

République algérienne démocratique et populaire

Ministère de L'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



UNIVERSITÉ DE BLIDA

Faculté des sciences de l'ingénieur  
Département d'Aéronautique



# Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique

*Option : installation*

Thème :

**Recalage d'une centrale inertielle par  
le filtrage de Kalman**

Présenté par

OUALI Achour  
RAID Mohamed

Dirigé par :

M<sup>er</sup> MEGUELATI Smaïl

*Promotion : 2002/2003*

# Remerciements

Merci à dieu tout puissant qui à éclairé notre chemin jusqu'au bout.

J'adresse mes sincères remerciements à notre promoteur *M<sup>re</sup> Meguelati*, pour le suivi, son aide et les conseils qui nous ont permis la réalisation de ce modeste travail.

Nous exprimons notre gratitude à nos chers parents et au lieutenant-colonel *Ait abdallâh* pour son aide précieuse.

Sans oublier les enseignants et les responsables des laboratoires de l'institut d'aéronautique qui ont assuré notre formation.

*Achour et Mohamed*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes très chers parent pour leur amour et inquiétude.
- Mes chers frères, Djamel, Hakim, Fahim, Hassen, A/ellah.
- Mes chers sœurs, Hayette et Naziha.
- Celle que j'ai choisie et qui été toujours à coté de mois, *Samira* ainsi qu'à sa famille.
- Mes belle-sœurs Hakima, Djamila et Noura.
- Mon neveu ithri et ma nièce thiziré.
- *Zouziene*.
- Mes cousins et cousines.
- L'âme de mon oncle A/hamane.
- Mon ami et binôme Mohamed et sa famille
- La mémoire de mon ami défunt A/ EL HERTZI.
- Mes amis et collègues : Merouane, Bachir, Hatem , Amine, Bourenani, Mouh, Mustapha, Brahim, Toufik, Houari, Djamel, Salime, Nadjmedine, A/salemc, Laziz.
- Mes amis : Nouradine, Fateh, Hakim, Redha, Aimad .
- 
- M<sup>er</sup> Ben chercheli, M<sup>er</sup> Bayba, Djallel, Dalila, Fadila, Ben achenou, Doudou, Lila.
- Adjudant-chef Djijli

*Achour*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes très chers parents pour leur amour et à ma famille
- Mon ami et binôme Achour et sa famille
- Mes amis : Merouane, Bachir, Hakim, Redha, Sofiane, Mokhtar, Saddek, Brahim, Hamza, Fadlallah, Redouane, Lakhdar, Amine, Bourenani, Fadel, Gacem, Djamel, Sid ali, Houari, Fouad, Salim, Chaaban Mohaned, et block 2.
- M<sup>er</sup> Ben chercheli, M<sup>er</sup> Bayba, M<sup>er</sup> Chabane mohend, Djallel, Dalila, Fadila, Ben achenou, Doudou.
- Adjudant-chef Djijli, Salim, Fayçal.

*Mohamed*

# SOMMAIRE

	page
INTRODUCTION GENERALE	
CHAPITRE I	
I.1 INTRODUCTION	1
I.2 CLASSIFICATION DES SYSTEMES DE NAVIGATION	2
I.2.1 La navigation à l'estime	2
I.2.2 La navigation par localisation	2
I.3 QUELQUES DEFINITIONS DES TERMES DE NAVIGATION	3
I.3.1 Les coordonnées géographiques	3
I.3.2 Les directions de référence, Caps et Routes	4
I.3.3 Mesure de distances et de vitesses	5
I.4 LE SYSTEME DE NAVIGATION V.O.R/DME	5
I.4.1 Le VOR (VHF Omni range)	5
I.4.2 D.M.E (Distance Measuring Equipment)	7
I.5 LE SYSTEME DE NAVIGATION PAR SATELLITE : LE GPS	9
I.5.1 Positionnement par satellites	9
I.5.2 Description générale du système GPS	9
I.5.3 Principe de la mesure de la position	10
I.6 LE SYSTEME DE NAVIGATION DOPPLER	11
I.6.1 Principe de fonctionnement	11
I.7 LA NAVIGATION INERTIELLE	12
I.7.1 Introduction	12
I.7.2 Principe de relativité d'Einstein Galilée	12
I.7.3 Le principe de la technique inertielle	14
I.7.4 La solution de type lié ou strapdown	15
I.7.5 La solution avec plateforme stabilisée	16
I.8 TRIEDRES UTILISES EN NAVIGATION INERTIELLE	17
I.8.1 Trièdre absolu	17
I.8.2 Le trièdre terrestre	17
I.8.3 Trièdre de référence d'attitude	17
CHAPITRE II	
II.1 INTRODUCTION	18
II.2 MODES DE SUSPENSION DES GYROSCOPES	18
II.3 EQUATIONS DE LA GYROSCOPIE	20
II.3.1 Le couple gyroscopique	20
II.3.2 Gyroscopie à un degré de liberté	22
II.3.3 Gyroscopie à deux degrés de liberté	24
II.4 LES TECHNIQUES D'ESSAIS DES GYROSCOPES	26
II.4.1 Modélisation de la dérive des gyroscopes	26
II.4.2 Les types de technique utilisés	27
II.5 LES ACCELEROMETRES	28
II.5.1 Principe de fonctionnement	28
II.5.2 Différents types d'accéléromètres	29
II.5.3 Exemple de l'accéléromètre pendulaire	30
CHAPITRE III	
III.1 INTRODUCTION	33
III.2 DESCRIPTION FONCTIONNELLE D'UNE PLATEFORME	33

III.2.1	Plateforme 1 axe.....	33
III.2.2	Plateforme 3 axes.....	34
III.2.3	Plateforme 4 axes.....	35
III.2.4	Cas des avions et des navires : plateforme de Schuler.....	37
III.3	ASSERVISSEMENT D'UNE PLATEFORME DE SCHULER.....	40
III.3.1	Le principe.....	40
III.3.2	Les différentes mécanisations .....	41
III.3.3	Equations d'asservissement de la plateforme.....	41
III.3.4	Exemple de mécanisation .....	42
III.3.5	Paramètres de navigation .....	43
III.4	ALIGNEMENT D'UNE CENTRALE INERTIELLE.....	45
III.5	UTILISATION DE LA CENTRALE INERTIELLE .....	45
III.6	ERREURS D'UN SYSTEME DE NAVIGATION.....	47
CHAPITRE IV		
IV.1	NECESSITE DU RECALAGE.....	51
IV.2	APPROCHE CLASSIQUE .....	51
V.2.1	Le principe.....	51
V.2.2	Exemple d'un système hybride amorti classique.....	52
IV.3	APPROCHE OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE .....	53
IV.4	LE FILTRE DE KALMAN.....	54
IV.4.1	Présentation des filtres.....	54
IV.4.2	Principe du filtre de Kalman.....	54
IV.4.3	Formulation du filtre de Kalman.....	57
IV.4.4	Filtre de Kalman : Cas d'observations discrètes.....	57
IV.4.5	Filtre de Kalman :Cas d'observations continues.....	58
IV.5	INSTRUMENTS DE NAVIGATION AUXILIAIRES.....	59
CHAPITRE V		
V.1		
INTRODUCTION.....		61
V.2	RECALAGE OPTIMAL SIMPLIFIE D'UN SYSTEME INERTIEL A 1 AXE ...	61
V.2.1	Equation d'évolution.....	61
V.2.2	Equation des observations.....	62
V.2.3	Simulation.....	63
V.3	RECALAGE OPTIMAL D'UN SYSTEME INERTIEL A 2 AXES.....	66
V.3.1	Equation d'évolution.....	66
V.3.2	Equation des observations .....	69
V.3.3	Simulation .....	69
CONCLUSION		
BIBLIOGRAPHIE		

# LISTE DES FIGURES

page

## Chapitre I

Figure I.1 : Lignes de position.....	3
Figure I.2 : Latitude, Longitude.....	3
Figure I.3 : Directions relatives à l'aéronef.....	4
Figure I.4 : Informations délivrées par le VOR.....	5
Figure I.5 : Signaux 30Var et 30Ref émis par le VOR.....	6
Figure I.6 : Le HSI.....	7
Figure I.7 : Synoptique du DME.....	8
Figure I.8 : Structure du système GPS.....	10
Figure I.9 : Principe du radar doppler.....	11
Figure I.10 : Dispositif JANUS.....	12
Figure I.11 : Le principe de Einstein.....	14
Figure I.12 : Champ de gravitation terrestre.....	15
Figure I.13 : Plateforme inertielle.....	15
Figure I.14 : La solution de type lié ou « strapdown ».....	16
Figure I.15 : La solution avec plateforme stabilis.....	16
Figure I.16 : Trièdres absolu et de référence d'attitude.....	17

## Chapitre II

Figure II.1 : Toupie en rotation.....	18
Figure II.2 : Principe du gyroscope à 1 degré de liberté.....	19
Figure II.3 : Principe du gyroscope à 2 degrés de liberté.....	19
Figure II.4 : Le couple gyroscopique.....	21
Figure II.5 : Le gyroscope à un degré de liberté.....	22
Figure II.6 : Le gyroscope intégrateur 1 axe.....	23
Figure II.7 : Le gyroscope à 2 degrés de liberté.....	25
Figure II.8 : Essai multi-positions.....	28
Figure II.9 : Essai en table équatoriale.....	28
Figure II.10:Schéma de principe d'un accéléromètre linéaire à un axe.....	29
Figure II.11 : Véhicule accélérant dans un plan horizontal. Axe sensible. Horizontale.....	29
Figure II.12 : Accéléromètre pendulaire.....	29
Figure II.13 : Accéléromètre à quartz.....	30
Figure II.14 : Accéléromètre pendulaire.....	31

## Chapitre III

Figure III.1 : Plateforme stabilisée 1 axe.....	33
Figure III.2 : Plateforme 3 axes.....	36
Figure III.3 : Plateforme 4 axes.....	36
Figure III.4 : bouclage de Schuler.....	38
Figure III.5 : Plateforme de schuler 3 axes.....	39
Figure III.6 : Repère terrestre et repère plateforme.....	40
Figure III.7 :Schéma d'une mécanisation avec plateforme asservie au nord.....	43
Figure III.8 : Paramètres de navigation.....	44

Figure III.9 : Calcul des paramètres de navigation .....	44
Figure III.10 : Boîtier INS de mise en œuvre .....	47
Figure III.11 : La boîte de commande et d'affichage .....	47
Figure III.12 : Navigateur à 1axe .....	48
Figure III.13 : Navigation simplifiée à 1 axe .....	47

#### **Chapitre IV**

Figure IV.1 : Points d'intervention sur un système pur .....	52
Figure IV.2 : Système hybride avec référence extérieure de vitesse.....	53
Figure IV.3 : (a) boucle ouverte, (b) boucle fermée.....	54
Figure IV.4 : Différents cas d'estimation .....	55
Figure IV.5 : Principe du filtre de Kalman .....	55
Figure IV.6 : Filtre de Kalman discret .....	58
Figure IV.7 : Filtre de Kalman continu à observations discrets .....	59

#### **Chapitre V**

Figure V.1 : Navigateur intégré optimal .....	62
Figure V.2 : Erreur résiduelle de position sans recalage.....	64
Figure V.3 : Erreurs résiduelles de position sans recalage et avec recalage.....	64
Figure V.4 : Erreur résiduelle de vitesse sans recalage et avec recalage .....	65
Figure V.5 : Erreur de dérive de gyroscope sans recalage et avec recalage .....	65
Figure V.6 : Type de trajectoire de la simulation.....	69
Figure V.7 : Programme principal .....	70
Figure V.8 : Sous programme inertiel pure .....	70
Figure V.9 : Sous programme inertielle de recalage.....	71
Figure V.10 : Latitude de la trajectoire pour v=230 kts .....	72
Figure V.11 : Longitude de la trajectoire pour v=230 kts .....	72
Figure V.12 : Latitude et longitude de la trajectoire pour v=230 kts .....	73
Figure V.13 : Latitude et longitude de la trajectoire pour v=400 kts.....	73
Figure V.14 : CEP pour une trajectoire v=230 kts .....	74

## Résumé

La centrale de navigation à inertie pure présente des erreurs croissantes avec le temps qui sont dus aux défauts des composants de la centrale. Pour améliorer ses performances en utilisant des algorithmes de recalage à l'aide de systèmes auxiliaires.

Ce mémoire présente la simulation d'un algorithme de recalage en position d'une centrale inertielle de type Schüler par filtrage de Kalman.

## Abstract

The power station of navigation with pure inertial present of the increasing errors with the time which is due to the defects of the components of the power station.

To improve its performances by using algorithms of retiming using auxiliary systems.

This memory presents the simulation of an algorithm of retiming in position of an inertial power station of Schüler type by Kalman filter.

## ملخص

العطالة المركزية للملاحة الجوية لها أخطار قياس تتزايد مع الزمن نابعة من الأجهزة المكونة لها. ولكي تكون فعالة استعملنا برنامج يصحح هذه الأخطاء بمساعدة أجهزة أخرى. هذه المذكرة تقدم تمثيل لخوارزمية تأخير موقع العطالة المركزية صنف شولر بواسطة مصفاة كالمان.

# INTRODUCTION GENERALE

Le monde de l'aéronautique comme tout autre domaine et depuis des siècles en train de chercher toujours à améliorer ces services en construisant des appareils et des matériels d'exploitation plus rapides et plus performants.

Parmi ces systèmes de navigation, le système de navigation inertiel est l'un des plus performants à l'heure actuelle.

Le principe des centrales inertielles (qui calculent les informations de navigation en intégrant les rotations et accélérations mesurées par des gyroscopes et accéléromètres) répond en effet parfaitement aux principaux besoins de navigation et de pilotage, qui sont la précision, la disponibilité en toutes conditions et l'intégrité (c'est-à-dire la capacité à signaler une panne du système). Ce système est néanmoins sujet à des erreurs qui croissent avec le temps, ce qui nécessite une opération de correction appelée *recalage*.

Pour cela on a choisi ce thème du recalage d'une centrale inertielle par filtrage de *Kalman* comme sujet d'études pour notre projet de fin d'études du cycle d'ingénieur en Installations qui consiste à utiliser des informations de navigation provenant de *systèmes auxiliaires* afin d'améliorer les performances des systèmes de navigation inertielle classiques.

Le couplage entre les informations inertielles et auxiliaires permet de modéliser les erreurs physiques des instruments par un vecteur constitué d'un ensemble de paramètres et de les estimer en utilisant les informations inertielles et auxiliaires à l'aide du filtre de Kalman.

Dans ce mémoire nous développerons un algorithme de recalage basé sur le filtrage statistique de Kalman permettant d'estimer un vecteur de 13 paramètres décrivant l'état du système ( position, vitesse, facteurs d'échelles et dérives des gyroscopes) et nous présenterons un ensemble de résultats de simulations de ce recalage.

On a décomposé notre travail comme suit:

- La première partie présente des généralités sur les moyens de radionavigation les plus utilisés ainsi que le principe de la navigation inertielle .
- La deuxième partie décrit les divers composants d'une centrale inertielle (gyroscopes et accéléromètres) en précisant leurs différentes caractéristiques.
- La troisième partie donne la description et le fonctionnement des différents types de plateformes.
- Dans la quatrième partie, nous donnons le principe du recalage et une présentation du filtre de Kalman .
- Nous terminons ce mémoire en donnant les résultats de simulations obtenus à l'aide de l'algorithme de recalage.

# Chapitre I

Généralités sur les  
systèmes de navigation

## I.1 INTRODUCTION

Le développement continu des transports aériens, particulièrement notable au cours des deux dernières décennies, exige une constante amélioration des progrès de navigation et des systèmes de contrôle de la circulation aérienne.

Avec l'invention de véhicules très spéciaux, comme les fusées et les capsules spatiales, les sous-marins ou plus classiquement les avions, sans parler des besoins spécifiques des militaires, il s'est imposé à l'homme la nécessité de mettre au point des systèmes de navigation.

Que demande-t-on à un navigateur classique?

- De connaître pour ce qui concerne la trajectoire, la position, la vitesse, l'accélération,
- De connaître l'attitude (orientation spatiale) du véhicule et les vitesses angulaires instantanées autour d'axes liés au véhicule,
- De toute évidence il n'a pas fallu attendre le XXI<sup>ème</sup> siècle pour y parvenir, la preuve en est apportée par toutes les expéditions maritimes ou terrestres des plus grands aventuriers ou explorateurs.

Est-ce un problème de précision?. Non, essentiellement une question de sécurité pour les applications civiles et de discrétion pour les militaires.

Que demande-t-on à un navigateur moderne?

Essentiellement de fournir les informations précédentes sans références externes ou du moins le minimum possible.

En effet :

- Un avion doit pouvoir voler sans visibilité,
- Un avion militaire doit pouvoir pénétrer en territoire ennemi sans se faire repérer et donc sans émettre ou recevoir quoi que ce soit
- Un sous-marin est censé rester sous l'eau jusqu'à un mois, sans refaire surface et sans se faire repérer, etc...
- Un navigateur moderne doit donc pouvoir travailler en autonomie complète, sans références extérieures. Ceci n'exclut nullement la présence de systèmes annexes utilisant des références externes, pour des recalages, des confirmations et une sécurité redondante.

Parmi ces systèmes autonomes, c'est à dire indépendant de toute aide extérieure au véhicule, les systèmes de navigation par inertie voient leur emploi s'étendre de plus en plus.

## 1.2 CLASSIFICATION DES SYSTEMES DE NAVIGATION

Pour voler d'un point A à un point B, qu'il s'agisse d'un vol entre deux aérodromes distants d'une dizaine de milles ou d'un vol plus lointain, le pilote utilise plusieurs aides électroniques à la navigation très différents dans leur fonctionnement. Néanmoins, on peut distinguer deux procédés généraux : le procédé de navigation à l'*estime* et le procédé de navigation par *localisation*.

### 1.2.1 La navigation à l'estime

Dans ce type de navigation, le point de départ étant connu, il suffit de mesurer ensuite à tout instant la vitesse du mobile dans un référentiel qui sert à décrire la trajectoire réellement suivie par intégration.

Les difficultés de ce procédé sont la mesure de la vitesse et celle de l'angle qu'elle fait avec les directions de référence (le cap dans le cas de la navigation terrestre); de même, l'intégration de la vitesse tend à accumuler les erreurs, de ce fait, la position fournie par cette méthode a de grandes chances d'être de moins en moins précise à mesurer que le temps passe.

Le système de navigation Doppler entre dans cette catégorie ainsi que le système de navigation inertiel qui fait l'objet de notre étude.

### 1.2.2 La navigation par localisation

Les procédés de cette catégorie de loin la plus utilisée donnent en premier lieu la position appelée aussi en terme de navigation, le point. Dans ces types de systèmes, la vitesse est fournie par un autre moyen.

Trouver sa position ( ou faire le point) se ramène presque toujours à la recherche de ce qu'on appelle les lignes de position et la position d'un aéronef est donnée par l'intersection de deux lignes de position définies radioélectriquement. Une ligne de position correspond à un signal radioélectrique constant où à une caractéristique de ce signal qui reste constante (amplitude, déphasage, taux de modulation)

Les lignes de position classiques sont :

- Les cercles centrés sur une station d'émission définis par le temps de propagation entre la station émettrice fixe et l'aéronef mobile. Les systèmes utilisant ce principe sont dits circulaires comme le radar par exemple.
- Les hyperboles qui sont des lignes qui correspondent à une différence constante de propagation à partir de deux émetteurs éloignés l'un de l'autre mais synchronisés.

Ces types de systèmes sont dits hyperboliques comme le système OMEGA.

- Les radiales qui sont des lignes droites rayonnant de la station et définies par leur azimut. Ces types de systèmes sont dits angulaires comme par exemple l'aide de radionavigation VOR.

La figure I.1 donne un aperçu des trois types de lignes de position.

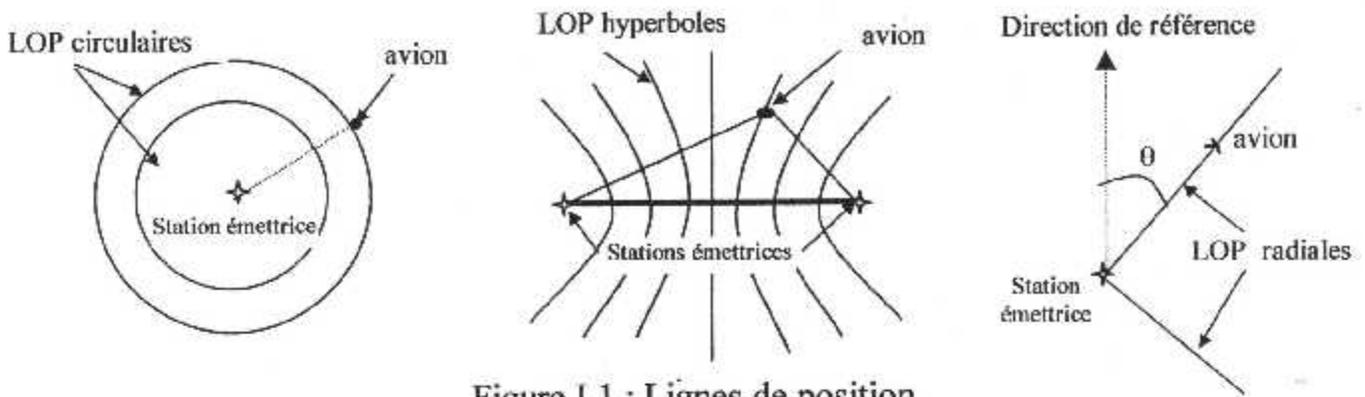


Figure I.1 : Lignes de position

Signalons qu'il existe d'autres types de classification basées par exemple sur la portée ou sur l'autonomie des systèmes.

Avant de donner le principe de fonctionnement de quelques systèmes d'aides à la navigation utiles à la compréhension de notre travail, nous présentons les définitions de certains termes de navigation qui seront utilisés dans ce mémoire.

### I.3 QUELQUES DEFINITIONS DES TERMES DE NAVIGATION

#### I.3.1 Les coordonnées géographiques

Par tout point à la surface de la terre, passe un méridien et un parallèle définissant les coordonnées du point : ce sont la latitude L et la longitude G qui se mesurent en degrés et minutes (figure I.2) :

##### ■ Latitude L

Longueur d'arc du méridien compris entre l'équateur et le point considéré. La latitude est nord si le point est dans l'hémisphère nord et sud dans le cas contraire.

##### ■ Longitude G

C'est la longueur du plus petit arc d'équateur compris entre le méridien d'origine (méridien de Greenwich) et le méridien passant par le point considéré. La longitude d'un point est soit ouest si le point est à l'ouest du méridien de référence et est dans le cas contraire.

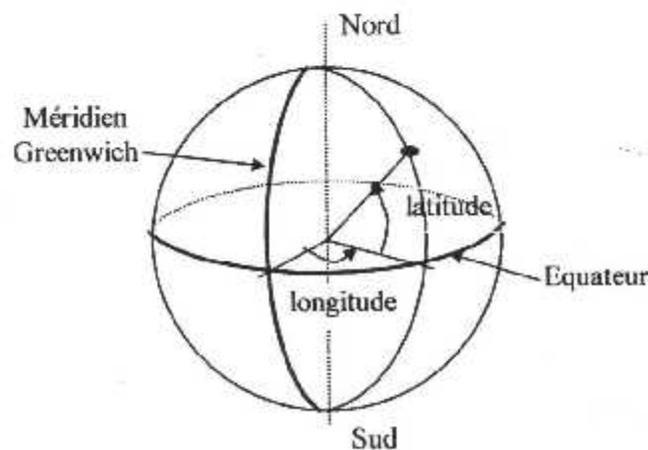


Figure I.2 : Latitude, Longitude

### I.3.2 Les directions de référence, Caps et Routes

■ **Les directions de référence** sont constituées par les directions du nord. On distingue :

- **Le nord vrai  $N_V$**  qui est la direction du pôle nord,
- **Le nord magnétique  $N_m$**  qui est la direction de la projection horizontale du champ magnétique terrestre.
- **Le nord compas  $N_c$**  qui est la direction du nord magnétique indiqué par le compas de bord.

■ **Les Caps  $C$**  sont les angles entre la direction de référence et l'axe longitudinal de l'aéronef. Si la direction de référence est le nord magnétique, on parlera de cap magnétique  $C_m$ .

Le vecteur vitesse porté par le cap est la vitesse propre de l'avion appelée aussi vitesse air  $V_a$ .

■ **Les Routes  $R$**  sont les angles de la trajectoire-sol avec la direction de référence. Route et Cap sont confondues en l'absence de vent et de dérapage. Si la direction de référence est le nord magnétique, on parlera de Route magnétique.

Le vecteur vitesse tangent à la route est la vitesse-sol  $V_s$ .

La dérive  $X$  est l'écart angulaire entre la route et le cap. En vol normal sans dérapage, la dérive est fonction du vent noté  $V_w$ . La résolution du *triangle des vitesses* permet d'évaluer la dérive si on connaît la direction et la force du vent.

La figure 1.3 récapitule ces quelques définitions.

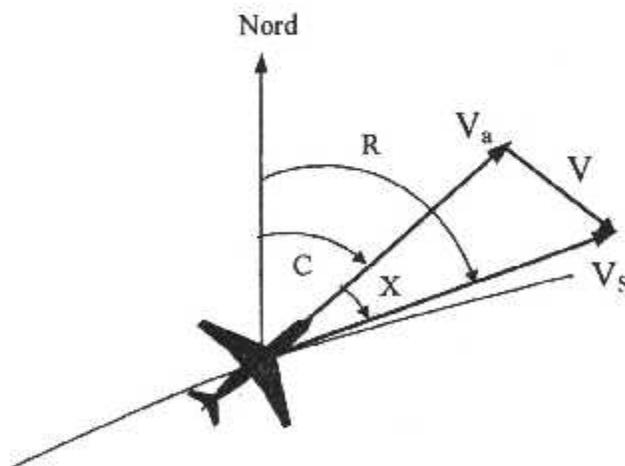


Figure I.3 : Directions relatives à l'aéronef

Les abréviations suivantes sont très utilisées :

- **QDM** : c'est la route magnétique à suivre pour se diriger sur une station, c'est aussi le relèvement de la station par l'avion,
- **QDR** : c'est la route magnétique à suivre pour s'éloigner de la station, est aussi le relèvement de l'avion par la station.

On distingue deux types de trajectoires :

- **La loxodromie** : c'est la courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant. La route suivie par un avion volant à cap compas constant peut être assimilée à une loxodromie.
- **L'orthodromie** : c'est la trajectoire supportée par un arc de grand cercle. La route orthodromique est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

### I.3.3 Mesure de distances et de vitesses

- **Le nautique mile (NM)** : la mesure de distance la plus utilisée en aéronautique est le mile marin ou nautical mile (NM) qui correspond à la longueur d'une minute d'arc de méridien soit environ 1852 mètres.
- L'aéronautique utilise le nautical mile par heure NM/h appelé knot (kt) en anglais pour mesurer les vitesses. On a  $1\text{kt}=0.54\text{Km/h}$ .

## I.4 LE SYSTEME DE NAVIGATION V.O.R/DME

### I.4.1 Le VOR (VHF Omni range)

#### ■ Définition

C'est un radiophare VHF omnidirectionnel de radionavigation à courte et moyenne distance fournissant à bord de l'avion l'information du QDR et par voie de conséquence l'information QDM qui est sensiblement égale au  $QDR\pm 180^\circ$ . Ces informations sont indépendantes du cap de l'avion (figure I.4).

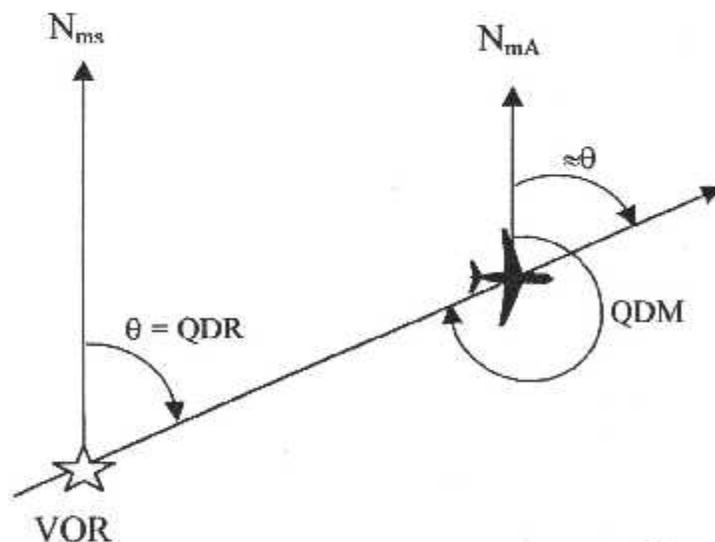


Figure I.4 : Informations délivrées par le VOR

#### ■ Principe de fonctionnement du VOR

La station VOR au sol émet une porteuse VHF dans la bande [108MHz-118MHz] modulée par deux signaux basses fréquences à 30 Hz :

- Un signal de référence, le 30Ref identique dans toutes les directions émis par un diagramme d'antenne omnidirectionnel.

- Un signal dont le déphasage par rapport au premier est égal à l'azimut de la direction d'émission appelé le 30Var généré par un diagramme d'antenne en forme de conchoïde tournant à une vitesse uniforme de 30 tours/seconde.

Le récepteur de bord reçoit ces deux signaux et mesure leur différence de phase  $\theta$ , différence égale au QDR sur lequel se trouve l'avion (figure I.5).

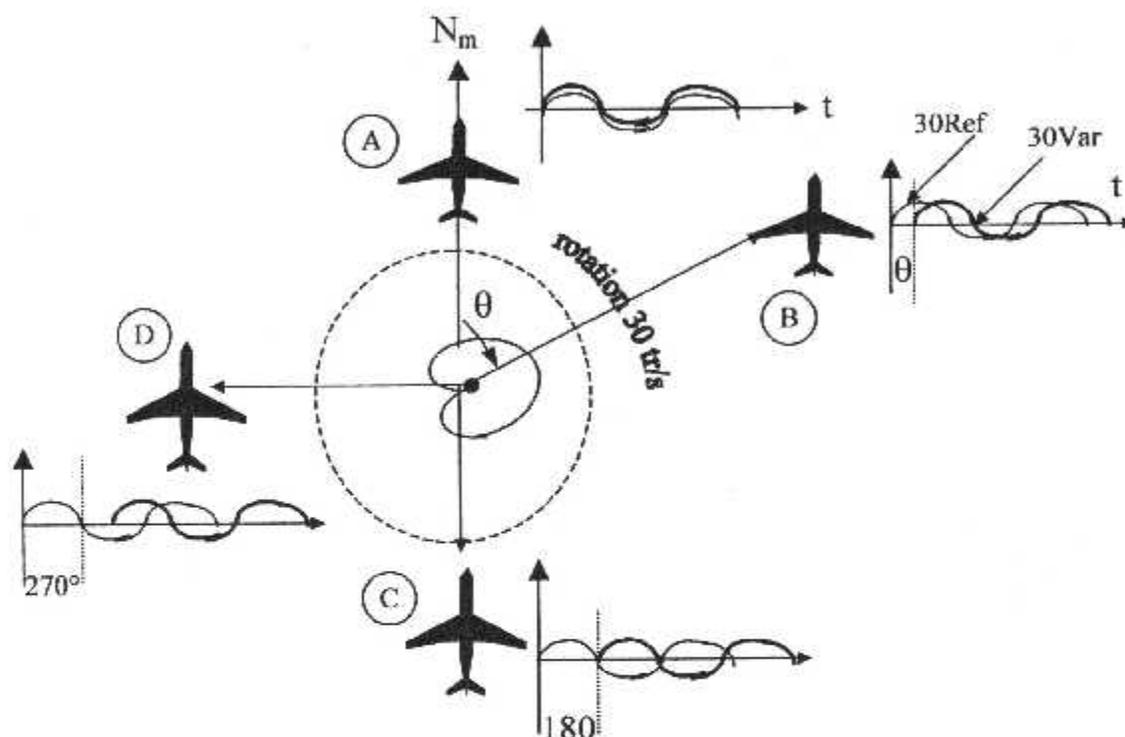


Figure I.5 : Signaux 30Var et 30Ref émis par le VOR

Les deux signaux 30Ref et 30Var sont réglés de telle façon que le maximum positif de modulation du signal de référence coïncide avec le maximum positif du signal de position au Nord magnétique de la station.

