

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**INSTITUT D'AÉRONAUTIQUE ET DES ÉTUDES SPATIALES
LABORATOIRE DES SCIENCES AÉRONAUTIQUES**



UNIVERSITÉ BLIDA 1

Département de Construction aéronautique

Projet de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme MASTER

Option : Structures Aéronautiques

Étude de la Simulation numérique des réponses dynamiques des structures

Réalisé par :

- BENHADJA Ahmed Riadh Aek
- BOUGOBBA Khaled

Promoteur :

Mr. Badreddine
Pr. Rezoug Tahar

Promotion 2022

ملخص

تتمثل الخطوة الأولى من المذكرة في التحدث عن مجال ال مرونة الجويى و تعداد المشاكل التي يتم مواجهتها بشكل متكرر فيه, ثم يتم تقديم سلسلة من الحلول لمشاكل الديناميكيات الهيكلية. تتمثل الخطوة الثانية في التطرق للأنظمة ذات درجة واحدة من الحرية وأنواع القوى, مما يوفر الاستجابة الديناميكية للنظام لكل من هذه القوى. ثم يتم تمديد هذه الخطوة للحصول على الأستجابة الديناميكية للأنظمة ذات درجتين الى ن درجة من الحرية, من اجل الحصول على خورزميات قادرة على حل أي مشكلة اهتزازي. لهذا الغرض لدينا طريقتان للمحاكاة العددية, الأولى تهدف إلى حل المشكلات الخطية و تستخدم مبدأ تكامل الالتفاف Duhamel بالنسبة للمشاكل الغير خطية, يتم حل معادلات ديناميات الهياكل حصرياً عن طريق المحاكاة المباشرة باستخدام المخطط العددي للاختلافات المحدودة.

كلمات مفتاحية

MATLAB , الديناميكيات الهيكلية ، المرونة الهوائية ، الاهتزازات ، الاستجابة الديناميكية

Résumé

La première étape de ce mémoire consiste à introduire le domaine d'aéroélasticité et à énumérer les problèmes les plus fréquemment rencontrés en ce dernier, ensuite une série des solutions des problèmes de DDS est présentée. En deuxième étape c'est l'introduction au système à un degré de liberté et les types des excitations, tout en donnant la réponse dynamique du système à chacune de ces forces. Cette étape est augmentée pour l'obtention de la réponse dynamique des systèmes à deux degrés de liberté jusqu'aux N degrés de liberté, afin d'avoir des algorithmes capables de la résolution de tout problème vibratoire. Pour cela nous disposons de deux méthodes de simulations numériques dont la première est destinée à la résolution des problèmes linéaires et qui utilise le principe du produit de convolution de Duhamel. Pour les problèmes non linéaires, la résolution des équations de la dynamique des structures est effectuée exclusivement par simulation directe en utilisant le schéma numérique des différences finies.

Mots clés

Dynamique des structures, Aéroélasticité, Vibrations, Réponse dynamique, MATLAB

Abstract

The first step of this dissertation is to introduce the aeroelasticity domain and to enumerate the most frequently encountered problems in it, then a series of solutions of structural dynamics problems is presented. The second step consists in introducing the system with one degree of freedom and the types of excitations, providing the dynamic response of the system to each of these forces. This step is then extended to obtain the dynamic response of systems with two degrees of freedom up to N degrees of freedom, in order to have algorithms capable of solving any vibratory problem. For this purpose, we have two methods of numerical simulations, the first of which is intended for the resolution of linear problems and uses the principle of the Duhamel convolution product. For non-linear problems, the resolution of the equations of the dynamics of structures is carried out exclusively by direct simulation using the numerical scheme of finite differences.

Keywords

Structural Dynamics, Aeroelasticity, Vibration, Dynamic Response, MATLAB

Dédicace

A nos très chers parents tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que nous vous portons, ni la profonde gratitude que nous vous témoignons pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour nos instructions et notre bien-être.

C'est à travers vos encouragements que nous avons opté pour cette profession. Nous espérons avoir répondu aux espoirs que vous avez fondés en nous. Nous vous rendons hommage par ce modeste travail en guise de nous reconnaissances éternelle et de notre infini amour. Vous résumez si bien le mot parents qu'il serait superflu d'y ajouté quelque chose.

Que Dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie pour que vous demeuriez le flambeau illuminant le chemin de vos enfants.

A tous nos amis les plus proches.

Remerciements

*Merci à notre DIEU tout puissant « ALLAH »
qui nous a donné la force et nous a guidé afin
de réaliser ce travail.*

*Nous adressons nos sincères remerciements à
nos parents, nos frères, nos sœurs et nos amis
les plus proches pour leurs mots et leurs
actions d'encouragement, nous voudrions
également remercier nos enseignants et
professeurs de l'Institut d'aéronautique et des
études spatiales à blida qui nous ont chargé de
connaissances et nous ont propulsé vers cette
étape de notre vie, notamment notre promoteur
Mr. Badereddine pour l'aide à
l'accomplissement de ce travail, pour sa très
grande patience et sa compréhension et ses
compétences scientifiques.*

*On tient notamment à adresser l'expression de
notre sincère reconnaissance aux membres du
jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Sommaire

Résumé

Dédicace

Remerciements

Liste des figures

Nomenclature

INTRODUCTION	1
I. GENERALITES SUR LES REPONSES DYNAMIQUES DES STRUCTURES.....	2
I.1 Problèmes de DDS	3
Aéroélasticité	3
I.2 Solutions des problèmes de DDS	10
Les Suspensions	10
Les Absorbeurs dynamiques	13
Les Résonateurs	14
II. SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE	16
II.1 Excitation harmonique	18
Excitation harmonique des systèmes amortis	18
II.2 Excitation périodique	20
II.3 Excitation transitoire	23
II.4 Excitation élémentaire	24
Excitation à échelon rectangulaire	25
Excitation par impulsion rectangulaire	27
Excitation à échelon avec front à pente constante	28
II.4.1 Excitation générale	29
Évaluation numérique de l'intégrale de convolution	34
III. SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE	40
III.1 Analyse modale	41
Analyse des vibrations libres	41
Couplage de coordonnées et les coordonnées principales	43
Principe d'orthogonalité	43
Système excité amorti	44
III.2 Système à deux degrés de liberté.....	45

Réponse dynamique	46
III.3 Simulation Directe	50
IV. LES SYSTEMES NON-LINEAIRES	53
IV.1 Systèmes non-linéaires réels.....	55
IV.2 Simulations numériques et réponses chaotiques	57
V. RESULTATS ET INTERPRETATIONS	61
V.1 Système à un degré de liberté.....	62
Exemple et résultats	62
V.2 Système à deux degrés de liberté	65
Exemples et résultats.....	65
V.3 Système à plusieurs degrés de liberté.....	71
Exemple et résultats	71
Interprétation.....	75
V.4 Système non linéaire	75
Équation de Duffing.....	75
Equation de Van der Pol	83
CONCLUSION.....	89
Annexe : A	90
BIBLIOGRAPHIE	91

Liste des figures

Figure I-1 : Développement de flottement sur les ailes d'une maquette d'avion.....	4
Figure I-2 : La destruction du pont de Tacoma, Washington, 1940.....	5
Figure I-3 : Buffeting au niveau de l'empennage dû au décollement de la couche limite a.....	6
Figure I-3.5 : Simulation numérique du buzz transsonique sur une section d'ai.....	7
Figure I-4 : schématisation de deux masses en rotation dont (b) représente le balourd en rota.....	9
Figure I-5 : Suspension passive.....	11
Figure I-6 : Suspension semi-active.....	12
Figure I-7 : Suspension active.....	13
Figure I-8 : Schéma d'une structure couplée à un absorbeur dynamique.....	14
Figure I-9 : Résonateur d'un échappement d'hélicoptère	15
Figure II-1 : Système de masse à ressort et amortisseur avec force externe.....	18
Figure II-2 : Excitation par échelon rectangulaire.....	26
Figure II-3 : Excitation par impulsion rectangulaire.....	28
Figure II-4 : Fonction échelon avec front à pente constante.....	29
Figure II-5 : (a), (b) et (c).....	31
Figure II-6 : (a), (b), (c) et (d).....	35
Figure III-1 : Systèmes à deux degrés de liberté.....	45
Figure III-2 : Système amorti et forcé à deux degrés de liberté.....	46
Figure III-3 : Types de variation de l'accélération pour la méthode Newmark.....	52
Figure IV-1 : Système double pendule.....	55
Figure IV-2 : Graphe de coefficient de portance en fct de l'angle d'attaque.....	56
Figure IV-3 : Portraits de phase de solutions périodiques.....	58
Figure IV-4 : Loi horaire du déplacement vibratoire ($100x\xi$).....	59
Figure IV-5 : Balayage montant en fréquences.....	59
Figure V-1 : Système amorti et forcé à 1DDL.....	62
Figure V-2 : La réponse de la méthode analytique.....	63
Figure V-3 : La réponse de la méthode Newmark Beta.....	63
Figure V-4 : Système amorti et forcé à deux degrés de liberté (a).....	65
Figure V-5 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la méthode d'intégration de Duhamel.....	65
Figure V-6 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la méthode de simulation directe.....	66
Figure V-7 : Système amorti et forcé à deux degrés de liberté (b).....	67
Figure V-8 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la méthode analytique	68
Figure V-9 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la méthode d'intégration de Duhamel.....	69
Figure V-10 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la méthode de simulation directe.....	70
Figure V-11 : Système forcé amorti à 4DDL.....	72
Figure V-12 : Les réponses x_1 et x_3 obtenus par la méthode d'intégration de Duhamel.....	73
Figure V-13 : Les réponses x_1 et x_3 obtenus par la simulation directe.....	74
Figure V-14 : (a) Portrait de phase de la solution de Ueda $\xi_0 = 3.0$ et $\dot{\xi}_0 = 4.0$ D'après la méthode de simulation directe.....	76
Figure V-14 : (b).....	77
Figure V-14 : (c).....	77

Figure V-14 : (d).....	78
Figure V-15 : La réponse $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ de système non linéaire obtenus par la méthode de la Simulation Direct.....	79
Figure V-16 : La réponse $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ de système non linéaire obtenus par Runge-Kutta.....	80
Figure V-17 : Portrait de phase de l'équation de Duffing d'après la simulation directe.....	81
Figure V-18 : Portrait de phase de l'équation de Duffing d'après la méthode Runge-Kutta.....	82
Figure V-19 : Le déplacement $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ obtenus par la méthode de la simulation directe.....	84
Figure V-20 : Le déplacement $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ obtenus par la méthode de Runge-Kutta.....	85
Figure V-21 : Portrait de phase de l'équation de Van der pol d'après la méthode de simulation directe.....	86
Figure V-22 : Portrait de phase de l'équation de Van der pol d'après la méthode de Runge-Kutta.....	87

Liste des tableaux

Tableau V-1 Comparaison des points essentiels entre les deux méthodes	67
Tableau V-2: Comparaison entre la méthode analytique et les deux méthodes numériques	71
Tableau V-4 Comparaison entre la méthode Runge Kutta et la simulation directe	82
Tableau V-5 Comparaison entre la simulation directe et Runge Kutta	87

Nomenclature

m : la masse.

c : le facteur d'amortissement.

k : la constante de rigidité.

x : le déplacement linéaire.

\dot{x} : la vitesse linéaire.

\ddot{x} : l'accélération linéaire.

t : le temps.

T : la période.

τ : un segment du temps.

Ω : la fréquence angulaire de la force

F_0 : l'amplitude de la force.

ω : la fréquence naturelle.

f_0 : la force normalisée en masse.

x_0 : la position initiale.

\dot{x}_0 : la vitesse initiale.

ω_d : la fréquence naturelle amortie.

ζ : le coefficient d'amortissement.

ϕ : le déphasage.

α : le coefficient de la force.

θ : le déplacement angulaire.

$\dot{\theta}$: la vitesse angulaire.

η : le coefficient d'amortissement du terme cubique dans l'équation de Duffing.

ψ : l'argument de la force complexe.

φ : l'argument de la réponse complexe.

μ : le paramètre scalaire indiquant la nonlinéarité et la force d'amortissement.

INTRODUCTION

Les vibrations sont l'oscillation d'un milieu élastique autour de sa position d'équilibre, Les vibrations affectent donc tous les solides élastiques, les liquides et les gaz. Ils pourraient être employées intentionnellement mais en la plupart du temps, elles sont le produit d'une énergie indésirable transférée au systèmes mécaniques, contribuant à leur vieillissement ou à des ruptures. Mais comme la science évolue, des solutions sont développées pour pouvoir contrôler nos systèmes et d'éviter des incidents catastrophiques.

Tout d'abord, dans le premier chapitre, nous définirons la branche de la dynamique des structures et les problèmes d'aéroélasticité connexes qui menacent la sécurité de l'aviation moderne, ainsi que certaines des solutions qui ont déjà été réalisées pour cette branche indispensable.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous définirons le système simple à un seul degré de liberté, et nous classerons les types d'excitations simples qui pourraient agir sur lui, ainsi que la réponse dynamique du système à ces forces. Dans le troisième chapitre, nous étudierons les réponses dynamiques des systèmes à plusieurs degrés de liberté linéaires, ce qui inclut les systèmes à trois masses ou plus, ainsi que le cas particulier des systèmes à deux degrés de liberté, tout en explorant le domaine du calcul numérique pour résoudre les réponses dynamiques de ces systèmes. Dans le quatrième chapitre, nous présenterons le principe de non-linéarité en aéroélasticité. Nous expliquerons d'où peut provenir cette non-linéarité et donnerons de nombreux problèmes vibratoires réels qui sont non linéaires, dans cette étape, nous avons dû introduire une méthode rapide et correcte qui résout les problèmes non linéaires numériquement avec facilité, la méthode de simulation directe a rempli ce rôle et a été choisi pour des applications futures. Le dernier chapitre sera consacré à l'essai et à la comparaison de différentes méthodes dans différents cas, à savoir le cas de systèmes à un seul degré de liberté, à deux et à plusieurs degrés de liberté, pour terminer par le cas de non-linéarité présenté sous la forme des équations de Duffing et Van der Pol.

CHAPITRE I

**GENERALITES SUR LES
REPONSES DYNAMIQUES DES
STRUCTURES**

I.1 Problèmes de DDS

I.1.1 Aéroélasticité

L'aéroélasticité est la branche de la physique et de l'ingénierie qui étudie les interactions entre les forces inertielles, élastiques et aérodynamiques qui se produisent lorsqu'un corps élastique est exposé à un écoulement de fluide.

On admet généralement que les forces fluctuantes exercées par un écoulement fluide sur une structure qui vibre sont de trois types fondamentaux :

- Les efforts quasi-périodiques produits par le détachement tourbillonnaire alterné sont quasiment indépendants du mouvement de la structure lorsque les fréquences sont différentes. En cas de résonance, il existe un couplage entre le détachement des tourbillons et les oscillations, c'est l'accrochage.
- Lorsque l'écoulement est turbulent, les fluctuations de vitesse peuvent provoquer des vibrations de faible amplitude. Le couplage de ces forces induites par la turbulence avec le mouvement de la structure est faible, voire nul.
- Comme la structure bouge, y compris par rapport à ses voisines, elle modifie l'écoulement autour d'elle, qui en retour modifie les efforts sur la structure. Il existe donc des forces de couplage aéroélastiques induites par le mouvement qui peuvent devenir très importantes.

En aéroélasticité, nous sommes couramment confrontés aux problèmes suivants :

I.1.1.1 Flottement

Le flottement est une auto excitation dynamique d'une structure élastique, produite par des forces aérodynamiques.

Le flottement est probablement le plus complexe et potentiellement le plus désastreux de tous ; il se déclenche sans prévenir, la rapidité avec laquelle s'amplifie la vibration varie selon le cas, mais souvent elle est telle que la rupture survient avant que nous ait eu le temps de quitter le domaine d'instabilité, cela amplifie le danger de ce phénomène. [7]

Le premier cas de flottement enregistré et documenté dans un avion est celui d'un bombardier Handley Page O/400 au cours d'un vol en 1916, lorsqu'il a subi une oscillation violente de la queue, ce qui a provoqué une distorsion extrême de l'arrière du fuselage et le déplacement asymétrique des gouvernes de profondeur.

Le flottement classique : est le flottement des surfaces portantes (ailes d'avion ou surfaces de gouverne de missile) apparaît lorsque les forces aérodynamiques introduisent des vibrations instables par coalescence entre deux fréquences de résonance en général associées à un mode de torsion et à un mode de flexion (voir figure I-1). Ce phénomène, lorsqu'il s'enclenche, aboutit en général à la destruction de la structure d'aile et il est donc nécessaire de le maîtriser afin de définir le domaine de vol. Les vitesses critiques de flottement peuvent exister dans le régime subsonique ou supersonique selon la configuration de vol.



Figure I-1 : Développement de flottement sur les ailes d'une maquette d'avion

Les flottements à un degré de liberté (de décrochage) : Le flottement de décrochage s'agit d'une instabilité qui s'applique à un mouvement de flexion seul, ou de torsion seule. Les efforts engendrés par le vent déforment la structure. Cette déformation modifie l'écoulement d'air, qui en retour modifie la déformation, et ainsi de suite. Au-dessus d'une vitesse critique, l'énergie des oscillations captée par la structure ne peut plus être dissipée. L'amplitude des vibrations augmente progressivement. [2]

Un exemple très connu est celui du pont de Tacoma qui s'est effondré en 1940 à la suite d'une instabilité de torsion (voir figure I-2).



Figure I-2 : La destruction du pont de Tacoma, Washington, 1940

I.1.1.2 Buffeting : (développement de turbulence)

La charge de buffet hautement instable sur l'empennage des avions modernes est causée par la rafale de tourbillons longitudinaux provenant du décollement de la couche limite.

Ces tourbillons hautement turbulents interagissent avec les queues verticales et induisent une réponse dynamique à basse fréquence de l'ensemble de l'empennage qui, sur une longue période, entraîne une fatigue structurelle. [12]

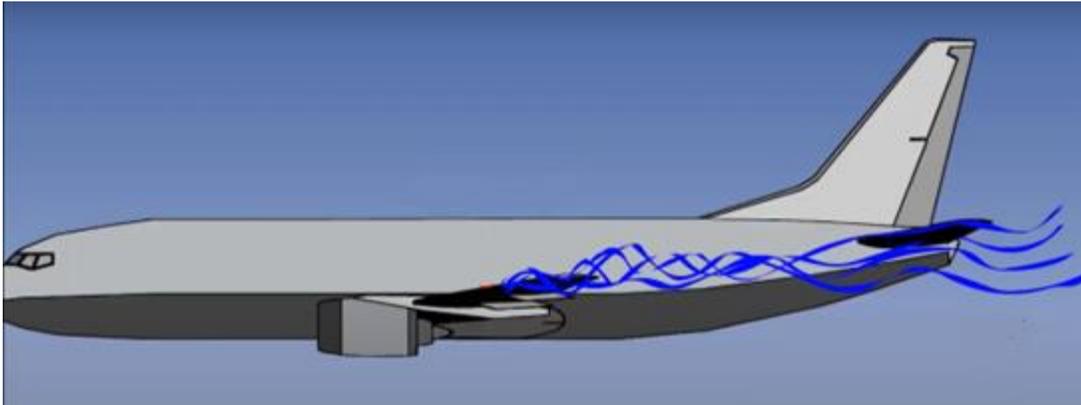


Figure I-3 Buffeting au niveau de l'empennage dû au décollement de la couche limite au niveau des ailerons

I.1.1.3 Transonic buzz

« Transonic buzz » ou Bourdonnement transsonique est un phénomène aéroélastique qui se produit sur la surface de contrôle d'un avion (aileron) dans un écoulement transsonique, et qui est traité comme une sorte de flottement à un seul degré de liberté. Il a été observé pour la première fois en vol vers 1945. Au-delà de 482 *km/h*, la densité change et l'écoulement de l'air autour de l'avion commence à affecter la stabilité de l'avion.

Si un avion vole à un nombre de Mach légèrement supérieure à son nombre de Mach critique et qu'il présente une petite onde de choc sur l'aile (en raison de la vitesse plus élevée sur le dessus de l'aile), si la vitesse de l'avion augmente, l'onde de choc s'agrandit rapidement, ce qui entraîne une forte augmentation de la pression statique à proximité de l'onde de choc. L'écoulement d'air séparé engoutira l'empennage dans un sillage très turbulent qui provoquera un violent buffeting de la cellule, La vibration de la surface portante entraîne un mouvement de la position de l'onde de choc qui change la pression de la force agissante.[14]

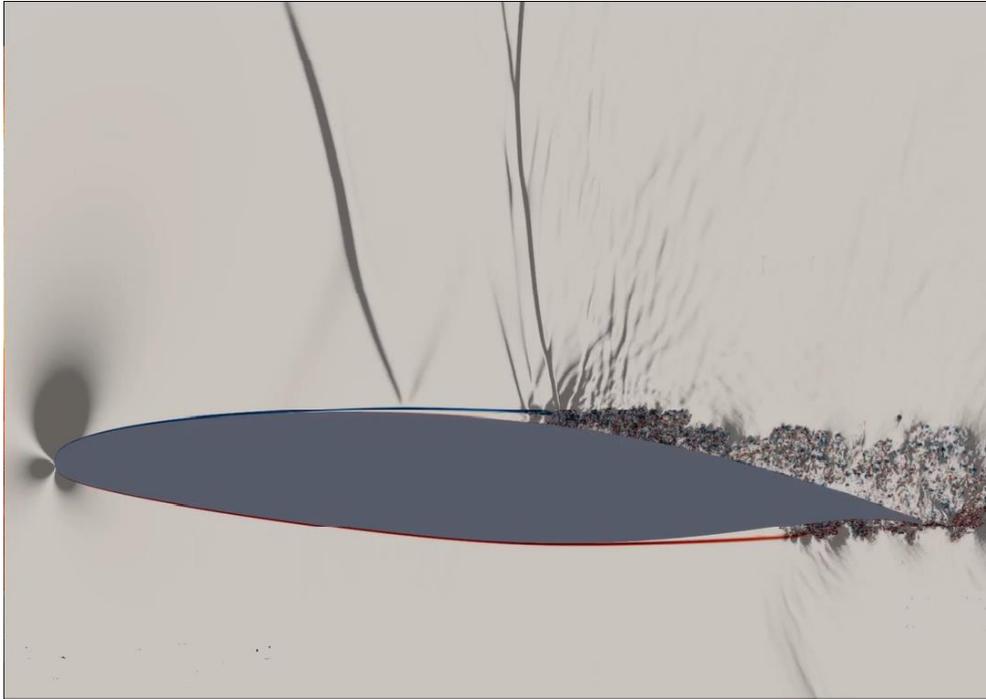


Figure I-3.5 : Simulation numérique du buzz transsonique sur une section d'aile

I.1.1.4 Balourds

Les machines tournantes représentent une source courante de mauvaises vibrations. De nombreuses machines et appareils ont des composants rotatifs, Le balourd est la répartition inégale de la masse autour d'un axe de rotation. Une masse en rotation, ou rotor, est dite déséquilibrée lorsque son centre de masse (axe d'inertie) n'est pas aligné avec le centre de rotation (axe géométrique). Un balourd simple est schématisé dans la figure (I-4) Le déséquilibre provoque un moment qui donne au rotor un mouvement d'oscillation.

Les causes sont diverses :

- Les procédés de fabrication de routine peuvent provoquer des contraintes sur les composants métalliques. Si les contraintes ne sont pas éliminées, le rotor se déforme pour se recalibrer.
- La distorsion thermique se produit souvent avec des pièces exposées à des températures élevées. Les métaux peuvent se dilater au contact de la chaleur, de sorte que l'exposition à des températures plus élevées peut provoquer la dilatation de l'ensemble de la machine ou de certaines parties seulement, entraînant une distorsion.

- Les pièces rotatives impliquées dans la manutention accumulent presque toujours des dépôts. De plus, lorsqu'elles sont exposées à l'huile, ces pièces peuvent être très facilement déformées. Si l'on ne respecte pas une routine de maintenance ou que l'on ne met pas en place un processus d'inspection, l'huile peut s'infiltrer dans les pièces et provoquer un déséquilibre.

Les effets de ce déséquilibre sont des vibrations, du bruit, diminution de la durée de vie des roulements et de la machine et conditions de travail dangereuse.

