

Remarque :

En cas particulier, si 0<Re(α*)* <1 *tels que n=1 ,*

d'après (3.1.60)*, on obtient :*

$$ {}^H D_a^\alpha f(x) = 0 \iff f(x) = c_0 \, \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1+\alpha-1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{0+\alpha-1} = c_0 \, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} \quad , $$

d'après (3.1.61)*, on obtient :*

$$ c_0 = \frac{1}{\Gamma(1+0)} \left[\lim_{x\to a} \; \delta^0 \; {}^H I_a^{1-\alpha} f(x)\right] = \lim_{x\to a} \; {}^H I_a^{1-\alpha} f(x) \; , $$

d'après (3.1.37)*, on obtient :* $\quad c_0 = 0$,

donc :

pour $\;0 < Re(\alpha) < 1$ *:*

$$ {}^H D_a^\alpha f(x) = 0 \iff f(x) = 0 \; . \tag{3.1.62} $$

Proposition 3.1.7. *Soit* $\;Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)]+1$ *et* $\;0 < a < b < +\infty$, $f \in L(a,b)$ *:*

$$ {}^H I_a^\alpha \; {}^H D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\log \frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left[\lim_{x\to a} \; \delta^j \; {}^H I_a^{n-\alpha} f(x)\right] \; . \tag{3.1.63} $$

Preuve :

Soit :

$$ {}^H D_a^\alpha f(x) = \underbrace{{}^H D_a^\alpha \; {}^H I_a^\alpha}_{} \; {}^H D_a^\alpha f(x) \qquad \{c\text{'est selon la propriété } (3.1.43)\} $$

$$ \implies {}^H D_a^\alpha f(x) - \; {}^H D_a^\alpha \; {}^H I_a^\alpha \; {}^H D_a^\alpha f(x) = 0 \implies {}^H D_a^\alpha \left(f(x) - \; {}^H I_a^\alpha \; {}^H D_a^\alpha f(x)\right) = 0 \; , $$

d'après (3.1.60)*, on obtient :*

$$f(x)-\ {}^{H}I_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\alpha}f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}c_{j}\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}\quad ,$$

d'après (3.1.60)*, on obtient :*

$$f(x)-\ {}^{H}I_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\alpha}f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\Gamma(1+j)}\ \left[\lim_{x\to a}\ \delta^{j}\ {}^{H}I_{a}^{n-\alpha}f(x)\right]\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}\quad ,$$

alors :

$${}^{H}I_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\alpha}f(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}\ \left[\lim_{x\to a}\ \delta^{j}\ {}^{H}I_{a}^{n-\alpha}f(x)\right]\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 3.1.8. *Soient n-1<Re(α)<n , m-1<Re(β)<m tels que n,m $\in \mathbb{N}^{*}$, n+m-1<Re(α)+Re(β)<n+m et $0<a<b<+\infty$, $f\in L(a,b)$:*

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\ {}^{H}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left[\lim_{x\to a}\ \delta^{j}\ {}^{H}I_{a}^{m-\beta}f(x)\right]}{\Gamma(j+1-m-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-m-\alpha} \qquad (3.1.64)$$

Preuve :

Soit :

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\delta^{n}\ {}^{H}I_{a}^{n-\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)\ , \qquad \{\textit{voir } (3.1.6)\}$$

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\delta^{n}\ \underbrace{\delta^{m}\ {}^{H}I_{a}^{m}}\ {}^{H}I_{a}^{n-\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)\ , \qquad \{\textit{voir } (3.1.42)\}$$

d'après (3.1.39)*, on obtient :*

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\underbrace{\delta^{n+m}\ {}^{H}I_{a}^{n+m-(\alpha+\beta)}}\ {}^{H}I_{a}^{\beta}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)\ ,$$

d'après (3.1.6) *; grâce à la condition de $n+m-1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$, on obtient :*

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\ {}^{H}D_{a}^{\alpha+\beta}\ \underbrace{{}^{H}I_{a}^{\beta}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)}\ ,$$

d'après (3.1.63)*, on obtient :*

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\ {}^{H}D_{a}^{\alpha+\beta}\left(f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\beta-m}}{\Gamma(j+1+\beta-m)}\ \left[\lim_{x\to a}\ \delta^{j}\ {}^{H}I_{a}^{m-\beta}f(x)\right]\right)\ ,$$

$${}^{H}D_{a}^{\alpha}\ {}^{H}D_{a}^{\beta}f(x)=\ {}^{H}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left[\lim_{x\to a}\ \delta^{j}\ {}^{H}I_{a}^{m-\beta}f(x)\right]}{\Gamma(j+1+\beta-m)}\ \underbrace{{}^{H}D_{a}^{\alpha+\beta}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+\beta-m}},$$

d'après (3.1.15)*, on obtient :*

$$ {}^{H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}D_a^{\beta}f(x) = \ {}^{H}D_a^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left[\lim_{x\to a}\ \ \delta^j\ {}^{H}I_a^{m-\beta}f(x)\right]}{\Gamma(j+1+\beta-m)}\ \frac{\Gamma(j+\beta-m+1)}{\Gamma(j+1-m-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-m-\alpha} \quad , $$

$$ {}^{H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}D_a^{\beta}f(x) = \ {}^{H}D_a^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left[\lim_{x\to a}\ \ \delta^j\ {}^{H}I_a^{m-\beta}f(x)\right]}{\Gamma(j+1-m-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-m-\alpha} \quad . \qquad (C.Q.F.D) $$

Note :

Pour la condition $n+m-1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$ *,*

on peut prend $n+m-2<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m-1$ *;*

on déjà vu les détails dans le chapitre précédent .

3.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard

Définition 3.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f \in C^n([a, b])$, $0 < a < b < +\infty$. *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de* ***Caputo-Hadamard*** *de la fonction* f *par la fonction suivante :*

A) $\alpha \neq n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$^{C-H}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \delta^n f(x) \ , \tag{3.2.1}$$

$$\textit{avec :} \quad \delta = x\ \frac{d}{dx} \quad \Longrightarrow \quad \delta^n = \left(x\ \frac{d}{dx}\right)^n \ .$$

En d'autre termes, on a :

$$^{C-H}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \ \delta^n f(t)\ \frac{dt}{t} \ . \tag{3.2.2}$$

B) $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$^{C-H}D_a^{n} f(x) = \delta^n f(x) \ . \tag{3.2.3}$$

En particulier :

$$^{C-H}D_a^{0} f(x) = f(x) \ . \tag{3.2.4}$$

Exemple 3.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $Re(\beta) > 0$ *et* $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$^{C-H}D_a^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1-\alpha} \ . \tag{3.2.5}$$

Preuve :

Soit :

$$^{C-H}D_a^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \underbrace{\delta^n \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}} \ , \qquad \{\textit{voir } (3.2.1)\}$$

d'après (3.1.16)*, on obtient :*

$$^{C-H}D_a^{\alpha} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1-n} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}\ \underbrace{{}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1-n}} \ ,$$

d'après (3.1.14), *on obtient :*

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}\,\frac{\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1-\alpha}\quad ,$$

alors :

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1-\alpha}\quad .$$

Exemple 3.2.2. *Soit* $Re(\alpha)>0$, $n=[Re(\alpha)]+1$ *:*

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ 1=0\ . \tag{3.2.6}$$

Preuve :

Soit :

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ 1=\ ^{H}I_a^{n-\alpha}\underbrace{\delta^n 1}_{0}\qquad ,\ \{voir\ (3.2.1)\}$$

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ 1=\ ^{H}I_a^{n-\alpha}0\ ,$$

alors :

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ 1=0\ .$$

Note :

d'après (3.1.15), (3.1.18), (3.2.5) et (3.2.6) on remarque que si $Re(\beta)\neq 1$:

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}=\ ^{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\quad .$$

3.2.1 La Relation entre la Dérivée Fractionnaire au sens de Hadamard et la Dérivée Fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard

Soit $Re(\alpha)>0$, $n=[Re(\alpha)]+1$, $f\in C^n([a,b])$, $0<a<b<+\infty$:

$$^{C-H}D_a^{\alpha}f(x)=\ ^{H}D_a^{\alpha}f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-\alpha}\quad , \tag{3.2.7}$$

sachant que :

$$\delta^j f(a)\ \equiv\lim_{x\to a}\delta^j f(x)\ .$$

Preuve :

d'après (3.1.56), on obtient :

$$ {}^{H}I_a^n\ \delta^n f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j \ , \tag{3.2.8}$$

on compose l'équation par ${}^{H}I_a^{n-\alpha}$ et on obtient :

$$\underbrace{{}^{H}I_a^{n-\alpha}\ {}^{H}I_a^n}\ \delta^n f(x) = \ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\right) \ ,$$

