



Université SAAD DAHLAB de Blida 1



Institut d'Aéronautique et des études spatiales

Département construction aéronautique

Option : M2 structure

Thème

ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES EN MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL (FGM) PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE

Présenté par :
Mr: MENDLI MOHAMED ELAMINE

Encadré par :
Dr: Amale Mahi

*****Année universitaire : 2014/2015*****

RESUME

Les matériaux à gradient fonctionnel (MGF) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des propriétés thermomécaniques selon une fonction de distribution donnée de chacun des constituants (en général métal et céramique) à travers l'épaisseur. Cette fonction va guider la progression de la fraction volumique des constituants. Nous obtenons ainsi des structures avec une face entièrement en métal et l'autre en céramique avec une phase de transition entre les deux faces.

Un système MGF doit prouver son efficacité à supporter à la fois les charges mécaniques et thermiques (d'où l'utilisation de la céramique).

Dans le présent travail, nous nous familiarisons avec ces nouveaux matériaux intelligents en faisant l'étude des vibrations libres des plaques MGF moyennement épaisses. La formulation utilisée est basée sur la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin. La plaque est placée sur appuis-simples dans un environnement thermique. Notre analyse est basée sur la méthode analytique de Navier et le logiciel Maple est utilisé pour développer un programme de calcul numérique en vue de calculer les fréquences naturelles de vibration. Les graphes obtenus seront tracés et les résultats trouvés seront présentés et commentés.

SUMMARY

The functionally gradient material (FGM) is a new range of composite materials having a gradual and continuous variation of the thermo-mechanical properties according to a given distribution function of each of the components (usually metal and ceramic) through the thickness. This function will guide the progress of the volume fraction of the components. We obtain structures with a face entirely of metal and the other ceramic with a transition between the two faces.

A FGM system must prove its effectiveness in supporting both the mechanical and thermal loads (hence the use of ceramics).

In the present work, we became familiar with these new materials by studying the free vibration of thick FGM plates by using the first order theory of Reissner-Mindlin. The plate is placed in a thermal environment under simply support condition. We used the analytical method of Navier in order to calculate the natural frequencies of vibration. Maple language was used to develop a numerical calculation program. The obtained graphs will be plotted and the results will be presented and discussed.

ملخص

المواد ذات التدرج الوظيفي هي مجموعة جديدة من المواد المركبة لها تباين تدريجي ومستمر للخصائص الميكانيكية الحرارية وفقا لدالة التوزيع المعطاة من كل عنصر من العناصر (عادة المعادن والسيراميك) من خلال السمك. وهذه الوظيفة توجه تقدم الكسر الحجمي للمكونات. نحصل على هياكل ذات وجه بالكامل من المعدن و الآخر من السيراميك مع مرحلة انتقالية بين الوجهين.

نظام المواد ذات التدرج الوظيفي يجب أن يثبت فعاليته في دعم كل من الأحمال الميكانيكية والحرارية ومن هنا جاء استخدام السيراميك.

في العمل الحالي، أصبحنا على دراية مع هذه المواد الذكية من خلال دراسة الاهتزازات الحرة للوحات متوسطة سمكا (على أساس نظرية الدرجة الأولى لرايسنرميندلين) وضعت في دعم البيئة الحراري الشديد فوق مرتكز بسيط من خلال طريقة نافبي وهي طريقة للحل تقريبية من خلال تطوير برنامج حساب العددية بلغة ما بل وسيتم تأمر الرسوم البيانية وستناقش النتائج.

REMERCIEMENTS

Nous remercions messieurs mesdames les membres du jury de l'attention qu'ils accorderont à lire et à examiner ce mémoire, les enseignants qui ont fait preuve de patience le long de notre formation et toute personne ayant contribué à sa réalisation sans oublier la famille Mendli. Un grand merci à Mme Mahi Amale qui nous a consacré beaucoup de son temps, et nous a accompagné durant tout le travail et nous a comblés de conseils et de directives précieuses.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
1. MATERIAUX COMPOSITES ET A GRADIENT DE PROPRIETES.....	2
1.1. Introduction	2
1.2. Matériaux composites.....	2
1.3. Matériaux à gradient fonctionnel.....	12
1.4. Procédés de fabrication.....	15
1.5. Régions d'application de fgm	17
1.6. Conclusion.....	18
2. MECANIQUE DES FGM.....	19
2.1. Introduction.....	19
2.2. Lois de distribution des propriétés.....	19
2.3. Théories des déformations des plaques fgm.....	23
2.4. Conclusion.....	28
3. ETUDE DES VIBRATIONS DE LA PLAQUE FGM.....	29
3.1. Introduction.....	29
3.2. Champs des déplacements, déformations et des contraintes.....	29
3.3. Principe des travaux virtuels.....	30
3.4. Application du principe de Hamilton.....	34
3.5. Calcul des fréquences de la plaque fgm.....	36
3.6. Conclusion.....	40

4. RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....	41
4.1. Introduction.....	41
4.2. Organigramme du programme de calcul.....	42
4.3. Validation des résultats.....	43
4.4. Conclusion.....	58
CONCLUSION	60

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

REFERENCES

INTRODUCTION

Les nouvelles technologies nécessitent des matériaux nouveaux à hautes performances, capables de remplacer les matériaux classiques. En effet, les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, la construction navale, l'industrie automobile, etc.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM : Functionally Graded Materials) sont un nouveau type de matériaux composites sophistiqués qui ont une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces tout en préservant les caractéristiques des matériaux constituants. Ce sont des matériaux hétérogènes, généralement constitués de métal et de céramique, et nous les trouvons principalement dans des structures évoluant dans des environnements thermiques sévères tels que les réacteurs nucléaires, les échangeurs de chaleur, les revêtements des véhicules spatiaux supersoniques et hypersoniques, etc. [1].

Dans ce travail, le but recherché est d'abord de se familiariser et de comprendre ce que sont les matériaux FGM puis de déterminer leurs propriétés (qui ne sont pas constantes) en fonction des coordonnées du point considéré et de la fonction de distribution considérée. Il faudra ensuite modéliser ces matériaux en se basant sur la théorie de Reissner-Mindlin et en se servant du principe de Hamilton, puis dériver les équations de mouvements en termes de déplacements et de rotations. La résolution des équations différentielles obtenues se fera par la suite pour le cas de deux plaques FGM sur appuis-simples, placées dans un environnement thermique, par la méthode de Navier. Les résultats représentant les fréquences naturelles seront établis puis commentés, des graphes appropriés seront tracés pour montrer l'influence des paramètres considérés dans cette étude en l'occurrence, la géométrie de la plaque, l'index de la fraction volumique, les matériaux constituants et la variation de la température.

CHAPITRE 1

MATERIAUX COMPOSITES ET A GRADIENT DE PROPRIETES

1.1. Introduction

Selon sa classe, chaque type de matériau possède des propriétés et des caractérisations qui lui sont propres : les métaux sont en général tenaces et ductiles, mais leur masse volumique est souvent élevée ; les matières plastiques, légères, font preuve d'une faible rigidité, bénéficient de propriétés mécaniques moyennes et sont parfois fragiles ; quant aux céramiques, elles ont un module de Young et une résistance théorique à la traction très élevée, mais elles sont intrinsèquement fragiles. En combinant divers types de matériaux normalement non miscibles, et tout en contrôlant leurs morphologies et leurs répartitions, on obtient des matériaux composites, dont les propriétés sont totalement différentes de celles des composants de base [2].

1.2. Matériaux composites

1.2.1. Définition

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. On trouve plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibres longues continues utilisées dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale, et ceux-ci sont les plus étudiés. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée [3].

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tridirectionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.1 [3].

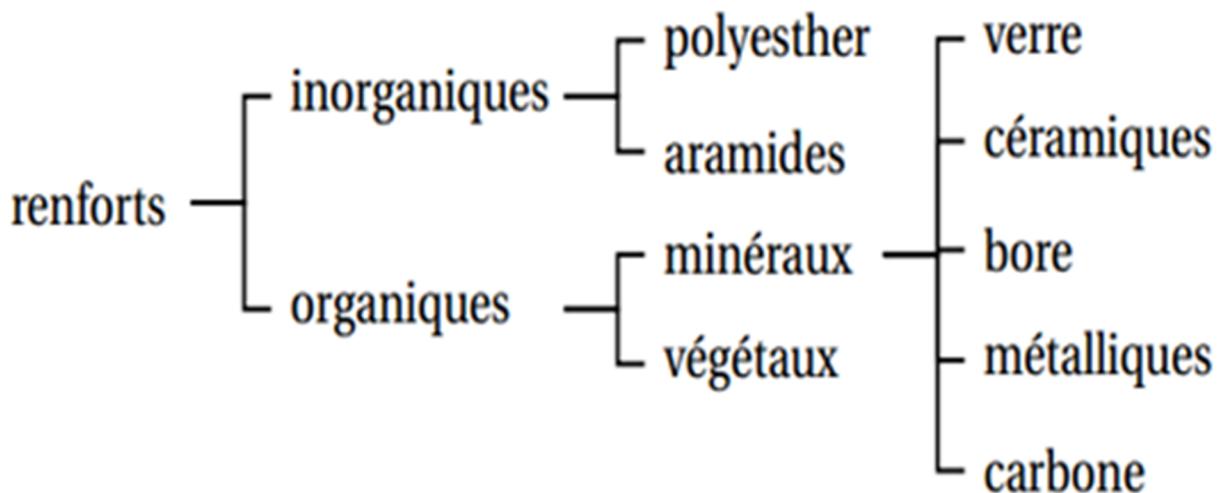


Figure 1.1 : Types de renforts.

D'un point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de renforts [4]:

- **les fibres longues**, c'est-à-dire de longueur comparable aux dimensions de la pièce (Figure 1.2.a) ;
- **les fibres courtes**, c'est-à-dire de longueur faible devant les dimensions de la pièce (Figure 1.2.b) ;
- **les particules**, ou charges renforçantes (Figure 1.2.c).

Tous ces renforts sont inclus au sein d'une matrice qui répartit les efforts entre eux et les protège des agressions extérieures. En outre, lorsque les renforts sont des fibres, celles-ci peuvent être soit orientées dans une direction précise, soit disposées "en vrac", aléatoirement.

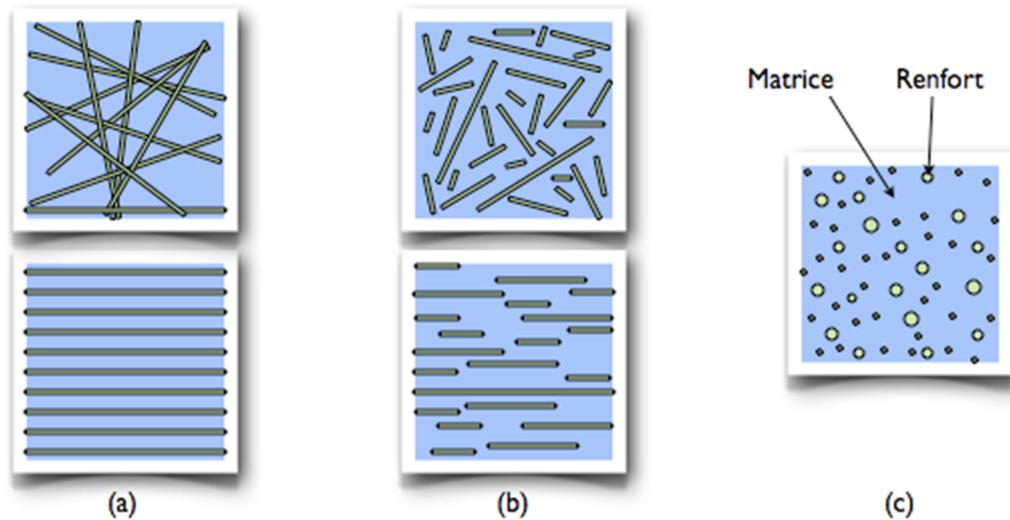


Figure 1.2 : Les structures géométriques des composites :
(a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules.

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone, des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.3 [3].

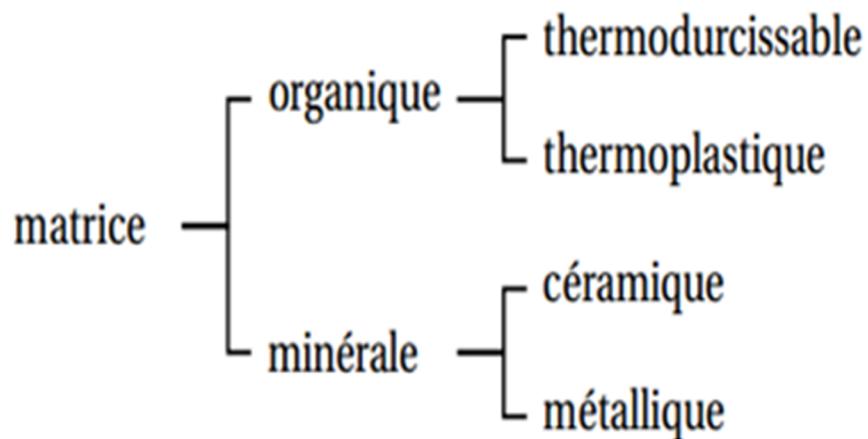


Figure 1.3 : Types de matrices.

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue... [4].

En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure 1.4.a), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure 1.4.b). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. L'interface joue donc le rôle de fusible et rend les composites plus ductiles et plus tenaces, c'est-à-dire plus résistants à la rupture, que leurs constituants élémentaires [4].

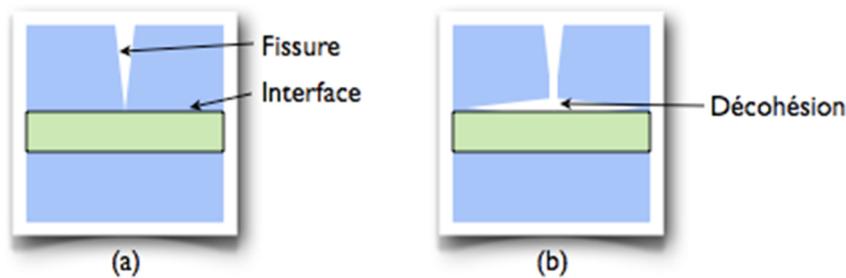


Figure 1.4 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

1.2.2. Structure des matériaux composites

La distinction des matériaux composites s'opère essentiellement en fonction de la géométrie des renforts.

Les composites à fibres courtes ou à particules sont généralement de simples "matrices chargées" aux propriétés améliorées, mises en forme selon les mêmes procédés que leurs matrices seules (du moins tant que la proportion de renforts n'est pas trop élevée). La conception et la fabrication de pièces utilisant ces matériaux ne présentent pas de signes distinctifs particuliers [4].

En revanche, les pièces composites à fibres longues possèdent généralement des structures bien particulières. Ces structures permettent au concepteur de "mettre la matière là où on en a besoin", en optimisant l'orientation et la disposition des renforts en fonction du chargement subi par la pièce. En pratique, le diamètre des fibres d'un composite "moderne" étant microscopique, les pièces composites sont généralement réalisées à partir d'éléments structurels "prêts à mettre en forme" contenant un grand nombre de fibres, comme des fils à tisser ou des nappes à superposer. Elles possèdent donc des structures caractéristiques présentées ci-dessous [4].

1.2.2.1. Composites tissés :

De nombreuses pièces composites sont réalisées à l'aide de tissus ou composites tissés.

Dans ces structures, les fibres sont tressées ou alignées en "câbles" nommés torons ou simplement fils, comptant chacun quelques centaines ou milliers de fibres. Ces fils sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins sophistiqués. Une fois la mise en forme terminée, la matrice est présente à deux niveaux : au sein des fils (entre les fibres), et au sein du tissu (entre les fils), comme le montre la Figure 1.5 [4].

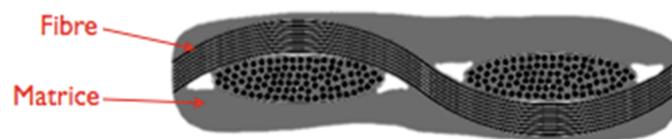


Figure 1.5 : Structure d'un composite tissé :
Fibres (regroupées en fils) et matrice (intra- et inter-fils).

Les motifs du tissu peuvent être extrêmement variés. De nombreux tissus sont plans (Figure 1.6) et ne comportent qu'une couche de fils ; l'épaisseur de la pièce est alors obtenue en cousant plusieurs couches entre elles, ou encore en les empilant pour former un stratifié (décrit ci-dessous). Les tissus de la figure 1.6 sont équilibrés, c'est-à-dire qu'ils comportent autant de fils dans les deux directions de tissage. Ils possèdent donc la même résistance et la même rigidité dans ces deux directions, mais il faut bien noter qu'ils n'ont pas pour autant un comportement isotrope : ils résistent a priori mieux en traction dans la direction des fils qu'en traction à 45° ou en cisaillement. En outre, il est possible de faire varier la proportion de fils dans les deux directions pour jouer sur cette anisotropie, lorsque le chargement appliqué à la pièce le justifie : les tissus ainsi obtenus sont dits non équilibrés (Figure 1.8.a).

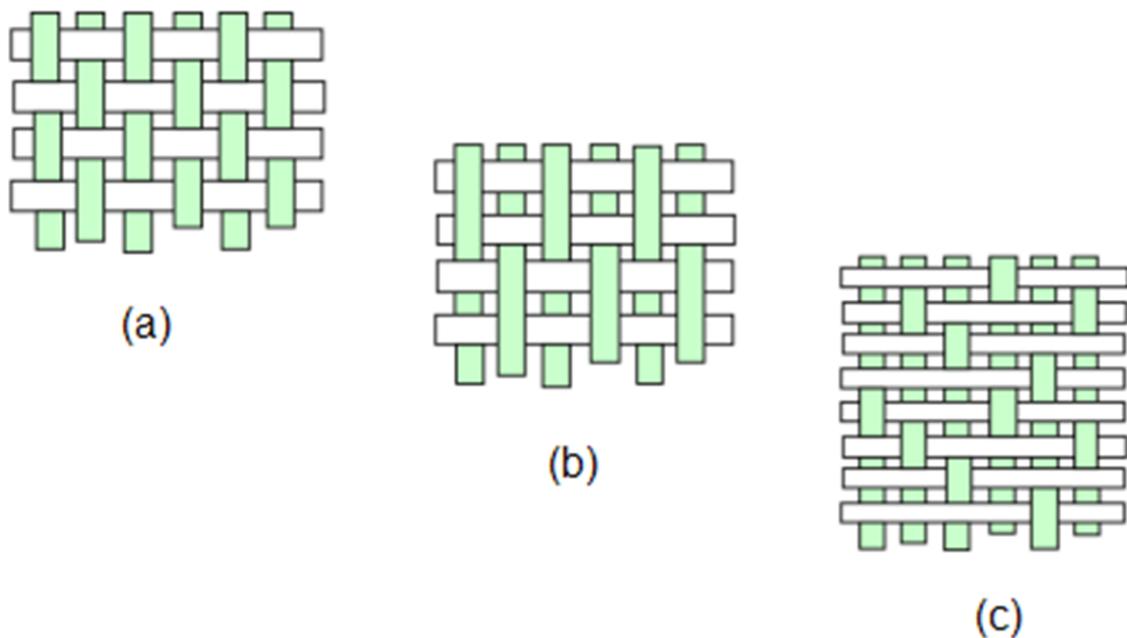


Figure 1.6 : Exemples de tissus plans courants.

