

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE
En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique
Option : Propulsion

THEME

**SIMULATION NUMÉRIQUE DE
LA CONVECTION NATURELLE EN REGIME LAMINAIRE
DANS LES CAVITES BIDIMENSIONNELLES**

Dirigé par :

Dr BOUNEDER Mohamed

Présenté par :

MELOUAH Nadir

MESSELEM Chouaib

Promotion 2004

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents.

A mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

A toute mes amis.

Nadir

Dédicace

A mes chers parents.

A mes frères et ma sœur.

A toute ma famille.

A mes amis, présents et absents.

Je dédie ce mémoire de fin d'étude

Chouaib

Remerciements

Au terme de ce projet nous tenons à adresser nos sincères remerciements, à notre promoteur,

M^r BOUNEDER MOHAMED pour notre encadrement dans ce travail avec enthousiasme et compétence, sa participation avec dynamisme à tous les stades d'élaboration de ce projet, sa disponibilité chaque fois que nous en avons eu recours et surtout ses conseils précieux qui nous ont été très bénéfiques.

Nous remercions également tous les enseignants de Département d'Aéronautique de Blida.

NOMENCLATURE

A : Coefficient de l'équation algébrique.

C_p : Chaleur massique à pression constante (g/Kg.°K)

D : Flux de diffusion à travers les interfaces du volume de contrôle

H : Largeur de la cavité

Δx, Δy : Dimensions du volume de contrôle

dX_e, dX_w, dX_n et dX_s : sont respectivement les distances entre le nœud considéré P et les nœuds E,W,N,S

E : Energie interne

F : Flux de convection évalué à l'interface du volume de contrôle

F₁ : Force de volume (N)

g : Accélération de la pesanteur (m/s²)

P : Pression (N/m²)

S : Surface (m²)

S_φ : Terme source

T : Température (°K)

T_e : Température de la paroi froide (°K)

T_h : Température de la paroi chaude (°K)

U : Composante de la vitesse dimensionnelle suivant la direction x (m/s)

V : Composante de la vitesse dimensionnelle suivant la direction y (m/s)

X : Coordonnée cartésienne

Y : Coordonnée cartésienne

Symbole Grecs :

ρ : Masse volumique (Kg/m³)

θ : Température adimensionnelle

Φ : Fonction de dissipation

φ : Variable dépendante

μ : Viscosité dynamique (g/Kg.m)

ν : Viscosité cinématique (m²/s)

β : Coefficient de dilatation thermique à pression constante (°K⁻¹)

α : Coefficient de diffusion thermique (m^2/s)

Γ : Grandeur caractérisant le flux de convection à travers les interfaces du volume de contrôle

Ψ : Fonction de courant

Indice :

e : La face Est du volume de contrôle

w : La face West du volume de contrôle

n : La face Nord du volume de contrôle

s : La face Sud du volume de contrôle

E : Nœud considéré du côté Est de P

W : Nœud considéré du côté West de P

N : Nœud considéré du côté Nord de P

S : Nœud considéré du côté Sud de P

P : Nœud considéré du maillage

Opérateur mathématique :

A : Laplacien

d : Dérivée totale

δ : Dérivée partielle

div : Divergence

grad : Gradient

Nombre sans dimensions :

Pe : Nombre de Peclet

Gr : Nombre de Grashoff

Pr : Nombre de Prandtl

Ra : Nombre de Rayleigh

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I : FORMULATION DU PROBLEME DE LA CONVECTION NATURELLE	
1-1 Introduction	03
1-2 Géométrie du problème	03
1-2-1- La cavité carrée	03
1-2-2- La cavité circulaire	04
1-3- Equations régissant l'écoulement du fluide	05
1-3-1- Equation de la continuité	05
1-3-2- Equation des quantités de mouvement	06
1-3-3- Equation de l'énergie	06
1-4- Equations simplifiées	06
1-4-1- Hypothèses	06
1-4-2- Cavité carrée	07
1-4-2-1 Equation de continuité	07
1-4-2-2 Equation des quantités de mouvement	07
1-4-2-3 Equation de l'énergie	07
1-4-3- Cavité circulaire	07
1-4-3-1 Equation de continuité	07
1-4-3-2 Equation des quantités de mouvement	07
1-4-3-3 Equation de l'énergie	08
1-5- Condition aux limites	08
1-6- Adimensionnalisations	08
1-6-1- Problème de la cavité carrée	09
1-6-1-1 Equation de continuité adimensionnelle	09
1-6-1-2 Equation de quantité de mouvement adimensionnelle	09
1-6-1-3 Equation de l'énergie adimensionnelle	10
1-6-2- Problème de la cavité circulaire	10
1-6-2-1 Equation de continuité adimensionnelle	10
1-6-2-2 Equation de quantité de mouvement adimensionnelle	10
1-6-2-3 Equation de l'énergie adimensionnelle	10
1-6-3- Conditions aux limites adimensionnelles	11
CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLEME DE LA CONDUCTION	
II.1 Introduction	12
II.2 Applications	12
II-3 Géométrie du problème	12
II-3-1 Géométrie carrée	12
II-3-2 Géométrie circulaire	13
II-4 Equations générales de la conduction	13
II-4-1 Loi de Fourier	13
II-4-2 Bilan d'énergie	14

II-5 Equations simplifiées	15
II-5-1 Hypothèses	15
II-5-2 Equation de la chaleur pour géométrie carrée	15
II-5-3 équation de la chaleur pour géométrie circulaire	15
II-6 Conductions aux limites	15
CHAPITRE III : MAILLAGE ET DISCRETISATION	
III-1 Introduction	17
III-2 Principe de la méthode de volume finis	17
III-3 Maillage	18
III-4 Forme générale de l'équation de transport	20
III-5 Discrétisation des équations de la convection naturelle	
III-5-1 La cavité carrée	
III-5-1-1 Discrétisation de l'équation de continuité adimensionnelle	21
III-5-1-2 Discrétisation de l'équation de transport	22
III-5-1-3 Discrétisation de l'équation de l'énergie	26
III-5-1-4 L'équation de quantité de mouvement	28
III-5-1-5 Discrétisation de la fonction de courant	29
III-5-1-6 Discrétisation des conditions aux limites	30
III-5-2 La cavité circulaire	30
III-5-2-1 Discrétisation de l'équation de transport	30
III-5-2-2 Discrétisation de l'équation de l'énergie	35
III-5-2-3 Discrétisation de la fonction de courant	37
III-5-2-4 Discrétisation des conditions aux limites	37
III-6 Discrétisation des équations de la conduction	38
III-6-1 Présentation du problème à étudier	39
III-6-1-1 Géométrie carrée	39
III-6-1-2 Géométrie circulaire	40
CHAPITRE IV :	
IV-1 Méthode itérative de solution (Algorithme TDMA)	42
IV-2 Schéma de calcul l'algorithme SIMPLE (Semi Implicite Méthode for Pressure Linkage Equation)	44
CHAPITRE V : Résultats et discussions	
CONCLUSION	
60	
ANNEXE	
BIBLIOGRAPHIE	

INTRODUCTION GENERALE

L'ensemble des problèmes de thermo-aéro-hydraulique d'ingénierie sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles « EDP » déduites des principes de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie). La théorie des équations aux dérivées partielles (existence, unicité, stabilité des schémas, problème bien posé) ne constitue pas un ensemble aussi complet que celle des équations aux dérivées ordinaires. D'autre part, dans le cas où les solutions analytiques existent, ces solutions sont triviales ou tellement simples qu'elles ne sont pas utiles en pratique.

Au cours de ces dernières années, les méthodes de travail de l'ingénieur ont été profondément modifiées par les progrès de l'informatique et par des outils d'analyse numérique parus sur le marché du logiciel.

L'ordinateur permet l'étude de situations insoupçonnées mais malheureusement les résultats obtenus dépendent fortement du modèle mathématique que l'on a introduit, des hypothèses simplificatrices que l'on a posé et de l'algorithme numérique que l'on utilise pour le solutionner ; car la réalité physique est souvent très complexe à modéliser.

A partir d'une théorie décrivant un phénomène quelconque, il est généralement possible soit de construire un mécanisme physique ou une maquette dont le fonctionnement présente des analogies avec le déroulement du phénomène tel que la théorie le décrit, soit d'élaborer un modèle abstrait programmable sur ordinateur, cette dernière construction est la plus aisée à mettre en œuvre, et la plus répandue dans tous les domaines dont nous citons quelques exemple : transfert thermique, aérodynamique, mécanique des fluides etc.....

A ce titre, les équations de Navier Stokes fournissent une modélisation précise de tous les écoulements des fluides, laminaire (nombres de Reynolds petits) et turbulents, à l'exception de ceux pour lesquels moléculaire s'effectuent à une échelle voisine du transport macroscopique. Vu l'énorme champ d'application des équations de Navier Stokes, leur résolution numérique a pris, une place grandissante comme moyen d'investigation de ces écoulements fluides.

De nos jours, l'avènement du calcul vectoriel ou parallèle, donne lieu à une floraison de travaux de simulation numérique et surtout d'algorithme. Cette algorithmique proposée originellement par SCHWARTZ permet en effet le traitement des problèmes tridimensionnels en un temps acceptable.

Le développement des langages de programmation et du matériel informatique ont aussi contribué à donner aux Logiciels de calcul numérique une certaine convivialité ; ils permettent ainsi la reproduction sous formes de scènes ou film numérique l'intégralité d'une expérience d'écoulement fluide. Dans ce contexte, on peut citer les logiciels

commerciaux comme (FLUENT, CFX-F3D, PHOENICS, COSMOS, STAR-CD, TRIO...).

En pratique les écoulements de fluide sont complexes et font intervenir plusieurs phénomènes à la fois ; on peut citer :

- La pression et les gradients de pressions élevés.
- La diffusion de la chaleur dans les trois directions de l'espace.
- La convection forcée, naturelle ou mixte.
- La turbulence
- Les réactions chimiques

Le problème de convection – diffusion est un problème fondamental de la dynamique des fluides ; il est à l'origine de l'écoulement et son étude d'un point de vue numérique est très instructrice pour l'ingénieur.

Le but de notre étude est de simuler un écoulement induit par une convection naturelle. Dans la nature et en pratique, ces écoulements sont courants. A ce titre, on peut citer :

-La ventilation ou l'isolation des bâtiments, des avions, les murs multicouche, les cellules des avions et les tuyauteries et lubrification des paliers.

-La protection contre les incendies dans les avions et les bâtiments. L'étude de l'influence de la convection sur la résistance thermique des structures, notamment dans le cas de sublimation, de vaporisation des isolants.

- Le problème de traitement des matériaux comme la coulée d'un matériau pur ou alliage. L'étude des phénomènes de micro et macro ségrégation. L'exemple typique est celui de la croissance cristalline " Crystal Growth " par transport en phase gazeuse.

Sommaires toutes, l'objectif de notre travail consiste en la simulation numérique de la convection naturelle dans les cavités bidimensionnelles en régime laminaire avec l'aide d'un logiciel (FLUENT) qui a fait ses preuves dans ce type d'écoulement.

CHAPITRE I

Formulation du problème de
la convection naturelle

I-1 Introduction :

Le transfert de chaleur par convection naturelle est dû à l'action simultanée des différences de température au sein du fluide et d'un champ des forces massiques, au contact d'un corps chaud, la température du fluide augmente, donc sa masse volumique décroît. Le fluide de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse de fluide chaud s'élève en enlevant de la chaleur au corps, elle est remplacée par une masse de fluide froid qui au contact du corps, s'échauffe et ainsi de suite.

Les phénomènes de la convection naturelle sont décrits par les équations générales de la dynamique des fluides, (équation de continuité et Navier Stocks) complétées par l'équation de l'énergie déduite de l'application du premier principe de la thermodynamique

I-2 Géométrie du problème :

On s'intéresse aux écoulements bidimensionnels dans des cavités de forme carrée et circulaire

I-2-1- La cavité carrée :

Considérons une cavité carrée, les parois verticales sont maintenues à température constante sous un gradient de température, l'une est froide avec une température (T_c) et l'autre est chaude avec une température (T_h)

Les parois horizontales inférieures et supérieures sont adiabatiques (**Fig.I-1**).

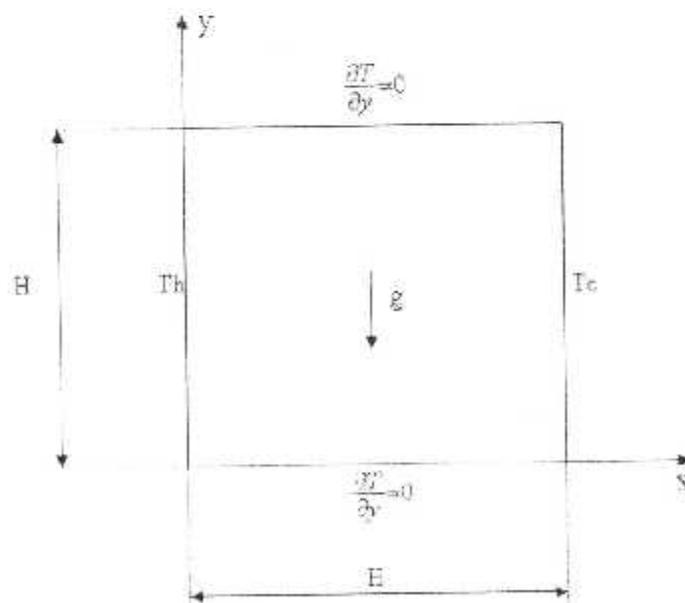
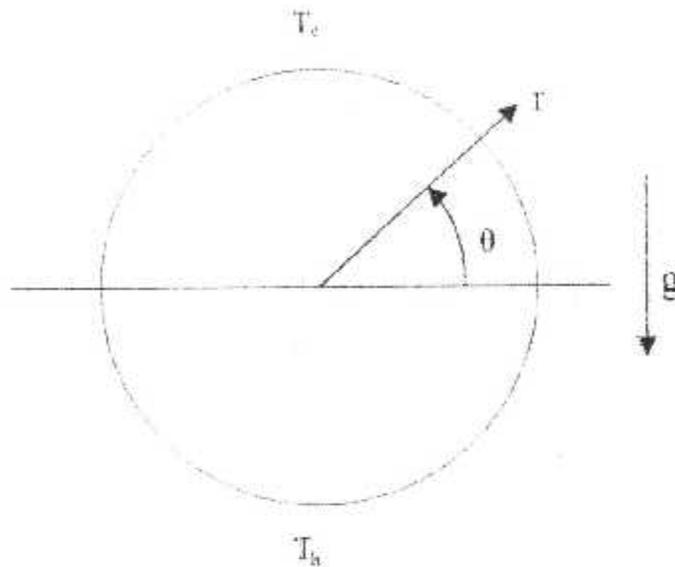


Fig.I-1

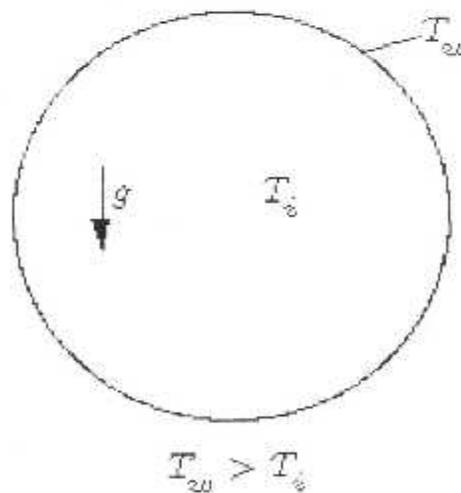
1-2-2- La cavité circulaire:

On considère deux problèmes

1- Une cavité circulaire de rayon R , la demi-paroi supérieure est froide avec une température T_c , est l'autre est chaude avec une température T_h (**Fig.1-2**).

**Fig.1-2**

2- Une cavité circulaire de rayon R , avec une température chaude T_w à la paroi est une température froide T_i à l'intérieur du cercle (**Fig.1-3**).



$$T_w > T_i$$

Fig.1-3

On utilise pour deux problèmes les coordonnées cylindriques (r, θ)

I-3- Equations régissant l'écoulement du fluide :

A l'échelle macroscopique, les problèmes de la dynamique des fluides visqueux sont tous gouvernés par la même équation, celle de Navier-Stokes. Le problème mathématique reste ouvert et ce n'est que lorsque les conditions aux limites sont fixés qu'il y a possibilité de recherche de la solution. Celle-ci doit être bien sur unique, d'où l'exigence d'un problème bien posé. Ceci n'excluant pas d'autres difficultés que peut rencontrer un algorithme numérique dans la résolution des problèmes de l'hydrodynamique (précisions, erreurs de discrétisations, d'arrondis, temps de calcul prohibitifs, mémoires etc...)

Un modèle mathématique doit tenir compte des mécanismes essentiels gouvernant le phénomène.

Les équations de l'hydrodynamique peuvent ainsi, selon le type d'approximation prendre les caractères elliptiques, paraboliques, hyperboliques ou mixtes.

Les problèmes qui nous intéressent sont de nature elliptiques. Les conditions aux limites doivent être prescrites sur l'ensemble du domaine de calcul.

La résolution d'un tel problème revient à la détermination en tout point du domaine, les grandeurs caractérisant l'écoulement sont :

- La vitesse.
- La distribution de la pression.
- La distribution de la température.

Pour cela on doit établir les quatre équations suivantes :

1. Equation de continuité ou de conservation de masse.
2. Deux équations de quantité de mouvements.
3. Equation d'énergie.

I-3-1- Equation de la continuité :

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suite :

L'accumulation de masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui rentrent et celle qui sortent du volume. Il est exprimé par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left(\rho U_j \right) = 0 \quad j : \text{indice de somme}, (j=1, 2, 3)$$

C'est l'équation de la conservation de masse d'un écoulement tridimensionnel et non permanent, elle sera simplifiée ultérieurement selon les hypothèses retenues pour notre étude.

I-3-2- Equation des quantités de mouvement :

Cette équation découle de l'application de la 2ème loi de Newton à un volume de contrôle élémentaire de fluide. Elle permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent.

