

3



2

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE BLIDA  
INSTITUT D'ELECTRONIQUE



**MEMOIRE DE MAGISTER**

SPECIALITE : ELECTRONIQUE  
OPTION : CONTRÔLE

**THEME**

**MODELISATION ET CONTRÔLE  
DU VOL LATERAL  
D'UN AVION**

Présenté par : M<sup>r</sup> MADDI Abdelkader

Devant le jury composé de:

- |                               |                                       |                   |
|-------------------------------|---------------------------------------|-------------------|
| M <sup>r</sup> H. SALHI       | (M.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA | <b>Président</b>  |
| M <sup>r</sup> K. AMMOUR      | (M.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA | <b>Rapporteur</b> |
| M <sup>r</sup> M.S. BOUCHERIT | (M.C) E.N.P d'ALGER                   | <b>Examineur</b>  |
| M <sup>r</sup> T.REZZOUG      | (C.C) I.N.E.S d'AERONAUTIQUE de BLIDA | <b>Examineur</b>  |
| M <sup>r</sup> B. KAZED       | (C.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA | <b>Invité</b>     |

BLIDA, ALGERIE  
1997

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT D'ELECTRONIQUE

**MEMOIRE DE MAGISTER**

SPECIALITE : ELECTRONIQUE  
OPTION : CONTRÔLE

**THEME**

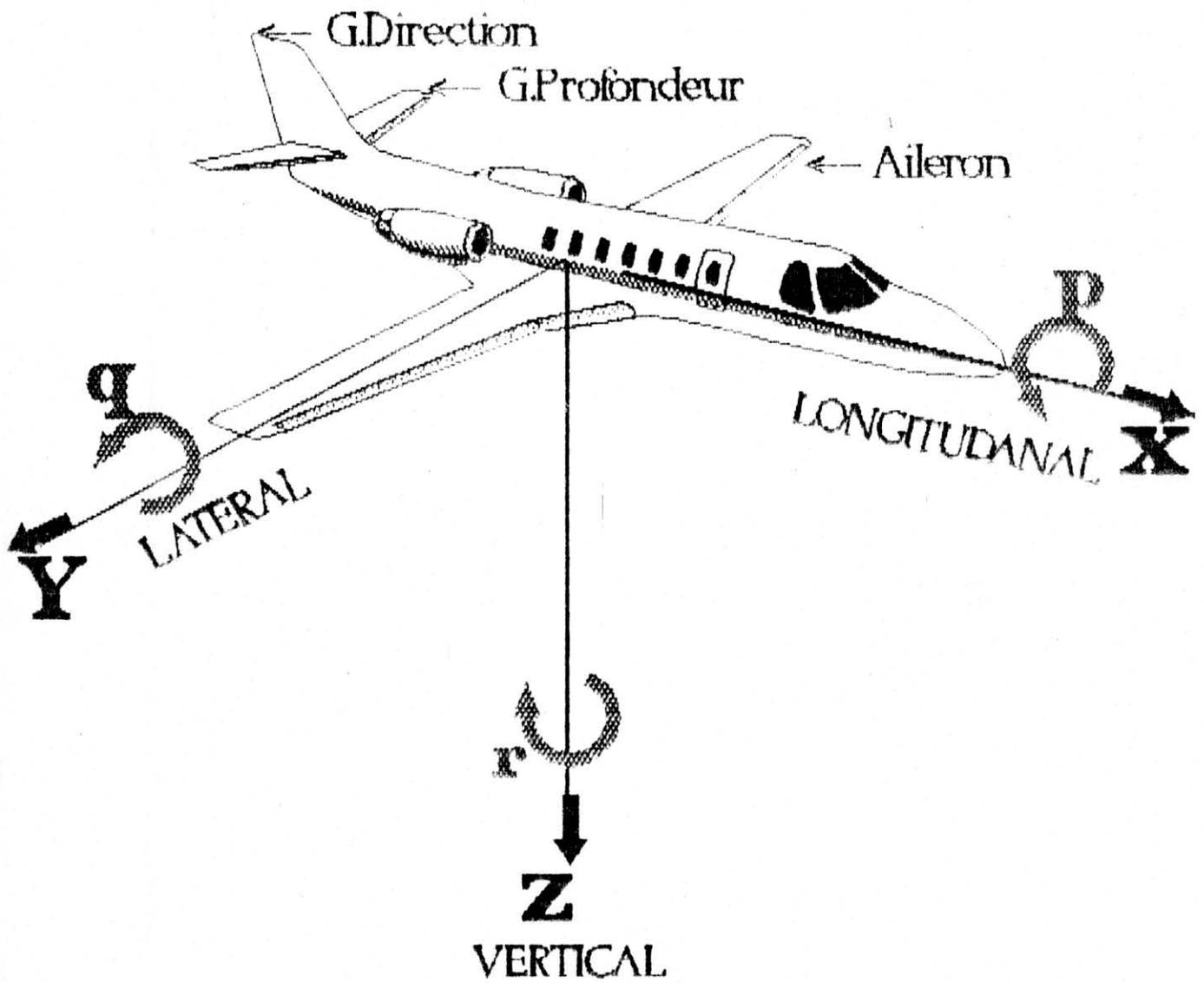
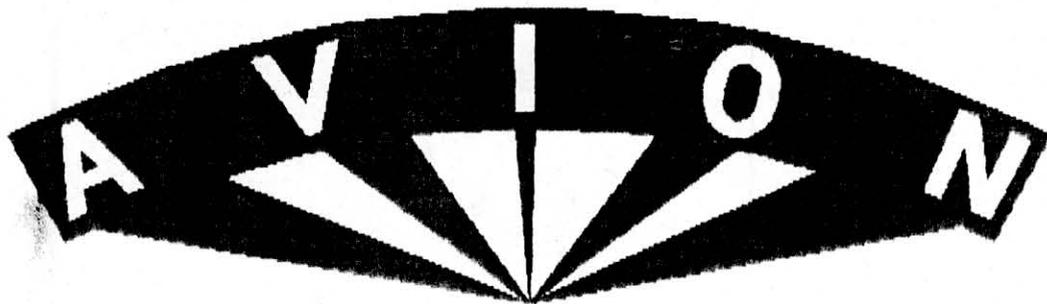
**MODELISATION ET CONTRÔLE  
DU VOL LATERAL  
D'UN AVION**

Présenté par : M<sup>r</sup> MADDI Abdelkader

Devant le jury composé de:

M <sup>r</sup> H. SALHI	(M.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA	<b>Président</b>
M <sup>r</sup> K. AMMOUR	(M.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA	<b>Rapporteur</b>
M <sup>r</sup> M.S. BOUCHERIT	(M.C) E.N.P d'ALGER	<b>Examineur</b>
M <sup>r</sup> T.REZZOUG	(C.C) I.N.E.S d'AERONAUTIQUE de BLIDA	<b>Examineur</b>
M <sup>r</sup> B. KAZED	(C.C) I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA	<b>Invité</b>

BLIDA, ALGERIE  
1997





## **REMERCIEMENT**

A l'instant même où nous achevons le présent travail, notre pensée va vers tous ce qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de cette thèse de MAGISTER fruit des efforts de plusieurs années d'études.