D'autres tissus sont tridimensionnels et possèdent des fils dans plusieurs directions non coplanaires (Figure 1.7). Ces tissus permettent de réaliser directement des pièces d'épaisseur variable et, par rapport aux assemblages de tissus plans, résistent mieux à l'arrachement, moyennant une fabrication plus complexe.

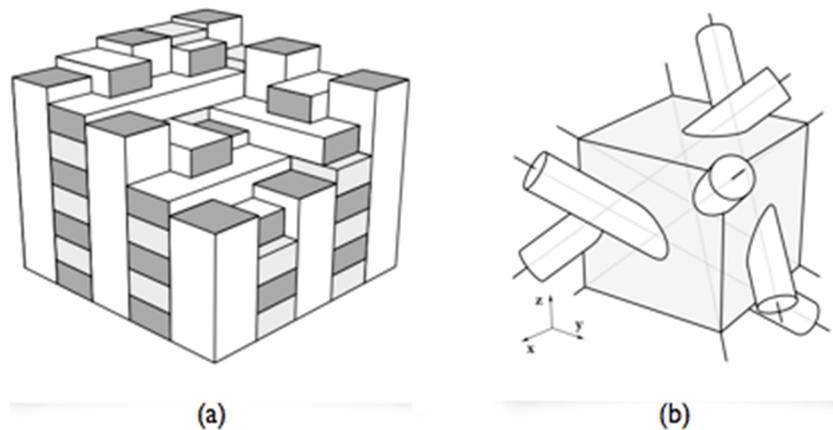


Figure 1.7 : Exemples de tissus tridimensionnels : (a) tissu triorthogonal, (b) tissu "4D".

Tissu "4D" : les renforts sont orientés selon les quatre diagonales d'un cube.

1.2.2.2. Composites stratifiés :

La stratification est une autre structure couramment rencontrée dans les pièces composites. Dans un stratifié, les fibres sont agencées en couches fines (quelques dixièmes de millimètre) nommées plis, qui sont empilées les unes sur les autres ; après la mise en forme, ces couches seront liées entre elles par l'intermédiaire de la matrice. Au sein d'un pli, les renforts peuvent avoir n'importe quel type de disposition, pourvu qu'elle soit plane [4]:

- soit l'un des tissus plans décrits ci-dessous (Figure 1.8.a), ce qui donne un comportement plus ou moins anisotrope selon la proportion de fils dans les deux directions ;

- soit un mat : les fibres sont disposées "en vrac" sans orientation privilégiée sur quelques couches (Figure 1.8.b), ce qui donne un comportement quasi-isotrope dans le plan ;
- soit un tissu unidirectionnel : les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres sur quelques couches (Figure 1.8.c) et uniquement maintenues dans cette disposition par quelques fils de trame, ce qui donne un comportement fortement anisotrope.

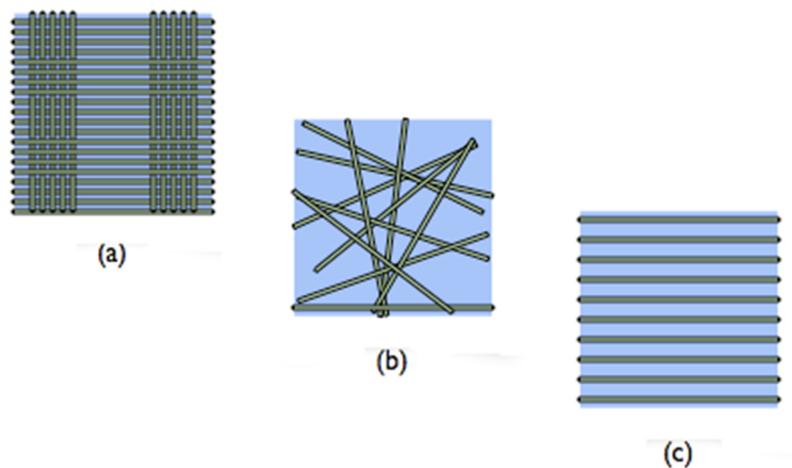


Figure 1.8 : Dispositions possibles des fibres dans un pli :
 (a) tissu plan (ici non équilibré), (b) mat, (c) unidirectionnel.

En jouant sur l'ordre et l'orientation des plis (Figure 1.9), il est possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures, et donc d'atteindre un haut niveau d'optimisation en mettant la matière là où elle est le plus utile. A l'échelle de la structure, les comportements mécaniques ainsi obtenus peuvent être très complexes, et vont du quasi-isotrope à une anisotropie marquée lorsque l'application le nécessite. Les stratifiés sont globalement moins coûteux à fabriquer que les tissus 3D : en contrepartie, ils sont sujets au délaminage (c'est-à-dire que les plis peuvent se décoller les uns des autres, lorsque la matrice qui les relie se fissure).

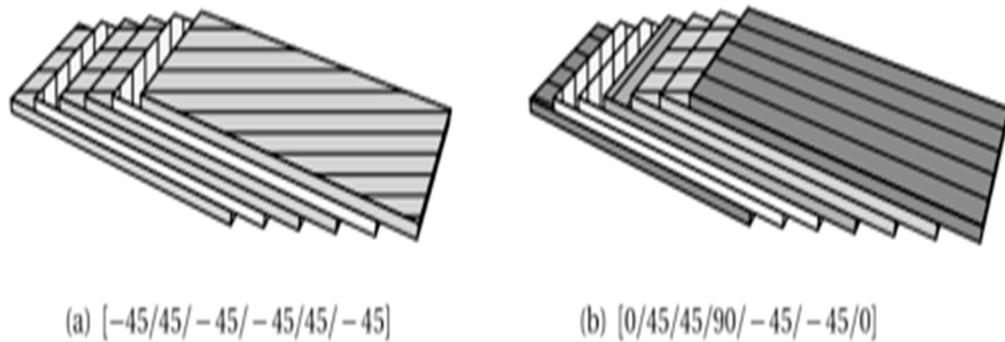


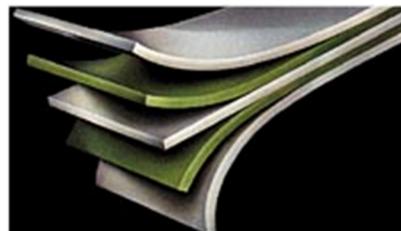
Figure 1.9 : Exemples de stratifiés à base de plis unidirectionnels.

Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence.

Cette structure n'est pas spécifique aux composites modernes : les dérivés du bois comme le contreplaqué possèdent souvent une structure stratifiée (Figure 1.10.a). Il existe également des stratifiés hybrides tels que le GLARE ("GLAss REinforced") utilisé dans l'A380, constitué d'un empilement de fines feuilles d'aluminium alternées avec des plis unidirectionnels de fibres de verre et matrice époxy (Figure 1.10.b).



(a)



(b)

Figure 1.10 : Exemples de multi-matériaux stratifiés : (a) contreplaqué, (b) GLARE (aluminium et composite verre/époxy).

1.2.2.3. Structures en sandwich :

Les pièces composites tissées ou stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire dans leur plan, et résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion). Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs (Figure 1.11).

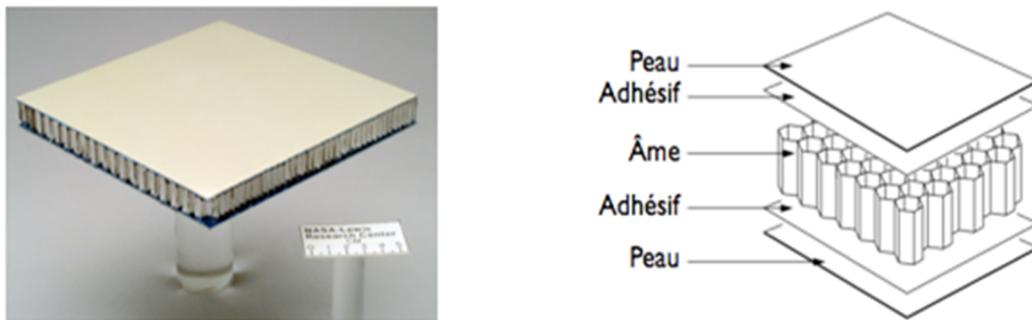


Figure 1.11 : Une structure en sandwich.

L'intérêt de cette disposition est encore une fois de mettre la matière là où elle est nécessaire : lorsqu'un tel "sandwich" est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane, tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan (et à des niveaux de contrainte bien plus faibles). Il est ainsi possible d'obtenir des pièces ultralégères, résistantes et rigides en flexion et en torsion, comme le montre le tableau comparatif de la figure 1.12.

Rigidité relative	1.0	7.0	37.0
Résistance relative	1.0	3.5	9.2
Masse relative	1.0	1.03	1.06

Figure 1.12 : Comparaison des caractéristiques mécaniques en flexion (rigidité et résistance) et des masses de trois structures.

Les matériaux composites disposent d'atouts par rapport à des produits concurrents, tels que : la légèreté, la résistance mécanique et chimique, la maintenance réduite, et la liberté des formes [5]. Cependant, ce type de matériaux généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces, ce qui provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations des matrices ainsi que le problème de délamination dû à la transition brutale de composition, en particulier dans des environnements à haute température [6]. Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel (aussi dit à gradient de propriétés), qui représentent une nouvelle version des matériaux composites.

1.3. Matériaux à gradient fonctionnel

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle gamme de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient à travers l'épaisseur (ou autre direction) selon une fonction donnée : continue (Figure 1.13) ou discrète (Figure 1.14). Cette variation est due à l'irrégularité de distribution des particules constituant le fgm.

La structure spéciale de ces matériaux permet d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

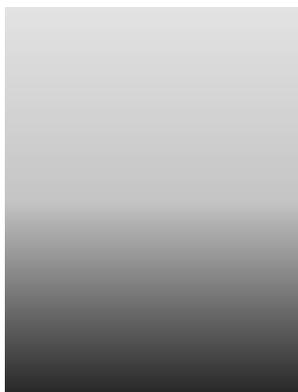


Figure 1.13 : Variation continue des propriétés.



Figure 1.14 : Variation discrète des propriétés.

La variation continue des propriétés (Figures 1.15 et 1.16) trouve son application lorsque, par exemple les deux faces sont exposées à différentes températures, à une haute température sur la face supérieure et une basse température sur la face inférieure. Dans ce cas la face supérieure est en 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. La céramique est choisie grâce à ses caractéristiques exceptionnelles [6] :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

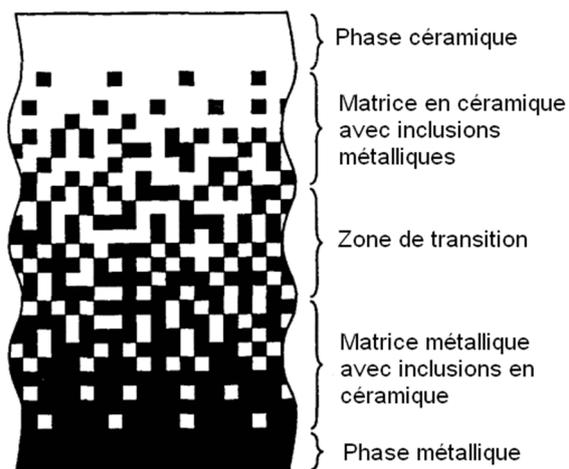


Figure 1.15 : Variation continue de la microstructure (schématisée).



Figure 1.16 : Variation continue de la microstructure (photo).

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [6].

Faire varier la microstructure en assurant un espacement non uniforme (Figure 1.17) ou en incluant plusieurs renforcements (Figure 1.18) trouve son application dans la réduction des différences entre les propriétés thermomécaniques des différentes couches adjacentes des plaques multicouches [6].

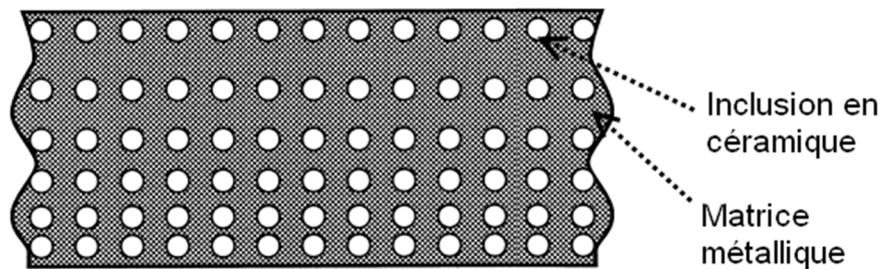


Figure 1.17 : Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme.

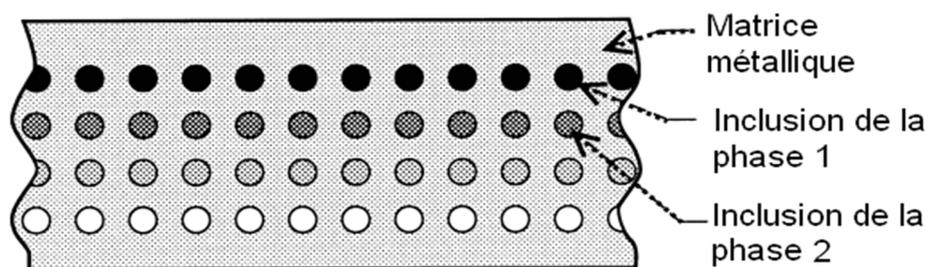


Figure 1.18 : Variation multi-phases de la microstructure.

Afin d'obtenir une transition douce entre couches dont les propriétés sont différentes, une réduction des contraintes thermiques induites entre couches au niveau des bords libres peut être obtenue en appliquant la technique de la variation fonctionnelle des propriétés. Il est aussi possible d'étendre ces possibilités à la

réalisation de jonctions efficaces des matériaux dissemblables en formant des joints à gradient fonctionnel. Dans le domaine de la résistance à la rupture, l'introduction d'une deuxième phase permet de créer des champs de contraintes locales de compression dans les zones critique sujettes à des amorces de criques.

1.4. Procédés de fabrication

Lors de la fabrication des matériaux fgm, il y'a recours à plusieurs méthodes :

1.4.1. La métallurgie des poudres :

La métallurgie des poudres est la plus importante des méthodes de fabrication des fgm, un exemple du procédé de fabrication typique est schématisé et illustré (Figure 1.19). En premier, les matériaux A et B sont pesés et mélangés (Figure 1.19.a), puis chaque poudre est mélangée dans un broyeur de forme V (V-shapemill) (Figure 1.19.b), jalonnement pas à pas de la poudre pré-mélangée selon une répartition spatiale prédéfinie de la composition comme représenté dans figure 1.19.c, la dernière étape est un frittage montré dans la figure 1.19.d [7].

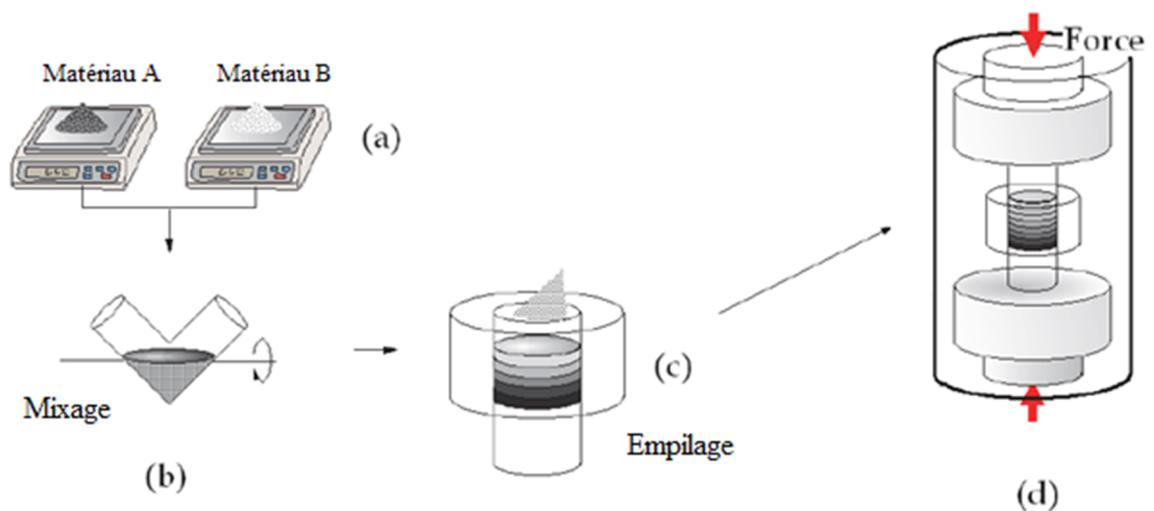


Figure 1.19 : Exemple du procédé de fabrication typique des fgm par la métallurgie des poudres.

1.4.2. La méthode centrifuge :

C'est la méthode par laquelle est produit un fgm à gradient continu. La fabrication des fgm à partir de la force centrifuge est classée en trois catégories (Figure 1.20) [5] :

- procédé centrifuge (Application de la méthode de coulée centrifuge) où une force centrifuge appliquée à un métal en fusion homogène, dispersé avec des particules céramiques ou des particules de composés intermétalliques, entraîne la formation de la granulométrie désirée (Figure 1.20.a).
- Procédé de bouillie centrifuge (sédimentation centrifuge) lorsqu'une suspension de deux types de particules solides, les particules à haute vitesse et les particules à faible vitesse, sont soumise à la force centrifuge (Watanabe et al., 2010) comme le montre la figure 1.20.b, après sédimentation complète, la partie liquide de la suspension sera retirée, et par conséquent, il ne devient pas une partie du fgm.
- Procédé de pressurisation centrifuge par lequel la force centrifuge est utilisée uniquement pour la pressurisation simple. Dans cette méthode, la gradation de la composition doit être formée avant l'application de la force centrifuge. Watanabe et al. mettent au point une méthode de poudre mélangée centrifuge (Figure 1.20.c) (Watanabe et al., 2009), et un procédé de coulée centrifuge réactive (Watanabe et al., 2004a), qui appartiennent à cette catégorie.