Il existe trois types de déséquilibrage :

- *Le déséquilibre statique* Un déséquilibre statique (parfois appelé déséquilibre des forces) se produit lorsque l'axe d'inertie d'une masse en rotation est déplacé par rapport à l'axe de rotation et parallèle à celui-ci. Les déséquilibres statiques sont plus fréquents sur les rotors en forme de disque, car le profil géométrique fin du disque permet une distribution inégale de la masse avec un axe d'inertie presque parallèle à l'axe de rotation. Un seul plan reçoit une correction d'équilibre
- *Le déséquilibre de couple* Un déséquilibre de couple se produit lorsqu'une masse en rotation subit deux forces de déséquilibre égales qui sont situées à 180° l'une de l'autre. Un système qui est statiquement équilibré peut néanmoins présenter un déséquilibre de couple. Le déséquilibre de couple est fréquent dans les rotors cylindriques allongés.

- *Le déséquilibre dynamique* En rotation, un déséquilibre se produit lorsque l'axe de masse/inertie ne croise pas l'axe de l'arbre, on parle alors de déséquilibre dynamique. La combinaison de déséquilibre statique et de couple constitue le déséquilibre dynamique. Il se produit dans pratiquement tous les rotors et constitue le type de déséquilibre le plus courant. Il peut être résolu en corrigeant le poids sur au moins deux plans. [4]

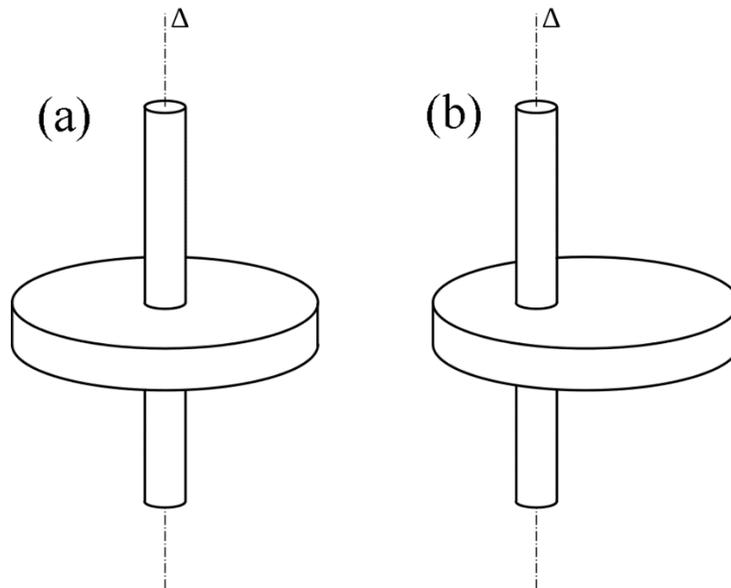


Figure I-4 : schématisation de deux masses en rotation dont (b) représente le balourd en rotation.

I.1.1.5 Chocs

Les équipements transportés ou embarqués sont très fréquemment soumis à des chocs mécaniques au cours de leur vie utile (manutention, transport, etc.). Ce type d'environnement, bien que de très courte durée (d'une fraction de milliseconde à quelques dizaines de millisecondes), est souvent sévère et ne peut être ignoré.[11]

Un choc est défini comme une excitation vibratoire dont la durée est comprise entre une et deux fois la période naturelle du système mécanique excité.

Un choc se produit lorsqu'une force, une position, une vitesse ou une accélération est modifiée de manière abrupte et crée un état transitoire dans le système considéré.

La modification est généralement considérée comme brusque si elle se produit dans une période de temps courte par rapport à la période naturelle concernée.

Un choc mécanique peut potentiellement endommager un system ou un élément du system, Certains éléments peuvent sembler ne pas avoir été endommagés par un seul choc, mais subir une défaillance par fatigue après de nombreux chocs répétés de faible intensité, il peut également entraîner une diminution de la durée de vie d'élément, réduisant la fiabilité de ce dernier. [13]

I.2 Solutions des problèmes de DDS

I.2.1 Les Suspensions

Les systèmes de suspension peuvent être utilisés pour contrôler les vibrations de divers éléments rigides et flexibles de véhicules. Ils réduisent le mouvement et l'accélération de la masse suspendue dans un véhicule.

I.2.1.1 Suspension passive

Un système de suspension passive a la capacité de stocker l'énergie via un ressort et de la dissiper via un amortisseur et les paramètres sont généralement fixes. Une fois le ressort sélectionné en fonction de la capacité de charge de la suspension, l'amortisseur est la seule variable restant à préciser. Un faible amortissement donne un mauvais contrôle de la résonance au fréquences naturelles du système mais achève l'isolation haute fréquence. Inversement, un amortissement important permet un bon contrôle de la résonance au détriment des hautes fréquences isolation.

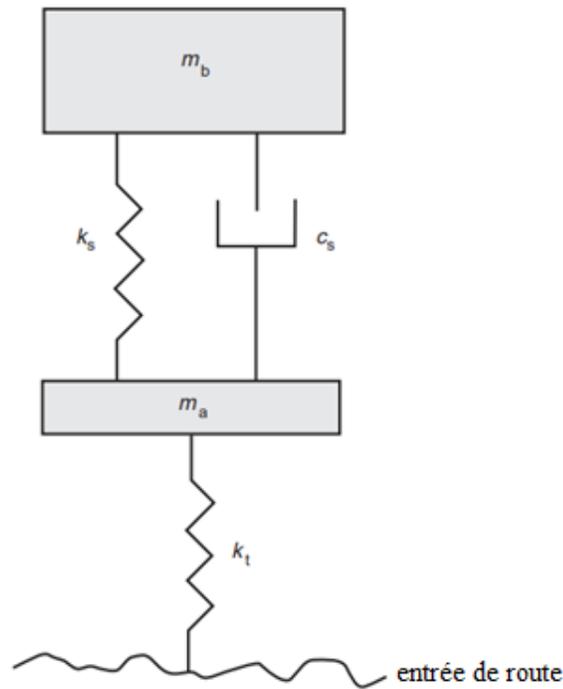


Figure I-5 : Suspension passive

I.2.1.2 Suspension réglable

Un système de suspension réglable combine l'élément à ressort passif d'une suspension passive avec un élément amortisseur dont les caractéristiques peuvent être ajustées par l'opérateur.

I.2.1.3 Suspension semi-active

Dans ce type de système, l'élément de ressort est retenu, l'amortisseur est remplacé par un amortisseur contrôlable. Un système semi-actif utilise une alimentation externe pour régler les niveaux d'amortissement et faire fonctionner un contrôleur intégré et un ensemble de capteurs. Le contrôleur détermine la force d'amortissement requise et commande automatiquement l'amortisseur pour atteindre cette force d'amortissement. La force obtenue par l'amortisseur peut simplement être en deux niveaux : une force d'amortissement minimale et maximale.

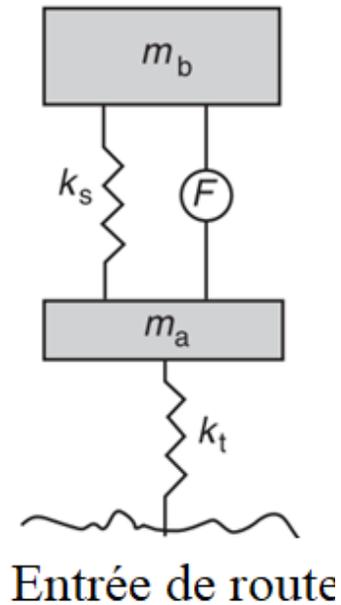


Figure I-6 : Suspension semi-active

I.2.1.4 Suspension active

Dans une suspension active, l'amortisseur passif, ou l'amortisseur passif et le ressort, sont remplacés par un actionneur de force. L'actionneur de force est capable à la fois d'ajouter et de dissiper de l'énergie vers et depuis le système, contrairement à un amortisseur passif, qui ne peut que dissiper l'énergie. Avec une suspension active, l'actionneur de force peut appliquer une force indépendante du déplacement relatif ou de la vitesse à travers la suspension. Compte tenu de la bonne stratégie de contrôle, il en résulte un meilleur compromis entre le confort de conduite et la stabilité du véhicule par rapport à un système passif. [6]

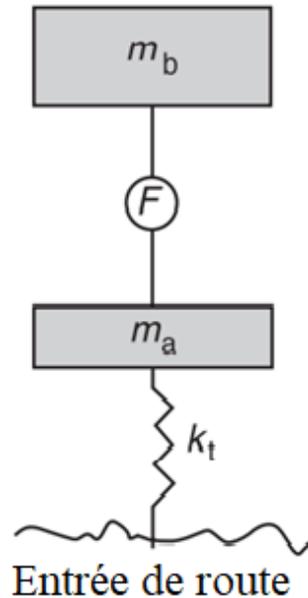


Figure I-7 : Suspension active

I.2.2 Les Absorbeurs dynamiques

Les absorbeurs dynamiques de vibrations (AVD) sont des dispositifs utilisés pour réduire l'amplitude des vibrations d'un système primaire à certaines fréquences, particulièrement près de la fréquence de résonance. Un absorbeur dynamique peut se caractériser par un système à ressort amortisseur de masse lorsqu'il est correctement réglé, il réduit le déplacement du système vibratoire primaire.

La première conception d'un absorbeur a été faite par Frahm en 1909, et ce premier AVD n'a pas eu un élément d'amortissement, seulement une seconde masse était attachée à la masse principale par un ressort secondaire. Ce premier AVD s'est avéré efficace dans une petite gamme de fréquences très proches de la fréquence naturelle du système principal (ou aussi appelé système primaire). Lorsque le système primaire est excité avec une fréquence proche de la fréquence naturelle, les amplitudes sont significativement réduites en raison de la présence du AVD, par rapport aux résultats du système primaire sans l'absorbeur. Cependant, dans ce système couplé deux fréquences résonantes apparaissent l'une avant, et l'autre après la fréquence résonante du système original. Ce type de système a été appelé un amortisseur de masse accordé (AMA). [6]

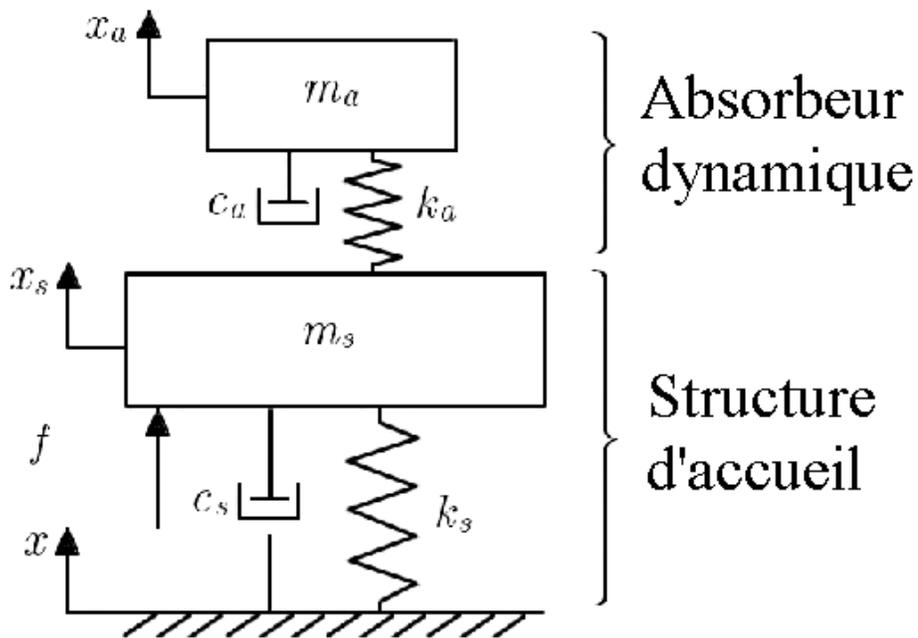
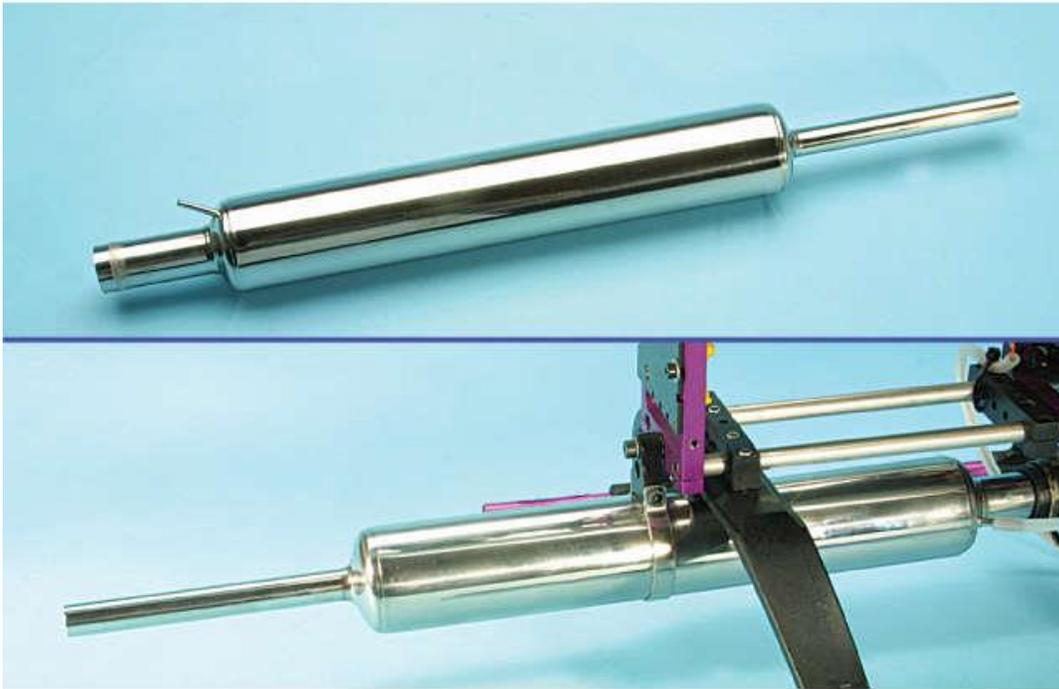


Figure I-8 : Schéma d'une structure couplée à un absorbeur dynamique

I.2.3 Les Résonateurs

Un objet homogène dans lequel les vibrations se déplacent sous forme des ondes à une vitesse essentiellement constante, rebondissant d'avant en arrière entre les côtés d'objet est appelé résonateur. Le matériau du résonateur, à travers lequel passent les ondes, peut être considéré comme une collection de millions de pièces mobiles liées (comme les atomes).

Chaque masse dans un système peut vibrer comme un oscillateur harmonique, et un système physique peut avoir autant de fréquences de résonance qu'il a des degrés de liberté. Une fréquence résonante existe dans les systèmes avec un degré de liberté. Deux fréquences de résonance peuvent être trouvées dans les systèmes avec deux degrés de liberté, tels que les pendules couplés. Le temps nécessaire pour transférer l'énergie d'un oscillateur harmonique couplé au suivant devient considérable à mesure que le nombre d'oscillateurs harmoniques couplés augmente.



© VARIO Helicopter Ull Streich GmbH & Co. KG

Figure I-9 : Résonateur d'un échappement d'hélicoptère

CHAPITRE II

**SYSTEMES A UN DEGRE DE
LIBERTE**

En termes généraux, un système à un degré de liberté décrit le mouvement d'un système qui est contraint à une seule direction linéaire ou angulaire.

Un système 1DDL est souvent décrit à l'aide d'un système ressort-masse amorti. Une masse est attachée à un ressort et à un amortisseur, qui sont tous deux fixés à l'extrémité opposée.

Les composants de base d'un système mécanique sont l'inertie, la rigidité, l'amortissement et une source de travail ou d'énergie.

Un élément d'inertie est tout ce qui possède une masse ou stocke de l'énergie cinétique. Les composants de rigidité stockent l'énergie potentielle. Le ressort hélicoïdal sert de modèle pour tous les ressorts linéaires. Les composants structurels, tels que les barres soumises à un mouvement longitudinal, les arbres soumis à un mouvement de rotation et les poutres soumises à des vibrations transversales, stockent tous de l'énergie potentielle et peuvent être modélisés comme des ressorts. Des combinaisons de ressorts peuvent être remplacés par un seul ressort de rigidité équivalente. Les composants d'amortissement dissipent l'énergie. L'amortissement visqueux désigne toute forme d'amortissement dans laquelle la force de frottement est proportionnelle à la vitesse. L'énergie dissipée due à la force d'amortissement visqueux est prise en compte et un coefficient d'amortissement visqueux équivalent est calculé pour une combinaison d'amortisseurs visqueux. La source d'énergie peut être une énergie initiale présente dans le système, ou une entrée dans le système sous la forme d'une force extérieure ou d'un mouvement imposé.

Un système à un DDL peut être décrit par une équation différentielle ordinaire du second ordre. L'équation peut être homogène (dans le cas de vibrations libres) ou non-homogène (dans le cas de vibrations forcées). On peut la simplifier comme suit :

$$\mathcal{F}(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \quad (2.1)$$

Ou $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

II.1 Excitation harmonique

L'excitation harmonique se réfère à une force externe sinusoïdale d'une fréquence unique appliquée au système. C'est une source commune de force externe appliquée aux machines et aux structures.

La réponse d'un système à l'excitation harmonique est un sujet très important parce qu'il est rencontré très fréquemment et couvre également le concept de résonance. La résonance se produit lorsque l'excitation externe a la même fréquence que la fréquence naturelle du système. Elle entraîne de grands déplacements et peut faire en sorte qu'un système dépasse son domaine d'élasticité et se retrouve dans une défaillance structurelle.

Les machines rotatives telles que les ventilateurs, les moteurs électriques et les moteurs à pistons transmettent une force sinusoïdale variable aux composants adjacents. En outre, le théorème de Fourier indique que de nombreuses autres forces peuvent être exprimées comme une série infinie de termes harmoniques.

II.1.1 Excitation harmonique des systèmes amortis

Presque tous les systèmes du monde réel qui sont analysés du point de vue des vibrations comportent une source de dissipation d'énergie ou d'amortissement.

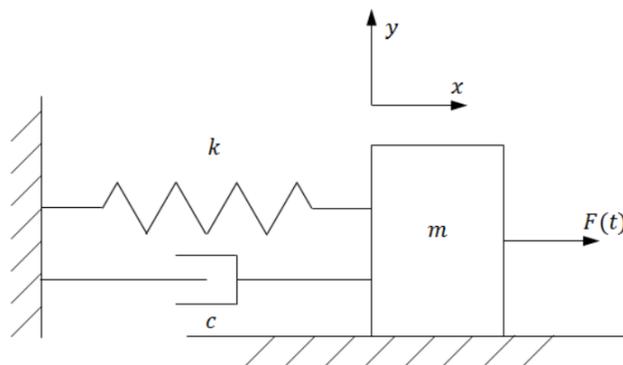


Figure II-1 : Système de masse à ressort et amortisseur avec force externe

En additionnant les forces sur la masse (voir figure II-1) dans la direction x , on obtient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (2.2)$$

En divisant par la masse m , on obtient

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + kx = f_0 \cos\Omega t \quad (2.3)$$

Avec : $\omega = \sqrt{k/m}$; $\zeta = c/(2m\omega)$; $f_0 = F_0/m$

La solution homogène pour le cas amorti ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$) est :

$$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (2.4)$$

Avec : $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$

on définir : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

les constantes A et ϕ sont déterminées par les conditions initiales comme étant :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_d}\right)^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Alternativement, la solution peut être écrite comme :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right] \quad (2.6)$$

Le calcul de la solution particulière pour le cas amorti est similaire à celui du cas non amorti et suit la méthode des coefficients indéterminés.

À partir des équations différentielles, on sait que la réponse forcée d'un système amorti est sous la forme d'une fonction harmonique de la même fréquence que la force motrice, avec une amplitude et une phase différente. Le déphasage est attendu en raison de l'effet de la force d'amortissement.

Suivant la méthode des coefficients indéterminés, on suppose que la solution particulière est de la forme :

$$x_p(t) = X \cos(\Omega t - \theta) \quad (2.7)$$

La solution particulière devienne :

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega\omega)^2}} \cos\left(\Omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\Omega\omega}{\omega - \Omega^2}\right)\right) \quad (2.8)$$

La solution totale est à nouveau la somme de la solution particulière et de la solution homogène obtenue. Pour le cas sous amorti ($0 < \zeta < 1$) cela devient :

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) + X \cos(\Omega t - \theta) \quad (2.9)$$

Les constantes sont données par :

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_d \cdot (x_0 - X \cdot \cos(\theta))}{\dot{x}_0 + (x_0 - X \cdot \cos(\theta)) \cdot \zeta \cdot \omega - \Omega \cdot X \cdot \sin(\theta)} \quad (2.10)$$

$$A = \frac{x_0 - X \cdot \cos(\theta)}{\sin(\phi)} \quad (2.11)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(2 \cdot \zeta \cdot \Omega \cdot \omega)}{\omega - \Omega} \quad (2.12)$$

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \Omega \cdot \omega)^2}} \quad (2.13)$$

Notez que pour de grandes valeurs de t , le premier terme, ou solution homogène, s'approche de zéro et la solution totale se rapproche de la solution particulière. Donc $x_p(t)$ est appelé la réponse en régime permanent et le premier terme est appelé la réponse transitoire. [9]

II.2 Excitation périodique

Les vibrations parfaitement sinusoïdales sont rarement rencontrées dans l'environnement réel. Dans certains cas, cependant, le signal peut être traité de la même manière qu'une sinusoïde afin de faciliter les analyses. De telles vibrations sont observées, par exemple, dans les machines tournantes, et dans les pièces tournantes mal équilibrées (arbres déséquilibrés, défauts de coaxialité dans les réducteurs avec les arbres moteurs, moteur électrique, engrenages).

Une fonction périodique est toute fonction pour laquelle il existe un temps fixe T , appelé période, tel que $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t + T)$ pour toutes les valeurs de t . Toute fonction harmonique telle que la fonction sinus et cosinus est périodique. L'inverse, cependant, n'est pas vrai, c'est-à-dire que toute fonction périodique n'est pas nécessairement une fonction harmonique, pour cela et selon une théorie développée par Fourier, toute fonction périodique $\mathcal{F}(t)$ de période T , peut être représentée par une série infinie de la forme :

$$\mathcal{F}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_T t + b_n \sin n\Omega_T t) \quad (2.14)$$

Où $\Omega_T = \frac{2\pi}{T}$ Et où les coefficients a_0 ; a_n et b_n pour une fonction périodique donnée $\mathcal{F}(t)$ sont calculés par les formules :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) . dt \quad (2.15)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \cos n\Omega_T t . dt \quad (2.16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \sin n\Omega_T t . dt \quad (2.17)$$

La série de Fourier est utile et relativement simple à utiliser en raison de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques utilisées dans la série :

$$\int_0^T \sin n\Omega_T t . \sin m\Omega_T t . dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\int_0^T \cos n\Omega_T t . \cos m\Omega_T t . dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases} \quad (2.19)$$

m et n sont des entiers.

Puisqu'une force périodique générale peut être représentée comme une somme de sinus et de cosinus, et puisque le système considéré est linéaire, la réponse d'un système à un seul degré de liberté est calculée en calculant la réponse aux termes individuels de la série de Fourier et en additionnant les résultats. Ainsi, la solution particulière $x_p(t)$ de

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \mathcal{F}(t) \quad (2.20)$$

Où $F(t)$ est périodique peut être écrite comme suit

$$x_p(t) = x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cn}(t) + x_{sn}(t)] \quad (2.21)$$

Ici, la solution particulière $x_1(t)$ satisfait à l'équation

$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = \frac{a_0}{2} \quad (2.22)$$

La solution particulière $x_{cn}(t)$ satisfait l'équation

$$m\ddot{x}_{cn}(t) + c\dot{x}_{cn}(t) + kx_{cn}(t) = a_n \cos n\Omega_T t \quad (2.23)$$

La solution particulière $x_{sn}(t)$ satisfait l'équation

$$m\ddot{x}_{sn}(t) + c\dot{x}_{sn}(t) + kx_{sn}(t) = b_n \sin n\Omega_T t \quad (2.24)$$

La solution particulière $x_1(t)$ est celle de la réponse à échelon

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2k} \quad \text{Avec } F_0 = \frac{a_0}{2}$$

La solution particulière de x_{cn} est

$$x_{cn}(t) = \frac{a_n/m}{\left[\left[\omega^2 - (n\Omega_T)^2 \right]^2 + (2\xi\omega n\Omega_T)^2 \right]^{1/2}} \cos(n\Omega_T t - \theta_n) \quad (2.25)$$

Avec

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega\Omega_T}{\omega^2 - (n\omega)^2} \quad (2.26)$$

La solution particulière $x_{sn}(t)$ est

$$x_{sn}(t) = \frac{b_n/m}{[[\omega^2 - (n\Omega_T)^2]^2 + (2\xi\omega n\Omega_T)^2]^{1/2}} \sin(n\Omega_T t - \theta_n) \quad (2.27)$$

La solution totale $x(t)$ est donnée par la somme de ces solutions particulières et de la solution homogène.