Nous tenons à remercier M<sup>r</sup> **AMMOUR.K** encadreur de ce projet pour son aide et ses précieux conseils.

Nous remercions aussi:

\_ M<sup>lle</sup> **CHENTIR.A** enseignante pour son aide technique.

\_ M<sup>r</sup> **BENCHERCHALIA.A** enseignant pour son aide morale.

\_ L'ensemble de la famille des **enseignant** à *L.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA* en particulier les enseignants par qui est passé ma première année de post-graduation pour leurs efforts.

\_ Nos collègues post-graduants

A eux tous nous exprimons nos plus vifs et sincères remerciements.

**MADDI A.E.K**

## RESUME

Ce travail a pour but de modéliser et contrôler la tenue latérale d'un avion en mouvement subsonique sous l'effet de différentes perturbations extérieures.

La modélisation du mouvement est un système non-linéaire de type MIMO qui nécessite un contrôleur adaptatif (MRAC, SOAC), pour satisfaire les exigences du système (stabilité, maniabilité, et les caractéristiques des organes de commandes). Tous en respectant les conditions du vol.

**Mots clés:** *Avion, Dérapiage, Roulis, Stabilité, Commande adaptative.*

## ABSTRACT

The purpose of this present work, starts with a formulation of mathematical model of an aircraft in order to control the lateral motion when it is in some way disturbed by external perturbation in a subsonic speed.

A model for the analysis of the nonlinear motion of an aircraft is a MIMO system which necessitates an adaptive control. Two classes of adaptive control has been treated using:

- **Model Reference Adaptive Control (MRAC)**
- **Self Optimizing Adaptive Control (SOAC)**

In order to satisfy the exigences of system (stability, maniability and characteristics of controls organs) with respect the conditions of flight.

**Key words:** *Aircraft, Sideslip, Roll, Stability, Adaptive control.*

## **REMERCIEMENT**

A l'instant même où nous achevons le présent travail, notre pensée va vers tous ce qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de cette thèse de MAGISTER fruit des efforts de plusieurs années d'études.

Nous tenons à remercier M<sup>r</sup> AMMOUR.K encadreur de ce projet pour son aide et ses précieux conseils.

Nous remercions aussi:

\_ M<sup>lle</sup> CHENTIR.A enseignante pour son aide technique.

\_ M<sup>r</sup> BENCHERCHALIA.A enseignant pour son aide morale.

\_ L'ensemble de la famille des enseignant à l'*I.N.E.S d'ELECTRONIQUE de BLIDA* en particulier les enseignants par qui est passé ma première année de post-graduation pour leurs efforts.

\_ Nos collègues post-graduants

A eux tous nous exprimons nos plus vifs et sincères remerciements.

**MADDI A.E.K**

## NOTATIONS

- b \_ Envergure de l'aile  
 $C_{L,M,N}$  \_ Coefficient du moment de roulis, pitch et lacet  
 $C_{X,Y,Z}$  \_ Coefficient du force longitudinale, laterale et verticale  
c \_ Corde aerodynamique moyenne  
 $I_{X,Y,Z}$  \_ Moment d'inertie suivant les axes X,Y et Z  
g \_ Acceleration terrestre  
m \_ Masse  
p,q,r \_ Composantes de la vitesse angulaire  
S \_ Surface de l'aile  
u \_ Entree du systeme  
t \_ Temps  
V \_ Vitesse  
y \_ Sortie du systeme  
 $V_{X,Y,Z}$  \_ Composantes de la vitesse  
 $\alpha$  \_ Angle d'attaque  
 $\beta$  \_ Angle de derapage  
 $\delta_{sr}$  \_ Deflexion des ailerons et les gouvernes de direction  
 $\phi, \theta$  \_ Angle d'inclinaison et de pente  
 $\rho$  \_ Densite de l'aire  
 $\sigma^2$  \_ Variance

### ABBREVIATIONS:

- GMV \_ Commande a variance minimale generalisee  
GPC \_ Commande predictive generalisee  
MRAC \_ Commande adaptative avec un modele de reference  
MIMO \_ Multi-entree multi-sortie  
PID \_ Proportionnel-Integrateur-Derivateur  
SOAC \_ Commande adaptative par auto-optimisation  
SISO \_ Mono-entree mono-sortie

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

## CHAPITRE I

### I. MODELISATION DU VOL LATERAL D'UN AVION

I.1. Introduction	03
I.2. Formulation du problème	03
I.3. Choix d'un système d'axe	04
I.4. Modèle mathématique dynamique du vol	09
I.5. Définition des coefficients de stabilité latérale	11
I.6. Modèle mathématique dynamique du vol latéral	11
I.7. Modèle mathématique dynamique du vol latéral en fonction des coefficients de stabilité	12
I.8. Forme matricielle du modèle mathématique du vol latéral	13
I.9. Modélisation des perturbations extérieures	14
I.10. Application de la modélisation du vol lateral sur un avion de type "CESSNA-182"	17
I.11. Conclusion	19

## CHAPITRE II

### II. ETUDE DE STABILITE, MANIABILITE ET LES ELEMENTS DE CONTROLE

II.1. Introduction	20
II.2. Stabilité statique	20
II.2.1. Définition	20
II.2.2. Stabilité statique de direction (Lacet)	20
II.2.3. Stabilité statique latérale (Roulis)	24
II.2.4. Maniabilité	26
II.3. Stabilité dynamique	26
II.3.1. Définition	26
II.3.2. Etude de stabilité dynamique latérale et directionnelle	27



II.4. Différents types de virages	28
II.4.1. Virage correct	28
II.4.2. Virage dérapé	30
II.4.3. Virage glissé	30
II.5. Notions sur les éléments de commandes	31
II.5.1. Définition	31
II.5.2. Role des gouvernes	31
II.5.3. Principe de fonctionnement des gouvernes	32
II.5.4. Caractéristiques des gouvernes	33

## CHAPITRE III

### III. COMMANDE ADAPTATIVE AVEC UN MODELE DE REFERENCE (MRAC)

III.1. Introduction	34
III.2. Minimisation d'interférences	34
III.3. Commande adaptative avec un modèle de référence	37
III.3.1. Introduction	37
III.3.2. Synthèse des systèmes de commande adaptative basée sur les concepts de positivité et d'hyperstabilité	38
III.3.3. Choix du modèle de référence	39
III.3.4. Synthèse des commandes avec un modèle de référence (MRAC)	39
III.3.4.1. "MRAC" sans perturbation extérieure	39
III.3.4.2. "MRAC" avec perturbation extérieure	45
III.3.5. Simulation et interprétation	46
III.3.6. Conclusion	55