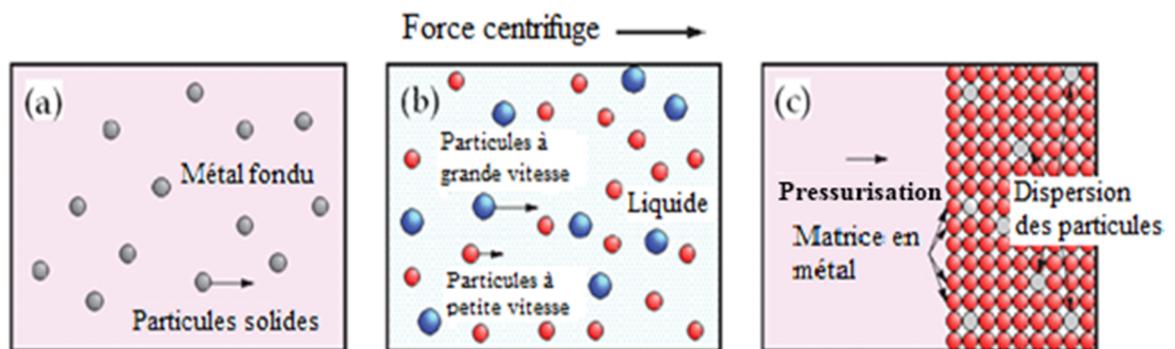


Figure 1.20 : Les trois types de méthodes de fabrication des mgf sous la force centrifuge.

1.4.3. Technique de dépôt en phase vapeur (Vapour Deposition Technique) :

Il existe différentes techniques de dépôt en phase vapeur, ils comprennent: le dépôt par pulvérisation cathodique, dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Ces méthodes de dépôt en phase vapeur sont utilisées pour déposer des revêtements de surface fonctionnellement gradués et ils donnent une excellente microstructure, mais ils ne peuvent être utilisés que pour le dépôt de revêtement de surface mince [8].

1.4.4. Méthode de fabrication de solide de forme libre (Solid Freeform (SFF) Fabrication Method) :

Solid freeform est un procédé de fabrication d'additifs qui offre de nombreux avantages, notamment: une vitesse de production plus élevée, moins d'énergie, une utilisation maximale de matériaux, une capacité à produire des formes complexes et la liberté de conception. Les pièces sont produites directement à partir de CAD (exemple : AutoCAD) [8].

1.5. Régions d'application de fgm

Les matériaux fgm sont utilisés dans de nombreux domaines, tels que [8] :

L'aérospatiale :

Les Matériaux à gradient fonctionnel peuvent résister à un très fort gradient thermique, ce qui les rend appropriés pour une utilisation dans les structures et les corps plans de l'espace, composant de moteur-fusée, etc. Ils sont surtout utilisés en tant que barrière thermique et revêtement résistant à la corrosion. Si la technique de traitement est améliorée, les fgm sont prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

La médecine :

Les tissus vivants comme les os et les dents sont considérés comme des matériaux à gradient fonctionnel naturels (Par exemple la variation de la microstructure de l'os est montrée da la figure 1.21. Pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire ce qui donne place aux fgm.

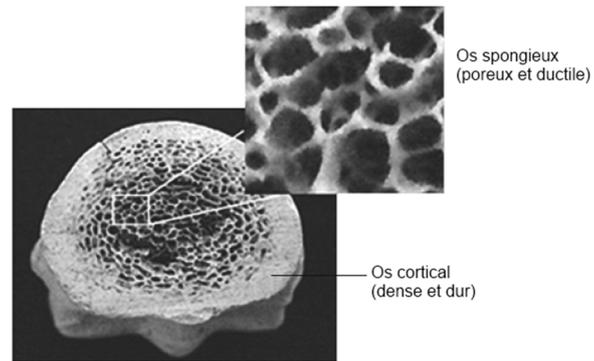


Figure 1.21 : variation de la microstructure de l'os.

La défense :

Les fgm montrent une habilité à inhiber la propagation de fissure, ce qui les rend utiles pour les applications de la défense. En tant que matériaux résistants à la pénétration ils sont utilisés pour des plaques de blindage et des gilets pare-balles.

L'énergie :

Les fgm sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur les aubes de turbines dans les moteurs à turbine à gaz.

Optoélectronique :

Les fgm trouvent aussi leur application en optoélectronique comme matériaux à indice de réfraction gradué et dans les disques audio-vidéo, supports de stockage magnétiques.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, les matériaux composites ont été bien définis, aboutissant aux matériaux à gradient fonctionnel, ces derniers ont été bien détaillés. Les procédés de fabrications des fgm et quelques domaines de leurs utilisation ont été présentés.

CHAPITRE 2

MECANIQUE DES FGM

2.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de définir les lois de distributions lors de la modélisation des fgm. Ensuite seront détaillées les différentes théories de déformation, en détaillant la théorie classique et la théorie du premier ordre qui sera objet de notre étude.

2.2. Lois de distribution des propriétés

Afin de modéliser correctement notre matériau P-FGM, les propriétés doivent dépendre de la position et de la température du point considéré.

La face supérieure de propriétés P_t est soumise à la température T_t , la face inférieure de propriétés P_b est soumise à la température T_b , tel que représenté dans la figure 2.1.

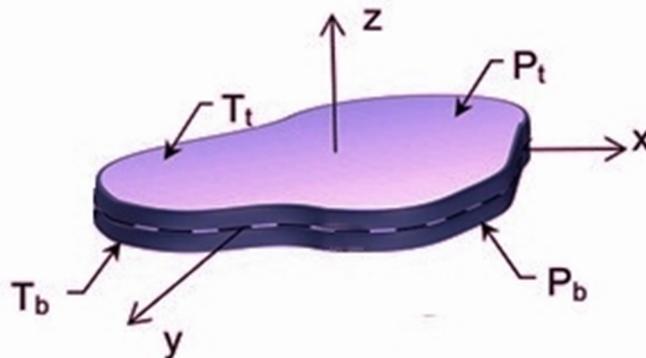


Figure 2.1 : Elément structural en fgm.

La dépendance des propriétés de la position implique la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [6] :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (2.1)$$

P : Propriété le long de l'axe z

P_i : La propriété du matériau i

V_i : La fraction volumique du matériau i

Dans le cas d'une structure fgm composée de céramique et de métal inoxydable, la loi de Voigt se réduit à [6] :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (2.2)$$

« m » étant l'index du métal et « c » l'index de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (2.3)$$

Il existe plusieurs lois de distribution à travers l'épaisseur [6] :

2.2.1. La loi de mélange en puissance (P-FGM)

Suivant la loi de propriétés en fonction de la fraction volumique (Figure 2.2) :

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V(z/h) + P_b(T) \quad (2.4)$$

$V(z)$ étant la fraction volumique du P-FGM défini par :

$$V(z/h) = ((z/h) + 0.5)^n, -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}$$

Et n l'index de la fraction volumique du P-FGM.

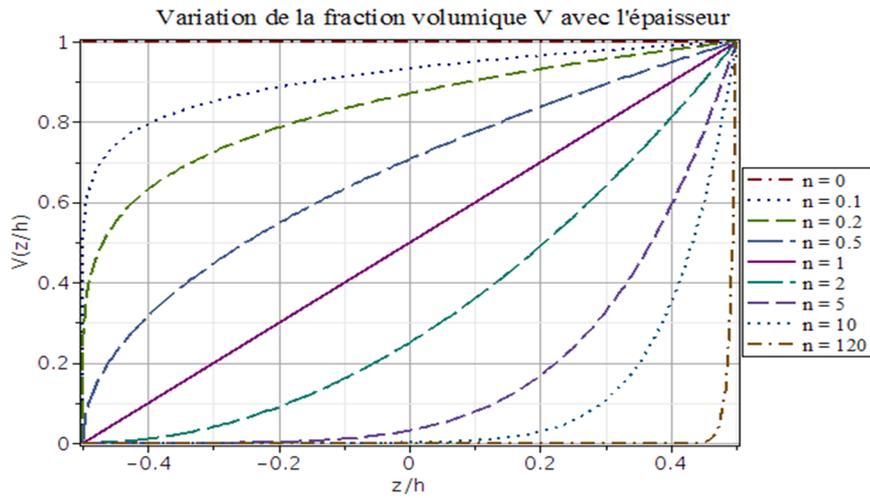


Figure 2.2 : Variation de la fraction volumique du P-FGM.

2.2.2. La loi de mélange exponentielle (E-FGM)

L'expression de cette loi, à travers l'épaisseur de la plaque, a la forme suivante (exemple : loi de variation pour la masse volumique) (Figure 2.3) :

$$P(z, T) = P_b(T) \text{Exp}[(z/h) + 0.5] \ln(P_t(T)/P_b(T)) \quad (2.5)$$

Tel que : $-h/2 \leq z \leq +h/2$

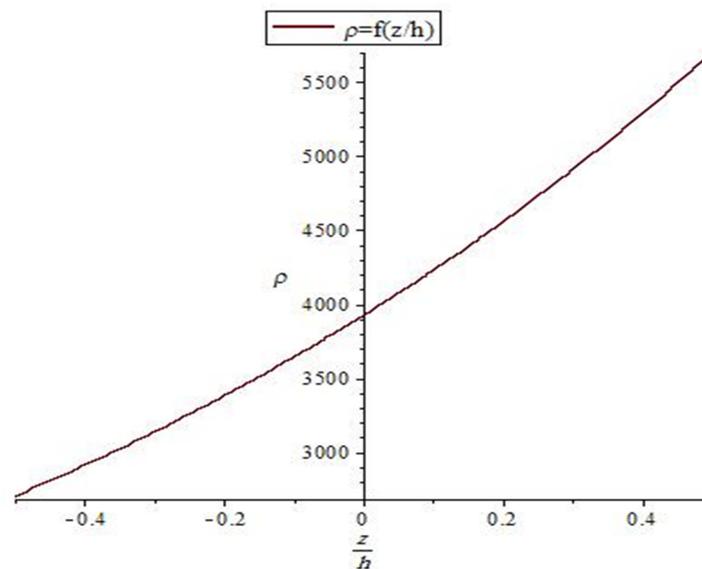


Figure 2.3 : Variation de la masse volumique (E-FGM).

2.2.3. La loi de mélange sinusoïdale (S-FGM)

Suivant la loi de propriétés en fonction de la fraction volumique (Figure 2.4) :

$$\begin{aligned} P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V(z) + P_b(T), -h/2 \leq z \\ \leq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V'(z) + P_b(T), 0 \leq z \leq +h/2$$

Avec :

$$V(z) = 0.5(1 + 2z/h)^p$$

$$V'(z) = 1 - 0.5(1 - 2z/h)^p$$

p étant l'index de la fraction volumique du S-FGM.

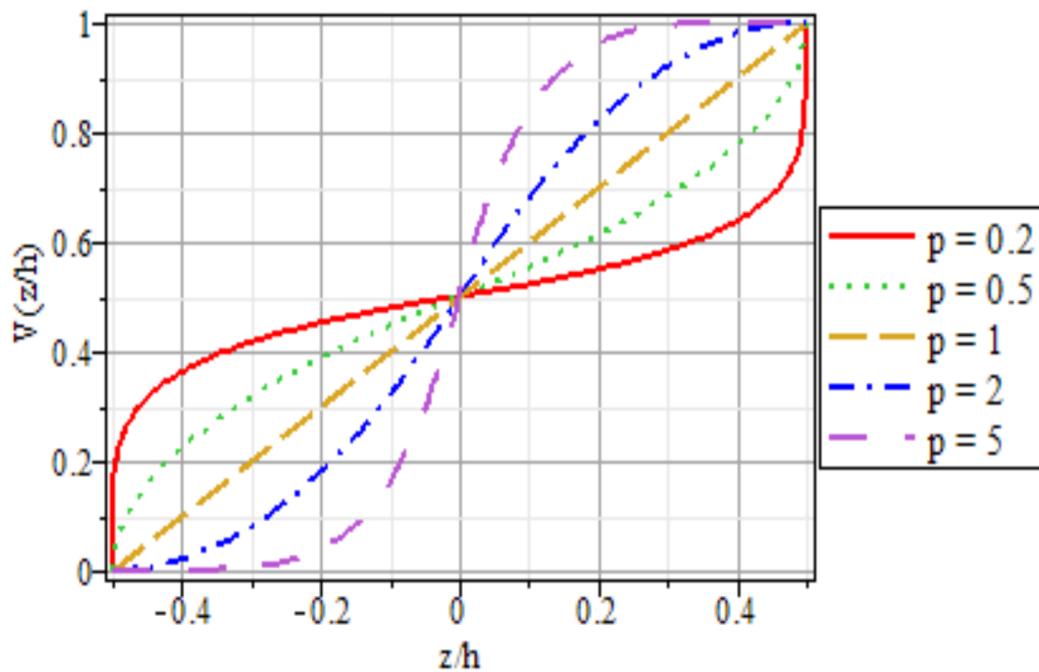


Figure 2.4 : Variation de la fraction volumique de S-FGM.

2.3. Théories de déformations des plaques fgm

Il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer, afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques fgm dans le domaine élastique. En 1888 Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (aussi appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). Mindlin a consolidé la théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque [6].

2.3.1. Théorie classique des plaques minces (Kirchhoff) (CPT)

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivantes [6]:

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contraintes normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement h/a ou h/b est supérieur ou égale à 0.05. Étant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et en conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements [6].

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x,y,z) à l'instant t , s'écrit [9] :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Où : u , v , w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x , y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Étant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (Figure 2.5) [6].

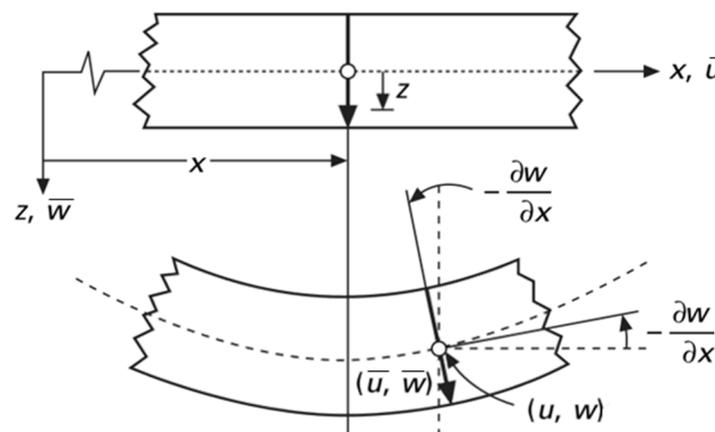


Figure 2.5 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.

2.3.2. Théorie du premier ordre des plaques semi-épaisses (Reissner-Mindlin) (FSDPT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin, Reissner, Narasimhamurthy, Schmidt, Levinson, Ambartsumyan). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie des plaques du premier ordre ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées [6].

La distribution de la déformation est supposée constante dans l'épaisseur, le champ des déplacements est alors le suivant (Figure 2.6) :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\Psi_x(x, y, t) \\
 \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\Psi_y(x, y, t) \\
 \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

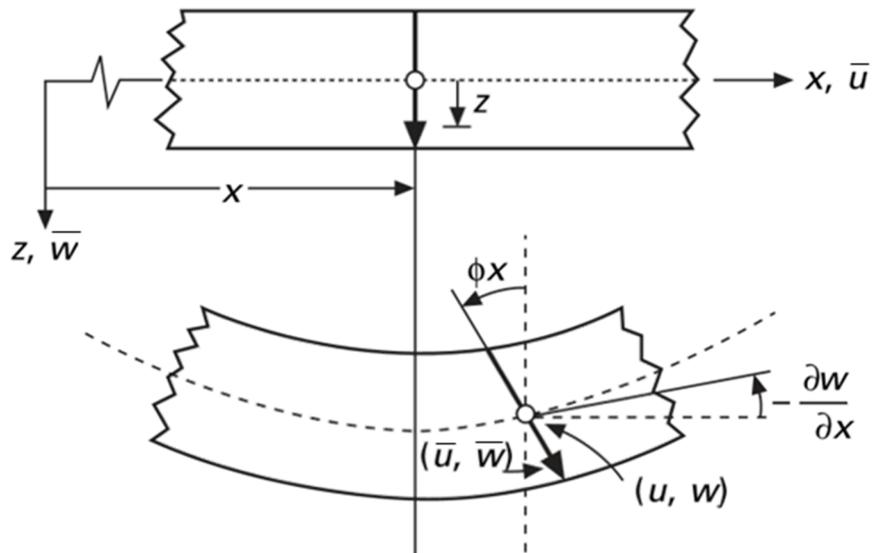


Figure 2.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre.

Depuis que les déformations de cisaillement transverse sont représentées en tant que constante à travers l'épaisseur, il s'ensuit que la contrainte de cisaillement transverse soit aussi constante.

Il est connu depuis la théorie élémentaire des poutres homogènes, que la contrainte de cisaillement transverse varie paraboliquement à travers l'épaisseur de la poutre. Dans les poutres et plaques composites la contrainte varie quadratiquement à travers l'épaisseur. Cet écart entre l'état de la contrainte actuel et l'état de la contrainte prédit par la théorie du premier ordre, est ainsi corrigé dans le calcul des résultantes des forces de cisaillement transverse par la multiplication de l'intégral par un facteur de correction K [10].

Cela revient à modifier les rigidités de cisaillement transversal de la plaque. Le facteur K est calculé de telle sorte que l'énergie de déformation due aux contraintes de cisaillement transversal (3.10) soit égale à l'énergie de déformation due à des véritables contraintes transversales prédites dans la théorie d'élasticité 3-D [10].

Comme les résultantes en membranes et les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur de la plaque. Elles sont schématisées sur la figure 2.7 [9].

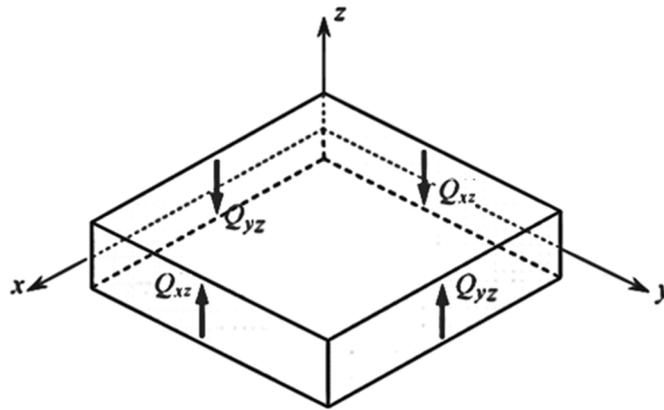


Figure 2.7 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement transverse.