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) + \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cn}(t) + x_{sn}(t)] \quad (2.28)$$

Le cas plus fréquent des vibrations périodiques décomposables en série de Fourier se réduit à un problème de vibrations sinusoïdales, en étudiant l'effet de chaque composante harmonique et en appliquant le théorème de superposition (si les hypothèses nécessaires, notamment celle de linéarité, sont respectées). On peut les observer sur des machines générant des impacts périodiques (presses), dans des moteurs à combustion interne à plusieurs cylindres, etc.

Les vibrations quasi-périodiques peuvent être étudiées de la même manière, composant par composant, dans la mesure où chaque composant peut être caractérisé. [9]

Donc pour certaines formes de $\mathcal{F}(t)$, la méthode des coefficients indéterminés, peut être utilisée pour déterminer la solution particulière. La solution homogène est ajoutée à la solution particulière, ce qui donne une solution générale impliquant deux constantes d'intégration. Les conditions initiales sont appliquées pour évaluer les constantes d'intégration. Si l'amortissement est présent, la solution homogène s'éteint, laissant la solution particulière comme une solution de régime permanent. La méthode des coefficients indéterminés est la plus adaptée aux excitations harmoniques, polynomiales, ou exponentielles mais cette méthode n'est pas utile pour les excitations transitoires ou non-périodique. [10]

II.3 Excitation transitoire

Dans de nombreux cas, lorsqu'un système est soumis à une excitation non périodique, la réponse en vibration libre interagit avec la réponse forcée et est importante pendant toute la durée du mouvement du système. Tel est le cas lorsqu'un système est soumis à une impulsion de durée finie où la période de vibration libre est supérieure à la durée de l'impulsion.

Les conditions initiales et la solution homogène ont un effet important sur le mouvement transitoire à court terme des systèmes vibrants. De nombreuses excitations sont de courte durée. Pour les réponses de courte durée, la réponse maximale peut se produire après la fin de l'excitation. Il est

donc nécessaire de développer une méthode de solution qui détermine la réponse d'un système pour tout le temps, même après que l'excitation ait disparu. En outre, de nombreuses excitations changent de forme à des moments discrets. Pour ces excitations, une méthode de solution dans laquelle une forme mathématique unifiée de la réponse est déterminée est très pratique.

La solution est obtenue en utilisant l'intégrale de convolution, les transformées de Laplace ou des méthodes numériques.

La méthode de l'intégrale de convolution et la méthode numérique seront discutées dans le prochain sous-chapitre concernant les excitations générales.

II.4 Excitation élémentaire

Dans la résolution d'une équation différentielle par transformation de Laplace, la première étape consiste à transformer l'équation différentielle, dans la variable t , en une équation algébrique dans la variable complexe s . Ensuite, l'équation algébrique est résolue, et la solution de l'équation différentielle est déterminée par une transformation inverse de la solution de l'équation algébrique.

La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction connue $\mathcal{F}(t)$ est abrégée comme suit :

$$F(s) = \mathcal{L}[\mathcal{F}(t)] \quad (2.29)$$

Le processus de la transformation inverse de Laplace est symbolisé par :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{F}(t) \quad (2.30)$$

Ces processus sont facilités par l'utilisation de tables de transformées de Laplace.

Les transformées des fonctions explicites peuvent être obtenues en effectuant l'intégration indiquée par la définition de la transformation de Laplace.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \mathcal{F}(t) \cdot dt \quad (2.31)$$

L'équation différentielle d'un système amorti à un seul degré de liberté peut être écrite comme suit:

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} + \frac{2\zeta\dot{x}}{\omega} + x = \mathcal{F}(t) \quad (2.32)$$

En appliquant les transformations du tableau (Voir Annexe : A), on obtient l'équation algébrique suivante :

$$\frac{1}{\omega_n^2} [s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + \frac{2\zeta}{\omega_n} [sX(s) - x(0)] + X(s) = F(s) \quad (2.33)$$

Où :

$X(s)$ = La transformation de la réponse inconnue $x(t)$, parfois appelée la transformée de la réponse.

$[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)]$ = La transformée de la dérivée seconde de $x(t)$

$x(0), \dot{x}(0)$ = les valeurs initiales connues de x, \dot{x}

$F(s)$ = la transformée de la fonction d'excitation connue $\mathcal{F}(t)$

La solution est donnée par :

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega).x(0) + \dot{x}(0) + \omega^2.F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (2.34)$$

Afin de déterminer la fonction de réponse $x(t)$, qui est la solution de l'équation différentielle, une transformation inverse est effectuée sur l'équation précédente

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (2.35)$$

II.4.1 Excitation à échelon rectangulaire

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t) = f_c & t \geq 0 \\ \mathcal{F}(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Supposons que l'amortissement soit inférieur au seuil critique ($\zeta < 1$), que le système démarre au repos ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$), et que le système soit sollicité par l'excitation à échelon rectangulaire (voir figure II-2), La transformée de l'excitation est donnée par

$$F(s) = \mathcal{L}[\mathcal{F}(t)] = \mathcal{L}[F_c] = F_c \cdot \frac{1}{s} \quad (2.37)$$

Comme précédemment, la solution dans le domaine de Laplace est donnée par

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega).x(0) + \dot{x}(0) + \omega^2.F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (2.38)$$

Remplaçant $F(s), x(0)$ et $\dot{x}(0)$ dans $X(s)$

Où

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\
&= \mathcal{F}_c \cdot \omega^2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s[s + \omega(\zeta - j1 - \zeta 2)] [s + \omega(\zeta + j1 - \zeta 2)]} \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Avec

$$j = \sqrt{-1}$$

Pour déterminer la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, il peut être nécessaire de développer $X(s)$ en fractions partielles. Cependant, dans cet exemple particulier, la transformée est disponible

$$x(t) = \mathcal{F}_c \cdot \omega^2 \left[\frac{a}{ab} + \frac{be^{-at} - a^{-bt}}{ab(a-b)} \right] \tag{2.40}$$

Où

$$\begin{aligned}
a &= \omega(\zeta - j1 - \zeta 2) \\
b &= \omega(\zeta + j1 - \zeta 2)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

En utilisant les relations :

$$\begin{aligned}
\cos z &= (1/2)(e^{jz} + e^{-jz}) \\
\sin z &= (1/2)(e^{jz} - e^{-jz})
\end{aligned} \tag{2.42}$$

La solution dans le domaine temporel peut être exprimée en termes de fonctions cosinus et sinus

$$x(t) = \mathcal{F}_c \left[1 - e^{-\zeta \omega t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} \sin \omega_d t \right) \right] \tag{2.43}$$

Où

Si l'amortissement est négligeable, $\zeta \rightarrow 0$ l'équation devient

$$x(t) = \mathcal{F}_c(1 - \cos \omega t) \tag{2.44}$$

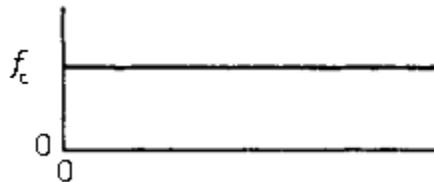


Figure II-2 : Excitation par échelon rectangulaire

II.4.2 Excitation par impulsion rectangulaire

Pour un système à un seul degré de liberté non amorti, la fonction d'excitation par impulsion rectangulaire (voir figure II-3) est donnée par

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_p & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{pour } \tau \leq t \end{cases} \quad (2.45)$$

Supposons que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{1}{\omega^2} \ddot{x} + x = \mathcal{F}(t) \quad (2.46)$$

Après l'application des transformées de Laplace l'équation devient

$$\frac{1}{\omega^2} s^2 X(s) - \frac{1}{\omega^2} s x(0) - \frac{1}{\omega^2} \dot{x}(0) + X(s) = F(s) \quad (2.47)$$

Pour $0 \leq t \leq \tau$ la solution est donnée par

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega^2 \mathcal{F}_p (1/s)}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (2.48)$$

$$x(t) = \mathcal{F}_p (1 - \cos \omega t) \quad (2.49)$$

Pour $\tau \leq t$, la transformée de l'excitation est obtenue en appliquant la transformée à fonction retardée

$$F(s) = \mathcal{L}[\mathcal{F}(t)] = \mathcal{F}_p \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s} \right) \quad (2.50)$$

Il s'agit de la transformée d'une excitation constituée d'un pas rectangulaire de hauteur $-\mathcal{F}_p$ débutant au temps $t = \tau$, superposé au pas rectangulaire de hauteur $+\mathcal{F}_p$ débutant au temps $t = 0$.

La solution est donnée par

$$x(t) = \mathcal{F}_p \omega^2 \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s\tau}}{s(s^2 + \omega^2)} \right] \right\} \quad (2.51)$$

$$x(t) = 2\mathcal{F}_p \cdot \sin\frac{\pi t}{T} \cdot \sin\omega\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2.52)$$

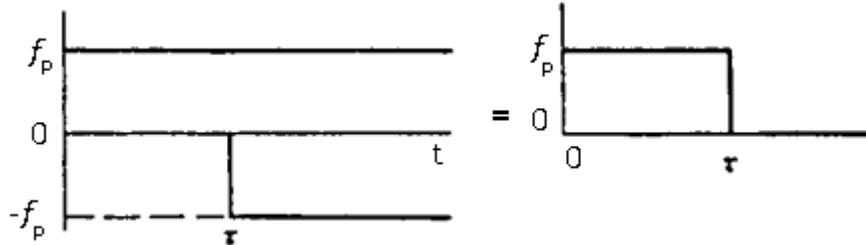


Figure II-3 : Excitation par impulsion rectangulaire

II.4.3 Excitation à échelon avec front à pente constante

Pour l'excitation à échelon avec front à pente constante (voir figure II-4) la fonction d'excitation est exprimée comme suit :

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_c \cdot \frac{t}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ \mathcal{F}_c & \tau \leq t \end{cases} \quad (2.53)$$

Supposons que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$$

Les transformations pour le premier et le second intervalle de temps sont les suivantes

$$\mathcal{L}[\mathcal{F}(t)] = \begin{cases} \mathcal{F}_c \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2} & \begin{cases} 0 \leq t \leq \tau \\ \tau \leq t \end{cases} \\ \mathcal{F}_c \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s\tau}}{s^2}\right) & \end{cases} \quad (2.54)$$

La transformée du deuxième intervalle est la transformée d'une excitation à pente constante négative, $-\frac{\mathcal{F}_c(t-\tau)}{\tau}$, commençant à $t = \tau$, superposée à la transformée de l'excitation à pente constante positive, $\frac{\mathcal{F}_c \cdot t}{\tau}$, commençant à $t = 0$.

La solution s'écrit :

$$x(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_c \frac{\omega^2}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} \right] & 0 \leq t \leq \tau \\ \mathcal{F}_c \frac{\omega^2}{\tau} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s\tau}}{s^2(s^2 + \omega^2)} \right] \right\} & \tau \leq t \end{cases} \quad (2.55)$$

La solution devient :

$$x(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_c \frac{\omega^2}{\tau} \cdot \frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t) & 0 \leq t \leq \tau \\ \mathcal{F}_c \frac{\omega^2}{\tau} \left\{ \frac{1}{\omega^3} (\omega \cdot t - \sin \omega t) - \frac{1}{\omega^3} [\omega(t - \tau) - \sin \omega(t - \tau)] \right\} & \tau \leq t \end{cases} \quad (2.56)$$

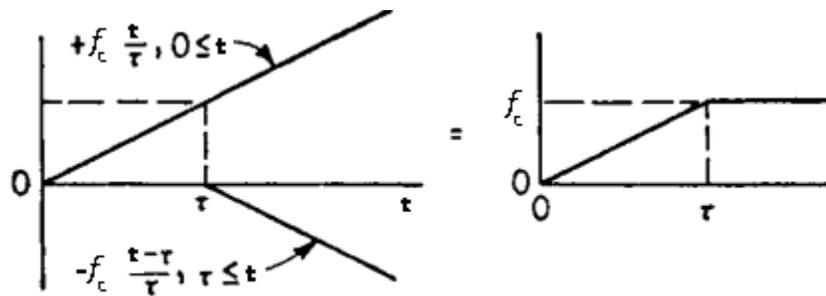


Figure II-4 : Fonction échelon avec front à pente constante

I.1.1 Excitation générale

La méthode principale de résolution présentée ci-dessous est l'utilisation de l'intégrale de convolution. L'intégrale de convolution est dérivée en utilisant le principe de l'impulsion et de la quantité de mouvement et de la superposition linéaire. Elle peut aussi être dérivée par application de la méthode de variation des paramètres. L'intégrale de convolution donne la solution de forme fermée la plus générale de l'équation

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \mathcal{F}(t) \quad (2.57)$$

Les conditions initiales sont appliquées dans la dérivation de l'intégrale et n'ont pas besoin d'être appliquées lors de chaque application. L'intégrale de convolution peut être utilisée pour générer une réponse mathématique unifiée pour des excitations dont la forme change à des instants discrets. L'intégrale est facile à appliquer puisqu'elle ne nécessite que l'évaluation.

Il existe certaines excitations dans lesquelles une solution de forme fermée n'existe pas. Dans ces cas, l'intégrale de convolution n'a pas d'évaluation de forme fermée et l'application de la méthode

de transformée de Laplace ne conduit qu'à l'intégrale de convolution. Par ailleurs, des situations existent où l'excitation n'est pas connue explicitement à toutes les valeurs de temps. [10]

La procédure consiste à diviser la force d'excitation en impulsions de surface infinitésimale, à calculer les réponses à ces impulsions individuelles et à additionner les réponses individuelles pour calculer la réponse totale en utilisant le concept de superposition. [9]

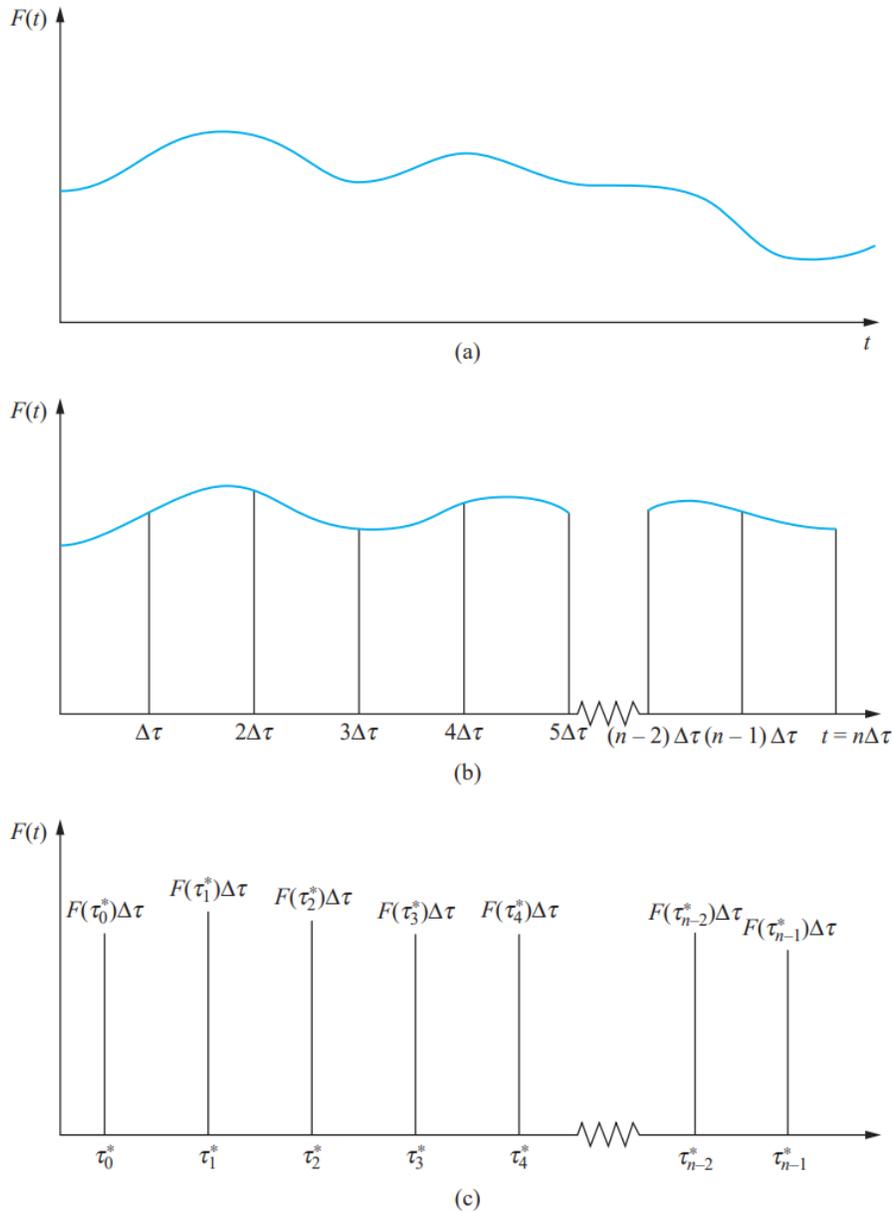


Figure II-5 : (a) Excitation arbitraire appliquée à un système à un DDL.
 (b) L'intervalle de 0 à t est divisé en n intervalles égaux de durée $\Delta\tau = t/n$.
 (c) L'effet de la force appliquée pendant le k ème intervalle est approximé par l'effet au temps t dû à une impulsion d'une amplitude

Considérons un système à un degré de liberté soumis à une force externe arbitraire, comme illustré à la figure (II-6 (a)). L'échelle de temps est écrite sous la forme τ , car t est réservé à l'instant où la réponse doit être calculée. L'intervalle de 0 à t est divisé en n sous-intervalles, chacun d'une durée

de $\Delta\tau$ comme l'illustre la figure (II-6 (b)). Un effet de la force sur l'intervalle de $k\Delta\tau$ à $(k + 1)\Delta\tau$ est de donner une impulsion avec une magnitude de

$$I_k^n = \int_{k\Delta\tau}^{(k+1)\Delta\tau} \mathcal{F}(\tau) d\tau \quad (2.58)$$

Au système, comme le montre la figure (II-6 (c)). Le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral implique qu'il existe un τ_k^* tel que $k\Delta\tau \leq \tau_k^* \leq (k + 1)\Delta\tau$ de telle sorte que

$$I_k^n = \mathcal{F}(\tau_k^*)\Delta\tau \quad (2.59)$$

Si $\Delta\tau$ est faible, l'effet de la force appliquée entre $k\Delta\tau$ et $(k + 1)\Delta\tau$ peut être approximé par une impulsion de magnitude I_k^n appliqué à $\tau_k = (k + 1/2)\Delta\tau$. Ainsi, comme illustré à la figure (II-6 (b)), l'excitation $\mathcal{F}(t)$ appliquée entre 0 et t est approximée par la séquence d'impulsions $I_k^n, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

D'après l'équation :

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin \omega_d t = I h(t) \quad (2.60)$$

Où

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin \omega_d t \quad (2.61)$$

Est la réponse due à une impulsion unitaire appliquée à $t = 0$.

Et l'équation :

$$x(t) = h(t - t_0)u(t - t_0) \quad (2.62)$$

Où $u(t - t_0)$ est la fonction d'échelon unitaire de l'argument $t - t_0$, qui prend une valeur de 0 pour $t < t_0$ et une valeur de 1 pour $t > t_0$. La présence de la fonction d'échelon unitaire dans l'équation garantit que la réponse ne se produit pas tant que l'impulsion n'a pas été appliquée. En fait la réponse pour une impulsion appliquée à t_0 doit être multipliée par $u(t)$, mais est mesurée à partir de 0.

La réponse du système au temps t due à une impulsion d'une magnitude de I_k^n appliquée au temps τ_k est

$$x_k^n(t) = I_k^n h(t - \tau_k) u(t - \tau_k) \quad (2.63)$$

La force $\mathcal{F}(\tau)$ de 0 à t est approximée par

$$\mathcal{F}(\tau) = \sum_{k=1}^n I_k^n \delta(\tau - \tau_k) \quad (2.64)$$

Puisque l'équation de mouvement est linéaire et a $\mathcal{F}(\tau)$ sur le côté droit, le principe de superposition linéaire est appliqué pour déterminer la réponse au temps t comme :

$$x^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k^*) h(t - \tau_k) u(t - \tau_k) \Delta\tau \quad (2.65)$$

L'approximation de l'équation de $\mathcal{F}(\tau)$ devienne exacte dans la limite $n \rightarrow \infty$ ou $\Delta\tau \rightarrow 0$.

$$x(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau \rightarrow 0}} x^n(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}(\tau_k^*) h(t - \tau_k) u(t - \tau_k) \Delta\tau \quad (2.66)$$

Dans la limite $n \rightarrow \infty$, τ_k et τ_k^* devient une variable continue τ . De plus, dans la limite, la somme devient une somme de Riemann et

$$x(t) = \int_0^t \mathcal{F}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.67)$$

Cette intégrale de l'équation $x(t)$ est appelée intégrale de convolution. Il peut être utilisé pour déterminer la réponse d'un système à un degré de liberté initialement au repos en équilibre sous toute forme d'excitation. La solution intégrale de convolution est valable pour tous les systèmes linéaires où $h(t)$ est considérée comme la réponse du système due à une unité impulsion à $t = 0$. C'est la solution de l'équation différentielle de l'équation (2.57) qui est soumise à $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ [10].

La réponse d'un système avec une vitesse initiale non nulle est obtenue en ajoutant à l'intégrale de convolution la réponse du système due à une impulsion unitaire $t = 0$ nécessaire pour provoquer la vitesse initiale.

La réponse d'un système qui n'est pas dans sa position d'équilibre à $t = 0$ est obtenue en définissant une nouvelle variable indépendante comme $y = x - x(0)$. L'équation différentielle régissant $y(t)$ est la suivante :

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2y = -\frac{k}{m}x(0) + \frac{\mathcal{F}(t)}{m} \quad (2.68)$$

L'intégrale de convolution est utilisée pour obtenir

$$y(t) = \int_0^t [-kx(0) + \mathcal{F}(\tau)]h(t - \tau)d\tau \quad (2.69)$$

La solution générale qui en résulte pour un système dont les vibrations libres sont sous-amorties ($\Delta < 0 \Rightarrow \zeta < \omega$) est

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0)e^{-\zeta\omega t} \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega x(0)}{\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin \omega_d t \\ & + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t \mathcal{F}(\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.70)$$

II.4.4 Évaluation numérique de l'intégrale de convolution

De nombreuses techniques d'intégration numérique sont disponibles pour l'évaluation des intégrales. La plupart des techniques d'intégration numérique utilisent des fonctions définies par parties pour interpoler l'intégrale. Une intégration en forme fermée de l'intégrale interpolé est effectuée. La méthode décrite ici utilise une interpolation à partir de laquelle une approximation de l'intégrale de convolution est obtenue. La discrétisation d'un intervalle de temps et les interpolations possibles à $\mathcal{F}(t)$ sont représentées sur la figure (II-6).