<b>IV.5.COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE (GPC)</b>	<b>88</b>
IV.5.1.Introduction	88
IV.5.2.Algorithme de base (GPC)	88
IV.5.2.1.Modele de description d'un processus (CARIMA)	88
IV.5.2.2.Plage de prediction	89
IV.5.2.3.Loi de commande prédictive	90
IV.5.2.4.Calcul de l'équation caractéristique du système en boucle fermée	94
IV.5.3.Extension de l'algorithme (GPC)	95
IV.5.3.1.Modèle de référence	96
IV.5.3.2.Interprétation de la fonction de transfert $P(Z)$	97
IV.5.3.3.Equation caractéristique du système en boucle fermée	97
IV.5.4.GPC multivariable	98
IV.5.4.1.Modèle de description d'un processus multivariable	98
IV.5.4.2.Définition la fonction de cout	98
IV.5.4.3.Dérivation de la loi de commande multivariable	99
IV.5.5.Simulation et interprétation	100
IV.5.5.1.Simulation	100
IV.5.5.2.Interprétation	101
IV.5.6.Comparaison des controleurs	110
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>111</b>

## **ANNEXES**

## **BIBLIOGRAPHIE**

# *INTRODUCTION*

# INTRODUCTION

Le 17 Décembre 1903 , fut la date du premier vol réussi des frères "WRIGHT". Quatre ans plutot, l'essai de vol qu'ils ont effectué s'est terminé par un accident grave . Cet accident à eu lieu suite à un coup de rafale qui a complètement déstabilisé l'avion. C'est cette catastrophe qui à inciter les frères "WRIGHT" à étudier et analyser le comportement d'un avion en présence des perturbation exterieures ,en vu d'assurer une stabilité minimale.

Dans ce même contexte, on se propose dans notre travail de modéliser et contrôler la tenue latérale d'un avion pour effectuer un virage correct sans glissement et sans dérapage .Et dans le but de la mise en oeuvre de ce travail, l'étude se subdivise en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous essayons de formuler un modèle mathématique dynamique du vol d'un avion avec les forces et les moments aerodynamiques estimés selon les conditions de vol et les caractéristiques geometriques de la configuration volante. ce modèle sera représenté par un système d'équations non-lineaires couplées .

La théorie utilisée pour résoudre le problème est celle basé sur l'hypothèse des petites perturbations , par conséquent la formulation du problème se réduit à des équations lineaires don les coefficients constituant le système dépendent des coefficients aerodynamiques, de leurs dérivées ,et des conditions de vol, puis comment on arrive à les représenter par une équation d'état classique de la forme:

$$\dot{X} = A.X + B.U + D$$

Dans le dexième chapitre, nous ferons une étude sur la stabilité, la maniabilité, et les différents types de virage dans le domaine aeronautique.

Le troisième chapitre est consacré à la synthèse des lois de commandes adaptatives avec un modèle de référence (MRAC) basée sur les concepts de positivité et d'hyperstabilité, et on verra :

- \_ MRAC sans action intégrale
- \_ MRAC avec action intégrale
- \_ algorithme d'alignement pour minimiser les interférences

Après avoir interpréter et comparer les résultats de chaque type de commande appliquée à notre système "avion". Et afin d'assurer une commande plus performante et un peu lisse qui répond aux exigences des caractéristiques des ailerons, et des gouvernes de direction , on se proposera d'étudier la commande adaptative par auto-optimisation (Self Optimizing Adaptive Controllers) (SOAC) dans le chapitre suivant

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons l'étude théorique de chaque commande "SOAC", et on verra :

- \_ Commande d'état (state controller)
- \_ PID
- \_ Commande à variance minimale (minimum variance controllers)
- \_ Commande prédictive généralisée (generalised predictive controllers).

Après avoir simuler la réponse de notre système pour différents types de commandes grace aux langages de PC\_MATLAB et SIMNON, nous ferons une comparaison pour voir les performances de chaque type de commande.

En fin, on donnera une conclusion générale.



# INTRODUCTION

Le 17 Décembre 1903 , fut la date du premier vol réussi des frères "WRIGHT". Quatre ans plutot, l'essai de vol qu'ils ont effectué s'est terminé par un accident grave . Cet accident à eu lieu suite à un coup de rafale qui a complètement déstabilisé l'avion. C'est cette catastrophe qui à inciter les frères "WRIGHT" à étudier et analyser le comportement d'un avion en présence des perturbation exterieures ,en vu d'assurer une stabilité minimale.

Dans ce même contexte, on se propose dans notre travail de modéliser et contrôler la tenue latérale d'un avion pour effectuer un virage correct sans glissement et sans dérapage. Et dans le but de la mise en oeuvre de ce travail, l'étude se subdivise en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous essayons de formuler un modèle mathématique dynamique du vol d'un avion avec les forces et les moments aerodynamiques estimés selon les conditions de vol et les caractéristiques géométriques de la configuration volante. ce modèle sera représenté par un système d'équations non-lineaires couplées .

La théorie utilisée pour résoudre le problème est celle basé sur l'hypothèse des petites perturbations , par conséquent la formulation du problème se réduit à des équations lineaires don les coefficients constituant le système dépendent des coefficients aerodynamiques, de leurs dérivées ,et des conditions de vol, puis comment on arrive à les représenter par une équation d'état classique de la forme:

$$\dot{X} = A.X + B.U + D$$

Dans le dexième chapitre, nous ferons une étude sur la stabilité, la maniabilité, et les différents types de virage dans le domaine aeronautique.



CHAPITRE: I

*MODELISATION DU VOL  
LATERAL D'UN AVION*

# MODELISATION DU VOL LATERAL D'UN AVION

## 1.1. INTRODUCTION

Dans cette partie, nous commencerons en premier lieu à établir les équations qui régissent le mouvement d'un avion en vol par application de la seconde loi de NEWTON.

En suite nous modéliserons analytiquement le comportement dynamique lorsque l'avion fait deux rotations, la première autour de l'axe de tangage, et la seconde autour de l'axe de roulis. Le résultat obtenu sera représenté par un système d'équations nonlinéaires couplées. Cependant nous ferons appel à la théorie des petites perturbations pour découpler les équations.

Finalement on obtient deux systèmes d'équations, le premier gouvernant le mouvement longitudinal et le second le mouvement latéral

## 1.2. FORMULATION DU PROBLEME :

La formulation du problème de modélisation est basée sur quatre hypothèses:

### HYPOTHESE 1

L'avion est assimilé à un corps rigide, ainsi la distance entre deux points quelconques de ce corps est invariant.

### HYPOTHESE 2

La terre est supposée fixe dans l'espace et l'atmosphère terrestre est supposée fixée à la terre.