Au premier ordre, on supposant comme Boussinesq que les variations de température n'affectent que la densité du fluide et que celle-ci restant indépendante de la pression, dans les équations de quantité de mouvement un terme supplémentaire de poussée d'Archimède :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} \left[\Delta u_i + \frac{1}{3} (\text{grad}(\text{div} \vec{u})) \right] + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} g \delta_{i,3}$$

i : indice libre, i=1, 2, 3

j : indice de somme, j=1, 2, 3

I-3-3- Equation de l'énergie :

Le fluide n'étant plus isotherme, Il est nécessaire d'y inclure une équation dans laquelle figure la température : c'est l'équation de l'énergie déduite du premier principe de la thermodynamique :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) \right) = \text{div} (\lambda \text{grad} T) + T \beta \frac{dP}{dt} + \Phi$$

I-4- Equations simplifiées :**I-4-1- Hypothèses :**

- 1- Milieu continu.
- 2- Régime laminaire.
- 3- Ecoulement bidimensionnel.
- 4- Régime permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$
- 5- Fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$, $\text{div} u = 0$)
- 6- La masse volumique ρ vérifie les hypothèses de Boussinesq :
 ρ est constante est égale à ρ_0 , sauf dans le terme de la force gravitationnelle, elle est donnée par :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0))$$

ρ_0 : la masse volumique du fluide à la température de référence T_0 et β le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

- 7- Les variations en fonction de la conductivité thermique et de la chaleur massique à pression constante sont négligeables.
- 8- La dissipation visqueuse Φ est négligeable.

En tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, les équations simplifiées s'écrivent comme suit :

I-4-2- Cavité carré

I-4-2-1 Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

I-4-2-2 Equation des quantités de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_0)$$

Avec $\frac{\mu}{\rho_0} = \nu$ est la viscosité cinématique.

I-4-2-3 Equation de l'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

I-4-3- Cavité circulaire

Soit \vec{V} le champs de vitesse de composantes ($u_r = u, v_\theta = v$)

I-4-3-1 Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

I-4-3-2 Equation des quantités de mouvement :

❖ Direction radiale :

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right] + g\beta(T - T_0) \cos \theta$$

❖ Direction suivant θ : angulaire tangentielle

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right] + g\beta(T - T_c) \sin \theta$$

I-4-3-3 Equation de l'énergie :

$$\rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

I-5- Condition aux limites :

La résolution de ces équations différentielles aux dérivées partielles nécessite des conditions aux limites (hydrodynamiques et thermiques) sur l'ensemble du domaine ; elles sont représentées pour les deux cas dans les tableaux suivants :

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
X=0	U = V = 0	T = T _c
X=H	U = V = 0	T = T _h
Y=0	U = V = 0	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Y=H	U = V = 0	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

Tab1. Cas de la cavité carré

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
R=1, $\theta=0, \pi$	U=V=0	T=T _c
R=1, $\theta=\pi, 2\pi$	U=V=0	T=T _h

Tab2. Cas de la cavité circulaire Pb-1

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
R=1, $\theta=0, 2\pi$	U=V=0	T=T _w
R<1, $\theta=0, 2\pi$	U=V=0	T=T _i

Tab3. Cas de la cavité circulaire Pb-2

I-6- Adimensionnalisations :

En pratique on a souvent recours à l'adimensionnalisation du système d'équation, cela permet de réduire considérablement le nombre des paramètres physiques et d'obtenir des solutions indépendantes des grandeurs du corps [2].

L'élément moteur est la force ou poussée d'Archimède qui lorsqu'elle est suffisante pour vaincre les forces de viscosité initie une circulation du fluide à l'intérieur de la cavité. Cette poussée prend naissance lorsqu'une différence de température est appliquée entre les deux faces en regard d'une cavité. Les adimensionnalisations sont effectuées par rapport aux grandeurs de références.

I-6-1- Problème de la cavité carré:

d : longueur caractéristique [m]

$\frac{\alpha}{d}$: Vitesse caractéristique [m/s]

$\rho_0 \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2$: Pression caractéristique [N/m²]

$(T_h - T_c)$: température caractéristique [K]

$\alpha = \lambda / \rho_0 C_p$: Coefficient de diffusion thermique [m²/s]

Θ : Température adimensionnelle

$$x^* = \frac{x}{d}$$

$$y^* = \frac{y}{d}$$

$$U^* = \frac{u}{\left(\frac{\alpha}{d}\right)}$$

$$V^* = \frac{v}{\left(\frac{\alpha}{d}\right)}$$

$$P^* = \frac{P}{\rho_0 \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2}$$

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

I-6-1-1 Equation de continuité adimensionnelle :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

I-6-1-2 Equation de quantité de mouvement adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + \text{Ra Pr } \Theta$$

I-6-1-3 Equation de l'énergie adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} \right)$$

I-6-2- Problème de la cavité circulaire :

r Coordonnée radiale

R Rayon de la cavité

Θ Température adimensionnelle

$\alpha = \lambda / \rho_0 C_p$: Coefficient de diffusion thermique [m^2/s]

$\rho_0 \left(\frac{\alpha}{R} \right)^2$: Pression caractéristique [N/m^2]

$$r^* = \frac{r}{R} \qquad P^* = \frac{R^2 P}{\rho \alpha^2}$$

$$v^* = \frac{Rv}{\alpha} \qquad \Theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_c}$$

$$u^* = \frac{Ru}{\alpha}$$

I-6-2-1 Equation de continuité adimensionnelle :

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{u^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} = 0$$

I-6-2-2 Equation de quantité de mouvement adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{0.5}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}} \right) u^* - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} \right] - \text{Pr} \Theta \cos \theta$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + \frac{u^* v^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta^*} + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{0.5}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}} \right) v^* + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial \theta^*} \right] + \text{Pr} \Theta \sin \theta$$

I-6-2-3 Equation de l'énergie adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta^*} = \frac{1}{\text{Ra}^{0.5}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}} \right) \Theta$$

Tel que :

$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)d}{\nu^2}$ Est le nombre de GRASHOF, qui représente les forces ascensionnelles multipliées par les forces d'inertie divisées par le carré des forces de viscosité, remplace le Nombre de REYNOLDS pour caractériser la vigueur de l'écoulement. En convection, le transport de chaleur dépend de la vigueur de l'écoulement, il dépend Aussi des propriétés thermophysiques du fluide, à travers le nombre de PRANDTL, Pr., défini comme le rapport du pouvoir de diffusion visqueuse du fluide, au pouvoir de Diffusion de la chaleur. Soit :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$Ra = Gr.Pr = \frac{g\beta(T_h - T_c)d^3}{\alpha\nu}$$
 est le nombre de RAYLEIGH

1-6-3- Conditions aux limites adimensionnelles :

Les conditions aux limites adimensionnelles sont représentées dans les tableaux suivants :

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
X = 0	U = V = 0	$\Theta = 1$
X = 1	U = V = 0	$\Theta = 0$
Y = 0	U = V = 0	$\frac{\partial\Theta}{\partial y^*} = 0$
Y = 1	U = V = 0	$\frac{\partial\Theta}{\partial y^*} = 0$

Tab4. Cas de la cavité carré

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
R=1 $\theta=0,\pi$	U=V=0	$\Theta = 1$
R=1 $\theta=\pi,2\pi$	U=V=0	$\Theta = 0$

Tab5. Cas de la cavité circulaire Pb-1

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
R=1, $\theta=0,2\pi$	U=V=0	$\Theta = 1$
R<1, $\theta=0,2\pi$	U=V=0	$\Theta = 0$

Tab6. Cas de la cavité circulaire Pb-2

CHAPITRE II _____

**Formulation du problème de
la conduction**

II.1 Introduction :

La conduction thermique est la propagation de la chaleur, de molécule à molécule, dans un corps ou dans plusieurs corps contigus et non réfléchissants, sans qu'il y ait mouvement du milieu ou que ce mouvement intervienne dans la transmission.

Ce mode de transmission caractérise essentiellement les transferts de chaleur **dans les solides où entre corps solides contigus**. La conduction intervient également dans les liquides et les gaz mais, sauf dans le cas des liquides très visqueux ou des gaz emprisonnés dans des matériaux poreux, son effet sont marginaux par rapport à celui de la convection.

II.2 Applications

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des **surfaces d'échange des échangeurs de chaleur** mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc.

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des **parois composites** à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

II-3 Géométrie du problème

On s'intéresse aux géométries de la forme carrée et circulaire.

II-3-1 Géométrie carrée

Considérons une géométrie carrée, les parois horizontales et la paroi verticale droite sont maintenues à température T_h constante et la paroi gauche adiabatique. (Fig.II-1)

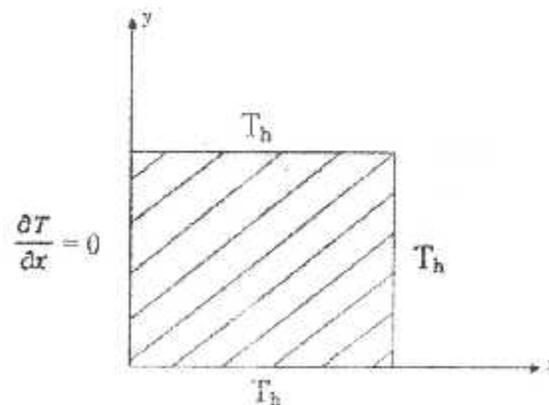


Fig.II-1

II-3-2 Géométrie circulaire

On considère une géométrie circulaire de rayon R avec une température constante T_h au contour de cercle et T_c à l'intérieure avec $T_c < T_h$. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ) , (Fig II-2).

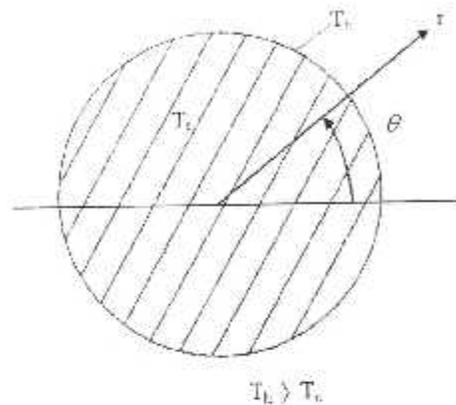


Fig.II-2

II-4 Equations générales de la conduction :

Il existe plusieurs lois qui permettent de calculer le flux ou la température générée lors d'un phénomène de transfert de chaleur par conduction parmi ces lois de FOURIER, qui représente la loi la plus simple et la plus importante.

II-4-1 Loi de Fourier

La loi de Fourier traduit la relation existant, en chaque point d'un corps, entre le **flux thermique** et le **gradient de température**, dans le cas isotrope, la densité de flux est proportionnel au gradient de température.

Le calcul intégral permet de généraliser la loi de Fourier à des corps de forme quelconque. Cette loi traduit le fait que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. La direction de l'écoulement de chaleur coïncide avec celle du gradient de température. Le signe (-) caractérise le fait que l'écoulement de chaleur s'effectue dans le sens des températures décroissantes, du chaud vers le froid.

$$q' = -K \text{ grad } T \quad (\text{II-1})$$

Nous pouvons écrire l'équation de la chaleur ayant traversé la surface dA pendant l'intervalle de temps dt comme suite :

$$dq = -K \text{ grad } T \cdot n \, dA \, dt \quad (\text{II-2})$$

Donc :

$$dq = -K \frac{\partial T}{\partial n} dA dt \quad (\text{II-3})$$

Avec n : coordonnées du point

II-4-2 Bilan d'énergie :

Considérant un volume fixe de l'espace, on suppose que le volume de contrôle est traversé par une certaine quantité de chaleur interne, donc on peut écrire le bilan d'énergie comme suit :

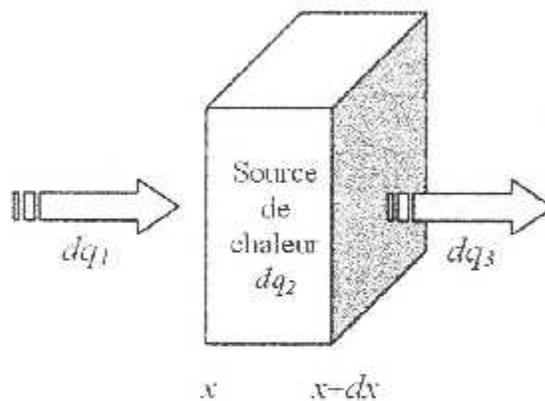


Fig.II-3 : Bilan d'énergie

- La quantité de chaleur pénétrant dans le volume dq_1 :

$$dq_1 = K \text{ grad } T \cdot n dA dt \quad (\text{II-4})$$

Donc :

$$q_1 = \int_S K \text{ grad } T \cdot n dA dt \quad (\text{II-5})$$

- La quantité de chaleur créée dans le volume dq_2 :

$$dq_2 = S(X, Y, Z, t) dV dt \quad (\text{II-6})$$

Donc :

$$q_2 = \int_V S(X, Y, Z, t) dV dt \quad (\text{II-7})$$

- L'énergie potentielle dq_3 c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire à la variation de la température dT du volume :

$$dq_3 = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV dt \quad (\text{II-8})$$

Donc :

$$q_3 = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV dt \quad (\text{II-9})$$

Donc on peut écrire :

$$q_1 + q_2 = q_3 \quad (\text{II-10})$$

Après injection des formules (II-5), (II-7) et (II-9) dans l'équation (II-10) on obtient :

$$\text{div} \left(K \text{ grad } T \right) + S = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II-11})$$

II-5 Equations simplifiées :

II-5-1 Hypothèses

- 1- Le problème est bidimensionnel
- 2- Milieu homogène

II-5-2 Equation de la chaleur pour géométrie carrée

$$\rho C p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S$$

II-5-3 équation de la chaleur pour géométrie circulaire

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

II-6 Conditions aux limites

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielle du second ordre en espace, et du premier ordre en temps, elle admet en principe une infinité de solution. Pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tous points de l'espace à un temps pris pour origine et les lois de variations de la température sur les frontières du domaine étudié.

limites	Conductions thermiques
$X = 0$	$T = T_h$
$X = H$	$\frac{\partial T}{\partial X}$
$Y = 0$	$T = T_h$
$Y = H$	$\frac{\partial T}{\partial X}$

Tab5.Cas de géométrie carrée

$R = 1, \theta = 0, 2\pi$	$T = T_h$
$R < 1, \theta = 0, 2\pi$	$T = T_c$

Tab6.Cas de géométrie circulaire

CHAPITRE III

Maillage et discrétisation

III-1 Introduction

Les équations de conservation de quantité de mouvement et énergie régissant les phénomènes des transferts thermiques, sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaire et elliptiques. Du moment que ces équations ne sont pas couplées, on pourra les résoudre séparément vu la complexité mathématique de ces dernières, on fait appel aux méthodes de résolution numérique.

Durant ces dernières décennies, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour la résolution des équations aux dérivées pareilles rencontrées dans le domaine de la mécanique des fluides et de la transmission de la chaleur.

On peut citer parmi ces méthodes :

- La Méthode des différences finis
- La Méthode des éléments finis
- La Méthode des volumes finis

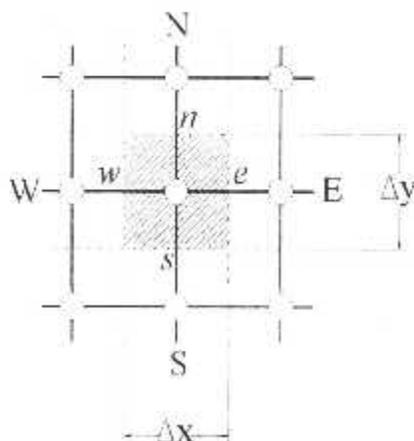
Pour le système d'équations considéré nous avons choisi la méthode des volumes finis qui a été utilisée dans le code de mécanique des fluides FLUENT.

Cette méthode a été développée par PATANKAR et SPALDING en 1980 et a prouvé son efficacité dans la résolution des problèmes de mécanique des fluides et de transfert de chaleur et s'adapte facilement à des géométries complexes qui interviennent dans de nombreux problèmes industriels.

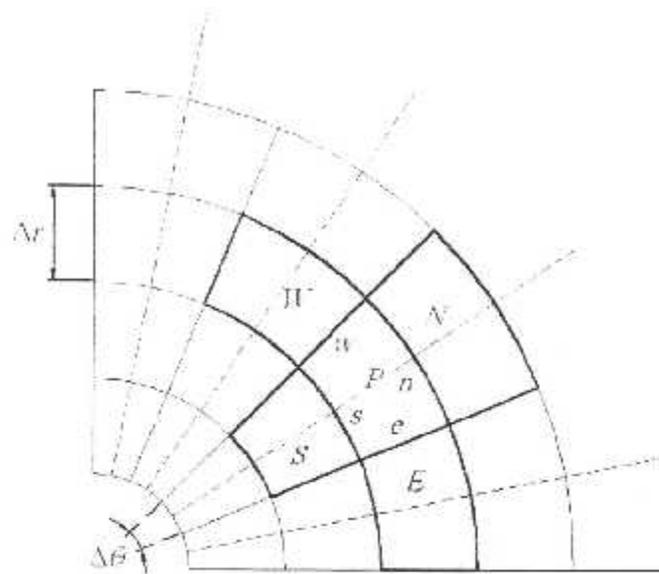
III-2 Principe de la méthode de volume finis

Le principe de la méthode des volumes finis, consiste à partager le domaine de calcul en un ensemble de petits volumes élémentaires. Chaque volume de contrôle contient un nœud central sorte que l'ensemble de ces nœuds forme une grille.

Pour deux nœuds consécutifs, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun appelé interface et de manière à ce que la réunion de tous les volumes forme le domaine de calcul. Ceci va mettre en évidence la conservation des flux locaux et globaux au sein du volume de contrôle et du domaine.



Détails d'un volume de contrôle dans un géométrique carré



Détails d'un volume de contrôle dans un géométrique cercle

L'idée principale de cette méthode est d'intégrer les équations différentielles dans le volume de contrôle, afin d'aboutir à une équation algébrique. L'assemblage de toutes les équations, relatives aux différents volumes du domaine se traduit par un système d'équation algébrique qu'il faudra ensuite résoudre par des méthodes itératives.

III-3 Maillage

Il existe deux méthodes pour générer le maillage dans le domaine de calcul. La première, consiste à placer d'abord les nœuds et de placer ensuite les faces des volumes de contrôles à mi-distance de deux nœuds consécutif. Ceci donne des volumes de contrôles réguliers autour des points internes du maillage, et des demi volumes près des frontières. Cette pratique exige des équations supplémentaires pour le traitement des nœuds frontières.