2.3.3. Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDPT)

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, afin d'éviter l'utilisation d'un facteur de cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en série. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

Les hypothèses qui sont à la base du développement des théories d'ordre supérieur sont [6] :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque ;
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable ;
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

Les déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur sont représentées dans la figure 2.8 :

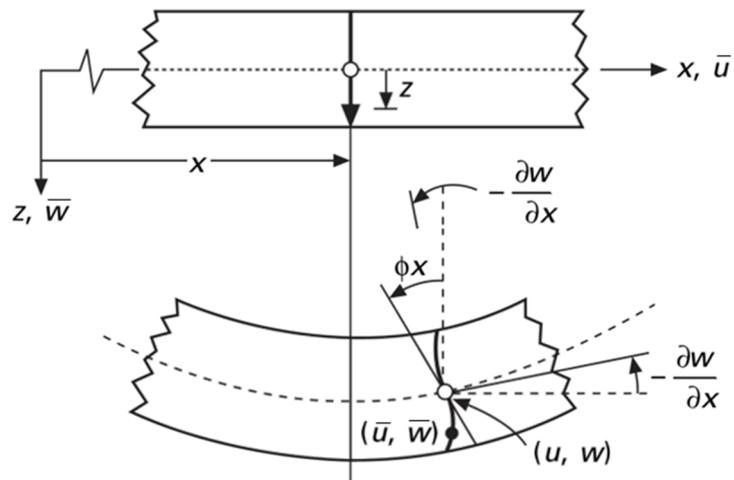


Figure 2.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, les lois de distribution des propriétés des matériaux à gradient de propriétés ont été définies, les théories de déformation détaillées et les champs de déplacement écrits sous formulations classiques et du premier ordre.

CHAPITRE 3

ETUDE DES VIBRATIONS DE LA PLAQUE FGM

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, le système d'équations différentielles sera déduit grâce à l'application de la version dynamique des travaux virtuels appelée principe de Hamilton.

Le problème aux valeurs propres sera établi à partir de la méthode de Navier présentée pour aboutir au calcul des fréquences propres naturelles de la plaque FGM.

3.2. Champs des déplacements, déformations et des contraintes

Dans la théorie du premier ordre, les normales transversales ne restent pas perpendiculaires à la surface moyenne après déformation. Cela revient à inclure des déformations de cisaillement transversales dans la théorie.

Parmi les schémas du premier ordre, le modèle de Reissner-Mindlin néglige les déplacements du plan moyen dans le plan de la plaque, dans ce cas le champ des déplacements s'écrit [6] :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) &= \mathbf{z} \Psi_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \\ \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) &= \mathbf{z} \Psi_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \\ \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})\end{aligned}\tag{3.1}$$

Le champ des déformations axiales se déduit du champ de déplacement pour donner :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x x} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \mathbf{x}} \\ \varepsilon_{y y} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial \mathbf{y}} \\ \varepsilon_{z z} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial \mathbf{z}} = 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

De même que le champ des déformations en cisaillement se déduit facilement du champ de déplacement pour donner :

$$\begin{aligned}
\gamma_{x,y} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{x,z} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{y,z} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Et le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y \\
\sigma_y &= Q_{21} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y \\
\sigma_z &= 0 \\
\sigma_{xy} &= Q_{66} \gamma_{xy} \\
\sigma_{xz} &= Q_{55} \gamma_{xz} \\
\sigma_{yz} &= Q_{44} \gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\
Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu(z) \cdot E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\
Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2 [1 + \nu(z)]}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3. Principe des travaux virtuels

L'utilisation du principe des travaux virtuels requiert la détermination des différentes énergies du système représenté par une plaque FGM en vibration libre. Ces énergies sont l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et l'énergie thermoélastique.

3.3.1. Energie potentielle

Pour une plaque FGM ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie totale de déformation s'écrit comme suit [6] :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int \sigma_i \varepsilon_i \, dV \\
U &= \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) \, dV
\end{aligned} \tag{3.6}$$

La variation de l'énergie potentielle est alors:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int \sigma_i \delta \epsilon_i \, dV \\ \delta U &= \int (\sigma_{x,x} \delta \epsilon_{x,x} + \sigma_{y,y} \delta \epsilon_{y,y} + \sigma_{x,y} \delta \epsilon_{x,y} + \sigma_{x,z} \delta \epsilon_{x,z} + \sigma_{y,z} \delta \epsilon_{y,z}) \, dV \\ dV &= dx \, dy \, dz; \quad dA = dx \, dy\end{aligned}\quad (3.7)$$

En remplaçant les déformations par leurs expressions respectives, et sachant que:

$$\begin{aligned}M_{x,x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,x} \, z \, dz \\ M_{y,y} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{y,y} \, z \, dz \\ M_{x,y} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,y} \, z \, dz \\ Q_{x,z} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,z} \, dz \\ Q_{y,z} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{y,z} \, dz\end{aligned}\quad (3.8)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int \left(M_{x,x} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + M_{y,y} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + M_{x,y} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_{x,z} \left(\delta \psi_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_{y,z} \left(\delta \psi_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right) dx \, dy\end{aligned}\quad (3.9)$$

Sachant que la plaque FGM est moyennement épaisse, l'introduction du coefficient de correction du cisaillement K est requis pour tenir compte du cisaillement transverse. Dans ce cas, les résultantes en cisaillements s'écrivent:

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz \\ Q_{yz} &= K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3.2. L'énergie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique de la plaque FGM en vibration libre s'écrit [6] :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(z) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (3.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= z \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= z \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'où, en fonction des rotations et déplacements du plan moyen, l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(z) \left[z^2 \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 \, dz \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \, dz \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'expression des inerties est:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\mathbf{z}) \mathbf{d} z \\ \mathbf{I}_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \mathbf{d} z \\ \mathbf{I}_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}^2 \mathbf{d} z \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'énergie cinétique devient alors :

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \int \left\{ \mathbf{I}_2 \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \mathbf{I}_0 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \mathbf{d} A \quad (3.16)$$

Et la variation de l'énergie cinétique :

$$\delta \mathbf{E}_c = \int \left\{ \mathbf{I}_2 \left[\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial t} \right] + \mathbf{I}_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right\} \mathbf{d} A \quad (3.17)$$

3.3.3. L'énergie thermoélastique

L'énergie thermoélastique due aux contraintes thermiques initiales est donnée par [6] :

$$W_t = \frac{1}{2} \int_A \left[NTx \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + NTy \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \mathbf{d} A \quad (3.18)$$

W_t est le travail thermoélastique

Les charges thermoélastiques NTx et NTy produites respectivement par les contraintes thermoélastiques σ_{Tx} et σ_{Ty} sont données par :

$$NTx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{Tx} dz, \quad NTy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{Ty} dz \quad (3.19)$$

Avec :

$$\begin{aligned}\sigma_{Tx} &:= - \left(\frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \right) \cdot \alpha_z(z) \cdot \Delta T(z) \\ \sigma_{Ty} &:= - \left(\frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \right) \cdot \alpha_z(z) \cdot \Delta T(z)\end{aligned}\quad (3.20)$$

$\alpha_z(z)$: est le coefficient de dilatation thermique

$\Delta T(z) = T(z) - T_0$: est la variation de température

La fonction de distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur est donnée par l'expression intégrale suivante :

$$T(z) := T_b + \frac{T_t - T_b}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{k_z(z)} dz} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{1}{k_z(z)} dz \quad (3.21)$$

T_0 : est la température de référence qui égal à 300°K

$K_z(z)$: est le coefficient de conductivité thermique

Les conditions aux limites sont :

$$T(-h/2) = T_b \quad \text{et} \quad T(h/2) = T_t$$

3.4. Application du principe de Hamilton

L'expression variationnelle d'un ensemble déformable en mouvement, appelée principe de Hamilton, est donnée par :

$$\int_0^t \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (3.22)$$

Où \mathcal{L} est la Lagrangien du système définie par :

$$\mathcal{L} = \mathbf{E}_c - \mathbf{U} - \mathbf{W} \quad (3.23)$$

Et la variation du Lagrangien s'écrit :

$$\delta \mathcal{L} = \delta E_c - \delta U - \delta W \quad (3.24)$$

D'où :

$$\int_0^t \delta E_c dt - \int_0^t \delta U dt - \int_0^t \delta W dt = 0 \quad (3.25)$$

En remplaçant δE_c et δU et δW par leurs expressions respectives, en intégrant par partie et en collectant les termes de $\delta \Psi_x$, $\delta \Psi_y$ et δw nous obtenons les 3 équations différentielles qui régissent le mouvement vibratoire de la plaque FGM :

$$\begin{aligned} \delta \Psi_x : -\frac{\partial M_{x,x}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x,y}}{\partial y} + Q_{x,z} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \delta \Psi_y : -\frac{\partial M_{y,y}}{\partial y} - \frac{\partial M_{x,y}}{\partial x} + Q_{y,z} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \delta w : -\frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} - N T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les rigidités sont données par :

$$A_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_i dz \quad \text{et} \quad D_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_i z^2 dz \quad (3.27)$$

Donc :

$$\begin{aligned} M_{x,x} &= D_{1,1} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{1,2} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \\ M_{y,y} &= D_{2,1} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{2,2} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \\ M_{x,y} &= D_{6,6} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \\ Q_{x,z} &= A_{5,5} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ Q_{y,z} &= A_{4,4} \left(\Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nous remplaçons les forces et moments par leurs expressions dans les équations différentielles de mouvement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta \Psi_x : & -D_{11} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} \\
& + A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = 0 \\
\delta \Psi_y : & -D_{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + A_{44} \left(\Psi_y \right. \\
& \left. + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} = 0 \\
\delta v : & -A_{55} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} - A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - N T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& - N T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Finalement, le système d'équations différentielles obtenues est le suivant :

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
= I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \\
D_{22} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - A_{44} \left(\Psi_y + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
= I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \\
A_{55} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
+ N T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.5. Calcul des fréquences de la plaque fgm

3.5.1. Méthode de Navier

La méthode de Navier est une méthode qui approxime les déplacements et rotations par des séries finies. Elle ne peut être appliquée qu'aux poutres et plaques sur appuis simples

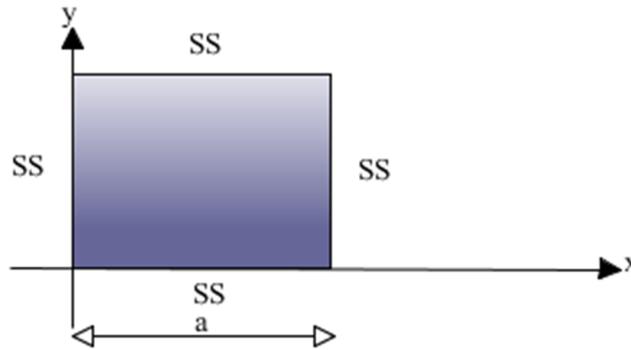


Figure 3.1 : Plaque carrée simplement supportée sur les quatre cotés.

car les conditions aux limites correspondantes sont automatiquement satisfaites (Figure 3.1). Elle approxime les déplacements et rotations de la structure à travers les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 U &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{m n} \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \right] \sin \omega t \\
 V &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{m n} \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \right] \sin \omega t \\
 W &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{m n} \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \right] \sin \omega t \\
 \Psi_x &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Psi_{m n} \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \right] \sin \omega t \\
 \Psi_y &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{m n} \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \right] \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Cette forme des déplacements et rotations vérifie exactement les conditions aux limites de la plaque. Les déplacements U , V , W , Ψ_x et Ψ_y sont ensuite injectés dans les équations du mouvement. Il faut alors isoler les termes $U_{m n}$, $V_{m n}$, $W_{m n}$, $\Psi_{m n}$ et $\Phi_{m n}$. Les coefficients de ces termes doivent être identiquement nuls (pour ne pas avoir une solution triviale), ce qui donne un système d'équations algébriques homogènes et linéaires. Le déterminant de ce système d'équations permet de fournir les fréquences propres naturelles de vibration libre.

Pour notre cas, le champ de déplacements de Navier est donné par :

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t) \\
 \Psi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t) \\
 \Psi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.5.2. Problème aux valeurs propres

Les conditions d'appuis simples considérées se résument à :

$$\begin{aligned}
 \Psi_y = w = M_x = 0 \quad \text{à } x = 0, a \\
 \Psi_x = w = M_y = 0 \quad \text{à } y = 0, b
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Nous obtenons le système algébrique dépendant de (m, n) suivant :

$$\begin{aligned}
 (A_5 m a b^2 \pi) A_{m,n} + (D_1 m^2 b^2 \pi^2 + D_6 n^2 a^2 \pi^2 \\
 + A_5 a^2 b^2) B_{m,n} + (D_1 m n a b \pi^2 \\
 + D_6 n m a b \pi^2) C_{m,n} = \omega_{m,n}^2 (a^2 b^2 I_2) B_{m,n} \\
 (A_4 n a^2 b \pi) A_{m,n} + (D_1 m n a b \pi^2 + D_6 m n a b \pi^2) B_{m,n} \\
 + (D_2 n^2 a^2 \pi^2 + D_6 m^2 b^2 \pi^2 + A_4 a^2 b^2) C_{m,n} \\
 = \omega_{m,n}^2 (a^2 b^2 I_2) C_{m,n} \\
 ((A_5 m + N T) m^2 b^2 \pi^2 + (A_4 n + N T) n^2 a^2 \pi^2) A_{m,n} \\
 + (A_5 m a b^2 \pi) B_{m,n} + (A_4 n a^2 b \pi) C_{m,n} \\
 = \omega_{m,n}^2 (a^2 b^2 I_0) A_{m,n}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Détermination des matrices masse et rigidité :

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} A_{m,n} + K_{1,2} B_{m,n} + K_{1,3} C_{m,n} - \omega_{m,n}^2 I_2 B_{m,n} &= 0 \\
 K_{2,1} A_{m,n} + K_{2,2} B_{m,n} + K_{2,3} C_{m,n} - \omega_{m,n}^2 I_2 C_{m,n} &= 0 \\
 K_{3,1} A_{m,n} + K_{3,2} B_{m,n} + K_{3,3} C_{m,n} - \omega_{m,n}^2 I_0 A_{m,n} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11} &= A_{55} \frac{mab^2}{a^2b^2} \pi = A_{55} \frac{m\pi}{a} \\
\mathbf{K}_{12} &= (D_{11}m^2 b^2 \pi^2 + D_{66}n^2 a^2 \pi^2 + A_{55}a^2 b^2)/a^2b^2 \\
\mathbf{K}_{13} &= (D_{12}m n a b \pi^2 + D_{66}n m a b \pi^2)/a^2b^2 \\
&= (D_{12} + D_{66}) \frac{mn}{ab} \pi^2 \\
\mathbf{K}_{21} &= A_{44} \frac{na^2b}{a^2b^2} \pi = A_{44} \frac{n\pi}{b} \\
\mathbf{K}_{22} &= (D_{21}m n a b \pi^2 + D_{66}m n a b \pi^2)/a^2b^2 \\
&= (D_{12} + D_{66}) \frac{mn}{ab} \pi^2 \\
\mathbf{K}_{23} &= (D_{22}n^2 a^2 \pi^2 + D_{66}m^2 b^2 \pi^2 + A_{44}a^2 b^2)/a^2b^2 \\
\mathbf{K}_{31} &= ((A_{55} + NTx)m^2 b^2 + (A_{44} + NTy)n^2 a^2)\pi^2/a^2b^2 \\
\mathbf{K}_{32} &= A_{55} \frac{mab^2}{a^2b^2} \pi = A_{55} \frac{m\pi}{a} \\
\mathbf{K}_{33} &= A_{44} \frac{na^2b}{a^2b^2} \pi = A_{44} \frac{n\pi}{b}
\end{aligned}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{m n} \\ \mathbf{B}_{m n} \\ \mathbf{C}_{m n} \end{Bmatrix} - \omega_{m n}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{m n} \\ \mathbf{B}_{m n} \\ \mathbf{C}_{m n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Ou bien :

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} - \omega_{m i}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{m i} \\ \mathbf{B}_{m i} \\ \mathbf{C}_{m i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$\left[[\mathbf{K}] - \omega_{m i}^2 [\mathbf{M}] \right] \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.37)$$

Avec : $m = n = 1, 2, 3, \dots$

Pour éviter la solution triviale $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$, il faut que :

$$|[\mathbf{K}] - \omega_{m i}^2 [\mathbf{M}]| = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

Nous posons :

$$\alpha = \frac{m \pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n \pi}{b}$$

Sous forme explicite, nous avons :

$$\left[\begin{array}{ccc} \alpha A_{55} & A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} & \alpha (D_{12} + D_{6\phi}) \\ \beta A_{44} & \alpha (D_{21} + D_{6\phi}) & A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} \\ \alpha^2 (A_{55} + N_T)x + \beta^2 (A_{44} + N_T)y & \alpha A_{55} & \beta A_{44} \end{array} \right] - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

En transformant le système précédent pour obtenir des matrices symétriques, nous obtenons :

$$\left[\begin{array}{ccc} \alpha^2 (A_{55} + N_T)x + \beta^2 (A_{44} + N_T)y & \alpha A_{55} & \beta A_{44} \\ \alpha A_{55} & A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} & \alpha (D_{12} + D_{6\phi}) \\ \beta A_{44} & \alpha (D_{21} + D_{6\phi}) & A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} \end{array} \right] - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

En résolvant le système obtenu, les fréquences naturelles de notre système vibratoire libre sont facilement calculées pour chaque paire (m, n) par des procédures standards de résolution.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, les équations différentielles du mouvement de la plaque FGM ont été écrites en se basant sur la version dynamique des travaux virtuels connue en tant que principe de Hamilton. En utilisant la méthode analytique de Navier appliquée à une plaque FGM sur appuis simples, nous aboutissons à la forme canonique du problème dont la résolution nous permettra d'obtenir l'ensemble des fréquences naturelles du système vibratoire analysé.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les fréquences propres adimensionnelles d'une plaque P-FGM sur appuis simples en fonction de l'index de la fraction volumique n , de l'épaisseur relative h/a et de la température T et présenter les résultats obtenus suite à son exécution.

Nous commencerons par valider nos résultats en les comparant avec ceux de deux articles déjà publiés [11] et [12]. Nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter l'influence de l'épaisseur relative h/a , de l'index de la fraction volumique n et de la température T sur les fréquences propres adimensionnelles.