La figure I.5 illustre différentes positions relatives des signaux 30Ref et 30Var après détection par le récepteur de bord. En A, les deux signaux sont en phase, ce qui signifie que l'avion est situé sur la radiale  $0^\circ$  (QDR=0). En B, le déphasage entre les deux signaux est de  $\theta$  (QDR= $\theta$ ), etc...

La portée d'un VOR classique est limitée en général à l'horizon radioélectrique, elle peut atteindre les 200NM. Les stations VOR sont conçues pour rayonner correctement sous de faibles angles de site (entre  $0$  et  $40^\circ$ ). Par contre, pour des angles de site supérieurs à  $40^\circ$ , la station n'est plus reçue (c'est le cône de silence).

Les causes d'erreur d'un système comme le VOR sont nombreuses : erreurs dues aux réflexions sur les obstacles, erreurs du récepteur de bord, de l'émetteur. La précision d'un tel système est de l'ordre de  $2,5^\circ$ .

### ■ Présentation de l'information du VOR et utilisation

Le VOR est un indicateur de position. L'utilisation la plus courante du VOR est le balisage du plan de route ou le suivi automatique d'un radial.

Les indicateurs utilisés pour présenter les informations sont par exemple le RMI (Radio Magnetic Indicator) ou le HSI (Horizontal Situation Indicator). Sur ce dernier instrument (figure I.6), figurent le cap magnétique de l'avion, l'indication VOR comprenant le radial sélectionné par le pilote, l'indication TO-FROM et l'écart angulaire par rapport au radial sélectionné. L'indication TO signifie que l'avion est situé au voisinage de la partie du radial sélectionné allant vers la station, l'indication FROM signifie que l'avion est situé au voisinage de la partie du radial sélectionné qui part de la station.

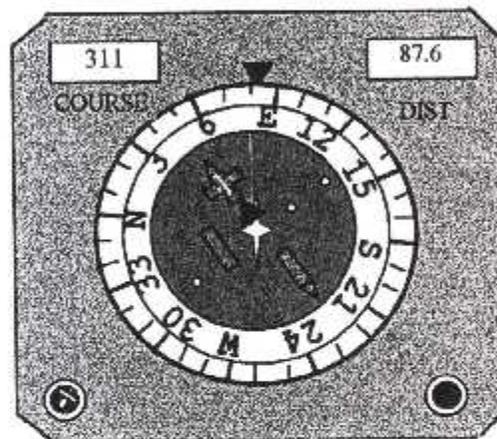


Figure I.6 : Le HSI

### 1.4.2 D.M.E (Distance Measuring Equipment)

#### ■ Définition

Le DME est un équipement comprenant une station au sol (le transpondeur) et un équipement de bord permettant de mesurer à tout instant la direction oblique entre l'avion et la station. La station DME est pratiquement toujours couplée à une station VOR (fréquences appariées selon un tableau de l'OACI).

L'information d'azimut du VOR et l'information de distance du DME constituent les coordonnées polaires de l'avion par rapport au repère dont l'origine sont les deux stations.

#### ■ Principe de fonctionnement du DME

Le principe de fonctionnement se fait par interrogations-réponses. L'émetteur de bord interroge la station sol en lui envoyant des paires d'impulsions UHF répétées *irrégulièrement* que la station sol renvoie sur une autre fréquence avec un retard fixe de 50 microsecondes.

Le récepteur de bord mesure le temps aller-retour des impulsions et en déduit la distance  $D$  par la formule suivante :  $D=c.t/2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière et  $t$  le temps aller-retour auquel on a retranché le retard fixe de  $50\mu s$ .

La figure I.7 donne un aperçu du système DME.

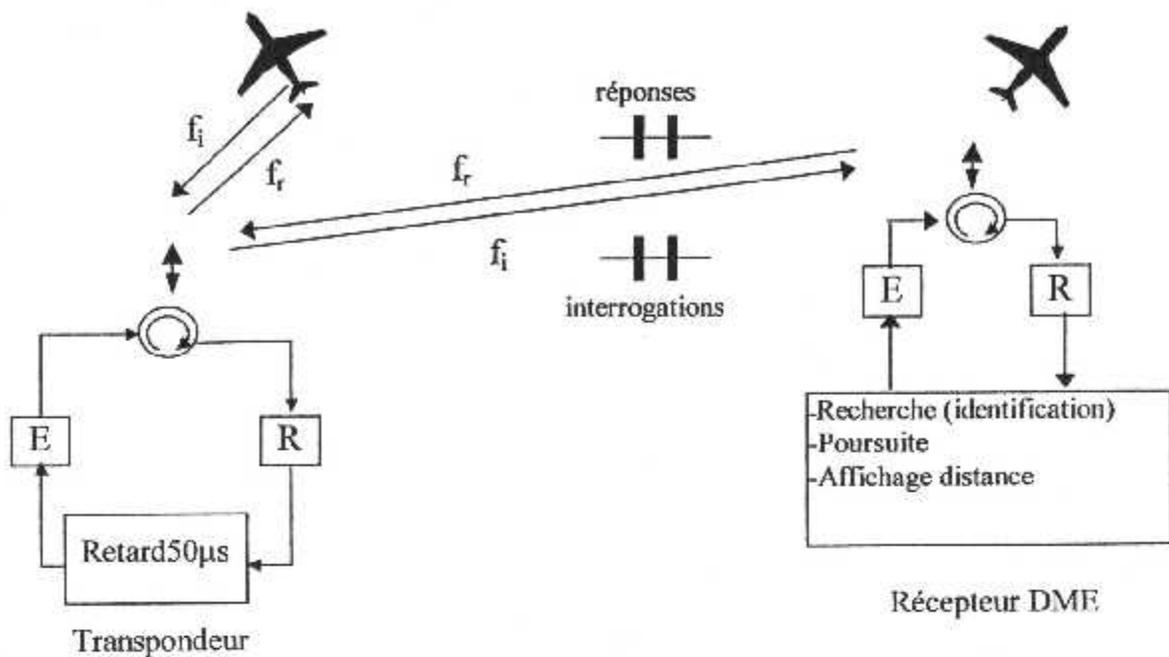


Figure I.7 : Synoptique du DME

Comme on le voit sur la figure I.7, plusieurs avions peuvent interroger simultanément la station qui renvoie les réponses dans toutes les directions : l'avion reçoit donc les réponses à ses propres interrogations, mais aussi les réponses destinées aux autres avions. L'avion doit donc en premier lieu identifier ses propres réponses, cette phase constitue la 'recherche', elle est effectuée à une cadence assez élevée (jusqu'à 150 interrogations/seconde). Cette phase étant terminée, la phase de poursuite peut commencer (cadence autour de 10 interrogations/seconde) qui consiste à suivre l'évolution de la réponse.

Dans les récepteurs modernes, la phase de recherche consiste à émettre 10 interrogations successives et à mémoriser les instants d'arrivée de toutes les réponses pour chaque récurrence. Ensuite, le récepteur cherche la réponse qui présente le même retard par rapport aux instants d'émission : cette réponse est celle destinée à l'avion.

#### ■ Les caractéristiques du DME

La capacité d'un équipement DME est conçue pour répondre à une centaine d'avions simultanément (95 en poursuite et 5 en recherche), ce qui peut être souvent insuffisant.

Les erreurs de réflexion sont faibles du fait de l'utilisation de fréquences différentes à l'émission et à la réception.

La précision courante est de l'ordre de 0,2NM, ce qui fait du DME, un système assez précis.

## 1.5 LE SYSTEME DE NAVIGATION PAR SATELLITE LE GPS

Le système NAVSTAR GPS (Navigation by Satellite Global positioning System) est un procédé de radio-positionnement mondial par satellites. La détermination de la position est basée sur la mesure de la durée du trajet de signaux émis à partir de plusieurs satellites. La couverture est mondiale pour un nombre illimité d'usages passifs (mise en œuvre de techniques de réception seulement) d'une grande précision, il est devenu un outil incontournable pour la navigation.

### 1.5.1 Positionnement par satellites

Le positionnement consiste à déterminer la position d'un point fixe ou mobile par rapport à un système de référence spécifié.

Par exemple, en navigation aérienne, l'association du VOR et du DME permet de situer l'avion dans un repère ayant pour origine les stations, le VOR fournissant le relèvement magnétique de l'avion et le DME, la distance entre l'avion et la station.

Dans le positionnement par satellites, le système de référence est le WGS84 (World Geodetic System 1984). L'origine de ce repère est le centre de la masse de la terre, son axe z est parallèle au CTP (Conventionel Terrestrial Pole), l'axe x est contenu dans le plans méridien de GREENWICH et l'axe y définit tel que le système Oxyz soit direct.

Dans ce repère, le positionnement repose sur la mesure des distances entre le mobile et plusieurs satellites. Le mobile est alors placé à l'intersection des sphères centrées sur les positions des satellites et sa position est alors définie.

Cependant dans ce système de positionnement, il faut bien connaître l'orbite des satellites, c'est pourquoi, ce système n'est pas composé seulement de satellites mais doit être complété par un ensemble de stations de référence dont les observations servent aux calculs de l'orbite. Cette orbite est alors diffusée aux utilisateurs.

### 1.5.2 Description générale du système GPS

A l'instar de tous les systèmes spatiaux de localisation, le GPS se compose de trois entités distinctes :

- **Le segment spatial**

Ce segment constitue l'ensemble de 24 satellites. Chaque satellite émet deux porteuses modulées par des informations permettant d'identifier le satellite et de calculer sa position exacte sur son orbite ainsi que des signaux (codes) destinés à la mesure très précise des temps de parcours des ondes entre le satellite et l'utilisateur.

- **Le segment de contrôle**

Ce segment a pour fonction la gestion, la surveillance et la maintenance des 24 satellites. Il est constitué par une station maîtresse et d'un certain nombre de stations émettrices et de stations réceptrices.

• **Le segment utilisateur**

Ce segment comprend l'ensemble des utilisateurs possédant un récepteur GPS.

La figure I.8 montre les échanges d'informations entre ces différents segments.

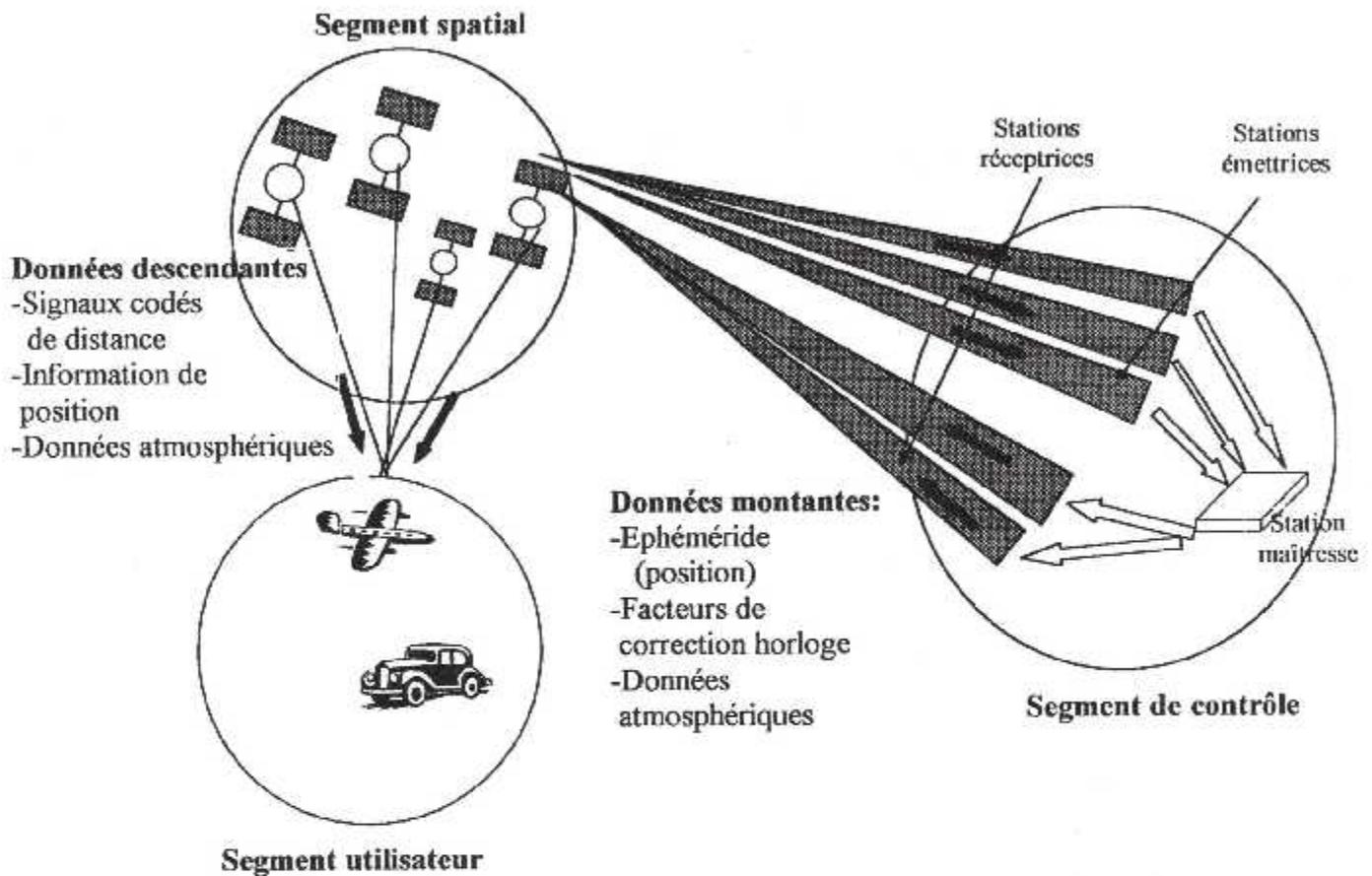


Figure I.8 : Structure du système GPS

**I.5.3 Principe de la mesure de la position**

Dans le système GPS, on trouve 21 satellites plus trois de secours tournant sur 6 plans d'orbites circulaires inclinées de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur et décalées de  $60^\circ$  entre elles. Ils sont placés à 20200km d'altitude avec une période de révolution de 12 heures

Le principe de mesure se base sur une mesure de l'écart 't' de temps entre l'instant d'émission du signal GPS par le satellite et la réception de celui-ci par l'utilisateur.

En faisant cette mesure simultanément sur trois satellites la position de l'utilisateur se trouve à l'intersection des trois sphères centrées sur le satellites.

Pour compenser l'erreur d'horloge  $\Delta T$  de l'utilisateur par rapport à l'horloge du satellite, on utilise la mesure sur 4 satellites. On obtient ainsi 4 équations à 4 inconnues.

$$\sqrt{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2)} + c \Delta T = c t_i \quad i=1 \text{ à } 4$$

$(x_i, y_i, z_i)$  sont les coordonnées du  $i^{\text{ème}}$  satellite,

$(x, y, z)$  les coordonnées de l'utilisateur qu'on cherche à déterminer.

Le GPS est un excellent système de positionnement: la position géographique (latitude et longitude) et l'altitude sont connues avec une erreur inférieure à 100 mètres, la vitesse à 0,2 mètre/seconde près. Les militaires disposent d'informations 10 fois plus précises.

C'est un système de navigation reconnu officiellement par l'OACI malgré un certain nombre d'inconvénients : fiabilité insuffisante (trous dans la couverture mondiale), manque d'intégrité (pannes éventuelles des satellites), système géré par les américains.

### 1.6 LE SYSTEME DE NAVIGATION DOPPLER

Le système de navigation Doppler est un système classé dans la catégorie des systèmes de navigation à l'estime : il mesure la composante horizontale de la vitesse-sol de l'aéronef qui est calculée par effet Doppler sur des signaux radio réfléchis par le sol.

#### 1.6.1 Principe de fonctionnement

L'aéronef émet vers le sol à  $60^\circ$  d'inclinaison environ, un faisceau d'ondes électromagnétiques à une fréquence  $f$  autour de 10GHz. Les ondes réfléchies par le sol (figure I.9) vers l'aéronef sont reçues avec un décalage de fréquence  $\Delta f$  par rapport à la fréquence  $f$  d'émission. Ce décalage de fréquence est proportionnel à la vitesse sol  $V_s$  de l'aéronef :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2V_s \times \cos\Phi}{c}$$

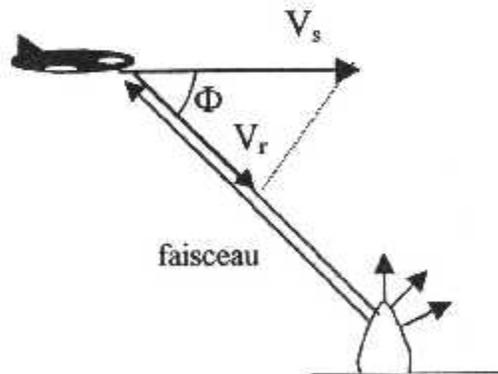


Figure I.9: Principe du radar doppler

En général, on utilise 4 faisceaux (dispositif Janus) (figure I.10)

- 2 faisceaux avant symétriques,
- 2 faisceaux arrière également symétriques.

Ce dispositif permet de tenir compte, par le calcul, des variations d'assiette au cours de vol et d'améliorer la précision par combinaison des mesures sur les 4 faisceaux.

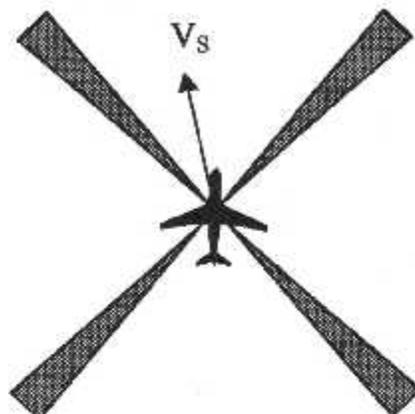


Figure I.10 : Dispositif JANUS

L'indicateur de bord du système de navigation Doppler fournit à l'équipage la vitesse-sol, la dérive, de plus le système est généralement couplé à un calculateur de navigation qui donne continûment la position.

La précision est de l'ordre de 0.3 % sur la vitesse-sol.

Le système présente l'avantage d'être autonome et relativement précis, mais sa complexité le rend difficile à mettre en œuvre.

De plus, le calcul de la position à partir de la seule information de vitesse engendre inévitablement une erreur de position croissante avec le temps.

## I.7 LA NAVIGATION INERTIELLE

### I.7.1 Introduction

Le système de navigation inertiel ou INS (Inertial Navigation System) est un système de navigation véritablement autonome de la catégorie des systèmes à l'estime capable de fournir vitesse et position de façon continue. Il peut être utilisé dans n'importe quel milieu : terre, océans, espace. En aéronautique, il est devenu l'équipement de base pour la navigation long-courrier mais nécessite cependant un recalage régulier par les aides radio comme le VOR/DME à cause des erreurs proportionnelles au temps de vol.

### I.7.2 Principe de relativité d'Einstein Galilée

Nous consacrons ce paragraphe à la notion fondamentale de force spécifique, à la base des techniques inertielles.

Soit  $R$ , un repère inertiel matérialisé par trois directions stellaires (figure I.11) et une cabine en mouvement dans le champ de gravitation  $\Phi$  de l'ensemble des masses de l'univers (seules les plus proches comptent).

La cabine est soumise à un ensemble de forces, y compris la gravitation  $\Phi$  qui lui procurent une accélération absolue  $\gamma$ .

On appellera force spécifique  $A$  (notée aussi  $f$ ) ou accélération statique ou encore accélération non-gravitationnelle le vecteur :

$$\vec{f} = \vec{\gamma} - \vec{\Phi}$$

#### Question posée par Einstein :

Imaginons le véhicule totalement coupé du monde extérieur en ce qui concerne :

- Les télécommunications ;
  - Les émissions d'onde de toute sorte ( électromagnétiques, acoustique etc....); donc ne pouvant rien émettre ni rien recevoir, mais :
  - Autonome en énergie;
  - Pouvant emporter tout type de connaissances (disques, livres, CDROM, mémoire informatique, ...);
  - Pouvant utiliser tous moyens de calculs imaginables;
  - Disposant de moyens expérimentaux de tout type, mais autonomes.
- Que peut-on connaître du mouvement de ce véhicule ?

#### Réponse :

"Principe de relativité de Galilée-Einstein"

Il est possible de mesurer à bord du véhicule deux vecteurs :

- le vecteur rotation instantanée  $\Omega$  du véhicule par rapport au référentiel absolu,
- le vecteur force spécifique  $A$  et rien d'autre.

#### Conséquences de ce principe

Ce principe montre notamment lors de missions spatiales et pour des vols balistiques, sous la seule action du champ de gravitation, que l'on est incapable de mesurer quoi que ce soit de ce champ.

En clair que vous soyez en orbite autour de la Terre, de Mars, du Soleil etc... rien ne permet de "voir" la différence.

Un appareil permettant de mesurer une ou plusieurs composantes de l'accélération non gravitationnelle  $A$  s'appelle *accéléromètre*.

Un appareil permettant de détecter et de mesurer la rotation d'un véhicule s'appelle un *gyroscope*.

Ces deux éléments accéléromètre et gyroscope constituent les éléments principaux d'un système inertiel.

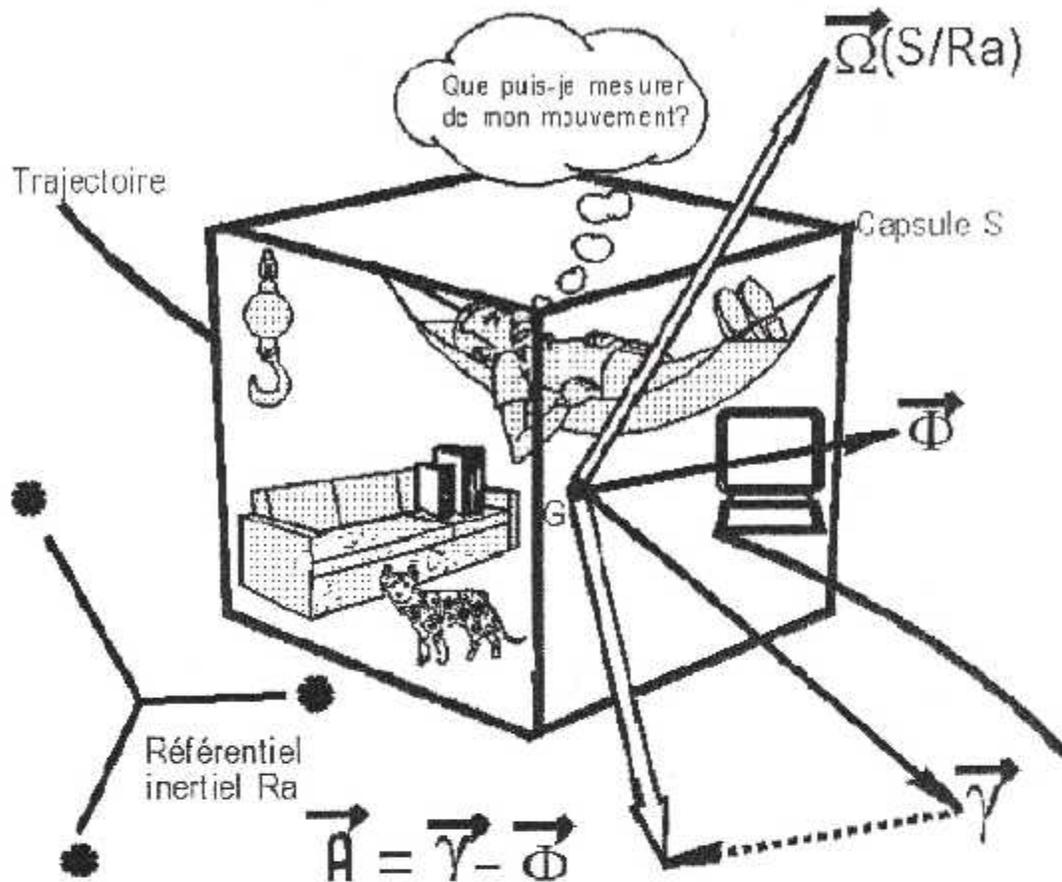


Figure I.11 : Le principe de Einstein

### I.7.3 Le principe de la technique inertielle

Un navigateur inertielle est capable de mesurer  $\Omega$  et  $A$  :

- La rotation  $\Omega$  permet de connaître l'orientation du véhicule
- L'accélération  $A$  permet de calculer l'accélération absolue  $\gamma_a$  en tenant compte du champ de gravitation  $\Phi$ , puis de calculer l'accélération relative  $\gamma_r$  par rapport à un repère de référence ; une première intégration donne la vitesse relative  $V_r$  et une seconde intégration la position  $P$  du véhicule dans le repère de référence. Ce processus nécessite la connaissance de la vitesse et la position initiales ainsi que le champ de gravitation  $\Phi$  :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{A} + \hat{\Phi}(P) \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{\gamma}_a dt \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \int_0^t \vec{V} dt$$

**Remarque :** l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est définie par  $\vec{g} = \vec{\Phi} - \vec{\gamma}_e$ ,  $\gamma_e$  étant l'accélération d'entraînement.

La direction de la verticale est celle du vecteur  $\vec{g}$  (figure I.12).

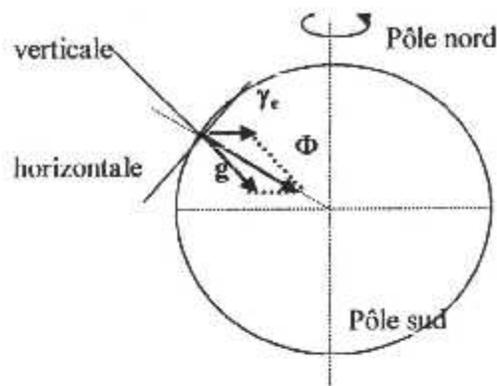


Figure I.12 : Champ de gravitation terrestre

**Comparaison de l'inertiel avec les autres procédés de navigation :**

- autonomie totale : il n'est pas tributaire d'une infrastructure extérieure au véhicule ,
- discrétion : pas de rayonnement électromagnétique (indétectable)
- insensibilité aux conditions ambiantes : telles que les phénomènes météorologiques, les contre-mesures (pas de risque de brouillage).

Afin de mesurer l'accélération spécifique  $f$  et la rotation  $\Omega$  du véhicule on fixe sur un même bâti des accéléromètres et des gyroscopes. Cet ensemble s'appelle plateforme inertielle (le cœur) (figure I.13)

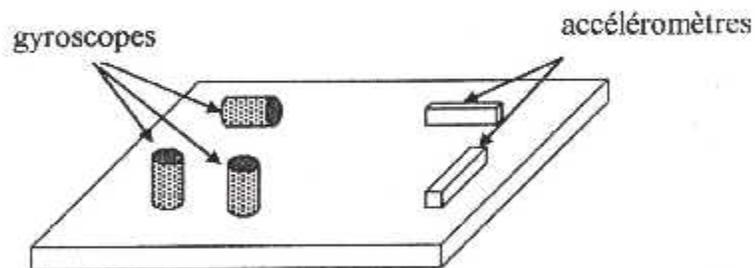


Figure I.13 : Plateforme inertielle

Deux types de solutions sont possibles :

**1.7.4 La solution de type lié ou « strapdown » (figure I.14)**

Les accéléromètres sont ici directement fixés sur le véhicule et on mesure la force spécifique dans un système d'axes lié a ce véhicule. Pour connaître a chaque instant l'orientation de ce système d'axes par rapport à un trièdre de calcul, il faut fixer sur le véhicule des gyroscopes capables de mesurer les rotations de leur support. Ce type de solution est encore au stade expérimental et exige des progrès dans la technologie des gyroscopes, ainsi que dans le domaine des calculateurs auxquels on demande de grandes rapidités de calcul (nécessité d'une fréquence de récurrence élevée due aux variations angulaires rapides de trièdre de mesure).

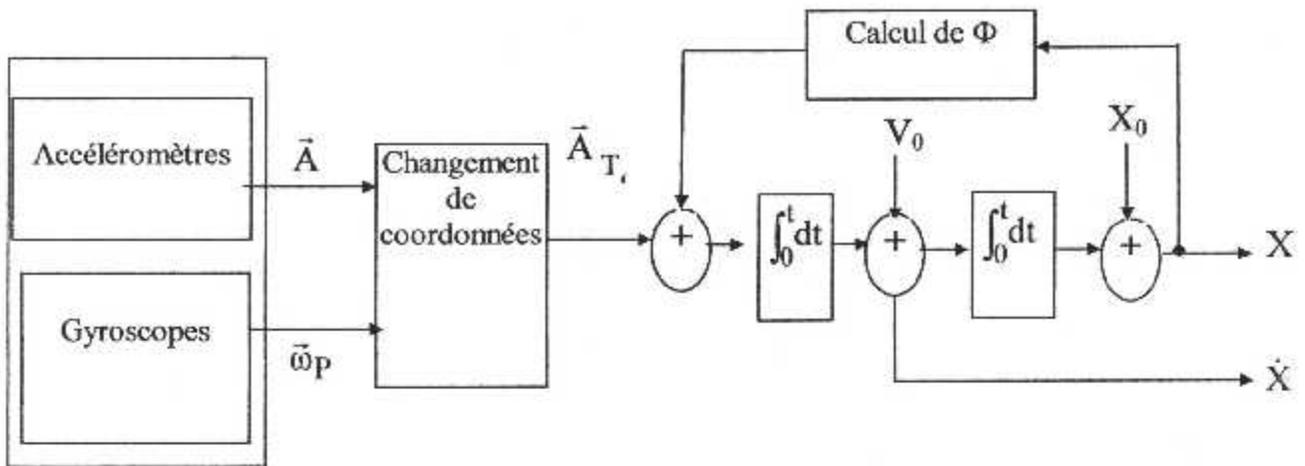


Figure I.14: La solution de type lié ou « strapdown »

**I.7.5 La solution avec plateforme stabilisée (figure I.15)**

Les accéléromètres sont alors montés sur un support isolé des mouvements angulaires de l'avion. Ce support, appelé cœur, est suspendu « à la cardan » et possède une liberté angulaire totale par rapport à l'avion.

Des gyroscopes, senseur de rotation par rapport à l'« espace inertiel », sont montés sur le cœur. Ils permettent de détecter toute rotation de leur support ( qui est aussi celui des accéléromètres). Leur signaux sont utilisés pour déclencher l'action corrective qui rétablit l'orientation adéquate du cœur de la plateforme.