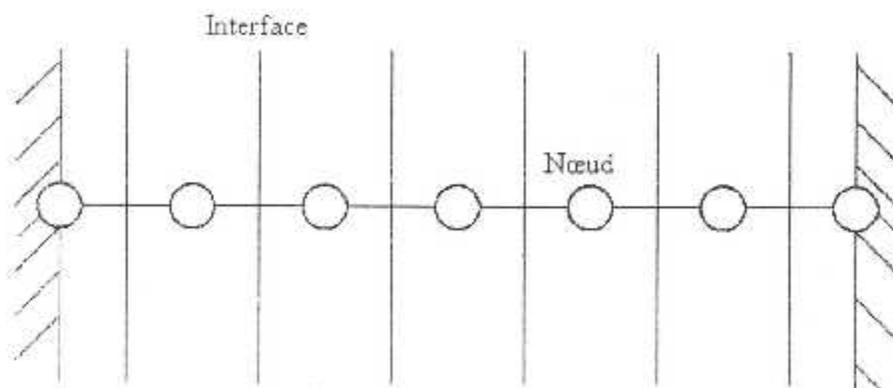


Figure : maillage non centré (TYPE A)

La deuxième, consiste à partager le domaine en un ensemble de volumes élémentaires, puis les nœuds sont placés au centre des volumes. Cette pratique est souvent utilisée en raison de sa simplicité et ne nécessite pas un traitement spécial pour les nœuds frontières.

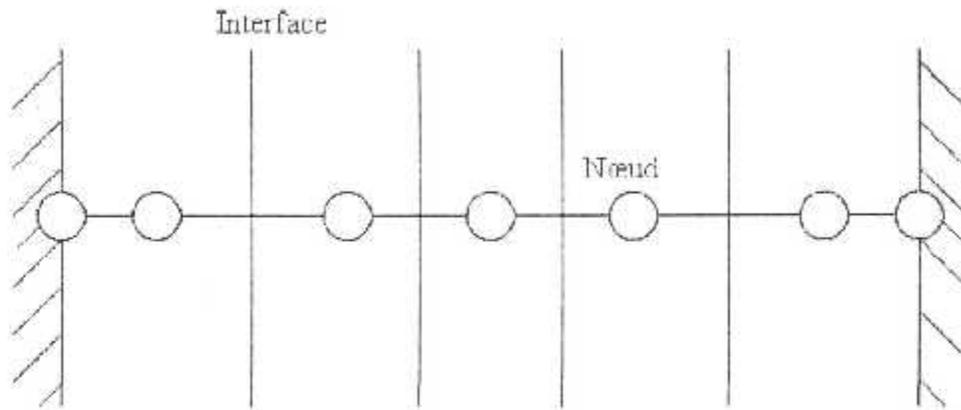
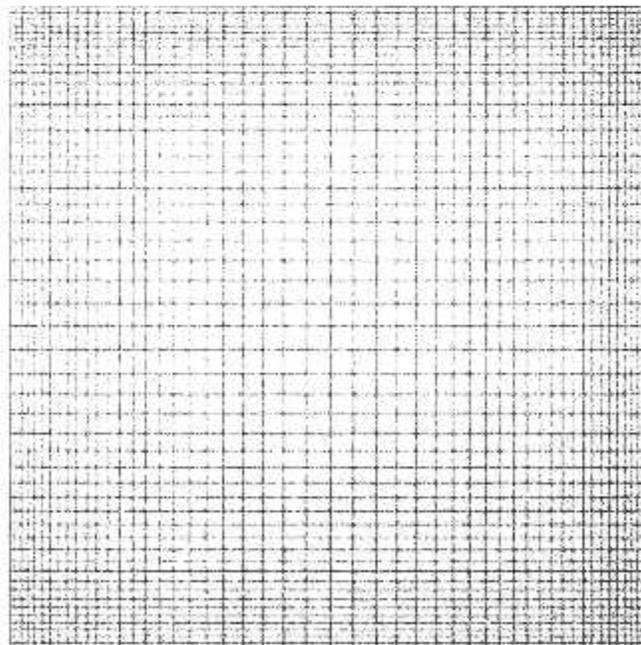


Figure : maillage centré (TYPE B)

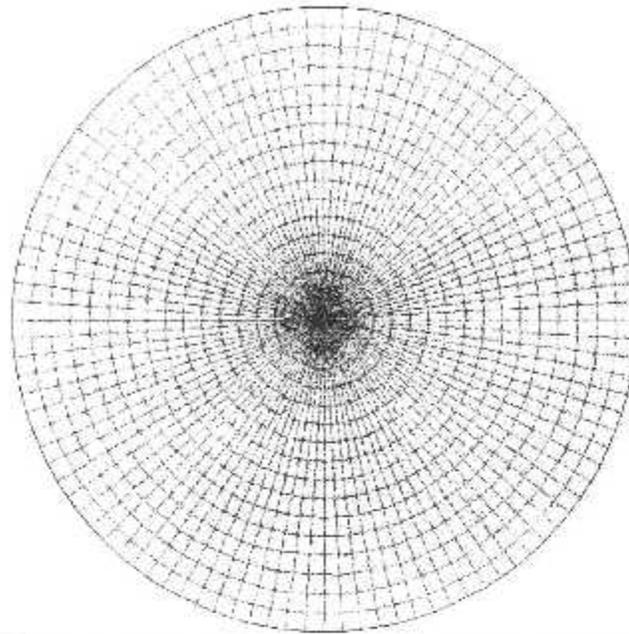
Nous allons réaliser le maillage du domaine carré et cercle à l'aide du logiciel GAMBIT. On choisit un maillage cartésien pour la cavité carrée (maillage à pas spatial variable raffiné dans les zones de forte gradient de température) **fig. (III-1)** et cylindrique pour la cavité circulaire (maillage structuré sans Condensation à pas constant) **fig. (III-2)**



Grid

Jun 23, 2004
FLUENT 6.0 (2d, segregated, lam)

Fig. (III.1)



Grid Jun 23, 2004
FLUENT 6.0 (2d, segregated, lam)

Fig. (III.2)

III-4 Forme générale de l'équation de transport

Les différents problèmes concernent les écoulements visqueux en milieu confiné. Ils sont décrits par les équations de Navier-Stokes, en utilisant les vitesses et la température locale comme variable dépendante sous la forme convection-diffusion. Les équations peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) sont écrites sous la forme générique conservative utilisée par Patankar [5]

Dans le cas d'une géométrie carrée

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} (U_j \phi)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right)}_2 + \underbrace{S_\phi}_3 \quad \text{(III-1)}$$

Dans le cas d'une géométrie circulaire

$$\underbrace{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r (\rho u \phi - \Gamma_r \frac{\partial \phi}{\partial r}) \right)}_1 + \underbrace{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho v \phi - \Gamma_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}_2 = \underbrace{S_\phi}_3 \quad \text{(III-2)}$$

Tel que :

La variable ϕ représente une quantité scalaire de l'écoulement (u, v, p, T), Γ un coefficient d'échange et S_ϕ un terme source.

Le terme (1) représente le transport de la quantité ϕ par convection.

Le terme (2) représente le transport de la quantité ϕ Par diffusion.

Le terme (3) représente Le terme sources/puits.

III-5 Discrétisation des équations de la convection naturelle

La discrétisation consiste à remplacer les équations aux dérivées partielles régissant l'écoulement, par un système d'équations algébriques. La solution d'un tel système donne les valeurs de la pression, de la température et des vitesses U et V aux différentes positions du domaine où ont été stockées ces valeurs.

III-5-1 La cavité carrée :

III-5-1-1 Discrétisation de l'équation de continuité adimensionnelle :

Considérons un volume de contrôle principal, dans lequel va être intégrée l'équation en question :

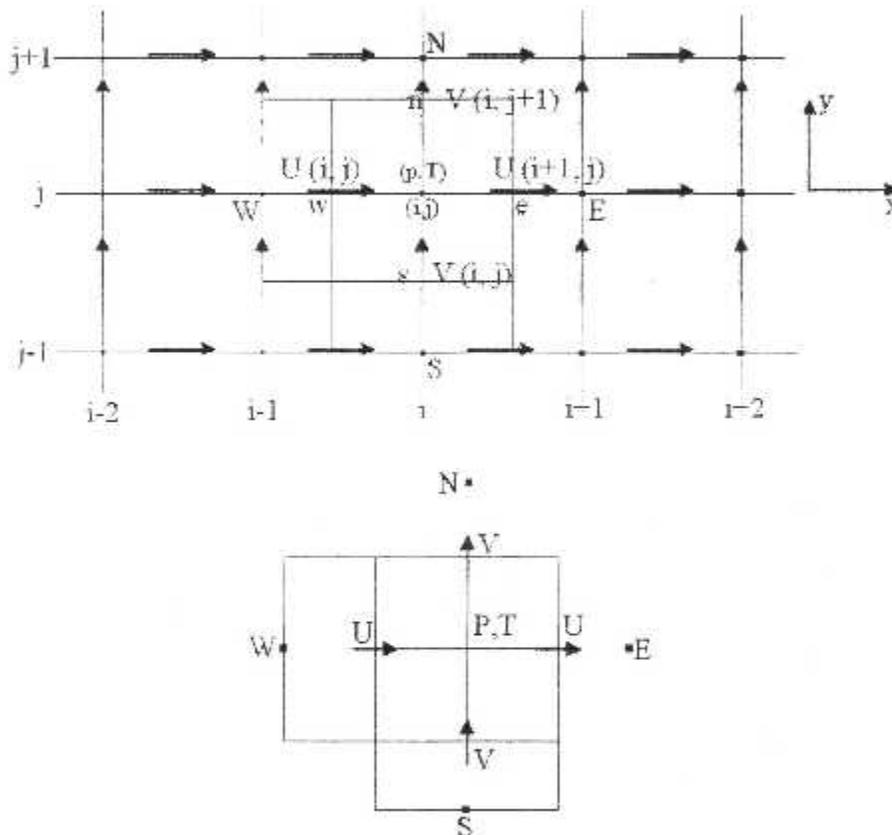


Fig. (III-3)

Pour un écoulement bidimensionnel, permanent et incompressible l'équation de continuité qui est :

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = 0$$

En intégrant l'équation membre à membre on aura :

$$\int_{x^*}^{x^*+1} \int_{y^*}^{y^*+1} \frac{\partial U^*}{\partial x^*} dx^* dy^* + \int_{x^*}^{x^*+1} \int_{y^*}^{y^*+1} \frac{\partial V^*}{\partial y^*} dx^* dy^* = 0$$

$$\int_x^x (U_e^* - U_w^*) dy^* + \int_y^y (V_n^* - V_s^*) dx^* = 0$$

Et donc :

$$(U_e^* - U_w^*) \Delta y^* + (V_n^* - V_s^*) \Delta x^* = 0 \quad (III-3)$$

L'équation (III-3) est la forme discrétisée de l'équation de conservation de masse adimensionnelle.

III-5-1-2 Discrétisation de l'équation de transport :

L'équation de transport (III-1) est intégrée sur le volume de contrôle typique, avec l'évaluation des termes (diffusif, convectif et source) aux interfaces.

Soit le volume de contrôle schématiser ci-dessous :

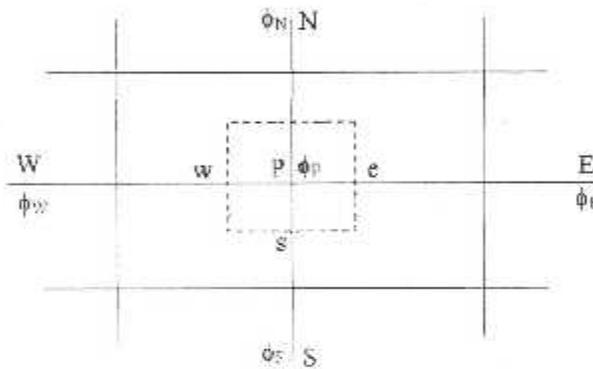


Fig. (III-4)

L'intégration de (III-1) dans le volume de contrôle de la Fig. (III-4) donne :

$$\begin{aligned} & \int_x^x \int_y^y \frac{\partial}{\partial x^*} (U^* \phi) dx^* dy^* + \int_x^x \int_y^y \frac{\partial}{\partial y^*} (V^* \phi) dx^* dy^* = \\ & \int_x^x \int_y^y \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right) dx^* dy^* + \int_x^x \int_y^y \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right) dx^* dy^* + \int_x^x \int_y^y S_\phi dx^* dy^* \\ \Rightarrow & \int_x^x [(U^* \phi)_e - (U^* \phi)_w] dy^* + \int_y^y [(V^* \phi)_n - (V^* \phi)_s] dx^* = \\ & \int_x^x \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w \right] dy^* + \int_y^y \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s \right] dx^* + \int_x^x \int_y^y S_\phi dx^* dy^* \end{aligned} \quad (III-4)$$

a- Terme diffusif :

$$\int_{x_s}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dX dY + \int_{x_s}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dX dY =$$

$$\int_{y_s}^{y_n} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_s \right] dY + \int_{x_s}^{x_e} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] dX$$

En appliquant le théorème de la moyenne sur les intégrales, on obtient :

$$\int_{y_s}^{y_n} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_s \right] dY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_s \right] \Delta Y$$

$$\int_{x_s}^{x_e} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] dX = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X$$

Pour exprimer le terme diffusif sur les interfaces du volume de contrôle, on assume que le profil de la variation de la variable dépendante ϕ est linéaire entre les nœuds du maillage.

On aura donc :

$$\left. \begin{aligned} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e &= \Gamma_e \left(\frac{\phi_e - \phi_w}{dX_e} \right) \\ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_s &= \Gamma_w \left(\frac{\phi_e - \phi_w}{dX_w} \right) \\ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n &= \Gamma_n \left(\frac{\phi_n - \phi_s}{dY_n} \right) \\ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s &= \Gamma_s \left(\frac{\phi_n - \phi_s}{dY_s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (III-5)$$

Pour un fluide homogène le coefficient de la diffusion est uniforme [4]

On a :

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \Gamma$$

b- Terme convectif :

$$\int_{x_s}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial x^*} (U^* \phi) dx^* dy^* + \int_{x_s}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial y^*} (V^* \phi) dx^* dy^*$$

$$= U_e^* \phi_e \Delta y^* - U_w^* \phi_w \Delta y^* + V_n^* \phi_n \Delta x^* - V_s^* \phi_s \Delta x^*$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{e'}^e (U^* \phi)_e dy^* &\approx U_{e'}^* \phi_e \Delta y^* \\ \int_{e'}^e (U^* \phi)_w dy^* &\approx U_w^* \phi_w \Delta y^* \\ \int_{w'}^e (V^* \phi)_n dx^* &\approx V_n^* \phi_n \Delta x^* \\ \int_{w'}^e (V^* \phi)_s dx^* &\approx V_s^* \phi_s \Delta x^* \end{aligned} \right\}$$

Arrivés à cette étape, il faudra exprimer les termes des flux de diffusion et de convection aux interfaces (e, w, n, s) des volumes de contrôle.

Pour cela, il existe plusieurs schémas numériques qui sont utilisé par le logiciel FLUENT (différences centrées, upwind, Power Law, Quick, hybrid ...).

On doit représenter la discrétisation ϕ_E dans les différents schémas comme suit [1] :

i- Schéma différences centrées :

- Second-order central scheme (CS2)

$$\phi_E = \frac{1}{2} (\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})$$

- Fourth-order central scheme (CS4)

$$\phi_E = \frac{1}{12} (-\phi_{i-1,j} + 7\phi_{i,j} + 7\phi_{i+1,j} - \phi_{i+2,j})$$

ii- Schéma Upwind :

- First-order upwind scheme (U1)

$$\phi_E = \begin{cases} \phi_{i,j} \\ \phi_{i+1,j} \end{cases} \quad \text{si} \begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i+1/2,j} < 0 \end{cases}$$

- Second-order upwind scheme (U2)

$$\phi_E = \begin{cases} -\frac{1}{2}\phi_{i-1,j} + \frac{3}{2}\phi_{i,j} \\ \frac{3}{2}\phi_{i+1,j} - \frac{1}{2}\phi_{i+2,j} \end{cases} \quad \text{si} \begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i+1/2,j} < 0 \end{cases}$$

iii- Quick :

- Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics

$$\phi_E = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) - \frac{1}{8}(\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) \\ \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) - \frac{1}{8}(\phi_{i,j} - 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i+2,j}) \end{cases} \quad \text{si} \begin{cases} u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ u_{i+1/2,j} < 0 \end{cases}$$

Le choix d'un schéma numérique est l'un des problèmes les plus délicat d'un numéricien de la thermo hydraulique.

En effet un schéma d'ordre peu élevé peut engendrer de diffusion numérique masquant les phénomènes physiques diffusifs, des schémas d'ordres plus élevés donc plus précis peuvent quant à eux donner des phénomènes numériques d'overshoot-undershoot non physiques et par la même occasion apporter des défauts de convergence, donner des coûts de calculs prohibitifs. [3]

On choisi le schéma hybrid qui permet d'approcher le précédent profil de Φ par deux segments de droites afin d'éviter les calculs d'exponentiels coûteux.

Le schéma hybrid coïncide avec le schéma des « différences centrées » pour les valcurs du nombre de Peclet appartenant à l'intervalle $[-2,2]$ et en dehors de l'intervalle coïncide avec les schéma « Upwind », d'où l'appellation du schéma « hybrid » [4].

La relation qui lie la valeur de la variable à l'interface du volume de contrôle en fonction des valeurs des variables adjacentes est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e &= f_e \Phi_F + (1-f_e) \Phi_P \\ \Phi_w &= f_w \Phi_W + (1-f_w) \Phi_P \\ \Phi_n &= f_n \Phi_N + (1-f_n) \Phi_P \\ \Phi_s &= f_s \Phi_S + (1-f_s) \Phi_P \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-6)}$$

Avec $0 \leq f \leq 1$

Pe : est le nombre de Peclet qui représente le rapport du flux par convection aux flux par diffusion.

f : est un coefficient dont ses valeurs dépendent du nombre de Peclet.

Le tableau suivant représente les valeurs de **f** correspondantes à la variation du nombre de Peclet.