Afin de comparer nos résultats avec ceux des travaux déjà effectués et les valider par la suite, nous considérons une plaque P-FGM carrée à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal au niveau de la face inférieure). Le rapport h/a définit l'épaisseur relative de notre plaque d'épaisseur h égale à 0.0254m . Les propriétés thermomécaniques du métal et de la céramique pris en compte dans les deux cas de plaques sont les suivantes :

A-Plaque FGM: Al/ZrO2:

$$E_t := 200 \cdot 10^9; \quad \nu_t := 0.30; \quad \rho_t := 5700; \quad k_t := 1.78; \quad \alpha_t := 1 \cdot 10^{-6}; \quad \text{ZrO}_2 \text{ (Zirconia/ceramic)}$$

$$E_b := 70 \cdot 10^9; \quad \nu_b := 0.30; \quad \rho_b := 2702; \quad k_b := 204; \quad \alpha_b := 23 \cdot 10^{-6}; \quad \text{Aluminium (Metal)}$$

B-Plaque FGM: Al/Al2O3:

$$E_t := 380 \cdot 10^9; \quad \nu_t := 0.30; \quad \rho_t := 3800; \quad k_t := 10.4; \quad \alpha_t := 7.4 \cdot 10^{-6}; \quad \text{Al}_2\text{O}_3 \text{ (Alumina/ceramic)}$$

$$E_b := 70 \cdot 10^9; \quad \nu_b := 0.30; \quad \rho_b := 2702; \quad k_b := 204; \quad \alpha_b := 23 \cdot 10^{-6}; \quad \text{Aluminium (Metal)}$$

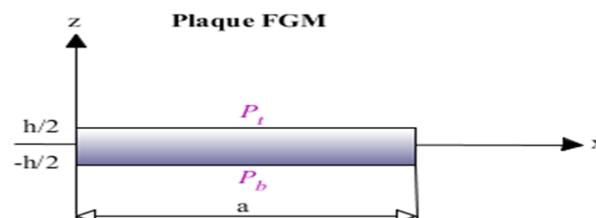
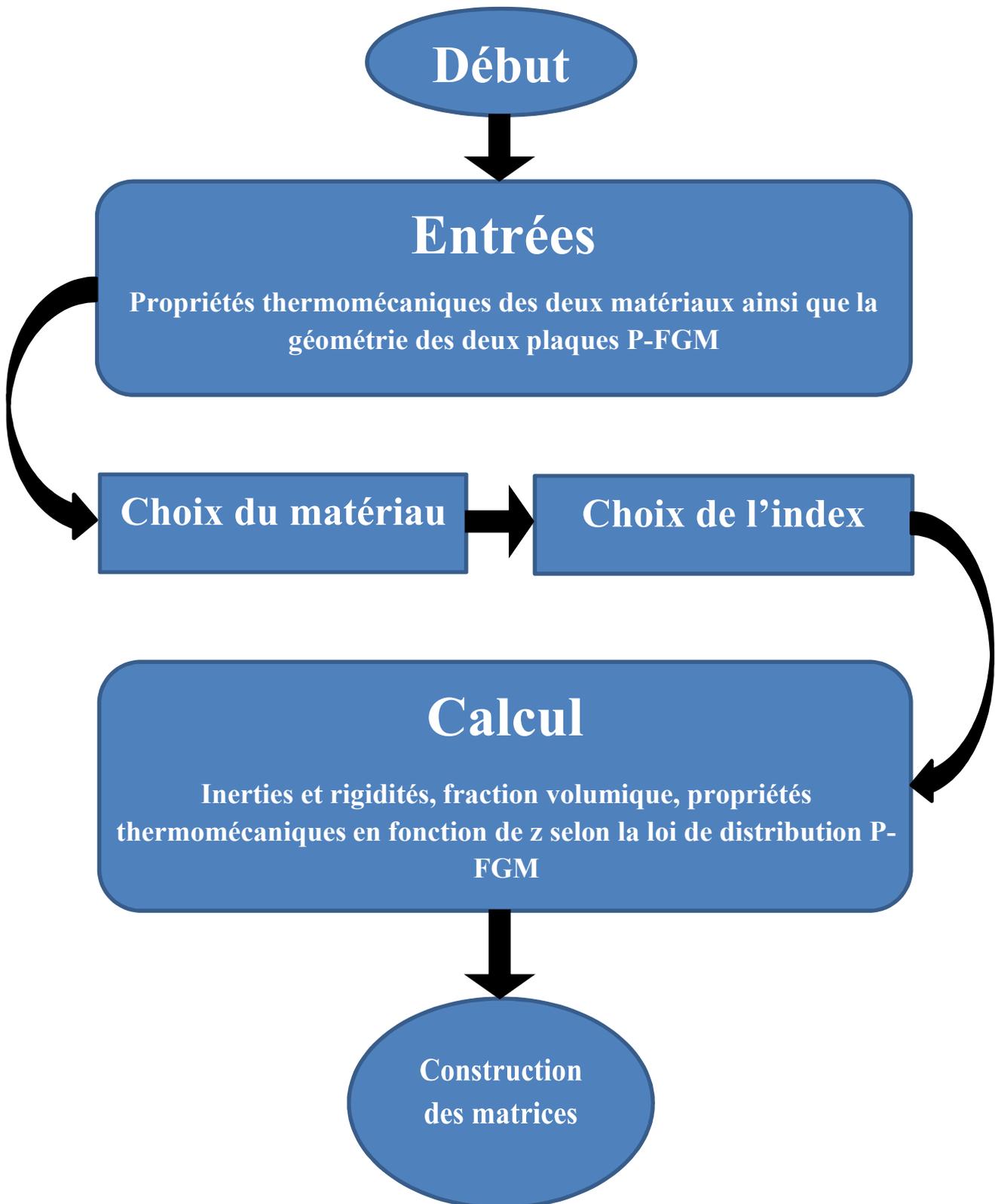


Figure 4.1 : Géométrie de la plaque.

4.2. Organigramme du programme de calcul



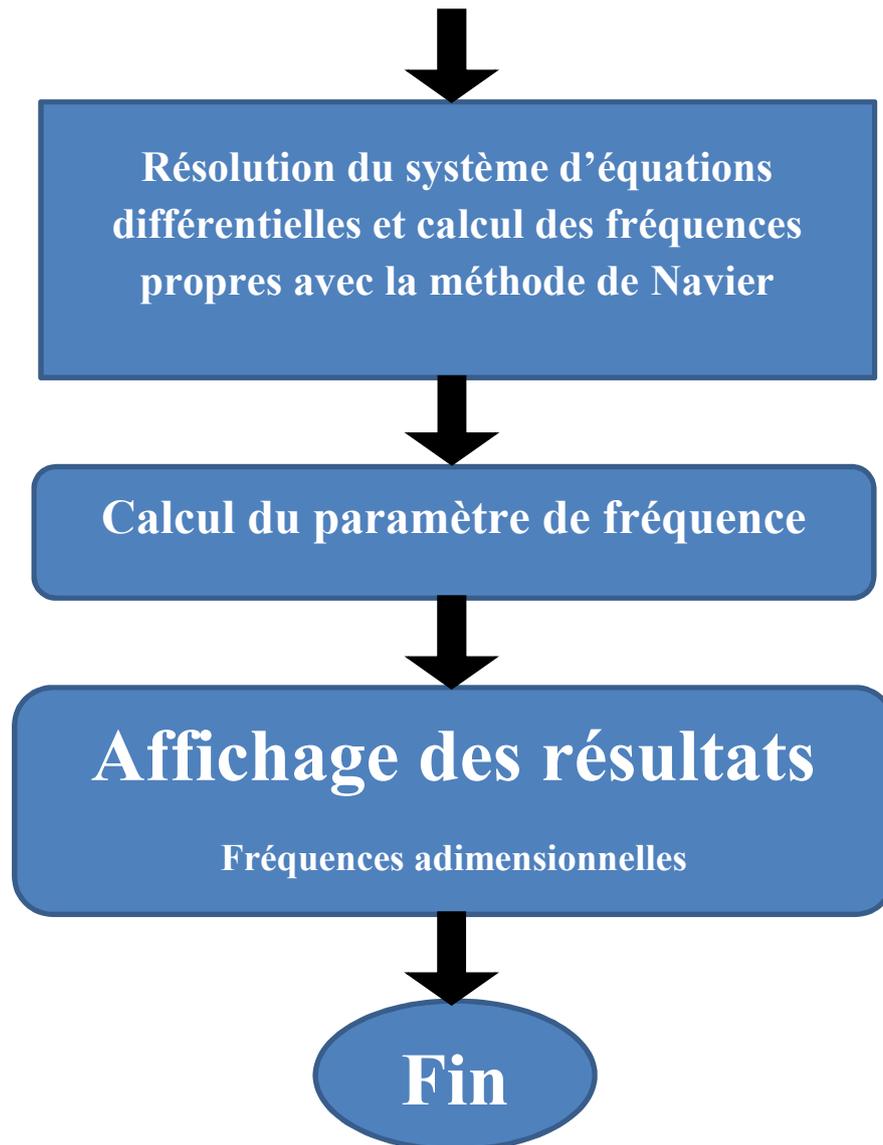


Figure 4.2 : Organigramme du programme de calcul.

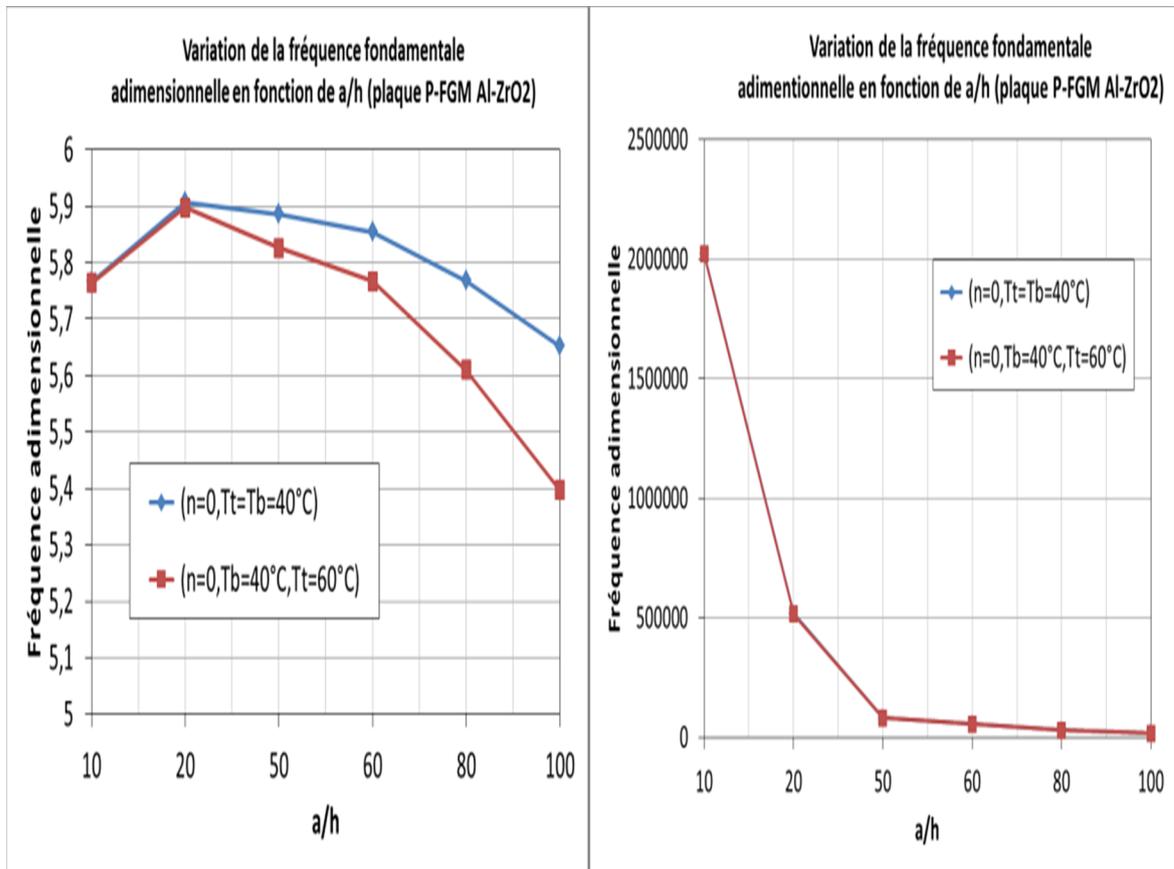
4.3. Validation des résultats

Pour valider la méthode de calcul adoptée dans notre travail, nos résultats sont comparés à d'autres résultats obtenus et publiés auparavant. Dans tout ce qui va suivre, les fréquences propres naturelles sont présentées sous forme adimensionnelles suivantes selon le cas (l'utilisation de l'équation (4.2) implique que les fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ ne varient pas nécessairement dans le même sens que les fréquences naturelles ω lorsque a/h varie) :

$$\bar{\omega} = \omega(h\sqrt{\rho_t/E_t}) \quad (4.1)$$

$$\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_t/E_t} \quad (4.2)$$

L'avantage de l'équation 4.2 c'est de permettre de tracer des courbes de valeurs proches et les différences sont facilement appréciées graphiquement. C'est particulièrement utile pour montrer graphiquement la variation des fréquences naturelles en fonction de a/h lorsque la température varie avec un pas réduit.



Cet exemple montre que le graphe de gauche contient deux courbes de fréquences en utilisant l'équation 4.2 alors que le graphique de droite représente deux courbes superposées des mêmes fréquences (utilisant l'équation 4.1) car les différences sont minimales.

4.3.1. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM carrée simplement supportée. $\bar{\omega} = \omega(h\sqrt{\rho_t/E_t})$

Le tableau 4.1 présente la variation du paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n et du rapport a/h concernant une plaque carrée P-FGM Al/Al_2O_3 simplement supportée. L'erreur relative entre nos résultats et ceux de l'article de référence est calculée pour permettre la comparaison.

Tableau 4.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-PGM
Al/Al₂O₃.

a/h	Source	Index de la fraction volumique n				
		0	0,5	1	4	10
		Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega(h\sqrt{\rho_t/E_t})$				
20	Présente théorie	0.01480	0.01281	0.01150	0.01013	0.00963
	Réf. [11]	0.01480	0.01281	0.01150	0.01013	0.00963
	Réf. [12]	0.01464	0.01241	0.01118	0.009702	0.009311
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1.09%	-3.22%	-2.86%	-4.41%	-3.42%
10	Présente théorie	0.05769	0.04921	0.04455	0.03826	0.03628
	Réf. [11]	0.05769	0.04920	0.04454	0.03825	0.03627
	Réf. [12]	0.05673	0.04818	0.04346	0.03757	0.03591
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.02%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1.69%	-2.12%	-2.48%	-1.81%	-1.00%
5	Présente théorie	0.21121	0.18058	0.16502	0.13716	0.13045
	Réf. [11]	0.2112	0.1806	0.1650	0.1371	0.1304
	Réf. [12]	0.2055	0.1757	0.1587	0.1356	0.1284
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.04%	-0.04%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-2.77%	-2.79%	-3.97%	-1.11%	-1.56%

Remarque : nous notons l'épaisseur relative par h/a et nous pouvons utiliser l'inverse a/h comme rapport d'allongement.

Il faut noter que l'article de référence [11] est basé sur une méthode analytique exacte alors que l'article de référence [12] est basé sur une méthode d'approximation numérique appelée « kp-Ritz method ».

L'erreur relative entre les fréquences calculées par notre présente théorie et celles de l'article [11] est très petite et varie entre 0.00% lorsque $a/h = 20$ (plaque mince) et -0.04% jusqu'à -0.02% lorsque $a/h = 5$ et 10 (plaque relativement épaisse). Ceci est dû aux forces de cisaillement transverses qui deviennent de plus en plus importantes avec l'augmentation de l'épaisseur. Notons que nous n'avons introduit ces forces dans notre calcul qu'avec un facteur de correction de cisaillement K_s évalué par la formule empirique suivante [11]:

$$\kappa^2(\alpha, \delta) = \frac{5}{6} + C_1(e^{-C_2\alpha} - e^{-C_3\alpha})(10\delta - 2) - C_4(e^{-C_5\alpha} - e^{-C_6\alpha})(10\delta - 1) \quad (4.3)$$

Tel que : α est l'index n , δ est l'épaisseur relative i.e. : h/a .

C_i ($i=1,2,\dots,6$) sont des constantes dépendants des constituants de la plaque.

La figure 4.3 montre l'influence de l'index de la fraction volumique n sur le paramètre de fréquence fondamentale de notre plaque P-FGM, avec a/h égal à 5, 10 et 20 respectivement.

Les résultats considérés sont ceux de la référence [11], la référence [12] et notre présente théorie.

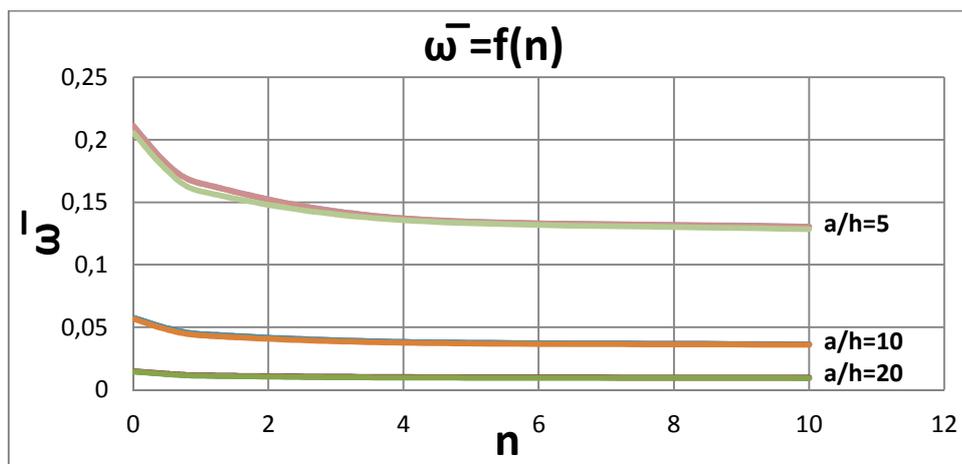


Figure 4.3 : Paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ ($a/h = 5, 10, 20$).

Le paramètre de fréquence fondamentale représenté sur la figure 4.3 diminue en augmentant l'index de la fraction volumique, c'est-à-dire en introduisant plus de métal dans la plaque P-FGM, ce qui amoindrit sa rigidité. Nous remarquons que notre courbe est confondue avec les courbes représentant les résultats de la référence [11] et [12]; cela est dû à l'erreur relative qui est faible.

4.3.2. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée simplement supportée, $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_t/E_t}$

Le tableau 4.2 présente la variation du paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n avec un rapport d'allongement a/h égal à 10, pour deux plaques carrées P-FGM (Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂) simplement supportées.

Le tableau 4.2 montre que l'erreur relative entre les fréquences calculées par la présente théorie et celle de l'article [11] est très petite pour les deux plaques P-FGM, ce qui montre que nos résultats sont très bons et bien meilleurs que ceux de la référence [12].