La plateforme stabilisée par gyroscopes (ou « asservie sur gyroscopes ») est ainsi le senseur inertiel qui permet la mesure des forces spécifiques, en grandeur et direction. Tous les systèmes inertiels « industriels » ont jusqu'ici mis en œuvre des plateformes stabilisées par gyroscopes.

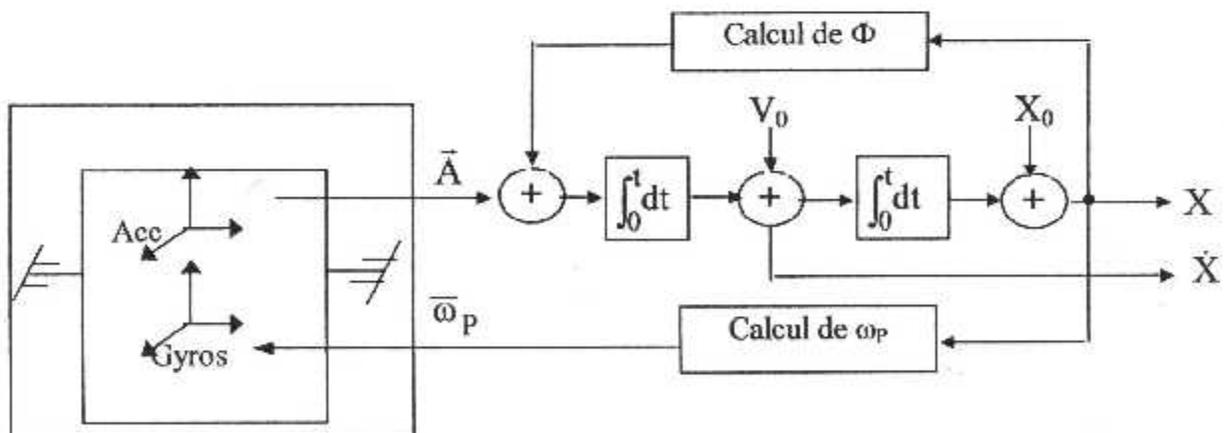


Figure I.15 : La solution avec plateforme stabilisée

## I.8 TRIEDRES UTILISES EN NAVIGATION INERTIELLE

Différents repères sont utilisés en navigation inertielle en fonction de l'application envisagée (missile, satellite, avion ...). Nous donnons trois exemples.

### I.8.1 Trièdre absolu

Le trièdre absolu  $(x_a, y_a, z_a)$  utilisé en navigation inertielle est le référentiel terrestre qui est constitué de la façon suivante :

- Origine : le centre de gravité de la terre,
- Trois axes orthogonaux dirigés vers trois directions fixes (l'un des axes passant par les pôles).

c'est dans ce repère absolu qu'est applicable la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{\gamma}_a \quad (\gamma_a \text{ l'accélération absolue})$$

### I.8.2 Le trièdre terrestre

C'est un repère  $(x_t, y_t, z_t)$  lié à la terre défini par :

- Origine : le centre de gravité de la terre,
- Axe Oz confondu avec l'axe des pôles, le plan Oxz est le plan méridien de Greenwich.

### I.8.3 Trièdre de référence d'attitude

C'est un repère  $(e, n, v)$  géographique local encore dit repère vrai Il est défini de la façon suivante :

- Origine : point situé à la surface terrestre,
- Trois axes orthogonaux dirigés respectivement vers le nord vrai, l'est et la verticale locale.

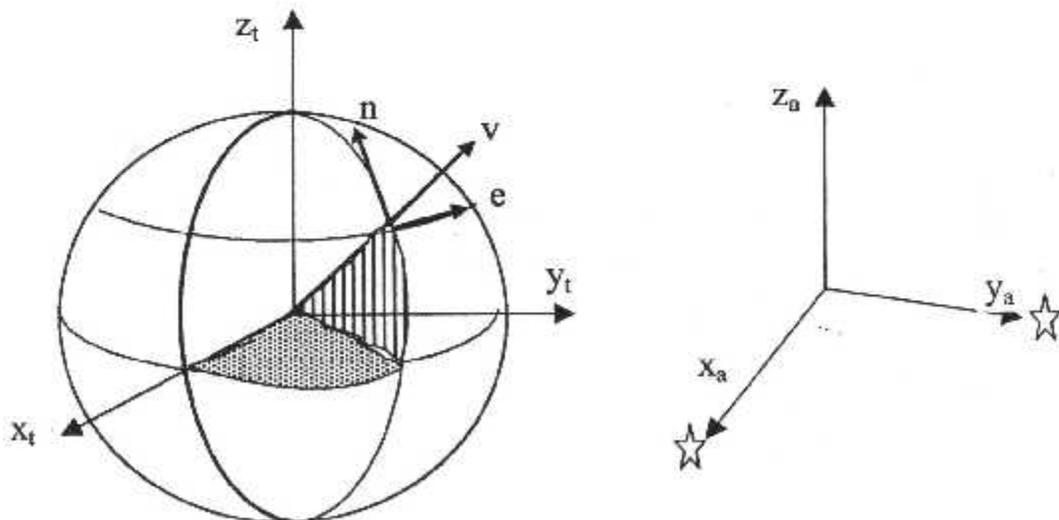


Figure I.16 : Trièdres absolu et de référence d'attitude.

## Chapitre III

Les gyroscopes et les accéléromètres

## II.1 INTRODUCTION

Le gyroscope est un corps solide à la forme d'un disque (ou volant) symétrique par rapport à un axe de rotation rapide (figure II-1). Ce volant est construit de manière à pouvoir tourner avec un frottement minimum ; il fut proposé en 1852 par le savant Foucault qui avait donné un nom grec à cet appareil dont le sens est le suivant :

gyro = rotation.

skopeco = observer.

Le gyroscope fournit une direction de référence car il possède les deux propriétés suivantes :

- L'inertie gyroscopique, où stabilité dans l'espace.
- La précession, inclinaison de l'axe de rotation .

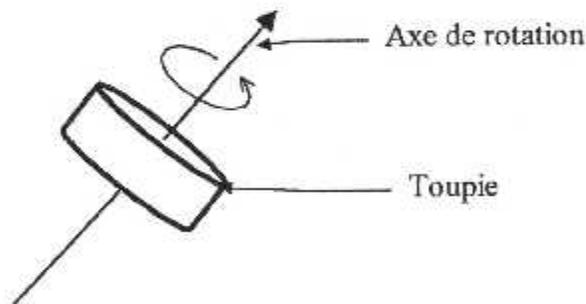


Figure II.1 : Toupie en rotation

Un demi siècle plus tard c'est à dire au début XX<sup>ième</sup> siècle, le gyroscope appliqué pour déterminer les angles et les vitesses angulaires des inclinaisons des objectifs mobiles, tout d'abord des navires puis des aéronefs.

## II.2 MODES DE SUSPENSION DES GYROSCOPES

Le mode de suspension le plus communément utilisé est dit mode à la cardan. Les anneaux de cardan ont pour rôle de supporter la toupie et les accessoires éventuels des gyroscopes sans ajouter des couples perturbateurs.

Il y a deux types d'utilisation :

### ■ Le gyroscope à 1 degré de liberté

Le gyroscope 1 axe, où à 1 degré de liberté (figure II.2), comporte essentiellement une toupie tournant autour de son axe  $\vec{Z}$  dans un anneau de cardan. Cet anneau peut pivoter autour de l'axe  $\vec{X}$ .

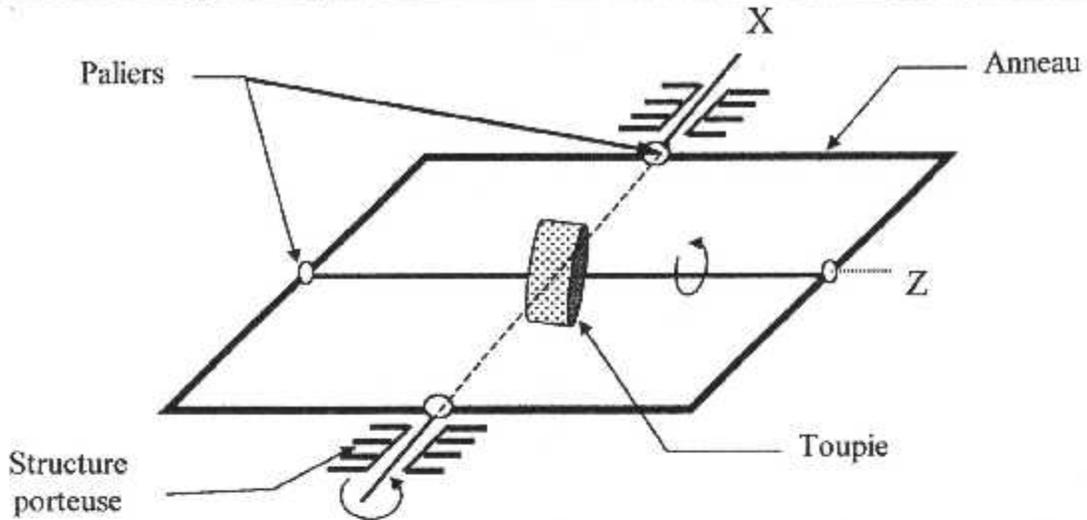


Figure II.2 : Principe du gyroscope à 1 degré de liberté

■ Le gyroscope à 2 degrés de liberté

Comme le gyroscope à un degré de liberté, le gyroscope à deux degrés de liberté (figure II.3) possède :

- Une suspension (anneau de cardan interne  $S_2$ ) dont le rôle est de supporter la toupie. La toupie peut pivoter avec l'anneau interne ( $1^{er}$  degré de liberté) autour de l'axe X.
- Une seconde suspension (anneau de cardan externe  $S_1$ ) tourne autour de l'axe Y ( $2^{ème}$  degré de liberté).

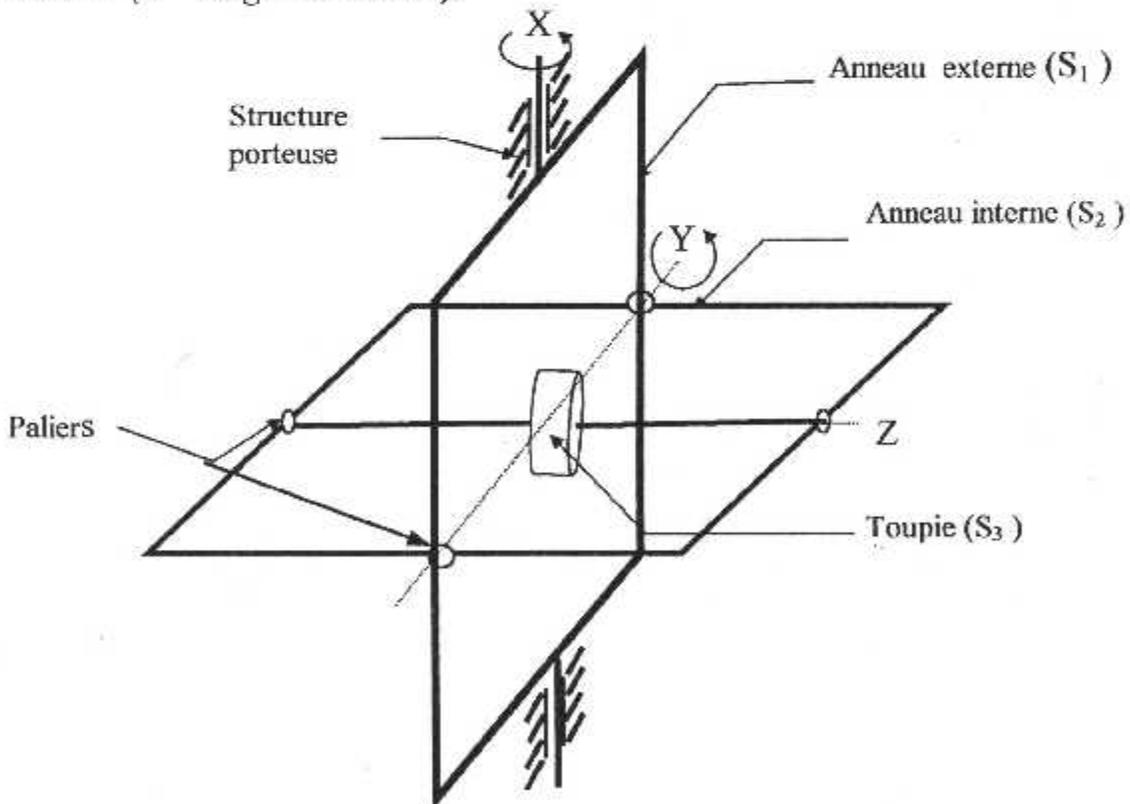


Figure II.3 : Principe du gyroscope à 2 degrés de liberté

### II.3 EQUATIONS DE LA GYROSCOPIE

#### ■ Moment cinétique

On appelle moment cinétique  $\vec{H}$  d'un solide  $S$  de masse  $m$  tournant autour d'un point fixe  $O$ , vis à vis d'un trièdre absolu  $R_a$ , la somme des moments de quantités de mouvement des particules composant le solide  $S$  :

$$\vec{H} = \sum_S O \vec{M} \times m \left[ \frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{R_a}$$

#### ■ Théorème du moment cinétique

La vitesse absolue de  $\vec{H}$  s'écrit :

$$\left[ \frac{d\vec{H}}{dt} \right]_{R_a} = \sum_S \left[ \frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{R_a} \times m \left[ \frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{R_a}^2 + \sum_S O \vec{M} \times m \left[ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right]_{R_a}$$

La force résultante  $\vec{F}(M)$  appliqué au point  $M$  est formée des composantes  $\vec{F}_{ext}$ , d'origine extérieure à  $S$  et des forces de liaison interne à  $S$  formée des composantes  $\vec{F}_{int}$ . Nous admettons que les forces de liaison ont une résultante nulle; donc on a :

$$\left[ \frac{d\vec{H}}{dt} \right]_{R_a} = \sum_S O \vec{M} \times \vec{F}_{ext}(M) + \underset{\text{moment des forces extérieures } S}{M_O^t \vec{F}_{ext}}$$

vitesse absolue de  $\vec{H}$

D'où le résultat suivant :

*La vitesse du moment cinétique  $\vec{H}$  d'un système matériel par rapport à un point fixe  $O$  est égal au moment des forces extérieures appliquées au système.*

#### II.3.1 Le couple gyroscopique

Nous utilisons la notion de système avec gyroscope calé, bloqué sur son carter. Il s'agira du système globale  $S_2+S_3$ , dans lequel le gyroscope ne tourne pas par rapport à  $S_3$ . autant dire, à paliers soudés.

Appliquons le théorème du moment cinétique au centre de gravité  $G$  du gyroscope, en remarquant que le vecteur de rotation de la toupie est constant dans le repère absolu  $R_a$  (figure II.4) avec :

$$\vec{\Omega}(S_2/R_a) = \vec{\Omega}_C : \quad \text{vecteur rotation absolue de } S_2.$$

$$\vec{\Omega}(S_3/S_2) = \vec{\Omega}_g = r \cdot \vec{Z} : \quad \text{vecteur rotation de } S_3/\text{carter}.$$

$$\omega : \quad \text{rotation transversale absolue.}$$

$$C : \quad \text{inertie axiale de la toupie.}$$

$$H^* : \quad \text{moment cinétique de } S_2+S_3 = S^*, S_3 \text{ calé sur } S_2.$$

on a :

$$\vec{H}_G(S_2+S_3) = \vec{H}_G^*(S_2+S_3) + C r \vec{Z}$$

La dérivée de cette expression donne :

$$\left[ \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right]_{Ra} = \left[ \frac{d\vec{H}_G^*}{dt} + \frac{d}{dt} C r \vec{Z} \right]_{Ra} = \vec{M}_G(F_{ext}), \text{ soit :}$$

$$\left[ \frac{d\vec{H}_G^*}{dt} \right]_{Ra} + \vec{\Omega}_C \times C r \vec{Z} = \vec{M}_G(F_{ext})$$

d'où :

$$\left[ \frac{d\vec{H}_G^*}{dt}(S_2+S_3) \right]_{Ra} = \vec{M}_G(F_{ext}) + C \vec{\Omega}_g \times \vec{\Omega}_C$$

Par définition, on pose un nouveau vecteur appelé couple gyroscopique :

$$\vec{C}_g = C \vec{\Omega}_g \times \vec{\Omega}_C$$

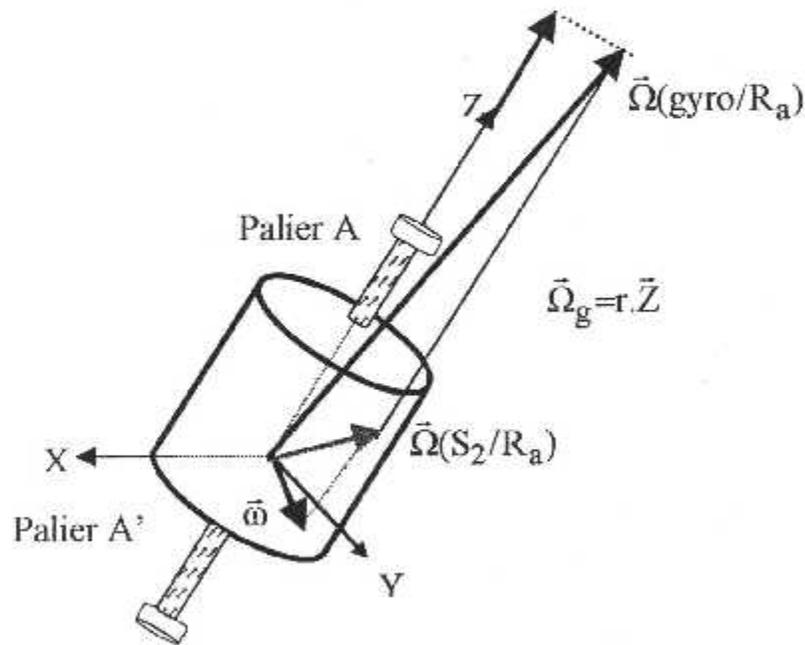


Figure II.4 : Le couple gyroscopique

D'où le résultat devant :

En présence d'un gyroscope, on peut considérer ce gyroscope comme bloqué sur son carter (rotation oubliée), à condition de rajouter au moment des forces extérieures un moment supplémentaire, le couple gyroscopique compensant les effets de la rotation oubliée :

$$\vec{M}_G(F_{ext}/S_2+S_3) = \vec{M}_G^*(F_{ext}/S_2+S_3) + C \vec{\Omega}_g \times \vec{\Omega}_C$$

### II.3.2 Gyroscopie à un degré de liberté

Un gyroscope à un degré de liberté (figure II.5) comporte essentiellement :

- L'anneau de cardan  $S_2$  (carter) relié à un boîtier B par un axe de cardan X appelé axe de sortie ; cet axe peut être matérialisé par des roulements à billes de haute qualité.
- La toupie  $S_3$  tournante reliée au carter par un axe Z appelé axe de spin, perpendiculaire à X ; cet axe peut être matérialisé par des roulements à billes à haute fiabilité.
- Un boîtier B.
- Un moteur couple et un détecteur d'écart agissant sur l'équipage mobile (carter+toupie), autour de X.

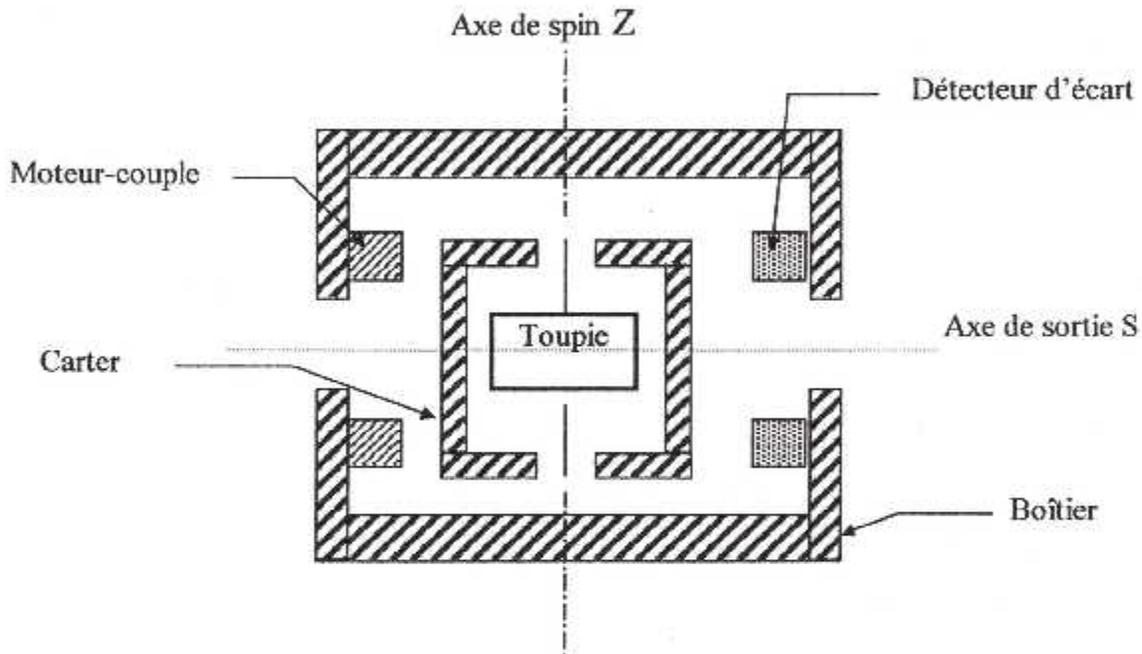


Figure II.5 : Le gyroscope à un degré de liberté

Le gyroscope contient en général un liquide visqueux entre le boîtier et le carter de coefficient de frottement  $f$  et de moment de rappel  $K$ .

Si  $I$  désigne le moment d'inertie de  $S_2$  autour de X,  $\theta_e$  l'angle de rotation autour de l'axe d'entrée et  $\theta_s$  l'angle de rotation autour de l'axe de sortie,

nous aurons par application du théorème du moment cinétique et projection sur l'axe X, pour éliminer le moment des efforts de liaison des paliers, l'équation suivante :

$$I(\ddot{\theta}_s) = -f.\dot{\theta}_s - K.\theta_s + (C.\vec{\Omega}_g \times \vec{\Omega}(S_2/Ra)).\vec{X}$$

avec  $\vec{C}_g = \vec{H} \times \dot{\theta}_e$

donc

$$I.\ddot{\theta}_s + f.\dot{\theta}_s + K.\theta_s = -\vec{H}.\dot{\theta}_e$$

II. 1

■ Le gyroscope intégrateur 1 axe

Un gyroscope intégrateur est un capteur électromécanique (figure II.6) dont le carter  $S_2$  possède un degré de liberté en rotation (autour de l'axe X de sortie), par rapport à un boîtier dont on veut mesurer l'angle de rotation autour d'un axe dit d'entrée Y.

En pratique le gyroscope intégrateur baigne dans un liquide très visqueux, à une température de l'ordre de 60 à 80°C, dont le rôle est double :

- La viscosité importante sert d'amortissement
- La densité est telle que ce liquide de flottaison donne une poussée d'Archimède qui équilibre le poids apparent. Ce qui réduit les efforts d'appui sur les paliers et donc les couples de frottement.

Nous pouvons donc parfaitement utiliser le résultat lorsqu'un gyroscope reçoit un moment, il réagit de manière à créer un couple gyroscopique qui annule ce moment :

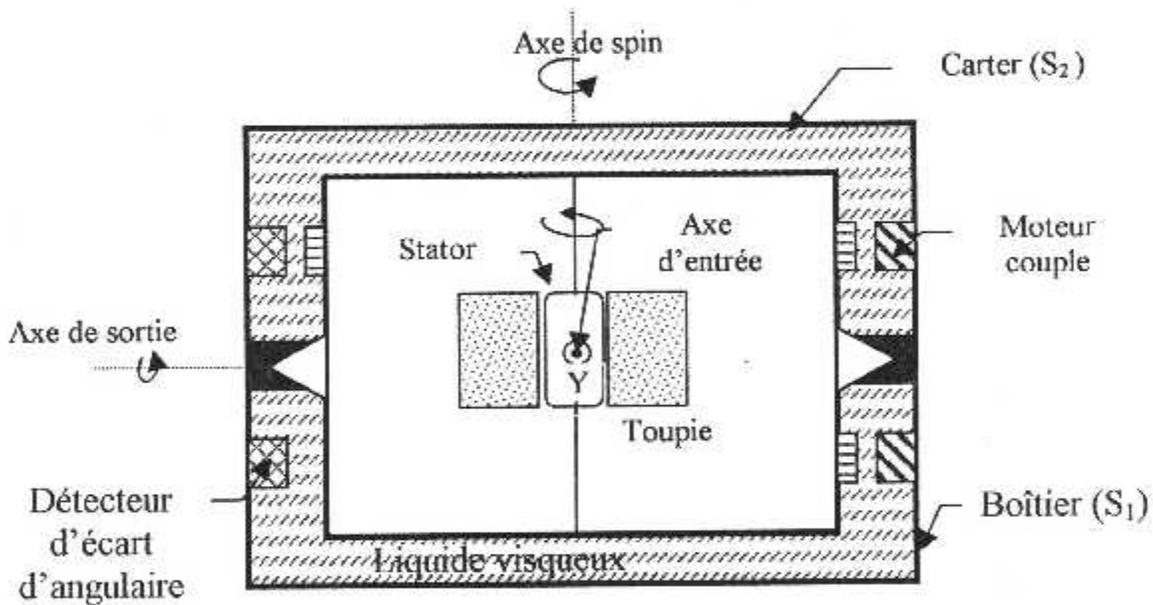


Figure II.6 : Le gyroscope intégrateur 1 axe

L'amortissement  $f$  est choisi très fort et le rappel élastique  $K$  nul dans l'équation générale II.1, ce qui donne :

$$I.\ddot{\theta}_s + f.\dot{\theta}_s \cong -\bar{H}.\dot{\theta}_e$$

Le passage en transformée de Laplace conduit à :

$$\left. \begin{array}{l} \tau = I/f \\ G = -H/f \\ \theta_e = \int_0^t \dot{\theta}_e dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{G}{1 + \tau.p}$$

Lorsque le système est stabilisé, il vient la relation caractéristique du capteur:

$$\theta_S = G \cdot \dot{\theta}_e = -H/f$$

Cette relation permet de considérer le gyroscope intégrateur comme un capteur d'angle .

Les gyromètres intégrateurs appelés aussi gyroscopes flottants sont utilisés principalement comme asservissement de plateforme.

■ **Le gyromètre**

Un gyromètre est un appareil comme un gyroscope intégrateur destiné à mesurer les vitesses angulaires autour de son axe d'entrée .Il comporte un carter mobile autour d'un axe de sortie avec en plus un dispositif générant un couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire :

L'amortissement K est choisi très fort et le rappel élastique f nul dans l'équation II.1, ce qui donne :

$$I \ddot{\theta}_S + K \theta_S = -H \dot{\theta}_e$$

par la transformée de Laplace on a :

$$\left. \begin{array}{l} \tau = f/K \\ G = -H/K \\ \varepsilon = \frac{I}{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\theta_S(p)}{\dot{\theta}_e(p)} = \frac{G}{(1 + \tau \cdot p + \varepsilon \cdot p^2)}$$

On suppose maintenant une raideur K du couple de rappel très grande tel que  $\varepsilon$  très inférieur à 1, on obtient:

$$\theta_S = G \cdot \dot{\theta}_e = - \frac{C \cdot r_{\theta}}{K} \cdot \dot{\theta}_e$$

relation qui caractérise un gyromètre, appareil de mesure où l'angle de sortie est proportionnel à la vitesse angulaire d'entrée.

Les gyromètres sont utilisés par exemple comme instruments de mesure des vitesses de roulis et de tangage dans un avion.

**II.3.3 Gyroscope à deux degré de liberté**

Le gyroscope à deux degrés de liberté (figure II.7) comprend essentiellement :

- un carter S<sub>1</sub> mobile suivant l'angle  $\psi$  par rapport à S<sub>0</sub> par une articulation.
- un carter S<sub>2</sub> mobile suivant l'angle  $\theta$  par rapport à S<sub>1</sub> par une articulation.

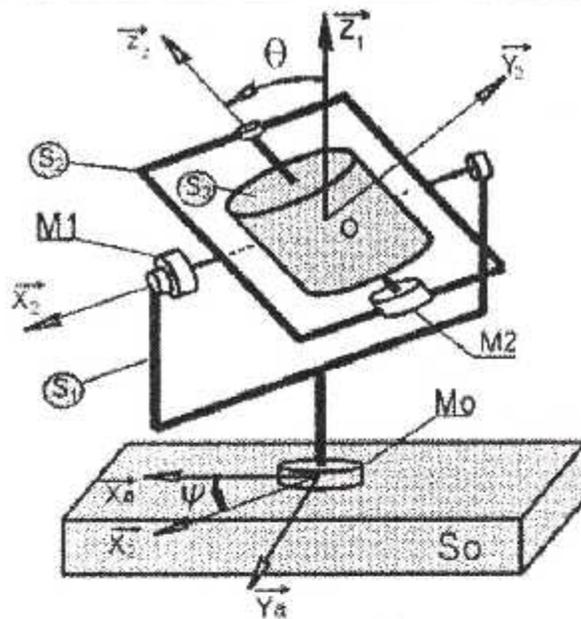


Figure II.7 : Le gyroscope à 2 degrés de liberté

Les carters sont donc munis de capteurs angulaires et de capteurs de vitesse angulaire (par exemple génératrice tachymétrique). Ces capteurs, reliés à une électronique adaptée, génèrent des ordres de commande des moteurs  $M_0$  agissant sur l'axe  $Z_1$  de  $S_1$  et  $M_1$  agissant sur l'axe  $X_2$  de  $S_2$ . Le moteur  $M_2$ , quant à lui contrôle la constance de la rotation toupie, à un niveau très élevé.

Nous appliquons deux fois le théorème du moment cinétique dans le système  $S_1+S_2+S_3$  en  $O$ , la projection sera sur l'axe fixe  $Z_1$ .