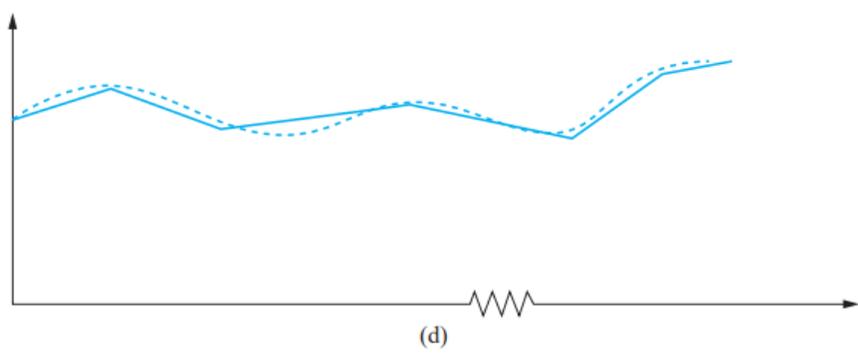
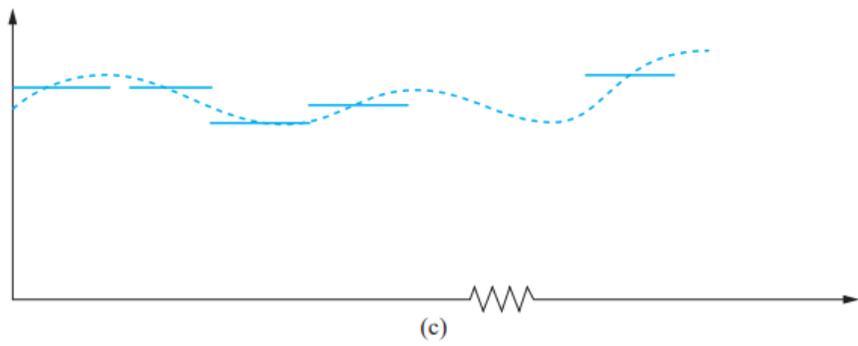
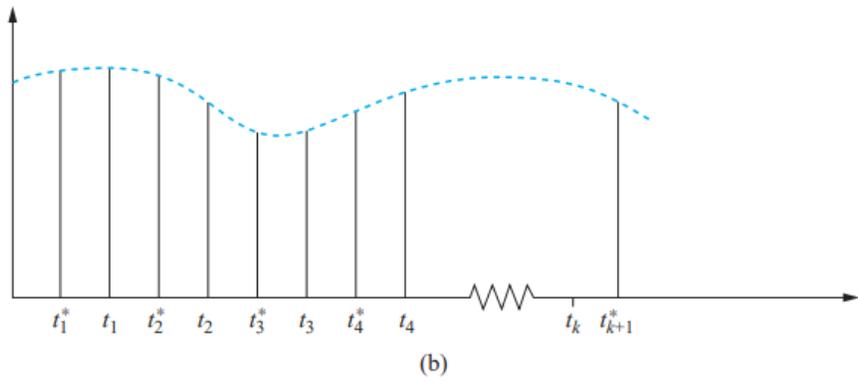
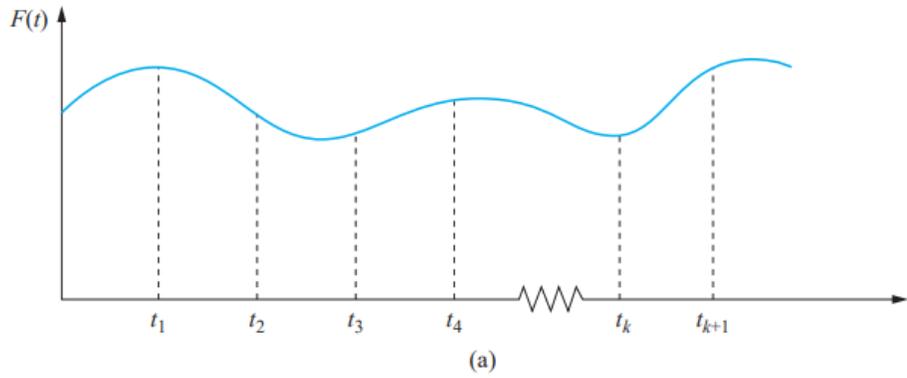


Figure II-6 : (a) Discrétisation du temps pour l'intégration numérique de l'intégrale de convolution.

(b) Interpolation de $\mathcal{F}(t)$ par une série d'impulsions.

(c) Interpolation de $\mathcal{F}(t)$ par des constantes par parties.

(d) Interpolation linéaire par parties pour $\mathcal{F}(t)$.

Soit t_1, t_2, \dots des valeurs de temps à partir desquelles une solution approximative doit être obtenue. Soit $\mathcal{F}_1(t), \mathcal{F}_2(t), \dots$ les fonctions d'interpolation telles que $\mathcal{F}_k(t)$ interpole $\mathcal{F}_{eq}(t)$ sur l'intervalle $t_{k-1} < t < t_k$. Soit x_k l'approximation numérique pour $x(t_k)$. Définir également

$$\Delta j = t_j - t_{j-1} \quad (2.71)$$

L'intégrale de convolution est utilisée pour obtenir la réponse d'un système à un degré de liberté sous-amorti comme

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0)e^{-\zeta\omega t} \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega x(0)}{\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin \omega_d t \\ & + \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.72)$$

On peut réécrire cela en utilisant l'identité trigonométrique pour le sinus de la différence des angles

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-\zeta\omega t} \left[x(0) \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega x(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \\ & + \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \left[\sin \omega_d t \int_0^t \mathcal{F}(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \cos \omega_d \tau \right. \\ & \left. - \cos \omega_d t \int_0^t \mathcal{F}(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \sin \omega_d \tau d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Définir

$$G_{1j} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{F}(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \cos \omega_d \tau d\tau \quad (2.74)$$

Et

$$G_{2j} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{F}(\tau) e^{\zeta\omega\tau} \sin \omega_d \tau d\tau \quad (2.75)$$

On peut dire

$$\begin{aligned}
x_k = & e^{-\zeta\omega t_k} \left[x(0)\cos \omega_d t_k + \frac{\zeta\omega x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t_k \right] \\
& + \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t_k} \left[\sin \omega_d t_k \sum_{j=1}^k G_{1j} - \cos \omega_d t_k \sum_{j=1}^k G_{2j} \right] \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Cette équation est utilisée pour calculer des approximations de la solution à des temps discrets. Tout d'abord, considérons le cas où $\mathcal{F}_{eq}(t)$ est interpolé par une série d'impulsions, comme illustré dans la figure (II-7 (b)). Pendant l'intervalle entre t_{j-1} et t_j , l'application de $\mathcal{F}_{eq}(t)$ se traduit par une impulsion d'amplitude

$$I_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{F}(\tau) d\tau \quad (2.77)$$

Le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral implique qu'il existe un t_j^* , $t_{j-1} < t_j^* < t_j$, tel que

$$I_j = \mathcal{F}(t_j^*)\Delta_j \quad (2.78)$$

Pour des raisons d'interpolation, approximer t_j^* par

$$t_j^* \approx \frac{t_j + t_{j-1}}{2} \quad (2.79)$$

Ainsi, sur l'intervalle $t_{j-1} < t < t_j$, $\mathcal{F}(t)$ est interpolé par une impulsion de magnitude I_j appliquée au milieu de l'intervalle. Avec ce choix d'interpolation, les équations G_{1j} et G_{2j} sont évaluées comme

$$G_{1j} = \mathcal{F}_{eq}(t_j^*)\Delta_j e^{\zeta\omega t_j} \cos \omega_d t_j^* \quad (2.80)$$

$$G_{2j} = \mathcal{F}_{eq}(t_j^*)\Delta_j e^{\zeta\omega t_j} \sin \omega_d t_j^*$$

Il est également possible d'interpoler $\mathcal{F}_{eq}(t)$ avec des constantes par parties. Sur l'intervalle de t_{j-1} à t_j , l'interpolation pour $\mathcal{F}_{eq}(t)$ suppose la valeur de $\mathcal{F}_{eq}(t)$ au point médian de l'intervalle, comme illustré à la figure (II-7(c)) Appelons la valeur de l'interpolation f_j . Alors

$$G_{1j} = f_j C_j \quad (2.81)$$

$$G_{2j} = f_j D_j$$

Où

$$C_j = \frac{1 - \zeta^2}{\omega_d} \left[e^{\zeta \omega t_j} \left(\sin \omega_d t_j + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \cos \omega_d t_j \right) - e^{\zeta \omega t_{j-1}} \left(\sin \omega_d t_{j-1} + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \cos \omega_d t_{j-1} \right) \right] \quad (2.82)$$

$$D_j = \frac{1 - \zeta^2}{\omega_d} \left[e^{\zeta \omega t_j} \left(-\cos \omega_d t_j + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t_j \right) - e^{\zeta \omega t_{j-1}} \left(-\cos \omega_d t_{j-1} + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t_{j-1} \right) \right] \quad (2.83)$$

Enfin, considérons le cas où $\mathcal{F}(t)$ est interpolé linéairement entre t_{j-1} et t_j , comme illustré à la figure (II-7(d)). Alors si, $g_j = f(t_j)$

$$G_{1j} = \frac{1}{\Delta_j} [(g_j - g_{j-1})A_j + (g_{j-1}t_j - g_j t_{j-1})C_j] \quad (2.84)$$

$$G_{2j} = \frac{1}{\Delta_j} [(g_j - g_{j-1})B_j + (g_{j-1}t_j - g_j t_{j-1})D_j] \quad (2.85)$$

Où

$$A_j = \frac{1 - \zeta^2}{\omega_d} \left[t_j e^{\zeta \omega t_j} \left(\sin \omega_d t_j + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \cos \omega_d t_j \right) - t_{j-1} e^{\zeta \omega t_{j-1}} \left(\sin \omega_d t_{j-1} + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} \cos \omega_d t_{j-1} \right) - \left(D_j + \frac{\zeta \omega}{\omega_d} C_j \right) \right] \quad (2.86)$$

$$B_j = \frac{1 - \zeta^2}{\omega_d} \left[t_j e^{\zeta \omega t_j} \left(\frac{\zeta \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t_j - \cos \omega_d t_j \right) - t_{j-1} e^{\zeta \omega t_{j-1}} \left(\frac{\zeta \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t_{j-1} - \cos \omega_d t_{j-1} \right) + \left(C_j - \frac{\zeta \omega}{\omega_d} D_j \right) \right]$$

D'autres choix de fonctions d'interpolation pour $\mathcal{F}_{\text{eq}}(t)$ sont possibles. Des polynômes d'ordre supérieur par parties peuvent être utilisés, ainsi que des interpolations qui nécessitent plus de raffinement à chaque t_j , comme les « splines ». Toute forme de fonction d'interpolation peut être choisie à condition que les équations de G_{1j} et G_{2j} aient des évaluations de forme fermée. Cependant, plus la fonction d'interpolation est compliquée, plus l'algèbre est impliquée dans l'évaluation de G_{1j} et G_{2j} .

L'évaluation numérique de l'intégrale de convolution nécessite également plus de calculs pour des fonctions d'interpolation plus compliquées.

Si $\mathcal{F}_{\text{eq}}(t)$ est connue empiriquement, n'importe laquelle des méthodes présentées peut être utilisée pour évaluer l'intégrale de convolution. Si des impulsions par parties ou des constantes par parties sont utilisées, les instants où \mathcal{F}_{eq} est connu sont pris comme points médians des intervalles. Si des interpolations linéaires par parties sont utilisées, les instants où \mathcal{F}_{eq} est connu sont pris comme les t_j .

L'analyse des erreurs des méthodes précédentes dépasse le cadre de ce texte. Une meilleure précision de la réponse est bien sûr obtenue avec une meilleure précision de l'interpolation. L'analyse d'erreur implique généralement de comparer l'interpolation avec un développement en série de Taylor pour estimer l'erreur dans l'interpolation.

L'erreur est généralement exprimée comme étant de l'ordre d'une certaine puissance de Δ_j . Des limites sur l'erreur lors de l'utilisation de l'intégrale de convolution sont obtenues. L'intégration a tendance à raffiner les erreurs.

La détermination de la réponse à l'aide de ces méthodes nécessite l'évaluation de l'intégrale de convolution à des valeurs de temps discrètes. Puisque des erreurs sont introduites dans l'évaluation de G_{1j} et G_{2j} , plus ces termes sont utilisés dans l'évaluation, plus l'erreur est grande. Par conséquent, l'erreur d'approximation augmente avec l'augmentation de t . La réduction de l'erreur peut être obtenue en utilisant des intervalles de temps plus petits, si possible, ou en utilisant des interpolations plus précises. [10]

CHAPITRE III

**SYSTEME A N DEGRES DE
LIBERTE**

Le nombre de degrés de liberté d'un système est déterminé par le nombre de pièces mobiles et le nombre de directions dans lesquelles chaque pièce peut se déplacer. Plus d'un degré de liberté signifie plus d'une fréquence naturelle, ce qui augmente considérablement les possibilités de résonance. [9]

L'analyse d'un système à n degrés de liberté (n DDL) nécessite n équations différentielles indépendantes. L'utilisation de la méthode énergétique est la plus avantageuse. Les équations de Lagrange, qui sont le résultat d'une méthode énergétique, sont spécifiées et utilisées pour dériver les équations différentielles régissant les vibrations des systèmes à n DDL. L'avantage d'utiliser les équations de Lagrange est que, lorsque les équations différentielles sont linéaires et doivent être exprimées sous forme de matrice, la matrice de masse et la matrice de rigidité sont symétriques. Cela impose des conditions d'orthogonalité appropriées sur les formes de mode et conduit à la dérivation de la méthode d'analyse modale pour déterminer la réponse forcée. [10]

Lorsque l'amortissement visqueux est présent, l'application des équations de Lagrange conduit également à une matrice d'amortissement symétrique, ce qui est crucial pour développer la réponse forcée aux systèmes avec amortissement visqueux. Les équations linéaires peuvent être exprimées sous une forme matricielle similaire à celles présentées dans le chapitre précédent

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (3.1)$$

III.1 Analyse modale

La méthode de l'analyse modale utilise les coordonnées principales pour découpler les équations différentielles, mais il faut d'abord connaître comment obtenir les fréquences propres et les valeurs propres correspondantes, faire définir les coordonnées généralisées, les coordonnées principales et le principe d'orthogonalité.

III.1.1 Analyse des vibrations libres

Pour obtenir les fréquences naturelles et les vecteurs propres, Considérons la solution de vibration libre des équations du mouvement d'un système à deux degrés de liberté.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\Omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où X_1 et X_2 sont des constantes, qui désignent les amplitudes maximales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et ϕ est l'angle de déphasage. La substitution de ces expressions dans les équations de mouvement conduit à un déterminant caractéristique

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix}$$

Qui devrait être nul pour la cohérence. Où

$$(m_1 m_2) \omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\} \omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \quad (3.3)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de fréquence ou de caractéristique. La solution de cette équation donne les fréquences ou les valeurs caractéristiques du système.

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2} \right\} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

Les valeurs de X_1 et X_2 dépendent des fréquences naturelles ω_1 et ω_2 . En désignant les valeurs de X_1 et X_2 correspondant à ω_1 comme $X_1^{(1)}$ et $X_2^{(1)}$ et celles correspondant à ω_2 comme $X_1^{(2)}$ et $X_2^{(2)}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_1^2 + (k_2 + k_3)} \\ r_2 &= \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1 \omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les modes normaux de vibration correspondant à ω_1^2 et ω_2^2 peuvent être exprimés, respectivement, comme

$$\begin{aligned} \{X^{(1)}\} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \{X^{(2)}\} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les vecteurs $\{X^{(1)}\}$ et $\{X^{(2)}\}$, qui désignent les modes normaux de vibration, sont connus sous le nom de vecteurs modaux du système.

III.1.2 Couplage de coordonnées et les coordonnées principales

Le terme couplage est utilisé dans l'analyse des vibrations pour indiquer un lien entre les équations de mouvement. En général, un système de vibration à n degré de liberté nécessite n coordonnées indépendantes pour décrire complètement sa configuration. Souvent, il est tout à fait possible de trouver un autre ensemble de n coordonnées pour décrire complètement la même configuration du système. Chacun de ces ensembles de n coordonnées est appelé les coordonnées généralisées.

Dans les équations dynamiques du mouvement, si la matrice $[M]$ de masse n'est pas diagonale, alors la masse ou le couplage dynamique existe et si la matrice $[K]$ de rigidité est non diagonale, alors la rigidité ou le couplage statique existe. En général, il est possible de trouver un système de coordonnées qui n'a ni masse ni couplage dynamique, ni rigidité ou couplage statique. Ensuite, les équations sont découplées en deux équations indépendantes et peuvent être résolues indépendamment de l'autre. Ces coordonnées sont appelées coordonnées principales ou coordonnées normales. [4]

III.1.3 Principe d'orthogonalité

Si ω_1 et ω_2 sont deux valeurs propres (fréquences naturelles) et $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ les vecteurs propres correspondants (modes naturels), ils doivent satisfaire

$$\begin{aligned} \omega_1^2 [M]X^{(1)} &= [K]X^{(1)} \\ \omega_2^2 [M]X^{(2)} &= [K]X^{(2)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

On peut alors montrer que pour $\omega_1 \neq \omega_2$

$$[X^{(2)}]^T [M]X^{(1)} = 0 \quad (3.8)$$

Cette propriété est très utile, comme par exemple, pour vérifier la précision du calcul des modes normaux par son application. [4]

III.1.4 Système excité amorti

L'équation différentielle pour le cas non-amorti est de sorte

$$[M](\ddot{x}) + [C](\dot{x}) + [K](x) = [F] \quad (3.9)$$

L'amortissement dans le système structural est principalement hystérique et difficile à quantifier, pour cela l'amortissement proportionnel est souvent supposé. On dit qu'un système à plusieurs degrés de liberté a un amortissement proportionnel si la matrice d'amortissement visqueux est une combinaison linéaire de la matrice masse et de rigidité.

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M] \quad (3.10)$$

$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ Sont les fréquences naturelles du système qui sont obtenues et sont la solution des valeurs propres de $[M]^{-1}[K]$, et les modes sont les valeurs propres correspondants.

Les modes sont normalisés en exigeant que le produit scalaire de l'énergie cinétique d'un mode avec lui-même soit égal à un.

Soit P la matrice modale du système ou $P = [X_1 X_2 \dots X_n]$ les colonnes sont les modes normalisés.

La réponse à chaque instant est donnée par $x_i(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) X_i$ (3.11)

Ou $p_i(t)$ représentent les coordonnées principales du système. L'équation (3.11) est équivalente à une transformation linéaire entre les coordonnées généralisées est les coordonnées principales

$$x_1(t) = X_1 p_1(t) \quad (3.12)$$

Si le système est amorti proportionnellement, la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire de la matrice masse et rigidité, la substitution de l'équation (3.11) dans l'équation (3.9) donne

$$\ddot{p}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = f_i(t) \quad (3.13)$$

Ou ξ_i est défini par

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i} \right) \quad (3.14)$$

La solution de l'intégrale de convolution de l'équation (3.13) est

$$p_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \int_0^t f_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau)} \sin \left[\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} (t - \tau) \right] d\tau \quad (3.15)$$

Pour l'amortissement proportionnel, les modes supérieurs ont moins d'effet sur la solution totale que les modes inférieurs, ce qui permet de calculer moins de modes sans perdre la précision

Une fois les solutions pour chaque p_i sont obtenus, l'équation (3.11) est utilisée pour déterminer les coordonnées généralisées originales.

III.2 Système à deux degrés de liberté

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour décrire leur mouvement sont appelés systèmes à deux degrés de liberté. Quelques exemples de modèles à deux degrés de liberté de systèmes vibrants sont présentés dans la figure (III-1)

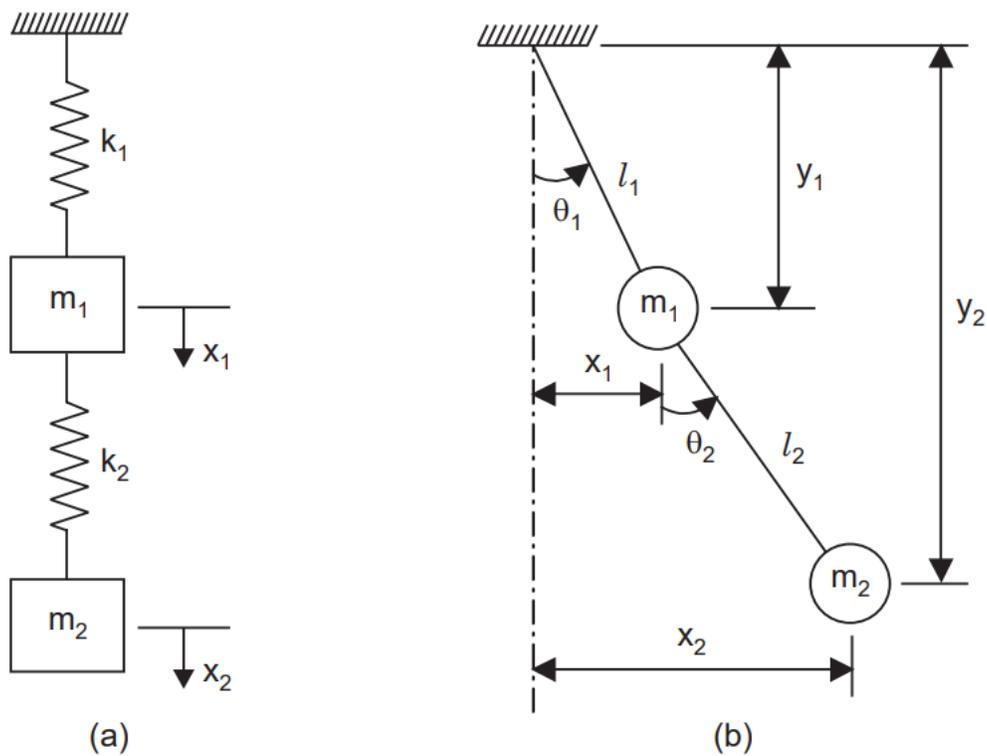


Figure III-1 : Systèmes à deux degrés de liberté

Considérez le système de masse à ressort à deux degrés de liberté à amortissement visqueux illustré ici (figure III-2) :

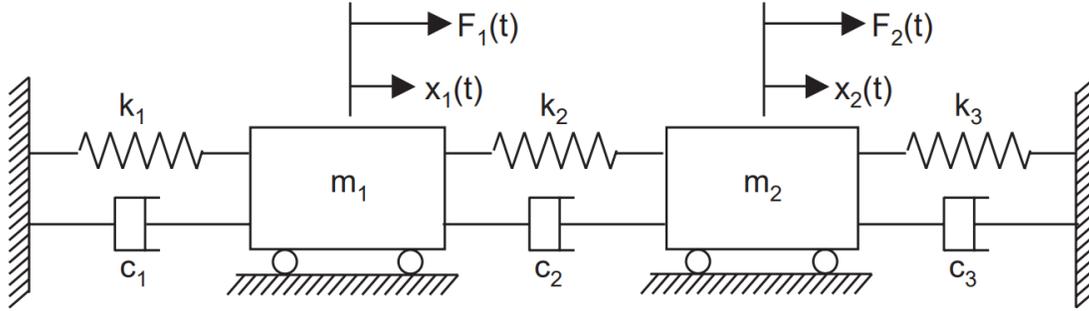


Figure III-2 Système amorti et forcé à deux degrés de liberté.

Le système est complètement décrit par les deux coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, qui définissent les positions des deux masses m_1 et m_2 , respectivement, pour tout temps arbitraire t , à partir des positions d'équilibre respectives. Les forces extérieures agissant sur les masses m_1 et m_2 du système sont respectivement $F_1(t)$ et $F_2(t)$. En appliquant la deuxième loi du mouvement de Newton à chacune des masses m_1 et m_2 , nous pouvons écrire les deux équations du mouvement comme suit :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + (c_2 + c_3) \dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) &= F_2(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

III.2.1 Réponse dynamique

III.2.1.1 Excitation périodique :

Pour un système général à deux degrés de liberté, les équations du mouvement seront de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

En supposant que les forces externes sont de nature harmonique, nous les représentons comme :

$$F_j(t) = F_j e^{i\Omega t} = F_{j0} e^{i \cdot (\Omega t + \psi_j)}, \quad j = 1, 2 \quad (3.18)$$

Avec

$$F_{j0} = |F_j| = \sqrt{\text{Re}(F_j) + \text{Im}(F_j)} \quad (3.19)$$

$$\psi_j = \arg(F_j) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(F_j)}{\operatorname{Re}(F_j)} \quad (3.20)$$

F_{10} et F_{20} sont des valeurs complexes représentant l'amplitude complexe de la réponse.

Et les solutions à l'état d'équilibre comme :

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t} = X_{j0} \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi_j)}, j = 1,2 \quad (3.21)$$

Avec

$$X_{j0} = |X_j| = \sqrt{\operatorname{Re}(X_j)^2 + \operatorname{Im}(X_j)^2} \quad (3.22)$$

$$\varphi_j = \arg(X_j) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(X_j)}{\operatorname{Re}(X_j)} \quad (3.23)$$

X_{10} Et X_{20} sont des valeurs complexes représentant l'amplitude complexe de la réponse. Les équations peuvent maintenant être mises en termes de fréquence comme suit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i \cdot \omega \cdot c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i \cdot \omega \cdot c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i \cdot \omega \cdot c_{12} + k_{12}) & (-\omega^2 m_{22} + i \cdot \omega \cdot c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Soit l'impédance mécanique :

$$Z_{rs}(\omega) = -\omega^2 \cdot m_{rs} + i \cdot \omega \cdot c_{rs} + k_{rs}, r, s = 1,2 \quad (3.25)$$

La matrice d'impédance est définie comme suit :

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \\ & X_{10}(\omega) = H_{11}(\omega)F_{10}(\omega) + H_{12}(\omega)F_{20}(\omega) \\ & X_{20}(\omega) = H_{21}(\omega)F_{10}(\omega) + H_{22}(\omega)F_{20}(\omega) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$H_{ij}(\omega)$ Est une fonction complexe de fréquence et indique la relation entre une réponse au degré de liberté i , et une force agissant au degré de liberté j .