Tableau 4.2 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale des plaques P-FGM : Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ simplement supportées avec a/h égal à 10.

a/h=10		Index de la fraction volumique n						
		0	0,5	1	2	5	8	10
		Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_t/E_t}$						
Al/Al ₂ O ₃	Présente théorie	5.76932	4.92067	4.45453	4.00630	3.78369	3.68280	3.62771
	Réf. [11]	5.7693	4.9207	4.4545	4.0063	3.7837	3.6830	3.6277
	Réf. [12]	5.6763	4.8209	4.3474	3.9474	3.7218	3.6410	3.5923
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1.64%	-2.07%	-2.46%	-1.49%	-1.66%	-1.15%	-0.98%
Al/ZrO ₂	Présente théorie	5.76932	5.31762	5.25317	5.28727	5.29400	5.23123	5.18929
	Réf. [11]	5.7693	5.3176	5.2532	5.3084	5.2940	5.2312	5.1893
	Réf. [12]	5.6763	5.1105	4.8713	4.6977	4.5549	4.4741	4.4323
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0.00%	0.00%	0.00%	0.39%	0.00%	0.00%	0.00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1.64%	-4.05%	-7.84%	-12.99%	-16.23%	-16.92%	-17.08%

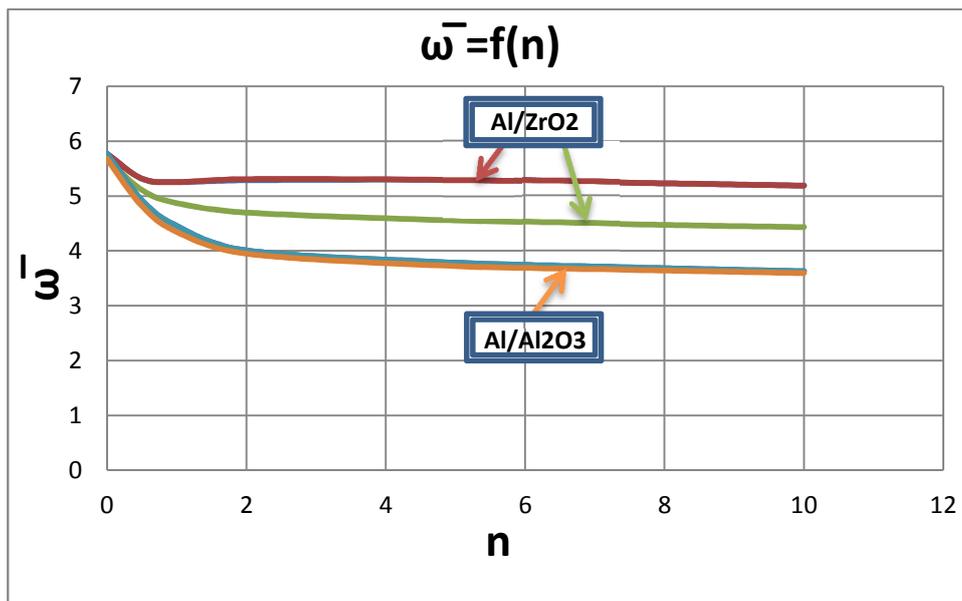


Figure 4.4 : Paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ (a/h = 10).

Nous remarquons dans la figure 4.4 que lorsque le paramètre n augmente, $\bar{\omega}$ diminue (expliqué précédemment, voir figure 4.3) et nous remarquons aussi que la courbe de la plaque Al/Al₂O₃ est confondue avec les courbes représentant les résultats de la référence [11] et [12], par contre la courbe de Al/ZrO₂ est seulement confondue avec la référence [11] c.-à-d. elle n'est pas confondue avec la référence [12]; cela est dû à la grande différence entre les deux résultats. Nous remarquons que, quelque-soit le paramètre n (>0), le paramètre de fréquence de la plaque Al/ZrO₂ est supérieur (en vertu de l'équation 4.2) à celui de la plaque Al/Al₂O₃ du fait que le module de Young de la céramique Al₂O₃ est supérieur à celui de la céramique ZrO₂. En tenant compte de l'équation 4.2, les fréquences naturelles d'une plaque Al/ZrO₂ sont toujours inférieures à celles de la plaque Al/Al₂O₃ pour un index de fraction volumique donné n (>0).

4.3.3. Paramètre de fréquence ω_1 et ω_5 en fonction de a/h ($T_t=T_b=40^\circ\text{C}$ et $T_b=40^\circ\text{C}$, $T_t=60^\circ\text{C}$) avec $n=0$ pour les deux plaques [formule 4.2]

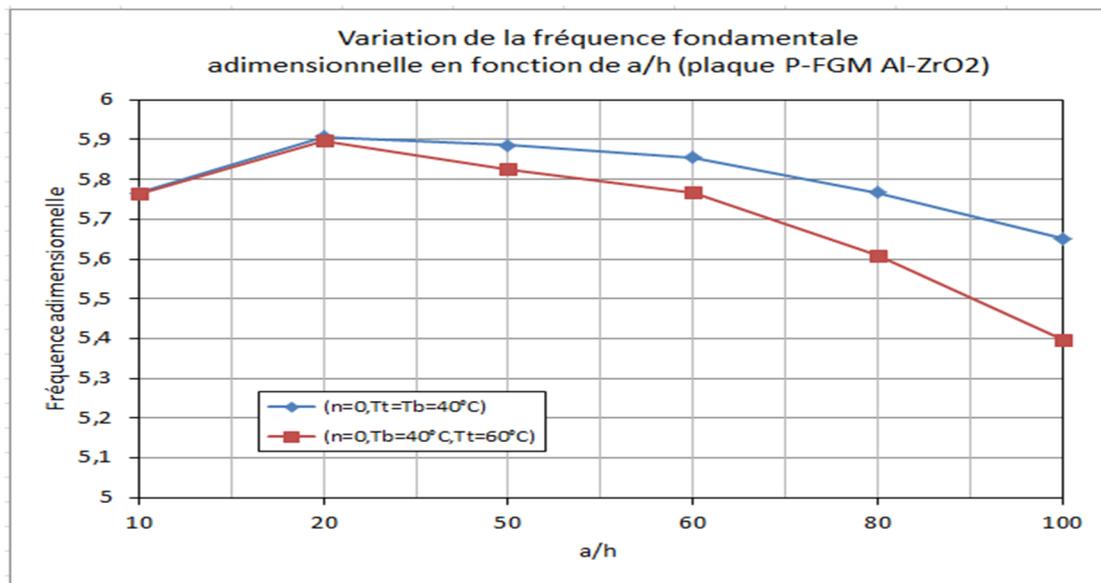


Figure 4.5 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

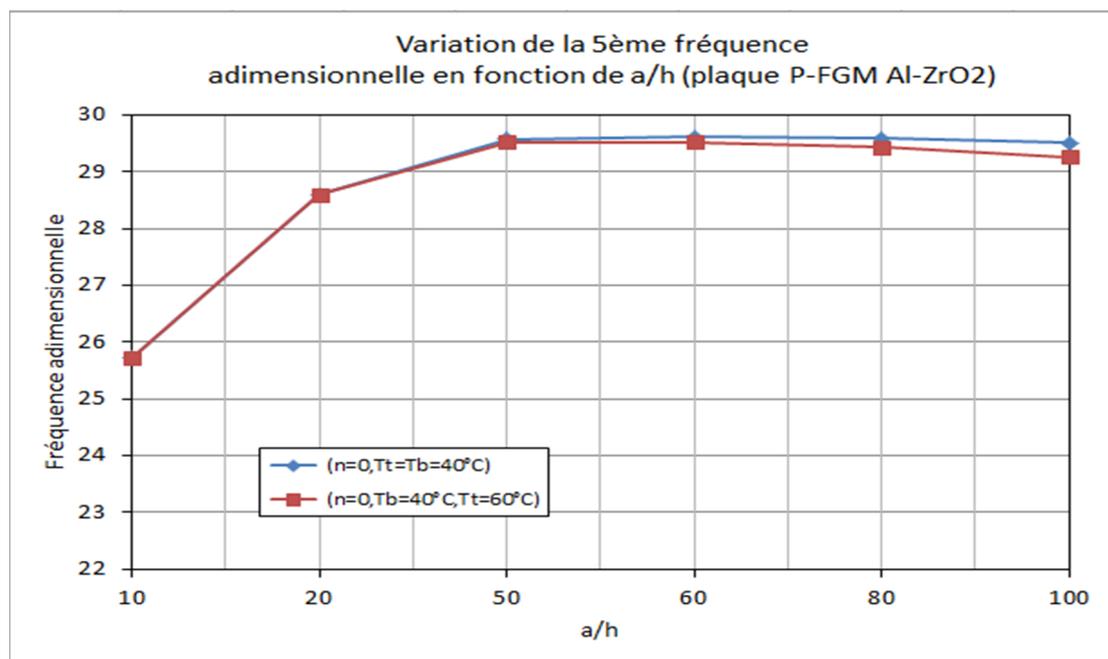


Figure 4.6 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

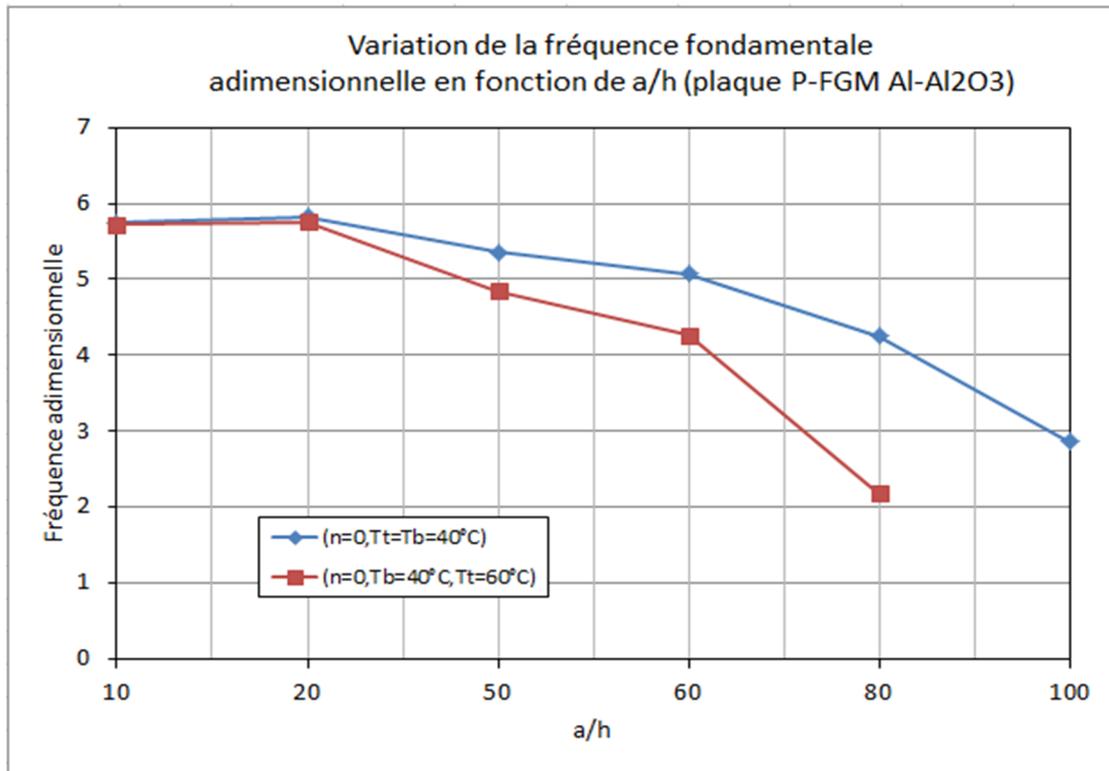


Figure 4.7 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃.

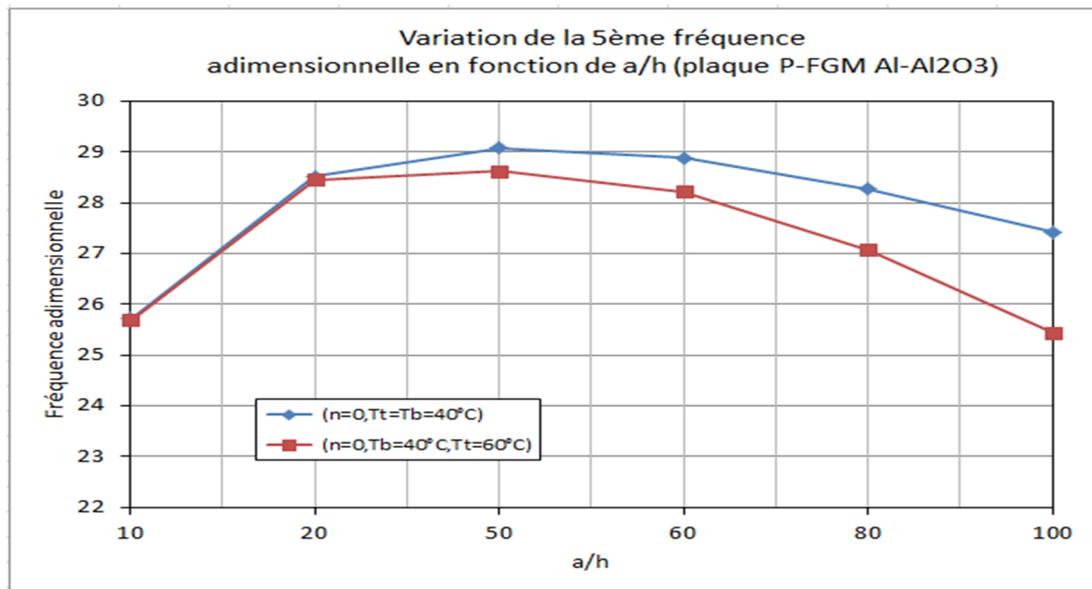


Figure 4.8 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃.

Nous constatons d'après ces 4 figures que lorsque nous fixons l'index de la fraction volumique n et la température T , les fréquences ω_1 et ω_5 diminuent en augmentant le rapport d'allongement a/h . Lorsque nous varions la température, les fréquences diminuent encore beaucoup plus, ceci est dû au fait que la flexibilité globale de la plaque augmente avec l'augmentation du gradient de la température (la plaque est moins rigide).

4.3.4. Paramètre de fréquence ω_1 et ω_5 en fonction de a/h ($T_t=T_b=26.85^\circ\text{C}$) avec $n=0, 0.5, 5$ pour les deux plaques [formule 4.2]

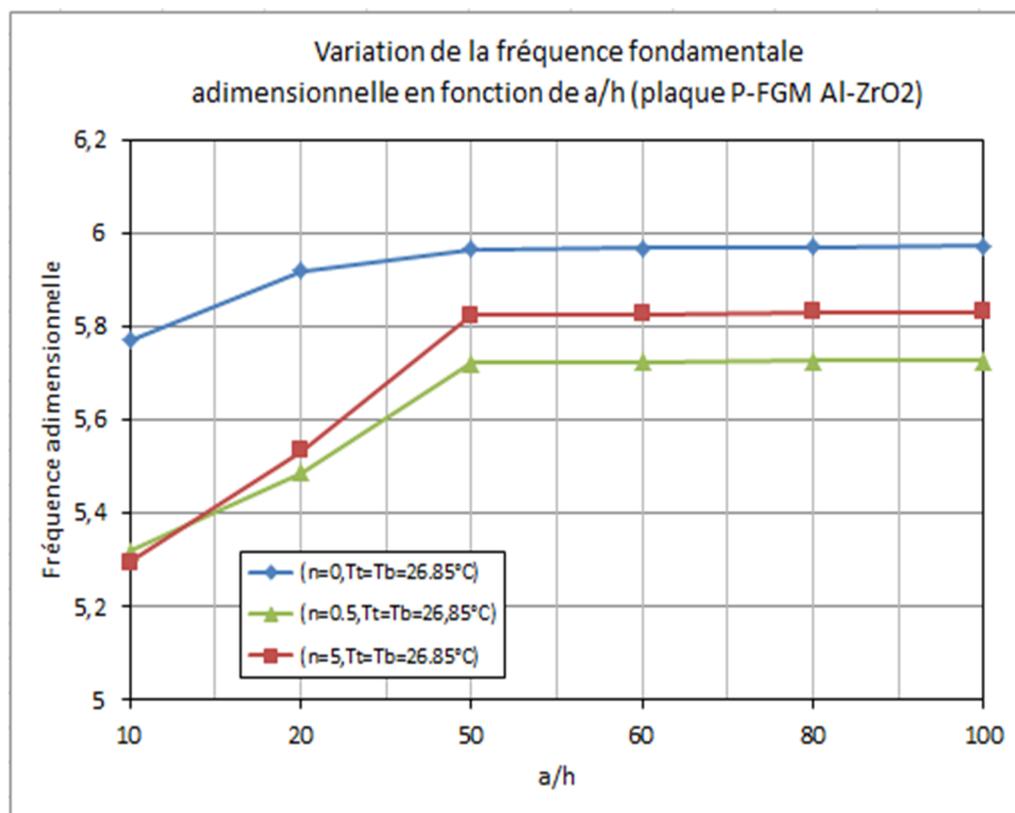


Figure 4.9 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂ ($n=0, 0.5$ et 5).

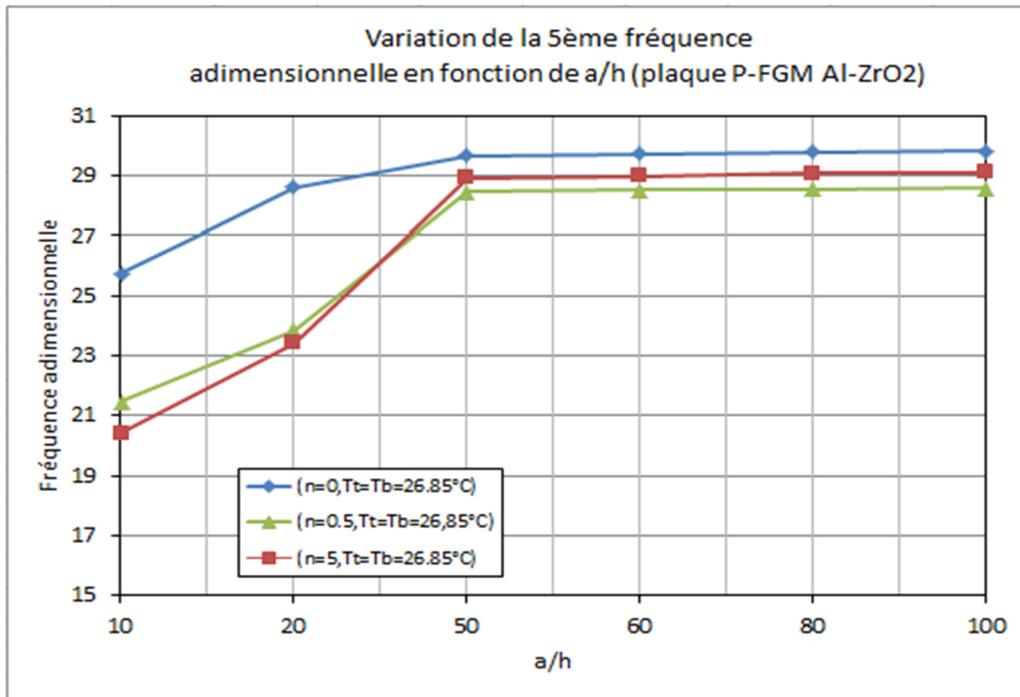


Figure 4.10 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂ (n=0, 0.5 et 5).