La direction des axes de l'avion et la rotation est choisie conformément à l'application de la seconde loi de NEWTON

### HYPOTHESE 3

On suppose que la masse de l'avion reste constante durant notre étude.

### HYPOTHESE 4

Le plan XZ est un plan de symétrie de l'avion, ce qui conduit à:

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

### 1.3. CHOIX D'UN SYSTEME D'AXE: [14], [1]

Afin de décrire le mouvement d'un avion, on utilise deux systèmes d'axes. Le premier est lié à la terre qui est supposé fixe, son utilité est de déterminer la position du centre de gravité (C.G) de l'avion. Le second est fixé à l'avion et a pour origine son centre de gravité. Ce système d'axe nous permet de déterminer le mouvement de rotation de l'avion. ( voir figure\_1.1 ).

On peut écrire :

$$OM = OG + GM \quad (1.1)$$

$$dOM/dt = dOG/dt + dGM/dt \quad \text{avec} \quad dGM/dt = \Omega \times R \quad (1.2)$$

$$V_M = V_G + \Omega \times R \quad (1.3)$$

où  $\Omega$  : vitesse de rotation du repère GXYZ

ainsi:

$$dV_M/dt = dV_G/dt + \Omega \times dR/dt + d\Omega/dt \times R \quad (1.4)$$

$d\Omega/dt \times R = 0$  car les deux vecteurs sont colinéaires.

d'où:

$$\frac{dV_M}{dt} = \frac{dV_G}{dt} + \Omega \times \frac{dR}{dt} \quad (1.5)$$

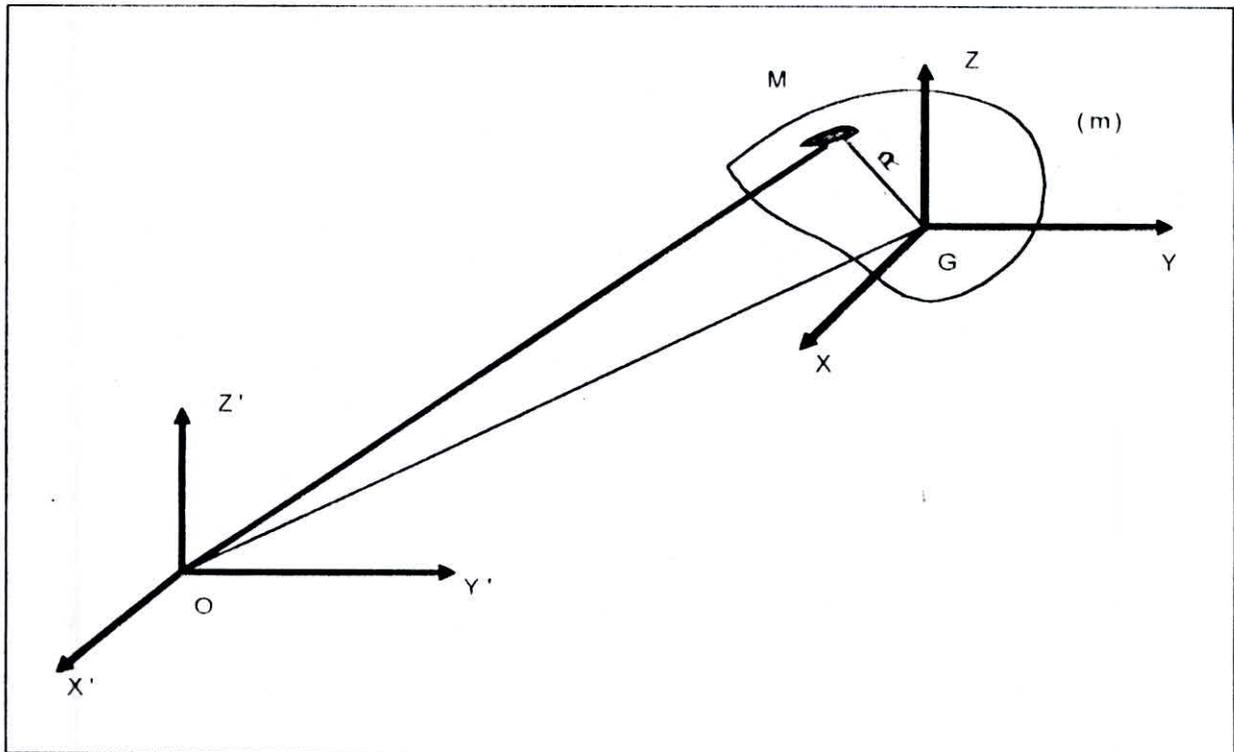


FIGURE-I.1: " Choix des axes "

### I.3.1. CALCUL L'ACCELERATION $dV_M/dt$

Soient:

$$\Omega = p.i + q.j + r.k$$

$$R = x.i + y.j + z.k$$

$$dR/dt = V_X.i + V_Y.j + V_Z.k$$

$$\Omega \times dR/dt = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ V_X & V_Y & V_Z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} q.V_Z - r.V_Y \\ r.V_X - p.V_Z \\ p.V_Y - q.V_X \end{pmatrix}$$

$$\frac{dV_M}{dt} = \begin{pmatrix} V_X + q.V_Z - r.V_Y \\ V_Y + r.V_X - p.V_Z \\ V_Z + p.V_Y - q.V_X \end{pmatrix}$$

### I.3.2. CALCUL LE MOMENT CINETIQUE h

Par définition :

$$dh = R \times dm \cdot V_M \quad (I.6)$$

et on a:  $V_M = V_G + \Omega \times R \quad (I.7)$

par substitution de (I.7) dans (I.6) on obtient:

$$dh = R \times dm \cdot V_G + R \times dm \cdot (\Omega \times R) \quad (I.8)$$

Le moment cinétique résultant de tout de l'avion est obtenu par l'intégration de l'équation (I.8) sur toute la masse de l'avion .

$$h = \int_{(m)} dh = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}$$

avec

$$h_x = p \cdot I_{xx} - q \cdot I_{xy} - r \cdot I_{xz}$$

$$h_y = q \cdot I_{yy} - r \cdot I_{yz} - p \cdot I_{xz}$$

$$h_z = r \cdot I_{zz} - p \cdot I_{xz} - q \cdot I_{yz}$$

D'une manière similaire le changement dans le temps du moment cinétique s'écrit:

$$[dh/dt]_{xyz} = [dh/dt]_{xyz} + \Omega \times h \quad (I.9)$$

où

$$\Omega \times h = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} q \cdot h_z - r \cdot h_y \\ r \cdot h_x - p \cdot h_z \\ p \cdot h_y - q \cdot h_x \end{pmatrix}$$

$$[dh/dt]_{xyz} = dh_x/dt \cdot i + dh_y/dt \cdot j + dh_z/dt \cdot k$$

avec

$$dh_x/dt = \dot{p}.I_{xx} - \dot{r}.I_{xz} + q.r(I_{zz} - I_{yy}) - p.q.I_{xz} \quad (I.10)$$

$$dh_y/dt = \dot{q}.I_{yy} + r.p(I_{xx} - I_{zz}) - r^2.I_{xz} + p^2.I_{xz} \quad (I.11)$$

$$dh_z/dt = \dot{r}.I_{zz} - \dot{p}.I_{xz} + p.q(I_{yy} - I_{xx}) + r.q.I_{xz} \quad (I.12)$$