III.2.1.2 Excitation transitoire :

La résolution d'un système à deux degrés de liberté soumis à des excitations transitoires nécessite l'utilisation de la fonction de transfert. Les fonctions de transfert sont le rapport entre la transformée de Laplace d'une sortie (la réponse) du système et la transformée de Laplace d'une entrée (l'excitation) du système. Lorsque le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties, une matrice de fonctions de transfert est définie. Un système à deux degrés de liberté possède deux sorties et éventuellement deux entrées, pour un système soumis à deux excitations, la matrice de fonction de transfert est de la forme

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Où $G_{i,j}(s)$ est la fonction de transfert pour x_i due à une force appliquée à x_j . Elle représente également la transformée de la réponse due à une impulsion unitaire.

Ainsi, $G_{i,j}(s)$ est également la transformée de Laplace de la réponse de x_i due à une impulsion unitaire appliquée au point décrit par x_j .[10]

La fonction de transfert peut être utilisée pour dériver une réponse intégrale de convolution pour le système. Il convient de noter que

$$X_i(s) = \mathcal{F}_j(s)G_{ij}(s) \quad (3.28)$$

Où $X_{i,j}(s)$ est la réponse du système pour $X_i(t)$ due à une force $\mathcal{F}_j(t)$ appliquée au point $x_j(t)$. En utilisant la transformation de convolution, on obtient une solution

$$x_i(t) = \int_0^t \mathcal{F}_j(\tau)h_{ij}(t - \tau)d\tau \quad (3.29)$$

Où $h_{i,j}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_{i,j}(s)\}$ est la réponse impulsive.

Pour trouver la réponse dynamique d'un système à deux degrés de liberté, on utilise les mêmes méthodes que dans les chapitres précédents, telles que la transformation de Laplace, l'intégral de convolution, la transformation de Fourier, etc.

III.2.1.3 Inversion de Laplace :

Parfois, et après avoir appliqué la transformée de Laplace et trouvé la réponse dans le domaine S, Le retour au domaine temporel peut nécessiter une manipulation algébrique de la fonction de réponse de Laplace afin d'utiliser la table présentée dans (l'Annexe A) Parfois, cela ne peut être fait car la fonction est analytiquement difficile à manipuler. C'est là que la transformée de Fourier peut être mise en œuvre.

Inverse par Fourier :

La variable de Laplace est une fréquence complexe et est égal à un terme réel plus le terme standard de fréquence imaginaire : $s = \alpha + i\omega$. Pour convertir une fonction de Laplace dans le domaine fréquentiel, il suffit de remplacer s par $i\omega$. Nous acceptons essentiellement de nous limiter aux signaux sinusoïdaux en régime permanent, de sorte que la composante réelle de s n'est plus nécessaire. Son seul but est d'assurer la convergence de l'intégrale pour les signaux transitoires qui ne convergeraient pas normalement.

Inverse par Théorème de la convolution :

Nous avons souvent besoin de déterminer la transformée de Laplace inverse d'un produit de deux fonctions. La transformée de Laplace inverse du produit ne donne pas le produit des transformées de Laplace inverses, tout comme ce n'était pas le cas en calcul intégral lorsque l'intégrale du produit de deux fonctions ne donnait pas le produit des intégrales.

La transformée de Laplace inverse du produit de deux fonctions, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)H(s)\}$, et la transformée de Laplace inverse de chaque fonction, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ et $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ sont liées, selon le théorème de la convolution.

Supposant que

$$X(s) = F(s).H(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ Et } \mathcal{L}\{H(t)\} = H(s).$$

Donc,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)H(s)\} = (f * h)(t) = \int_0^t f(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (3.30)$$

III.3 Simulation Directe

La présence de la non-linéarité est probablement la meilleure justification de l'approche de simulation directe pour l'étude des problèmes vibratoires. En principe, la performance des systèmes linéaires peut être étudiée par des moyens analytiques, mais l'étude des systèmes non linéaires par de tels moyens est en général difficile, le contexte du système étant généralement idéalisé ou très simplifié par rapport aux scénarios réels. Par conséquent, la simulation directe est généralement l'outil approprié pour la plupart des problèmes vibratoires non linéaires.

- *Méthode de différence centrale :*

Les méthodes de différences finies (telles que la différence centrale) sont utilisées pour approximer les dérivées, qui à leur tour sont généralement utilisées pour résoudre une équation différentielle.

Rappelons qu'une définition de la dérivée est :

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (3.31)$$

Lorsque h est un très faible nombre réel. On appelle généralement cette méthode l'approximation par différence avancée. La raison du mot avancé est que nous utilisons les deux valeurs de fonction des points x et le suivant, un pas en avant, $x + h$. De même, nous pouvons approximer les dérivées en utilisant un point comme point central, c'est-à-dire que si x est notre point central, nous utilisons $x - h$ et $x + h$. L'approximation par différence centrale est alors

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} \quad (3.32)$$

- *Méthode de Newmark :*

La méthode de Newmark permet la résolution directe d'une équation différentielle du second ordre ou d'un système d'équations différentielles du second ordre sans qu'il soit nécessaire de les transformer en une paire d'équations différentielles simultanées du premier ordre.

Le développement initial de la méthode de Newmark utilise le théorème de la valeur moyenne pour x , un élément de x , et qui peut être énoncé comme suit. Il existe une valeur scalaire β telle que :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \dot{x}(t + \beta\Delta t)\Delta t \quad (3.33)$$

Où Δt est l'incrément de temps.

Newmark a utilisé le développement en série de Taylor des fonctions $x(t + \Delta t)$ et $\dot{x}(t + \Delta t)$ jusqu'à la dérivée de troisième ordre de x .

En désignant $x(t + \Delta t)$ par x_{n+1} et $x(t)$ par x_n où

$$x_{n+1} = A^{-1}B_n \quad (3.34)$$

Où

$$A = \frac{M}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\gamma C}{\beta\Delta t} + K \quad (3.35)$$

$$B_n = f(t_{n+1}) + M \left[\frac{x_n}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\dot{x}_n}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_n \right] + C \left[\frac{\gamma x_n}{\beta\Delta t} - \dot{x}_n \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) - \Delta t \ddot{x}_n \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \right] \quad (3.36)$$

On peut maintenant calculer \dot{x}_{n+1} et \ddot{x}_{n+1} avec

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{(\beta\Delta t)^2} - \frac{\dot{x}_n}{\beta\Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta - 1} \right) \ddot{x}_n \quad (3.37)$$

Et

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\gamma(x_{n+1} - x_n)}{\beta\Delta t} + \dot{x}_n \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \Delta t \ddot{x}_n \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \quad (3.38)$$

Où γ et β sont des paramètres qui peuvent être déterminés en fonction de la précision et de la stabilité souhaitées.

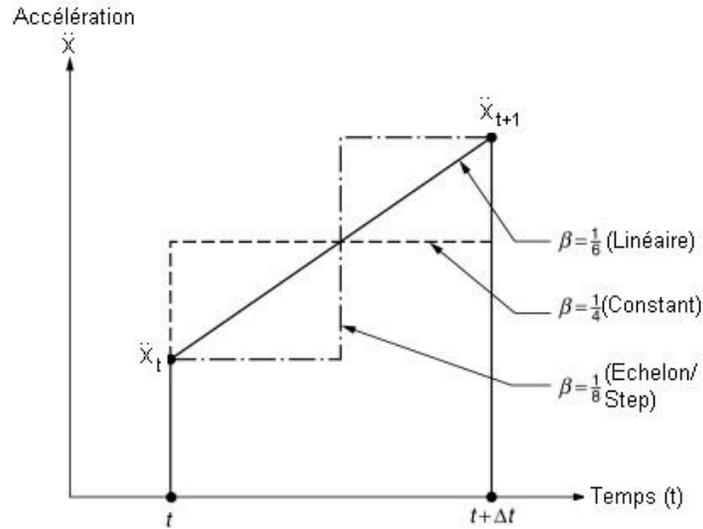


Figure III-3 : Types de variation de l'accélération pour la méthode Newmark

Newmark a suggéré une valeur de $\gamma = 1/2$ pour éviter un amortissement artificiel. La valeur de β dépend de la manière dont l'accélération, \ddot{x} , est supposée varier pendant l'intervalle de temps t et $t + \Delta t$. Les valeurs de β à prendre pour différents types de variation de sont indiquées dans la Figure (III-3).

CHAPITRE IV

**LES SYSTEMES NON-
LINEAIRES**

Les systèmes non linéaires sont beaucoup plus difficiles à analyser que les systèmes linéaires car le principe de superposition linéaire n'est pas valable pour les systèmes non linéaires. Parmi les ramifications de l'absence du principe de superposition sont

- La solution homogène d'une équation différentielle non linéaire du second ordre n'est pas une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes.
- La solution générale d'une équation différentielle non linéaire ne peut pas être écrite comme la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière, qui est indépendante des conditions initiales. La réponse forcée d'un système non linéaire ne peut être séparée de sa réponse en vibration libre.
- La méthode de superposition ne peut pas être utilisée pour additionner les réponses forcées dues à une combinaison d'excitations. La non-linéarité entraîne une interaction des réponses.
- Comme l'intégrale de convolution est dérivée en utilisant la superposition linéaire, elle ne s'applique pas aux systèmes non linéaires. Il n'existe pas d'équivalent de l'intégrale de convolution pour les systèmes non linéaires.
- La transformée de Laplace ne peut pas être utilisée pour dériver la solution d'équations différentielles non linéaires.

IV.1 Systèmes non-linéaires réels

- *Double pendule* : Un système non linéaire simple et commun est présenté dans la figure ci-dessous, également connu sous le nom de double pendule.

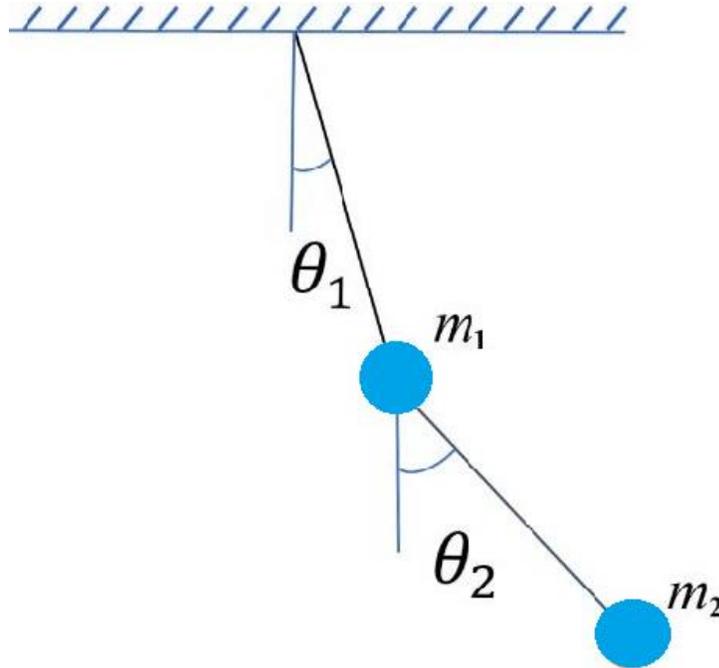


Figure IV-1 : Système double pendule

Un double pendule consiste en un pendule attaché à un autre. Les doubles pendules sont un exemple de système physique simple qui peut présenter un comportement chaotique.

Pour les petits angles, un pendule se comporte comme un système linéaire. Lorsque les angles sont petits dans le double pendule, le système se comporte comme le double ressort linéaire. Ceci est dû au fait que le mouvement est déterminé par des fonctions sinus et cosinus simples. Pour les grands angles ($\theta \geq 10^\circ$), le mouvement n'est plus déterminé par des sinus et des cosinus simples, le pendule devient non linéaire

Dans le cas du système à double pendule, la source de non-linéarité était celle de la structure, dans d'autres cas la source de non-linéarité peut émerger de la force du fluide agissant sur le système, et avec les problèmes aéroélastiques elle provient des deux.

Le flottement de décrochage est l'un des problèmes aéroélastiques qui décrit mieux ce type de non-linéarité, comme indiqué dans le premier chapitre, la certification qu'un avion est exempt d'instabilités de flottement est un aspect majeur de la conception et de la modification. Comme il est impossible d'analyser toutes les conditions de vol, pour effectuer les nombreuses analyses requises, les techniques se limitent généralement à des méthodes linéaires dans le domaine fréquentiel, utilisant des modèles d'éléments finis réduits aux modes de vibration libre à basse fréquence et à l'aérodynamique instationnaire linéaire. Les équations de flottement linéaires supposent des déplacements infiniment petits, les équations de flottement non linéaires sont beaucoup plus réalistes, permettant des oscillations à cycle limite, des oscillations auto-excitées d'amplitude constante qui peuvent être nuisibles. [3]

- *Flottement de décrochage* : En aérodynamique, le décrochage est la perte de portance d'un avion ou d'une surface (aile, pale de rotor, voilier, etc.) due à un angle d'incidence trop important (supérieur à l'incidence de décrochage), ce phénomène peut être examiné dans la figure IV-2 ci-dessous représentant le coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque.

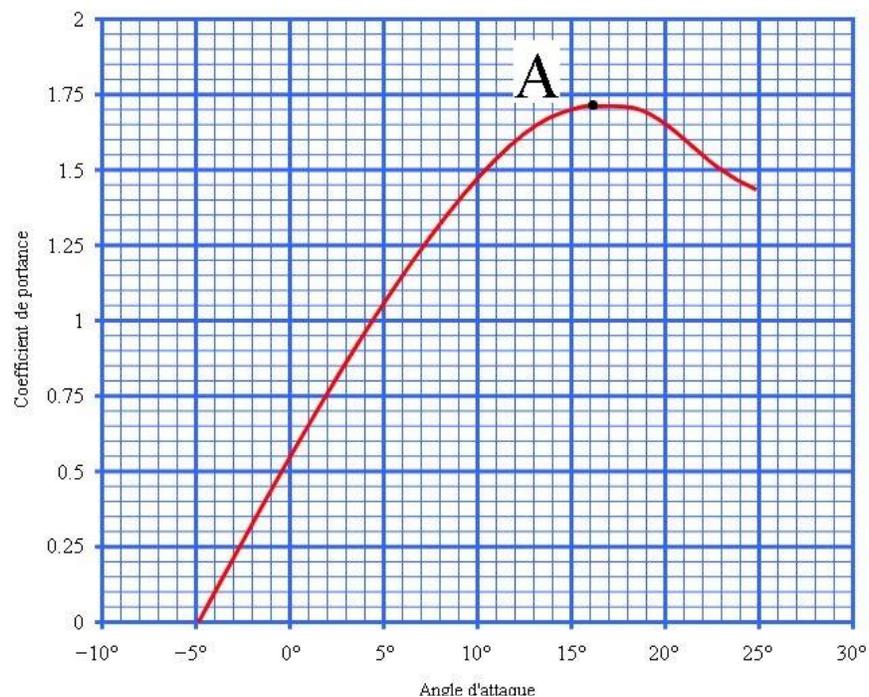


Figure IV-2 : Graphe de coefficient de portance en fct de l'angle d'attaque

Le point « A » représente l'angle de décrochage ou l'angle d'incidence maximale supporté par l'aéronef, avant cet angle, on remarque que le graphique se développe d'une façon linéaire, considérons l'équation suivante décrivant le mouvement d'une surface portante soumise à une force aérodynamique en termes de l'angle d'incidence :

$$m\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = k_{L1}\theta + c_{L1}\dot{\theta} \quad (4.1)$$

Cette équation décrit la progression linéaire du graphique, la force et la structure sont toutes deux linéaires. Au-delà du point "A", la force du fluide développe un terme non linéaire, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$m\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = k_{L1}\theta + k_{L2}\theta^2 + k_{L3}\theta^3 + c_{L1}\dot{\theta} + c_{L2}\dot{\theta}^2 + c_{L3}\dot{\theta}^3 \quad (4.2)$$

Si le mouvement de la structure est non linéaire le premier terme présentera des puissances supérieures à un, comme les équations de Duffing et Van der pol.

La simulation des équations de mouvement non linéaire s'est avérée être l'approche la plus efficace et généralement exigeante en termes de calcul pour l'analyse des structures non linéaires. Une autre approche consiste à utiliser des analyses linéaires dans certaines conditions et sous certaines tolérances acceptables. Dans quelques situations de vol, cette hypothèse échoue, en particulier lorsque le résultat expérimental ou numérique généré n'obéit pas ou ne s'approche même pas des comportements linéaires attendus.

IV.2 Simulations numériques et réponses chaotiques

La résolution numérique de l'équation de Duffing à l'aide d'un algorithme explicite, tel que le schéma des différences centrées, ne pose aucun problème, si ce n'est celui du choix du pas de temps, qu'il faut prendre suffisamment petit. La non-linéarité ayant l'effet de raidir le système par rapport au cas linéaire, il convient de prendre un pas de temps nettement plus faible que celui préconisé par le critère de convergence linéaire.

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \eta x^3 = a\cos(\Omega t) \quad (4.3)$$

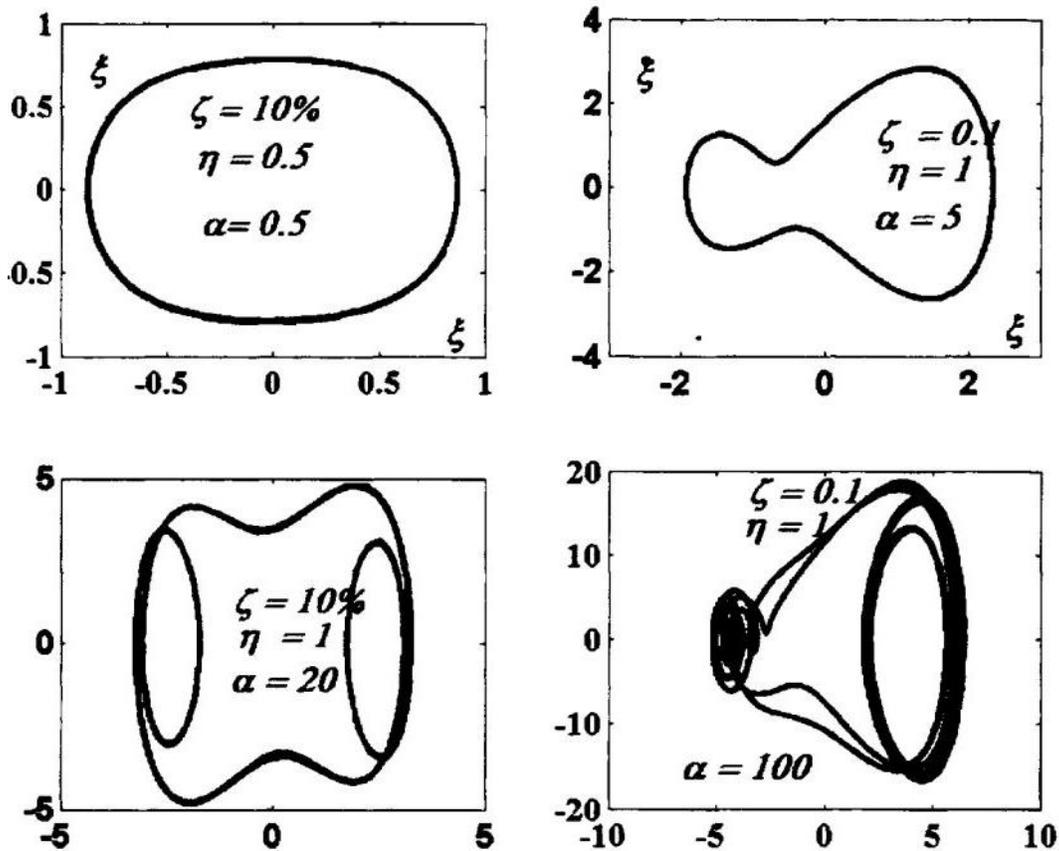


Figure IV-3 : Portraits de phase de solutions périodiques [1]

Tout d'abord, il est intéressant de tester à l'aide d'une simulation numérique l'existence des régimes établis périodiques. Pour ce faire, on peut calculer la réponse de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale de fréquence fixe, dont on fait varier l'amplitude. Les résultats relatifs au régime établi, s'il existe, sont présentés sous forme de portraits de phase. Si l'on obtient un cycle fermé, quelle que soit la durée du mouvement calculé, on peut dire que le mouvement est périodique. Cette conclusion peut être étayée par l'analyse du spectre de réponse, qui doit être constitué de raies en progression harmonique. La figure (IV-3) montre quelques portraits de phase ainsi obtenus. L'oscillateur a un amortissement réduit $\zeta = 0.1$, le coefficient du terme cubique est $\eta = 1$ et la fréquence de l'excitation coïncide avec la fréquence de résonance linéaire. Les mouvements sont périodiques et la période correspond à celle de l'excitation.[1]

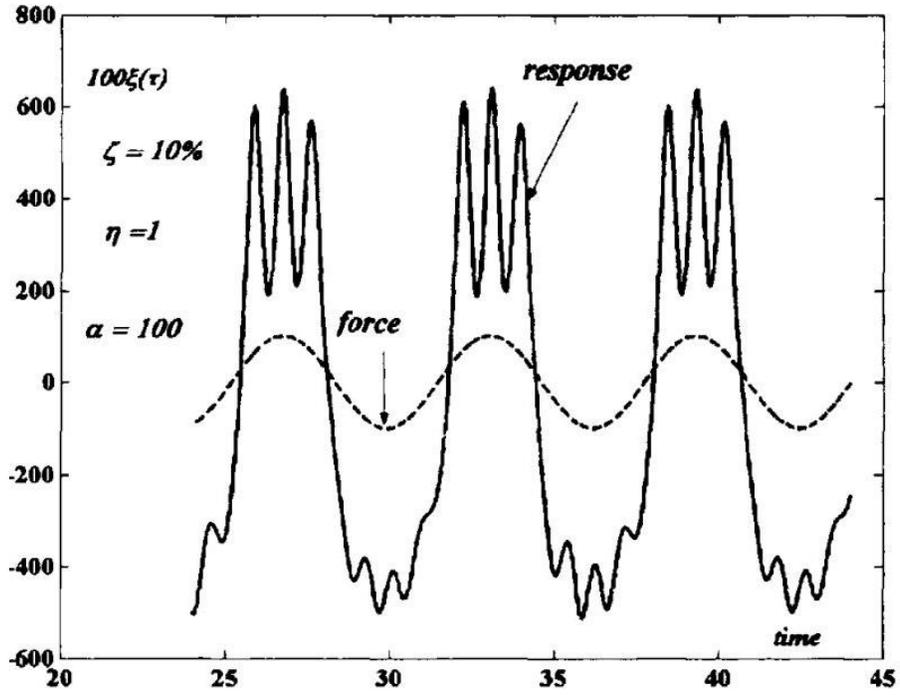


Figure IV-4 : Loi horaire du déplacement vibratoire ($100x\xi$) [1]

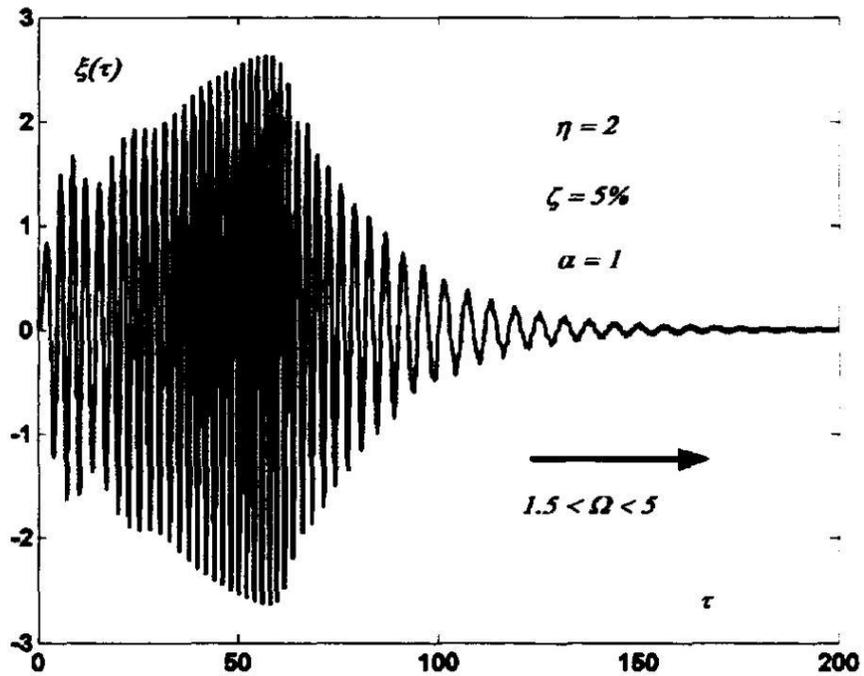


Figure IV-5 : Balayage montant en fréquences [1]

Les solutions représentées sur la figure (IV-3) sont toutes périodiques, la période coïncidant avec celle de l'excitation. Ce qui est en accord avec le calcul analytique approché. On note que l'allure du cycle se complique notablement lorsque l'amplitude de l'excitation augmente. Les boucles secondaires qui apparaissent sur le portrait de phase correspondent à des petites oscillations à l'intérieur du cycle, comme l'indique la loi horaire de la figure (IV-4). Enfin, l'effet d'hystérésis est mis en évidence sur les figures (IV-5) et (IV-6).