Nous aurons donc :

$$\vec{H}_0(S_1+S_2+S_3) \cong \vec{H}_0(S_2+S_3) \cong \vec{H}_0(S_3) \cong C \cdot \omega_0 \cdot \vec{Z}_2 = H \cdot \vec{Z}_2$$

et en dérivant dans le repère absolu, plusieurs formulations possibles:

$$\left[ \frac{d\vec{H}_0(S_1+S_2+S_3)}{dt} \right]_{Ra} \cong \left[ \frac{d\vec{H}_0(S_2+S_3)}{dt} \right]_{Ra} \cong \left[ \frac{d\vec{H}_0(S_3)}{dt} \right]_{Ra} \cong H \left[ \frac{d\vec{Z}_2}{dt} \right]_{Ra}$$

$$= H \left\{ \left[ \frac{d\vec{Z}_2}{dt} \right]_{S_2} + \vec{\Omega}_C(S_2/Ra) \times \vec{Z}_2 \right\} = H \cdot \vec{\Omega}_C \times \vec{Z}_2 = \vec{\Omega}_C \times H \cdot \vec{Z}_2 = -\vec{C}_g$$

$$= H \left( \psi \cdot \vec{Z}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{X}_2 \right) \times \vec{Z}_2 = H \left[ \psi \cdot \sin \theta \cdot \vec{X}_2 - \dot{\theta} \cdot \vec{Y}_2 \right] = H \cdot \psi \cdot \sin \theta \cdot \vec{X}_2 - H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{Y}_2$$

La projection sur l'axe  $Z_1$  d'une part et sur l'axe  $X_2$  d'autre part permet de décrire les équations dites les approximations gyroscopiques :

$$\left[ \frac{d\vec{H}_0 (S_1 + S_2 + S_3)}{dt} \right]_{Ra} \cdot \vec{Z}_1 = \vec{M}_0 (F_{ex} / S_1 + S_2 + S_3) \cdot \vec{Z}_1 = -H \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta$$

$$\left[ \frac{d\vec{H}_0 (S_2 + S_3)}{dt} \right]_{Ra} \cdot \vec{X}_2 = \vec{M}_0 (F_{ex} / S_2 + S_3) \cdot \vec{X}_2 = H \cdot \dot{\psi} \cdot \sin \theta$$

d'où :

$$\begin{cases} H\dot{\psi}\sin\theta = \vec{M}_0(F_{ext}/S_2+S_3) \cdot \vec{X}_2 & \text{II. 2} \\ -H\dot{\theta}\sin\theta = \vec{M}_0(F_{ext}/S_1S_2+S_3) \cdot \vec{Z}_1 & \text{II. 3} \end{cases}$$

**Conséquences :**

Pour corriger éventuellement l'angle  $\theta$ , il faut utiliser l'équation (II.3) et donc exercer un couple non pas sur  $X_2$  mais sur  $Z_1$ , c-a d le moteur  $M_0$ .

Pour corriger éventuellement l'angle  $\Psi$ , il faut utiliser l'équation (II.2) et donc exercer un couple non pas sur  $Z_1$  mais sur  $X_2$ , c-a d le moteur  $M_1$ .

Cette propriété résume "donnez lui du  $\theta$ , il vous rendra du  $\Psi$  et réciproquement " sera utilisé dans les opérations de réalignement d'un gyroscope.

Les gyroscopes à 2 degrés de liberté sont utilisés pour des mouvements faibles (de l'ordre  $1^\circ$ ) ; gyroscope directionnel (centrale de cap), plateforme inertielle.

**II.4 LES TECHNIQUES D'ESSAIS DES GYROSCOPES**

Toute erreur sur le couple C ou  $\Delta H$  sur H se traduit par une erreur  $\Delta\Omega$  sur la mesure de la vitesse  $\Omega$ . Ces erreurs sont dues aux imperfections des appareils et aux conditions d'exploitation. L'erreur  $\Delta\Omega$  s'appelle dérive D.

**II.4.1 Modélisation de la dérive des gyroscopes**

Il existe différentes sources d'erreurs :

- Dérives dues aux couples de balourd (centre de gravité et centre de poussée du liquide ne sont pas situé sur l'axe de précession).
- Dérives constantes dues aux couple fixes (d'origine mécanique).
- Dérives dues aux variations de température du liquide(d'ou courant de convection et donc une variation de densité(balourd)).

Les causes des couples parasites peuvent être classées en 2 catégories importantes :

- Les couples fixes qui ne dépend pas de l'accélération A, par exemple les fils d'amenée du courant d'alimentation du moteur du gyroscope.
- Les couples de balourd qui dépend de l'accélération A. Ils sont dus au déplacement du centre de gravité de l'appareil.

Pour l'étude de la dérive, on utilise des modèles mathématiques qui sont habituellement des fonctions linéaire des causes de dérive  $C_i$  :

$$D = D_0 + K_1 C_1 + \dots + K_2 C_2$$

Où les coefficients  $K_i$  sont des fonctions connues des conditions d'exploitation.

L'étalonnage d'un gyroscope a pour but l'estimation de la valeur numérique de chacun des paramètres  $K_i$  intervenant dans le modèle mathématique et devant permettre une compensation. Cette opération d'étalonnage va nécessiter une série d'essais utilisant des installations stiquées : tables asservies, tables oscillantes, ...

#### II.4.2 Les types de technique utilisées

Deux méthodes d'essais sont utilisées pour la mesure du balourd et du couple fixe.

Les méthodes basées sur des mesures continues de la dérive D et l'étude harmonique des enregistrements permet d'estimer les causes d'erreur  $C_1$ .

Les méthodes basées sur des mesures « discrètes » successives. Le gyroscope est placé dans des positions différentes. Pour calculer  $C_1$  on dispose une suite de mesures  $D_g$ .

##### ■ Essai multi-position

C'est une méthode fait appel à une table asservie que l'on oriente dans l'espace suivant 6 positions (figure II.8) et sur laquelle est fixé le gyroscope à contrôler. Celui-ci est donc monté sur le plateau de la table asservie, son axe d'entrée parallèle à l'axe de rotation de la table, le signal de sortie du détecteur est amplifié avant d'attaquer le moteur d'asservissement de la table.

On asservit donc la table à suivre le mouvement de l'axe de la toupie, le gyroscope est placé dans le champ de pesanteur et soumis à la rotation de la terre qui constitue une excellente référence de vitesse.

##### ■ Essai équatorial

C'est une méthode continue applicable aux gyroscopes. Le gyroscope est bouclé en gyromètre sur une table commandée à vitesse constante, c'est-à-dire que le signal de la sortie du détecteur est amplifié, démodulé puis qui attaque le moteur couple du gyroscope. La mesure du courant envoyé dans le moteur-couple fournit la valeur du couple autour de l'axe de sortie S qui représente la somme des couples parasites. Le gyroscope est placé sur le plateau son axe de sortie S parallèle à l'axe de rotation de celui-ci. L'axe de rotation du plateau est orienté dans le plan méridien et parallèle à l'axe de la terre (figure II-9) La dérive du gyroscope est modulée par le couple de balourd du au champ de pesanteur. L'amplitude par rapport à la valeur moyenne de la sinusoïde représente le balourd et la position du zéro de l'enregistrement représente la

position du balourd par rapport à l'axe d'entrée c'est-à-dire qu'il ne détecte pas la rotation de la terre, ni celle de la table.

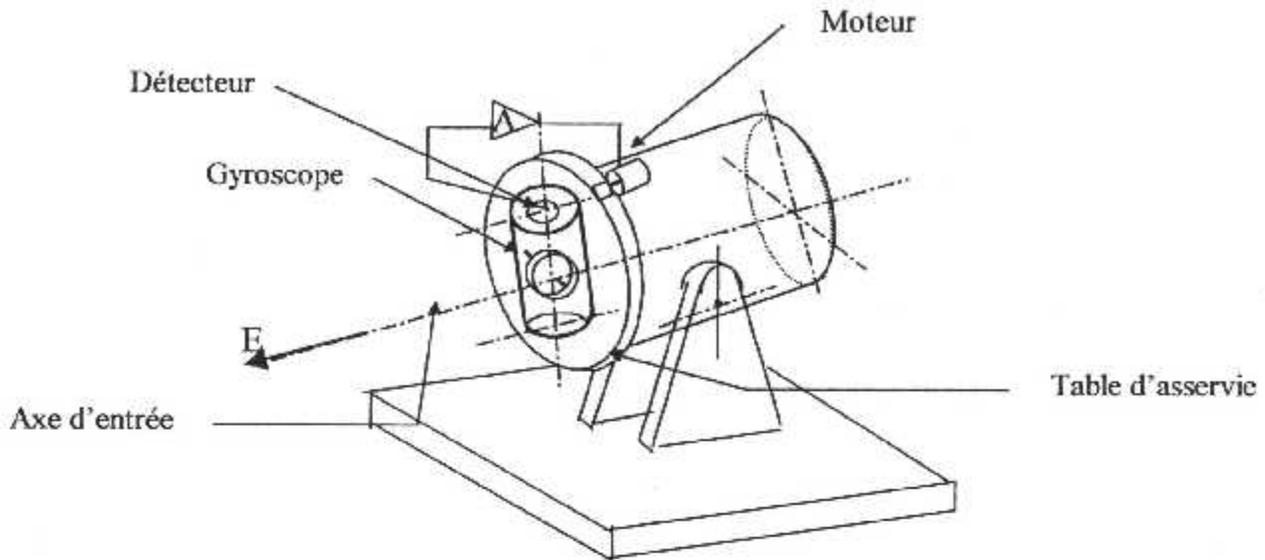


Figure II.8 : Essai multi-positions

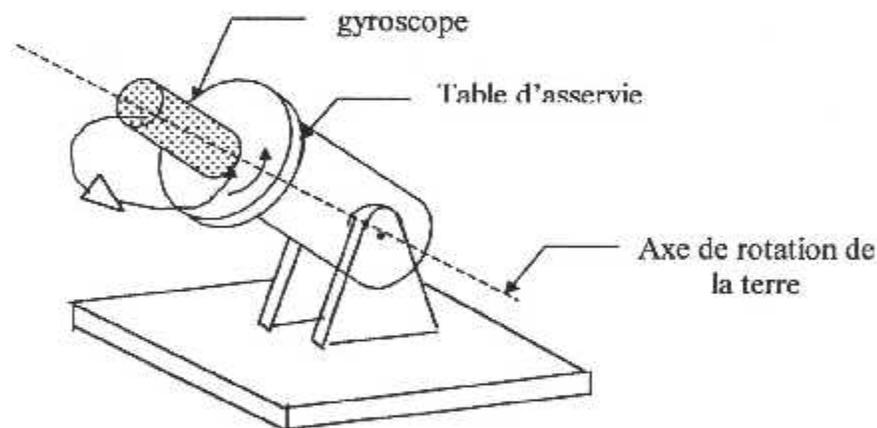


Figure II.9 : Essai en table équatoriale

## II.5 LES ACCELEROMETRES

Un appareil permettant de mesurer une ou plusieurs composantes du vecteur s'appelle un accéléromètre. Un accéléromètre ne mesure pas l'accélération mais la force spécifique  $A$  c'est-à-dire la différence entre l'accélération inertielle et l'attraction universelle  $\vec{A} = \vec{\gamma} - \vec{\phi}$ .

### II.5.1 Principe de fonctionnement

La (figure II.10) schématise le principe d'un accéléromètre. Une masse  $M$  mobile suivant un axe appelé axe sensible est maintenue dans le boîtier de l'accéléromètre par deux ressorts  $R1$  et  $R2$  son mouvement possède de plus un amortissement visqueux.

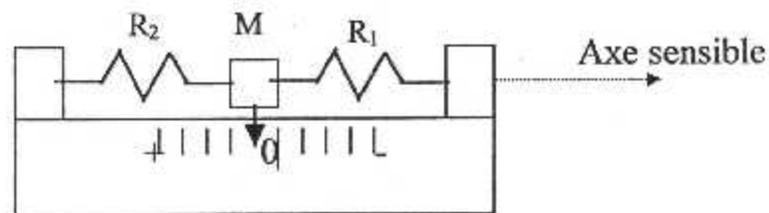


Figure II.10: Schéma de principe d'un accéléromètre linéaire à un axe

Le déplacement de la masse  $M$  dans le boîtier donne une mesure de la composante de  $\vec{A}$  suivant l'axe sensible de l'appareil ce qui est illustré sur la (figure II.11)

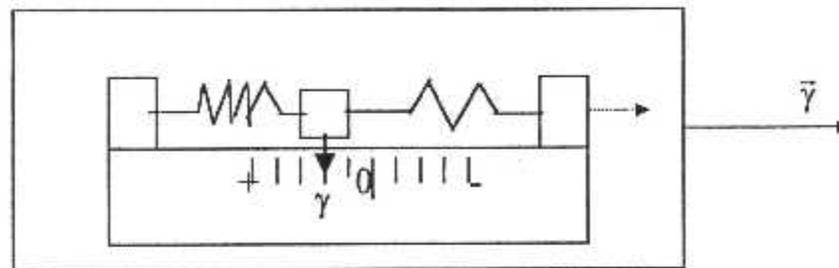


Figure II.11 : Véhicule accélérant dans un plan horizontal. Axe sensible horizontal.

### II.5.2 Différents types d'accéléromètres

#### ■ Accéléromètre du type pendulaire

Imaginons une masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  suspendue par un bras de longueur  $L$  à une articulation fixée sur un boîtier (figure II.12).

Son principe de fonctionnement consiste à mesurer la force nécessaire pour maintenir la masse  $M$  immobile avec un moteur couple qui agit sur la masse  $M$  en générant une force  $\vec{F}$  proportionnelle à l'écart de position du pendule par rapport à une position nominale

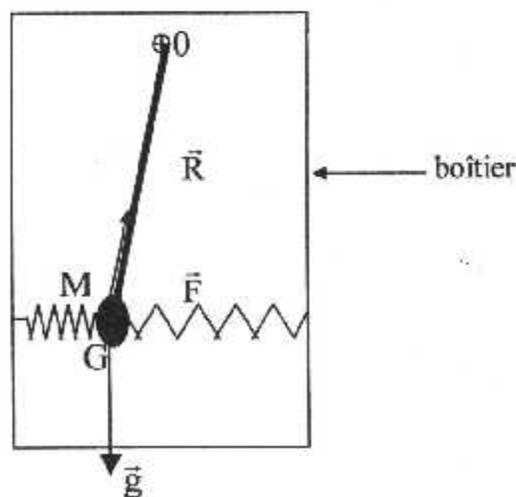


Figure II.12 : Accéléromètre pendulaire

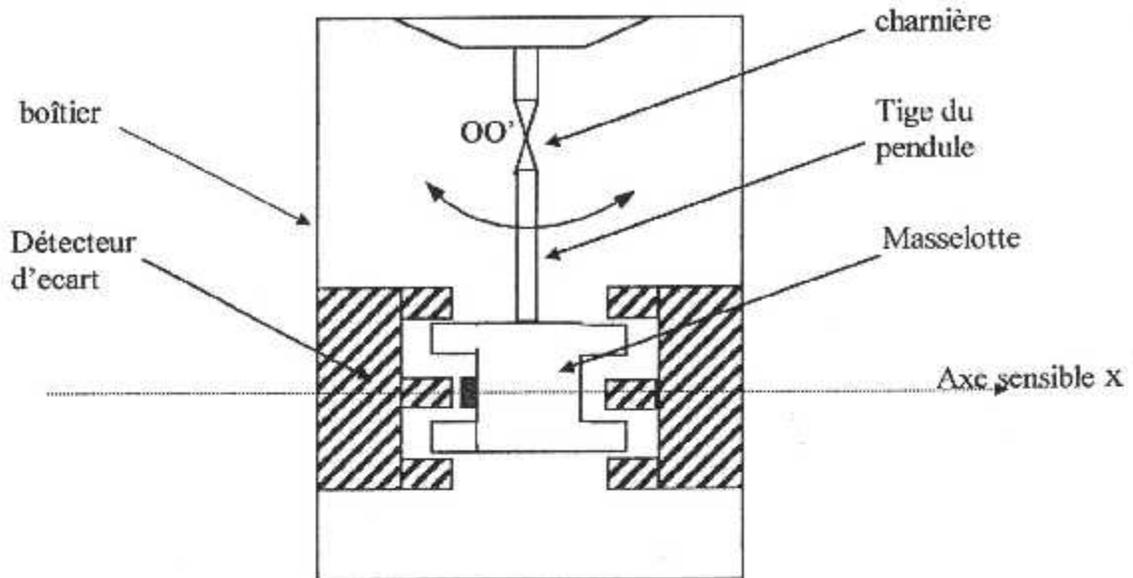


Figure II.14 : Accéléromètre pendulaire

#### ■ Fonctionnement de l'accéléromètre pendulaire

Sous l'effet d'une force spécifique dirigée suivant l'axe sensible, le pendule tend à s'écarter de sa position d'équilibre. Un détecteur de position, fournit une tension d'amplitude proportionnelle à l'écart par rapport à une position de référence appelée zéro électrique.

Sous l'effet d'une force spécifique, le pendule prend une position d'équilibre. Le couple autour de l'axe de fixation du pendule dû à la force spécifique appliquée au centre de gravité du pendule, s'oppose au couple généré par le moteur-couple; le mouvement est amorti par la présence d'un liquide visqueux à l'intérieur du boîtier.

L'équation de l'accéléromètre en boucle ouverte et en l'absence de force spécifique est :

$$B\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} = ki$$

où B est le moment d'inertie du pendule autour de l'axe d'articulation OO', b est le coefficient de frottement visqueux,  $\alpha$  est l'angle de déflexion du pendule par rapport au zéro électrique, k la constante de couple de moteur et i le courant dans le bobinage du moteur couple.

Prenons la transformation de Laplace de l'équation précédente. Il vient :

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{k}{p(Bp+b)}$$

Si on désigne par  $\lambda$  le facteur d'échelle du détecteur ( $\lambda = u/\alpha$ ) en volt/radian et par  $\tau$  la constante de temps

$$\tau = \frac{B}{b}$$

on peut écrire

### ■ Accéléromètre à QUARTZ

L'accéléromètre (figure II.13) comporte deux cristaux de quartz et deux masse sensibles à la force spécifique à mesurer. Une accélération suivant l'axe sensible va comprimer un des cristaux et dilater l'autre ce qui modifie leurs propriétés électriques et mécaniques (fréquence, résistivité etc...). Ces modifications sont exploitées pour mesurer la force spécifique de manière différentielle.

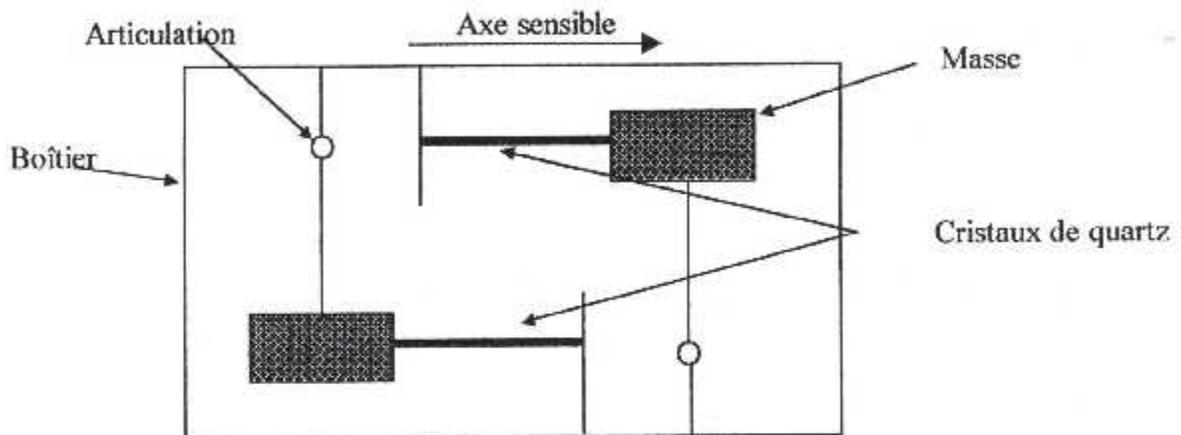


Figure II.13 : Accéléromètre à quartz

### II.5.3 Exemple de l'accéléromètre pendulaire

Ce type d'accéléromètre (figure II.14) est constitué :

- d'une masselotte montée en pendule à l'extrémité d'une tige support et d'une charnière qui permet les déplacements de cette masselotte suivant un axe sensible de détection  $x$ . Ce type de montage supprime les frottements lors des déplacements de la masselotte.
- Un détecteur d'écart qui délivre un signal électrique fonction du déplacement de la masselotte,
- un circuit d'asservissement de la masselotte comprenant un étage adaptateur (n'est pas mentionné sur la figure), un générateur d'incrément, un générateur de courant et un moteur couple. Ce circuit (n'est pas mentionné dans la figure) maintient constamment la masselotte en position zéro.

Le signal de mesure de l'accéléromètre est prélevé en sortie du générateur d'incrément.

$$\frac{u}{i} = \frac{K_a}{p(1+\tau p)}$$

avec

$$K_a = \frac{\lambda k}{b}$$

$K_a$  est le facteur d'échelle de l'accéléromètre.

### ■ Notion de biais accélérométrique

C'est le signal mesuré par un accéléromètre en l'absence de toute accélération du mobile du au décalage du zéro électrique existant par construction (la masselotte n'est jamais rigoureusement en position zéro)

La valeur du biais varie dans le temps, elle est mesurée régulièrement et mise à jour dans la mémoire du calculateur cette valeur est utilisée dans l'élaboration du courant appliqué au moteur-couple pour ne pas fausser la mesure de l'accélération subie par le mobile.

On donne un exemple de caractéristiques d'un accéléromètre :

-Domaine de fréquence	$\pm 20g$
-Biais	$\pm 10^{-4}g$
-facteur d'échelle	$10^{-4}$

# Chapitre III

Etude des système de  
navigation inertielle

### III.1 INTRODUCTION

Le principe de la NAVIGATION PAR INERTIE a connu ses premières applications opérationnelles sur sous-marin nucléaire. Les améliorations technologiques de ces dernières années ont permis ensuite une telle miniaturisation des centrales que tous les derniers modèles d'avions de combat ou de transport civil en sont équipés et c'est le Boeing 747 qui, dans le domaine civil, a ouvert la voie à l'exploitation de l'INS en long-courrier.

### III.2 DESCRIPTION FONCTIONNELLE D'UNE PLATEFORME

Nous allons présenter tout d'abord l'exemple d'une plateforme stabilisée à un axe qui va nous permettre de mieux comprendre le fonctionnement des plates-formes réelles.

#### III.2.1 Plateforme 1 axe

La stabilisation de la plateforme 1 axe de la figure III.1 autour de l'axe ST se fait par un asservissement comportant un gyroscope intégrateur à 1 axe d'entrée parallèle à l'axe de stabilisation, un moteur d'asservissement qui commande la rotation de la plateforme autour de cet axe en fonction de la sortie du détecteur d'angle du gyroscope.

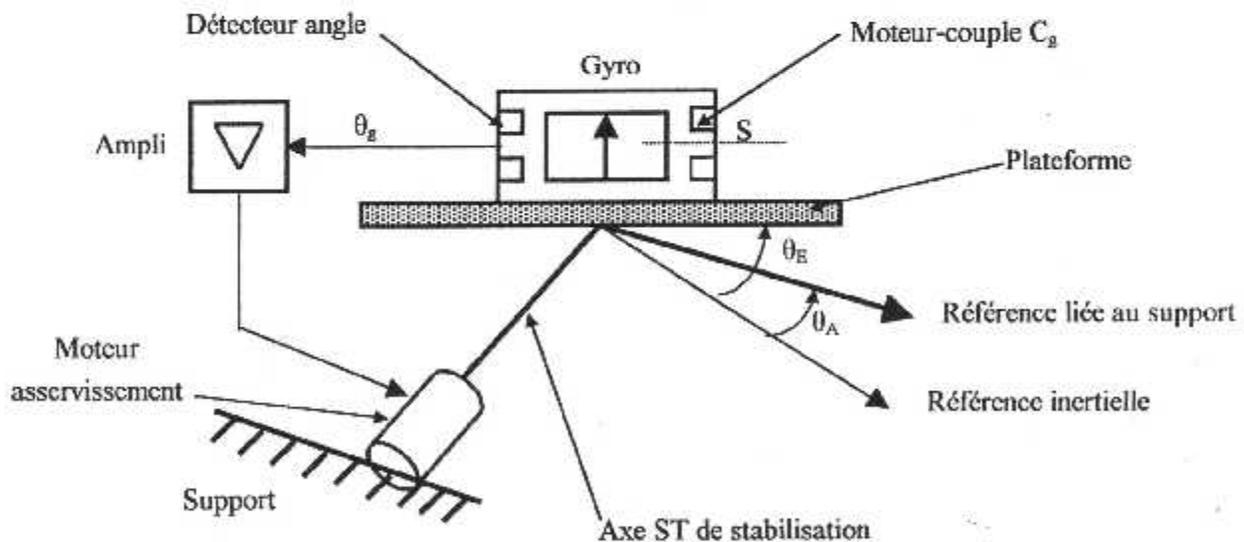


Figure III.1 : Plateforme stabilisée 1 axe

L'asservissement fonctionne de la façon suivante :

A une rotation  $\omega_p$  de la plate forme correspond une rotation commandée par le moteur tel que la somme des couples appliqués sur l'axe de sortie S soit nulle et la plateforme reste fixe par rapport à l'espace absolu.

Cette solution offre la possibilité de donner une orientation quelconque à la plateforme par application d'un couple  $C_g$  sur l'axe de sortie grâce au moteur-couple.

### III.2.2 Plateforme 3 axes

Il s'agit d'isoler la plateforme des mouvements angulaires du support dans toutes les directions.

#### ■ Description de la plateforme

La plateforme inertielle à 3 axes de la figure III.2 comprend les éléments suivants :

- Cadre (ou cadran) extérieur, supporté par la structure porteuse, il est mobile autour de l'axe externe.
- Le cadre (ou cardan) médian, supporté par le cadre extérieur, il est mobile autour de l'axe médian.
- Le cadre (ou cardan) interne, supporté par le cadre médian, il est mobile autour de l'axe interne et supporte le « cœur ».
- Resolver de coordonnées qui transforme les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  détecté par les gyroscopes  $G_x$  et  $G_y$  en des rotations  $\theta_E$  et  $\theta_M$  pour commander les moteurs de la plateforme ME (moteur extérieur) et MM (moteur médian).
- Le détecteur d'angle qui assure la surveillance de la perpendicularité des cadres médian et extérieur.
- Le moteur d'asservissement extérieur (ME) qui commande la rotation du cadre extérieur porté par l'axe externe.
- Le moteur d'asservissement médian (MM) qui commande la rotation du cadre médian porté par l'axe médian.
- Le moteur d'asservissement interne (MI) qui commande la rotation du cadre interne porté par l'axe interne.
- Le détecteur de position angulaire  $\theta_E$  (extérieur) porté par l'axe extérieur.
- Le détecteur de la position angulaire (interne)  $\theta_I$  porté par l'axe intérieur.
- Le détecteur de la position angulaire médian  $\theta_M$  porté par l'axe médian.
- **Le cœur (bloc de détection)**

On appelle cœur l'ensemble constitué par les trois accéléromètres  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$ . Il peut tourner autour d'un axe (l'axe interne) porté par un palier de l'anneau de cadran intérieur.

Les accéléromètres  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  sont disposés de telle façon que leurs axes sensibles constituent le trièdre de mesure appelé aussi trièdre de calcul ou accélérométrique.

Les gyroscopes horizontaux  $G_x$ ,  $G_y$  ont leurs axes d'entrées confondus avec les axes sensibles de  $A_x$  et  $A_y$ .

Le gyroscope horizontal  $G_z$  a un axe d'entrée confondu avec l'axe sensible  $A_z$ .

#### ■ Fonctionnement de la plateforme

Quand le mobile effectue une rotation autour de l'axe interne, le cadre interne tourne autour de l'axe interne par l'intermédiaire des différents cadres. Le détecteur d'écart de gyroscope  $G_z$  délivre un signal d'erreur (toupie fixe et mouvement du boîtier) ce dernier est amplifié, alimente le moteur interne (MI) de façon à ramener par rotation du cadre interne le bloc de détection dans sa position initiale.

Même cas pour l'évolution du mobile autour de l'axe externe, où le cadre externe est entraîné en rotation autour de l'axe extérieur. Le détecteur d'écart de  $G_y$  délivre un signal d'erreur qui, amplifié, alimente le moteur extérieur (ME) de façon à ramener par rotation du cadre extérieur le cœur dans sa position initiale (annulation du signal d'erreur de  $G_y$ ). Si maintenant le mobile effectue une rotation autour de l'axe médian. L'ensemble des cadres de la plateforme est entraîné en rotation autour de l'axe médian. Le détecteur d'écart de gyroscope  $G_x$  délivre un signal d'erreur qui, amplifié, alimente le moteur médian (MM) qui entraîne en rotation le cadre médian.

Dans certaines conditions de fonctionnement, les deux cardans interne et externe deviennent parallèles d'où une perte d'un degré de liberté, donc cette configuration est interdite. Pour pallier à ce problème on utilise généralement une plateforme à 4 axes.

#### III.2.3 Plateforme 4 axes

Les plateformes à quatre axes (figure III.3) de cardan autorisent les évolutions du véhicule autour de ses trois axes sans aucune limitation mécanique. Sa structure à 4 axes permet d'éviter la configuration interdite de la plateforme 3 axes. On a ajouté un anneau (cardan) comportant un moteur d'asservissement commandé par le détecteur d'angle placé sur l'axe médian dont le rôle est de maintenir à chaque instant les axes externe et interne de la plateforme 3 axes perpendiculaires.