Les équations de mouvement d'un avion par rapport à un système d'axes fixe s'écrivent:

$$\Sigma F_x = m(\dot{V}_x + q.V_z - r.V_y) \quad (I.13)$$

$$\Sigma F_y = m(\dot{V}_y + r.V_x - p.V_z) \quad (I.14)$$

$$\Sigma F_z = m(\dot{V}_z + p.V_y - q.V_x) \quad (I.15)$$

$$\Sigma L = \dot{p}.I_{xx} - \dot{r}.I_{xz} + q.r(I_{zz} - I_{yy}) - p.q.I_{xz} \quad (I.16)$$

$$\Sigma M = \dot{q}.I_{yy} + r.p(I_{xx} - I_{zz}) - r^2.I_{xz} + p^2.I_{xz} \quad (I.17)$$

$$\Sigma N = \dot{r}.I_{zz} - \dot{p}.I_{xz} + p.q(I_{yy} - I_{xx}) + q.r.I_{xz} \quad (I.18)$$

Les membres de droite des équations expriment l'accélération de l'avion en terme de vitesse lineaires et angulaires, ceux de gauche représentent les composantes des forces et des moments aerodynamiques et de poussée ainsi que celle de la force de gravité.

Lorsque l'avion fait deux rotations la première autour de l'axe de tangage ( $\theta$ ), et la seconde autour de l'axe de roulis ( $\phi$ ). [14]. (voir figure-I.2).

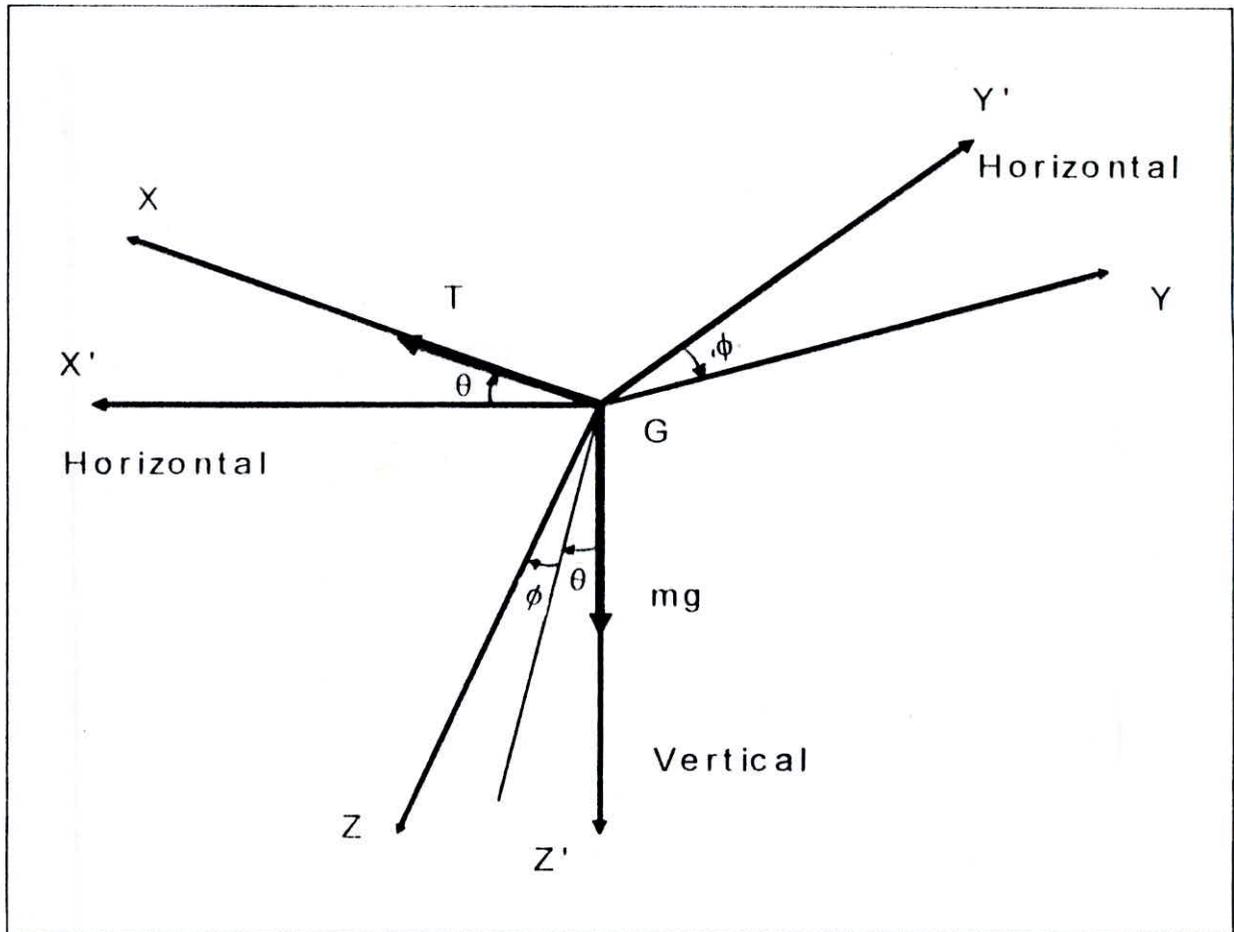


FIGURE-I.2: " AVION EN MOUVEMENT "