${}^{H}I_a^{n-\alpha}\ {}^{H}I_a^n = \ {}^{H}I_a^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}$ grâce à (3.1.39) puis on compose l'équation par δ^n, on obtient :

$$\underbrace{\delta^n\ {}^{H}I_a^n}\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \delta^n f(x) = \delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\right) \ ,$$

d'après (3.1.42), o, obtient :

$$\underbrace{{}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \delta^n f(x)} = \delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\right) \ ,$$

d'après (3.2.1), on obtient :

$${}^{C-H}D_a^\alpha f(x) = \underbrace{\delta^n\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\right) \ ,$$

d'après (3.1.6), on obtient :

$${}^{C-H}D_a^\alpha f(x) = \ {}^{H}D_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \underbrace{{}^{H}D_a^\alpha\left(\log\frac{x}{a}\right)^j} ,$$

d'après (3.1.15), on obtient :

$${}^{C-H}D_a^\alpha f(x) = \ {}^{H}D_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)} \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-\alpha} \ ,$$

alors :

$${}^{C-H}D_a^\alpha f(x) = \ {}^{H}D_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j-\alpha} \ . \qquad \text{(C.Q.F.D)}$$

Remarques :

A)

$${}^{C-H}D_a^\alpha f(x) \ = \ {}^{H}D_a^\alpha f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \delta^j f(a) = 0 \quad , \ j = 0, 1, 2........., n-1 \ .$$

B)

En particulier si $0 < Re(\alpha) < 1$, n=1 :

alors (3.2.7) devient :

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \quad . \tag{3.2.9} $$

Proposition 3.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f \in C^n([a, b])$, $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j} \quad , \tag{3.2.10} $$

$w_j \in \mathbb{R}$, (j=0,1,2,.........,n-1) ; des constantes arbitraires .

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \delta^n f(x) = 0 \ , \qquad \{voir\ (3.2.1)\} $$

on compose l'équation par ${}^{H}D_a^{n-\alpha}$*, on obtient :*

$$ {}^{H}D_a^{n-\alpha}\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ \delta^n f(x) = \underbrace{{}^{H}D_a^{n-\alpha}\ 0}_{0} \ , $$

d'après (3.1.43)*, on obtient :*

$$ \delta^n f(x) = 0 \ , $$

on compose l'équation par ${}^{H}I_a^{n}$*, on obtient :*

$$ {}^{H}I_a^{n}\ \delta^n f(x) = \underbrace{{}^{H}I_a^{n}\ 0}_{0} \ , $$

d'après (3.1.56)*, on obtient :*

$$ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)}\right)}_{w_j} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j} = 0 \ , $$

alors :

$$ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j \ \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j} \quad . \qquad (C.Q.F.D) $$

Proposition 3.2.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f \in C^n([a,b])$, $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x) = f(x) \ . \tag{3.2.11} $$

Preuve :

D'après (3.2.7)*, on obtient :*

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x) = \ {}^H D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j \ {}^H I_a^\alpha f(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{j-\alpha} \quad , $$

avec :

$$ \begin{aligned} &\delta^j \ {}^H I_a^\alpha f(a) \ \equiv \ \lim_{x \to a} \delta^j \ {}^H I_a^\alpha f(x) \ , \\ &\textit{d'après } (3.1.50) \ ; \quad \lim_{x\to a} \delta^j \ {}^H I_a^\alpha f(x) = \lim_{x\to a} \ {}^H I_a^{\alpha-j} f(x) \ , \\ &\textit{car} \quad Re(\alpha) > n-1 \geq j \geq 0 \implies Re(\alpha) > j \ \ , \textit{pour} \ \ 0 < j < n-1 \ , \\ &\textit{d'après } (3.1.37) \ ; \quad \lim_{x\to a} \ {}^H I_a^{\alpha-j} f(x) = 0 \ , \\ &\textit{donc :} \quad \delta^j \ {}^H I_a^\alpha f(a) = 0 \quad , \textit{pour} \ \ j = 0, 1, ..., n-1 \ . \end{aligned} $$

Alors :

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x) = \underbrace{{}^H D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x)} \ , $$

d'après (3.1.43)*, on obtient :*

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\alpha f(x) = f(x) \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)} $$

Proposition 3.2.3. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $Re(\beta) > n$, $f \in C^n([a,b])$, $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\beta f(x) = \ {}^H I_a^{\beta-\alpha} f(x) \ . \tag{3.2.12} $$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C-H}D_a^\alpha \ {}^H I_a^\beta f(x) = \ {}^H I_a^{n-\alpha} \ \underbrace{\delta^n \ {}^H I_a^\beta \ f(x)} \ , \qquad \{\textit{voir } (3.2.1)\} $$

d'après (3.1.50), *on obtient :*

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta}f(x) = \ {}^{H}I_a^{n-\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta-n}\ ,$$

d'après (3.1.39), *on obtient :*

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{\beta}f(x) = \ {}^{H}I_a^{n-\alpha+\beta-n}f(x) = \ {}^{H}I_a^{\beta-\alpha}f(x)\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 3.2.4. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f \in C^n([a,b])$, $0 < a < b < +\infty$ *:*

$$^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{j!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^j\ . \tag{3.2.13}$$

Preuve :

Soit :

$$^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ f(x) = \underbrace{{}^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{n-\alpha}}\ \delta^n f(x)\ ,$$

d'après (3.1.39), *on obtient :*

$$^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ f(x) = \ {}^{H}I_a^{n}\ \delta^n f(x)\ ,$$

d'après (3.1.56), *on obtient :*

$$^{H}I_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j f(a)}{\Gamma(j+1)}\ \left(\log \frac{x}{a}\right)^j\ , \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

sachant que :

$$\delta^j f(a) \quad \equiv \quad \lim_{x \to a} \delta^j f(x) \qquad / \qquad \Gamma(j+1) = j!\ \ .$$

Proposition 3.2.5. *Soient* n-$1<Re(\alpha)<n$, m-$1<Re(\beta)<m$ *tels que* $n,m \in \mathbb{N}^*$, $n+m$-$1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$, $f \in C^{n+m}([a,b])$ *:*

$$^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\beta}\ f(x) = \ {}^{C-H}D_a^{\alpha+\beta}\ f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[\delta^{j+m} f(a)]}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}\ (x-a)^{j+m-\beta-\alpha}\ , \tag{3.2.14}$$

$$\textit{sachant que :} \quad [\delta^{j+m} f(a)] = \lim_{x\to a}\left(\left(x\ \tfrac{d}{dx}\right)^{j+m} f(x)\right)\ .$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\beta}\ f(x) = \ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{m-\beta}\ \delta^m f(x)\ ....(\Theta)\ , $$

et d'autre part d'après (3.1.56) *, on a :*

$$ {}^{H}I_a^{n}\ \delta^n\left(\delta^m f(x)\right) = \left(\delta^m f(x)\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^j\left(\delta^m f(a)\right)}{\Gamma(j+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\ , $$

$$ {}^{H}I_a^{n}\ \delta^{n+m} f(x) = \delta^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\ , $$

on compose léquation par ${}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{m-\beta}$ *, on obtient :*

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ \underbrace{{}^{H}I_a^{m-\beta}\ {}^{H}I_a^{n}}\ \delta^{n+m} f(x) = \ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{m-\beta}\ \left(\delta^m f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\right)\ , $$

d'après (3.1.39) *, on obtient :*

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ \underbrace{{}^{H}I_a^{n+m-\beta}}\ \delta^{n+m} f(x) = \underbrace{{}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{m-\beta}\ \delta^m f(x)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{H}I_a^{m-\beta} \left(\log\frac{x}{a}\right)^j\ , $$

dans la partie à droite de l'équation d'après (Θ) *, on obtient :*

$$ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ \underbrace{{}^{H}I_a^{n+m-(\alpha+\beta)+\alpha}}\ \delta^{n+m} f(x) = \ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\beta}\ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ \underbrace{{}^{H}I_a^{m-\beta} \left(\log\frac{x}{a}\right)^j}\ , $$

dans la partie à gauche de l'équation daprès la condition $n+m-1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$ *et* $Re(\alpha) > 0$ *, on applique* (3.1.39) *, dans la partie à droite de l'équation d'après* (3.1.14) *, on obtient :*

$$ \underbrace{{}^{C-H}D_a^{\alpha}\ \ {}^{H}I_a^{\alpha}}\ {}^{H}I_a^{n+m-(\alpha+\beta)}\ \delta^{n+m} f(x) = {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\beta}\ f(x) $$

$$ - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1)}\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+m-\beta)}\ \underbrace{{}^{C-H}D_a^{\alpha} \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+m-\beta}}\ , $$

dans la partie à gauche de l'équation d'après (3.2.11) *et dans la partie à droite de l'équation d'après* (3.2.5) *, on obtient :*

$$ \underbrace{{}^{H}I_a^{n+m-(\alpha+\beta)} \delta^{n+m} f(x)} = {}^{C-H}D_a^{\alpha}\ {}^{C-H}D_a^{\beta} f(x) $$

$$ - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^{j+m} f(a)}{\Gamma(j+1+m-\beta)}\ \frac{\Gamma(j+m-\beta+1)}{\Gamma(j+m-\beta+1-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+m-\beta-\alpha}\ , $$

d'après la condition $n+m-1<Re(\alpha)+Re(\beta)<n+m$ *, on applique* (3.2.1) *, on obtient :*

$$^{C-H}D_a^{\alpha+\beta}f(x) = \ ^{C-H}D_a^{\alpha}\ ^{C-H}D_a^{\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\delta^{j+m}f(a)}{\Gamma(j+1+m-\beta-\alpha)}\ \left(\log\frac{x}{a}\right)^{j+m-\beta-\alpha}\ .$$

(C.Q.F.D)

CHAPITRE

4

CALCUL FRACTIONNAIRE GÉNÉRAL

4.1 Intégrale Fractionnaire et Dérivée Fractionnaire d'une Fonction par rapport à une autre Fonction

Dans cette section, on présente les définitions et quelques propriétés de l'intégrale et dérivée fractionnaires d'une fonction f par rapport à une autre fonction ψ.