CHAPITRE V

**RESULTATS ET
INTERPRETATIONS**

Dans ce chapitre, on étudiera quelques systèmes vibratoires, linéaires et non linéaires, à l'aide du programme Matlab en comparant deux à trois méthodes dans chaque exemple.

V.1 Système à un degré de liberté

V.1.1 Exemple et résultats

Voci un système de 1DDL amortis et excité avec une force harmonique $F(t) = 4\sin(\Omega t)$ (figure V-1).

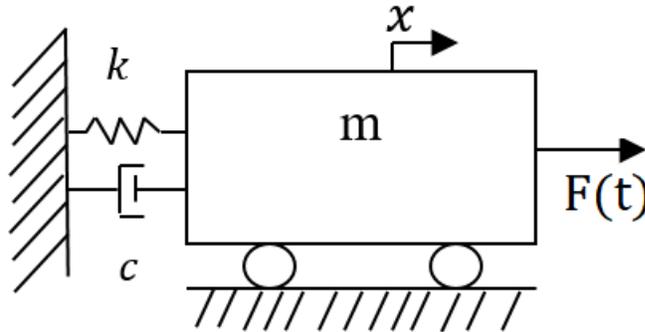


Figure V-1 : Système amorti et forcé à 1DDL

On a les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$

Et les paramètres :

$$m = 3 \text{ kg} \quad ; \quad k = 1000 \text{ N/m}$$

$$\zeta = 0.05 \quad ; \quad \Omega = 3 \text{ rad/s}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons voir deux méthodes différentes.

L'une est analytique, en calculant les coefficients, afin de les remplacer dans l'équation de solution de réponse (2.31)

Une autre qui utilise la méthode numérique Newmark, en utilisant l'accélération linéaire en choisissant $\beta = 1/4$.

Le traçage de la solution conduira aux figures suivantes :

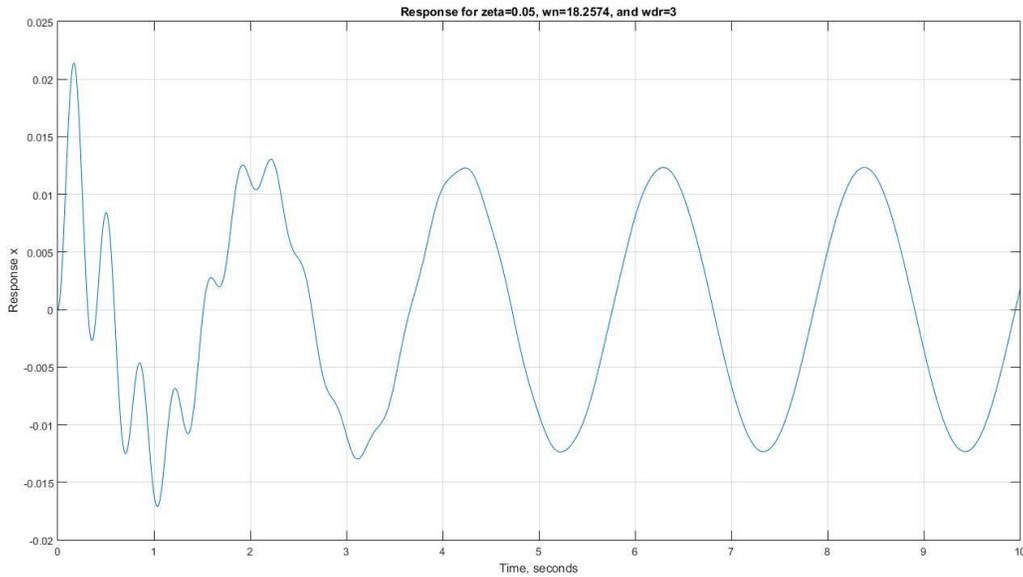


Figure V-2 : La réponse de la méthode analytique

Pour la figure (V-2) on constate que le graphe est décomposé en deux parties, la première partie qui est instable représente la partie transitoire de la réponse dynamique, cette dernière est limitée jusqu'à 5.33 secondes, au-delà de ce point, le régime se stabilise, donnant naissance au régime permanent qui se répète au fil du temps avec une période de 2,11 secondes, l'amplitude maximale enregistrée pour la méthode analytique est de 0,0214 mètre.

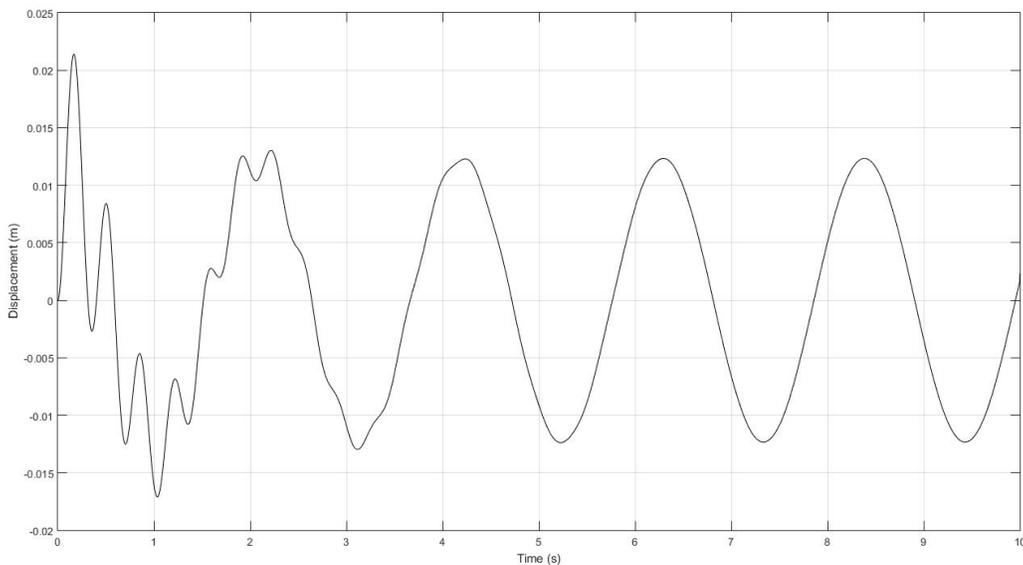


Figure V-3 : La réponse de la méthode Newmark Beta

Pour la figure (V-3) et cette fois-ci, le régime transitoire s'éteint à 5.25 *secondes*, 8.10^{-2} *secondes* plus tôt que celui de la méthode analytique. Ensuite, le régime est permanent et se répète avec une période de 2.07 *secondes*, 4.10^{-2} *secondes* plus tôt par rapport à celui de la figure (V-2), l'amplitude maximale enregistrée pour la méthode numérique est de 0.0214 qui est la même que la précédente.

Après avoir comparé les deux graphes et leurs paramètres, la seule différence importante enregistrée se situe dans le domaine temporel. La réponse fournie par la méthode numérique est en avance de 10^{-2} *secondes* par rapport à celle de l'analytique.

La méthode bêta de Newmark s'est avérée être inconditionnellement stable, et ce pour des valeurs $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, le schéma est précis au second ordre pour $\gamma = 1/2$. La méthode Newmark beta ne possède pas d'amortissement numérique dans la limite des hautes fréquences, même pour $\gamma = 1/2$, ce qui s'avère être un sérieux désavantage pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

V.2 Système à deux degrés de liberté

V.2.1 Exemples et résultats

V.2.1.1 Exemple 1 :

Pour le cas de deux degrés de liberté, le système suivant est considéré

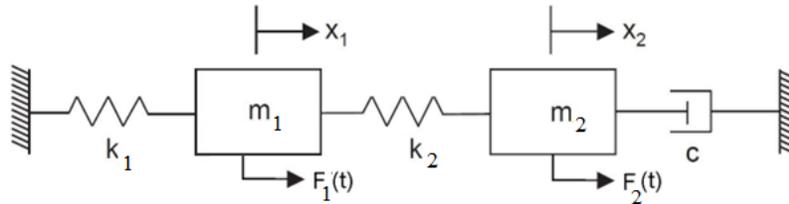


Figure V-4 : Système amorti et forcé à deux degrés de liberté (a)

Les conditions initiales sont $x_1(0) = 1 \text{ m}$, $x_2(0) = 0.1 \text{ m}$

$$\dot{x}_1(0) = -2 \text{ m/s}, \quad \dot{x}_2(0) = 2 \text{ m/s}$$

Les paramètres sont $m_1 = 0.5 \text{ kg}$, $m_2 = 0.5 \text{ kg}$, $k_1 = 8 \text{ N/m}$, $k_2 = 8 \text{ N/m}$, $c = 2 \text{ N.s/m}$

$$\mathcal{F}_1(t) = \text{Sin}(10t)$$

$$\mathcal{F}_2(t) = 3\text{Cos}(10t)$$

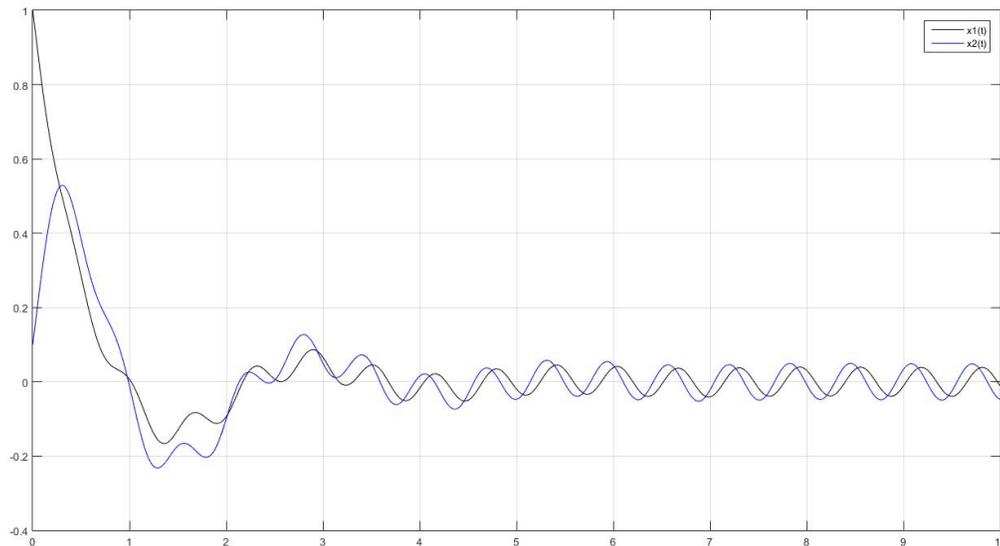


Figure V-5 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ obtenus par la convolution numérique Duhamel

La figure (V-5) représente les réponses dynamiques de l'exemple présenté sur la figure (V-3) par la convolution numérique Duhamel.

La trace noire représente la réponse $x_1(t)$, qui commence à partir de sa état initial $x_1 = 1 m$ pour atteindre sa plus grande amplitude négative $0.1663 m$, son régime transitoire s'éteint à $6.672 secondes$ donnant naissance au régime permanent qui est caractérisé par une période constante de $0.632 seconde$.

La trace bleue représente la réponse $x_2(t)$, qui commence à partir de sa état initial $x_2 = 0.1 m$ pour atteindre son amplitude maximale pour celle-ci est $0.5287 mètre$, son régime transitoire s'éteint à $6.567 secondes$ suivi directement par le régime permanent qui est caractérisé par une période constante de $0.632 seconde$.

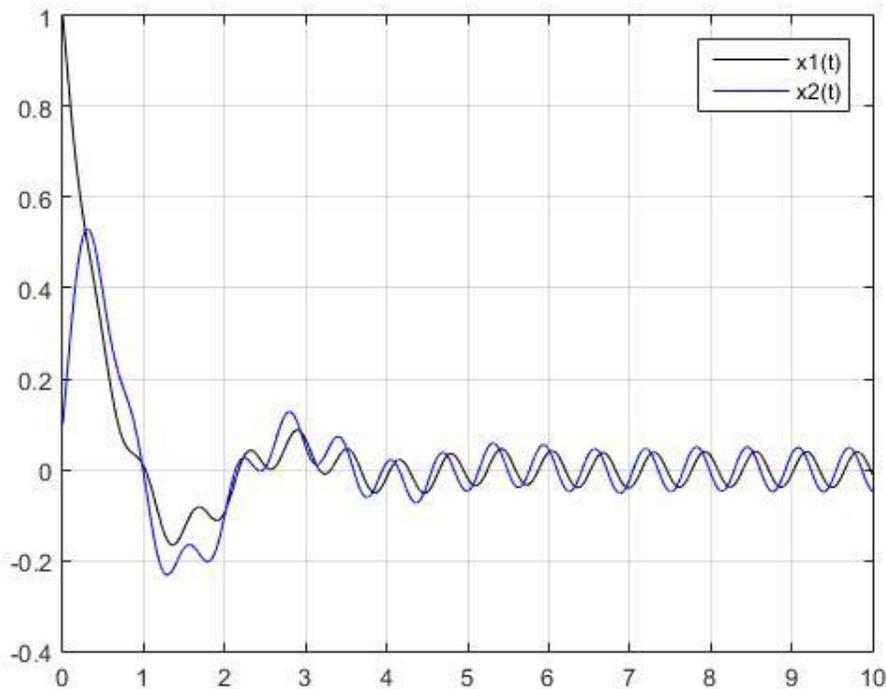


Figure V- 6 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ représentées par la simulation directe

La figure (V-6) représente les réponses dynamiques de l'exemple présenté sur la figure (V-3) par la simulation directe.

La trace noire représente la réponse $x_1(t)$, qui commence à partir de sa état initial $x_1 = 1 m$ pour atteindre sa plus grande amplitude négative $0.1665 m$, son régime transitoire s'éteint à $6.672 secondes$ donnant naissance au régime permanent qui est caractérisé par une période constante de $0.632 seconde$.

La trace bleue représente la réponse $x_2(t)$, qui commence à partir de sa état initial $x_2 = 0.1 m$ pour atteindre son amplitude maximale pour celle-ci est $0.530 m$, son régime transitoire s'éteint a $6.567 secondes$ suivi directement par le régime permanent qui est caractérisé par une période constante de $0.632 seconde$.

Tableau V-1 Comparaison des points essentiels entre les deux méthodes

La méthode	Intég. De Duhamel				Simulation directe			
	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_2(m)$	$t_2(s)$	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_2(m)$	$t_2(s)$
Pt. Déplacement maximal	-0.1663	1.358	0.5287	0.306	-0.1665	1.358	-0.530	0.305
Pt. Fin du régime transitoire	0.0369	0.672	0.04586	6.567	0.0370	6.672	0.04584	6.567

D'après les résultats qu'on a eus, montrés dans le tableau et les deux traces des réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on peut voir que les résultats des deux méthodes numériques utilisées sont pratiquement similaires avec seulement une très faible incertitude de 10^{-4} à 10^{-3} .

Le régime transitoire est observé clairement dans les deux méthodes et sans aucun retard entre les deux graphes. Ce qui rend notre exemple bien étudié avec les méthodes numériques utilisées.

V.2.1.2 Exemple 2

Un autre exemple sera étudié pour observer la précision de la méthode analytique dans un système à deux degrés de liberté, Le système suivant est considéré (voir Figure V-7)

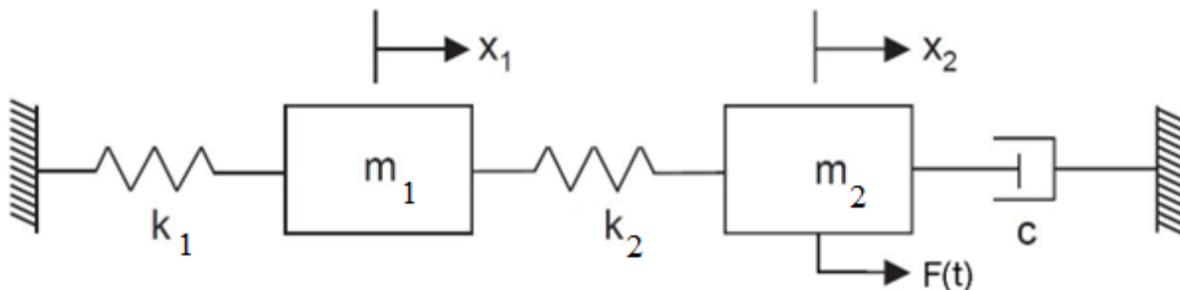


Figure V-7 : Système amorti et forcé à deux degrés de liberté (b)

Les conditions initiales sont $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$

Les paramètres sont $m_1 = 0.5\text{kg}$, $m_2 = 0.5\text{kg}$, $k_1 = 8\text{N/m}$, $k_2 = 8\text{N/m}$, $c = 2\text{N.s/m}$

$$\mathcal{F}(t) = 2e^{-1.5t}$$

Tout d'abord, la méthode intégrale de convolution est utilisée pour résoudre le problème analytiquement, les réponses sont données dans la (figure V-8), Ensuite, il y a la résolution numérique du problème, qui consiste de deux méthodes, la première étant la méthode d'intégration de Duhamel, la réponse des deux masses est représentée dans la (figure V-9), finalement, la méthode numérique de simulation directe est appliquée et les réponses sont données dans la (figure V-10).

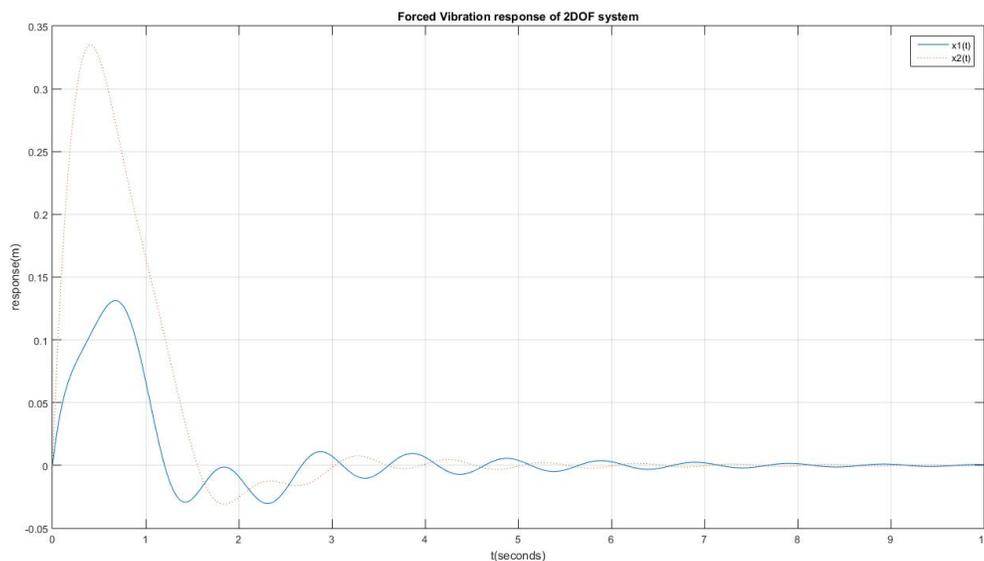


Figure V-8 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ représentées analytiquement par l'intégrale de convolution

La (figure V-8) représente les réponses dynamiques des deux masses pour la méthode analytique. Le trait bleu représente la réponse $x_1(t)$, l'amplitude maximale pour cette dernière est 0.1311 mètre, son régime transitoire s'éteint à 2.867 secondes donnant naissance au régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde. Le trait rouge représente la réponse $x_2(t)$, l'amplitude maximale pour celle-ci est 0.335 mètre, son régime transitoire s'éteint à 3.267 secondes suivi directement par le régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde.

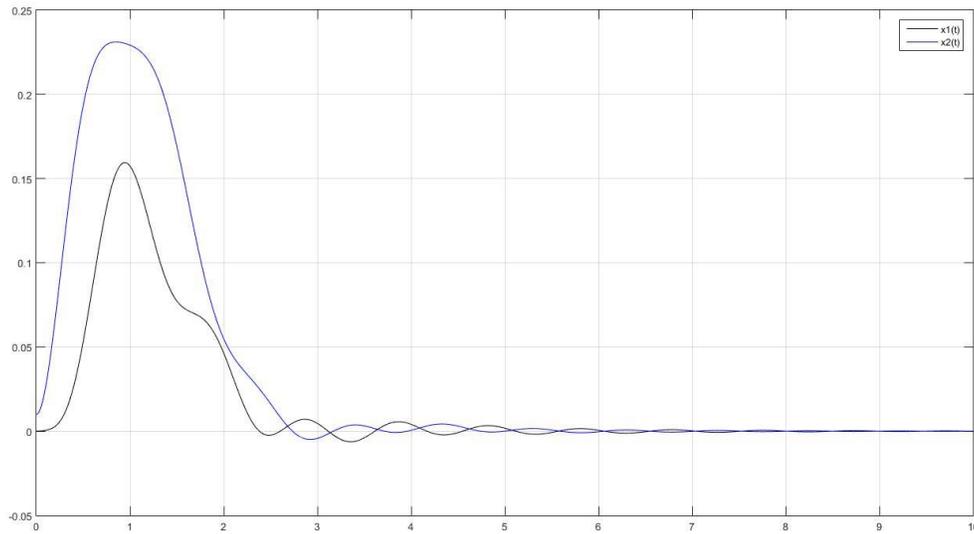


Figure V-9 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ représentées par la méthode d'intégration de Duhamel

La figure (V-9) représente les réponses dynamiques des deux masses obtenues par la méthode d'intégration de Duhamel.

Le trait noir représente la réponse $x_1(t)$, l'amplitude maximale pour cette dernière est 0.1595 mètre, son régime transitoire s'éteint a 2.865 secondes donnant naissance au régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde.

Le trait bleu représente la réponse $x_2(t)$, l'amplitude maximale pour celle-ci est 0.231 mètre, son régime transitoire s'éteint a 3.402 secondes suivi directement par le régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde.

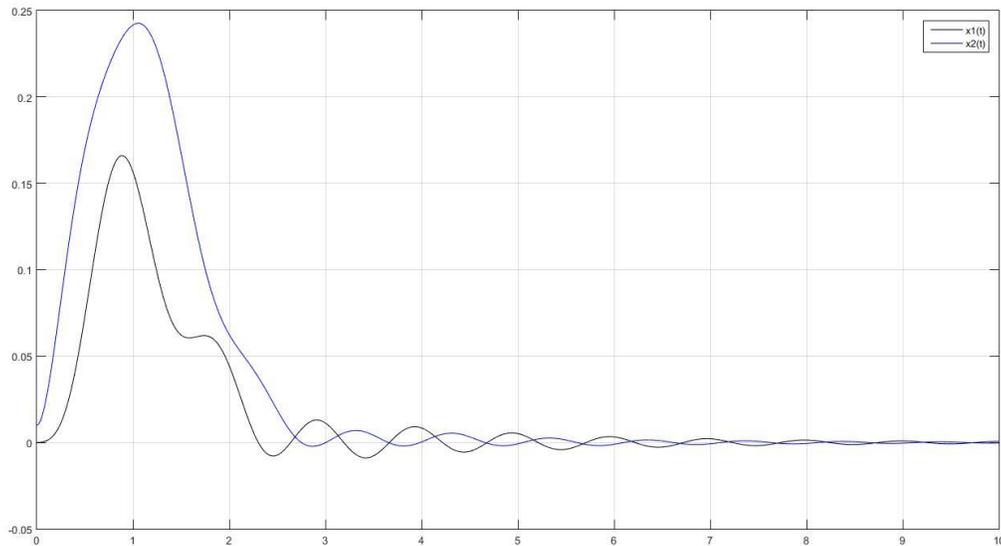


Figure V-10 : Les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ représentées par la méthode de simulation directe

La figure(V-10) représente les réponses dynamiques des deux masses obtenues par la méthode de simulation directe.

Le trait noir représente la réponse $x_1(t)$, l'amplitude maximale pour cette dernière est 0.1661 mètre, son régime transitoire s'éteint a 2.897 secondes donnant naissance au régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde.