Valeur de Peclet Pe	$Pe > 2$	$-2 < Pe < 2$	$Pe < -2$
Le schéma utilisée	Décentré à gauche	Différences centrées	Décentré à droite
Le coefficient f	1	0.5	0

Tab. III-5-1 [5]

c- Terme source :

$$\iint_{\Delta} S_{\phi} dx dy = \bar{S} \Delta X \Delta Y \quad \text{(III-7)}$$

En utilisant les équations (II-4), (II-5) et (III-6), on abouti à une équation algébrique liant les valeurs de la quantité Φ aux nœuds P, E, W, N et S qui êtes exprimée sous forme suivante :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S_\Phi \quad (III-8)$$

Tel que : [12]

$$A_E = D_e (1 - 0.5 |P_{ec}|) + \|F_e, 0\|$$

$$A_W = D_w (1 - 0.5 |P_{ew}|) + \|F_w, 0\|$$

$$A_N = D_n (1 - 0.5 |P_{en}|) + \|F_n, 0\|$$

$$A_S = D_s (1 - 0.5 |P_{es}|) + \|F_s, 0\|$$

En notant les termes convectif aux interfaces par :

$$F_e = U_e \Delta Y$$

$$F_w = U_w \Delta Y$$

$$F_n = U_n \Delta X$$

$$F_s = U_s \Delta X$$

Et les termes diffusifs par:

$$D_e = \frac{\Gamma}{dX_e} \Delta Y$$

$$D_w = \frac{\Gamma}{dX_w} \Delta Y$$

$$D_n = \frac{\Gamma}{dY_n} \Delta X$$

$$D_s = \frac{\Gamma}{dY_s} \Delta X$$

III-5-1-3 Discrétisation de l'équation de l'énergie :

L'équation d'énergie adimensionnelle s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) = U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

Soit donc
$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (III-9)$$

L'intégration de (III-9) sur le volume de contrôle de la Fig. (III-3) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) dx^* dy^* + \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) dx^* dy^* \\ &= \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (U^* T^*) dx^* dy^* + \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \frac{\partial}{\partial y^*} (V^* T^*) dx^* dy^* \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w \right] dy^* + \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n - \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s \right] dx^* \\ &= \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \left[(U^* T^*)_e - (U^* T^*)_w \right] dy^* + \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \left[(V^* T^*)_n - (V^* T^*)_s \right] dx^* \end{aligned} \quad (III-10)$$

En assumant que U^* et V^* restent constante le long des faces des volumes de contrôle et que $\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e, \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n$ varient linéairement le long de ces faces on obtient

Donc :

$$\left. \begin{aligned} & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} (U^* T^*)_e dy^* \approx U_e^* T_e^* \Delta y^* \\ & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} (U^* T^*)_w dy^* \approx U_w^* T_w^* \Delta y^* \\ & \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} (V^* T^*)_n dx^* \approx V_n^* T_n^* \Delta x^* \\ & \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} (V^* T^*)_s dx^* \approx V_s^* T_s^* \Delta x^* \\ & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e dy^* \approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* \\ & \int_{x^*}^{x^*+\Delta x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w dy^* \approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* \\ & \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n dx^* \approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* \\ & \int_{y^*}^{y^*+\Delta y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s dx^* \approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* \end{aligned} \right\} \quad (III-11)$$

En remplaçant (III-10) et (III-11) on obtient :

$$\begin{aligned} & (U_e^* T_c^* \Delta y^*) - (U_w^* T_w^* \Delta y^*) + (V_s^* T_s^* \Delta x^*) - (V_n^* T_n^* \Delta x^*) \\ & = \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* - \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

III-5-1-4 L'équation de quantité de mouvement:

L'équation de quantité de mouvement couplée avec celle de l'énergie modélise le problème de la diffusion-convection :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (U^* \phi) + \frac{\partial}{\partial y^*} (V^* \phi) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right) + S_\phi \quad (\text{III-13})$$

Le tableau suivant rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent le phénomène physique de la convection naturelle dans La cavité carrée :

Equation	Φ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement suivant Y	V	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial y} + Ra Pr \Theta$
Energie	T	1	0

a- Terme convectif :

$$\int_y^e (U^* \phi)_e dy^* \approx U_e^* \phi_e \Delta y^*$$

$$\int_y^e (U^* \phi)_w dy^* \approx U_w^* \phi_w \Delta y^*$$

$$\int_x^s (V^* \phi)_s dx^* \approx V_s^* \phi_s \Delta x^*$$

$$\int_x^s (V^* \phi)_n dx^* \approx V_n^* \phi_n \Delta x^*$$

a- Terme diffusif :

$$\int_s^n \left(\text{Pr} \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right) dy^* \approx (\text{Pr})_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* = (\text{Pr})_e \frac{\phi_e - \phi_s}{\Delta x^*} \Delta y^*$$

$$\int_s^n \left(\text{Pr} \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w dy^* \approx (\text{Pr})_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* = (\text{Pr})_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x^*} \Delta y^*$$

$$\int_w^e \left(\text{Pr} \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n dx^* \approx (\text{Pr})_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* = (\text{Pr})_n \frac{\phi_n - \phi_s}{\Delta y^*} \Delta x^*$$

$$\int_w^e \left(\text{Pr} \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s dx^* \approx (\text{Pr})_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* = (\text{Pr})_s \frac{\phi_p - \phi_s}{\Delta y^*} \Delta x^*$$

c- Terme source :

$$S_p = \Delta y^* (P_w^* + P_e^*) \quad \text{Où}$$

$$S_p = \Delta x^* (P_s^* + P_n^*) + \Delta x^* \Delta y^* \text{Pr Ra } \Theta$$

III-5-1-5 Discrétisation de la fonction de courant :

On introduit la fonction de courant ψ en rappelant sa définition par rapport aux composantes de la vitesse :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En intégrant sur le volume de contrôle de V, on aura :

$$\int_s^n \int_w^e V dx dy = - \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\psi) dx dy$$

\Rightarrow

$$V(i, j) \Delta X \Delta Y = -(\psi_e - \psi_w) \Delta Y$$

\Rightarrow

$$V(i, j) \Delta X = -(\psi_e - \psi_w)$$

En finalement :

$$\psi_e = \psi_w - \Delta X V(i, j)$$

Sous la forme indicielle :

$$\psi(i+1, j) = \psi(i, j) - \Delta X V(i, j)$$

III-5-1-6 Discrétisation des conditions aux limites :

	Vitesse	Coefficients A	Terme source	Température
X = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\theta = 0$
X = 1	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\theta = 1$
Y = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$
Y = 1	U = V = 0	Ae = Aw = As = 0 Ap = An = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$

III-5-2 La cavité circulaire:

III-5-2-1 Discrétisation de l'équation de transport :

L'équation (III-2) s'écrit comme suite

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial (V \phi)}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + S_{\phi} \quad (\text{III-1})$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U \phi) dV + \int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial (V \phi)}{\partial \theta} dV \\ & = \int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \int_{\Delta V} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \int_{\Delta V} S_{\phi} dV \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

Avec :

$$dV = r dr d\theta$$

$$\Delta V = r \Delta r \Delta \theta$$

L'équation (III-2) s'écrira alors comme suite :

$$\begin{aligned}
& \int_s^e \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U \phi) r dr d\theta + \int_s^e \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial (V \phi)}{\partial \theta} r dr d\theta \\
& = \int_s^e \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) r dr d\theta + \int_s^e \int_w^e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) r dr d\theta + \int_s^e \int_w^e S_\phi r dr d\theta
\end{aligned} \tag{III-3}$$

a- Terme convectif :

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \left[\int_s^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U \phi) r dr \right] d\theta = \int_w^e [r U \phi]_s^e d\theta \\
& = \left[(r U \phi)_e - (r U \phi)_s \right] \Delta\theta \\
& \int_s^e \left[\int_w^e \frac{\partial (V \phi)}{\partial \theta} d\theta \right] dr = \int_s^e [V \phi]_w^e dr = \left[(V \phi)_e - (V \phi)_w \right] \Delta r
\end{aligned}$$

b- Terme diffusifs :

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \left[\int_s^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) r dr \right] d\theta = \int_w^e \left[r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s^e d\theta = \left[r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s^e \Delta\theta \\
& \int_s^e \left[\int_w^e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta \right] r dr = \int_s^e \left[\frac{1}{r^2} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_w^e r dr = \left[\frac{1}{r^2} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_w^e r dr
\end{aligned}$$

c- Terme source :

$$\int_s^e \int_w^e S_\phi r dr d\theta = \overline{S_\phi} r \Delta r \Delta\theta$$

L'équation (III-3) s'écrira alors :

$$\begin{aligned}
& \left[(r U \phi)_e - (r U \phi)_s \right] \Delta\theta + \left[(V \phi)_e - (V \phi)_w \right] \Delta r \\
& = \left[r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s^e \Delta\theta + \left[\frac{1}{r^2} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_w^e r \Delta r + \overline{S_\phi} r \Delta r \Delta\theta
\end{aligned} \tag{III-4}$$

Pour la présente étude, nous appliquerons le schéma numérique des différences centrées. Il est basé sur l'hypothèse de la variation linéaire de la grandeur ϕ entre les nœuds adjacents du maillage. Avec cette hypothèse, nous aurons :

$$\begin{aligned} \phi_c &= \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \\ \phi_n &= \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \\ \phi_n &= \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \\ \phi_s &= \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P) \end{aligned} \tag{III-5}$$

Nous pourrions ainsi évaluer les gradients de la quantité ϕ au niveau des interfaces du volume de contrôle par approximation des différences centrées. Nous aurons donc :

- Suivant la direction r :

$$\begin{aligned} r \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_n &= r_n \Gamma_n \frac{\phi_n - \phi_P}{dr_n} \\ r \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_s &= r_s \Gamma_s \frac{\phi_s - \phi_P}{dr_s} \end{aligned} \tag{III-6-1}$$

- Suivant la direction θ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_e &= \frac{1}{r_e^2} \Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_P}{d\theta_e} \\ \frac{1}{r^2} \Gamma \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_w &= \frac{1}{r_w^2} \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_w}{d\theta_w} \end{aligned} \tag{III-6-2}$$

Remarque :

Pour un milieu homogène, les coefficients ($\Gamma_e, \Gamma_w, \Gamma_n, \Gamma_s$) sont constants [5], nous aurons :

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \text{constante.}$$

En remplaçant ainsi les équations (III-5), (III-6-1), (III-6-2) dans l'équation (III-4), nous obtenons une équation algébrique liant les valeurs de la quantité ϕ au niveau des nœuds P, E, W, N et S :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \tag{III-7}$$

Les coefficients de cette équation (III-7) sont donnés comme suit :

$$A_p = \frac{1}{2} r_n U_n \Delta\theta - \frac{1}{2} r_s U_s \Delta\theta + \frac{1}{2} V_e \Delta r - \frac{1}{2} V_w \Delta r$$

$$+ \Gamma \frac{r_n}{dr_n} \Delta\theta + \Gamma \frac{r_s}{dr_s} \Delta\theta + \frac{1}{r_e^2} \frac{\Gamma}{\partial\theta_e} r \Delta r + \frac{1}{r_w^2} \frac{\Gamma}{\partial\theta_w} r \Delta r \quad (III-8)$$

$$A_E = \frac{1}{r_e^2} \frac{\Gamma}{d\theta_e} r \Delta r - \frac{1}{2} V_e \Delta r$$

$$A_W = \frac{1}{r_w^2} \frac{\Gamma}{d\theta_w} r \Delta r - \frac{1}{2} V_w \Delta r \quad (III-8)$$

$$A_N = \Gamma \frac{r_n}{dr_n} \Delta\theta - \frac{1}{2} r_n U_n \Delta\theta$$

$$A_S = \Gamma \frac{r_s}{dr_s} \Delta\theta - \frac{1}{2} r_s U_s \Delta\theta$$

En notant par les termes diffusifs aux interfaces par :

$$D_e = \frac{1}{r_e^2} \frac{\Gamma}{d\theta_e} r \Delta r$$

$$D_w = \frac{1}{r_w^2} \frac{\Gamma}{d\theta_w} r \Delta r \quad (III-9)$$

$$D_n = \Gamma \frac{r_n}{dr_n} \Delta\theta$$

$$D_s = \Gamma \frac{r_s}{dr_s} \Delta\theta$$

Et les termes convectifs par :

$$F_e = V_e \Delta r$$

$$F_w = V_w \Delta r \quad (III-10)$$

$$F_n = r_n U_n \Delta\theta$$

$$F_s = r_s U_s \Delta\theta$$

En remplaçant les équations (III-10) et (III-9) dans l'équation (III-8) nous aurons les équations suivantes :

$$A_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (III-11)$$

$$A_W = D_w - \frac{F_w}{2} \quad (III-12)$$

$$A_N = D_n - \frac{F'_n}{2} \quad (\text{III-13})$$

$$A_S = D_s - \frac{F'_s}{2} \quad (\text{III-14})$$

$$A_p = \frac{F'_e}{2} - \frac{F'_w}{2} + \frac{F'_n}{2} - \frac{F'_s}{2} + D_e + D_w + D_n + D_s \quad (\text{III-15})$$

D'autre part, en prenant l'expression (III-14) :

$$A_s = D_s - \frac{F'_s}{2}$$

$$\text{Si } \frac{F'_s}{2} > 0 \text{ alors } A_s = D_s \left(1 + 0,5 \frac{F'_s}{D_s} \right) \quad (\text{III-16})$$

$$\text{Si } \frac{F'_s}{2} < 0 \text{ alors } A_s = D_s \left(1 - 0,5 \frac{F'_s}{D_s} \right) \quad (\text{III-17})$$

Les relations (III-16) et (III-17) peuvent s'écrire sous une forme condensée [8] en utilisant l'opérateur $\|A, B\|$ qui représente le maximum de deux grandeurs A et B.

$$A_s = D_s \left(1 - 0,5 \left| \frac{F'_s}{D_s} \right| \right) + \|F'_s, 0\| \quad (\text{III-18})$$

D'une manière similaire, les équations (III-11), (III-12) et (III-13) deviennent :

$$A_E = D_e \left(1 - 0,5 \left| \frac{F'_e}{D_e} \right| \right) + \|-F'_e, 0\| \quad (\text{III-19})$$

$$A_w = D_w \left(1 - 0,5 \left| \frac{F'_w}{D_w} \right| \right) + \|F'_w, 0\| \quad (\text{III-20})$$

$$A_n = D_n \left(1 - 0,5 \left| \frac{F'_n}{D_n} \right| \right) + \|-F'_n, 0\| \quad (\text{III-21})$$

L'équation (III-15) pourra s'écrire comme suit :

$$A_p = A_E + A_w + A_N + A_S + F'_e - F'_w + F'_n - F'_s \quad (\text{III-22})$$

L'intégration de l'équation adimensionnée de continuité ($\phi = 1, \Gamma = 0, S_\phi = 0$) sur un volume de contrôle typique donne :

$$F'_e - F'_w + F'_n - F'_s = 0 \quad (\text{III-23})$$

Alors l'équation (III-22) se réduira à :

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (III-24)$$

Remarque :

Le schéma numérique des différences est numériquement stable pour un nombre de Peclet local (P_e, P_w, P_n et P_s) soit :

$$|P_i| = \left| \frac{F_i}{D_i} \right| < 2 \quad [1]$$

- Le nombre de Peclet caractérise le rapport de la convection à la diffusion.

Les quantités P_e, P_w, P_n et P_s représentent les valeurs du nombre de Peclet évaluées sur les interfaces du volume de contrôle considéré.

III-5-2-2 Discrétisation de l'équation de l'énergie :

L'équation d'énergie adimensionnelle s'écrit comme suit :

$$U^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{V^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} = \frac{1}{\text{Ra}^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^{*2}} \right)$$

Soit donc :

$$U^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{V^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} = \frac{1}{\text{Ra}^{0.5}} \left(\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} \right) \right) \quad (III-25)$$

$$\begin{aligned} & \int_{s_w}^{s_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} U^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} d\theta r dr + \int_{s_w}^{s_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{V^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} d\theta r dr \\ &= \frac{1}{\text{Ra}^{0.5}} \left(\int_{s_w}^{s_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) d\theta r dr + \int_{s_w}^{s_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} d\theta r dr + \int_{s_w}^{s_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} \right) d\theta r dr \right) \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} & [(UT)_n - (UT)_s] r \Delta \theta + \left[\left(\frac{V}{r} T \right)_n - \left(\frac{V}{r} T \right)_s \right] r \Delta r \\ &= \frac{1}{\text{Ra}^{0.5}} \left(\left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_s \right] r \Delta \theta + \left[\left(\frac{1}{r} T \right)_n - \left(\frac{1}{r} T \right)_s \right] r \Delta \theta + \left[\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right)_n - \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right)_s \right] r \Delta r \right) \end{aligned} \quad (III-26)$$

En assumant que U et V restent constante le long des faces des volumes de contrôle et que $(UT)_s, \left(\frac{V}{r} T \right)_s, \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right)_s$ varient linéairement le long de ces faces.

L'équation de quantité de mouvement couplée avec celle de l'énergie modélise le problème de la diffusion-convection :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\rho u \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho v \phi - \Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) = S_\phi$$

Le tableau suivant rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent le phénomène physique de la convection naturelle:

Equation de conservation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Masse	1	0	0
Quantité de mouvement radiale	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{v^2}{r} - 2\mu \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) -$ $+ \rho g_\theta \beta (T - T_0) \cos \theta$
Quantité de mouvement azimutale	v	μ	$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \frac{uv}{r} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{u}{r} \right) \right)$ $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2v \right) \right) - \rho g \beta (T - T_0) \sin \theta$
Energie	T	1	0

On peut noter déjà à ce stade que le terme source n'est pas constant et qu'il dépend même de la variable concernée.

La non-linéarité du terme source. Sa linéarisation consiste à poser :

$$S_\phi = S_c + S_p \phi_p$$

Où S_c est le terme constant incluant tous les termes ne dépendant pas explicitement de la variable concernée.

S_p doit impérativement être négatif pour assurer la convergence de l'algorithme.