Définition 4.1.1. *Soit* $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infini de la droite réelle* $\mathbb{R}$ *et* $Re(\alpha) > 0$, *soit* $\psi(x)$ *une fonction monotone croissante sur* $]a, b]$, *ayant une dérivée continue* $\psi'(x)$ *sur* $]a, b[$ *. On définit l'intégrale fractionnaire d'une fonction f par rapport à autre fonction* ψ *sur* $[a, b]$ *par la fonction suivante :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \psi'(t) f(t) \, dt \ , \tag{4.1.1}$$

$$(\ x > a \ , \ Re(\alpha){>}0 \ ) \ .$$

Remarque :

Si $\psi(x) = x$, *donc* (4.1.1) *devient :*

$$I^{\alpha}_{a,x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\ dt = \ ^{RL}I^{\alpha}_a f(x)\ , \tag{4.1.2}$$

(voir (2.1.5) *) .*

Si $\psi(x) = log(x)$, *donc* (4.1.1) *devient :*

$$I^{\alpha}_{a,log(x)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (log(x) - log(t))^{\alpha-1}\ \frac{f(t)}{t}\ dt = \ ^{H}I^{\alpha}_a f(x)\ , \qquad (x > a > 0) \tag{4.1.3}$$

(voir (3.1.3) *) .*

Définition 4.1.2. *Soit* $\psi'(x) \neq 0$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, $Re(\alpha) \geq 0$ $(\alpha \neq 0)$, $n = [Re(\alpha)]+1$ *et* $D = d/dx$ *. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre* α *dune fonction* f *par rapport à autre fonction* ψ *sur* $[a,b]$ *par la fonction suivante :*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x)\ . \tag{4.1.4}$$

En d'autre termes, on a :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{n-\alpha-1}\ \psi'(t) f(t)\ dt\ . \qquad (x > a) \tag{4.1.5}$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *:*

$$D^{n}_{a,\psi} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n f(x)\ . \tag{4.1.6}$$

En particulier, on a :

$$D^{1}_{a,\psi} f(x) = \frac{f'(x)}{\psi'(x)}\ . \tag{4.1.7}$$

Remarque :

Si $\psi(x) = x$, *donc* (4.1.5) *devient :*

$$D^{\alpha}_{a,x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ f(t)\ dt = \ ^{RL}D^{\alpha}_a f(x)\ , \tag{4.1.8}$$

(voir (2.2.2) *) .*

Si $\psi(x) = log(x)$, *donc* (4.1.5) *devient :*

$$D^{\alpha}_{a,log(x)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x \, \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (log(x) - log(t))^{n-\alpha-1} \, \frac{f(t)}{t} \, dt = \, {}^H D^{\alpha}_a f(x) \ , \quad (4.1.9)$$

(x>a>0)

(voir (3.1.7) *) .*

Exemple 4.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ *:*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\alpha+\beta-1} \ . \quad (4.1.10)$$

Preuve :

Soit :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t) \right)^{\alpha-1} \ \psi'(t) \ \left(\psi(t) - \psi(a) \right)^{\beta-1} \ dt \ , \qquad \{voir \ (4.1.1)\}$$

on pose :

$$\tau = \frac{\psi(t) - \psi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \quad (*) \ ,$$

$$t = a \quad \Longrightarrow \quad \tau = 0 \quad / \quad t = x \quad \Longrightarrow \quad \tau = 1 \ ,$$

$$\begin{aligned}
(*) \ &\Longrightarrow \ \psi(t) - \psi(a) = (\psi(x) - \psi(a)) \ \tau \\
&\Longrightarrow \ \psi'(t) \ dt = (\psi(x) - \psi(a)) \ d\tau \\
(*) \ &\Longrightarrow \ \psi(t) - \psi(a) - \psi(x) = (\psi(x) - \psi(a)) \ \tau - \psi(x) \ , \\
&\Longrightarrow \ \psi(x) - \psi(t) = -(\psi(x) - \psi(a)) \ \tau + \psi(x) - \psi(a) \\
&\Longrightarrow \ \psi(x) - \psi(t) = (\psi(x) - \psi(a)) \ (1 - \tau) \ ,
\end{aligned}$$

donc :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha-1} \ (1-\tau)^{\alpha-1} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-1} \ \tau^{\beta-1} (\psi(x) - \psi(a)) \ d\tau \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \ d\tau}_{\beta(\beta,\alpha)} \ ,$$

d'après (1.3.1) *et* (1.3.4)*, on obtient :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1} \ \frac{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a) \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+\beta-1} \ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Exemple 4.1.2. *Soit* $Re(\alpha) \geq 0$ $(\alpha \neq 0)$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ *et* $Re(\beta) > 0$ *:*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1} \ . \tag{4.1.11}$$

Preuve :

Soit :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-1} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n \underbrace{I^{n-\alpha}_{a,\psi} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-1}} , \qquad \{voir\ (4.1.4)\ \}$$

d'après (4.1.10), on obtient :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)} \underbrace{\left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n}} ,$$

$$avec : \qquad D = d/dx \ .$$

$$On\ pose : \quad \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^i (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} \quad , \ tels\ que \ \ i = 1, ..., n \ .$$

Pour i=1 on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right) (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = \frac{1}{\psi'(x)} \ (\beta-\alpha-1+n)(\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n-1} \ \psi'(x) \ ,$$
$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right) (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = (\beta-\alpha-1+n)(\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n-1} \ .$$

Pour i=2 on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^2 (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right) \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right) (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} \ ,$$
$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^2 (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right) \left[(\beta-\alpha-1+n)(\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n-1}\right] \ ,$$
$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^2 (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = (\beta-\alpha-1+n)(\beta-\alpha-1+n-1)(\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n-2} \ .$$

Anise de suite jusqu'à pour i=n, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^n (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = (\beta-\alpha-1+n) \ (\beta-\alpha-1+n-1).............$$
$$....(\beta-\alpha-1+n-(n-1))(\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n-n} \ ,$$

donc :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^n (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = (\beta-\alpha+n-1).......(\beta-\alpha) \ (\psi(x) - \psi(a))^{\beta-\alpha-1} \ ,$$

{*on peut justifier ce résultat par une démonstration par récurrence*}

sachant que :

$$\begin{aligned}\Gamma(\beta-\alpha+n) &= \Gamma(\beta-\alpha+n-1+1)\\ &= (\beta-\alpha+n-1)\ \Gamma(\beta-\alpha+n-1)\\ &= (\beta-\alpha+n-1)(\beta-\alpha+n-2)\ \Gamma(\beta-\alpha+n-2)\\ &= (\beta-\alpha+n-1)(\beta-\alpha+n-2)........(\beta-\alpha+n-n)\ \Gamma(\beta-\alpha+n-n)\\ &= (\beta-\alpha+n-1)(\beta-\alpha+n-2).....(\beta-\alpha)\ \Gamma(\beta-\alpha)\ ,\end{aligned}$$

donc :

$$(\beta-\alpha+n-1).......(\beta-\alpha) = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ ,$$

alors :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n} (\psi(x)-\psi(a))^{\beta-\alpha-1+n} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\beta-\alpha-1}\ , \qquad (4.1.12)$$

alors :

$$D^{\alpha}_{a,\psi}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\beta-\alpha-1}\ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Exemple 4.1.3. *Soit* $Re(\alpha)>0$, $a=-\infty$, $\lambda\in\mathbb{C}^{*}_{+}$ *:*

$$I^{\alpha}_{a,\psi}e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{-\alpha}\ e^{\lambda\psi(x)}\ . \qquad (4.1.13)$$

Preuve :

Soit :

$$I^{\alpha}_{a,\psi}e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t)\ e^{\lambda\psi(t)}\ dt\ ,$$

on pose : $\tau=\psi(x)-\psi(t)$,

donc : $t=x \implies \tau=0 \quad / \quad (t\to-\infty) \implies (\tau\to+\infty)$,

$\psi(t)=\psi(x)-\tau \implies \psi'(t)\ dt=-d\tau$,

$$\text{alors :}\qquad I^{\alpha}_{a,\psi}e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{+\infty}^{0}\tau^{\alpha-1}\ e^{\lambda(\psi(x)-\tau)}\ (-d\tau)\ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi}e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ e^{\lambda\psi(x)}\int_{0}^{+\infty}\tau^{\alpha-1}\ e^{-\lambda\ \tau}\ d\tau\ ,$$

on pose : $\lambda\,\tau = y$,

donc : $\tau = 0 \implies y = 0 \quad / \quad (\tau \to +\infty) \implies (y \to +\infty)$, $\{$ *car* $\lambda \in \mathbb{C}_+^* \}$

$\tau = y/\lambda \implies d\tau = dy/\lambda$,

$$\text{alors :} \qquad I^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{\lambda\psi(x)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{\lambda\psi(x)}\ \lambda^{-\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha)}$$

$$\implies I^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{-\alpha}\, e^{\lambda\psi(x)} \ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Remarque :

Question ; pour quoi on vu quand $(t \to -\infty)$ *alors* $(\tau \to +\infty)$ *pour* $\tau = \psi(x) - \psi(t)$??