On peut écrire:

$$\Sigma F_X = - m.g.\sin(\theta) + T + \rho.V^2.S.C_N/2 \quad (I.19)$$

$$\Sigma F_Y = m.g.\cos(\theta).\sin(\phi) + \rho.V^2.S.C_Y/2 \quad (I.20)$$

$$\Sigma F_Z = m.g.\cos(\theta).\cos(\phi) + \rho.V^2.S.C_Z/2 \quad (I.21)$$

$$\Sigma L = \rho.V^2.S.b.C_L/2 \quad (I.22)$$

$$\Sigma M = \rho.V^2.S.c.C_M/2 \quad (I.23)$$

$$\Sigma N = \rho.V^2.S.b.C_N/2 \quad (I.24)$$

En remplaçant les forces et les moments par ses valeurs, on obtient :

$$\dot{V}_X = -q.V_Z + r.V_Y - g.\sin(\theta) + T/m + \rho.V^2.S.C_X/2m \quad (I.25)$$

$$\dot{V}_Y = -r.V_X + p.V_Z + g.\cos(\theta).\sin(\phi) + \rho.V^2.S.C_Y/2m \quad (I.26)$$

$$\dot{V}_Z = -p.V_Y + q.V_X + g.\cos(\theta).\cos(\phi) + \rho.V^2.S.C_Z/2m \quad (I.27)$$

$$\dot{p} = q.r(I_Y - I_Z)/I_X + (p.q + \dot{r}).I_{XZ}/I_X + \rho.V^2.S.b.C_I/2I_X \quad (I.28)$$

$$\dot{q} = p.r(I_Z - I_X)/I_X + (r^2 - p^2).I_{XZ}/I_X + \rho.V^2.S.c.C_M/2I_Y \quad (I.29)$$

$$\dot{r} = p.q(I_X - I_Y)/I_Z + (p^2 - q.r).I_{XZ}/I_Z + \rho.V^2.S.b.C_N/2I_Z \quad (I.30)$$

Les composantes de la vitesse angulaire p,q,r peuvent être exprimé en fonction des angles d'EULER  $\phi, \psi, \theta$  qui déterminent l'orientation de l'avion par rapport au temps comme suit : [3],[9],[10],[14].

$$p = \dot{\phi} - \psi.\sin(\theta) \quad (I.31)$$

$$q = \dot{\theta}.\cos(\phi) + \psi.\sin(\phi).\cos(\theta) \quad (I.32)$$

$$r = \dot{\psi}.\cos(\phi).\cos(\theta) - \dot{\theta}.\sin(\phi) \quad (I.33)$$

### I.3.3.DEFINITION DE QUELQUES PARAMETRES:[3],[10]

#### I.3.3.1.angle de dérapage $\beta$ :(side slipe angle)

$$\sin(\beta) = V_Y/V$$

#### I.3.3.2.angle d'attaque $\alpha$ :(angle of attack)

$$\text{tg}(\alpha) = V_Z/V_X$$

## I.4.MODELE MATHEMATIQUE DYNAMIQUE DU VOL

En introduisant les paramètres  $\alpha, \beta$  dans le système d'équations ci-dessus (voir annexes A ).

On obtient le modèle mathématique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{V}/V = & (-g \sin(\theta)/V + q_i \cdot S \cdot C_X/mV) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + (g \sin(\phi) \cdot \cos(\theta)/V + \\ & q_i \cdot S \cdot C_Y/mV) \cdot \sin(\beta) + (g \cos(\phi) \cdot \cos(\theta)/V + q_i \cdot S \cdot C_Z/mV) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \\ & T \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)/m \end{aligned} \quad (I.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & - [ - (g \sin(\theta)/V + q_i \cdot S \cdot C_X/mV) \cdot \sin(\beta) + r ] \cdot \cos(\alpha) + ((g/V) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) + \\ & q_i \cdot S \cdot C_Y/mV) \cdot \cos(\beta) - [(g \cos(\phi) \cdot \cos(\theta)/V + q_i \cdot S \cdot C_Z/mV) \cdot \sin(\beta) - p] \cdot \sin(\alpha) - \\ & T \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)/mV \end{aligned} \quad (I.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & q + [ - (-g \sin(\theta)/V + q_i \cdot S \cdot C_X/mV + r \sin(\beta)) \cdot \sin(\alpha) + (g \cos(\phi) \cdot \cos(\theta)/V + \\ & q_i \cdot S \cdot C_Z/mV - p \sin(\beta)) \cdot \cos(\alpha) - T \cdot \sin(\alpha)/m ] / \cos(\beta) \end{aligned} \quad (I.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & [ -((I_z - I_y)/I_x + I_{xz}^2/I_x \cdot I_z) \cdot q \cdot r + (1 + (I_x - I_y)/I_z) \cdot p \cdot q \cdot I_{xz}/I_x + (q_i \cdot S \cdot b/I_x) \\ & (C_L + C_N \cdot I_{xz}/I_z) ] / (1 - I_{xz}^2/I_x \cdot I_z) \end{aligned} \quad (I.37)$$

$$\dot{q} = p \cdot r \cdot (I_z - I_x)/I_y - (p^2 - r^2) \cdot I_{xz}/I_y + q_i \cdot S \cdot c \cdot C_M/I_y \quad (I.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = & p \cdot q \cdot (I_{xz}^2/I_x \cdot I_z + (I_x - I_y)/I_z) - q \cdot r \cdot (1 + (I_z - I_y)/I_x) \cdot I_{xz}/I_z + (q_i \cdot S \cdot b/I_z) \\ & (C_N + C_L \cdot I_{xz}/I_x) ] / (1 - I_{xz}^2/I_x \cdot I_z) \end{aligned} \quad (I.38)$$

$$\dot{\phi} = p + q \cdot \text{tg}(\theta) \cdot \sin(\phi) + r \cdot \text{tg}(\theta) \cdot \cos(\phi) \quad (I.39)$$

$$\dot{\theta} = q \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \quad (I.40)$$

$$\dot{\psi} = (q \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi)) / \cos(\theta) \quad (I.41)$$

avec

$$q_i = \rho \cdot V^2/2 \quad \text{où } q_i \text{ : s'appelle la pression dynamique.}$$

Le modèle mathématique du vol obtenu c'est un modèle nonlineaire englobe les deux mouvements, le mouvement longitudinal est couplé avec le mouvement latéral.

La méthode de linearisation permet de découpler les deux mouvements, et le mouvement de l'avion peut être considéré comme le résultat d'une perturbation à partir des conditions de vol stationnaire.

### 1.5. DEFINITION DES COEFFICIENTS DE STABILITE LATÉRALE: [14]

$$Y_p = (q_i \cdot S \cdot b / 2m \cdot V_0) \cdot C_{Yp} \quad \text{avec} \quad C_{Yp} = \partial C_Y / \partial (p \cdot b / 2V_0)$$

$$Y_r = (q_i \cdot s \cdot b / 2m \cdot V_0) \cdot C_{Yr} \quad C_{Yr} = \partial C_Y / \partial (r \cdot b / 2V_0)$$

$$Y_\beta = (q_i \cdot s / m) \cdot C_{Y\beta} \quad C_{Y\beta} = \partial C_Y / \partial \beta$$

$$L_p = (q_i \cdot s \cdot b^2 / 2I_X \cdot V_0) \cdot C_{Lp} \quad C_{Lp} = \partial C_L / \partial (p \cdot b / 2V_0)$$

$$L_r = (q_i \cdot s \cdot b^2 / 2I_X \cdot V_0) \cdot C_{Lr} \quad C_{Lr} = \partial C_L / \partial (r \cdot b / 2V_0)$$