Dans la direction radiale $\phi = u$ on aura :

$$S_c = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{v^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho g_\theta \beta (T - T_0) \cos \theta.$$

et

$$S_p = -\frac{2\mu}{r^2}$$

Dans la direction azimutale $\phi - v$ on aura :

$$S_c = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{u}{r} \right) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2v \right) \right) - \rho g \beta (T - T_0) \sin \theta v$$

Alors que le terme

$$S_v = -\frac{\rho u}{r}$$

III-5-2-3 Discrétisation de la fonction de courant :

On introduit la fonction de courant ψ en rappelant sa définition par rapport aux composantes de la vitesse :

Soit \vec{V} le champs de vitesse de composantes ($u = u, v_\theta = v$), on définit une fonction de courant par :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

En intégrant sur le volume de contrôle de V , on aura :

$$\int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} \int_{r}^{r+\Delta r} V r dr d\theta = - \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} \int_{r}^{r+\Delta r} \frac{\partial}{\partial r} (\psi) r dr d\theta$$

\Rightarrow

$$V(i, j) r \Delta r \Delta \theta = -(\psi_e - \psi_w) r \Delta r$$

\Rightarrow

$$V(i, j) \Delta \theta = -(\psi_e - \psi_w)$$

En finalement :

$$\psi_e = \psi_w - \Delta \theta V(i, j)$$

Sous la forme indicielle :

$$\psi(i+1, j) = \psi(i, j) - \Delta \theta V(i, j)$$

III-5-2-4 Discrétisation des conditions aux limites :

	Vitesse	Coefficients A	Terme source	Température
R=1 0=0,π	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	Sφ = 0	θ = 0
R<1 θ=π, 2π	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	Sφ = 0	θ = 1

III-6 Discrétisation des équations de la conduction:

Soit un maillage bidimensionnel, à chaque nœud P du maillage correspond deux voisins E, W, N et S suivant l'axe des ordonnées, la partie hachurée représente le volume de contrôle.

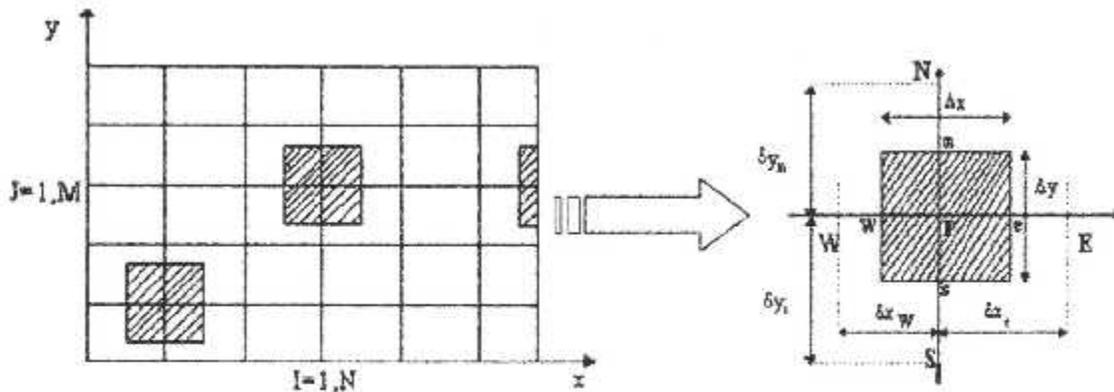


Fig. III-1

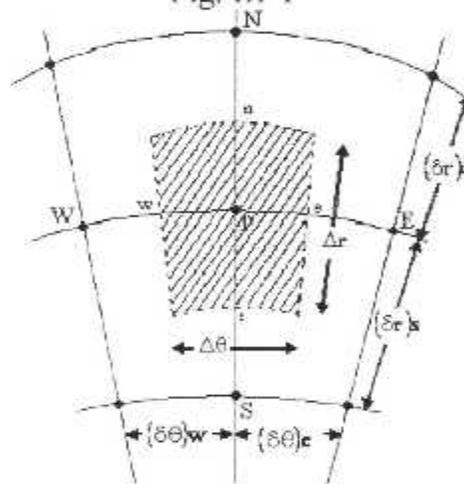


Fig. III-2

- P : nœud du volume de contrôle considéré.
- E : nœud situé du côté Est du nœud P.
- W : nœud situé du côté Ouest du nœud P.
- N : nœud situé du côté Nord du nœud P.
- S : nœud situé du côté Sud du nœud P.
- e : La face est du volume de contrôle considéré.
- w : La face ouest du volume de contrôle considéré.
- n : La face nord du volume de contrôle considéré.
- s : La face sud du volume de contrôle considéré.
- Δx : dimension du volume de contrôle suivant la direction X.

Δy : dimension du volume de contrôle suivant la direction Y.

Δr : dimension du volume de contrôle suivant la direction R.

$\Delta \theta$: dimension du volume de contrôle suivant la direction θ .

$\left. \begin{array}{l} \delta x_e, \delta x_w, \delta y_e, \delta y_w, \delta r_e, \delta r_w, \delta \theta_e, \delta \theta_w \\ \delta x_n, \delta x_s, \delta y_n, \delta y_s, \delta r_n, \delta r_s, \delta \theta_n, \delta \theta_s \end{array} \right\}$ Sont respectivement

les distance entre le nœud P et les nœuds E, W, S, N.

III-6-1 Présentation du problème à étudier :

III-6-1-1 Géométrie carrée

Considérant l'équation régissant le transfert de chaleur par conduction bidimensionnelle écrite dans un système de coordonnées cartésiennes.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S$$

Cette équation doit être intégrée sur le volume de contrôle (fig.III-1) :

$$\int_{\Delta V} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt &= \rho c_p \Delta x \Delta y (T_p - T_p^0) \\ &= \rho c_p \Delta V (T_p - T_p^0) \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx dy dt &= \left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \right] \Delta y \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{dT}{dy} \right) dx dy dt &= \left[\left(k \frac{dT}{dy} \right)_n - \left(k \frac{dT}{dy} \right)_s \right] \Delta x \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_s}^{y_n} S dx dy dt &= \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta t = (S_p T_p + S_c) \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

Donc on obtient l'équation suivante :

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b$$

Où :

$$a_e = \frac{k_e \Delta V}{(\delta x)_e}$$

$$a_w = \frac{k_w \Delta y}{(\delta x)_w}$$

$$a_s = \frac{k_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_n = \frac{k_n \Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_p^v = \frac{\rho c_p \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$h = S_c \Delta x \Delta y + a_p^v T_p^0$$

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n + a_p^v - S_p \Delta x \Delta y$$

III-6-1-2 Géométrie circulaire

Considérant l'équation régissant le transfert de chaleur par conduction bidimensionnelle écrite dans un système de coordonnées cylindrique.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S$$

Cette équation doit être intégrée sur le volume de contrôle (fig.III-2):

$$\int_{\Delta V} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) dV + \int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV &= \int_0^{\Delta \theta} \int_0^{\Delta r} \int_0^{\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr d\theta dt = \rho c_p r \Delta r \Delta \theta (T_p - T_p^0) \\ &= \rho c_p \Delta V (T_p - T_p^0) \end{aligned}$$

$$\int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr d\theta dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\theta_s}^{\theta_n} \int_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr d\theta dt$$

$$= \left[\left(r k \frac{\delta T}{\delta r} \right)_n - \left(r k \frac{\delta T}{\delta r} \right)_s \right] \Delta\theta \Delta t$$

$$\int_{\Delta V} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dV = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\theta_s}^{\theta_n} \int_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) r dr d\theta dt$$

$$= \left[\left(\frac{k}{r} \frac{\delta T}{\delta \theta} \right)_n - \left(\frac{k}{r} \frac{\delta T}{\delta \theta} \right)_s \right] \Delta r \Delta t$$

$$\int_{\Delta V} S dV = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\theta_s}^{\theta_n} \int_r S r dr d\theta dt = \bar{S} r \Delta r \Delta\theta \Delta t = (S_p T_p + S_c) \Delta V \Delta t$$

Donc on obtient l'équation suivante :

$$a_p T_p = a_c T_c + a_w T_w + a_n T_n + a_s T_s + b$$

Où :

$$a_c = \frac{k_c \Delta r}{r_c (\delta\theta)_c}$$

$$a_w = \frac{k_w \Delta r}{r_w (\delta\theta)_w}$$

$$a_n = \frac{k_n r_n \Delta\theta}{(\delta r)_n}$$

$$a_s = \frac{k_s r_s \Delta\theta}{(\delta r)_s}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c_p \Delta V}{\Delta t}$$

$$b = S_p \Delta V + a_p^0 T_p^0$$

$$a_p = a_c + a_w + a_n + a_s + a_p^0 - S_p \Delta V$$

CHAPITRE IV

Méthodes Numériques

IV-1 Méthode itérative de solution (Algorithme TDMA) :

Le système d'équation algébriques non linéaires contient (NI-2) (NJ-2) équations, après incorporation des conditions aux limites, avec NI et NJ représentent respectivement les nombres totaux des nœuds suivant X et Y pour le problème cartésien et r, θ pour le problème cylindrique.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + \bar{S}_\phi$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_\phi \end{pmatrix}$$

Où :

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} : \text{est une matrice de (NI-2) (NJ-2) éléments.}$$

$$\begin{pmatrix} \phi \end{pmatrix} : \text{Vecteur des inconnues } \phi(i,j)$$

La résolution directe du système étant compliquée, on utilise donc une méthode de résolution itérative qui détermine les valeurs de la variable ϕ sur chaque colonne indépendamment des autres colonnes. Ainsi pour déterminer les valeurs de la variable sur la colonne (i), on suppose que ses valeurs sont connues sur les colonnes (i-1) et (i+1).

L'équation algébrique est alors réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues (ϕ_W, ϕ_N, ϕ_S).

L'équation algébrique s'écrit, Pour le nœud (i,j) du maillage :

$$\begin{aligned} -A_S(i,j)\phi(i,j-1) + A_P(i,j)\phi(i-1,j) - A_N(i,j)\phi(i,j+1) \\ = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + \bar{S}_\phi(i,j) \end{aligned} \quad (IV-1)$$

On posant :

$$a_j = A_P(i,j)$$

$$b_j = A_N(i,j)$$

$$c_j = A_S(i,j)$$

$$d_j = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + \bar{S}_\phi$$

L'équation (III-1) s'écrit sous la forme suivante :

$$-c_j \phi_{j-1} + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \quad (IV-2)$$

$$\text{Avec : } \quad c_1 = 0 \text{ et } \quad b_{NJ} = 0$$

Pour tous les nœuds $[j=2,NJ]$ de la colonne, on a un système de la forme :

$$\left(\begin{array}{l} -c_2 \phi_1 + a_2 \phi_2 - b_2 \phi_3 \dots\dots\dots = d_2 \\ 0 - c_3 \phi_2 + a_3 \phi_3 - b_3 \phi_4 \dots\dots\dots = d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 - c_{NJ} \phi_{NJ-1} + a_{NJ} \phi_{NJ} - b_{NJ} \phi_{NJ+1} \dots\dots\dots = d_{NJ} \end{array} \right) \quad (IV-3)$$

La matrice associée au système est tri diagonal, on utilise l'algorithme TDMA pour la résoudre.

Les équations (III-3) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j} \phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \phi_{j+1} - \frac{d_j}{a_j}$$

D'où :

$$\phi_2 = \frac{c_2}{a_2} \phi_1 + \frac{b_2}{a_2} \phi_3 + \frac{d_2}{a_2}$$

⋮

$$\phi_{NJ} = \frac{c_{NJ}}{a_{NJ}} \phi_{NJ-1} + \frac{b_{NJ}}{a_{NJ}} \phi_{NJ+1} + \frac{d_{NJ}}{a_{NJ}}$$

Puisque ϕ_1 est connu, on élimine ϕ_2 puis ϕ_3 et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une relation de récurrence ϕ_j .

$$\phi_j = P_j \phi_{j-1} + Q_j \quad (IV-4)$$

Détermination de P_j et Q_j :

Pour le nœud $(i,j-1)$, on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1} \phi_{j-2} + Q_{j-1} \quad (IV-5)$$

En remplaçant (IV-1-6) dans (IV-1-3) on obtient :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_{j-1} + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j-1} = d_j$$

D'où on a :

$$(a_j - c_j P_{j-1}) \phi_j = d_j + c_j \phi_{j-1} + b_j \phi_{j-1}$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j-1} + \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{IV-6})$$

De (III-4) et (III-6) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}}$$

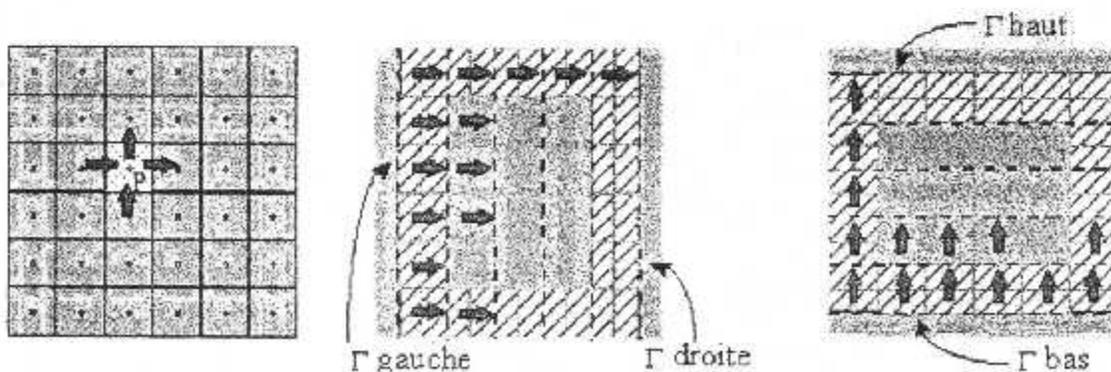
$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j-1} + \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}}$$

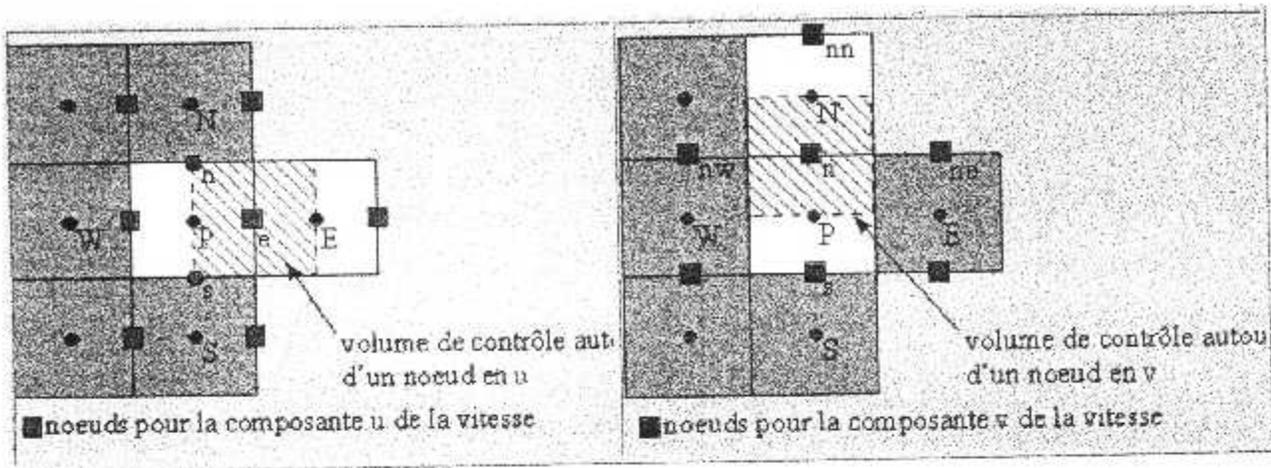
On dira finalement qu'on a résolu la matrice en faisant un balayage suivant X (colonne par colonne).

Pour la résolution de la matrice en faisant un balayage suivant Y (ligne par ligne), on utilisera les mêmes étapes que le balayage suivant X, en supposant que les valeurs de la variable ϕ sur les lignes $(j-1)$ et $(j+1)$ sont connues.

IV-2 Schéma de calcul l'algorithme SIMPLE (Semi Implicite Méthode for Pressure Linkage Equation)

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes (U_e, U_w, U_n, U_s). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse en "damier" est vue comme un champ uniforme. Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid". Une grille principale est construite sur laquelle on calcule la pression, la température (et/ou la concentration). Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale (figure).





La discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement sur les deux grilles donnent respectivement:

$$A_e U_e = A_{ec} U_{ec} + A_w U_w + A_{nc} U_{nc} + A_{sc} U_{sc} + b_u + (P_P - P_E) A_e$$

$$A_n V_n = A_{nn} V_{nn} + A_s V_s + A_{nc} V_{nc} + A_{nw} V_{nw} + b_v + (P_P - P_N) A_n$$

Ici $A_e = \Delta y$ et $A_n = \Delta x$ de sorte que $(P_P - P_E) \Delta y$ représente la force de pression sur le volume de contrôle de la vitesse U .

Ceci s'écrit aussi sous la forme condensée classique:

$$A_e U_e = \sum A_{\text{voisins}} U_{\text{voisins}} + A_e (P_P - P_E) + b_u \quad (1)$$

$$A_n V_n = \sum A_{\text{voisins}} V_{\text{voisins}} + A_n (P_P - P_N) + b_v$$

Le principe de SIMPLE consiste à partir d'un champ de pression estimé p^* au départ ou à l'itération précédente et d'en déduire un champ de vitesses à l'aide des relations (I). On a donc:

$$A_e U_e^* = \sum a_{\text{voisins}} U_{\text{voisins}}^* + A_e (P_P^* - P_E^*) + b_u \quad (2)$$

$$A_n V_n^* = \sum a_{\text{voisins}} V_{\text{voisins}}^* + A_n (P_P^* - P_N^*) + b_v$$

La pression est ensuite corrigée d'une quantité p' qui induit une correction sur les vitesses u' et v' de sorte que les nouveaux champs s'écrivent:

$$\begin{aligned} p &= p^* - p' \\ u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \end{aligned}$$

Les corrections sur les vitesses se déduisent facilement en soustrayant membre à membre les systèmes (I)-(II). On obtient alors:

$$A_e U_e' = \sum A_{\text{voisins}} U_{\text{voisins}}' + A_e (P_P' - P_E')$$

$$A_n V_n' = \sum A_{\text{voisins}} V_{\text{voisins}}' + A_n (P_P' - P_N')$$

L'hypothèse de l'algorithme SIMPLE consiste en outre à négliger les sommes dans les équations précédentes (Ces termes sont nuls si la solution correcte est obtenue):

$$A_e U_e' = A_e (P_P' - P_E')$$

$$A_n V_n' = A_n (P_P' - P_N')$$

Des expressions similaires sont bien sûr obtenues pour U_n et V_s . Ainsi les corrections sur les vitesses sont déduites directement de manière explicite à partir de la correction de pression qui est quand à elle déterminée à partir d'une discrétisation de l'équation de continuité.