Reponse ; pare ce que généralement le choix de la fonction $\psi(t)$ *est toujours tend vers* $-\infty$ *pour t tend vers a ; ("a" élément infinie) , par exemple ;*

si $\psi(t) = t$ *; cas de l'intégrale fractionnaire au sens de RL ,* $(t \to -\infty)$ *alors* $(\psi(t) \to -\infty)$*,*

si $\psi(t) = log(t)$ *; cas de l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard ,* $(t \to 0^+)$ *alors* $(\psi(t) \to -\infty)$*,*

et pour notre exemple pour la fonction f est une fonction exponentielle il faut que $\psi(t)$ *définit sur* $]-\infty, x]$ *; monotone et croissante ,* $(t \to -\infty)$ *alors* $(\psi(t) \to -\infty)$ *. Pour qu'on puisse calcule* $I^{\alpha}_{-\infty,\psi}\ e^{\lambda\psi(t)}$ *par la méthode qui on ait fait dans notre exemple .*

Exemple 4.1.4. *Soit* $Re(\alpha) \geq 0$ $(\alpha \neq 0)$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $a = -\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_+^*$ *:*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{\alpha}\ e^{\lambda\psi(x)} \ . \tag{4.1.14}$$

Preuve :

Soit :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n I^{n-\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} \ ,$$

d'après (4.1.13)*, on obtient :*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{\alpha-n} \underbrace{\left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n e^{\lambda\psi(x)}}\ ,$$

$$\text{avec :} \quad D = d/dx \ .$$

$$\textit{On pose :} \quad \left(\frac{1}{\psi'(x)}D\right)^i \ e^{\lambda\psi(x)} \quad , \textit{ tels que : } i = 1, 2, ..., n \ .$$

Pour i=1, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)\ e^{\lambda\psi(x)} = \frac{1}{\psi'(x)}\ \lambda\ \psi'(x)\ e^{\lambda\psi(x)} = \lambda\ e^{\lambda\psi(x)}\ .$$

Pour i=2, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^2 e^{\lambda\psi(x)} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right) e^{\lambda\psi(x)} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)\lambda\ e^{\lambda\psi(x)}\ ,$$

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^2 e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^2\ e^{\lambda\psi(x)}\ .$$

Anise de suite jusqu'à pour i=n, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^n e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^n\ e^{\lambda\psi(x)}\ ,$$

{*on peut justifiée cette résultat par une démonstration par récurrence*}

alors :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{\alpha-n}\ \lambda^n\ e^{\lambda\psi(x)} = \lambda^{\alpha}\ e^{\lambda\psi(x)}\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Lemme 4.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $f \in C^0([a,b])$, $\psi \in C^1([a,b])$ *:*

$$\lim_{x\to a^+} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0\ . \tag{4.1.15}$$

Preuve :

Soit :

$$\begin{aligned} \left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t)f(t)\ dt\right| \qquad \{\textit{voir } (4.1.1)\} \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x |(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t)|\ |f(t)|\ dt\ , \end{aligned}$$

sachant que la fonction $\psi(x)$ *est une fonction monotone croissante sur* $[a,b]$ *;(* $a<x<b$ *)* ,
alors : $(\psi(x)-\psi(t)) > 0$ *pour* $\forall t \in [a,x]$, *et* $\psi'(x) > 0$ *sur* $[a,b]$,
donc :

$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t)\ |f(t)|\ dt\ ,$$

$$avec : \ |f(t)| \leq \sup_{t\in[a,x]} |f(t)| \quad , \ où \ \ M = \sup_{t\in[a,x]} |f(t)| \ ,$$

donc :

$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t)\ dt \ ,$$
$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \ \left[-\frac{1}{\alpha}\ (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha}\right]_a^x \ ,$$
$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha} \ ,$$

donc :

$$0 \leq \lim_{x\to a^+} \left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \leq \lim_{x\to a^+} \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \underbrace{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}}_{0}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \lim_{x\to a^+} \left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| \leq 0 \ \Longrightarrow \ \lim_{x\to a^+} \left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)\right| = 0 \ \Longrightarrow \ \lim_{x\to a^+} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0 \ . \qquad (C.Q.F.D)$$

Lemme 4.1.2. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $f \in C^0([a,b])$, $\psi \in C^1([a,b])$ *:*

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ . \tag{4.1.16}$$

Preuve :

D'après (4.1.10) *et pour* $\beta = 1$*, on obtient :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \ 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\alpha}$$
$$\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0^+} I^{\alpha}_{a,\psi} \ 1 = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\alpha} \ ,$$

alors :

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I^{\alpha}_{a,\psi} \ 1 = 1 \ . \tag{4.1.17}$$

Soit :

$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - f(x) I^{\alpha}_{a,\psi} 1\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t) f(t) dt - f(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\psi'(t) dt\right|$$
$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - f(x) I^{\alpha}_{a,\psi} 1\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} \ \psi'(t)(f(t)-f(x))\ dt\right| \ ,$$

sachant que la fonction $\psi(x)$ *est une fonction monotone croissante sur* $[a,b]$ *;(a<x<b) ,*
alors : $(\psi(x)-\psi(t)) > 0$ *pour* $\forall t \in [a,x]$*, et* $\psi'(x) > 0$ *sur* $[a,b]$*,*
donc :

$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - f(x) I^{\alpha}_{a,\psi} 1\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} \ \psi'(t)|f(t)-f(x)| \ dt \ ,$$

sachant que $f \in C^0([a,b])$ *ie* f *est continue sur* $[a,b]$, *alors :*

$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta > 0\ ,\ \ \forall\ x, t \in [a,b]\ ;\ \ |t-x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \epsilon$

donc ; $|t-x| < \delta \implies -\delta < t-x < \delta \implies x-\delta < t < x+\delta$,

alors :

$$\left|I^\alpha_{a,\psi} f(x) - f(x) I^\alpha_{a,\psi} 1\right| \leq \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t) |f(t) - f(x)|\ dt}_{\Delta}$$

$$+\ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t) |f(t) - f(x)|\ dt}_{\Omega}\ ,$$

d'après la definition de la continuité de la fonction f on a ;

si $t \in [x-\delta, x]$ *alors* $|f(t) - f(x)| < \epsilon$,

donc :

$$(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t) |f(t) - f(x)| < (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t)\ \epsilon$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t) |f(t) - f(x)|\ dt < \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t)\ \epsilon\ dt$$

$$\implies \Omega < \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{x} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t)\ dt$$

$$\implies \Omega < \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-1}{\alpha} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha}\right]_{x-\delta}^{x}$$

$$\implies \Omega < \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(x) - \psi(x-\delta))^{\alpha}\ ,$$

alors :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \Omega < \lim_{\alpha \to 0^+}\ \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \underbrace{(\psi(x) - \psi(x-\delta))^{\alpha}}_{1} \implies \lim_{\alpha \to 0^+} \Omega < \epsilon\ ,$$

alors :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \Omega = 0\ , \tag{4.1.18}$$

d'autre part quand $t \in [a, x-\delta]$, *on a :*

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)|\ ,$$

$$\textit{avec :}\ \ |f(t)| \leq \overbrace{\sup_{t \in [a, x-\delta]} |f(t)|}^{M}\ \ ,\ \textit{et on pose ;}\ \ |f(x)| = A\ ,$$

$$donc : \ |f(t)-f(x)| \leq \underbrace{M+A}_{c} \quad , \ tels\ que\ ; \ t\in[a,x-\delta] \ ,$$

alors :

$$\Delta \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta}(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\ \psi'(t)\ dt \ ,$$
$$\Delta \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{-1}{\alpha}(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha}\right]_a^{x-\delta} \ ,$$
$$\Delta \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}-(\psi(x)-\psi(x-\delta))^{\alpha}\right) \ ,$$

donc :