Le trait bleu représente la réponse $x_2(t)$, l'amplitude maximale pour celle-ci est 0.2426 mètre, son régime transitoire s'éteint a 3.314 secondes suivi directement par le régime permanent qui est caractérisé par une période constante de 1 seconde.

Les points essentiels peuvent être regroupés dans le tableau illustré ci-dessous :

Tableau V-2: Comparaison entre la l'intégrale analytique et les deux méthodes numériques

La méthode	Représentation analytique de l'intégrale de convolution				Intég. De Duhamel				Simulation directe			
	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_2(m)$	$t_2(s)$	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_2(m)$	$t_2(s)$	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_2(m)$	$t_2(s)$
Coordonnées												
Pt. Déplacement maximal	0.131	0.7	0.335	0.4	0.1595	0.943	0.231	0.874	0.1661	0.885	0.2426	1.039
Pt. Fin du régime transitoire	0.0109	2.867	0.0075	3.267	0.007	2.865	0.0037	3.402	0.013	2.897	0.007	3.314

D'après les résultats que l'on a dans les figures (V-8), (V-9), (V-10) le tableau (V-2), on peut voir les différences entre les valeurs des trois méthodes utilisées pour résoudre notre exemple, on constate que la méthode analytique a donné en quelque sorte des valeurs acceptables, mais a une mauvaise précision, notamment dans la réponse de x_2 qui est conditionnée à la $F(t)$

Mais, lorsque l'on observe le temps d'exécution de la méthode analytique, il est beaucoup plus long que les deux autres, avec 11,28 secondes et 5,88 secondes dans la convolution numérique et 1,29 secondes dans la méthode de simulation directe. Ce qui fait de la méthode analytique un choix non souhaité.

V.3 Système à plusieurs degrés de liberté

V.3.1 Exemple et résultats

Dans cet exemple, on va étudier deux réponses v_1 et v_2 d'une vibration de flexion d'aile simplifiée comme une poutre à 4DDL (Figure V-11), pour voir le comportement de la structure ainsi que pour voir la performance des deux méthodes numériques qu'on va utiliser, qui sont les suivantes : La simulation directe et la convolution numérique.

Les paramètres de la poutre sont :

$$EI = 6.09 \text{ Nm}^2$$

$$L = 1.27\text{m}$$

$$\rho = 0.024 \text{ kg/m}$$

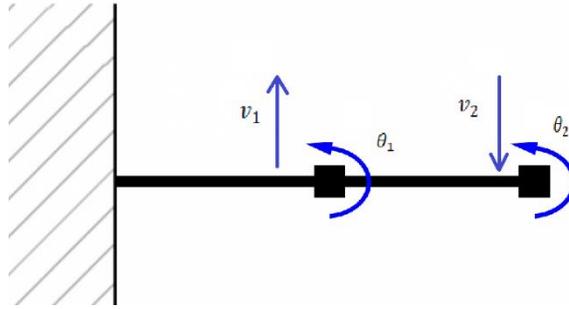


Figure V-11 : aile simplifiée comme une poutre à 4DDL

Avec : $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$

Les matrices masse et rigidité sont :

$$M = \begin{bmatrix} 0.0929 & 0 & 0.0161 & -0.0967 \\ 0 & 1.4881 & 0.0967 & -0.5580 \\ 0.0161 & 0.0967 & 0.0464 & -0.1637 \\ -0.0967 & -0.5580 & -0.1637 & 0.7440 \end{bmatrix}$$

$$K = 1000 \begin{bmatrix} 52 & 0 & -26 & 326 \\ 0 & 10880 & -326 & 2720 \\ -26 & -326 & 26 & -326 \\ 326 & 2720 & -326 & 5440 \end{bmatrix}$$

$C = \alpha M + \beta K$ Avec $\alpha = 0.2$; $\beta = 0.005$

$$F(t) = \cos(\omega t)$$

Les conditions initiales sont :

$$x = \{0,0,0,0\} \quad \text{et} \quad \dot{x} = \{0,0,0,0\}$$

Pour ce système à plusieurs degrés de liberté (quatre DDL), la résolution sera limitée aux deux méthodes numériques discutées précédemment.

La première étant la méthode d'intégration de Duhamel, les réponses $x_1(t)$ et $x_3(t)$ relatives aux masses m_1 et m_3 respectivement sont représentées sur la figure (V-9).

Ensuite, les mêmes réponses, soit x_1 et x_3 , sont obtenues en utilisant la méthode de simulation directe, les résultats sont montrés dans la figure (V-10).

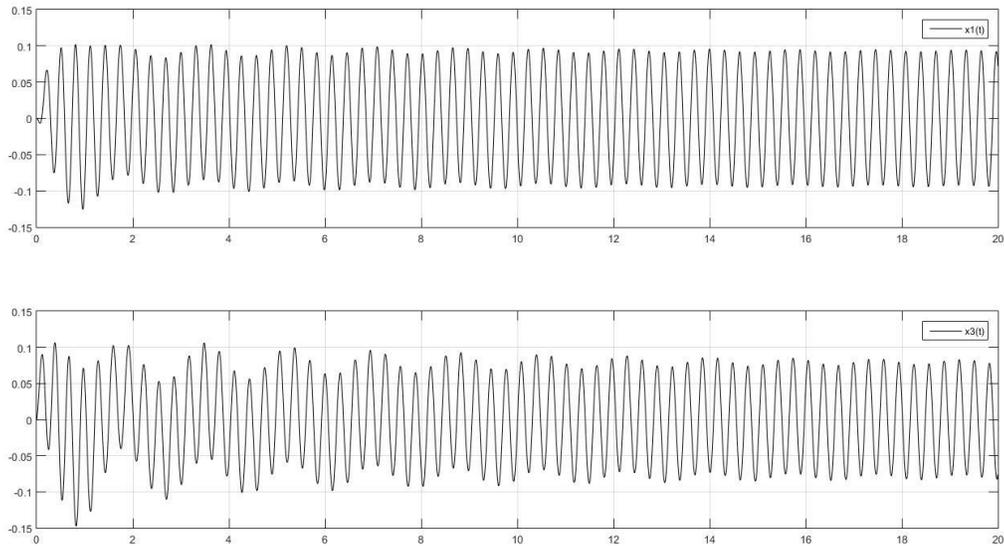


Figure V-12 : Les Réponses x_1 et x_3 représenté par la méthode d'intégration de Duhamel

À partir de la figure (V-12) décrivant les réponses $x_1(t)$, $x_3(t)$ donnés par la méthode d'intégration de Duhamel, il est possible de constater que la réponse $x_1(t)$ est à nouveau divisée en deux régimes comme dans les exemples précédents, le premier étant le régime transitoire qui expire à 2,06 secondes, et le régime permanent qui a une période constante de 0,315 secondes. Le déplacement maximal enregistré pour la *masse 1* est de $-0,1243$ mètre.

Pour la réponse $x_3(t)$ relative à la *masse 3*, le régime transitoire est limité à 5,984 secondes, suivi par le régime permanent qui a la même période constante de 0,315 secondes par rapport à celle de $x_1(t)$. Le déplacement maximal enregistré pour la *masse 3* est de $-0,1477$ mètre.

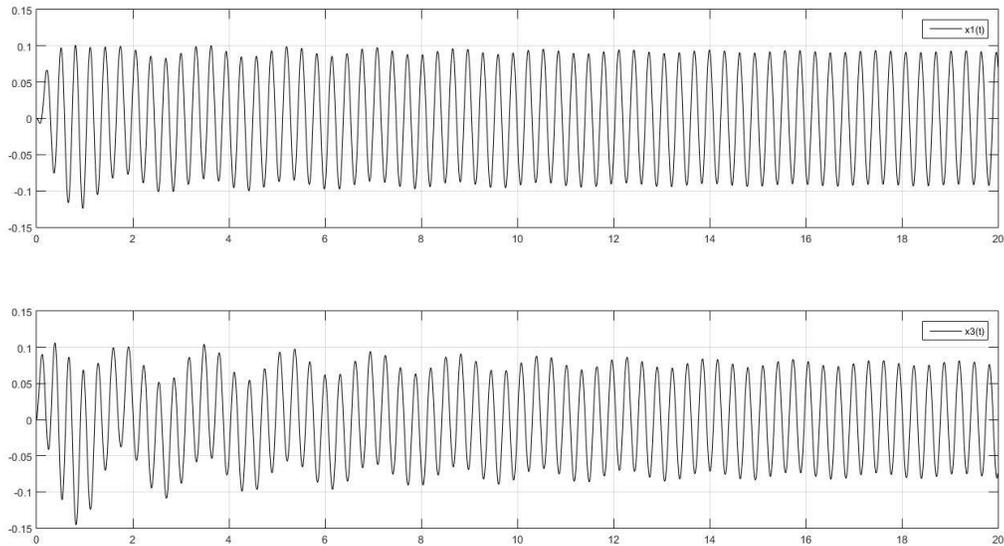


Figure V-13 : Les réponses de x_1 et x_3 représenté par la simulation directe

Cette fois ci et à partir de la figure (V-13) décrivant les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ donnés par la méthode de la simulation directe, la réponse $x_1(t)$ est toujours divisée en deux régimes, le premier étant le régime transitoire qui expire à 2,06 secondes, et le régime permanent qui a une période constante de 0,315 secondes. Le déplacement maximal enregistré pour la *masse 1* est de $-0,1243$ mètre.

Pour la réponse $x_3(t)$ relative à la *masse 3*, le régime transitoire est limité à 5,996 secondes, suivi par le régime permanent qui a la même période constante de 0,315 secondes par rapport à toute les réponses précédentes. Le déplacement maximal enregistré pour la *masse 3* est de $-0,1458$ mètre.

V.3.2 Interprétation

Les points essentiels peuvent être regroupés dans le tableau illustré ci-dessous :

La méthode	Intég. De Duhamel				Simulation directe			
Coordonnées	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_3(m)$	$t_3(s)$	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_3(m)$	$t_3(s)$
Pt. Déplacement maximal	-0.1243	0.96	-0.1477	0.824	-0.1243	0.96	-0.1458	0.82
Pt. Fin du régime transitoire	-0.09539	2.06	0.0606	5.984	0.0943	2.06	0.0618	5.996

Après les résultats que l'on a eu qui sont montrés dans le tableau, on peut voir que les résultats des deux méthodes numériques sont plutôt identiques avec juste une très faible imprécision de 10^{-4} à 10^{-3} .

En considérant les deux graphes, nous pouvons voir la réponse du régime transitoire clairement et sans aucun doute, ils partagent les mêmes résultats.

Ce qui rend les méthodes numériques utilisées performantes et fiables pour notre exemple.

V.4 Système non linéaire

V.4.1 Équation de Duffing

C'est une équation différentielle non linéaire du second ordre utilisé pour simuler des oscillateurs spécifiques pilotés et amortis.

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \eta x^3 = \alpha \cos(\Omega t) \quad (5.1)$$

V.4.1.1 Etude des mouvements chaotiques

Les solutions périodiques qui viennent d'être décrites ne sont pas les seules possibles. En faisant varier les paramètres de l'oscillateur et de l'excitation, la simulation numérique permet de mettre en évidence d'autres types de solutions. [1] Dont la période n'est pas celle de l'excitation, mais aussi des solutions qui ne sont pas périodiques et qui sont très sensibles aux conditions initiales. Ceci a été montré en particulier par Ueda [15] qui a fait une étude systématique du comportement

dynamique de l'oscillateur de Duffing, forcé de façon harmonique. Nous rapportons ici un cas particulier de cette étude, relatif à l'équation :

$$\ddot{\xi} + 0.05\dot{\xi} + \xi^3 = 7.5 \cos \tau$$

Avec $x = \xi$

Les conditions initiales sont : $\xi_0 = 3.0$ et $\dot{\xi}_0 = 4.0$

On peut voir que la trajectoire de la phase ne se ferme pas (figure (V-14 (a)) , un calcul effectué sur une durée beaucoup plus longue que celle effectuée ici montrerait qu'elle finirait par former un cycle limite.

La figure (V-14) montre le portrait de phase obtenue a $tf = 40s$, et les autres figures (a), (b), (c) et (d) montre le portrait de phase obtenue à $tf = 75s$, $125s$ et ∞ , respectivement.

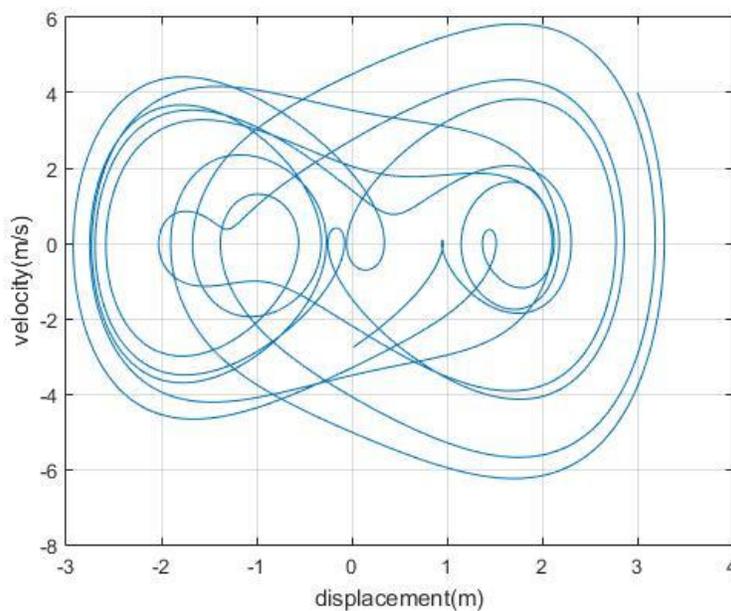


Figure V-14(a) : Portrait de phase de la solution de Ueda $\xi_0 = 3.0$ et $\dot{\xi}_0 = 4.0$ D'après la méthode de simulation directe

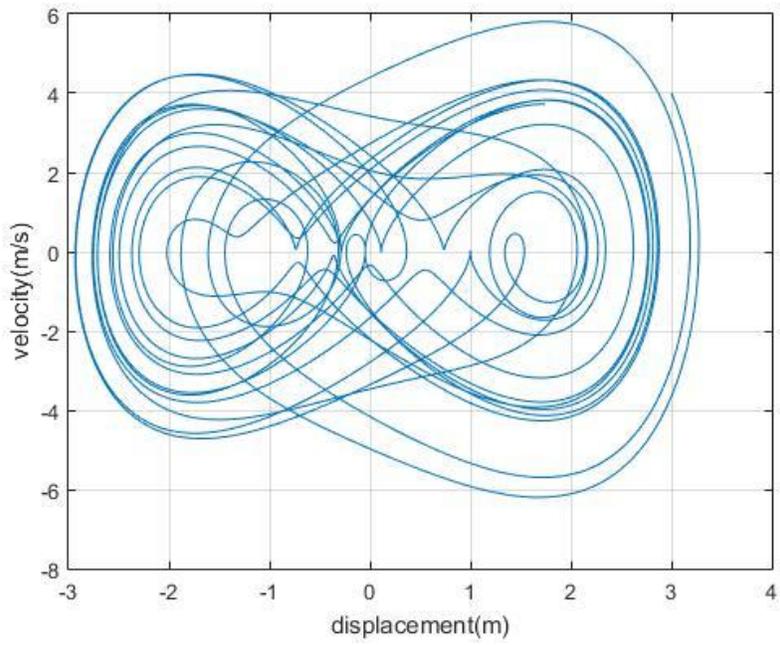


Figure V-14(b)

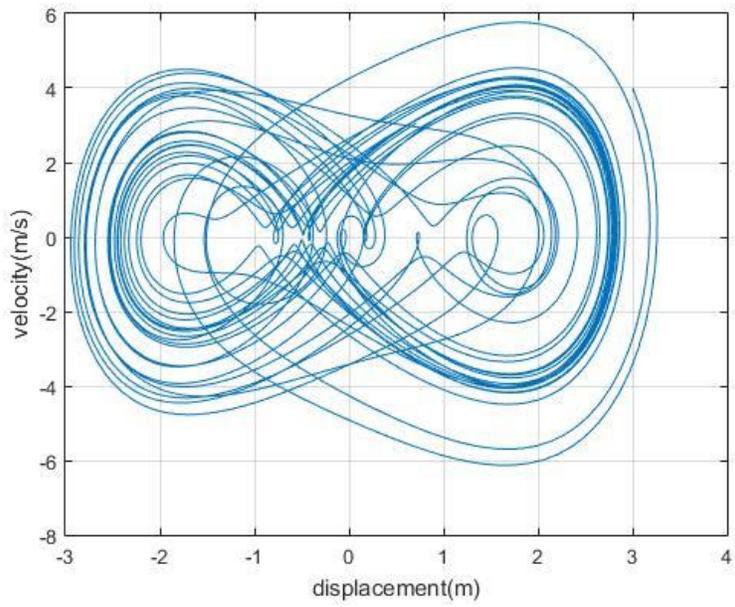


Figure V-14(c)

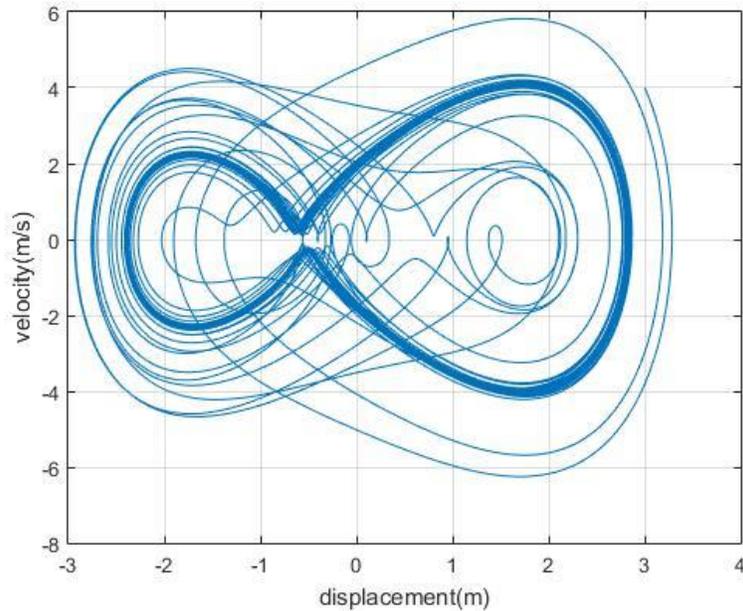


Figure V-14(d)

D'après la figure (V-14(d)) on peut maintenant voir facilement le cycle limite avec le traçage dense.

On constate que ces solutions s'écartent rapidement les unes des autres avec le temps. D'un point de vue pratique, cela indique que les équations de ce système déterministe ne sont pas suffisantes pour prédire l'état dynamique du système à un instant donné. En effet, il est impossible de contrôler les paramètres d'un système réel, même très simple, avec le degré de précision requis pour que son comportement soit déterministe. Ce type de solution est appelé chaotique. Mais les termes non linéaires de la structure du système conduiront la réponse dynamique à être amortie si elle est suffisamment rigide dans son cycle limite.

V.4.1.2 Exemple et résultats

Les paramètres sont :

$$\alpha = 0.5 \quad ; \quad \Omega = 0.5 \quad ; \quad \eta = 0.5 \quad ; \quad \zeta = 0.2$$

Et les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0.05 \quad \text{Et} \quad \dot{x}(0) = 0$$

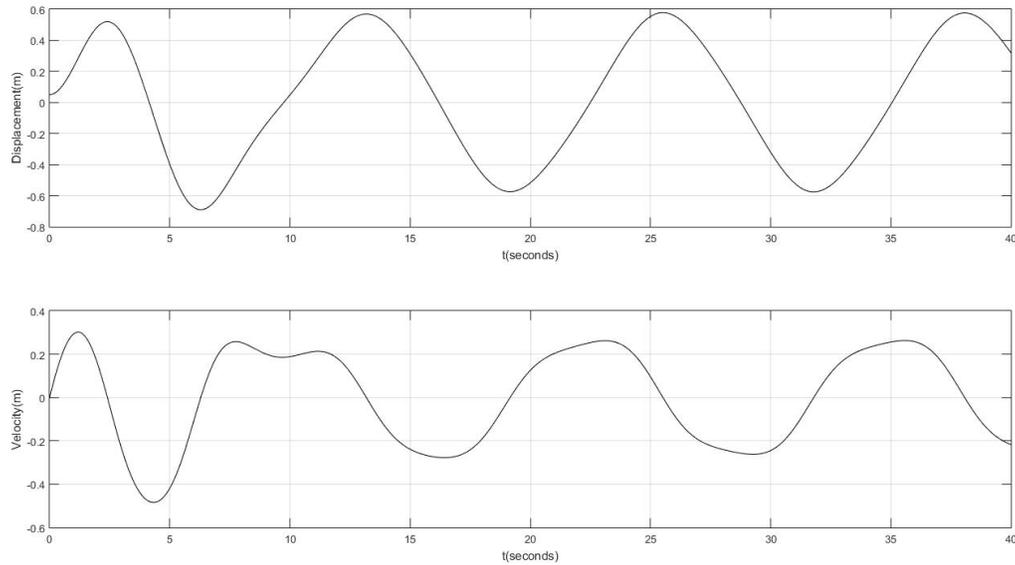


Figure V-15 : La réponse $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ de système non linéaire représenté par la méthode de la Simulation Direct

La figure (V-15) représente le déplacement (en dessus) et la vitesse (en dessous) en fonction du temps de la masse du système non linéaire donné par la méthode de simulation directe.

Le régime transitoire du déplacement du système, commence au temps zéro et se termine à 13,16 secondes, suivi par le régime permanent qui est caractérisé par une période de 12,33 secondes, le déplacement le plus élevé enregistré est de $-0,5697$ mètre.

Pour le graphique de la vitesse, la vitesse la plus élevée enregistrée est de $-0,484$ m/s au bout de 4,32 secondes.

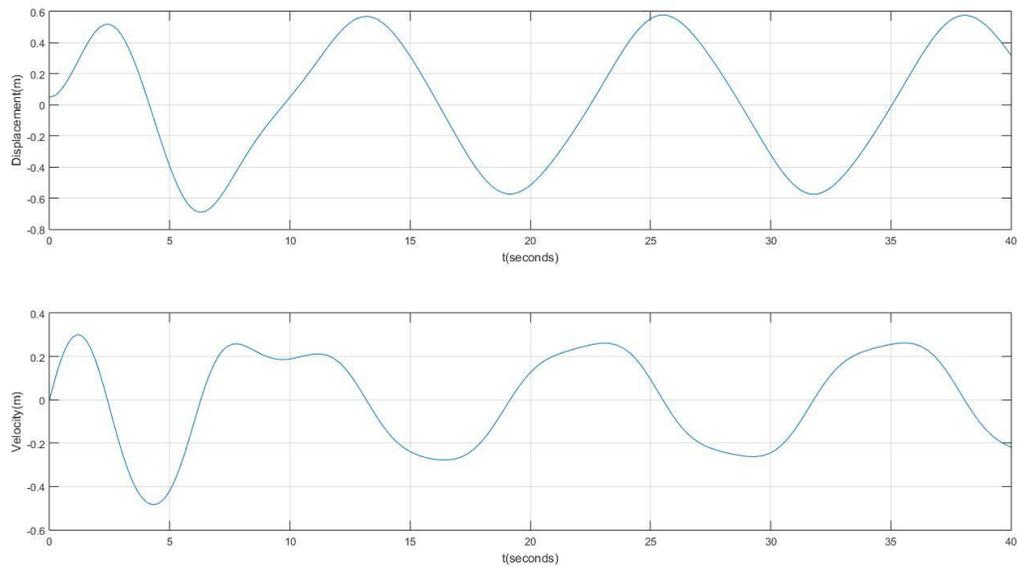


Figure V-16 : La réponse $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ de système non linéaire représenté par Runge-Kutta

La figure (V-16) représente le déplacement (en dessus) et la vitesse (en dessous) en fonction du temps de la masse du système non linéaire donné par la méthode de Runge-Kuta.

Le régime transitoire du déplacement du système, commence au temps zéro et se termine toujours à 13,16 *secondes*, suivi par le régime permanent qui est caractérisé par une même période de 12,33 *secondes*, le déplacement le plus élevé enregistré est de $-0,5694$ *mètre*.

Pour le graphique de la vitesse, la vitesse la plus élevée enregistrée est de $-0,4839$ *m/s* au bout de 4,285 *secondes*.