L'équation de continuité intégrée sur le volume fini centré en P conduit à:

$$U_e \Delta y - U_w \Delta y + V_n \Delta x - V_s \Delta x = 0$$

Ceci s'écrit aussi:

$$[U_e^* + A_e(P_P' - P_E')/A_e - U_w^* - A_w(P_W' - P_P')/A_w] \Delta y + [V_n^* + A_n(P_P' - P_N')/A_n - V_s^* - A_s(P_S' - P_P')/A_s] \Delta x = 0$$

En regroupant les différents termes cette équation peut être finalement mise sous la forme standard:

$$A_P P_P' = A_E P_E' - A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + b$$

Avec

$$A_P = (A_e/a_e + A_w/a_w) \Delta y + (A_n/a_n + A_s/a_s) \Delta x$$

$$A_E = A_e \Delta y / A_e$$

$$A_W = A_w \Delta y / A_w$$

$$A_N = A_n \Delta x / A_n$$

$$A_S = A_s \Delta x / A_s$$

$$b = (U_w^* - U_e^*) \Delta y + (V_s^* - V_n^*) \Delta x$$

Cette équation est appelée équation de correction de la pression.

L'algorithme SIMPLE se résume finalement aux étapes suivantes:

Début des itérations

1. Choix de p^*
 2. Calcul de U^* et V^*
 3. Calcul de p'
 4. En déduire U, V, P
 5. Test de Convergence
- Si les test est non satisfait : retour au point 2

Remarque

Cet algorithme converge toutefois lentement et nécessite de fortes sous relaxations. Il existe d'autres variantes telles que SIMPLER (Revised), SIMPLEC (Consistent), SIMPLEX....Il existe aussi un algorithme pour grilles non décalées: SIMPLEN

Critère de convergence par logiciel fluent :

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence l'ors que les itération ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs de la variables ϕ . Pratiquement, on exprime cette convergence par test d'arrêt du processus itératif appelé aussi « critère de convergence ».

Un critère approprié est celui qui porte sur les résidus de quantité de mouvement, de la masse et la température. Ces résidus sont définis par :

$$R_\phi = \sum_{nb \in E, W, N, S} a_{nb} \phi_{nb} + b - a_p \phi_p$$

Evidement, quand l'équation discrétisée est satisfaite, R_ϕ tend vers zéro mathématiquement, on traduit cela par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\Omega} |R_\phi| < \varepsilon_\phi$$

Ω : domaine de calcul

ε_ϕ : valeur infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution obtenue .

CHAPITRE V

Résultats et discussions

V- Discussion des Résultats

V-1 Problème de la Convection Naturelle :

V-1-1 Cavité carrée

a- Champ D'écoulement :

La fig. (V-1) représente les contours de la fonction de courant pour une cavité carrée pour trois cas des nombres de Rayleigh ($Ra=10^3, 10^5, 10^6$).

Pour un nombre de Prandtl égale à (0.71) on remarque tout d'abord sur la Fig. (V-1-a) (Cas $Ra=10^3$) qu'il y a mouvement de fluide dans le sens des horaires c'est à dire de la paroi chaude vers la paroi froide.

Au cours de son trajet, la particule fluide absorbe la chaleur de la paroi chaude, sa température s'élève fait un mouvement ascendant en allant céder de la chaleur à la paroi froide tout en descendant et revient lécher la paroi chaude et les mêmes phénomènes se reproduisent.

On distingue trois structure dans ces figures : les couches limites verticales, les couches limites horizontales et la région de la cellule.

Pour les nombres de Rayleigh et les nombres de Grashof croissants, les couches limites devient mince et la région de la cellule s'élargissait et se disloquerait.

Dans ce cas apparaîtrait un autre régime à étudier. Ce phénomène est expliqué par l'augmentation de l'inertie, donc des vitesses de convection (Pr petit = 0.71).

« Les comparaisons des profils des vitesses verticales V au centre de cavité pour le même nombre de Prandtl et pour les nombres de Rayleigh ($10^3, 10^5, 10^6$) représentent dans les fig. (V-2-a, V-2-b, V-2-c), fig. (V-3-a, V-3-b, V-3- c).

La première remarque à faire est qu'il y a conservation du débit, la deuxième est que la couche limite se développe et la région de stratification s'agrandie avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et se qui est particulièrement intéressant est le renversement du mouvement du fluide au centre de la cavité ($X=0.5$), cela est due a la forte voracité près des parois.

b- Champ Thermique :

Les champs thermiques présentés par les contours de température pour Ra ($Ra=10^3, 10^5, 10^6$), et $Pr = 0.71$ sont exposés dans les fig. (V-5-a, V-5-b, V-5-c). La fig. (V-5-a) montre que la température décroît au long des parois horizontales et que les gradients des températures sont relativement importants près de la paroi froide à droite et près de la paroi chaude à gauche.

Avec l'accroissement du nombre de Rayleigh, les gradients de température deviennent de plus important fig. (V-5-b, V-5-c).cette augmentation entraîne une augmentation du flux de chaleur près des parois.

Les profils de température des études (14-15-16) coïncident avec les profils de présente étude pour les valeurs ($Ra=10^3, Ra=10^5, Ra=10^6$, pour $Pr=0.71$)

V-1-2 Cavite Circulaire :

a- Champ D'écoulement :

La Fig. (V-5) représente les contours de la fonction de courant pour une cavité circulaire à des nombres de Rayleigh de $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$.

On remarque que pour un nombre de Rayleigh égal à 10^3 , le nombre de tourbillons est de quatre. Les vitesses induites sont très faibles 10^{-7} m/s. A $Ra = 10^4$, les vortex précédents fusionnent pour donner un seul vortex avec une augmentation de la vitesse. Lorsqu'on augmente au fur et à mesure le nombre de Rayleigh, on détruit l'unique tourbillon pour donner naissance à deux vortex contrarotatifs ($Ra=10^5$), à symétrie de l'écoulement. A $Ra=10^6$ on remarque que le nombre de tourbillons quatre. Deux vortex contrarotatifs basée on bas de cercle avec un grand d'inertie est les outre avec petite d'inertie.

Ces résultats ont démontré l'effet de l'augmentation du nombre de Rayleigh sur la structure des champs d'écoulements (élargissement de la zone de circulation du fluide, élargissement de la cellule) donc on a une instabilité de l'écoulement.

b- Champ Thermique :

Les champs thermique présentés par les contours de température pour nombres de Rayleigh ($Ra= 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$)

La Fig. (V-6-a) montre que la température décroît au long de paroi inférieure et supérieure et que les gradients des températures sont relativement importants près de la paroi froide supérieure et près de la paroi chaude inférieure.

Les lignes isothermes sont uniformes.

Avec l'accroissement du nombre de Rayleigh, les gradients de température deviennent de plus important Fig. (V-6-b, 6-c, 6-d). Cette augmentation entraîne une augmentation du flux de chaleur près des parois, avec une déformation des lignes isothermes.

Lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh l'épaisseur de la couche limite chaude diminue.

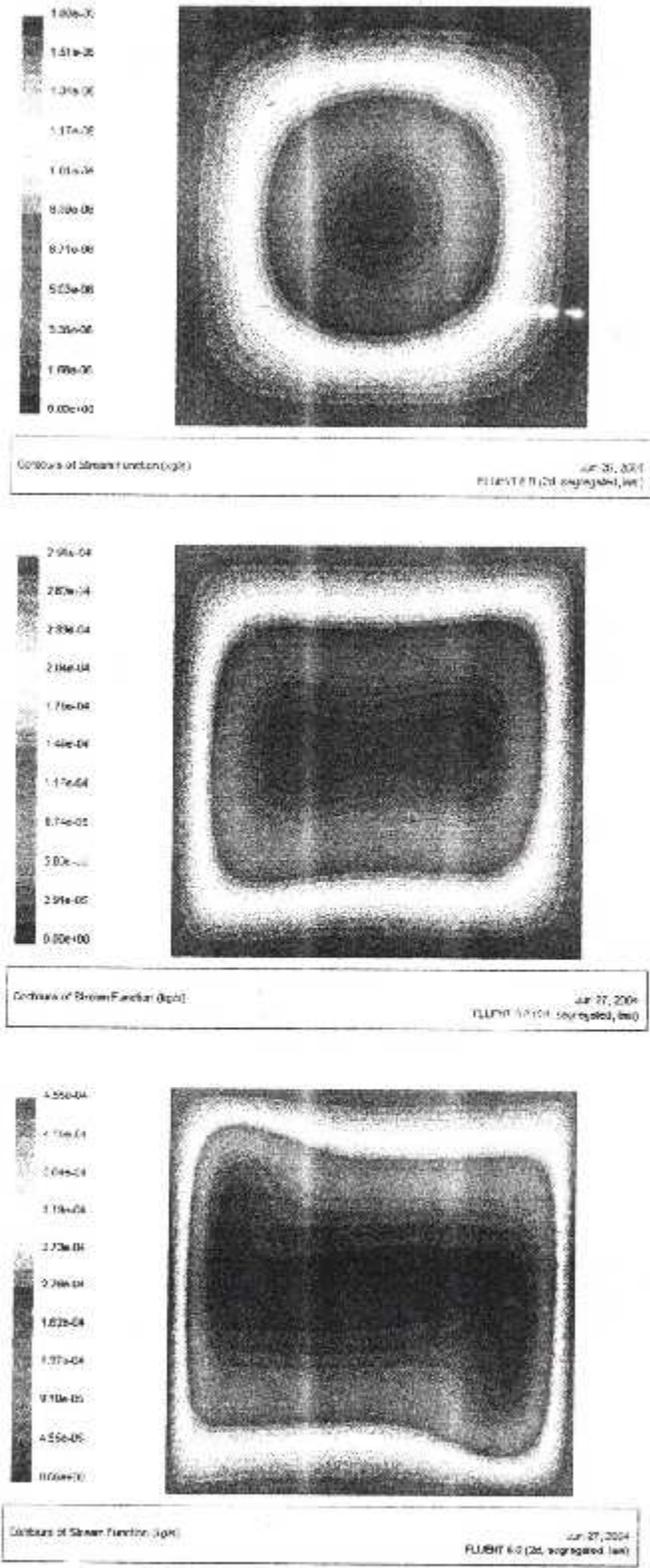


Fig. (V-1) : Fonction de courant pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

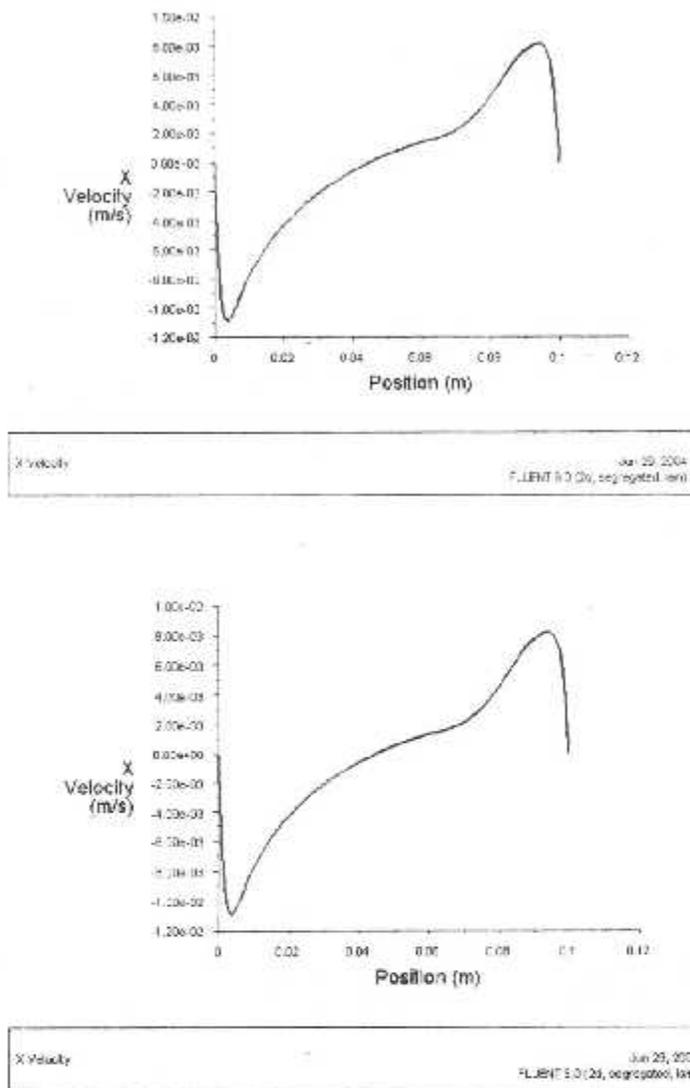


Fig. (V- 2) : Effet du nombre de Rayleigh sur le profil de la vitesse U au centre de la cavité a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

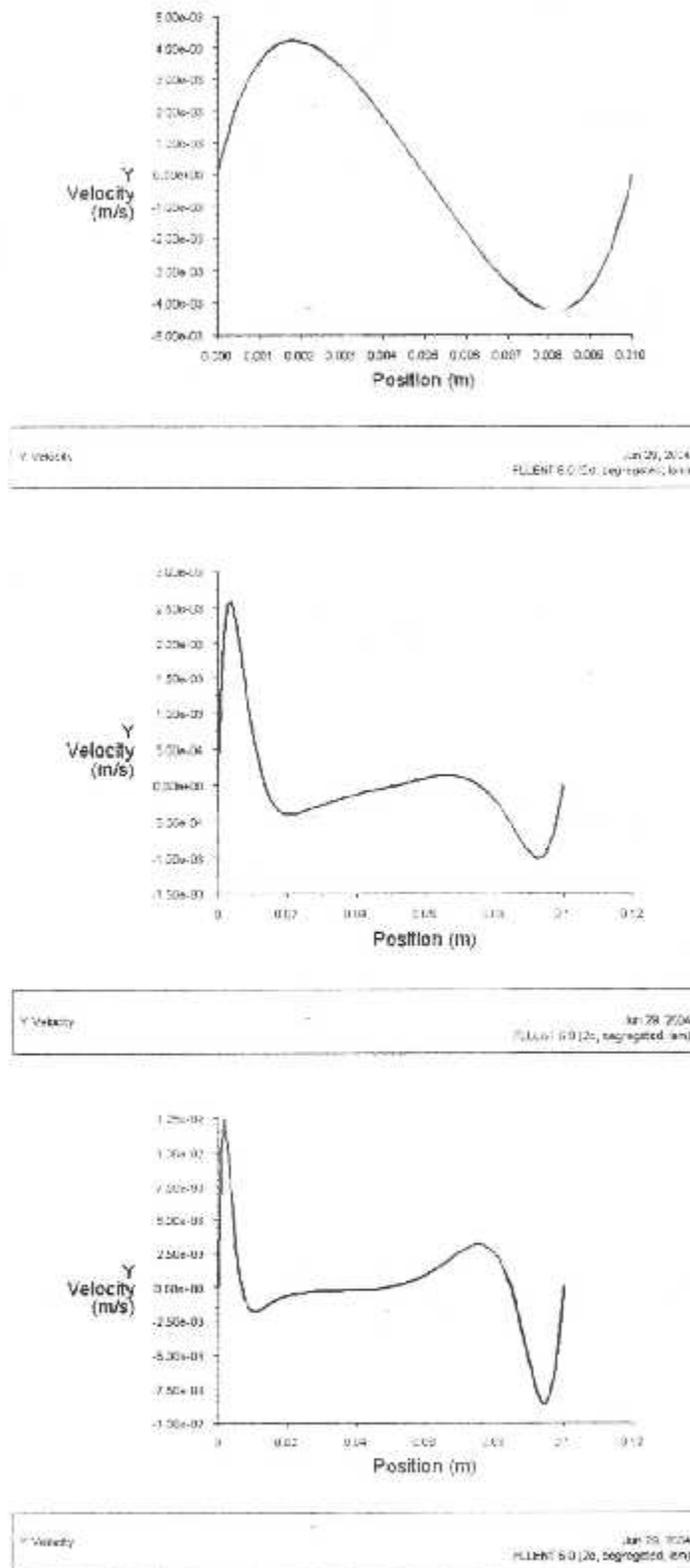


Fig. (V- 3) : Effet du nombre de Rayleigh sur le profil de la vitesse V au centre de la cavité a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

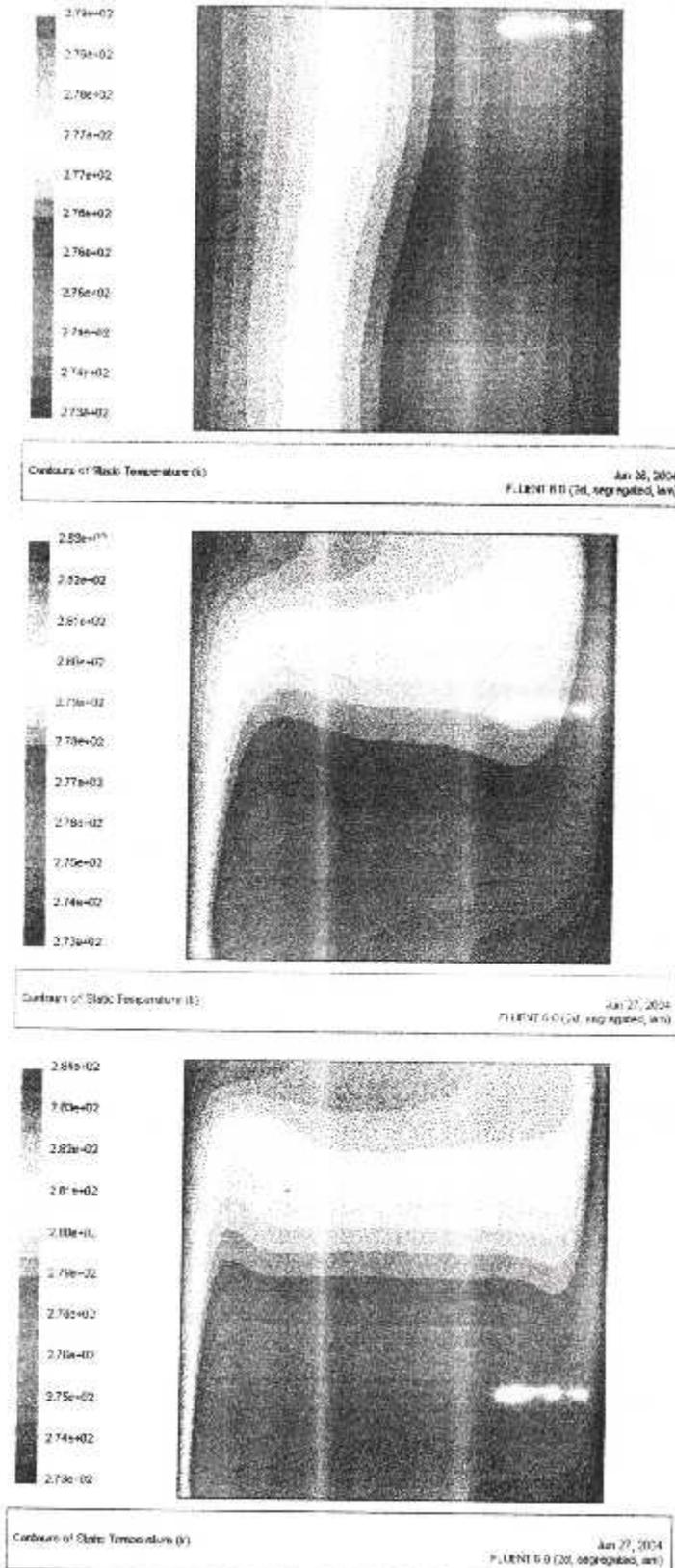


Fig. (V-4) : Champs de température pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