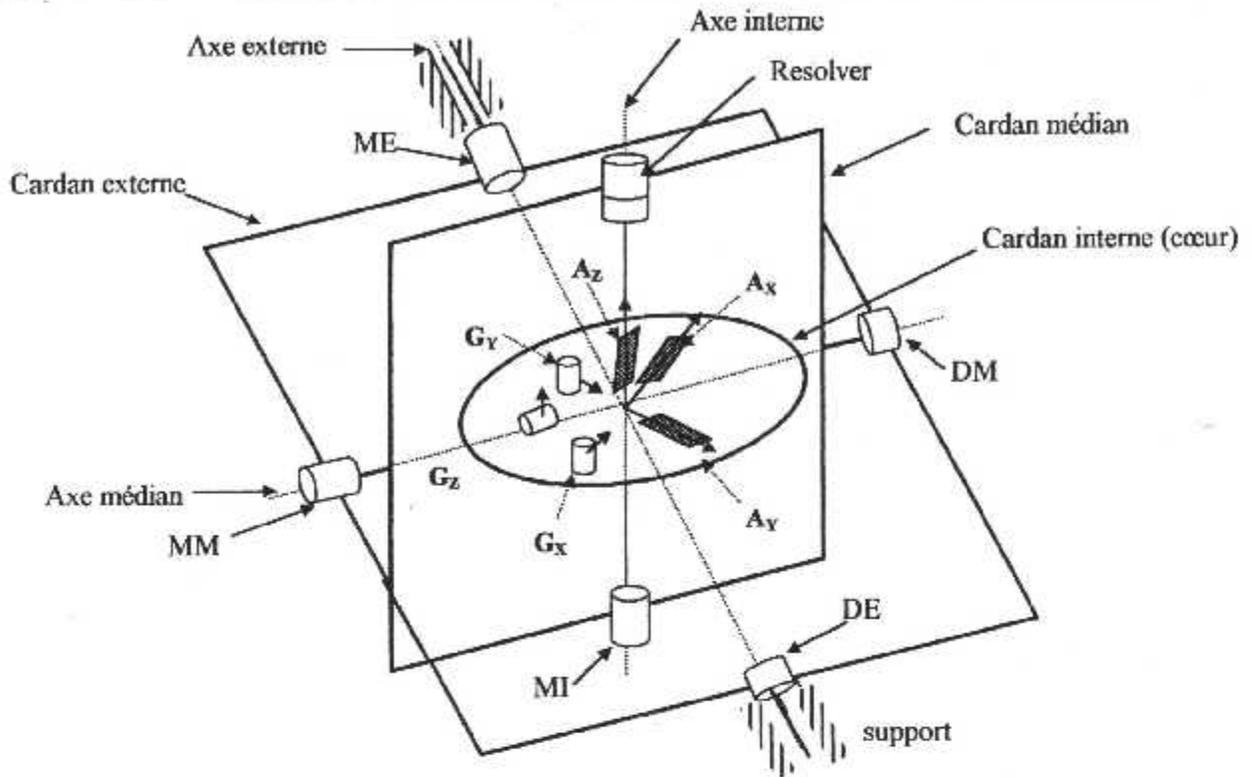


Figure III.2 : Plateforme 3 axes

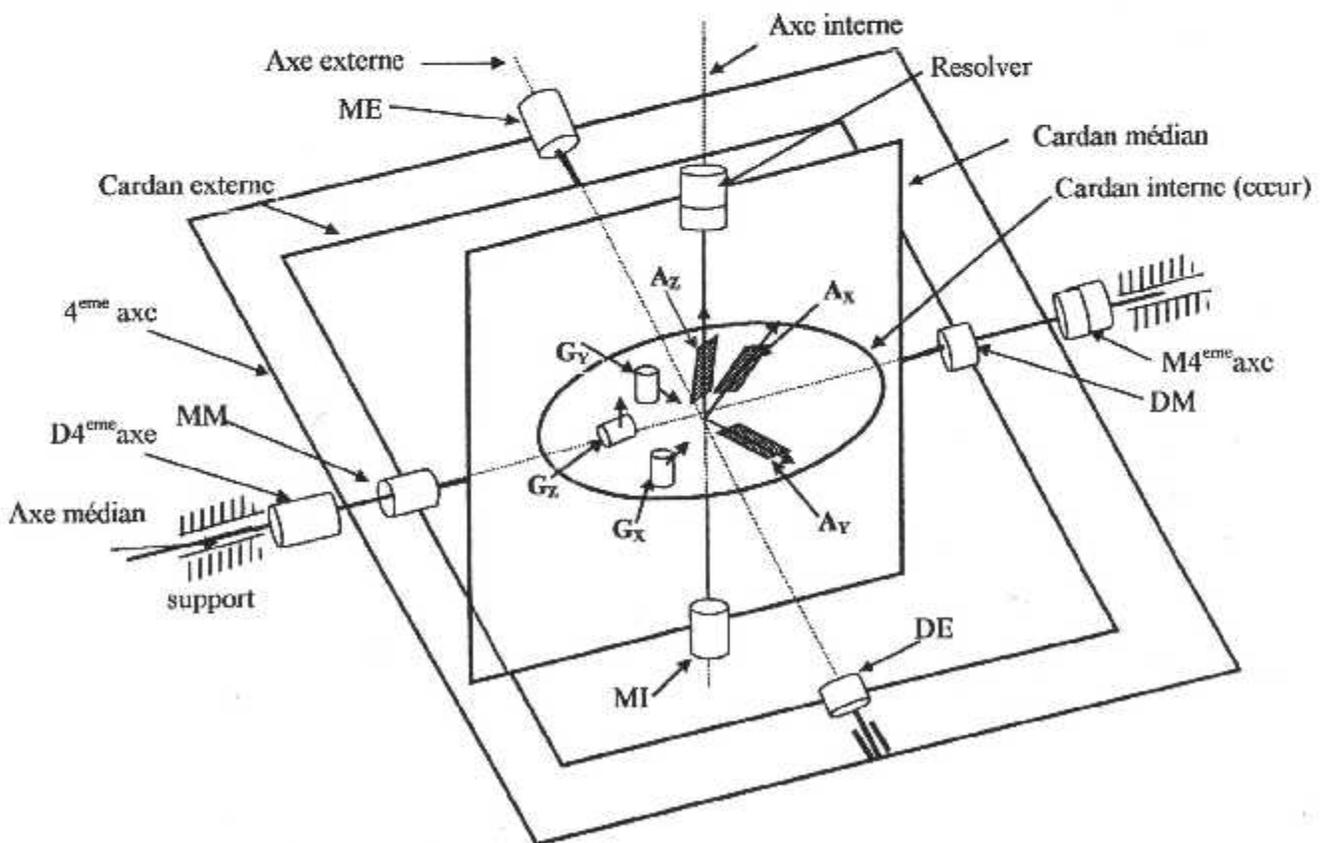


Figure III.3 : Plateforme 4 axes

### III.2.4 Cas des avions et des navires : plateforme de Schüler

Pour des véhicules navigant pendant des temps assez longs, il n'est pas intéressant d'utiliser un trièdre de mesure des accélérations lié à l'espace absolu, on cherche plutôt à stabiliser le cœur suivant le trièdre qui va servir à faire les calculs de navigation, c'est à dire le trièdre dans lequel on élaborera la vitesse et la position du mobile.

Dans le cas d'un avion ou d'un navire, on est donc amené à orienter et stabiliser en permanence le cœur suivant la verticale locale. Ce type de plateforme porte le nom du professeur Schüler qui a annoncé le théorème suivant :

*Pour qu'un pendule puisse conserver la verticale locale à bord d'un véhicule en mouvement, il faut que ce pendule soit sans amortissement et de période égale à 84 minutes.*

La plateforme de Schüler respecte ce principe.

#### ■ Plateforme de Schüler à 1 axe

Pour fixer les idées, on peut raisonner sur le cas simplifié d'une plateforme 1 axe identique à celle de la figure III.1, mais sur laquelle on a installé un accéléromètre dont l'axe sensible est perpendiculaire à l'axe ST (figure III.4).

Le fonctionnement de la plateforme de Schüler est le suivant :

Lorsque l'avion se déplace il subit une accélération linéaire de valeur  $\gamma$ . Celle-ci est mesurée par l'accéléromètre.

Le déplacement du mobile à une vitesse  $V$  et la rotation terrestre  $\Omega$  entraînent une précession apparente du gyroscope qui provoque une perte d'horizontalité de la plateforme. Il faut donc précessionner la plateforme à la vitesse  $\dot{\theta} = \frac{V}{R} + \Omega$  ( $R$  est le rayon de la terre) par action sur le moteur-couple du gyroscope pour maintenir son axe vertical.

Le calculateur élabore cette précession commandée, en multipliant la vitesse linéaire  $V$  par le coefficient  $1/R$  ( $R$  est le rayon de la terre) pour obtenir une vitesse angulaire  $V/R$  cette dernière est multipliée par la valeur du moment cinétique  $H$  de la toupie du gyroscope pour transformer la vitesse angulaire désirée en couple à appliquer au gyroscope.

Supposons qu'on écarte la plateforme d'un angle  $\theta$  petit de sa position horizontale fixe, l'accéléromètre détecte une accélération  $-g \cdot \sin\theta$ , d'où une rotation  $\dot{\theta}$  de la plateforme telle que :

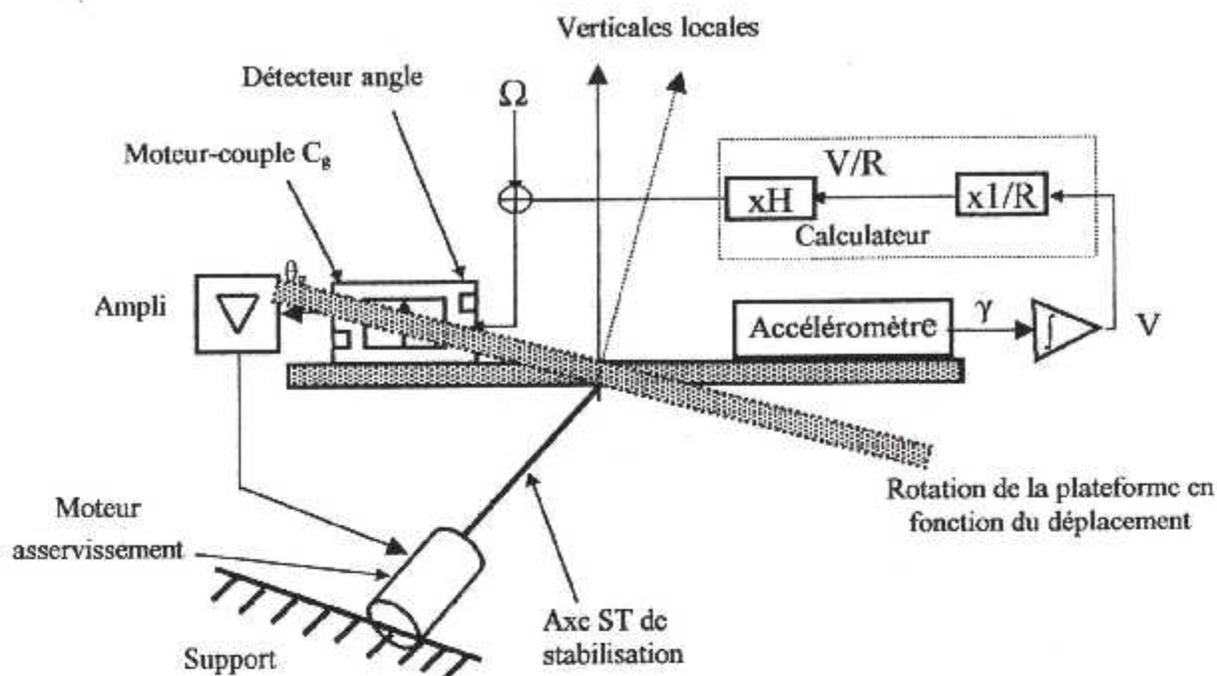


Figure III.4 : bouclage de Schüler

$$\int -H \cdot \frac{g}{R} \cdot \sin\theta \cdot dt = \dot{\theta}$$

qui donne  $\ddot{\theta} + \omega_s^2 = \frac{g}{R}$  avec  $\omega_s = \sqrt{\frac{g}{R}}$

Ce qui correspond donc à un mouvement oscillatoire  $\theta = \sin(\omega_s t)$  de période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \cong 84$  minutes appelée période de Schüler le calcul se fait à partir des ordres de grandeur suivants ( $g \cong 10 \text{m/s}^2$  et  $R \cong 6400 \text{km}$ ). La plateforme reste donc constamment horizontale quel que soit les accélérations du véhicule.

■ **Plateforme de Schüler 3 axes**

Pour déduire le schéma d'une plateforme à 3 axes, il faut compléter le schéma de la figure III.2 par un accéléromètre à axe sensible horizontal perpendiculaire à l'accéléromètre précédent. Le signal de cet accéléromètre est après intégration et multiplication par H/R appliqué au moteur-couple d'un gyroscope à un degré de liberté dont l'axe d'entrée est perpendiculaire à celui du gyroscope précédent.

Le signal du gyroscope est appliqué après amplification à un moteur qui contrôle les mouvements de la plateforme d'une façon analogue à celle du moteur précédent.

Enfin, la plateforme est stabilisée en azimut par un gyroscope à axe d'entrée vertical dont le signal après amplification est appliqué à un moteur qui contrôle les mouvements de la plateforme autour de la verticale. La figure III.5 représente le schéma d'une telle plateforme comportant le cœur ce dernier est le

support des accéléromètres  $A_x$  et  $A_y$ , les gyroscopes d'axes d'entrée horizontaux  $G_x$  et  $G_y$ , le gyroscope d'axe vertical  $G_z$ . Il peut tourner autour de l'axe d'azimut (vertical) porté par un palier de l'anneau de cardan intermédiaire sur cet axe sont montés un moteur un détecteur de position angulaire et un resolver qui assure la distribution d'ordre de précession de la plateforme autour des axes roulis et tangage. Un anneau extérieur supporte l'anneau intermédiaire par un palier qui matérialise l'axe de roulis, il possède un axe de tangage perpendiculaire à l'axe de roulis, sur l'axe de roulis sont montés un moteur et un détecteur de position angulaire.

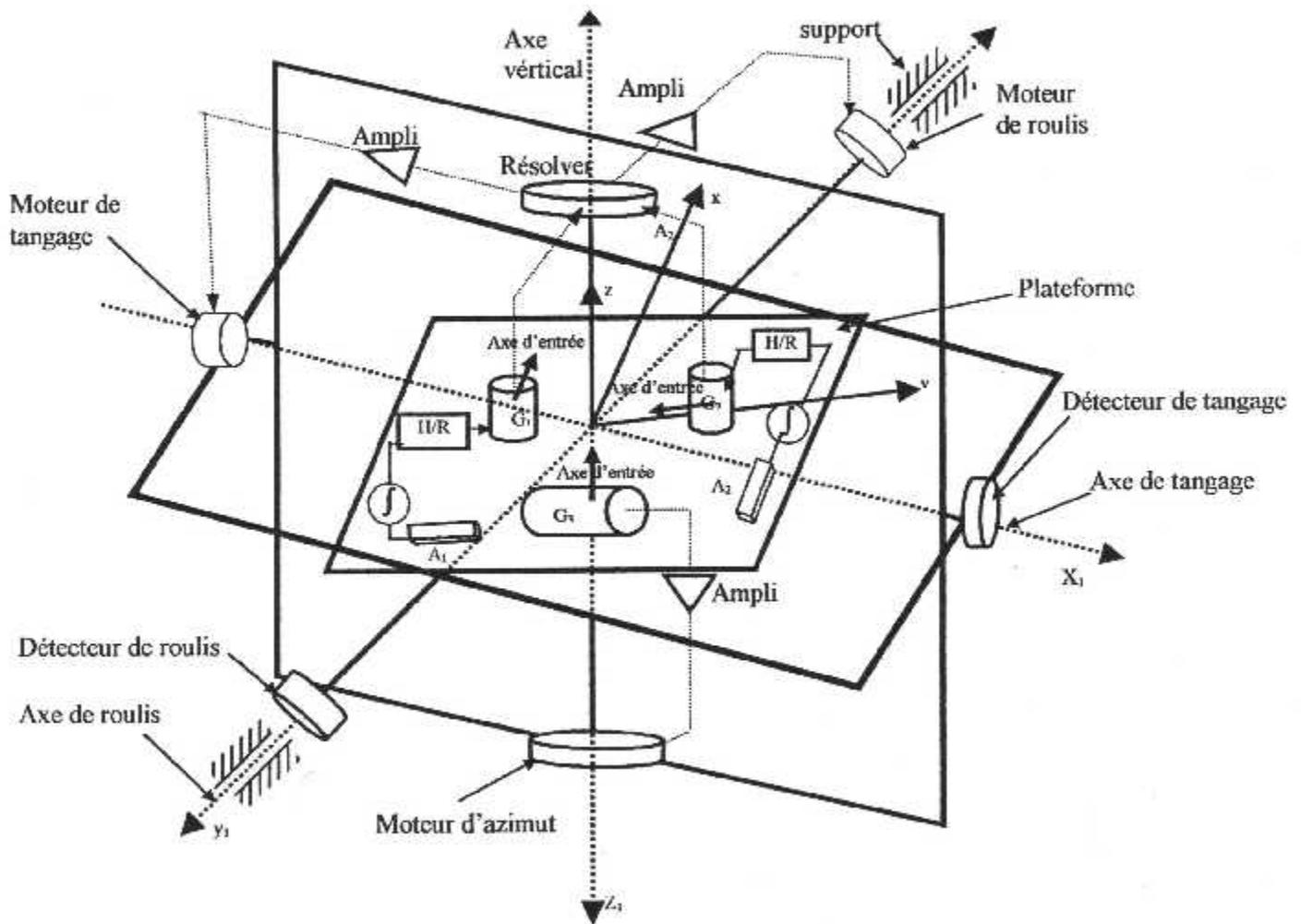


Figure III.5 : Plateforme de schuler 3 axes

### III.3 ASSERVISSEMENT D'UNE PLATEFORME DE SCHULER

#### III.3.1 Le principe

On considère dans cette partie le principe de la méthode d'asservissement (ou mécanisation) d'une plateforme 3 axes dans le cas réel de la navigation sur la terre sphérique animée d'une rotation  $\bar{\Omega}$  par rapport à l'espace inertielle).

Pour maintenir la plateforme localement horizontale, il faut lui commander par rapport à l'espace inertielle, la rotation  $\omega$  [1] :

$$\bar{\omega} = \bar{p} + \bar{\Omega}$$

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{v_2}{R} \\ p_2 = +\frac{v_1}{R} \\ p_3 = \text{arbitraire} \end{cases}$$

R désigne le rayon de la terre,  $v_1$  et  $v_2$ , les composantes de la vitesse du véhicule sur les axes  $x_p$  et  $y_p$  de la plateforme.

On remarque que  $p_3$  est arbitraire et par conséquent plusieurs choix sont possibles.

La figure III.6 montre les repères utilisés dans la mécanisation d'une plateforme de Schuller.

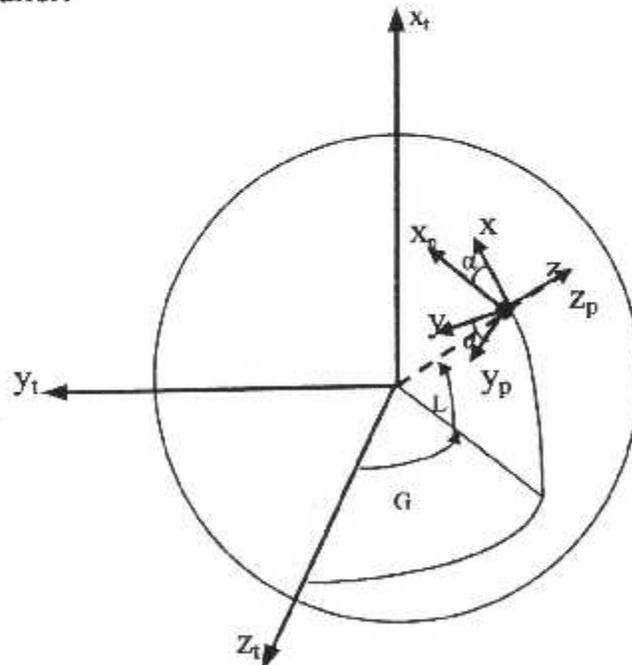


Figure III.6 : Repère terrestre et repère plateforme

$[t] = (x_t, y_t, z_t)$  : repère terrestre

$[v] = (x, y, z)$  : repère géographique local encore dit repère vrai

$[p] = (x_p, y_p, z_p)$  : repère plateforme

- L : latitude
- G : longitude
- $\alpha$  : azimut plateforme

### III.3.2 Les différentes mécanisations

#### ■ Plateforme asservie au nord géographique

Dans ce cas on asservit l'axe  $x_p$  de la plateforme au nord géographique. Pour cela, on choisit [1]:

$$p_3 = -\frac{v_2}{R} \operatorname{tg}(L)$$

L'axe  $y_p$  ayant la direction Est-Ouest géographique locale.

L'inconvénient de ce choix est d'interdire les vols polaires, les taux de précession du gyroscope d'axe sensible vertical devenant trop grand au voisinage des pôles (en effet  $\operatorname{tg}(\pm 90^\circ) = \infty$ ). Néanmoins, cette solution était adoptée du fait de la simplicité de la réalisation..

#### ■ Plateforme à azimut libre

Une autre solution consiste à choisir :

$$p_3 = \text{constante}$$

Souvent, on choisit  $p_3 = 0$  (cas du système Litton). On dit alors que la plateforme est à azimut libre car elle n'est asservie à aucun système de coordonnées.

### III.3.3 Equations d'asservissement de la plateforme

Si l'on dispose d'une plate forme dont on a choisi la loi de rotation ( $p_3$ ) il faut alors intégrer l'équation fondamentale :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{g}(\vec{r})$$

sur les axes du trièdre plate forme qui est animé par rapport à l'espace inertiel de la rotation  $\vec{\omega} = \vec{p} + \vec{\Omega}$ . En désignant par  $v$  la vitesse par rapport a la terre, l'intégration permet d'écrire les 2 relations suivantes qui seront utilisées dans la mécanisation :

$$\begin{cases} \overset{p}{\vec{v}} = \vec{A} + \vec{g}_p - (\vec{p} + 2\vec{\Omega}) \times \vec{v} & \text{III. 1} \\ \vec{r} = \vec{v} - \vec{p} \times \vec{r} & \text{III. 2} \end{cases}$$

où  $\ddot{\vec{r}}$  est la deuxième dérive de la position ( $\vec{r}$ ) par rapport au repère inertiel.

$\overset{p}{\vec{v}}$  est la dérivée de la vitesse ( $\vec{v}$ ) par rapport au repère plateforme.

$\vec{g}_p = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  désigne la pesanteur vulgaire

Toute mécanisation d'un système de navigation inertielle revient donc à intégrer les équations vectorielles (III.1) et (III.2) projetée sur les axes (p); à générer les ordres de rotation de la plate forme compte tenu de la loi choisie pour  $p_3$ , tout en calculant l'orientation des axes plateforme par rapport à la terre.

### III.3.4 Exemple de mécanisation

On va exposer en détail, les équations scalaires à intégrer dans le cas d'une plateforme asservie au nord. On suppose dans que l'altitude  $h$  et la vitesse verticale  $v_3$  sont données par d'autres instruments. par conséquent les équations qui généreraient ces quantités à partir de mesures inertielles ne sont pas écrites.

L'équation (III.1) permet d'écrire dans ce cas (en tenant compte du fait que  $\Omega_2=0$ )

$$\dot{v}_1 = A_1 - p_2 v_3 + (p_3 + 2\Omega_3)$$

$$\dot{v}_2 = A_2 - (p_3 + 2\Omega_3) + (p_1 + 2\Omega_1) v_3$$

$$p_1 = v_2 / (R + h)$$

$$p_2 = v_1 / (R + h)$$

$$p_3 = p_1 \sin L / \cos L$$

Enfin la longitude est obtenue par intégration de l'équation

$$\dot{G} = -p_1 / \cos L$$

et la latitude par

$$\dot{L} = \arctg \sin L / \cos L$$

Les ordres de précession des gyroscopes sont

$$\omega_1 = p_1 + \Omega_1 \quad (\text{ordres de précession Nord } (\omega_N))$$

$$\omega_2 = p_2 \quad (\text{ordres de précession Nord } (\omega_E))$$

$$\omega_3 = p_3 + \Omega_3 \quad (\text{ordres de précession Nord } (\omega_V))$$

La figure III.7 montre le schéma de la mécanisation de la plateforme asservie au nord.

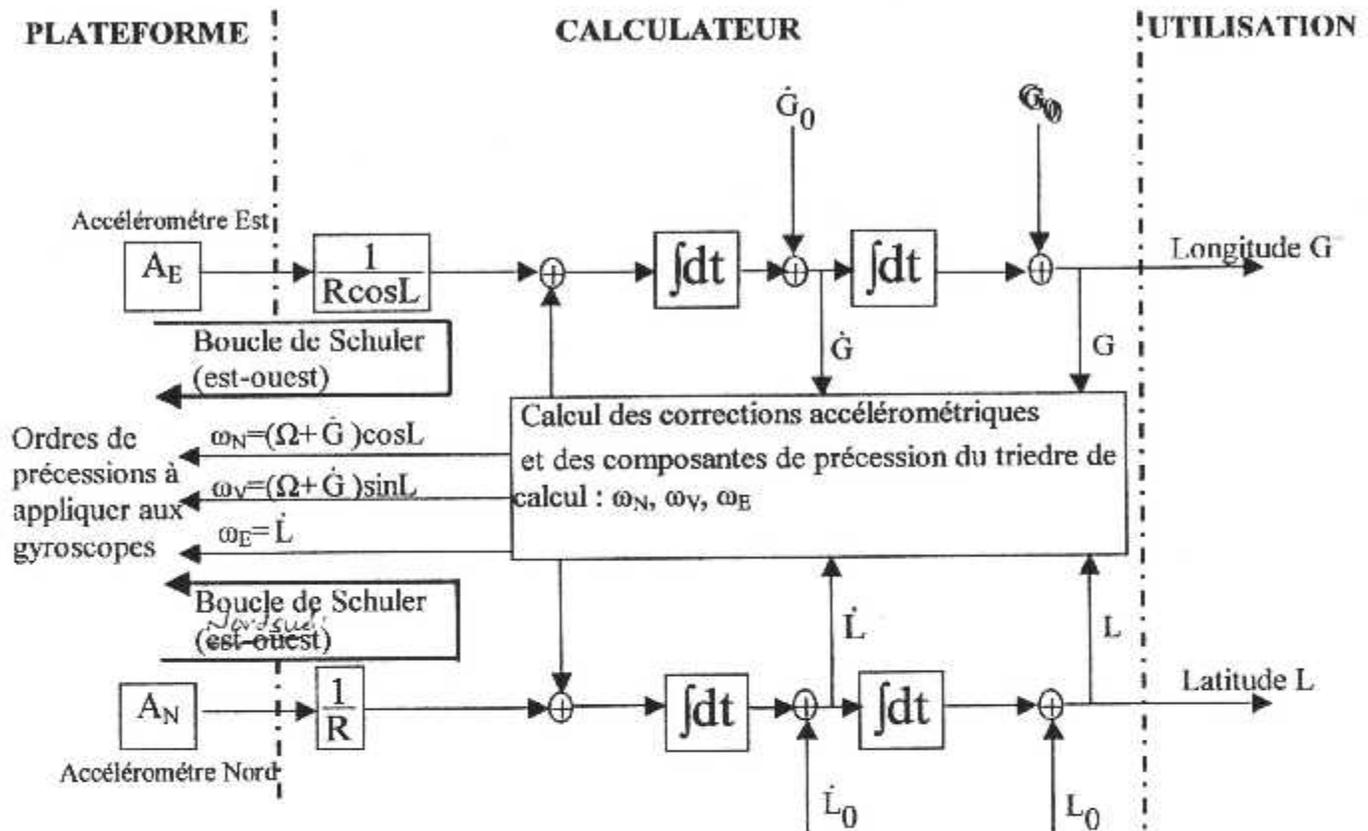


Figure III.7 :Schéma d'une mécanisation avec plateforme asservie au nord

### III.3.5 Paramètres de navigation

Quelle que soit l'application envisagée (type de véhicule ou type de mission ). Un système de navigation doit déterminer d'abord les éléments fondamentaux que sont la position, la vitesse et l'altitude. Cependant l'exploitation de ces éléments peut être très différente suivant l'application. On ne considérera dans ce paragraphe que ce qui peut correspondre à un système de navigation pour avion. Pour fixer les idées, on supposera que la mécanisation est à azimut libre .

On a résumé sur la figure III.8 les paramètres de navigation usuels scalaires et vectoriels. Les composantes  $r_1$  et  $r_2$  sur les axes de la vitesse au sol  $v_s$ , sont fournies par la mécanisation du système à inertie ainsi que l'azimut plateforme. Le module de la vitesse air  $r_a$  est fourni par un instrument auxiliaire. Enfin le resolver d'azimut de plateforme donne le cap plateforme.

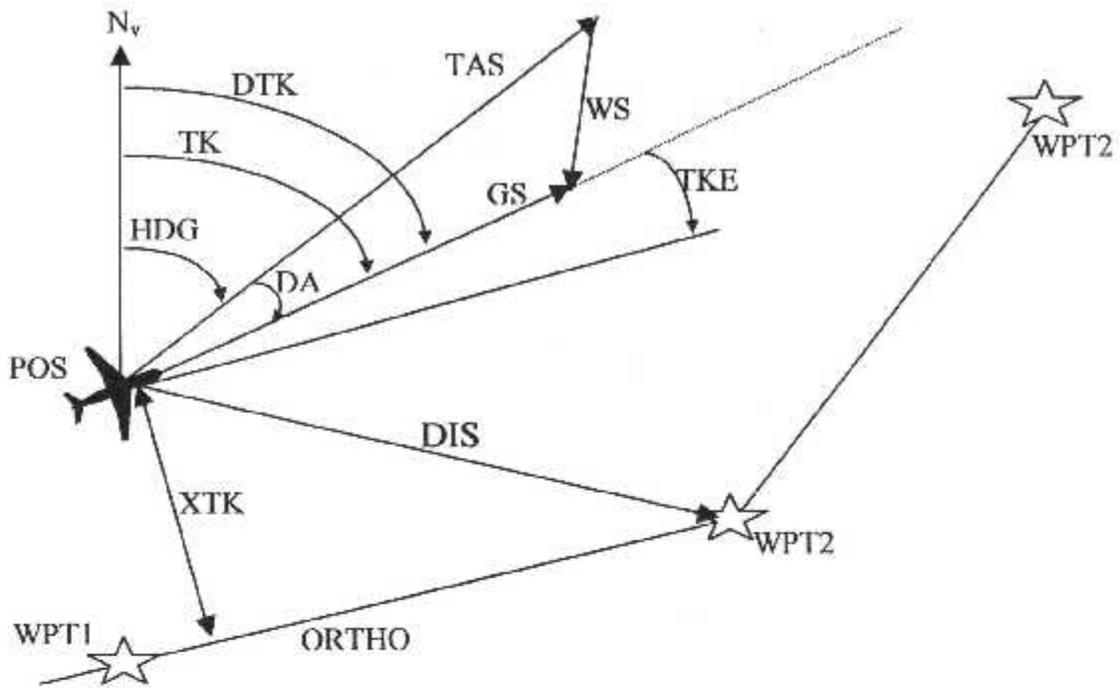


Figure III.8 : Paramètres de navigation

- |                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| HDG : Cap vrai ( $C_v$ )    | TK : route vraie ( $R_v$ )          |
| DA : dérive ( $X$ )         | DTK: route désirée                  |
| GS : vitesse sol ( $V_s$ )  | TKE : erreur route                  |
| WPT : point tournant        | DIS : distance restante à parcourir |
| WS : vitesse vent ( $V_w$ ) | TAS : vitesse propre ( $V_p$ )      |

La figure III.9 indique le schéma de calculs de navigation. Ces calculs sont bien entendu hors de la boucle correspondant à la mécanisation et peuvent être effectués à une fréquence très différente. Ces calculs représentent 18 opérations simples et 16 fonctions simples .

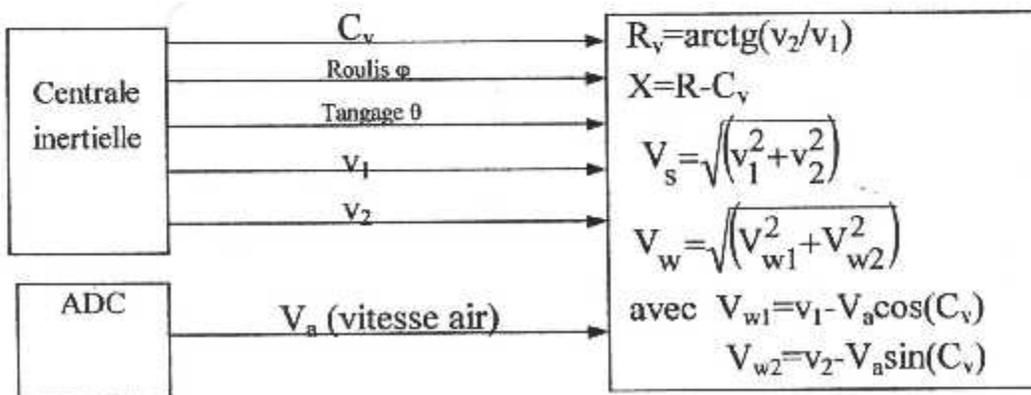


Figure III.9: Calcul des paramètres de navigation

**III.4 ALIGNEMENT D'UNE CENTRALE INERTIELLE**

On désigne ainsi l'initialisation au parking, avant roulage. L'alignement, opération préliminaire indispensable, consiste à effectuer les opérations suivantes :

- Introduction dans la mémoire du calculateur de la position géographique de l'aérodrome de départ.
- Alignement du cœur de la centrale sur la verticale (mise à niveau) et sur le nord géographique (gyrocompas). L'avion étant immobile, on réalise l'alignement en utilisant les mesures accélérométriques; l'orientation du cœur est modifiée jusqu'à ce que les accéléromètres, parfaitement horizontaux, ne détectent plus la pesanteur terrestre et que par ailleurs, la rotation des axes de gyroscopes par rapport aux étoiles soit identique à la rotation terrestre. Il en est ainsi si le cœur reste vertical.