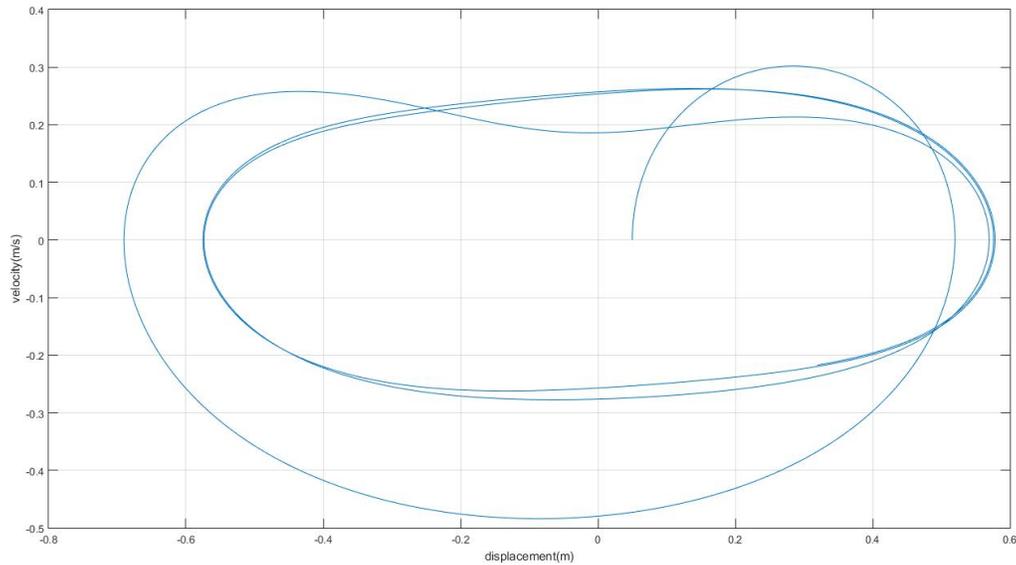


Figure V-17 : Portrait de phase de l'équation de Duffing d'après la simulation directe

La figure (V-17) représente la vitesse du système $\dot{x}(t)$ en fonction de déplacement $x(t)$ obtenue par la méthode de simulation directe.

La trace commence à $(0.05, 0)$ jusqu'à un pic de $(0.31, 0.25)$ puis elle descend à $(-0.94, -0.48)$ et remonte à $(0.26, -0.44)$ en formant un cercle plus large, puis elle continue à former un cercle plus étroit, de façon répétée jusqu'à l'infini, et c'est ce que nous appelons le cycle limite.

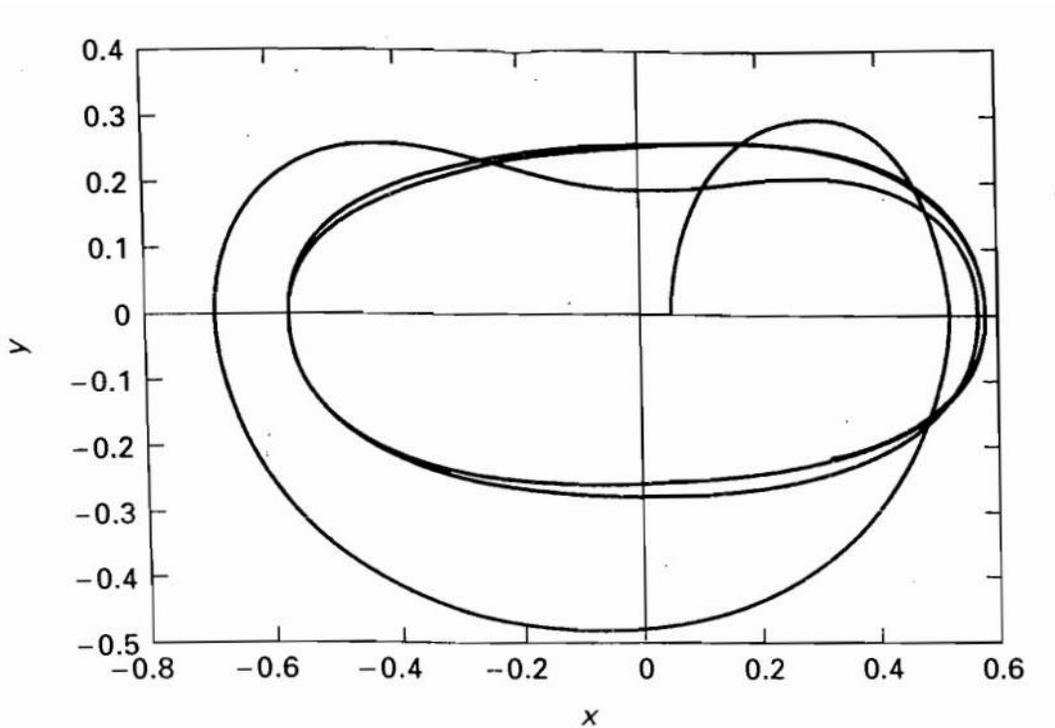


Figure V-18 : Portrait de phase de l'équation de Duffing d'après la méthode Runge-Kutta[13]

La figure (V-18) représente la vitesse du système $\dot{x}(t)$ en fonction de déplacement $x(t)$ obtenue par la méthode de Runge-Kutta.[14]

V.4.1.3 Interprétation

La table ci dessous facilite la comparaison entre les deux méthodes :

Tableau V-3 Comparaison entre la méthode Runge Kutta et la simulation directe

La méthode	Simulation directe			Runge-Kuta		
	$\dot{x}(m/s)$	$t_1(s)$	$x(m)$	$\dot{x}(m/s)$	$t_1(s)$	$x(m)$
Pt. Déplacement maximal		13.16	0.5697		13.16	0.5694
Pt. Vitesse maximale	-0.484	4.32		-0.4839	4.285	

D'après les figures (V-15) et (V-16), les graphiques de déplacement et de vitesse en fonction du temps ainsi que leur tableau de comparaison ont donné des résultats identiques dans les deux méthodes.

À partir des graphiques (V-17) et (V-18), nous pouvons constater que les deux méthodes mènent aux mêmes résultats, notez que le graphique commence au même point initial, il oscille puis se stabilise en formant ce qui a été appelé le cycle limite, ceci est dû à l'effet de l'amortissement, si la force d'amortissement ζ est diminuée, le graphique continuera à osciller à l'intérieur du cycle limite (infiniment si la force d'amortissement est nulle). Si nous augmentons l'amplitude de la force motrice α , l'objet oscillera autour de deux points et se déplacera plus loin en termes de déplacement x . Pour la vitesse, elle sera fortement augmentée si la fréquence ω augmente également.

En effet, si le mouvement est périodique, le portrait de phase diminue jusqu'à une courbe fermée lorsque la longueur de l'évolution temporelle simulée devient suffisante pour aboutir à un régime de réponse stable. Pour conclure, on peut dire que pour l'équation de Duffing dans les systèmes non linéaires, les conditions initiales jouent un rôle essentiel sur les résultats finaux, même si elles sont modifiées un peu, le graphique concernant la vitesse par rapport au déplacement prendrait une forme complètement différente, cela ne pose pas de problème car les deux méthodes traitent les conditions initiales de manière similaire.

V.4.2 Equation de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur non conservatif à amortissement non linéaire. Il évolue dans le temps selon l'équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{x} - \mu\dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (5.2)$$

Cette équation peut être réécrite comme le système suivant d'équations du premier ordre :

$$\dot{x}_1 = \mu x_1(1 - x_1^2) - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Il s'agit d'une équation décrivant des oscillations auto-entretenues dans lesquelles l'énergie est introduite dans les petites oscillations et retirée des grandes oscillations. Et c'est l'un des cas d'oscillations à cycle limite (LCO). Différents chercheurs ont étudié de manière expérimentale et théorique l'effet des non-linéarités aérodynamiques et structurelles sur les LCOs dans les ailes et les profils aérodynamiques.

V.4.2.1 Exemple et résultat

Pour résoudre l'équation (5.2), les deux mêmes méthodes vont être utilisés.

Pour $\mu = 1.5$

Et les conditions initiales : $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -0.05$

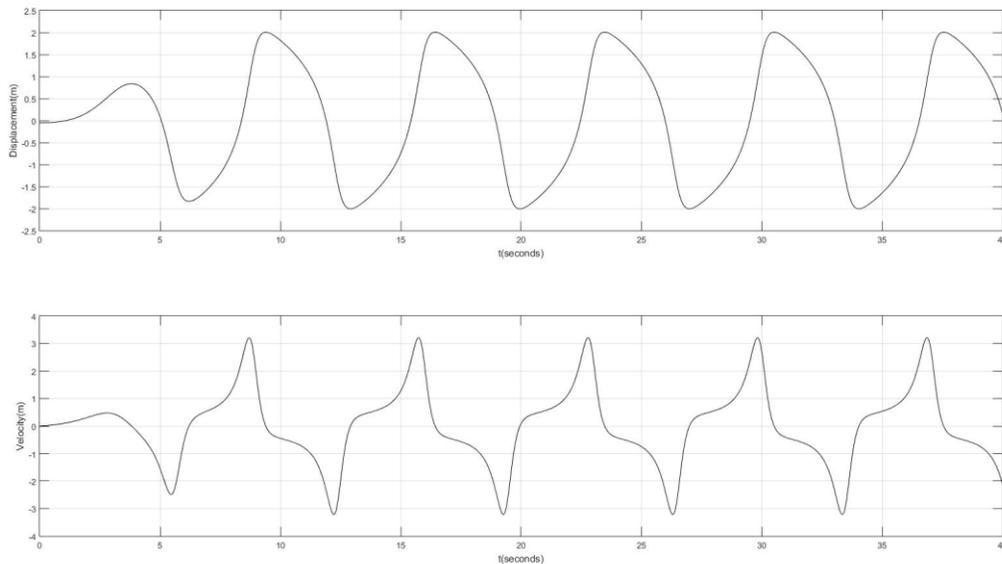


Figure V-19 : Le déplacement $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ représenté par la méthode de la simulation directe

La figure (V-19) présente le graphique du déplacement en fonction du temps (au-dessus) et le graphique de la vitesse en fonction du temps (au-dessous), tous deux résultant de l'utilisation de la méthode de simulation directe.

Le régime transitoire du déplacement du système, commence au temps zéro et se termine à 9.376 secondes, suivi par le régime permanent qui est caractérisé par une période de 7.04 secondes, le déplacement le plus élevé enregistré est de 2.006 mètre.

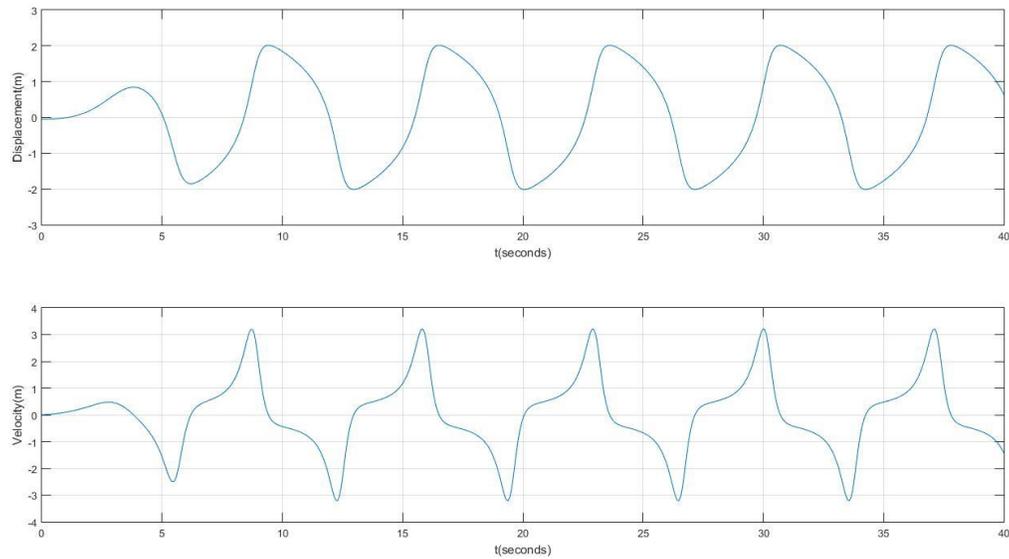


Figure V-20 : Le déplacement $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ représenté par la méthode de Runge Kutta
 Pour le graphique de la vitesse, la vitesse la plus élevée enregistrée est de 3.214 m/s au bout de 29.83 secondes .

La figure (V-20) représente le déplacement (en dessus) et la vitesse (en dessous) en fonction du temps de la masse du système non linéaire donné par la méthode de Runge-Kuta.

Le régime transitoire du déplacement du système, commence au temps zéro et se termine à 9.424 secondes , suivi par le régime permanent qui est caractérisé par une période de 7.09 secondes , le déplacement le plus élevé enregistré est de 2.014 mètre .

Pour le graphique de la vitesse, la vitesse la plus élevée enregistrée est de 3.215 m/s au bout de 30.03 secondes .

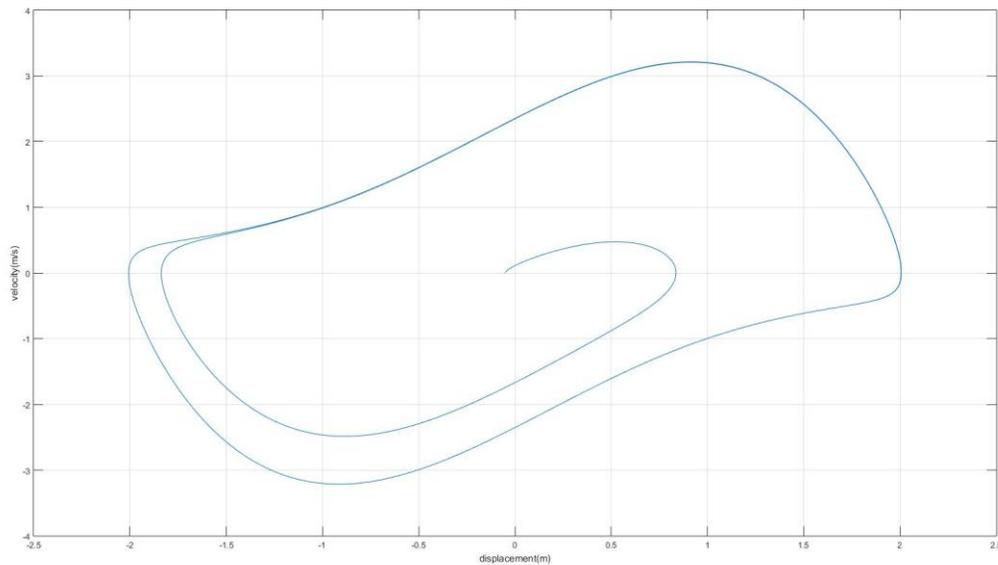


Figure V-21 : Portrait de phase de l'équation de Van der pol d'après la méthode de simulation directe

La figure (V-21) représente la vitesse du système \dot{x} en fonction de déplacement x obtenue par la méthode de Runge-Kutta.

La trajectoire commence à partir de nos conditions initiales $(0, -0.05)$ jusqu'à un maximum de $(0.49, 0.51)$ puis elle va descendre à $(-0.82, -2.38)$ puis remonter à $(-1.87, 0.21)$ pour commencer à former le cycle fermé dans le régime permanent.

En effet si $x(t)$ est grand il y a un amortissement et le rayon polaire des solutions dans le plan de phase a tendance à décroître. Au contraire si $x(t)$ est petit alors le terme $(x(t)^2 - 1)x(t)$ apporte de l'énergie et le rayon a tendance à augmenter. [1]

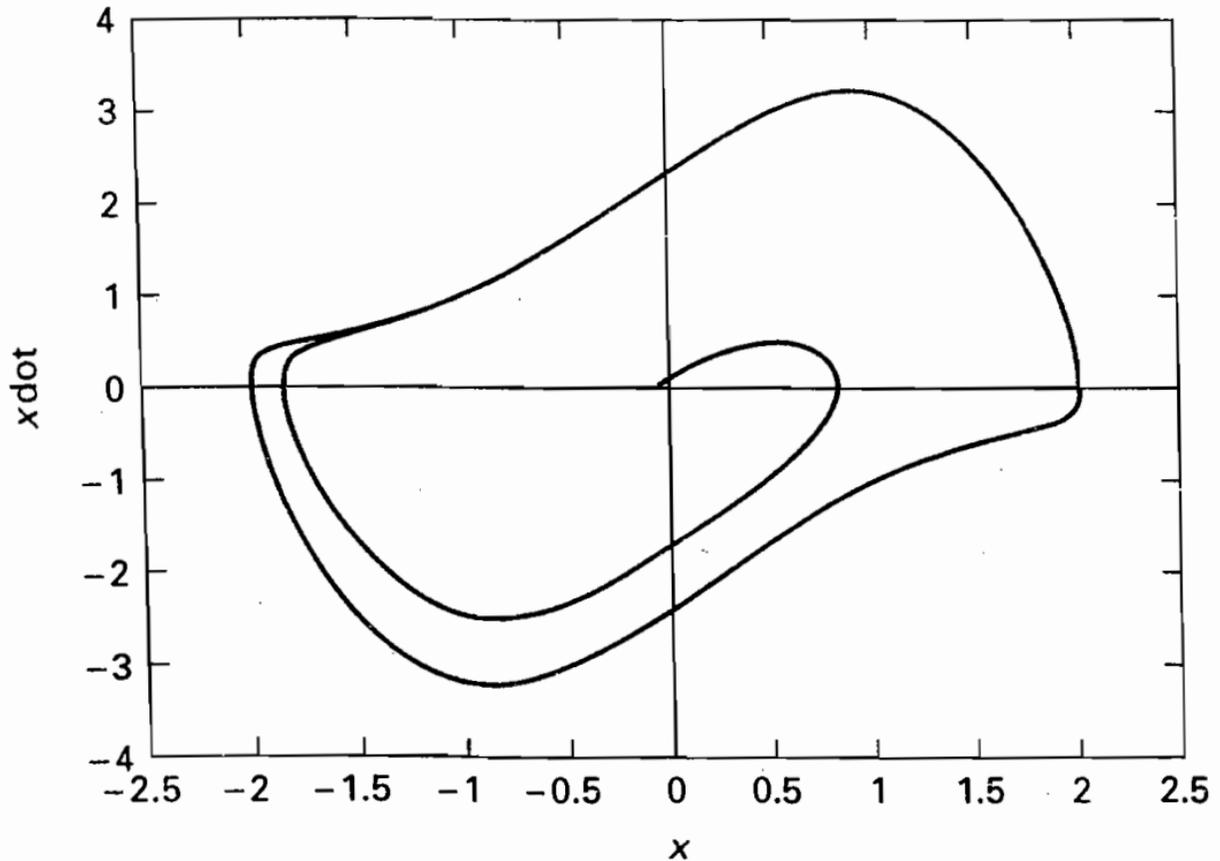


Figure V-22 : Portrait de phase de l'équation de Van der pol d'après la méthode de Runge-Kutta [13]

La figure (V-22) représente la vitesse du système \dot{x} en fonction de déplacement x obtenue par la méthode de Runge-Kutta. [14]

V.4.2.2 Interprétation

Le tableau ci dessous facilite la comparaison entre les deux méthodes :

Tableau V-4 Comparaison entre la simulation directe et Runge Kutta

La méthode	Simulation directe			Runge-Kutta		
	$\dot{x}(m/s)$	$t_1(s)$	$x(m)$	$\dot{x}(m/s)$	$t_1(s)$	$x(m)$
Pt. Déplacement maximal		9.376	2.006		9.424	2.014
Pt. Vitesse maximale	3.214	29.83		3.215	30.03	

Après avoir comparé le déplacement et la vitesse des figures (V-19) et (V-20) ainsi que leur tableau de comparaison, on peut conclure que les résultats ne diffèrent pas des deux méthodes, il en va de même pour les graphiques de la vitesse par rapport au temps, seule la vitesse de calcul était significativement plus lente dans la méthode Runge-Kutta. Bien que les méthodes Runge-Kutta soient faciles à mettre en œuvre et très stables, elles n'ont pas l'avantage d'un calcul rapide, car chaque étape nécessite quatre substitutions dans l'équation différentielle, c'est là que la méthode Runge-kutta est moins performante en termes de vitesse de calcul par rapport à la méthode de simulation directe.

CONCLUSION

Initialement, nous avons discuté du rôle significatif que les vibrations jouent dans le domaine aéronautique, en particulier dans les problèmes aéroélastiques qui ont fait de l'étude des vibrations une étape essentielle dans le développement et la maintenance des avions dans le monde. Ceci nous a conduit aux types d'excitations qui agissent sur des systèmes linéaires à un seul degré de liberté, ceci a été étendu à l'étude de la réponse dynamique des systèmes à deux et plusieurs degrés de liberté, ce qui a introduit de bonnes méthodes de résolution telles que l'utilisation des transformées de Laplace et l'intégrale de convolution.

La plupart des problèmes vibratoires sont plus complexes que des systèmes linéaires, et donc le concept de non linéarité a été présenté et il a été prouvé qu'il peut émerger de la non linéarité des termes aérodynamiques de la structure physique du système, ou dans certains cas des deux. L'oscillation du cycle limite a été observée dans les réponses des systèmes non linéaires, et bien qu'elle puisse limiter positivement le déplacement de la structure et l'empêcher d'atteindre sa fréquence de résonance, les vastes oscillations dans le cycle entraîneront éventuellement la fatigue de la structure.

Le besoin de calcul numérique a augmenté au fur et à mesure que les problèmes devenaient plus complexes, tandis que les méthodes traditionnelles demandaient plus de temps et de travail pour être mises en œuvre. Différentes méthodes ont été appliquées dans MATLAB et comparées entre elles. La méthode de simulation directe s'est avérée stable, rapide et relativement précise pour résoudre des cas avec différents paramètres.

Les étudiants, les enseignants et les ingénieurs peuvent utiliser cette thèse comme base pour des études futures, telles que l'étude dynamique du régime transsonique et ses ondes de choc, le buffeting et d'autres problèmes vibratoires complexes rencontrés dans la vie réelle.

Annexe : A

Laplace Table :

$f(t)$	$f(s)$
$\delta(t)$; unit impulse function	1
$u_s(t)$; unit step function	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_s(t)$; $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-at} u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u_s(t)$; $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\sin(at) u_s(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at) u_s(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega t} \sin \omega_d t u_s(t)$	$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\frac{\omega}{\omega_d} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t - \phi_1) u_s(t)$;	$\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$\left[1 - \frac{\omega}{\omega_d} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \phi_1)\right] u_s(t)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Axisa, F. (2001). Systèmes discrets (Modélisation des systèmes mécaniques., 1) (HERMES SCIENCE PUBLICATIONS). HERMES SCIENCE.
- [2] Cosmas PANDIT, P. (s. d.). VIBRATIONS AEROELASTIQUES DES SURFACES PORTANTES (Thèse Doctorat). L'ECOLE CENTRALE DE LYON.
- [3] Destuynder, P. (2007, October 17). Aéroélasticité et aéroacoustique (HERMES SCIENCE PUBLICATIONS). HERMES SCIENCE.
- [4] Devices, T. (2018, 13 mars). Three Major Ways Your Manufactured Rotating Component Can Become Unbalanced. Consulté le 10 septembre 2022, à l'adresse <https://www.testdevices.com/three-major-ways-manufactured-rotating-component-can-become-unbalanced/>
- [4] Dukkipati, R. V. (2007). Solving Vibration Analysis Problems Using MATLAB. New Age International.
- [5] Emmanuel, T. (2005). Contrôle optimal : Théorie & applications (Deuxième édition).
- [6] Ewins, D. J., Rao, S. S. & Braun, S. G. (2001). Encyclopedia of Vibration, Three-Volume Set (1re éd.). Academic Press.
- [7] Fung, Y. C. (2008). An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. Dover Publications.
- [8] He, S., Yang, Z. & Gu, Y. (2016). Limit cycle oscillation behavior of transonic control surface buzz considering free-play nonlinearity. Journal of Fluids and Structures, 61, 431-449. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.11.014>
- [9] Inman, D. (2013). Engineering Vibration (4e éd.). Pearson.
- [10] Kelly, G. S. (2011). Mechanical Vibrations: Theory and Applications. Cengage Learning.
- [11] Landau, L. & Lifchitz, E. (1994). Physique théorique - Mécanique. ELLIPSES.
- [12] Levinski, O. (2004, September 6). Aeroelastic modelling of aircraft empennage buffet. ANZIAM Journal, 45
- [13] Petersen, D., Link, R. & Burgess, G. (2000). Extension and Evaluation of Fatigue Model for Product Shock Fragility Used in Package Design. Journal of Testing and Evaluation, 28(2), 116.
- [14] Thomson, W. & Dahleh, M. D. (1997). Theory of Vibration with Applications (5th Edition) (5e éd.). Pearson.
- [15] Ueda, Y. (2001, November 1). *The Road to Chaos II* (2nd ed.). Aerial Press.