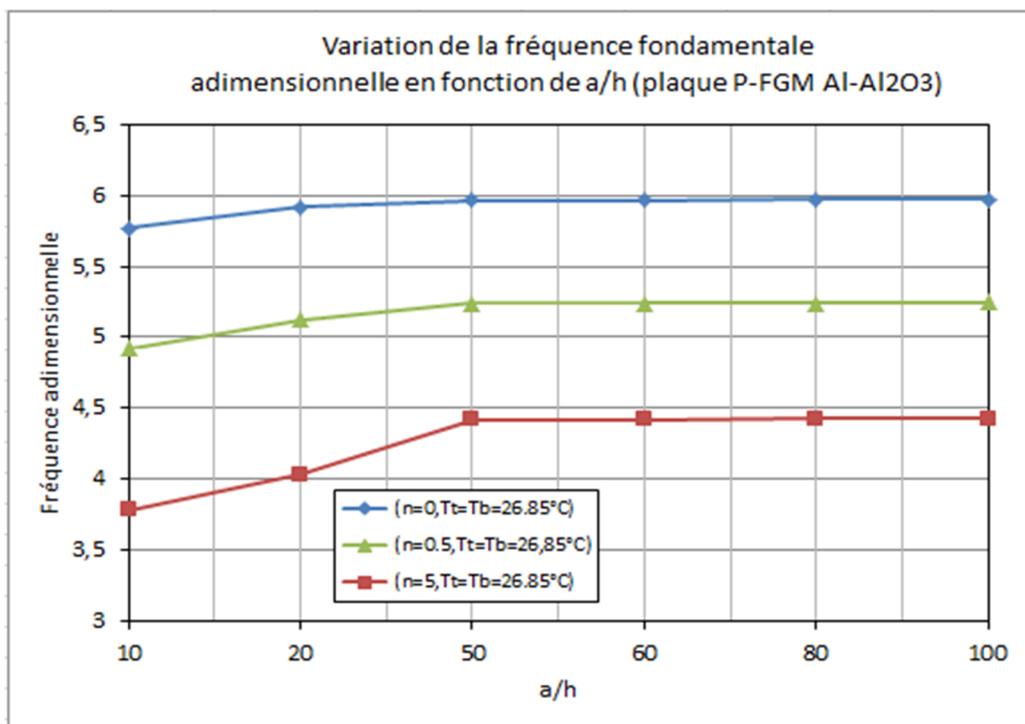


Figure 4.11 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ (n=0, 0.5 et 5).

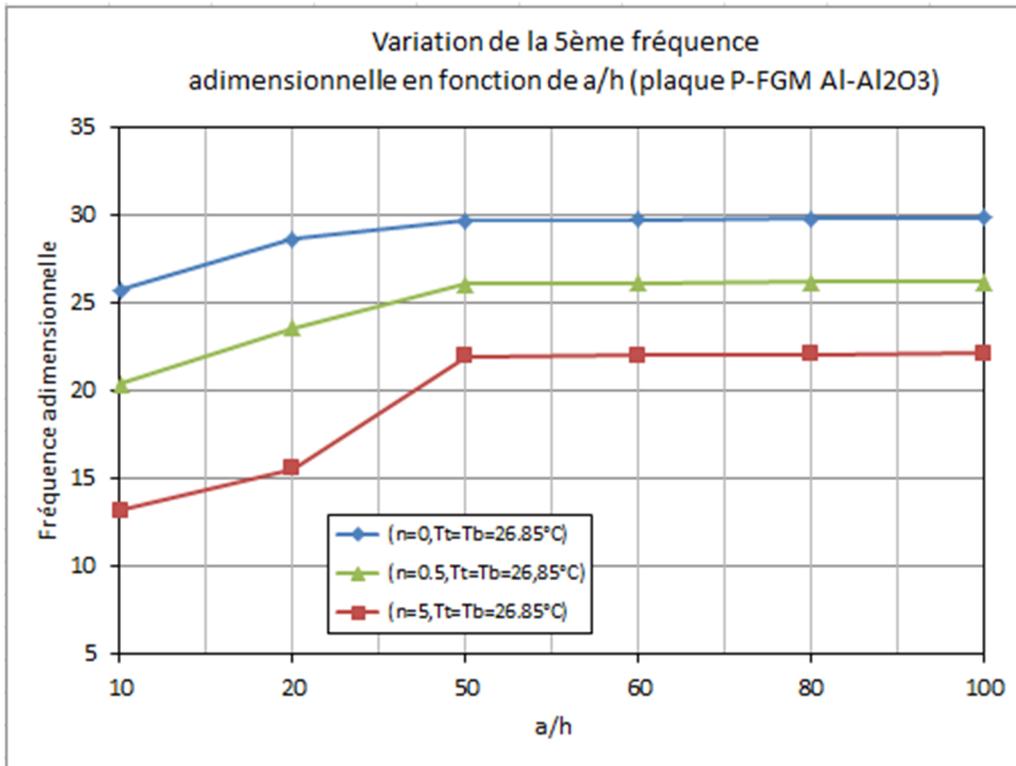


Figure 4.12 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ (n=0, 0.5 et 5).

Nous constatons d'après ces 8 figures (4.5 à 4.12) que lorsque nous fixons la température et nous varions l'index de la fraction volumique n , les fréquences ω_1 et ω_5 diminuent en augmentant le rapport d'allongement a/h car la plaque devient moins rigide (car plus riche en métal et plus longue). Deux plages de rapport a/h sont constatées. Entre 0 et 20 pour la fréquence fondamentale : à ce niveau, l'équation 4.2 conduit à avoir des fréquences réduites évoluant en sens inverse contrairement aux fréquences naturelles. Entre 50 et 100 pour la 5ème fréquence : le sens de l'évolution des fréquences naturelles et adimensionnelles est le même.

4.3.5. Paramètre de fréquence ω_1 et ω_5 en fonction de T_t ($T_b=40^\circ\text{C}$) avec $n=0, 10$ et $a/h=10$ pour les deux plaques [formule 4.2]

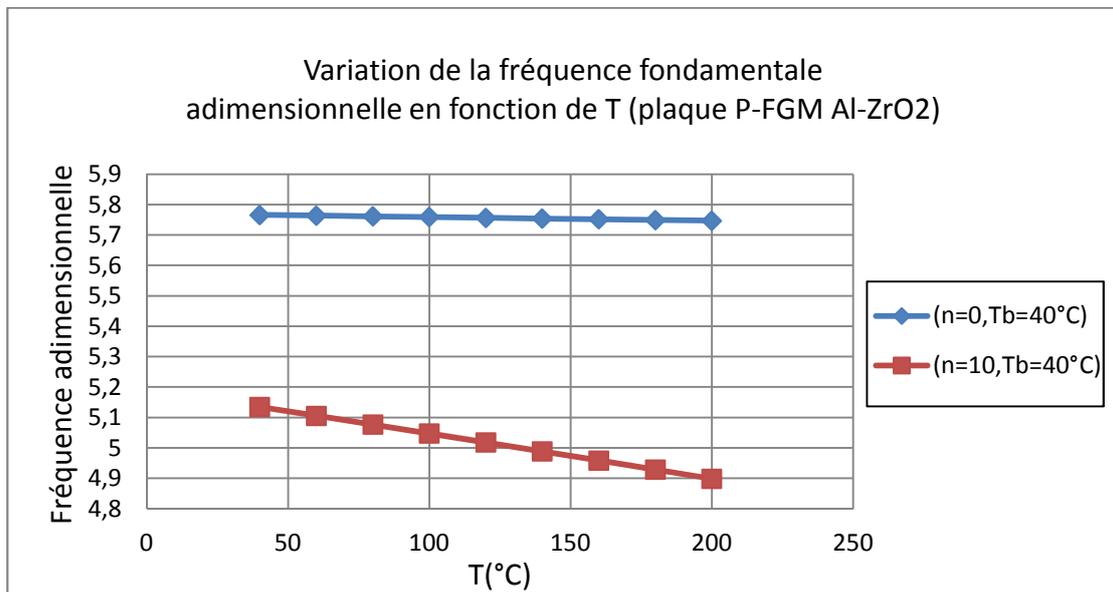


Figure 4.13 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

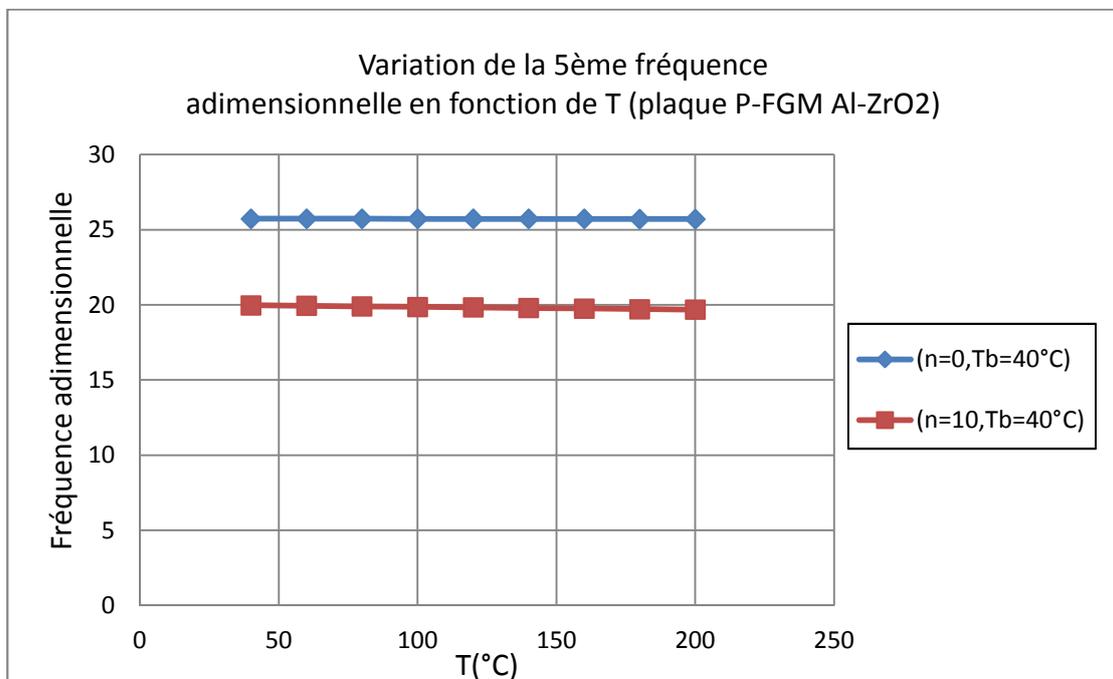


Figure 4.14 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

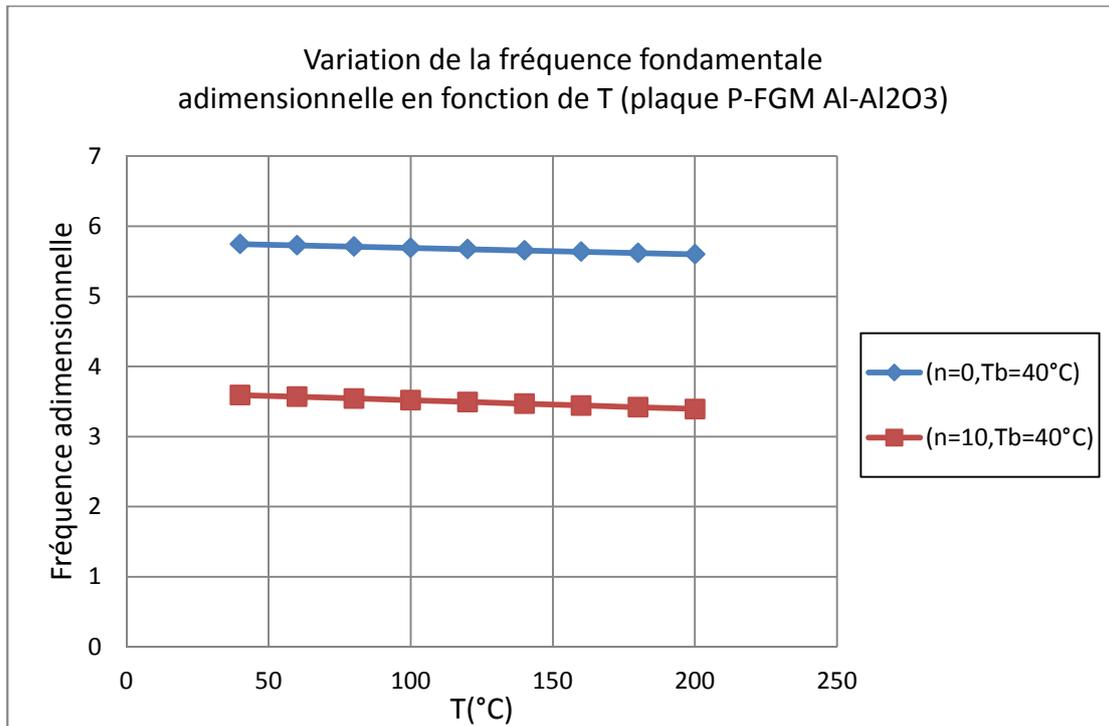


Figure 4.15 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ Al₂O₃.

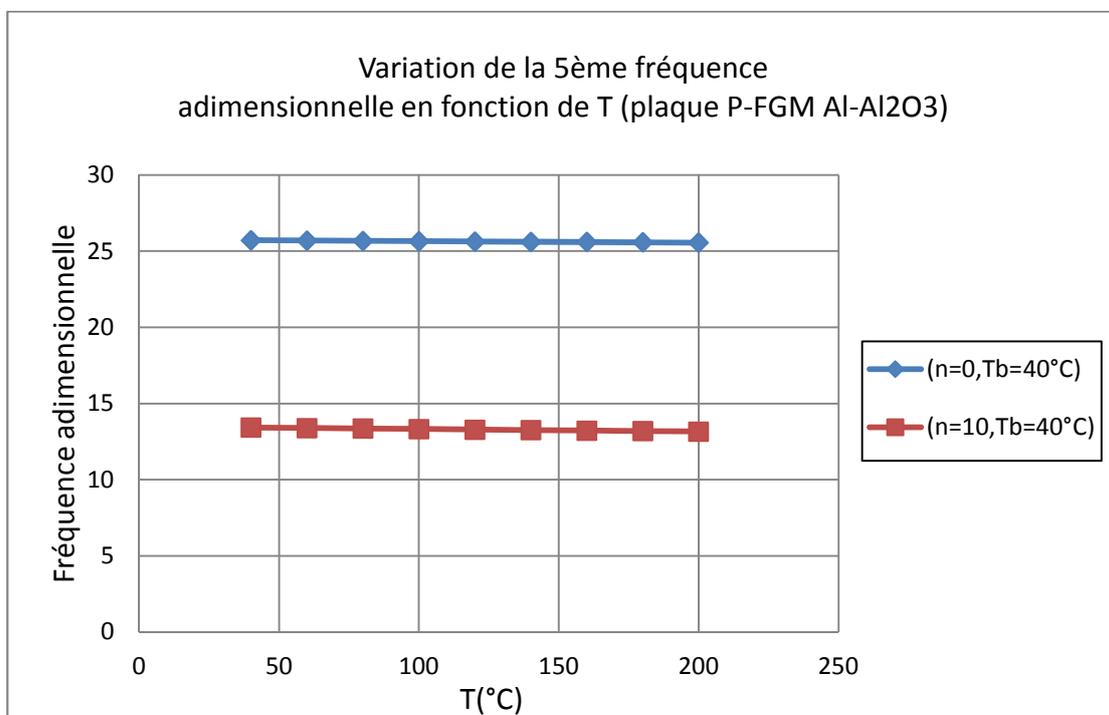


Figure 4.16 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ Al₂O₃.

Nous constatons d'après ces 4 figures que lorsque nous fixons la température T_b et l'index de la fraction volumique n , les fréquences ω_1 et ω_5 diminuent en augmentant la température T_t et elles diminuent encore lorsque nous varions n car l'augmentation du gradient de température ou de l'augmentation de l'index de la fraction volumique n (nous rajoutons plus du métal et nous diminuons le pourcentage de la céramique) rend la plaque globalement moins rigide (donc plus flexible).