L'utilisation du seul accéléromètre, combinée avec la connaissance a priori de la latitude de l'aérodrome de départ, permet donc de détecter la direction dans l'espace de l'axe de rotation de la terre, ce que les astronomes appellent « l'axe du monde ». quand l'alignement est terminé, 10 à 15 minutes après le lancement des gyroscopes, la direction du nord géographique est connue de la centrale avec une précision supérieure au 1/20 de degré (à 2 $\delta$ ).

Après l'alignement, la centrale peut être commutée en mode « navigation ». à partir de cet instant, les signaux accélérométriques ne sont plus interprétés comme des erreurs de verticalité du cœur; la centrale les perçoit comme des accélérations horizontales signifiant vitesse et changement de position de l'avion.

**III.5 UTILISATION DE LA CENTRALE INERTIELLE**

L'équipage dispose de deux boîtiers de commande (figure III.10).

- Le boîtier de mise en œuvre qui permet de sélectionner l'un des cinq modes de fonctionnement du système,
- La boîte de commande et d'affichage qui permet à l'équipage de dialoguer avec le calculateur.

Les modes de fonctionnement disponibles sur le boîtier de mise en œuvre sont les suivants :

1. « Arrêt »
2. « Stand-by », mode préliminaire à l'alignement. Il s'agit de mettre sous tension le système, de lancer les gyroscopes, de préparer le calculateur à recevoir des informations par l'intermédiaire de la boîte de commande et d'affichage.
3. « Alignement », mode permettant d'orienter correctement le cœur de la centrale par rapport à la verticale et au nord géographique. Le voyant « Ready nav » s'allume lorsque cette séquence est complète, signifiant que la centrale peut désormais être utilisée en mode « Navigation ».
4. « Navigation », mode normal d'utilisation en vol.

5. « Référence d'attitude », mode de secours dans lequel la centrale ne fournit plus qu'une verticale approximative. L'orientation du cœur n'est plus définie par calcul du déplacement horizontal de l'avion, mais directement, par un processus semblable à celui de l'alignement initial, en utilisant la verticale apparente à bord et en moyennant les positions successives de cette dernière. La précision de la verticale est alors comparable à celle d'une centrale de cap et de verticale classique (de l'ordre de degré). L'indication de cap est analogue à celle d'un gyroscope directionnel.

■ **La boîte de commande et d'affichage (figure III.11)**

Il permet

- D'introduire la position géographique initiale au moyen du clavier. Sélectionner POS, puis appuyer par exemple sur le poussoir N/2 (introduction d'une latitude nord), taper les chiffres corrects (degrés, minutes, dixièmes de degrés), appuyer sur « INSER » ; la latitude initiale est introduite dans le calculateur. Appuyer sur E/6 (longitude est), taper les chiffres, « INSER » ; la longitude initiale est rentrée.
- D'introduire le plan de vol pour faire de la navigation de surface au moyen du calculateur de la centrale. L'opération consiste à introduire un certain nombre de points tournants numérotés dans la mémoire du calculateur.
- De lire les paramètres standards de la navigation de surface sur les deux fenêtres de visualisation disponibles.
- De sélectionner le tronçon de route qui servira de base pour le calcul des paramètres de navigation (distance au prochain point tournant, écart latéral par rapport au tronçon de route considéré, etc.)

Appuyer sur TK CHG (track change), taper les numéros de points tournants pour désigner le point de départ et le point d'arrivée du tronçon à suivre puis « INSER ». Les numéros des points tournants sont alors affichés dans la fenêtre FROM-TO et une à deux minutes avant l'arrivée, un voyant « ALERT » se met à clignoter pour annoncer le changement imminent de tronçon de route. Si le commutateur AUTO-MAN-REMOTE est sur la position MAN, le pilote devra désigner le nouveau tronçon à suivre ; si le commutateur est sur la position AUTO, le changement est automatique et le prochain point tournant est celui dont le numéro suit dans l'ordre donné au départ.

Naturellement, la centrale peut être couplée au pilote automatique au gré de l'équipage. Les changements de tronçons se font alors sans intervention manuelle.

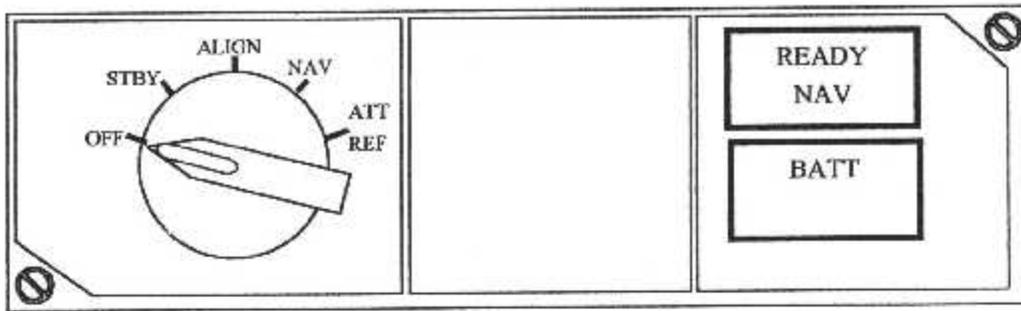


Figure III.10 : Boîtier INS de mise en œuvre

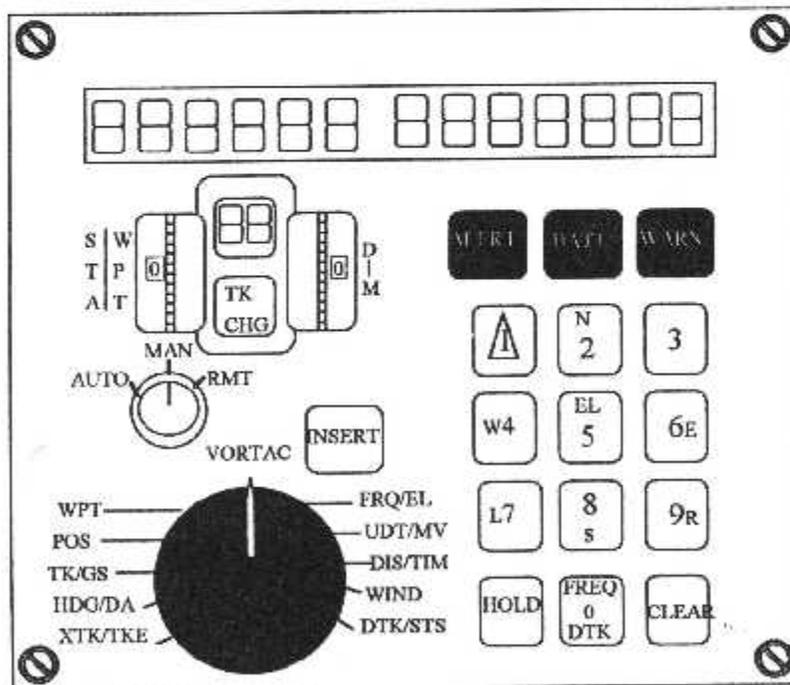


Figure III.11 : La boîte de commande et d'affichage

### III.6 ERREURS D'UN SYSTEME DE NAVIGATION

Pour fixer les idées, on va étudier les erreurs dans le cas d'un navigateur 1 axe (figure III.12) dont le schéma fonctionnel est représenté dans la figure III.13

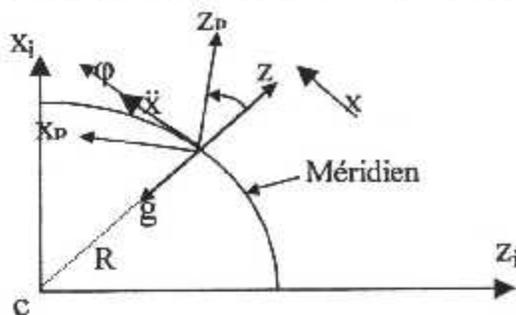


Figure III.12 : Navigateur à 1 axe

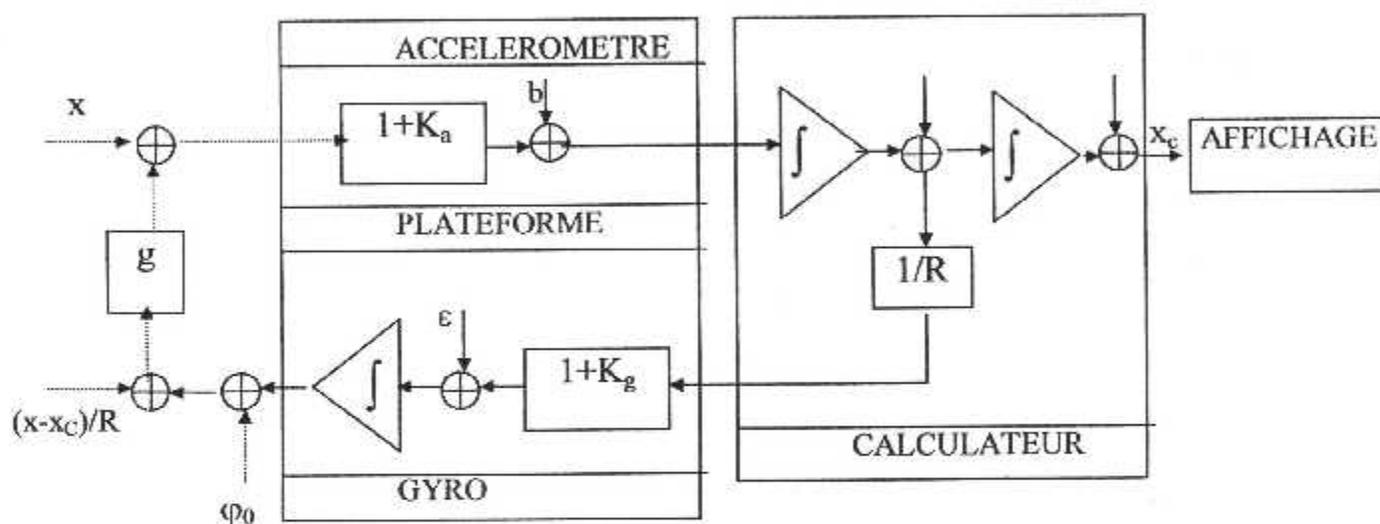


Figure III.13 : Navigation simplifiée à 1 axe

En réalité le bon fonctionnement de la plateforme à un axe ne peut être réalisé à cause de diverses erreurs :

■ Erreurs instrumentales

Le signal de sorti de l'accéléromètre est  $f_a$  différent de la valeur exact  $f$

$$f_a = (1 + K_a) f + b$$

Où  $K_a$  est le facteur d'échelle et  $b$  le biais de l'accéléromètre.

Alors que le signal de commande de la plateforme  $\omega_c$ , celle-ci est animée en fait d'une rotation  $\omega_p$ .

$$\omega_p = (1 + K_g) \omega_c + \varepsilon$$

où  $K_g$  est le facteur d'échelle et  $\varepsilon$  la dérive du gyroscope.

■ Erreurs d'initialisation

A l'instant initial, les position et vitesse introduites dans le calculateur sont entachées des erreurs  $\Delta x_0$  et  $\Delta \dot{x}_0$ , et la plateforme est décalée d'un angle  $\varphi_0$  par rapport à la verticale locale.

Toutes ces erreurs entraînent une erreur  $\Delta x(t)$  sur la position

$$(x_c(t) = x(t) + \Delta x(t))$$

Sachant que  $f = \ddot{x} - g\theta$

On peut écrire les deux équations du système :

$$\ddot{x}_c = b + (1 + k_a)(\ddot{x} - g\varphi)$$

$$\dot{\varphi} = (1 + k_g) \frac{\dot{x}_c}{R} + \varepsilon - \frac{\dot{x}}{R}$$

III. 3

■ Equation d'erreur

Par simple intégration, l'équation (III.3) entraîne compte tenu des conditions initiales [1]:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{x_c - x}{R} + \frac{1}{R} \int_0^t K_g \dot{x}_c dt - \frac{\Delta x_0}{R} + \int_0^t \varepsilon dt$$

En posant

$$\Delta x = x_c - x$$

L'équation exacte vérifiée par  $\Delta x$  est

$$\Delta \ddot{x} + \left( \frac{1 + K_a}{R} \right) g \Delta x = b - (1 + K_a) g \left( \varphi_0 - \frac{\Delta x_0}{R} \right) + K_a \ddot{x}$$

$$- (1 + K_a) \frac{g}{R} \int_0^t K_g \dot{x}_c dt - (1 + K_a) g \int_0^t \varepsilon dt$$

III. 4

En développant l'équation (III.4) et en ne retenant que les termes du premier ordre, il vient

$$\Delta \ddot{x} + \omega_s^2 \Delta x = b - g \varphi_0 + \omega_s^2 \Delta x_0 + K_a \ddot{x} - \omega_s^2 \int_0^t K_g \dot{x}_c dt - g \int_0^t \varepsilon dt$$

III. 5

en ayant posé  $\omega_s^2 = g/R$ .

Le système de navigation simplifié va donc se comporter quant à ses erreurs comme un oscillateur de période de Schuler :  $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \approx 84 \text{ mn}$

L'intégration de l'équation (III.5) avec les condition initiales  $\Delta x_0$  et  $\Delta \dot{x}_0$  donne :

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \Delta \dot{x} \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} + \left( \frac{b}{g} - \varphi_0 \right) R (1 - \cos \omega_s t) - K_g v \left( t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - R \varepsilon \left( t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) + K_a y T \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s}$$

avec  $T$  est une période très inférieure à 84 minutes et nulle après.

L'analyse de l'équation peuvent montrer deux classes d'erreurs :

Classe 1 : erreurs restant bornées avec le temps :  $\Delta x_0$ ,  $\Delta \dot{x}_0$ ,  $b$ ,  $\varphi_0$  et  $K_a$ .

Classe 2 : erreurs croissant avec le temps :  $K_g$  et  $\varepsilon$ .

Les erreurs plus importants (classe 2) viennent donc du gyroscope.

#### ■ Instabilité du calcul de l'altitude

Afin de calculer l'altitude  $h$ , on peut envisager de mettre sur la plateforme un deuxième accéléromètre d'axe sensible vertical qui mesure la composante

$$f_2 = \ddot{h} + g \quad \text{avec} \quad g \cong g_0 \left( 1 - 2 \frac{h}{R} \right)$$

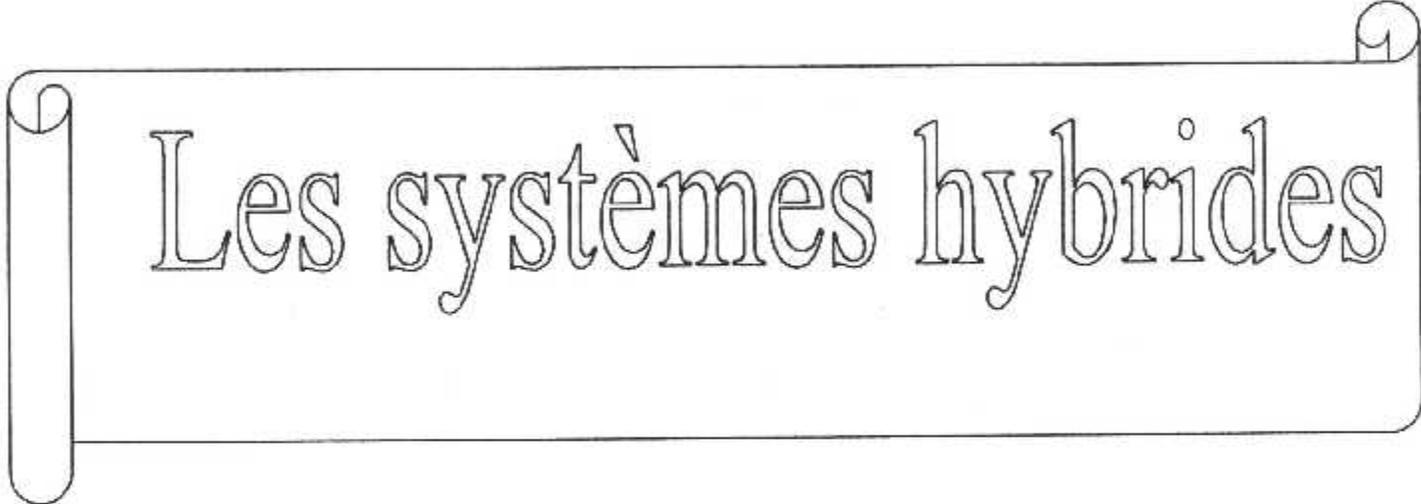
L'altitude pourrait donc être calculée en intégrant l'équation :

$$\ddot{h} - 2 \frac{g}{R} h = f_2 - g_0$$

Cette équation a l'inconvénient majeur d'être instable «  $\exp\left(+\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right)$  »

dans la solution. Ainsi une erreur initiale d'altitude de 1 m conduirait à une erreur de 150000 m après 2 heures de fonctionnement. Il est donc impossible d'utiliser des moyens purement inertiels pour déterminer l'altitude lors d'un fonctionnement de quelques heures. Il convient d'utiliser une information extérieure d'altitude (altimètre) afin de former un système hybride à erreurs bornées.

# Chapitre IV



## Les systèmes hybrides

## IV.1 NECESSITE DU RECALAGE

Les systèmes à inertie ont des performances qui se dégradent en fonction de la durée écoulée depuis l'alignement. On est conduit à chercher un moyen d'aider. Les systèmes à inertie avec des instruments plus grossiers, mais dans les erreurs restent bornées avec le temps. Le système globale de navigation ainsi réalisé porte le nom de système hybride ou encore de système aider.

Au navigateur inertiel, beaucoup des instruments auxiliaires ne fournissent que des informations partielles et souvent intermittentes sur les paramètres de navigation ( position, vitesse et altitude ). On peut concevoir intuitivement un système hybride comme un système de navigation utilisant les mesures auxiliaires pour recalibrer certains paramètres de navigation et le système à inertie pour extrapoler entre ses mesures.

La plupart des informations auxiliaires ont un caractère intermittent alors que le système à inertie fonctionne en principe en permanence; il convient donc de prévoir des modes de fonctionnement hybride ou inertiel pur suivant que ces informations sont disponibles ou non, tout en ne négligeant pas les problèmes de commutation et de transitoire entre ces modes.

On va ranger les diverses méthodes de synthèse de système hybride en deux classes :

## IV.2 APPROCHE CLASSIQUE

### IV.2.1 Le principe

Cette approche utilise les techniques classiques des fonctions de transfert. On a représenté un schéma de navigateur par inertie dans la figure IV.1 : la force spécifique mesurée par les accéléromètres, corrigée des accélérations de Coriolis est intégrée deux fois pour donner la vitesse et la position à partir desquelles les accélérations de Coriolis et le taux de rotation  $\omega$  commandé à la plateforme sont alors calculés.

Les divers points d'intervention envisageables sont : (1) au niveau de la force spécifique, (2) au niveau de la vitesse à l'intérieur de la boucle, (3) au niveau de la vitesse à l'extérieur de la boucle, (4) au niveau de la position à l'intérieur de la boucle, (5) au niveau de la position à l'extérieur de la boucle, (6) au niveau du taux de rotation commandé à la plateforme.

Le choix du point d'intervention est fait soit par des considérations semi empiriques (un bon système est un système amorti avec un coefficient d'amortissement  $\zeta=0.7$ ) soit par des méthodes optimales stationnaires.

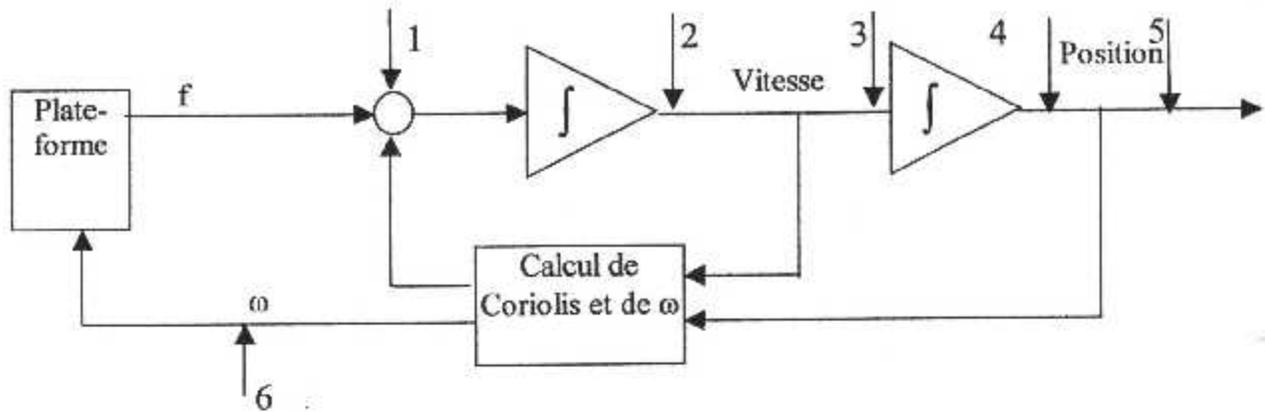


Figure IV.1 : Points d'intervention sur un système pur

### IV.2.2 Exemple d'un système hybride amorti classique

On a représenté sur la figure IV.2 le schéma fonctionnel d'un système inertielle à 1 axe dont on a étudié les erreurs et auquel on a ajouté une référence extérieure de vitesse en agissant au point (1).

Si les erreurs instrumentales de la référence extérieure de vitesse sont représentées par un biais  $b_e$  et un facteur d'échelle  $K_e$ , on a

$$v_e = (1 + K_e)v + b_e$$

On utilise cette référence extérieure de vitesse avec le facteur d'amortissement  $K_d$ .

On peut écrire les équations dynamiques du système

$$\ddot{x}_c = b + (1 + K_d)(\ddot{x} - g\phi) - K_d \dot{x}_c + K_d [b_e + (1 + K_e)\dot{x}]$$

$$\dot{\phi} = (1 + K_g) \frac{\dot{x}_c}{R} + \varepsilon - \frac{\dot{x}}{R}$$

L'équation précédente donne par l'intégration :

$$\phi = \phi_0 + \frac{\Delta x}{R} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t K_g \dot{x}_c dt - \frac{\Delta x_0}{R} + \int_{t_0}^t \varepsilon dt$$

Il s'ensuit que l'équation vérifiée par l'erreur de position  $\Delta x$  est :

$$\Delta \ddot{x} + K_d \Delta \dot{x} + \frac{(1 + K_d)g}{R} \Delta x = b - (1 + K_d)g \left[ \phi_0 - \frac{\Delta x_0}{R} \right] + K_d \ddot{x}$$

$$- (1 + K_d) \frac{g}{R} \int_{t_0}^t K_g \dot{x}_c dt - (1 + K_d)g \int_{t_0}^t \varepsilon dt + K_d b_e + K_d + K_e \ddot{x}$$

En ne retenant que les termes du premier ordre de cette équation il vient :

$$\Delta \ddot{x} + K_d \Delta \dot{x} + \omega_s^2 \Delta x = b - g\varphi_0 + \omega_s^2 \Delta x_0 + K_d \dot{x} - \omega_s^2 \int_{t_0}^t K_g \dot{x} dt - g \int_{t_0}^t \varepsilon dt + K_d b_e + K_d K_e \dot{x}$$

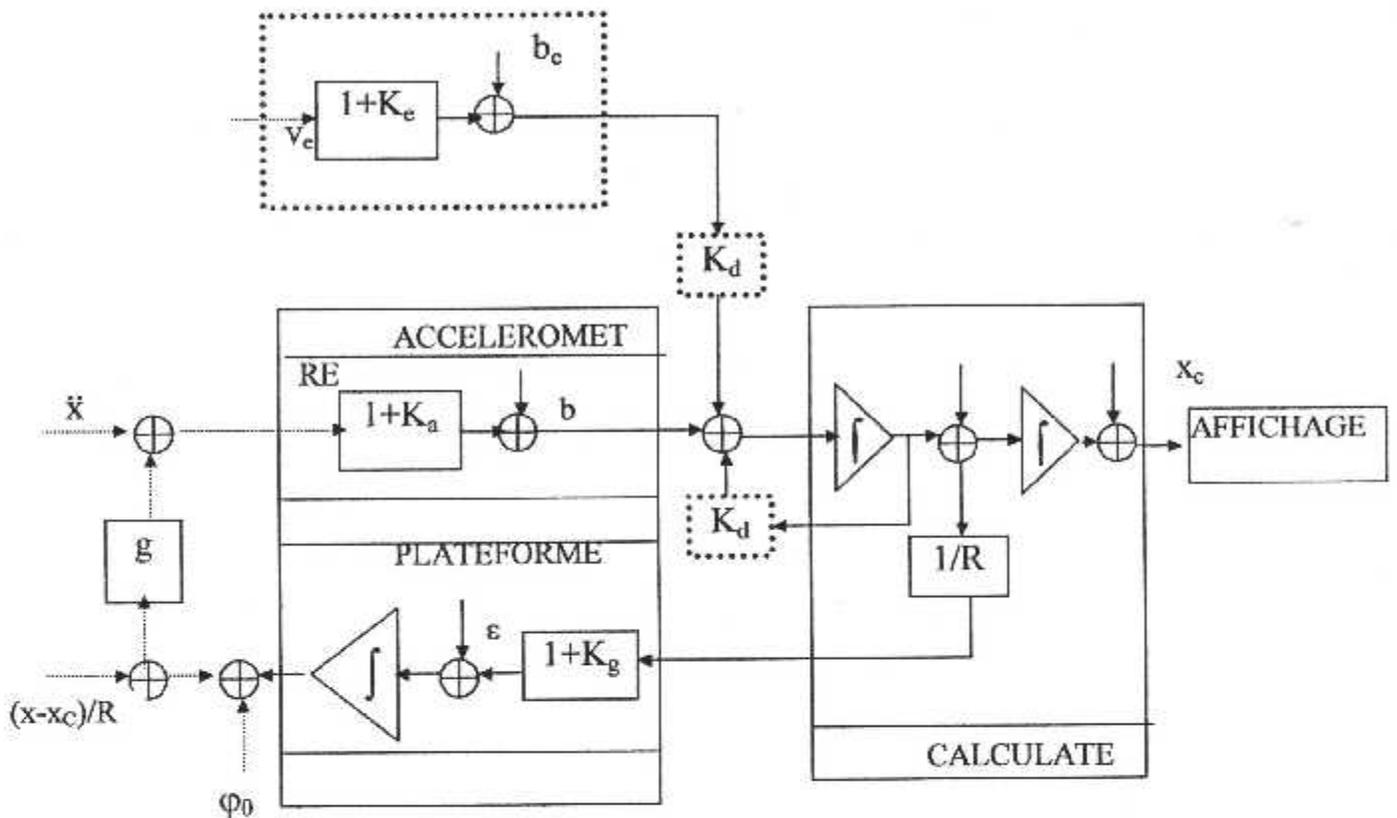


Figure IV.2 : Système hybride avec référence extérieure de vitesse

Le système hybride se comporte quant à ses erreurs comme un oscillateur *amorti* avec un coefficient d'amortissement  $\zeta = K_d / 2\omega_s$  mais toujours avec des termes croissants avec le temps dus aux erreurs instrumentales comme pour le système pur non amorti.

Cette méthode reste donc insuffisante pour atténuer les erreurs.

### IV.3 APPROCHE OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE

L'approche optimale consiste à représenter les divers erreurs statistiques intervenant à l'aide d'un modèle markovien et à traiter par un filtre de Kalman l'ensemble des signaux d'erreurs  $\Delta$  interprétés alors comme des observations sur les erreurs dynamiques du système à inertie. Les estimations ainsi obtenues servent à recalculer les paramètres de navigation soit en boucle ouverte (figure IV.3a) soit en boucle fermée (figure IV.3b).

Un système dit sous optimal a une structure identique ; on le qualifie ainsi lorsqu'il est obtenu soit par simplification d'un filtre optimal, soit en faisant l'hypothèse d'une structure plus simple dont on optimise les paramètres par des méthodes de vecteur d'état.

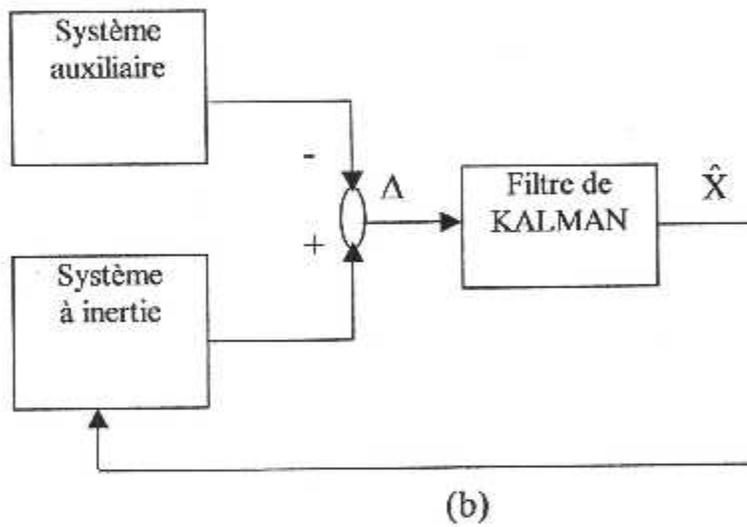
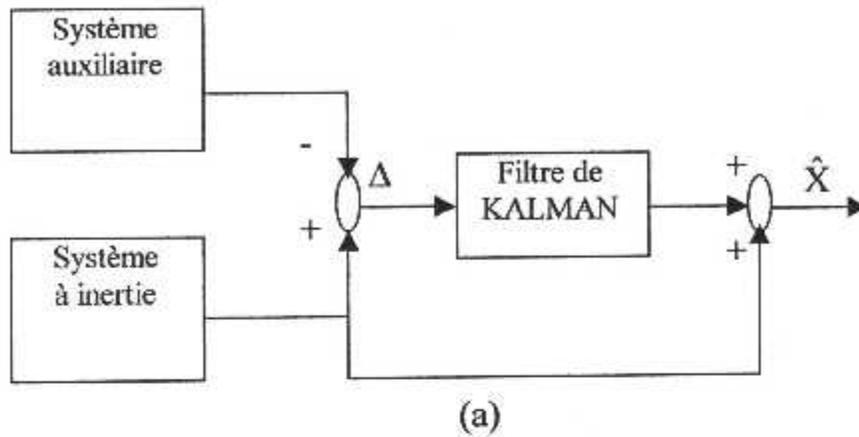


Figure IV.3 : (a) boucle ouverte, (b) boucle fermée

## IV.4 LE FILTRE DE KALMAN

### IV.4.1 Présentation des filtres

Le problème de l'estimation de l'état  $x(t)$  d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir des mesures  $y(t)$  bruitées peut être divisé en trois classes distinctes et selon l'intervalle d'observation  $[t_0, t_f]$  comme le montre la figure IV.4.

- La prédiction si  $t < t_f$
- Le filtrage si  $t = t_f$
- Le lissage si  $t < t < t_f$

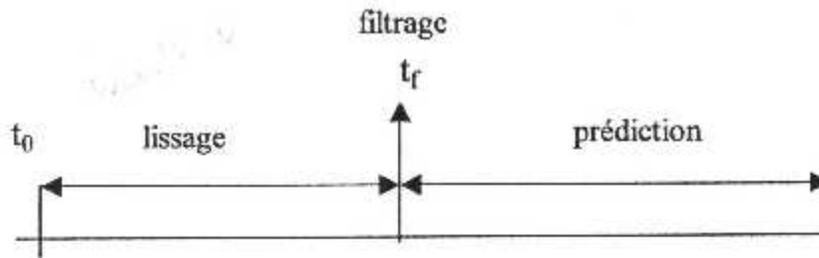


Figure IV.4: Différents cas d'estimation

Le problème de filtrage linéaire a été résolu par le filtrage de Kalman, lequel a été développé par R.E Kalman et R.S Bucy.