$$\lim_{\alpha\to0^+}\Delta \leq \lim_{\alpha\to0^+}\frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\underbrace{\left(\underbrace{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}}_{1}-\underbrace{(\psi(x)-\psi(x-\delta))^{\alpha}}_{1}\right)}_{0} \implies 0\leq \lim_{\alpha\to0^+}\Delta\leq 0 \ ,$$

alors :

$$\lim_{\alpha\to0^+}\Delta = 0 \ , \tag{4.1.19}$$

sachant que :

$$\left|I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)-f(x)I^{\alpha}_{a,\psi}1\right| \leq \ \Delta+\Omega \ ,$$
$$donc : \qquad \lim_{\alpha\to0^+}\left|I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)-f(x)I^{\alpha}_{a,\psi}1\right| \leq \lim_{\alpha\to0^+}\Delta+\lim_{\alpha\to0^+}\Omega \ ,$$

d'après (4.1.18) *et* (4.1.19) *, on obtient :*

$$0\leq \lim_{\alpha\to0^+}\left|I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)-f(x)I^{\alpha}_{a,\psi}1\right| \leq \ 0$$
$$\implies \lim_{\alpha\to0^+}\left|I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)-f(x)I^{\alpha}_{a,\psi}1\right| = 0$$
$$\implies \lim_{\alpha\to0^+}\left(I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)-f(x)I^{\alpha}_{a,\psi}1\right) = 0$$
$$\implies \lim_{\alpha\to0^+}I^{\alpha}_{a,\psi}f(x) = f(x)\ \underbrace{\lim_{\alpha\to0^+}I^{\alpha}_{a,\psi}1} \ ,$$

d'après (4.1.17)*, on obtient :*

$$\lim_{\alpha\to0^+}I^{\alpha}_{a,\psi}f(x) = f(x) \ . \qquad\qquad (C.Q.F.D)$$

Proposition 4.1.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$:

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = I^{\alpha+\beta}_{a,\psi} f(x) \ . \tag{4.1.20}$$

Preuve :

d'après (4.1.1), *on a :*

$$I^{\alpha+\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha+\beta-1} \psi'(t) f(t) \ dt \ ,$$

d'autre part on a :

$$I^{\beta}_{a,\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\beta-1} \psi'(s) f(s) \ ds \ ......(\sigma),$$

donc :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \psi'(t) I^{\beta}_{a,\psi} f(t) \ dt \ ,$$

d'après (σ), *on obtient :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \psi'(t) \ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\beta-1} \psi'(s) f(s) \ ds \ dt \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \ (\psi(t) - \psi(s))^{\beta-1} \psi'(t) \ \psi'(s) \ f(s) \ ds \ dt \ ,$$

on utilise la méthode de Fubini-Tonelli pour inverser l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_s^{\boldsymbol{x}} (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \ (\psi(t) - \psi(s))^{\beta-1} \psi'(t) \ \psi'(s) \ f(s) \ \boldsymbol{dt \ ds} \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^x \psi'(s) \ f(s) \underbrace{\int_s^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \ (\psi(t) - \psi(s))^{\beta-1} \psi'(t) \ dt}_{(\chi)} \ ds \ ,$$

pour (χ) *on fait la même procédure qui on a fait déjà dans le* $1^{\text{èr}}$ *exemple de cette section , tels que a=s et on obtient :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)} \int_a^x \psi'(s) \ f(s) \ (\psi(x) - \psi(s))^{\alpha+\beta-1} \ \frac{\Gamma(\alpha) \ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ ds \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(s))^{\alpha+\beta-1} \psi'(s) \ f(s) \ ds = I^{\alpha+\beta}_{a,\psi} f(x) \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 4.1.2. *Soit* $n - 1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ . \tag{4.1.21}$$

Preuve :

Soit :

$$D^{\alpha}_{a,\psi}I^{\alpha}_{a,\psi}f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} \underbrace{I^{n-\alpha}_{a,\psi}I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)} \ , \qquad \{voir\ (4.1.4)\}$$

d'après (4.1.20), on obtient :

$$D^{\alpha}_{a,\psi}I^{\alpha}_{a,\psi}f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n}_{a,\psi}f(x) \ .$$

La question est de savoir si c'est vraiment $\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n}_{a,\psi}f(x) = f(x)$,

donc on fait une démonstration par récurrence :

Soit :

$$\forall n \geq 1 : \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n}_{a,\psi}f(x) = f(x) \quad ....P(n) \ ,$$

on démontre par récurrence que P(n) est vraie .

Pour n=1 :

$$\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\underbrace{I^{1}_{a,\psi}f(x)} = \frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\ \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{1-1}\ \psi'(t)f(t)\ dt \ , \qquad \{voir\ (4.1.1)\}$$

$$\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}I^{1}_{a,\psi}f(x) = \frac{1}{\psi'(x)}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\int_a^x \ \psi'(t)f(t)\ dt} \ ,$$

d'après (2.1.14), on obtient :

$$\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}I^{1}_{a,\psi}f(x) = \frac{1}{\psi'(x)}\ \psi'(x)f(x) \ ,$$

alors :

$$\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}I^{1}_{a,\psi}f(x) = f(x) \ . \tag{4.1.22}$$

On suppose que P(n) est vraie :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n}_{a,\psi}f(x) = f(x) \ .$$

On démontre que P(n+1) est vraie, tels que :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n+1} I^{n+1}_{a,\psi}f(x) = f(x) \ ,$$

soit :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_{a,\psi}^{n+1} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n} I_{a,\psi}^{n}\ I_{a,\psi}^{1} f(x)}\ ,$$

d'après l'hypothèse, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_{a,\psi}^{n+1} f(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)\ I_{a,\psi}^{1} f(x)}\ ,$$

d'après (4.1.22) *, on obtient :*

$$\left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n+1} I_{a,\psi}^{n+1} f(x) = f(x)\ ,$$

donc P(n+1) est vérifiée , alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie, d'après (4.1.6) *on peut écrire comme suit :*

$$D_{a,\psi}^{n} I_{a,\psi}^{n} f(x) = f(x)\ , \tag{4.1.23}$$

donc (4.1.21) *est bien vérifiée .*

Proposition 4.1.3. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $Re(\beta) > Re(\alpha)$ *:*

$$D_{a,\psi}^{\alpha} I_{a,\psi}^{\beta} f(x) = I_{a,\psi}^{\beta-\alpha} f(x)\ . \tag{4.1.24}$$

Preuve :

Soit :

$$D_{a,\psi}^{\alpha} I_{a,\psi}^{\beta} f(x) = D_{a,\psi}^{n} \underbrace{I_{a,\psi}^{n-\alpha} I_{a,\psi}^{\beta} f(x)} \qquad ,\ D_{a,\psi}^{n} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n} \qquad ,\ \{\textit{voir } (4.1.4) \textit{ et } (4.1.6)\}$$

d'après (4.1.20)*, on obtient :*

$$D_{a,\psi}^{\alpha} I_{a,\psi}^{\beta} f(x) = D_{a,\psi}^{n} I_{a,\psi}^{n-\alpha+\beta} f(x) = D_{a,\psi}^{n} \underbrace{I_{a,\psi}^{n+(\beta-\alpha)} f(x)}\ ,$$

sachant que $Re(\beta) > Re(\alpha)$ *donc* $Re(\beta) - Re(\alpha) > 0$ *et* $n \geq 1$ *, alors d'après* (4.1.20) *, on obtient :*

$$D_{a,\psi}^{\alpha} I_{a,\psi}^{\beta} f(x) = \underbrace{D_{a,\psi}^{n} I_{a,\psi}^{n}} I_{a,\psi}^{\beta-\alpha} f(x)\ ,$$

d'après (4.1.23), *on obtient :*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = I^{\beta-\alpha}_{a,\psi} f(x)\ . \qquad\qquad (C.Q.F.D)$$

Remarque :

En particulier si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$D^{n}_{a,\psi} I^{\beta}_{a,\psi} f(x) = I^{\beta-n}_{a,\psi} f(x) \quad , \ D^{n}_{a,\psi} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\ \frac{d}{dx}\right)^{n} \ , \tag{4.1.25}$$

$$\textit{sachant que :} \quad Re(\beta) > n\ .$$

Proposition 4.1.4. *Soit* $f, \psi \in C^n([a,b])$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*\ ,\ -\infty < a < b < +\infty$:

$$I^{n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j} \ , \tag{4.1.26}$$

sachant que :

$D^{j}_{a,\psi} f(a) \equiv \lim_{x \to a} D^{j}_{a,\psi} f(x)\ ,$

avec : $D^{j}_{a,\psi} f(x) = \left(\dfrac{1}{\psi'(x)} \dfrac{d}{dx}\right)^{j} f(x) \qquad ,\ j = 0, 1....., n-1\ .$

Preuve :

Soit :

$Re(\alpha)>0$, $f, \psi \in C^n([a,b])$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\infty < a < b < +\infty$ *et d'après* (4.1.1) *on a :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha-1} \psi'(t) f(t)\ dt\ .$$

On fait une intégration par partie sur $I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)$:

$\int u'\ v = u\ v - \int u\ v'$,

tels que :

$$\frac{d}{dt} u = u' = \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha-1} \psi'(t) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{-1}{\alpha} \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha} \ ,$$
$$v = f(t) \quad \Longrightarrow \quad v' = f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)\ ,$$

alors :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-1}{\alpha} \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha}\ f(t)\right]_a^x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{-1}{\alpha} \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha}\ f'(t)\ dt\ ,$$
$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{\alpha} \psi'(t) \underbrace{\left(\frac{f'(t)}{\psi'(t)}\right)}\ dt\ ,$$

d'après (4.1.7)*, on obtient :*

$$I_{a,\psi}^{\alpha}f(x)=\frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}+\underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha}\,\psi'(t)D_{a,\psi}^{1}f(t)\ dt}$$

d'après (4.1.1)*, on obtient :*

$$I_{a,\psi}^{\alpha}f(x)=\frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}+\underbrace{I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)}\ . \tag{4.1.27}$$

On fait une autre intégration par partie sur $I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)$ *:*

soit :

$$I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha}\,\psi'(t)D_{a,\psi}^{1}f(t)\ dt\ ,$$

on mette :

$\int u'\ v=u\ v-\int u\ v'$,

tels que :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u=u'=(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha}\,\psi'(t)\quad\Longrightarrow\quad u=\frac{-1}{\alpha+1}\,(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+1}\ ,\\&v=D_{a,\psi}^{1}f(t)\quad\Longrightarrow\quad v'=\frac{d}{dt}D_{a,\psi}^{1}f(t)\ ,\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\left[-(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(t)\right]_a^x+\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+1}\frac{d}{dt}D_{a,\psi}^{1}f(t)\ dt\right)\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+1}\ \ D_{a,\psi}^{1}f(a)+\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+1}\ \ \psi'(t)\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}D_{a,\psi}^{1}f(t)\ dt\right)\ ,\end{aligned}$$

sachant que :

$$\begin{aligned}&D_{a,\psi}^{1}f(a)\equiv\lim_{x\to a}D_{a,\psi}^{1}f(x)\ ,\\&\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}=D_{a,\psi}^{1}\ ,\end{aligned}$$

$$I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)=\frac{D_{a,\psi}^{1}f(a)}{\Gamma(\alpha+2)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+1}+\underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+1}\ \ \psi'(t)D_{a,\psi}^{2}f(t)\ dt}\ ,$$

d'après (4.1.1)*, on obtient :*

$$I_{a,\psi}^{\alpha+1}D_{a,\psi}^{1}f(x)=\frac{D_{a,\psi}^{1}f(a)}{\Gamma(\alpha+2)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+1}+I_{a,\psi}^{\alpha+2}D_{a,\psi}^{2}f(x)\ , \tag{4.1.28}$$

si on remplace (4.1.28) *dans* (4.1.27), *on obtient :*

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}+\frac{D^{1}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+2)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+1}+I^{\alpha+2}_{a,\psi}D^{2}_{a,\psi}f(x)\ ,$$

ainsi de suite jusqu'à obtenue :

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^{j}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ +I^{\alpha+n}_{a,\psi}D^{n}_{a,\psi}f(x)\ , \tag{4.1.29}$$

sachant que :

$$D^{j}_{a,\psi}f(a)\equiv\lim_{x\to a}D^{j}_{a,\psi}f(x)\ ,$$

avec : $D^{j}_{a,\psi}f(x)=\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{j}f(x)\qquad ,\ j=0,1.....,n-1\ .$

Pour démontrer le résultat (4.1.29), *on passe à la démonstration par récurrence :*

Soit : $Re(\alpha)>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$ *et* $f,\psi\in C^{n}([a,b])$ *:*

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^{j}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ +I^{\alpha+n}_{a,\psi}D^{n}_{a,\psi}f(x)\ \ ....P(n)\ .$$

On démontre par récurrence que P(n) est vraie :

Pour n=1 :

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\frac{D^{0}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+1+0)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+0}\ +I^{\alpha+1}_{a,\psi}D^{1}_{a,\psi}f(x)\ ,$$

avec : $D^{0}_{a,\psi}f(a)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{0}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\ ,$

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}\ +I^{\alpha+1}_{a,\psi}D^{1}_{a,\psi}f(x)\ ,$$

elle est vérifiée d'après (4.1.27) .

On suppose que P(n) est vraie :

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^{j}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ +I^{\alpha+n}_{a,\psi}D^{n}_{a,\psi}f(x)\ .$$

On démontre que P(n+1) est vraie , tels que $f,\psi\in C^{n+1}([a,b])$ *:*

$$I^{\alpha}_{a,\psi}f(x)=\ \sum_{j=0}^{n}\frac{D^{j}_{a,\psi}f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\,(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ +I^{\alpha+n+1}_{a,\psi}D^{n+1}_{a,\psi}f(x)\ ,$$

on fait une intégration par partie sur $I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x)$ *:*

soit :

$$I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n-1} \psi'(t) D^n_{a,\psi} f(t)\ dt\ ,$$

tels que :

$\int u'\ v\ =\ u\ v\ -\ \int u\ v'$,

$$\frac{d}{dt} u = u' = (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n-1}\, \psi'(t) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{-1}{\alpha+n}\, (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n}\ ,$$
$$v = D^n_{a,\psi} f(t) \quad \Longrightarrow \quad v' = \frac{d}{dt} D^n_{a,\psi} f(t)\ ,$$

donc :

$$I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left(\left[-\, (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n}\, D^n_{a,\psi} f(t)\right]_a^x + \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n}\, \frac{d}{dt} D^n_{a,\psi} f(t)\ dt \right),$$

$$\begin{aligned} I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x) =& \frac{D^n_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n}\, \psi'(t)\, \underbrace{\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}}_{D^1_{a,\psi}} D^n_{a,\psi} f(t)\ dt\ , \end{aligned}$$

$$I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x) = \frac{D^n_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\, (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+n}\, \psi'(t) D^{n+1}_{a,\psi} f(t) dt}\ ,$$

d'après (4.1.1), *on obtient :*

$$I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^n_{a,\psi} f(x) = \frac{D^n_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n} + I^{\alpha+n+1}_{a,\psi} D^{n+1}_{a,\psi} f(x)\ ,$$

si on remplace cette résultat dans l'hypothèse, on obtient :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^j_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\, (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ + \frac{D^n_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n} + I^{\alpha+n+1}_{a,\psi} D^{n+1}_{a,\psi} f(x)\ ,$$
$$I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)}\, (\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+j}\ + I^{\alpha+n+1}_{a,\psi} D^{n+1}_{a,\psi} f(x)\ ,$$

donc P(n+1) est vérifiée, alors d'après le principe de récurrence P(n) est vraie, donc le résultat (4.1.29) *est bien vérifiée .*

On fait la limite quand α tend vers 0^+ dans les deux cotée de (4.1.29), on obtient :

$$\underbrace{\lim_{\alpha\to 0^+} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)} = \lim_{\alpha\to 0^+} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{\alpha+j} \; + I^{\alpha+n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) \right) \; ,$$

d'après (4.1.16), on obtient :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(0+1+j)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{0+j} \; + I^{0+n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) \; ,$$

$$I^{n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{j} \; . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Proposition 4.1.5. *Soit $n-1 < Re(\alpha) < n$, tels que $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0 \iff f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{j+\alpha-n} \; , \qquad (4.1.30)$$

avec $c_j \in \mathbb{R}$, (j=0,1,2,.........,n-1) ; des constantes arbitraires .

Preuve :

($\Longrightarrow$) Dans le sens directe :

Soit :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0 \implies D^{n}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0 \; , \qquad \{\textit{voir } (4.1.4)\}$$

$$\textit{sachant que : } \; D^{n}_{a,\psi} = \left(\tfrac{1}{\psi'(x)} \tfrac{d}{dx}\right)^{n} \; ,$$

on compose les deux cotés de l'équation par $I^{n}_{a,\psi}$:

$$I^{n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{I^{n}_{a,\psi} 0}_{0} \; ,$$

d'après (4.1.26), on obtient :

$$I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} \left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{j} = 0 \; ,$$

$$\textit{sachant que : } \; D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(a) \; \equiv \; \lim_{x\to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) \; ,$$

on pose :

$$c_j = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \left[\lim_{x\to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) \right] \; , \qquad (4.1.31)$$

alors :

$$I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^j \ ,$$

on compose les deux cotés de l'équation par $D^{n-\alpha}_{a,\psi}$ *:*

$$\underbrace{D^{n-\alpha}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x)} = D^{n-\alpha}_{a,\psi} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^j \ ,$$

d'après (4.1.21)*, on obtient :*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \underbrace{D^{n-\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^j} \ ,$$

d'après (4.1.11)*, on obtient*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j+\alpha-n} \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

(⟸) Dans le sens contraire :