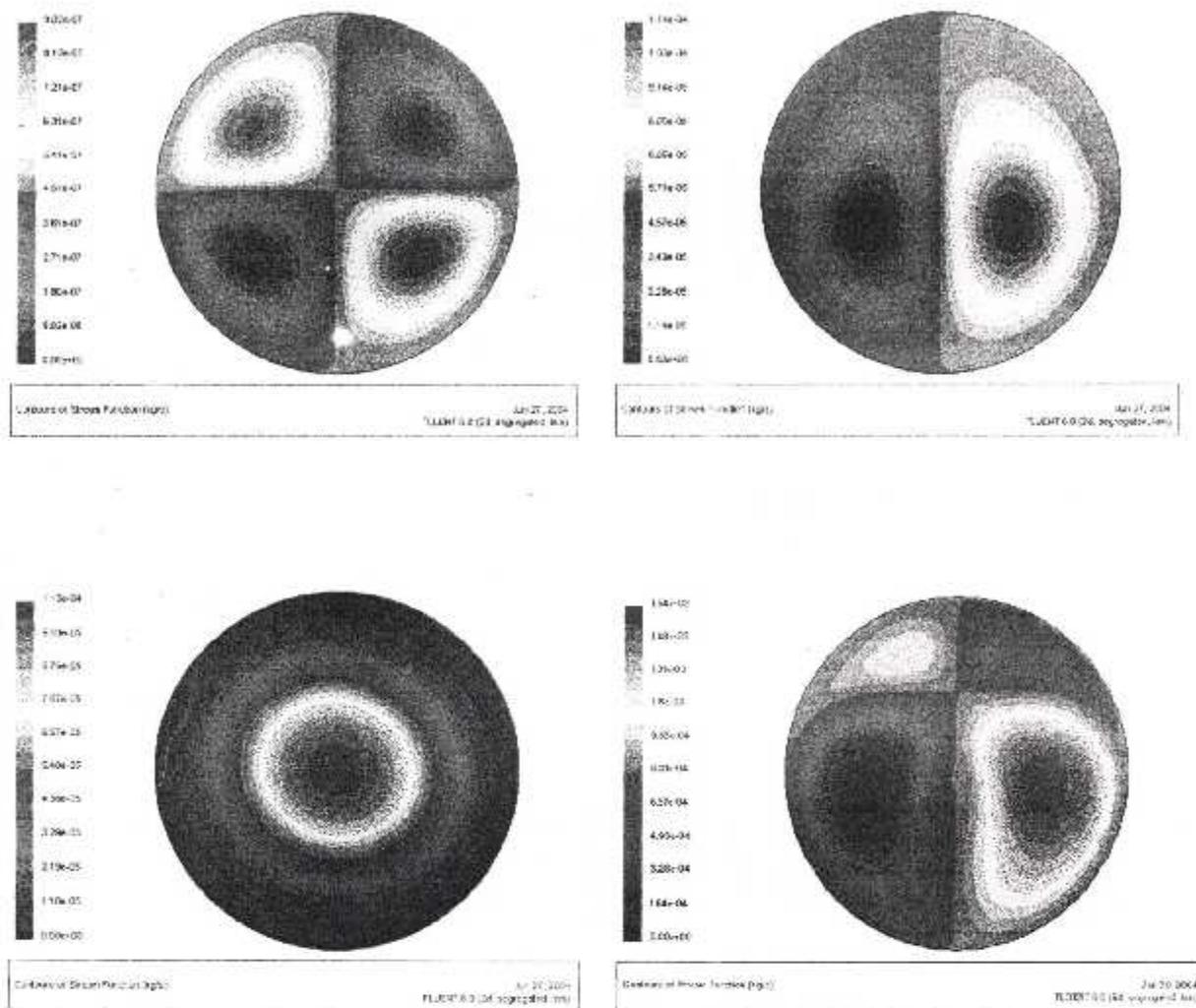


Fig. (V-5) : Fonction de courant pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^4$; c) $Ra=10^5$; d) $Ra=10^6$

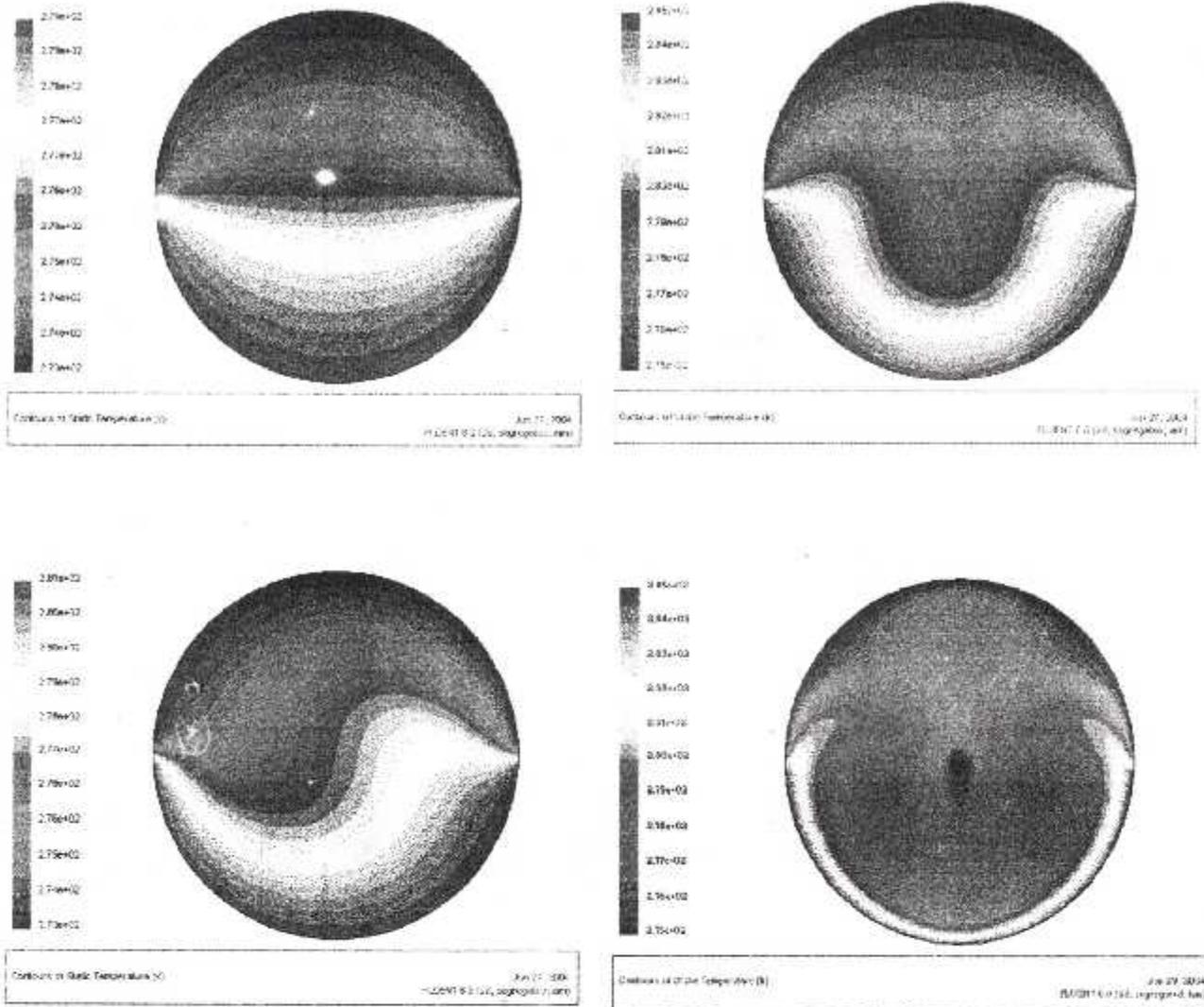


Fig. (V- 6) : Champs de température pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^4$; c) $Ra=10^5$; d) $Ra=10^6$

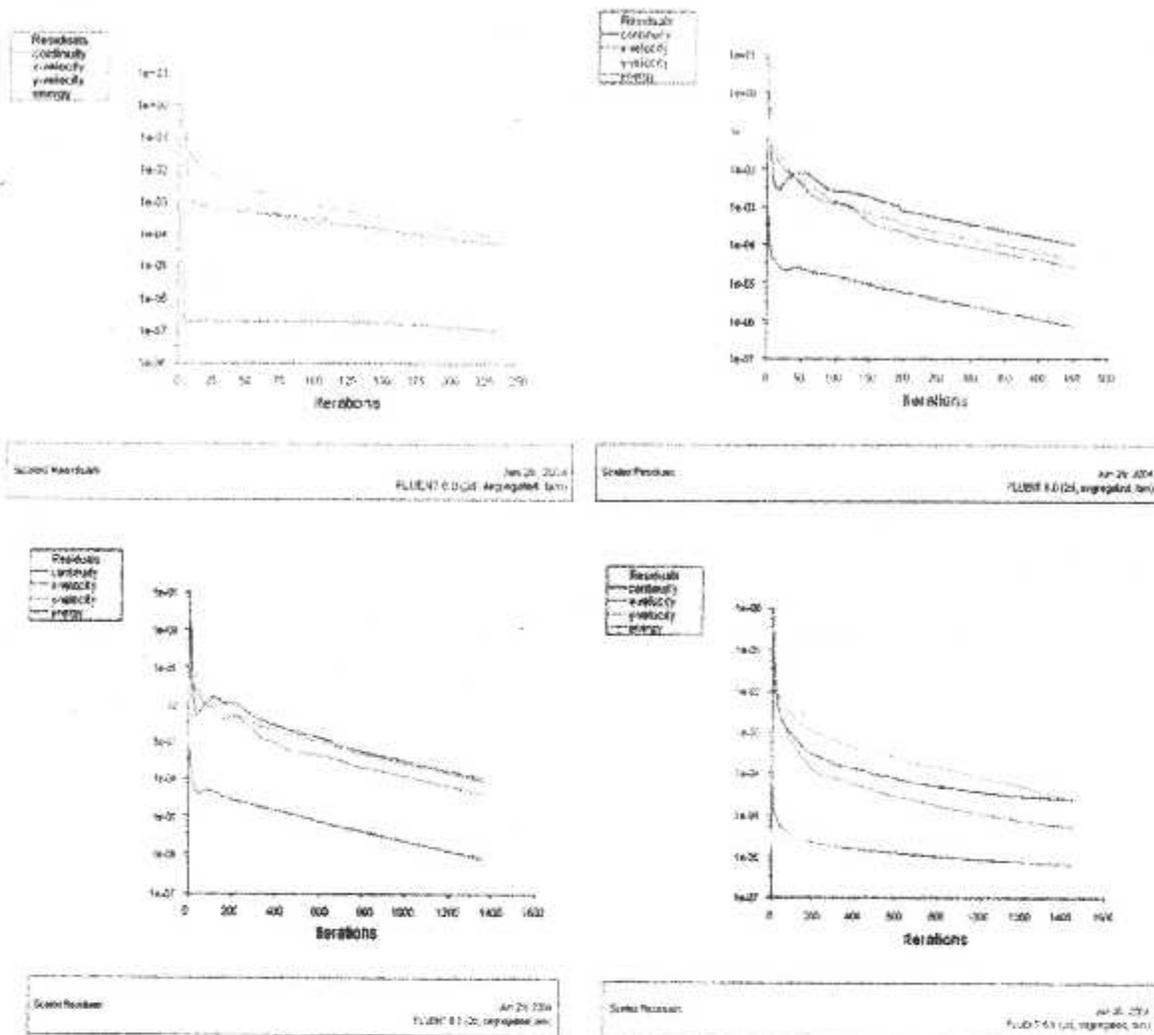


Fig. (V-7) courbes représentant la résidu on fonction de nombre de itération Pour la cavité circulaire a) $Ra = 10^3$ b) $Ra = 10^4$ c) $Ra = 10^5$ d) $Ra = 10^6$

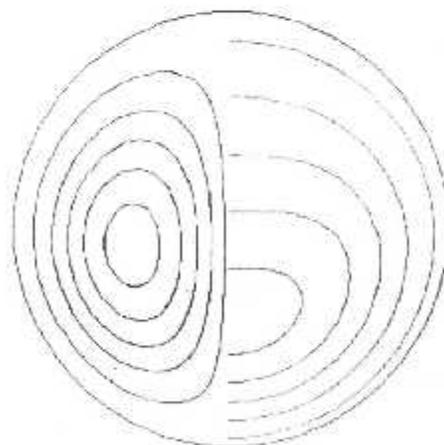
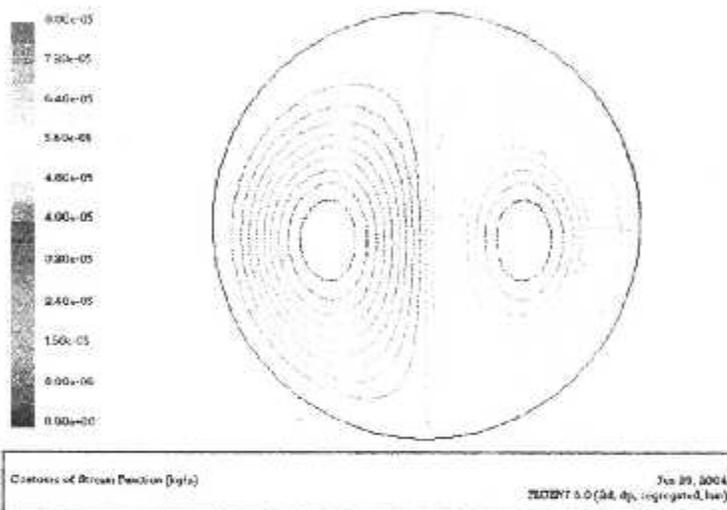
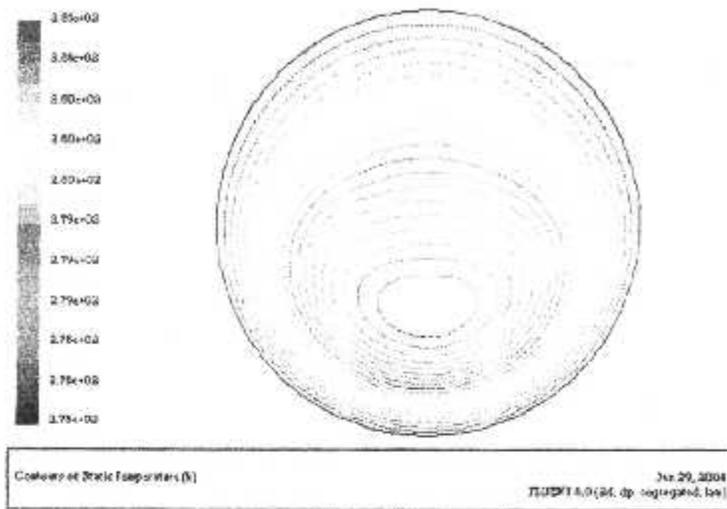


Fig. (V-8) Comparaison du fonction de courant et champs de température pour $Ra=10^4$ avec [7]

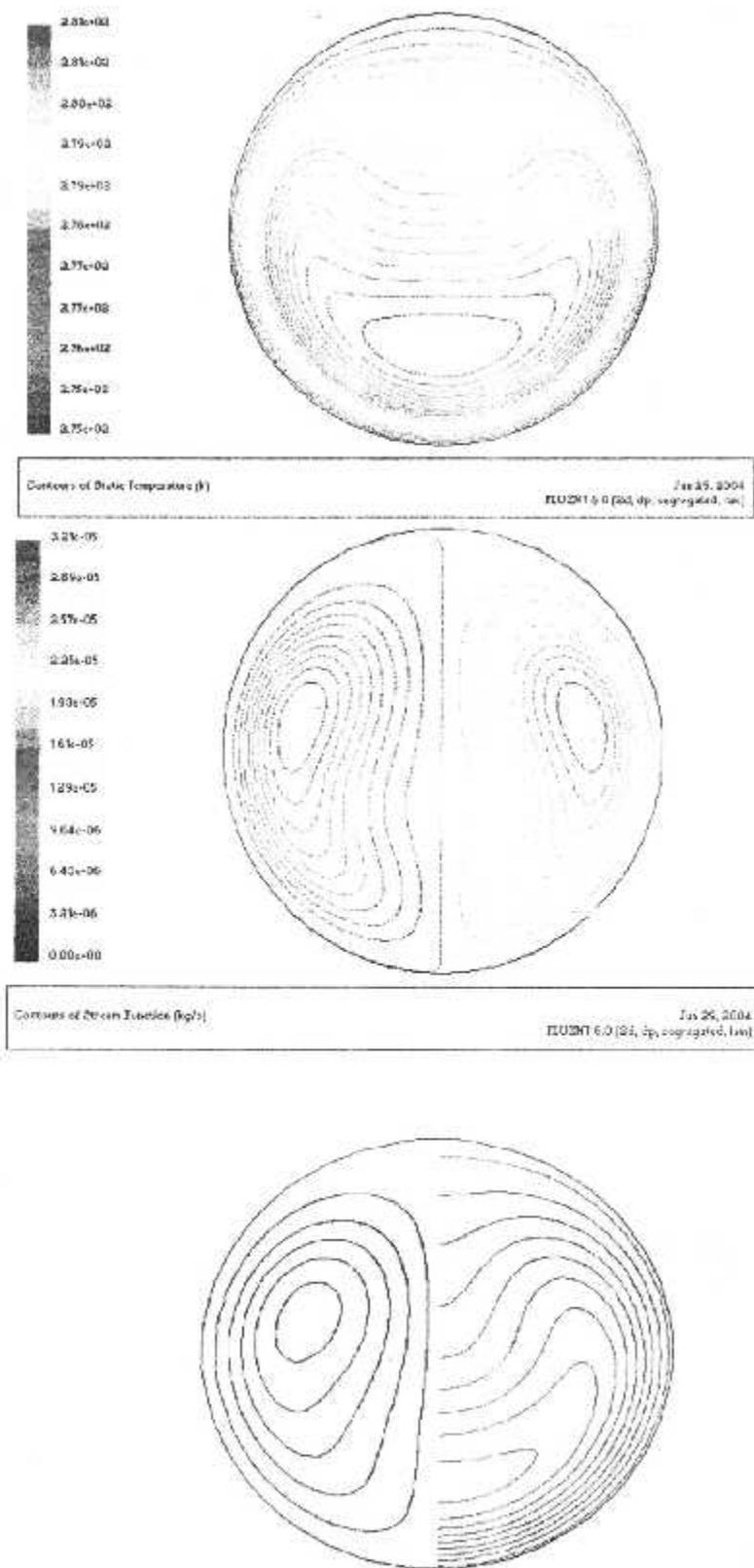


Fig. (V-9) Comparaison du fonction de courant et champs de température pour $Ra=10^5$ avec [7]