$$L_\beta = (q_i \cdot s \cdot b / I_X) \cdot C_{L\beta} \quad C_{L\beta} = \partial C_L / \partial \beta$$

$$N_p = (q_i \cdot s \cdot b^2 / 2I_Z \cdot V_0) \cdot C_{Np} \quad C_{Np} = \partial C_N / \partial (p \cdot b / 2V_0)$$

$$N_r = (q_i \cdot s \cdot b^2 / 2I_Z \cdot V_0) \cdot C_{Nr} \quad C_{Nr} = \partial C_N / \partial (r \cdot b / 2V_0)$$

$$N_\beta = (q_i \cdot s \cdot b / I_Z) \cdot C_{N\beta} \quad C_{N\beta} = \partial C_N / \partial \beta$$

$$Y_{\dot{\alpha}} = (q_i \cdot s / m) \cdot C_{Y\dot{\alpha}} \quad C_{Y\dot{\alpha}} = \partial C_Y / \partial \dot{\alpha}_r$$

$$Y_{\delta_a} = (q_i \cdot s / m) \cdot C_{Y\delta_a} \quad C_{Y\delta_a} = \partial C_Y / \partial \delta_a$$

$$L_{\dot{\alpha}} = (q_i \cdot s \cdot b / I_X) \cdot C_{L\dot{\alpha}} \quad C_{L\dot{\alpha}} = \partial C_L / \partial \dot{\alpha}_r$$

$$L_{\delta_a} = (q_i \cdot s \cdot b / I_X) \cdot C_{L\delta_a} \quad C_{L\delta_a} = \partial C_L / \partial \delta_a$$

$$N_{\dot{\alpha}} = (q_i \cdot s \cdot b / I_Z) \cdot C_{N\dot{\alpha}} \quad C_{N\dot{\alpha}} = \partial C_N / \partial \dot{\alpha}_r$$

$$N_{\delta_a} = (q_i \cdot s \cdot b / I_Z) \cdot C_{N\delta_a} \quad C_{N\delta_a} = \partial C_N / \partial \delta_a$$

$$Y_\beta = V_0 \cdot Y_{VY} \quad \text{avec} \quad V_Y = \beta \cdot V_0$$

$$L_\beta = V_0 \cdot L_{VY} \quad (V_Y : \text{Composante de la vitesse suivant l'axe GY})$$

$$N_\beta = V_0 \cdot N$$

$$C_Y = C_{Y\beta} \cdot \beta + C_{Yp} \cdot (pb/2V_0) + C_{Yr} \cdot (rb/2V_0) + C_{Y\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}_r + C_{Y\delta_a} \cdot \delta_a$$

$$C_L = C_{L\beta} \cdot \beta + C_{Lp} \cdot (pb/2V_0) + C_{Lr} \cdot (rb/2V_0) + C_{L\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}_r + C_{L\delta_a} \cdot \delta_a$$

$$C_N = C_{N\beta} \cdot \beta + C_{Np} \cdot (pb/2V_0) + C_{Nr} \cdot (rb/2V_0) + C_{N\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}_r + C_{N\delta_a} \cdot \delta_a$$

avec  $C_Y$  : coefficient du force aerodynamique suivant l'axe GY.

$C_L$  : coefficient du moment aerodynamique de roulis

$C_N$  : coefficient du moment aerodynamique de lacet.

## 1.6. MODELE MATHEMATIQUE DYNAMIQUE DU VOL LATERAL

En utilisant la méthode de linearisation autour du vol stationnaire (voir annexes B), on obtient le système suivant: [10]

$$\dot{\beta} + r \cos(\alpha) - (g/V) \cos(\theta_0) \phi - p \sin(\alpha) = (\rho \cdot V_0 \cdot S / 2m) (C_{Y\beta} \beta + C_{Yr} p \cdot b / 2V_0 + C_{Yr} r \cdot b / 2V_0 + C_{Y\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + C_{Y\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma) \quad (1.42)$$

$$\dot{p} - \dot{r} \cdot I_{XZ} / I_Z = (\rho \cdot V_0^2 \cdot S \cdot b / 2 I_X) (C_{L\beta} \beta + C_{Lp} p \cdot b / 2V_0 + C_{Lr} r \cdot b / 2V_0 + C_{L\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + C_{L\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma) \quad (1.43)$$

$$\dot{r} - \dot{p} \cdot I_{XZ} / I_Z = (\rho \cdot V_0^2 \cdot S \cdot b / 2 I_Z) (C_{N\beta} \beta + C_{Np} p \cdot b / 2V_0 + C_{Nr} r \cdot b / 2V_0 + C_{N\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + C_{N\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma) \quad (1.44)$$

$$\dot{\phi} = p + r \operatorname{tg}(\theta_0) \quad (1.45)$$

## 1.7. MODELE MATHEMATIQUE DU VOL LATERAL EN FONCTION DES COEFFICIENTS DE STABILITE

En introduisant les coefficients de stabilité latérale, le modèle mathématique du vol latéral décrit par les équations ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\dot{\beta} \cdot V_0 + r \cdot V_0 \cos(\alpha) - p \cdot V_0 \sin(\alpha) - g \cos(\theta_0) \phi = Y_\beta \beta + Y_p p + Y_r r + Y_{\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + Y_{\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma \quad (1.46)$$

$$\dot{p} - \dot{r} \cdot I_{XZ} / I_X = L_\beta \beta + L_p p + L_r r + L_{\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + L_{\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma \quad (1.47)$$

$$\dot{r} - \dot{p} \cdot I_{XZ} / I_Z = N_\beta \beta + N_p p + N_r r + N_{\dot{\alpha}} \dot{\delta}_\alpha + N_{\dot{\sigma}} \dot{\delta}_\sigma \quad (1.48)$$

$$\dot{\phi} = p + r \cdot \text{tg}(\theta_0) \quad (1.49)$$

avec:

$Y_i, L_i, N_i$  où  $i = \beta, p, r, \delta_a, \delta_r$  : coefficients de stabilité latérale

$\theta_0$  : Assiette ( $\theta_0 = \alpha$ , en vol horizontal)

$V_0$  : Vitesse du vol stationnaire.

$\delta_a$  : Déflexion des ailerons

$\delta_r$  : Déflexion des gouvernes de direction.