Soit :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j+\alpha-n} \ ,$$

on compose les deux cotés de l'équation par $D^{\alpha}_{a,\psi}$ *:*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \ \underbrace{D^{\alpha}_{a,\psi} \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j+\alpha-n}} \ ,$$

d'après (4.1.11)*, on obtient :*

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \ \frac{\Gamma(j+\alpha-n+1)}{\Gamma(j+\alpha-n+1-\alpha)} \ \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j+\alpha-n-\alpha} \ ,$$

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-n)} \ \left(\psi(x) - \psi(a)\right)^{j-n} \ ,$$

sachant que ; $0 \leq j \leq n-1 \implies 1-n \leq j+1-n \leq 0$ *, pour* $n \geq 1$ *,*

donc : *(j+1-n)*$\in \mathbb{Z}^{-}$*, alors ;* $\Gamma(j+1-n) = \infty \implies 1/\Gamma(j+1-n) = 0$ *,*

alors : $D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0$ *.* *(C.Q.F.D)*

Proposition 4.1.6. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *, tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left[\lim_{x \to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) \right] . \qquad (4.1.32)$$

Preuve :

Soit :

$$D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi}} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) \qquad \{c'est\ selon\ (4.1.21)\}$$

$$\Longrightarrow D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = 0 \implies D^{\alpha}_{a,\psi}(f(x) - I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x)) = 0 \ ,$$

d'après (4.1.30)*, on obtient :*

$$f(x) - I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \, \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (\psi(x)-\psi(a))^{j+\alpha-n} \ ,$$

d'après (4.1.31)*, on obtient :*

$$f(x) - I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(j+1)} \left[\lim_{x \to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) \right] \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (\psi(x)-\psi(a))^{j+\alpha-n} \ ,$$

$$I^{\alpha}_{a,\psi} D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+\alpha-n}}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} \left[\lim_{x \to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} f(x) \right] . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Note :

La dérivée fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction qui on a vu dans cette section c'est en sens de RL, en d'autre termes on appelle **dérivée fractionnaire Psi-RL** . Dans la section suivante on verra la définition et quelques propriétés sur **la dérivée fractionnaire Psi-Caputo** .

4.2 La Dérivée Fractionnaire Psi-Caputo

Définition 4.2.1. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $J = [a,b]$ *un intervalle finie ou infinie tels que* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *et* $f, \psi \in (C^n[a,b], \mathbb{R})$ *deux fonctions tels que* $\psi(x)$ *une fonction monotone croissante sur* J *avec* $\psi'(x) \neq 0$ *pour* $\forall x \in J$ *. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre* α *d'une fonction* f *par rapport à autre fonction* ψ *sur* J *(ou bien, la dérivée fractionnaire* ψ*-Caputo) par la fonction suivante :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = I^{n-\alpha}_{a,\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \ , \tag{4.2.1}$$

$$\text{on pose :} \qquad D^{n}_{a,\psi} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \ ,$$

alors :

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = I^{n-\alpha}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) \ . \tag{4.2.2}$$

En d'autres termes, on a :

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{n-\alpha-1} \ \psi'(t) \ D^{n}_{a,\psi} f(t) \ dt \ . \tag{4.2.3}$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *:*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = D^{n}_{a,\psi} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \ . \tag{4.2.4}$$

Remarque :

Si $\psi(x) = x$, *donc* (4.2.3) *devient :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \ dt = \ ^{C}D^{\alpha}_{a} f(x) \ , \tag{4.2.5}$$

(voir (2.3.2) *) .*

Si $\psi(x) = log(x)$, *donc* (4.2.3) *devient :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,log(x)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (log(x) - log(t))^{n-\alpha-1} \left(t\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \frac{dt}{t} = \ ^{C-H}D^{\alpha}_{a} f(x) \tag{4.2.6}$$

(x>a>0) ,

(voir (3.2.2) *) .*

4.2.1 La Relation entre la Dérivée Fractionnaire Psi-RL et la Dérivée Fractionnaire Psi-Caputo

Soit $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f, \psi \in C^n([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \; (\psi(x) - \psi(a))^{j-\alpha} \; . \tag{4.2.7} $$

Preuve :

d'après (4.1.26), on obtient :

$$ I^{n}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} (\psi(x) - \psi(a))^{j} \; , $$

on compose l'équation par $I^{n-\alpha}_{a,\psi}$ et on obtient :

$$ \underbrace{I^{n-\alpha}_{a,\psi} I^{n}_{a,\psi}}_{I^{n}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi}} D^{n}_{a,\psi} f(x) = I^{n-\alpha}_{a,\psi} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} (\psi(x) - \psi(a))^{j} \right) \; , $$

on compose l'équation par $D^{n}_{a,\psi}$ et on obtient :

$$ \underbrace{D^{n}_{a,\psi} I^{n}_{a,\psi}} I^{n-\alpha}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x) = D^{n}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} (\psi(x) - \psi(a))^{j} \right) \; , $$

d'après (4.1.23), on obtient :

$$ \underbrace{I^{n-\alpha}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} f(x)} = \underbrace{D^{n}_{a,\psi} I^{n-\alpha}_{a,\psi}} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} (\psi(x) - \psi(a))^{j} \right) \; , $$

d'après (4.1.4) dans la partie à gauche de l'équation et d'après (4.2.2) dans la partie à droite de l'équation, on obtient :

$$ D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} \underbrace{{}^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} (\psi(x) - \psi(a))^{j}} \; , $$

d'après (4.1.11), on obtient :

$$ D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \; (\psi(x) - \psi(a))^{j-\alpha} \; , $$

$$ D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \; (\psi(x) - \psi(a))^{j-\alpha} \; . \qquad \text{(C.Q.F.D)} $$

Proposition 4.2.1. *Soit* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)]+1$, $f, \psi \in C^n([a, b])$,$-\infty < a < b < +\infty$ *:*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ . \tag{4.2.8}$$

Preuve :

d'après (4.2.7), *on obtient :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{j}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} \ (\psi(x) - \psi(a))^{j-\alpha} \ ,$$

avec :

$$D^{j}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(a) \ \equiv \ \lim_{x \to a} D^{j}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) \ ,$$

d'après (4.1.25) *;* $\quad \lim_{x \to a} D^{j}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \lim_{x \to a} I^{\alpha - j}_{a,\psi} f(x) \ ,$

car $\quad Re(\alpha) > n - 1 \geq j \geq 0 \ \Longrightarrow \ Re(\alpha) > j$ *, pour* $\ 0 < j < n - 1$,

d'après (4.1.15) *;* $\quad \lim_{x \to a} I^{\alpha - j}_{a,\psi} f(x) = 0$,

donc : $\quad D^{j}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(a) = 0$ *, pour* $\ j = 0, 1, ..., n - 1$,

alors :

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)} \ ,$$

d'après (4.1.21), *on obtient :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

4.3 Dérivée Fractionnaire au sens de Hilfer

Définition 4.3.1. *La dérivée fractionnaire de Hilfer* $D_a^{\alpha,\beta}$ *de la fonction* $f \in C^n(a,b)$ *d'ordre* α *et de type* β *; (tels que* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $0 \leq \beta \leq 1$ *), est définie par :*

$$D_a^{\alpha,\beta} f(x) = I_a^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) \ . \tag{4.3.1}$$

Remarque :

Si $\beta = 0$ *:*

$$D_a^{\alpha,0} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{(n-\alpha)} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) \ , \tag{4.3.2}$$

(voir (2.2.1) *) .*

Si $\beta = 1$ *:*

$$D_a^{\alpha,1} f(x) = I_a^{(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) \ , \tag{4.3.3}$$

(voir (2.3.1) *) .*

4.4 La Dérivé Fractionnaire de Psi-Hilfer

Définition 4.4.1. *Soit* $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $J=[a,b]$ *un intervalle finie ou infinie tels que* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *et* $f, \psi \in (C^n[a,b], \mathbb{R})$ *deux fonctions tels que* $\psi(x)$ *une fonction monotone croissante sur* J *avec* $\psi'(x) \neq 0$ *pour* $\forall x \in J$ *. La dérivé fractionnaire de* Ψ*-Hilfer* ${}^{H}\mathbb{D}_{a,\psi}^{\alpha,\beta}(.)$ *de fonction d'ordre* α *et de type* β *(* $0 \leq \beta \leq 1$ *) définie par :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,\psi}^{\alpha,\beta} f(x) = I_{a,\psi}^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a,\psi}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) \ . \tag{4.4.1} $$

Remarques :

A) *Si* $\beta = 0$ *:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,\psi}^{\alpha,0} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a,\psi}^{(n-\alpha)} f(x) = D_{a,\psi}^{\alpha} f(x) \ , \tag{4.4.2} $$

(voir (4.1.4) *) .*

Si $\beta = 1$ *:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,\psi}^{\alpha,1} f(x) = I_{a,\psi}^{(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = {}^{C}D_{a,\psi}^{\alpha} f(x) \ , \tag{4.4.3} $$