4.3.6. Paramètre de fréquence ω_1 et ω_5 en fonction de n ($T_t=T_b=26.85^\circ\text{C}$) avec $a/h=10$ pour les deux plaques [formule 4.2]

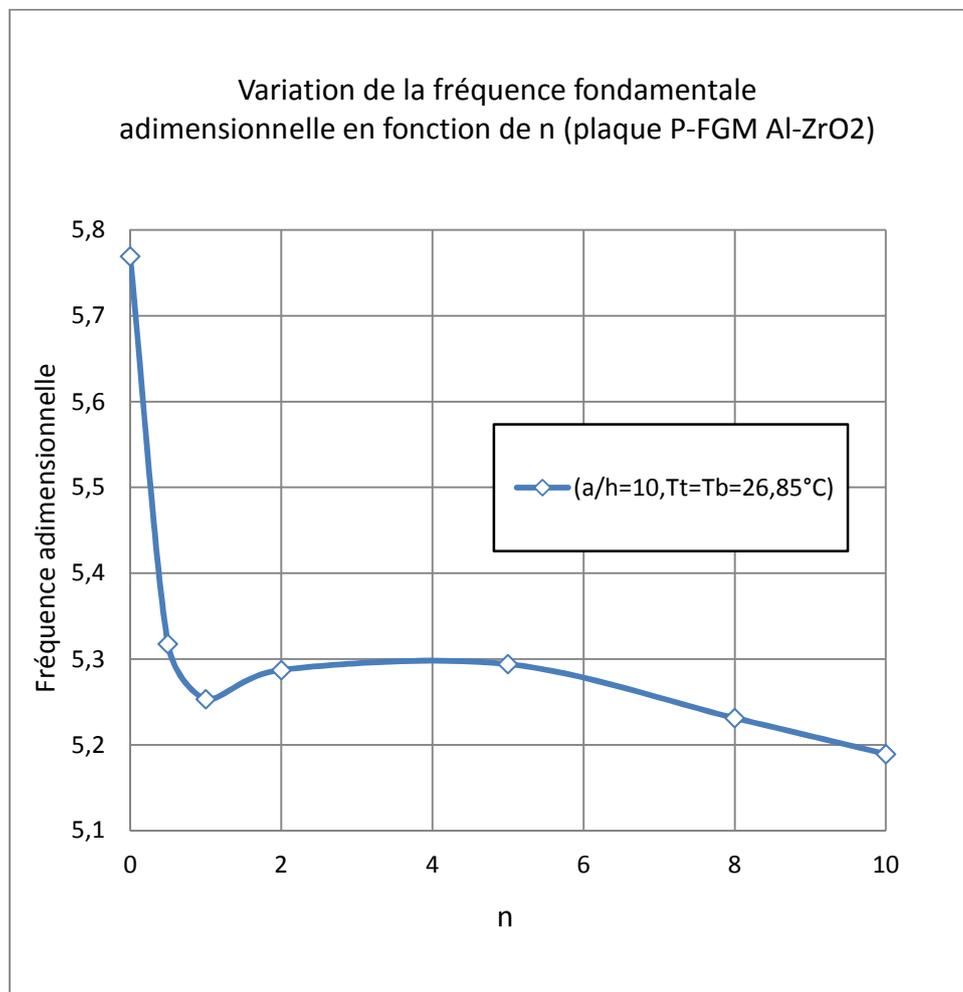


Figure 4.17 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

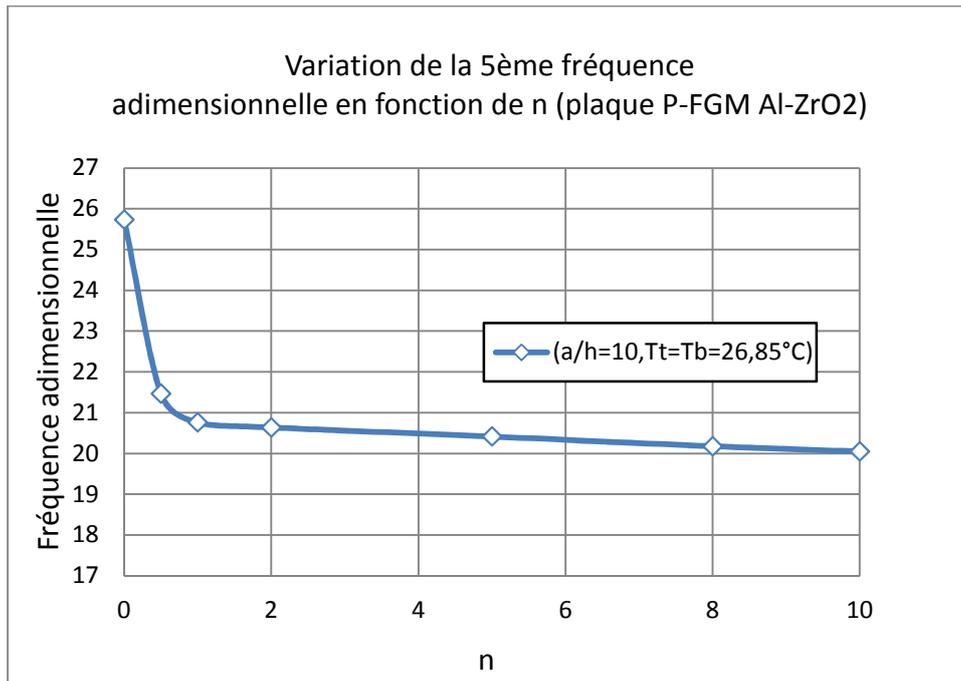


Figure 4.18 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂.

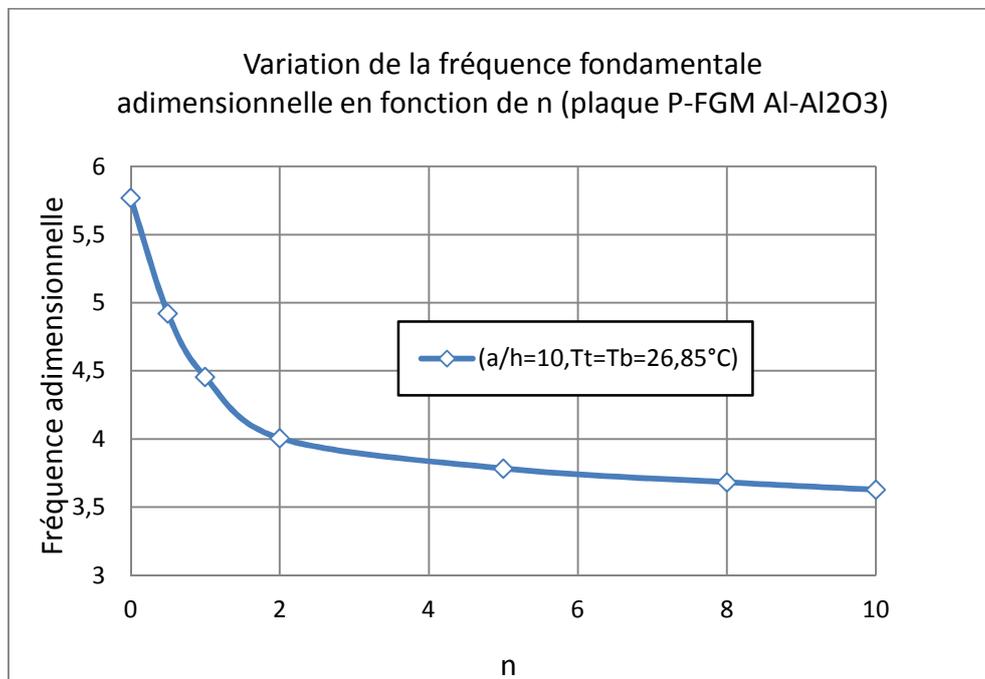


Figure 4.19 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃.

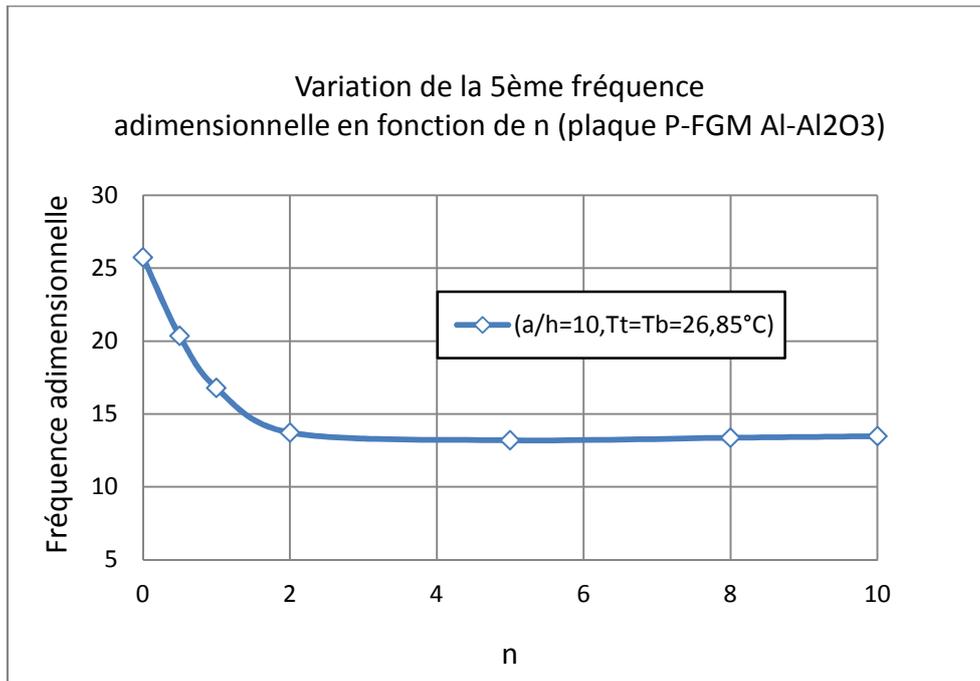


Figure 4.20 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃.

Nous constatons d'après ces 4 figures que lorsque nous fixons la température et le rapport d'allongement a/h , les fréquences ω_1 et ω_5 diminuent en augmentant l'index de la fraction volumique n car l'augmentation de ce dernier implique qu'en introduisant plus de métal dans la plaque P-FGM, ce qui amoindrit sa rigidité car le module de Young du métal est très inférieur à celui de la céramique.

4.4. Conclusion

L'étude des vibrations libres de la plaque P-FGM sur appuis simples s'est faite en tenant compte de la théorie du premier ordre (Reissner -Mindlin).

La méthode de Navier a permis la résolution du système d'équations différentielles et l'obtention des fréquences propres du système. De ce fait, le programme de calcul élaboré a été validé par comparaison avec des résultats déjà publiés. Ensuite, une étude paramétrique de la plaque a été réalisée, en tenant compte des variables suivantes :

- L'index de la fraction volumique n (concentration des matériaux constitutants),
- Le rapport d'allongement a/h (géométrie de la plaque),
- La température imposée à la plaque (uniforme ou non uniforme).

Il a été noté que les fréquences du système vibratoire représenté par la plaque FGM décroissent lorsque l'index de la fraction volumique n croît (en augmentant la concentration du métal et en diminuant celle de la céramique) pour les deux plaques avec des matériaux différents et sujettes aux mêmes conditions.

La géométrie de la plaque influe sur les fréquences calculées (plus le rapport d'allongement est grand, moins les fréquences sont importantes).

Enfin, nous concluons que la température imposée à la plaque influe aussi sur les fréquences calculées, de sorte que les fréquences diminuent quand la température augmente. Pour terminer notre conclusion, nous pouvons affirmer que la fréquence fondamentale est plus sensible à l'augmentation de l'index de la fraction volumique et à l'augmentation du gradient de température que les fréquences supérieures.

CONCLUSION

Les matériaux à gradient fonctionnel, étant des matériaux composites sophistiqués et ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, ils permettent de générer des changements en conséquence des propriétés des matériaux, et d'éliminer les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ainsi un fgm constitué de métal et de céramique combinera la résilience et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique [6].

Afin de modéliser un fgm, une étude du comportement dynamique de l'élément considéré est indispensable. Dans le cadre de ce travail, nous avons effectué une étude vibratoire de deux plaques P-FGM carrées à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal à la face inférieure), sur appuis simples aux quatre bords, avec contraintes thermiques. Nous avons calculé les fréquences propres naturelles avec un programme informatique élaboré et validé (après une comparaison avec les résultats des articles [11] et [12]), en utilisant la méthode de Navier pour résoudre le système d'équations différentielles écrit en se basant sur la théorie de déformations du premier ordre et en appliquant le principe de Hamilton. Des tableaux et des graphes ont été présentés pour montrer l'influence de l'index de la fraction volumique n et du rapport d'allongement a/h et la température imposée à la plaque sur les fréquences propres naturelles du système vibratoire, car ces trois paramètres ont un effet direct sur la rigidité et l'inertie globales de la plaque P-FGM. Autant les trois paramètres déjà cités augmentent, les fréquences propres de vibration diminuent.

Le travail présenté dans ce mémoire de fin d'études peut être développé ou enrichi. Une étude de poutres et plaques en vibrations libres, ainsi qu'une étude de flambage des poutres et plaques fgm sont envisageables. Il sera aussi intéressant d'étudier des poutres et des plaques en combinant des matériaux composites stratifiés avec des matériaux à gradient fonctionnel.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Types de renforts.....	3
Figure 1.2 : Les structures géométriques des composites.....	4
Figure 1.3 : Types de matrices.....	4
Figure 1.4 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.....	5
Figure 1.5 : Structure d'un composite tissé.....	6
Figure 1.6 : Exemples de tissus plans courants.....	7
Figure 1.7 : Exemples de tissus tridimensionnels.....	8
Figure 1.8 : Dispositions possibles des fibres dans un pli.....	9
Figure 1.9 : Exemple de stratifiés à base de plis unidirectionnels.....	10
Figure 1.10 : Exemples de multi-matériaux stratifiés.....	10
Figure 1.11 : Une structure en sandwich.....	11
Figure 1.12 : Comparaison des caractéristiques mécaniques en flexion et des masses de trois structures.....	11
Figure 1.13 : Variation continue des propriétés.....	12
Figure 1.14 : Variation discrète des propriétés.....	12
Figure 1.15 : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	13
Figure 1.16 : Variation continue de la microstructure (photo).....	13
Figure 1.17 : Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme.....	14
Figure 1.18 : Variation multi-phases de la microstructure.....	14
Figure 1.19 : Exemple du procédé de fabrication typique des fgm par la métallurgie des poudres.....	15

Figure 1.20 : Les trois types de méthodes de fabrication des mgf sous la force centrifuge.....	16
Figure 1.21 : Variation de la microstructure de l'os.....	18
Figure 2.1 : Elément structural en fgm.....	19
Figure 2.2 : Variation de la fraction volumique du P-FGM.....	21
Figure 2.3 : Variation de la masse volumique (E-FGM).....	21
Figure 2.4 : Variation de la fraction volumique de S-FGM.....	22
Figure 2.5 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.....	24
Figure 2.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre.....	26
Figure 2.7 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement transverse.....	27
Figure 2.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.....	28
Figure 3.1 : Plaque carrée simplement supportée sur les quatre cotés.....	37
Figure 4.1 : Géométrie de la plaque	41
Figure 4.2 : Organigramme du programme de calcul.....	42
Figure 4.3 : Paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃ (a/h = 5, 10, 20).....	46
Figure 4.4 : Paramètre de fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃ et Al/ZrO ₂ (a/h = 10).....	48
Figure 4.5 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	49
Figure 4.6 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	49

Figure 4.7 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃	50
Figure 4.8 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃	50
Figure 4.9 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂ (n=0, 0.5 et 5).....	51
Figure 4.10 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂ (n=0, 0.5 et 5).....	52
Figure 4.11 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃ (n=0, 0.5 et 5).....	52
Figure 4.12 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de a/h d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃ (n=0, 0.5 et 5).....	53
Figure 4.13 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	54
Figure 4.14 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	54
Figure 4.15 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ Al ₂ O ₃	55
Figure 4.16 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de T d'une plaque carrée P-FGM Al/ Al ₂ O ₃	55
Figure 4.17 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	56
Figure 4.18 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO ₂	57
Figure 4.19 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃	57

Figure 4.20 : Variation de la 5ème fréquence en fonction de n d'une plaque carrée P-FGM Al/Al ₂ O ₃	58
Tableau 4.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	45
Tableau 4.2 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale des plaques P-FGM : Al/Al ₂ O ₃ et Al/ZrO ₂ simplement supportées avec a/h égal à 10.....	47

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A	: Surface (m^2)
$A_{i j}$: Rigidité en membrane (N/m)
A, B, C	: Paramètres de Navier
D_{ij}	: Rigidité de flexion (N.m ² /m)
E	: Module de Young (N/m ²)
E_c	: Energie cinétique (N.m)
I_0, I_1, I_2	: Inerties axiale, de couplage et de rotation respectivement
K	: Coefficient de correction du cisaillement
K_{ij}	: Sous matrices de [K]
M_{xx}, M_{yy}	: Moments de flexion (N.m/m)
M_{xy}	: Moment de torsion (N.m/m)
P	: Propriété le long de l'axe z
P_t, P_b	: Propriétés au niveau des surfaces, supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement
Q_{xz}, Q_{yz}	: Résultantes des efforts de cisaillement dans les plans (xy) et (xz) respectivement (N/m)
Q_{ij}	: Coefficients de rigidité réduite (N/m ²)
T	: Température le long de l'axe z
T_t, T_b	: Températures au niveau des surfaces, supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement
U	: Energie potentielle (N.m)
U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}	: Amplitudes des déplacements les longs des axes x, y et z respectivement (m)
V	: Volume de l'élément plaque considéré
$V(z/h)$: Fraction volumique de la plaque P-FGM
\mathcal{L}	: Lagrangien du système (N.m)
a	: Longueur de la plaque (m)
b	: Largueur de la plaque (m)
h	: Epaisseur de la plaque (m)
n	: Index de la fraction volumique

t	: Variable temps (s)
u, v, w	: Déplacements les long des axes x, y et z respectivement d'un point du plan moyen (m)
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: Déplacements les longs des axes x, y et z respectivement (m)
x, y, z	: Coordonnées cartésiennes (m)
Ψ_x, Ψ_y	: Rotations de la normale transversale sur les axes « y » et « x » respectivement
Ψ_{mn}, φ_{mn}	: Amplitudes des rotations
α, β	: Paramètres de forme
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: Déformations de cisaillement dans les plans $(xy), (xz)$ et (yz) respectivement (N/m ²)
δ	: Opérateur de variation
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$: Déformations dans les directions x, y et z respectivement
ν	: Coefficient de Poisson
ρ	: Masse volumique (Kg/m ³)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes dans les directions des axes x, y et z respectivement (N/m ²)
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$: Contraintes de cisaillement dans les plans $(xy), (xz)$ et (yz) respectivement (N/m ²)
w_t	: Travail thermoélastique
ω	: Fréquence circulaire naturelle (Hz)
$\bar{\omega}$: Fréquence naturelle adimensionnelle
CPT	: Théorie classique des plaques (classical plate theory)
FSDPT	: Théorie de déformation des plaques du premier ordre
HSDPT	: Théorie de déformation des plaques d'ordre supérieur

REFERENCES

- [1]: Palipi Sreenivas,A.Siva Kumar, Subramanyam Pavuluri,A.Aruna Kumari, "Investigations on transient dynamic response of functionally graded materials" IJAIEM Volume 2, Issue 9, September 2013.
- [2]: Jean-Paul Baïlon, Jean-Marie Dorlot "Des matériaux". 3ème édition 2001.
- [3]: Laurent Gornet, "Généralités sur les matériaux composites". cel-00470296, version 1 - 6 Apr 2010.
- [4]: Lionel Gendre, "MATERIAUX COMPOSITES ET STRUCTURES COMPOSITES" publiée le 17-03-2011.
- [5]: Jean-Marc Béguin, "Les matériaux composites dynamisme et innovation". Dans LE 4 PAGES N° 158 - février 2002.
- [6]: Mahi Amale,"Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres". Thèse de Doctorat, Université Saad Dahlab de Blida, Faculté des Sciences de l'Ingénieur(2012).
- [7]: Yoshimi Watanabe, Hisashi Sato, "Review Fabrication of Functionally Graded Materials under a Centrifugal Force". Nagoya Institute of Technology Japan.
- [8]: Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi Member, IAENG, Mukul Shukla and Sisa Pityana,"Functionally Graded Material: An Overview".Dans Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III WCE 2012, July 4 - 6, 2012, London, U.K.
- [9]: J.-M.Berthelot,"Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures".
- [10]: J.N. Reddy. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and analysis".
- [11]: Sh. Hosseini-Hashemi et al, "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", Applied Mathematical Modelling (2010), 1276-1291, DOI: 10.1016/j.apm.2009.08.008.
- [12]: X. Zhao et al,"Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", Journal of Sound and Vibration (2008), doi:10.1016/j.jsv.2008.06.025.