V-2 Problème de la Conduction :

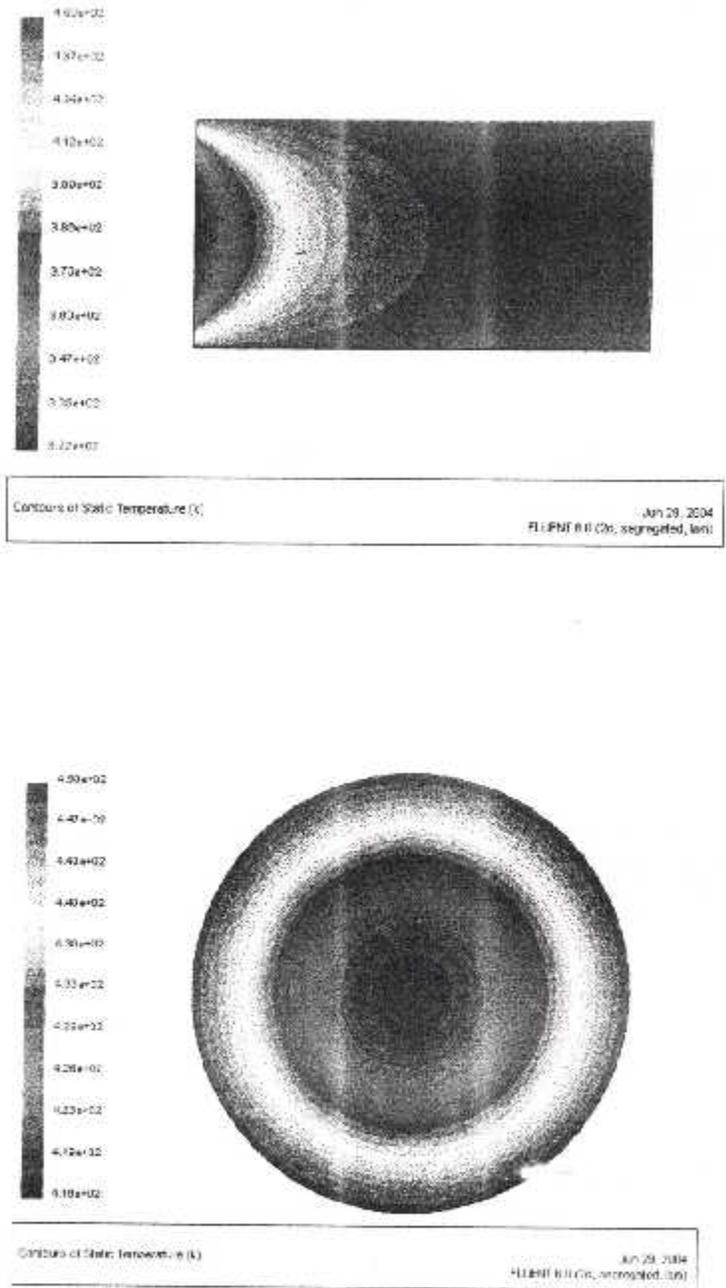


Fig. (V-10) Résultat de la conduction pour la géométrie rectangulaire et circulaire

CONCLUSION

Le projet de simulation numérique que nous avons entrepris et finalisé par ce mémoire nous a permis de nous introduire dans le monde fascinant de ce l'on appelle en langage anglo-saxon CFD. L'écoulement que nous avons étudié est un écoulement à recirculation de nature elliptique. Le phénomène de la convection naturelle est correctement modélisé par le modèle de Boussinesq. Néanmoins, il faut rappeler que sa validité n'est confirmée que si l'écart de température reste inférieur à 10° K.

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur qui intervient dans beaucoup de processus tant naturels qu'industriels. A ce titre, on peut citer les phénomènes de micro et macro ségrégation qui apparaissent dans les problèmes de coulée de matériaux purs ou alliages. En général, la solidification en présence de la convection naturelle est indésirable qu'il faut réduire au maximum.

Le premier pas de la résolution numérique est celui de la génération de maillage. Celui-ci a été résolu grâce à la disponibilité du pré processeur GAMBIT qui peut générer des maillages orthogonaux structurés ou instructurés.

Avant d'étudier la convection naturelle, nous avons tester Fluent sur des problèmes de conduction pure. Cette étape est primordiale car elle nous a permis de nous familiariser avec le logiciel. Confiant des résultats obtenus, nous avons entrepris la simulation numérique de la convection naturelle en régime laminaire. A ce niveau nous avons été amener à revoir la théorie des équations de Navier Stockes et de l'énergie, la technique des volumes finis et certains procédés de résolution.

Concernant les schémas de discrétisation, on notera que les termes temporel ont été discrétisé avec le schéma d'Euler implicite, le couplage pression vitesse a été assuré grâce à l'algorithme SIMPLE, les termes de convection par les schémas amont et Hybrid et les termes de diffusion par des schémas du second ordre.

Etant donné la nature non linéaire des équations mises en jeu, un bon choix des facteurs de relaxation est nécessaire. En général, dans ce type de problème et pour assurer une bonne convergence : il faut sous relaxer. Ces facteurs sont obtenus par des essais en visualisant le tracé des résidus de masse, de vitesse et de température. Il y'a lieu de remarquer dans ce contexte, qu'il n'est pas obligatoire de choisir un schéma d'ordre élevé pour obtenir une bonne convergence. C'est dire toute la difficulté de la résolution des équations de Navier Stockes.

Concernant les géométries étudiées, la cavité circulaire est une réduction du cylindre horizontal infini. Elle reste peu étudiée comparativement à la cavité de forme rectangulaire.

Les résultats que nous avons obtenus sont très satisfaisants et sont conformes à ceux publiés dans la littérature. Dans le cas de la cavité carrée nos résultats ont été confrontés à ceux de N.Markatos & K. A. Pericleous alors que ceux de la cavité circulaire, la confrontation a été faite avec les travaux de M. Hort.

CONCLUSION

Finalement, nous avons montré à travers cette étude que le logiciel FLUENT est parfaitement apte à simuler la convection naturelle réputée difficile à cause de la recirculation qu'elle produit.

Pour les travaux futurs, il serait intéressant d'étudier avec ce logiciel le problème du changement de phase de matériaux purs ou alliages.

ANNEXE

Démonstration des équations de transport

ANNEXE

Résoudre un problème de convection ou un problème de conduction revient à déterminer en tous points et à tout instant ces grandeurs (pression, température, vitesse), pour cela nous appliquerons les principes généraux de la mécanique de fluide et de la thermodynamique, en l'occurrence :

- 1-Le principe de conservation de la masse.
- 2-Le principe de conservation de quantité de mouvement.
- 3-Le principe de conservation de l'énergie.

A-1) détermination des équations de transport et formulation en coordonnées cylindriques et cartésiennes :

A-1-1) Equation de continuité :

Démonstration à l'aide d'un domaine de contrôle immobile :

Soit un domaine (D), limite par une surface fermée (S) immobile dans l'espace. Considérons le cas où à l'intérieur de (D), il existe des sources ou des puits de débit q_v Par unité de volume.

La masse contenue à l'intérieur de (D), à l'instant (t) a pour expression :

$$m = \iiint_D \rho \cdot dv \quad dv : \text{élément de volume de } (D)$$

La variation de la masse pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dm = dt \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \cdot dv - dt \iiint_D \rho \cdot q_v \cdot dv \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \cdot dv - \iiint_D \rho \cdot q_v \cdot dv$$

La masse sortant à travers (S) pendant l'intervalle de temps dt sera : $-dm$

$$-dm = dt \iint_S \rho \bar{U} \cdot \bar{n} = dt \iiint_D \text{div}(\rho \bar{U}) \cdot dv$$

$$-\iiint_D \text{div}(\rho \bar{U}) \cdot dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \cdot dv - \iiint_D \rho \cdot q_v \cdot dv = \iiint_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \cdot q_v \right] \cdot dv$$

Relation qui est indépendante de (D), donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \cdot q_v = \text{div}(\rho \bar{U})$$

$$\text{div} \rho \bar{U} = \sum_i \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = \rho \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \sum_i U_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Et d'après la définition de la dérivée totale :

$$\sum_i U_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Nous aurons

$$\operatorname{div} \rho \vec{U} = \rho \operatorname{div} \vec{U} + \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

D'où la forme équivalente de l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \rho \vec{U} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = \rho q_v$$

S'il n'y a ni puits ni source dans (D) donc $q_v = 0$

L'équation précédente devient :

-pour un écoulement permanent, incompressible ou non : $\operatorname{div} \rho \vec{U} = 0$

-suivant les hypothèses de base de la présente étude (écoulement permanent, fluide incompressible) :

$$\frac{d}{dt}(\rho) = 0 \quad \rho = \text{Constante, nous aurons } \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (A-1-a)$$

Avec \vec{U} représentant la vitesse de composantes u , v et w

En coordonnées cylindriques, nous écrivons :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

En coordonnées cartésiennes, nous écrivons :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

D'où l'équation de continuité en coordonnées cylindriques :

$$\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

Est en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (A-1-c)$$

A-1-2) Equation de quantité de mouvement :

Soit le domaine (D) limité par la surface (S) dépourvu de source ou de puits de matière F est la force extérieure qui s'applique à l'unité de masse du fluide (force imposée par l'extérieur).

T est la tension qui s'applique sur (S) par unité de surface (force exercée par le fluide extérieur à (D)).

Pour la masse intérieure à (D), le principe fondamental de la mécanique s'écrit :

$$\iiint_D \rho \vec{\Gamma} dv = \iiint_D \rho \vec{F} dv + \iint_S \vec{T} ds$$

En projection sur l'axe Ox_i , cette expression devient :

$$\iiint_D \rho \Gamma_i dv = \iiint_D \rho F_i dv + \iint_S T_i ds$$

T peut être représenté sous forme du produit d'un tenseur σ et du vecteur unitaire n normal à (S) et dirigé vers l'extérieur : $T = \sigma \cdot n$

σ Est appelé le tenseur des contraintes. Nous pourrions donc écrire :

$$\iint_S T_i ds = \iint_S \sigma_{ij} n_j ds = \iint_S \vec{\sigma}_i \cdot \vec{n} ds$$

En introduisant le vecteur $\vec{\sigma}_i$ de composantes $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$ on peut transformer l'intégrale double en intégrale triple.

$$\iint_S \vec{\sigma}_i \cdot \vec{n} ds = \iiint_D \text{div} \vec{\sigma} dv = \iiint_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv$$

$$\text{Avec} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\text{D'où : } \iiint_D \rho \Gamma_i dv = \iiint_D \rho F_i dv + \iiint_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv = \iiint_D \left(\rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit (D). On a donc en tout point :

$$\rho \Gamma_i = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{Avec} \quad \Gamma_i = \frac{dU_i}{dt} \quad (\text{A-2})$$

Pour un fluide newtonien, est de la forme

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \varepsilon_{kk} = \text{div} \vec{U} \quad \text{et} \quad \mu = \mu(x_i, t).$$

δ_{ij} Est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$
 $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

On trouve alors que :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \text{div} \vec{U})}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_j}$$

Equation qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \text{div} \vec{U})}{\partial x_i} + \text{div} (\mu \overline{\text{grad} U_i}) + \text{div} \left(\mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right)$$

Ou encore :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \text{div} \vec{U})}{\partial x_i} + \mu \left(\Delta U_i + \text{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right) + (\overline{\text{grad} \mu}) \left[(\overline{\text{grad} U_i}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \right]$$

Pour un fluide incompressible et à viscosité constante :

$\rho = \text{constante} \Rightarrow \text{div} U = 0$, $\mu = \text{constante}$.

Nous aurons les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \Gamma_i = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i \quad (\text{A-3})$$

Détermination de F_i (force par unité de masse) :

La particule est soumise à deux forces :

- 1- son poids : $mg = \rho \Delta V g$
- 2- poussée d'Archimède : $\rho_0 g \Delta V$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique, on aura :

$$\sum \vec{F} = \rho_0 g \Delta V - \rho \Delta V g = (\rho_0 - \rho) g \Delta V$$

Cette force par unité de masse s'écrit :

$$F = \frac{(\rho_0 - \rho) g \Delta V}{\rho \Delta V} = \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} g \quad (\text{A-4})$$

En remplace par (A-4) dans (A-3), nous aurons :

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = (\rho_0 - \rho) g \delta_{12} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i$$

L'hypothèse de Boussinesq exige que $\rho = \rho_0$ dans tous les termes de l'équation dynamiques, sauf dans le terme de la gravité.

Nous aurons donc :

$$\rho_0 \frac{dU_i}{dt} = (\rho_0 - \rho) g \delta_{12} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i \quad (\text{A-5})$$

D'autre part : $\rho = f(p, T)$

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T dp.$$

Pour un fluide incompressible, la densité ne dépend que de la température, nous aurons donc :

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p dT$$

Alors :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{A-6})$$

Avec, β coefficient de dilatation thermique à pression constante [$^{\circ}\text{K}^{-1}$].

En remplaçant par (A-6) dans (A-5) nous aurons l'expression :

$$\rho_0 \frac{dU_i}{dt} = \beta \rho_0 g (T - T_0) \delta_{12} \quad (\text{A-7})$$

Ainsi, pour un écoulement permanent, nous aurons :

$$\mu \Delta U_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \beta \rho_0 g (T - T_0) \delta_{12} \quad (\text{A-7-a})$$

La projection de l'équation (A-7-a) :

1- coordonnées cylindriques donnera deux composantes suivant les directions r et z :

La composante radiale :

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

La composante axiale :

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \beta (T - T_0) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v^2}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A-7-b})$$

2-coordonnées cartésiennes donnera deux composantes suivant les directions x et y :

Suivant la direction x :

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Suivant la direction y :

(A-7-c)

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot g \cdot \beta (T - T_c) + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

Equation de l'énergie :

Le premier principe de la thermodynamique nous donne :

$$dQ_{\text{entrée}} - dQ_{\text{sortie}} = dQ_{\text{acquise}} \quad (\text{A-8})$$

La densité du flux thermique est donnée par :

$$\phi = \frac{dQ}{S \cdot dt} = \frac{\dot{q}}{S}$$

La loi de Fourier donne :

$$\dot{q} = -K \cdot \vec{g} \cdot \text{grad} T$$

Avec, K : conduction thermique [w/m.°c]

La projection sur un axe ox donne :

$$dQ = -K \, dS \cdot \frac{dT}{dx} \, dt$$

Donc :

En remplaçant dans l'équation (A-8) :

$$K \left[S(x+dx) \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - S(x) \frac{dT}{dx} \Big|_x \right] = \rho \cdot Cp \cdot S(x) \, dx \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$K \frac{d}{dx} \left(S(x) \frac{dT}{dx} \right) = \rho \cdot Cp \cdot S(x) \frac{dT}{dt}$$

Pour une section constante : $S(x) = S(x+dx) = S$

$$\frac{K \cdot d \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)}{dx} = \rho \cdot Cp \cdot \frac{dT}{dt} \Rightarrow K \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} = \rho \cdot Cp \cdot \frac{dT}{dt}$$

D'où : $\frac{dT}{dt} = \frac{K}{\rho \cdot Cp} \cdot \frac{d^2 T}{dx^2}$

On pose, $\alpha = \frac{K}{\rho \cdot Cp}$: coefficient de diffusivité thermique [m^2/s]

K : conductivité thermique [watt/m.°C].

Cp : capacité calorifique [j/Kg.°C].

En généralisant à trois dimensions, l'équation de l'énergie s'écrira :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \Delta T. \quad (\text{A-9-a})$$

En coordonnées cylindriques, l'expression du laplacien et de la dérivée totale en fonction des dérivées partielles est par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Est en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

En remplaçant dans le premier terme de l'équation (A-9-a) :

En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]$$

En régime permanent, nous aurons :

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

(A-9-b)

$$u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **R. J. A JANSSEN and R. A. W. M. HENKES**

« Accuracy of finite volume discretizations for the bifurcating natural-convection flow in a square cavity » Numerical Heat Transfer, Part B, Vol 24, pp, 191-207,1993

[2] **KREIYIL, F**

« Transmission de la chaleur et thermodynamique », Masson et C^{ie} éditeurs, 1967.

[3] **J, F, SACADURA**

« Initiation au transfert thermique » TEC 8 Doc, 1993

[4] **Méthode Numérique de résolution C.I.SI.**

[5] **SUHAS V. PATANKAR**

« Numerical heat transfer and fluid flow », Mc Grow Hill book company, 1981.

[6] **N.MARKATOS and K. A. PERICEOUS**

« Laminar and turbulent natural-convection in an enclosed cavity », Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 27. No 5. pp 755-772. 1984

[7] **Matthew Hort**

« Transient Natural Convection within a Horizontal Cylindrical Enclosure »
<http://vortex.mech.surrey.ac.uk/FluidsGroup/People/hort/>