#### IV.4.2 Principe d filtre de Kalman

C'est un algorithme récursif permettant d'évaluer de manière optimale les inconnues à partir d'observations sur le système.. La récursivité est un avantage très intéressant : seules les données de le plus proche sont à utiliser dans les calculs, ce dernier est donc relativement rapide.

L'algorithme de Kalman fournit la solution optimale au sens de la minimisation de la variance des erreurs.

Le filtre de Kalman traditionnel est utilisé lorsqu'il existe une relation linéaire entre le temps  $t$  et le temps  $t+1$ . Des algorithmes adaptés ont été développés pour traiter les problèmes non linéaires. Ils utilisent les mêmes principes mais sont nommés filtres de Kalman étendu (extended Kalman filter).

Cet algorithme de Kalman fut appliqué dans plusieurs domaines et notamment l'aérospatiale, la navigation inertielle, la détermination des trajectoires, etc....

La figure IV.5 schématise le principe du filtrage de Kalman qui comprend deux phases :prédiction et correction à partir d'observations.

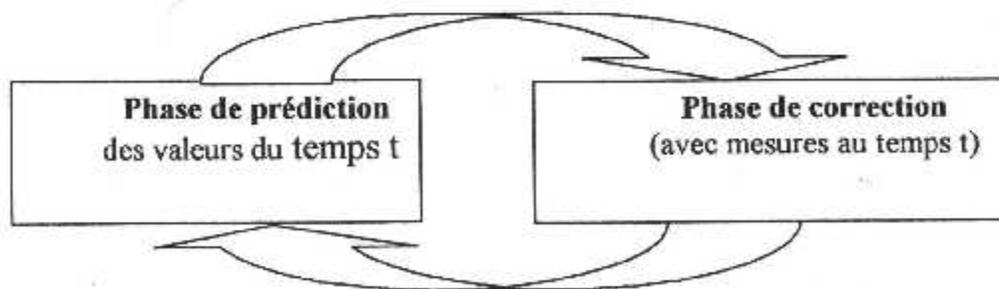


Figure IV.5 : Principe du filtre de Kalman

On va distinguer le cas du filtre applicable aux systèmes continus et celui applicable aux systèmes discrets.

- **Modèle continu**

Le système est modélisé par un ensemble d'équations représentant l'évolution de l'état  $\hat{x}(t)$  du système et des observations  $y(t)$  réalisées sur ce système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + u(t) + v(t) & \text{équation d'évolution} \\ y(t) = C \cdot \hat{x}(t) + w(t) & \text{équation d'observation} \end{cases}$$

où :

$x$  : vecteur d'état du système dimension  $n$ .

$A$  : matrice dynamique du système de dimension  $n \times n$ .

$u$  : vecteur d'entrée, fonction de  $t$ , connu.

$v$  : bruit blanc gaussien à  $n$  dimensions de moyenne nulle  $E[v(t)] = 0 \forall t$ , de

covariance :  $E[v(t) \cdot v^T(\tau)] = Q(t) \cdot \delta(t - \tau)$

$Q(t)$  est une matrice définie non négative.

$C$  : matrice d'observation de dimension  $m \times n$ .

$w$  : bruit blanc gaussien à  $m$  dimensions, de moyenne nulle et de covariance :

$E[w(t) \cdot w^T(\tau)] = R(t) \cdot \delta(t - \tau)$

$R(t)$  est une matrice définie positive.

$x_0(t)$  : état initial du système d'état aléatoire, de variation statistiques connues.

- **Modèle discret**

Le modèle discret, couramment utilisé, est obtenu soit directement par une modélisation discrète, soit par discrétisation du modèle continu. Les équations prennent la forme :

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + u_k + v_k \quad \text{équation d'évolution}$$

$$y_k = C_k \cdot x_k + w_k \quad \text{équation d'observation}$$

où  $v_k$  et  $w_k$  sont des bruits pseudo-blancs gaussiens de moyenne nulle tel que :

$$E[v_k \cdot w_j^T] = Q_k \delta_{kj}$$

$$E[w_k \cdot w_j^T] = R_k \delta_{kj}$$

$$E[v_k \cdot w_j^T] = 0 \quad \forall k, j$$

$\delta_{kj}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k=j \\ 0 & \text{pour } k \neq j \end{cases}$

L'état initial  $x_0$  est aussi une variable gaussienne, indépendante des bruits  $v_k$  et  $w_k$ , et de matrice de variance  $P_0$ .

#### IV.4.3 Formulation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une généralisation de la méthode des moindres carrés récursifs.

Différentes hypothèses démonstrations permettent d'aboutir au filtre de Kalman [12]. Parmi celles-ci, celle qui consiste à considérer les grandeurs aléatoires  $u$ ,  $v$  et  $x(t_0)$  gaussiennes et chercher l'estime (à variance minimale)  $\hat{x}(t)$  qui minimise un critère d'écart quadratique :

$$E \left[ (x(t) - \hat{x}(t))^T \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \right]$$

L'estimé à variance minimale est fournie par la moyenne conditionnelle de  $x(t)$ , étant donné les observations  $y(\tau)$ , qui, dans le cas gaussien est égale au maximum a posteriori et à l'estime optimale linéaire.

L'estimé de  $x(t)$  en fonction de l'ensemble des observations  $y(t) = \{y(\tau), 0 < \tau < t\}$  noté  $\hat{x}(y(t))$  qui minimise le critère d'écart quadratique :

$$P(t) = E \left[ (x(t) - \hat{x}(y(t))) \cdot A(x(t) - x(y(t))) \right]$$

Ce minimum est obtenu [12] pour :

$$\hat{x}(t) = E[x(t) | z(t)]$$

La formulation du filtre de Kalman est alors simplement obtenue par le calcul de la moyenne conditionnelle précédente.

#### IV.4.4 Filtre de Kalman : Cas d'observations discrètes

Le schéma de la figure IV.6 développe les différentes étapes du calcul d'un filtre de Kalman discret.

Le filtre comprend 3 phases :

- une phase d'initialisation qui consiste à donner des valeurs à l'état  $x$  et à la matrice de covariance  $P$  à l'instant initial.

- une phase de prédiction qui calcule l'état  $x$  et la matrice  $P$  à l'instant  $k+1$  suivant.

- une phase de calcul du gain  $K$  du filtre, correction de l'état  $x$  à partir d'observation  $y$  à l'instant  $k+1$  et calcul de la matrice de covariance.

La matrice  $P$  fournit la variance de l'erreur d'estimation  $(x - \hat{x})$ .

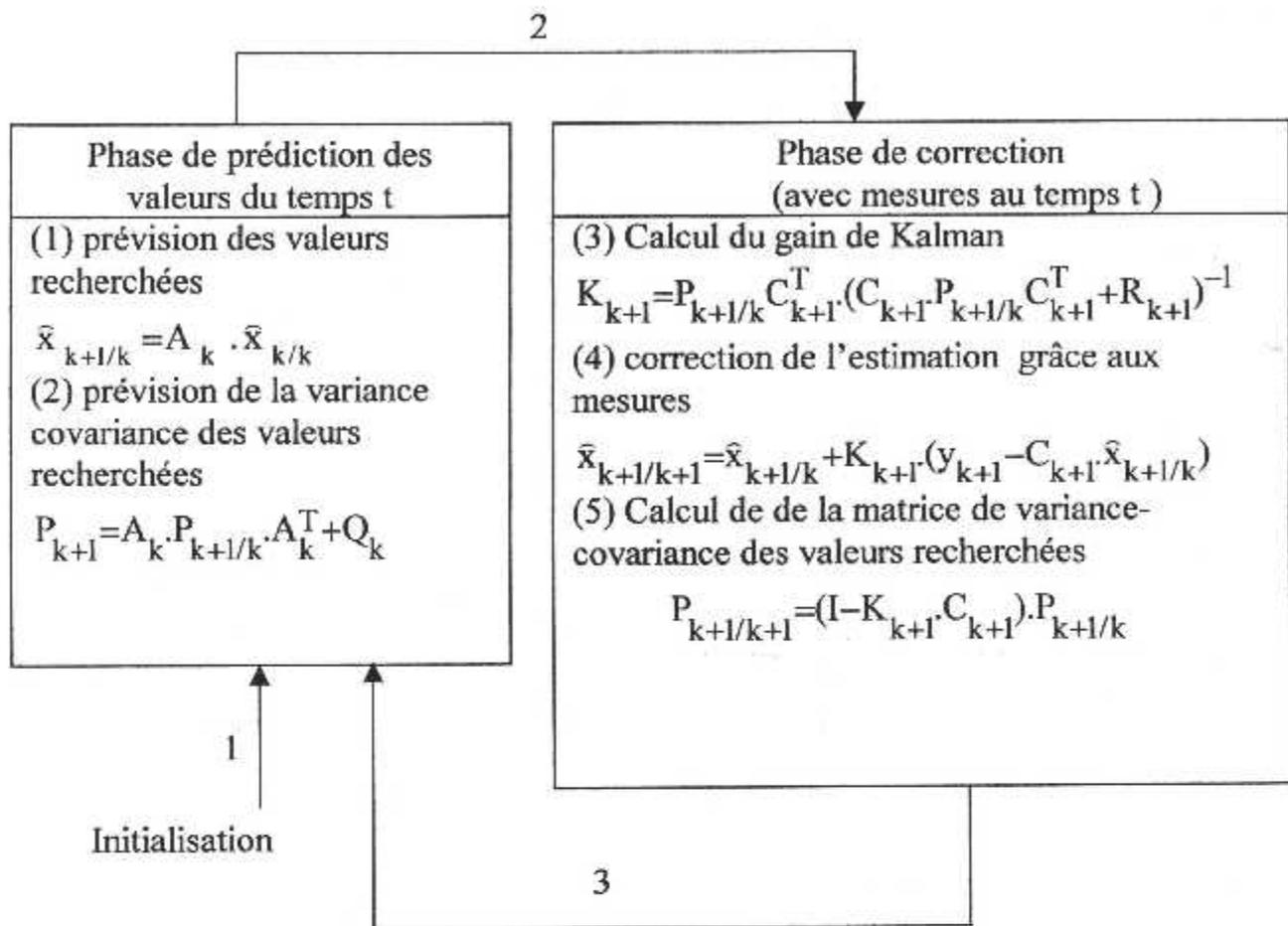


Figure IV.6 : Filtre de Kalman discret

#### IV.4.5 Filtre de Kalman : Cas d'observations continues

Dans ce cas, l'équation d'évolution est continue tandis que l'équation d'observation est discrète. On a les mêmes remarques que pour le cas discret sauf pour la notation du temps qui diffère.

Le schéma de la figure IV.7 développe les différentes étapes du calcul d'un filtre de Kalman continu à observations discrètes qui sera utilisé dans notre algorithme de recalage..

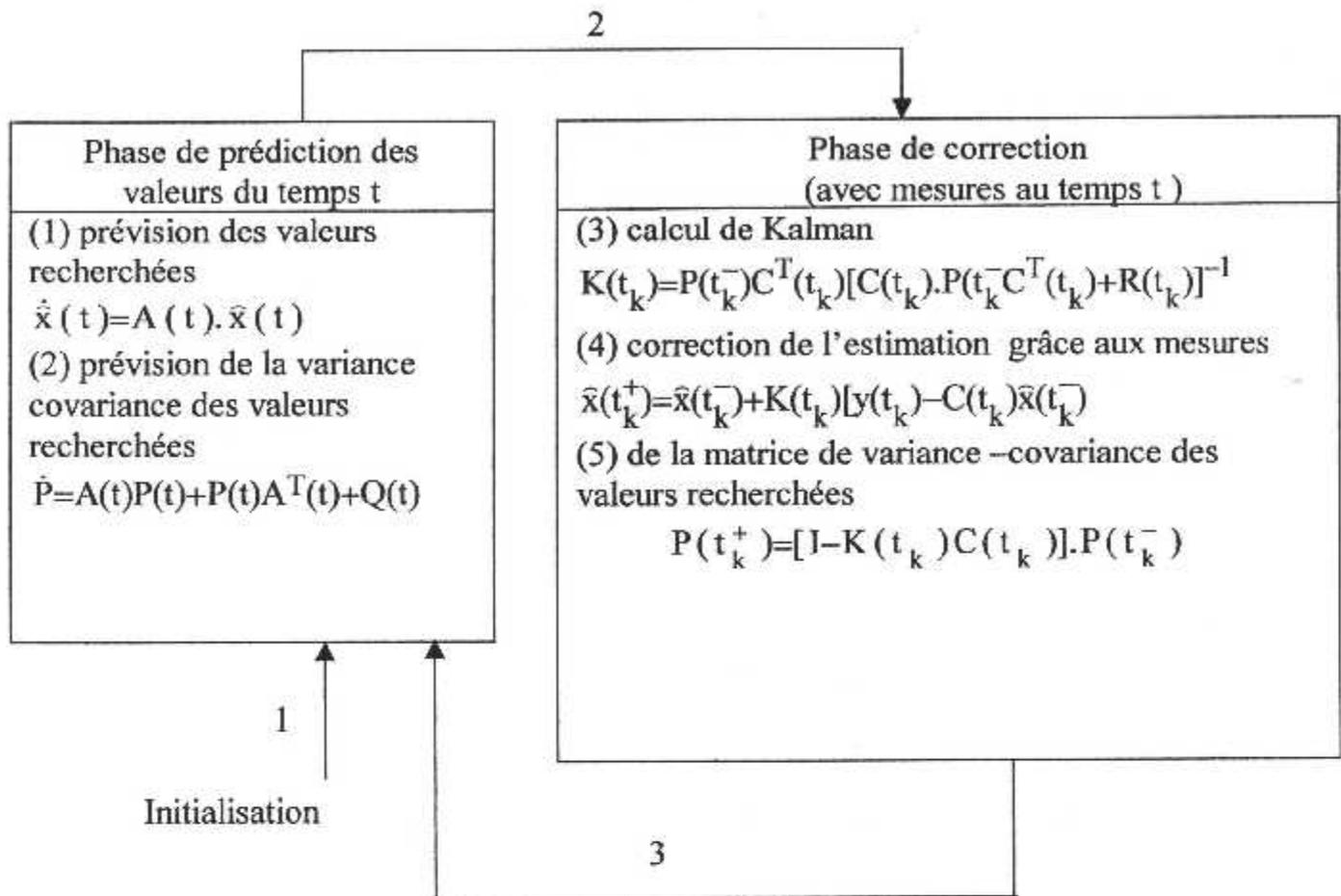


Figure IV.7 : Filtre de Kalman continu à observations discrets

#### IV.5 INSTRUMENTS DE NAVIGATION AUXILIAIRES

On va envisager ci-après les divers types d'informations fournies éventuellement au système par des instruments auxiliaires.

##### ■ Informations de vitesse sur les axes du véhicule

Divers instruments peuvent fournir la vitesse relative au sol soit par des moyens radar (Doppler), soit par des moyens mécaniques (compteur de vitesse lors du roulage d'un avion). D'autres instruments donnent la vitesse par rapport au fluide ambiant (loch, speedomètre).

Dans tous ces cas le capteur est lié au véhicule et par conséquent la mesure de vitesse auxiliaire  $\vec{v}_a$  qu'il fournit est donnée par ces composantes sur les axes de véhicule (ou encore sur les axes plate forme, la conversion se faisant à l'aide des angles donnés par les resolvers de la plate forme). L'information intéressante en vue de l'hybridation résulte de la comparaison entre la vitesse  $\vec{v}_c$  calculée par le système à inertie et  $\vec{v}_a$ .

■ **Information de vitesse sur les axes terrestres**

Si l'instrument de mesure n'est pas sur le véhicule, la mesure auxiliaire de vitesse est fournie sur des axes géographiques locaux; c'est le cas si la vitesse d'un avion est mesurée par une station d'observation au sol transmettant le résultat à l'avion, ou encore si l'on utilise la vitesse donnée par le système de navigation d'un porte-avion pour un avion parqué (immobile) sur son pont.

■ **Informations de position**

Certains appareils donnent des mesures de position continues ou intermittentes. Comme dispositifs continus, signalons les systèmes radioélectriques LORAN, TACAN, OMEGA, ...

On peut ranger dans les dispositifs intermittents toute méthode classique à faire le point (relativement à des balises remarquables par exemple) ou les procédés utilisant les satellites de navigation.

■ **Information de cap et de verticale**

Certains dispositifs auxiliaires (compas magnétique, gyrocompas, gyroscope de verticale, ...) fournissent la verticale et/ou le cap.

■ **Informations astrales**

On peut lier directement ou indirectement un télescope ou une lunette à la plateforme à inertie et effectuer des visées astrales pour mesurer de combien la plateforme a dérivé au cours de son fonctionnement.

# Chapitre V

Simulation du recalage  
d'un navigateur inertiel

### V.1 INTRODUCTION

On va traiter dans ce chapitre le cas simple d'un navigateur muni d'un seul accéléromètre pour dégager les caractéristiques générales des systèmes inertiels, puis nous verrons le cas d'un navigateur inertiel réel équipé de 2 accéléromètres et 3 gyroscopes.

### V.2 RECALAGE OPTIMAL SIMPLIFIE D'UN SYSTEME INERTIEL A 1 AXE

On va considérer un problème de navigation idéalisé simplifié. L'avantage de cette approche est de mettre en évidence de façon simple quelques propriétés valables pour des systèmes de navigation réels.

Soit donc un véhicule se déplaçant dans le plan d'un méridien terrestre à altitude constante, la terre étant supposée sphérique et inertielle fixe. Ce véhicule peut être animé de tangage mais il ne présente ni mouvement de roulis, ni mouvement de lacet, ce véhicule comportant une plate forme à inertie simplifiée, cette dernière se compose d'un accéléromètre et d'un gyroscope à un degré de liberté.

On ne retient ici que certaines erreurs instrumentales : le biais  $b$  de l'accéléromètre supposé constant et la dérive  $\varepsilon$  de gyroscope considérée être une fonction aléatoire stationnaire modélisée par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = -\beta \cdot \varepsilon + v$$

$$v(\varepsilon) \text{ est un bruit blanc continu de covariance } E\{v(t) \cdot v(\tau)\} = 2 \cdot \beta \cdot \sigma_{\varepsilon}^2 \delta(t-\tau)$$

#### V.2.1 Equation d'évolution

On définit le vecteur d'état par :

$$X = \begin{bmatrix} x - x_c \\ \dot{x} - \dot{x}_c \\ \varphi - b/g \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

où  $x$  est la position du véhicule,  $x_c$  la position calculée.

L'équation d'évolution continue sera de la forme :

$$\dot{X} = A \cdot X + v \quad \text{avec}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

Et  $v$  un bruit blanc de covariance  $Q\delta(t-\tau)$ , avec  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta \cdot \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$

**V.2.2 Equation des observations**

Supposons que le véhicule possède outre la plate forme à inertie d'autres instruments ( Loran , Tacan , ...) donnant aux instants discret  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , des mesures de position indépendantes de celle du navigateur par inertie .

Alors la comparaison des deux positions indiquées équivaut à l'observation :

$$y(t_i) = C \cdot X(t_i) + w(t_i)$$

avec  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$

Le bruit blanc  $w(t_i)$  représente l'erreur des mesures auxiliaires.

On a représenté le schéma du navigateur inertiel optimal en boucle ouverte en figure V.1.

Il est alors facile d'utiliser de façon optimale toutes les informations en présence du filtre de Kalman donnant la meilleure estimée  $\hat{X}$  des erreurs du navigateur par inertie, compte tenu des mesures auxiliaires effectuées; corrigeant alors les indications du navigateur par inertie par les valeurs données par  $\hat{X}$ , on obtient la meilleure estimée des paramètres de navigation .

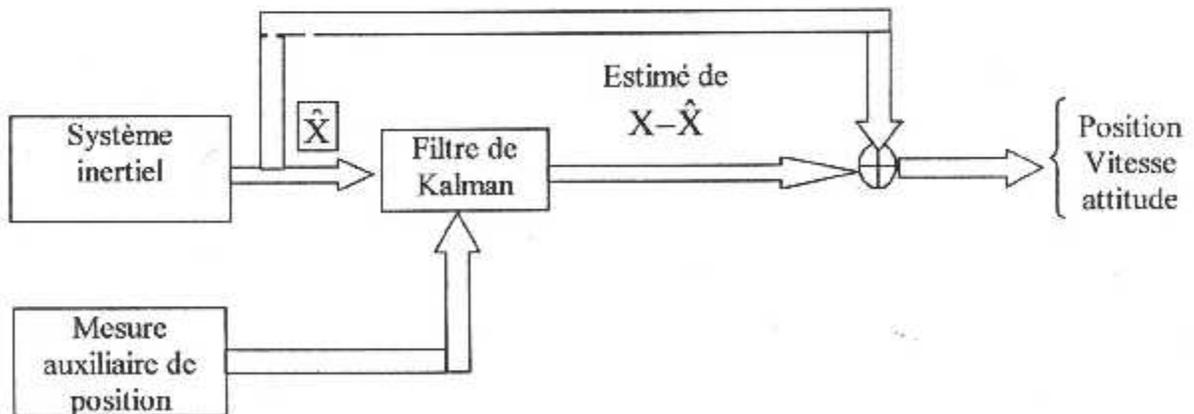


Figure V-1 :Navigateur intégré optimal

### V.2.3 Simulation

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$$g=9.81 \text{ m/s}^2$$

$$R=6370000 \text{ m}$$

$$\beta=1/(10\text{heures})=0.2777 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\sigma_{\varepsilon} = 0.01^\circ/\text{h}$$

$$E\{(x_c - x)^2\} = (200 \text{ m})^2$$

$$E\{\varepsilon^2\} = \sigma_{\varepsilon}^2$$

$$E\{(\varphi - b/g)^2\} = (5^\circ)^2$$

Ces termes sont les seuls à ne pas être nuls dans la covariance initiale

$$P_0 = E\{X(0).X'(0)\}$$

$$E\{w(t_i)^2\} = (1000 \text{ m})^2$$

En intégrant sur ordinateur par une méthode classique les équations donnant la matrice de covariance P des erreurs résiduelles du filtre de Kalman à observations discrètes, on détermine les performances du filtre, résultats représentés sur les figures V.2 à V.5 avec :

$$\sqrt{P(1,1)} \quad : \text{erreur résiduelle de position}$$

$$\sqrt{P(2,2)} \quad : \text{erreur résiduelle de vitesse}$$

$$\sqrt{P(4,4)} \quad : \text{erreur résiduelle de dérive}$$

#### Analyse des résultats

Les résultats obtenus sont représentés en figures V.2 à V.5.

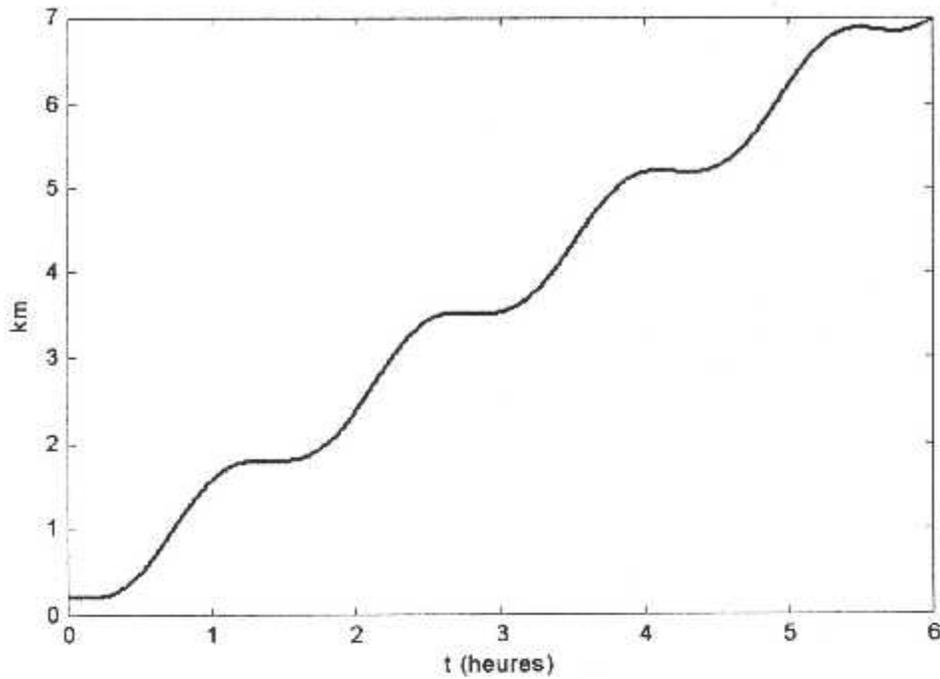


Figure V.2 Erreur résiduelle de position sans recalage

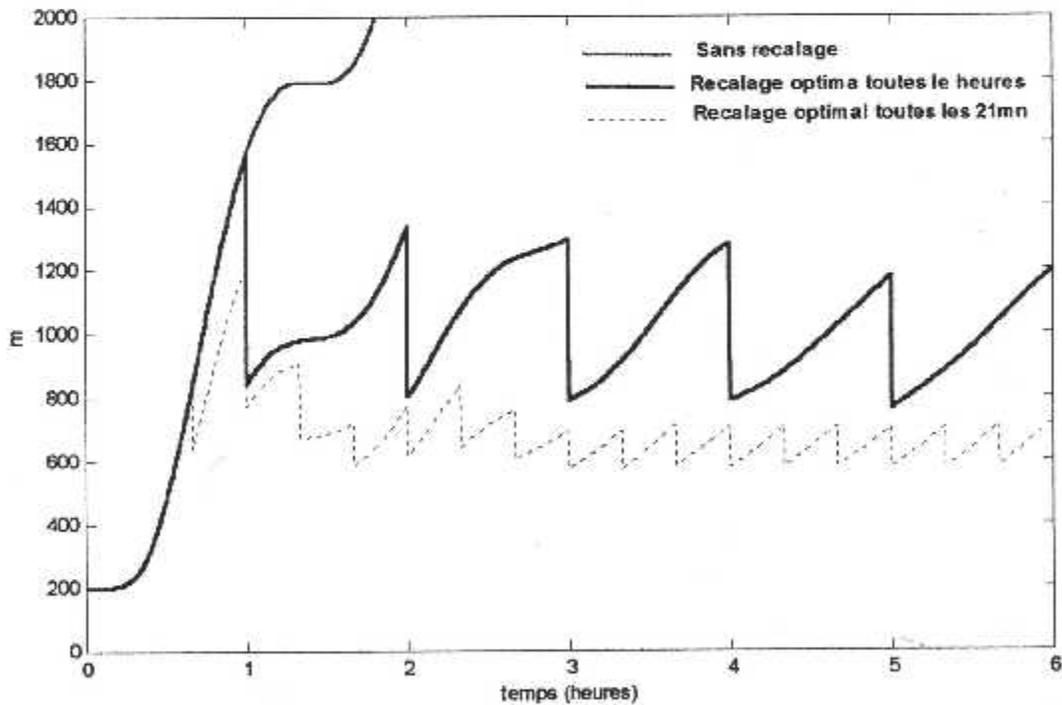


Figure V.3: Erreurs résiduelles de position sans recalage et avec recalage

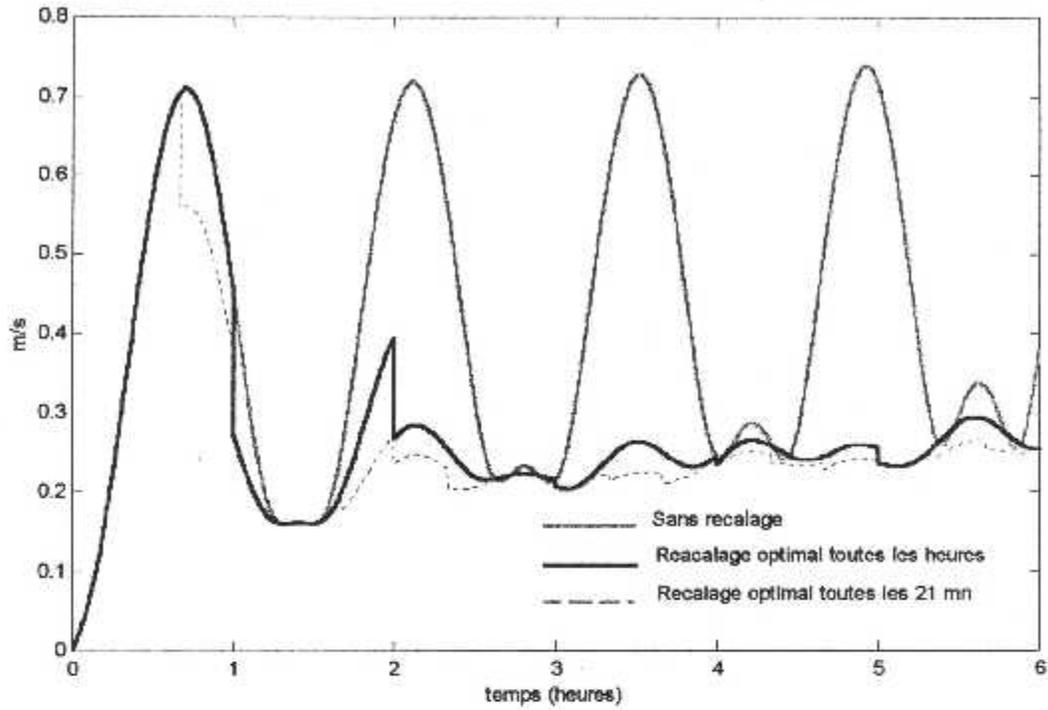


Figure V.4: Erreur résiduelle de vitesse sans recalage et avec recalage

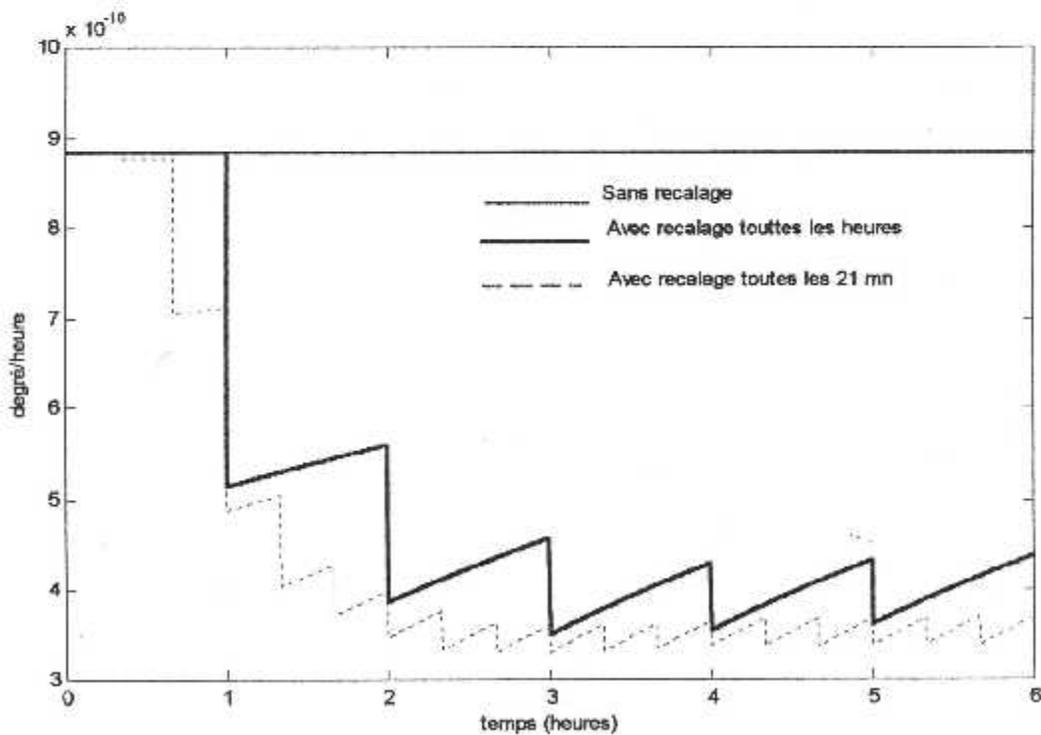


Figure V.5: Erreur de dérive de gyroscope sans recalage et avec recalage

Lorsque l'on utilise des recalages des positions optimaux, l'amélioration des performances du navigateur par inertie est très importante, tant pour la position que pour la vitesse : l'explication apparaît sur la figure V-5 où l'on voit que la dérive résiduelle du gyroscope, cause principale d'erreur est réduite de beaucoup de sa valeur initiale.