(voir (4.2.1) *) .*

B) *Si* $\psi(x) = x$*, tels que* $x > a \geq -\infty$ *:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,x}^{\alpha,\beta} f(x) = \underbrace{I_{a,x}^{\beta(n-\alpha)}} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \underbrace{I_{a,x}^{(1-\beta)(n-\alpha)}} f(x) \ , $$

d'après (4.1.2)*, on obtient :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,x}^{\alpha,\beta} f(x) = I_{a}^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) = D_{a}^{\alpha,\beta} f(x) \ , \tag{4.4.4} $$

(voir (4.3.1) *) .*

C) *On peut écrire* (4.4.1) *comme suit, tels que :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a,\psi}^{\alpha,\beta} f(x) = I_{a,\psi}^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a,\psi}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) = I_{a,\psi}^{\beta(n-\alpha)} \underbrace{\left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a,\psi}^{n-(\alpha+\beta(n-\alpha))} f(x)}_{F} \ , $$

$$ \{ \ (1-\beta)(n-\alpha) = n - \alpha - \beta(n-\alpha) = n - (\alpha + \beta(n-\alpha)) \ \} $$

$$\textit{sachant que :}\quad 0 \le \beta \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le \beta(n-\alpha) \le n-\alpha \;\Rightarrow\; \alpha \le \alpha+\beta(n-\alpha) \le n$$

$$\textit{et}\quad n-1<\alpha \quad , \textit{donc :}\quad n-1 < \alpha+\beta(n-\alpha) \le n\ ,$$

alors, on peut appliquée la definition de (4.1.4) sur F et on obtient :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = \ I^{\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} D^{\alpha+\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} f(x)\ ,$$

on pose : $\beta(n-\alpha)=\eta$, *avec :* $0 \le \eta \le n-\alpha < 1$ *et* $n-1 < \alpha+\eta \le n$*, donc :*

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = \ I^{\eta}_{a,\psi} D^{\alpha+\eta}_{a,\psi} f(x) \qquad , \ (\ \eta=\beta(n-\alpha)\ )\ . \tag{4.4.5}$$

Exemple 4.4.1. *Soit* $Re(\alpha)>0$, $n=[Re(\alpha)]+1$ *et* $0\le\beta\le 1$, $Re(\delta)>0$ *:*

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-1}\ . \tag{4.4.6}$$

Preuve :

Soit :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} = \ I^{\eta}_{a,\psi} \underbrace{D^{\alpha+\eta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}}\ , \qquad \{\textit{voir}\ (4.4.5)\ \}$$

d'après (4.1.11), on obtient :

$$\begin{aligned} ^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} &= \ I^{\eta}_{a,\psi}\ \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha-\eta)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-\eta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha-\eta)}\ \underbrace{I^{\eta}_{a,\psi}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-\eta-1}}\ , \end{aligned}$$

d'après (4.1.10), on obtient :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha-\eta)}\ \frac{\Gamma(\delta-\alpha-\eta)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\eta)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-\eta-1+\eta}\ ,$$

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-1}\ . \qquad \textit{(C.Q.F.D)}$$

Remarque :

d'après (4.1.11) et (4.4.6), on a :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1} = D^{\alpha}_{a,\psi}\ (\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}\ , \tag{4.4.7}$$

$$\textit{pour}\quad \beta\in[0,1]\ .$$

Proposition 4.4.1. *Soit* $f, \psi \in C^n([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \beta \leq 1$ *:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ . \tag{4.4.8}$$

Preuve :

Soit :

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = I^{\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} \underbrace{I^{n-\alpha-\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x)} \quad ; \ D^{n}_{a,\psi} = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} \ ,$$

d'après (4.1.20)*, on obtient :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = I^{\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi} I^{n-\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{I^{n-(n-\beta(n-\alpha))}_{a,\psi} D^{n}_{a,\psi}} I^{n-\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} f(x) \ ,$$

$$ \textit{sachant que :} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \ \Rightarrow \ 0 \leq \beta(n-\alpha) \leq n-\alpha \ \Rightarrow \ \alpha \leq n - \beta(n-\alpha) \leq n$$

$$ \textit{et} \quad n-1 < \alpha \quad , \textit{donc :} \quad n-1 < n-\beta(n-\alpha) \leq n \ ,$$

alors, on peut appliquée la definition de (4.2.2)*, on obtient :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = {}^{C}D^{n-\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} I^{n-\beta(n-\alpha)}_{a,\psi} f(x) \ ,$$

d'après (4.2.8)*, on obtient :*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} I^{\alpha}_{a,\psi} f(x) = f(x) \ .$$

Proposition 4.4.2. *Soit* $f, \psi \in C^n([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$, $n-1 < Re(\alpha) < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \beta \leq 1$ *:*

$$ I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+(\beta-1)(n-\alpha)}}{\Gamma(j+1+(\beta-1)(n-\alpha))} \left[\lim_{x \to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a,\psi} f(x) \right] \tag{4.4.9}$$

Preuve :

Soit :

$$ I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{I^{\alpha}_{a,\psi} I^{\eta}_{a,\psi}} D^{\alpha+\eta}_{a,\psi} f(x) \ , \qquad \{\textit{voir } (4.4.5)\}$$

d'après (4.1.20)*, on obtient :*

$$ I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = \underbrace{I^{\alpha+\eta}_{a,\psi} D^{\alpha+\eta}_{a,\psi} f(x)} \ ,$$

sachant que $n-1 < \alpha+\eta \leq n$*, donc d'après* (4.1.32) *on obtient :*

$$ I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi} f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+(\alpha+\eta)-n}}{\Gamma(j+1+(\alpha+\eta)-n)} \left[\lim_{x \to a^+} D^{j}_{a,\psi} I^{n-(\alpha+\eta)}_{a,\psi} f(x) \right] \ ,$$

$$avec: \ n-(\alpha+\eta)=n-\alpha-\beta(n-\alpha)=(1-\beta)(n-\alpha) \ ,$$
$$(\alpha+\eta)-n=(\beta-1)(n-\alpha) \ ,$$

alors :

$$I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}f(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+(\beta-1)(n-\alpha)}}{\Gamma(j+1+(\beta-1)(n-\alpha))}\left[\lim_{x\to a^+}D^{j}_{a,\psi}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a,\psi}f(x)\right] \ .$$

(C.Q.F.D)

Proposition 4.4.3. *Soit* $f,g,\psi\in C^n([a,b])$, $-\infty<a<b<+\infty$, $n-1<Re(\alpha)<n$ *tels que* $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq\beta\leq 1$ *:*

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}f(x)= {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}g(x) \implies f(x)=g(x)+\sum_{j=0}^{n-1}c_j\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{j+(\beta-1)(n-\alpha)} \ , \quad (4.4.10)$$

avec : $c_j\in\mathbb{R}$, *(j=0,1,2,.........,n-1) ; des constantes arbitraire .*

Preuve :

($\Longrightarrow$) Dans le sens directe :

Soit :

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}f(x)= {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}g(x) \implies {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(f(x)-g(x))=0 \ ,$$

on compose l'équation par $I^{\alpha}_{a,\psi}$ *, on obtient :*

$$\underbrace{I^{\alpha}_{a,\psi} \ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a,\psi}(f(x)-g(x))}=\underbrace{I^{\alpha}_{a,\psi}0}_{0} \ ,$$

d'après (4.4.9), on obtient :

$$(f(x)-g(x))-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{j+(\beta-1)(n-\alpha)}}{\Gamma(j+1+(\beta-1)(n-\alpha))}\left[\lim_{x\to a^+}D^{j}_{a,\psi}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a,\psi}(f-g)(x)\right]=0 \ ,$$

on pose :

$$c_j=\frac{1}{\Gamma(j+1+(\beta-1)(n-\alpha))}\left[\lim_{x\to a^+}D^{j}_{a,\psi}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a,\psi}(f-g)(x)\right] \ , \quad (4.4.11)$$

alors :

$$f(x)=g(x)+\sum_{j=0}^{n-1}c_j\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{j+(\beta-1)(n-\alpha)} \ . \qquad (C.Q.F.D)$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire , on a présenté plusieures types de dérivées fractionnaires :

- Dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville.
- Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
- Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard.
- Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard.
- Dérivée fractionnaire Psi-Riemann-Liouville.
- Dérivée fractionnaire Psi-Caputo.
- Dérivée fractionnaire au sens de Hilfer.
- Dérivée fractionnaire Psi-Hilfer.

ainsi que les relations les liant. Cette présentation n'est pas exhaustive vu qu'il existe d'autre types de dérivations fractionnaires qui méritent d'être proposés comme thème pour d'autres mémoires de Master.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anatoly A. Kilbas , Hari M. Srivastava and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations,Elsevier, 2006.

[2] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, On the Ψ-Hilfer fractional derivative, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 60(2018), 72-91.

[3] Yusuf Y. Gambo, Fahd Jarad, Dumitru Baleanu and Thabet Abdeljawad, On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives, Advances in Difference Equations, 2014 :10, 1-12.