### V.3 RECALAGE OPTIMAL D'UN SYSTEME INERTIEL A 2 AXES

#### V.3.1 Equation d'évolution

On considère le cas d'une centrale inertielle embarquée sur un avion comportant 2 accéléromètres et 3 gyroscopes à 1 degré de liberté. On suppose qu'il existe un système auxiliaire donnant la position à intervalles réguliers pour effectuer le recalage du navigateur.

On suppose que l'avion reste à altitude constante ( $\delta z = \delta \dot{z} = 0$ ) et on ne retient que les dérives des gyroscopes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  et leurs facteurs d'échelle  $K_{g1}, K_{G2}$  et  $K_{g3}$  qui seront représentées par les modèles :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_i = v_i & i=1 \text{ à } 3 \\ E\{v_i, v_i'\} = q_i \delta \\ E\{\varepsilon_{i0}^2\} = \sigma_{i0}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{gi} = 0 \\ E\{K_{gi0}^2\} = \sigma_{i0}'^2 \end{cases}$$

On choisit une plateforme asservie au nord géographique d'où les ordres de précession des gyros :

$$\begin{cases} \omega_1 = p_1 + \Omega_1 \\ \omega_2 = p_2 + \Omega_2 \\ \omega_3 = p_3 + \Omega_3 \end{cases}$$

$$\text{avec } p_1 = -v_2/R \quad p_2 = -v_1/R \quad p_3 = \frac{v_2}{R} \text{tg}(L)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_3 \end{bmatrix} \text{ la rotation terrestre}$$

Si les instruments, leurs dispositions et l'alignement initial étaient parfaits, les trièdres calculateur [c] et plateforme [p] seraient initialement confondus et le resteraient par la suite car la rotation inertielle  $\omega_c$  du trièdre [c] est constamment commandée à la plateforme. Mais en raison des imperfections instrumentales,  $\omega_p$  diffère de  $\omega_c$  et il s'en suit un décalage entre [c] et [p] qui évolue avec le temps. Pour caractériser cette erreur, on introduit la rotation  $\psi$  faisant passer de [c] à [p].

On a les relations suivantes [1]:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \omega_3 \psi_2 - \omega_2 \psi_3 + \varepsilon_1 + K_{g1} \omega_1 \\ \dot{\psi}_2 = \omega_1 \psi_3 - \omega_3 \psi_1 + \varepsilon_2 + K_{g2} \omega_2 \\ \dot{\psi}_3 = \omega_2 \psi_1 - \omega_1 \psi_2 + \varepsilon_3 + K_{g3} \omega_3 \\ \frac{d}{dt}(\delta x) = \delta \dot{x} \\ \frac{d}{dt}(\delta y) = \delta \dot{y} \\ \delta \ddot{x} = -f_3 \psi_2 + f_2 \psi_3 + 2\omega_3 \delta \dot{y} + (\omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2) \delta x + (\dot{p}_3 - \omega_1 (\Omega_2 + \omega_2) + \omega_2 \Omega_1) \delta y \\ \delta \ddot{y} = -f_3 \psi_1 - f_1 \psi_3 - 2\omega_3 \delta \dot{x} + (\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2) \delta y + (-\dot{p}_3 - \omega_2 (\omega_1 + \Omega_1) + \omega_1 \Omega_2) \delta x \end{cases}$$

On peut à présent écrire le modèle global du système hybride considéré. Notons  $x_d$  le vecteur des erreurs dynamiques du système à inertie et  $x$  le vecteur global (vecteur d'état) des erreurs dynamiques et instrumentales :

$$x_d = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \delta x \ \delta y \ \delta \dot{x} \ \delta \dot{y}]$$

$$x = [x_d \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ K_{g1} \ K_{g2} \ K_{g3}] = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \delta x \ \delta y \ \delta \dot{x} \ \delta \dot{y} \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ K_{g1} \ K_{g2} \ K_{g3}]$$

Le vecteur d'état est constitué donc de l'écart angulaire  $[\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3]$ , de la différence entre la position vraie et la position calculée  $[\delta x \ \delta y]$ , de la différence entre la vitesse vraie et la vitesse calculée  $[\delta \dot{x} \ \delta \dot{y}]$ , de la dérive des gyroscopes  $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]$  et des facteurs d'échelles des gyroscopes  $[K_{g1} \ K_{g2} \ K_{g3}]$

Le modèle du système s'écrit sous forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + v$$

où :

$$a_{11} = \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2$$

$$a_{12} = -\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \Omega \cos L$$

$$a_{21} = -\omega_2 \omega_1 - \omega_2 \Omega \cos L$$

$$a_{22} = \omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2$$

$$\omega_s^2 = g/R$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ -w_3 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ w_2 & -w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_3 & f_2 & a_{11} & a_{12} & 0 & 2.w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & 0 & -f_1 & a_{21} & a_{22} & -2.w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le bruit blanc  $v$  a la covariance  $Q\delta(t-\tau)$  avec :

$$Q = \text{Diag} \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

Les  $q_i$  représentent les dérives aléatoires des gyroscopes.

La matrice de covariance initiale  $E\{x(t_0)x'(t_0)\} = P_0$  contient des termes provenant des modèles statistiques des erreurs instrumentales d'une part, des erreurs de l'alignement initial du système d'autre part.

### V.3.2 Equation des observations

La différence entre la position donnée par le système à inertie et celle donnée par le moyen auxiliaire de mesure équivaut aux observations :

$$y_1 = \delta x + w_1$$

$$y_2 = \delta y + w_2$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont les bruits blancs de covariance  $r_1$  et  $r_2$  (correspondant aux caractéristiques du moyen utilisé).

L'équation d'observation est donc de la forme :

$$y = C \cdot x + w$$

$$C = \begin{bmatrix} 0001000000000 \\ 0000100000000 \end{bmatrix}$$

$$R = E \{ w \cdot w^T \} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

### V.3.3 Simulation

La méthode utilisée pour effectuer la simulation du recalage et d'exécuter l'algorithme de Kalman conjointement avec un sous-programme générant les paramètres  $f(t)$ ,  $\omega(t)$  et  $L(t)$  dépendant de la trajectoire.

On a choisit- des trajectoires partant d'un point quelconque A à un point quelconque B à vitesse constante (figure V.6).



Figure V-6 : Type de trajectoire de la simulation

Les organigrammes de simulation sont représentés sur les figures V.7, V.8 et V.9.

Les valeurs initiales  $P_0$  de la covariance et  $X_0$  de vecteur d'état utilisées dans l'algorithme de simulation sont les suivantes :

$$P_0(1,1) = P_0(2,2) = P_0(13,3) = (5 \cdot 10^4)^2;$$

$$P_0(4,4) = P_0(5,5) = (800)^2;$$

$$P_0(6,6) = P_0(7,7) = (1)^2;$$

$$P_0(8,8) = P_0(9,9) = P_0(10,10) = (10^{-4})^2;$$

$$P_0(11,11) = P_0(12,12) = P_0(13,13) = (2 \cdot 10^{-4})^2;$$

$$X_0 = [ 0; 0; 0; 400; 200; 1; 1; 10^{-7}; 10^{-7}; 10^{-7}; 5 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}];$$

Les résultats des simulations sont représentés dans les figures V.10 à V15.

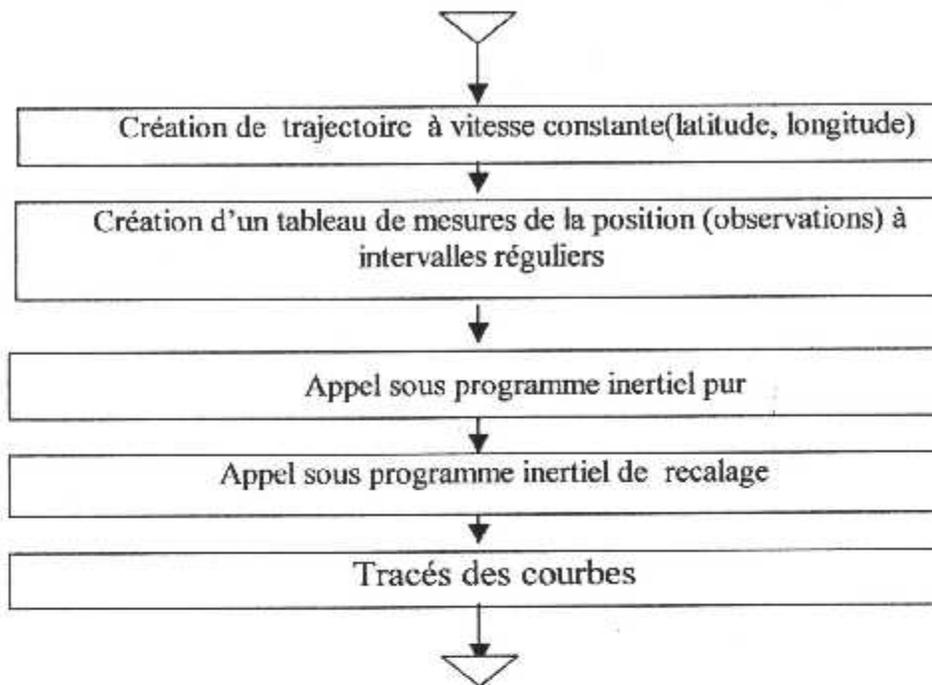


Figure V-7: Programme principal

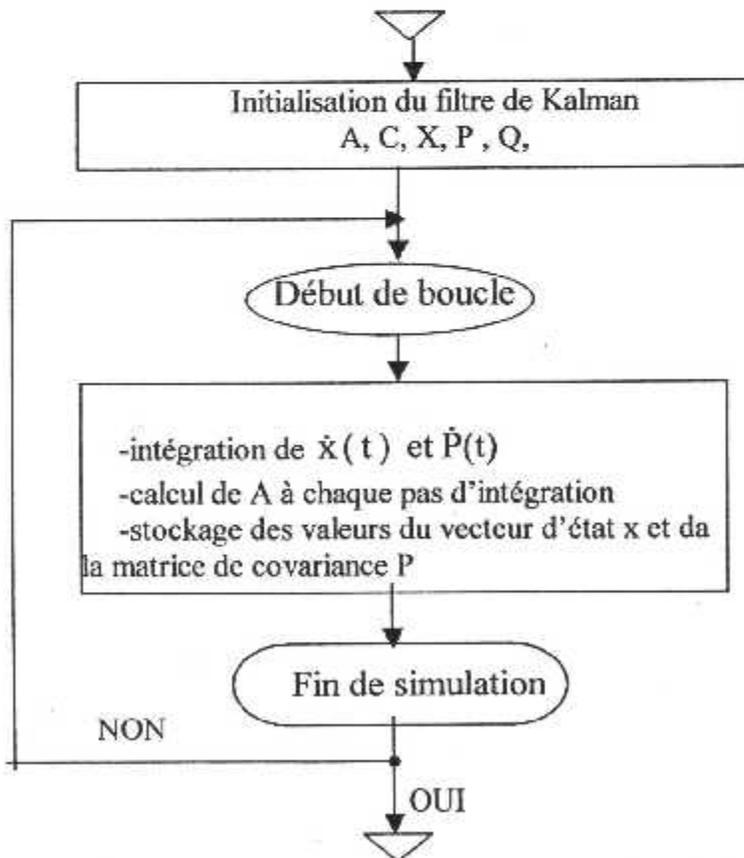


Figure V-8: Sous programme inertiel pure

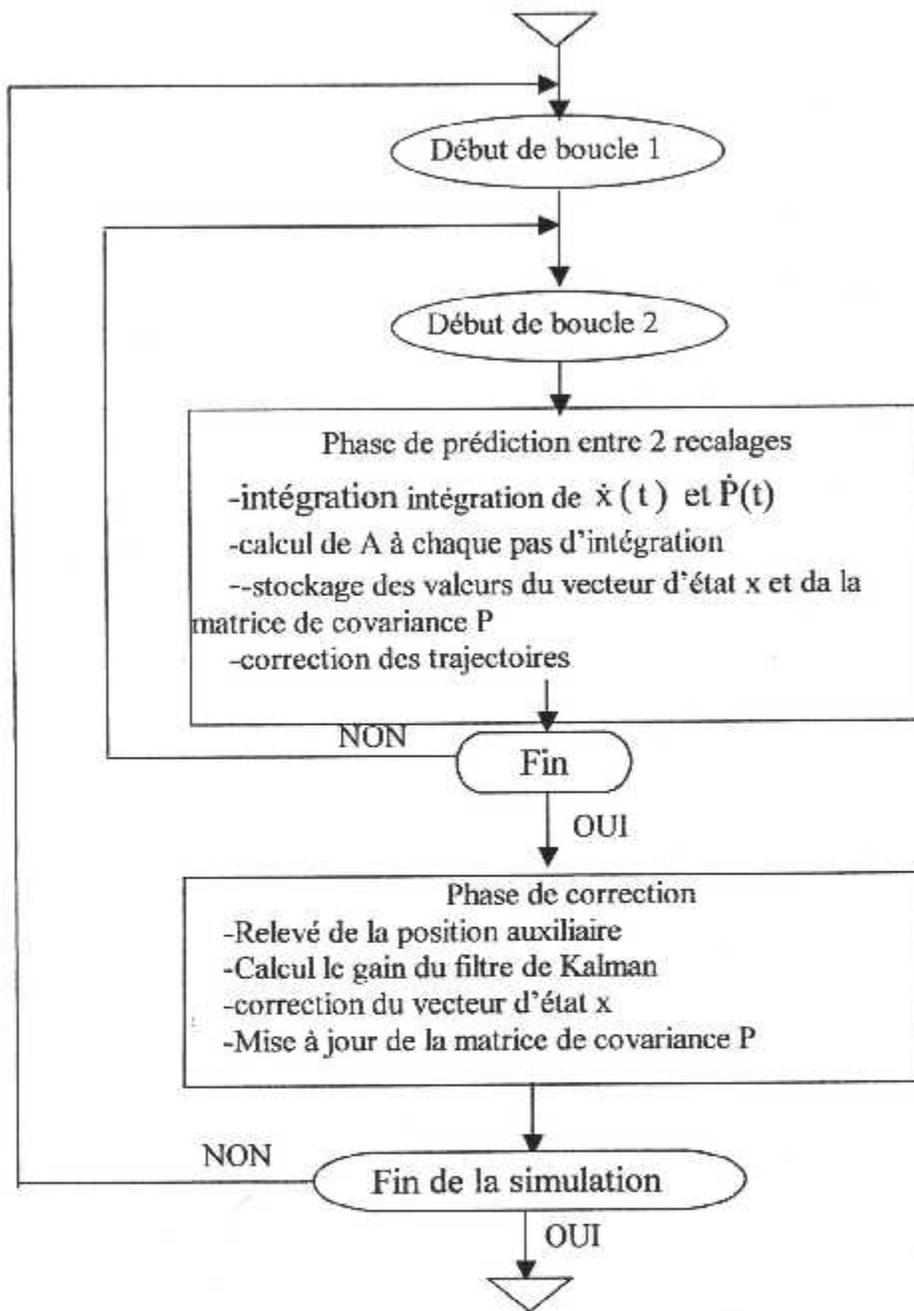


Figure V-9 Sous programme inertielle de recalage

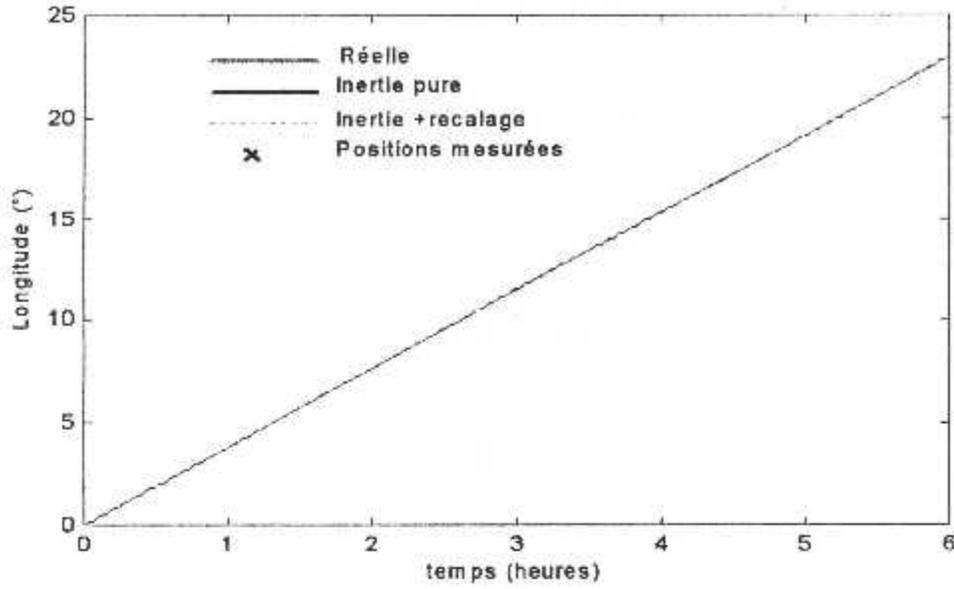


Figure V.10 : Latitude de la trajectoire pour v=230kts

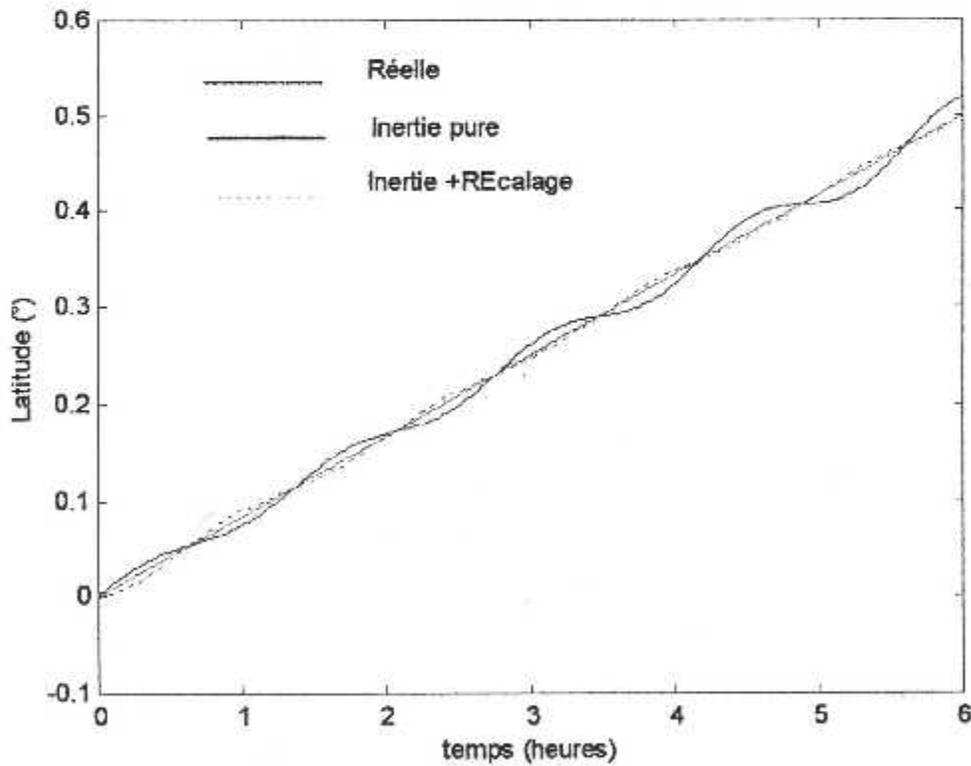


Figure V.11 : Longitude de la trajectoire pour v=230kts

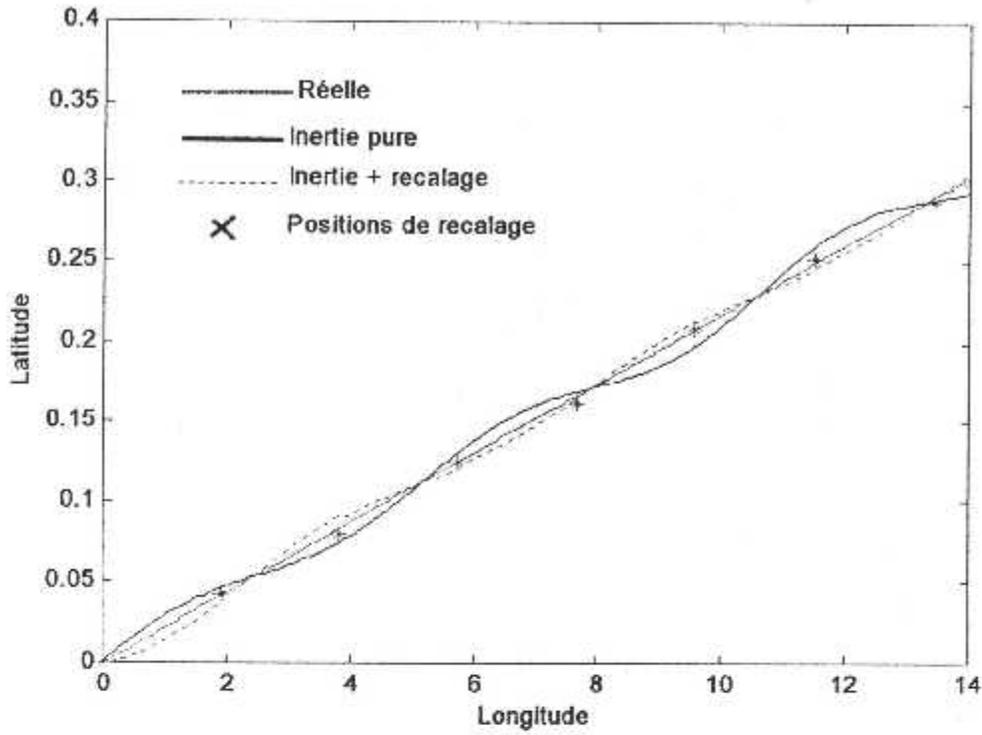


Figure V.12 : Latitude et longitude de la trajectoire pour v=230kts

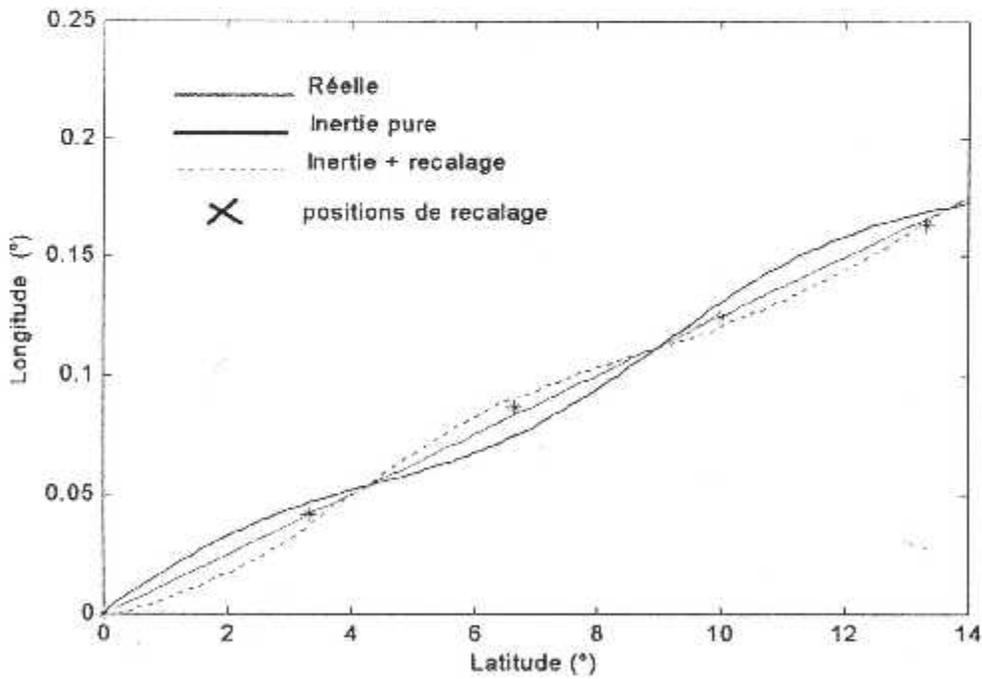


Figure V.13 Latitude et longitude de la trajectoire pour v=400kts

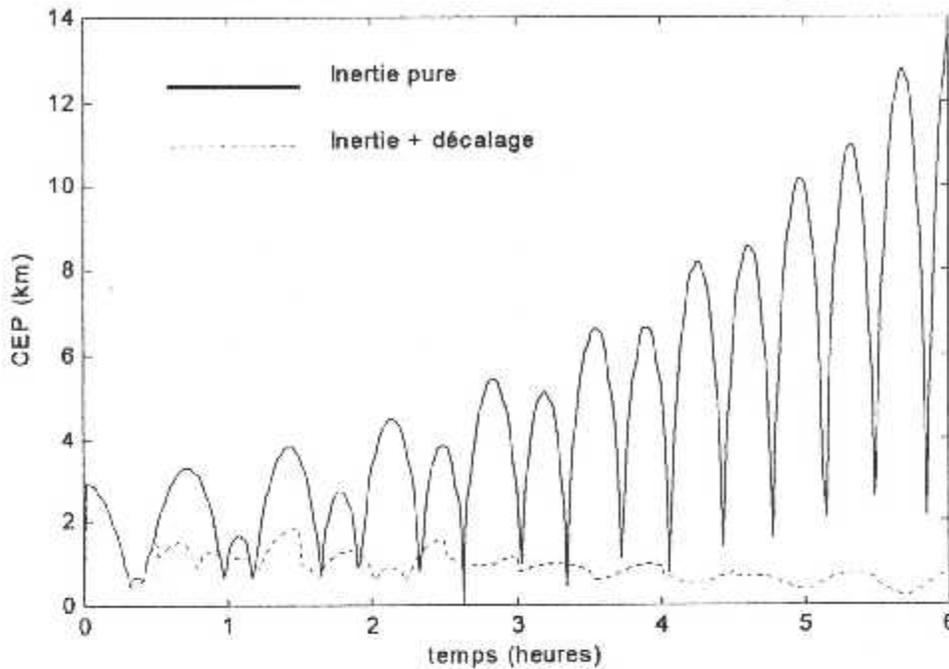


Figure V.14 : CEP pour une trajectoire v=230 kts

Nous avons effectué une série de simulations pour une trajectoire d'une durée de 6 heures en maintenant la vitesse constante. Nous avons pu obtenir une initialisation de la matrice de covariance P du filtre de Kalman qui nous a permis de tracer un ensemble de courbes (figures V.10 à V.14 ).

Pour analyser les résultats, on a tracé le CEP qui signifie en anglais « Circle of Equal Probability » et en français Cercle d'Egale Probabilité. C'est le rayon du cercle contenant 50% de la probabilité. Il est défini par :

$$A = \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2}$$

$$B = \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2}$$

où  $\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$  est la covariance des erreurs de position.

et on a :

$$CEP = \begin{cases} 0.676\sqrt{A} + 0.84B/\sqrt{A} & \text{si } \sqrt{B} < 0.348\sqrt{A} \\ 0.568\sqrt{A} + 0.609\sqrt{B} & \text{si } \sqrt{B} > 0.348\sqrt{A} \end{cases}$$

**Commentaires**

On peut dégager de ces courbes, les conclusions suivantes :

-les performance du système inertiel optimal avec recalage en position sont améliorées d'une manière considérable par rapport au système inertiel pur. On peut le remarquer sur les courbes donnant la trajectoire de l'avion et le CFP.

-le fonctionnement du filtre s'est révélé efficace pour de grandes vitesses ou pour des dérives de gyroscopes mauvaises.

# CONCLUSION

A travers ce mémoire de fin d'études du cycle d'ingénierat en aéronautique, nous avons essayé de montrer les différents aspects d'une centrale inertielle qui est un bon système de navigation mais qui possède une précision limitée (l'erreur d'une centrale à inertie par principe augmente au cours du temps), ce qui nous a conduit à étudier les moyens pour rendre performant ce système.

Nous avons ensuite utilisé un outil de filtrage très puissant, le filtre de Kalman, pour effectuer le recalage en position d'une centrale inertielle en définissant un vecteur de 13 paramètres caractérisant l'état du système. Nous avons montré à l'aide d'un ensemble de simulations, l'intérêt du recalage qui permet de réduire de façon très importante les erreurs dues aux dérives des gyroscopes.

Signalons, que le choix de l'initialisation du filtre doit être fait de façon minutieuse pour que le fonctionnement du filtre soit satisfaisant.

Nous pensons qu'il serait intéressant de continuer ce travail en ajoutant au recalage de position, un recalage de vitesse pour améliorer les performances du système inertielle.

# Bibliographie

1. Navigation inertielle optimale et filtrage statique - P.Faure
2. Inertiel navigation system - J. Carpentier - 1964
3. La navigation maritime par inertie - B. de Cramiers-1959
4. Inertiel navigation - R.Hparvin - 1962
5. Guidance and control of aerospace - C.T.Leondes - 1970
6. Le gyroscope - J.C.Radix - 1969
7. Gyroscopes et gyromètres - J.C.Radix - 1997
8. Système de navigation inertielle - C.Ladebese , J.MONPER - 1989
9. Système de bord - Y.Ribes
10. Centrale inertielle - D.Boyle – 1978
11. Avionique – Michel Coombs –1997
12. Le filtrage et ses applications –M.Labarrere, J.P.Krief, B.Gimonet – 1988
13. Equipement de bord (tomes 1 et 2) –Y.Ribes – 1980
14. Instrument de bord (tomes 1 et 2) – Jean Mermoz – 1988
15. Instrument de radionavigation – Claude Alari – 1992
16. VOR, DME, ILS, - Le département électronique de l'ENAC – 1983

## Sites Internet :

1. [www.avionics.com](http://www.avionics.com)
2. [www.univ-paris3.fr](http://www.univ-paris3.fr)
3. [www.dassault-aviation](http://www.dassault-aviation.com)
4. [www.Boeing.com](http://www.Boeing.com)