### 1.8. FORME MATRICIELLE DU MODELE MATHEMATIQUE DU VOL LATERAL

On peut mettre le système d'équations ci-dessus (1.46,47,48,49) sous la forme matricielle:

[17]

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U \quad \text{ou} \quad U^T = [\delta_r, \delta_a] \quad \text{et} \quad X^T = [\beta, p, r, \phi]$$

$$A = 1/\Delta \begin{bmatrix} Y_{\beta} \Delta / V_0 & (Y_p / V_0 + \sin(\theta_0)) \Delta & (Y_r / V_0 - \cos(\theta_0)) \Delta & g \cos(\theta_0) \Delta / V_0 \\ L_{\beta} + a \cdot N_{\beta} & L_p + a \cdot N_p & L_r + a \cdot N_r & 0 \\ N_{\beta} + b \cdot L_{\beta} & N_p + b \cdot L_p & N_r + b \cdot L_r & 0 \\ 0 & \Delta & \text{tg}(\theta_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} Y_{\delta_r} \Delta / V_0 & Y_{\delta_a} \Delta / V_0 \\ L_{\delta_r} + a \cdot N_{\delta_r} & L_{\delta_a} + a \cdot N_{\delta_a} \\ N_{\delta_r} + b \cdot L_{\delta_r} & N_{\delta_a} + b \cdot L_{\delta_a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec: } a = \frac{I_{XZ}}{I_X} ; \quad a = \frac{I_{XZ}}{I_Z}$$

$$\Delta = 1 - a \cdot b = 1 - \frac{I_{XZ}^2}{I_X I_Z}$$

## **I.9. MODELISATION DES PERTURBATIONS EXTERIEURES**

### **I.9.1. INTRODUCTION**

La modélisation du vol d'un avion est actuellement au point, il n'en est pas encore de même en ce qui concerne la connaissance de l'environnement dans lequel évolue l'avion en approche: les mouvements autour du centre de gravité lui-même sont perturbés par la présence des perturbations extérieures (Bruit radio, turbulences, vents et gradients divers).

En ce qui concerne ces derniers, les services officiels proposent des modèles qui théoriquement doivent permettre de trouver en simulation les performances le long de la trajectoire d'approche

### **I.9.2. MODELES DE VENTS**

#### **I.9.2.1. MODELES PROPOSES PAR LES SERVICES OFFICIELS (AC 20-57, TSS)**

La turbulence est définie comme un processus continu et gaussien (stationnaire et ergodique) caractérisé par un spectre de fréquence fixe où fonction de l'altitude, et une variance en général liée à l'intensité du vent moyen.

La probabilité d'occurrence du vent est définie suivant deux axes (X et Y). La turbulence est présentée sur trois axes (X, Y et Z) et le phénomène observé sur chaque axe est supposé indépendant des deux autres.

L'atmosphère est considérée figée pendant le temps de passage de l'avion, ceci détermine une fréquence apparente des turbulences liée à la vitesse de l'avion.

$$f = \frac{V}{L} \quad \text{ou } L.: \text{Longueur d'onde de la turbulence}$$

Le modèle mathématique de DRYDEN approxime la densité spectrale des turbulences (selon trois axes) sous la forme suivante: [17]

$$\phi_i(w) = 2 \frac{\sigma_i^2 \cdot L_i}{\Pi \cdot V} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{L_i}{V} w\right)^2} \quad i = X, Y \text{ et } z$$

Cette forme spectrale est commune aux modèles de vents proposés par les services officiels.

$w$  : Pulsation (rad/s)

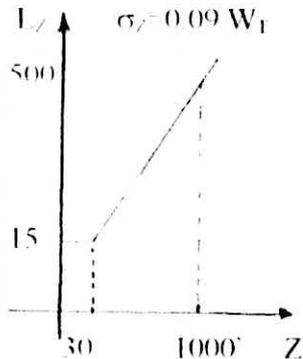
$L_i$  : Longueur d'onde de la turbulence suivant l'axe considéré (m)

$V$  : Vitesse longitudinale / Air de l'avion (m/s)

$\phi_i(w)$  : Densité spectrale ( $m^2/s^2/rad/s$ )

$\sigma_i$  : Ecart-type de la turbulence (m/s)

Le modèle de vent est complété par une décroissance du vent fonction de l'altitude (Gradient de vent) et les caractéristiques des modèles théoriques fournies par la C.A.A (TSS 1.2) et la F.A.A (AC.20-57A) sont resumées dans le tableau ci-après:

	C.A.A (TSS 1.2)	F.A.A (AC 20-57A)
<b>Gradient de vent</b>	$W = (0.43I \log(z) + 0.35)W_T$	8Kts / 100 pieds si $z < 200$ pieds
<b>Spectre</b>	$\phi_i(w) = 2(\sigma_i^2/11) (L_i/V) / (1 + (L_i w/V)^2)$	De même
<b>Axe X</b>	$L_X = 600' ; \sigma_X = 0.18 W_T$	$L_X = 600' ; \sigma_X = 0.15 W_X$
<b>Axe Y</b>	$L_Y = 600' ; \sigma_Y = 0.18 W_T$	$L_Y = 600' ; \sigma_Y = 0.15 W_Y$
<b>Axe Z</b>		$L_Z = 30' ; \sigma_Z = 1.5 K_T$

Avec

$W$  : Vent à l'altitude considérée.

$W_T$  : Vent moyen à la tour (33')

$W_X$  : Vent longitudinal de face ou arrière

$W_Y$  : Vent moyen latéral.

### 1.9.3.EFFET DE MASSE VARIABLE

En premier lieu, on a supposé la masse de l'avion reste constante durant notre étude mais en réalité la masse varie en fonction du temps, et cette variation  $dm/dt$  donne au système une force additionnelle positive  $\Phi$  ayant le même sens que la poussée  $T$ .

On écrit

$$\Phi = - G_{sec} \cdot u \quad \text{avec}$$

$G_{sec}$  : La masse de consommation du carburant/seconde

$u$  : La vitesse relative du gaz

## 1.10. APPLICATION DE LA MODELISATION DU VOL LATERAL D'UN AVION DE TYPE "CESSNA\_182"

### 1.10.1.CARACTERISTIQUE DE L'AVION:[14]

Surface d'aile (wing area) .....	174,00 .sq.ft
Poids (wight) .....	2645,00.lbs
Envergure d'une aile (wing span) .....	35,80 ft
Corde aerodynamique moyenne (mean aerody. chord) .....	4,90 ft
Vitesse du vol (air speed) .....	219,00.ft/sec
Densite de l'air (air density) .....	0,00205 slugs/cu.ft
Théta initial (initial theta) .....	0,00.rad
Altitude (high) .....	5000.ft
$I_{yy}$ .....	1346.slugs.sq.ft
$I_{xx}$ .....	948.slugs.sq.ft
$I_{zz}$ .....	1967.slugs.sq.ft
$I_{xy}$ .....	0,00.slugs.sq.ft
$X_{cg}$ .....	0.25

### I.10.2. TABLEAU DES COEFFICIENTS DE STABILITE

A partir des caracteristiques geometriques de l'avion et les conditions de vol, on peut deduire le tableau ci-dessous [14]

Gradients	Valeurs	Coeff. de stabilité	Valeurs
$C_{L\beta}$	-0.0800 /rad	$L_{\beta}$	-28.7492 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{Lp}$	-0.4700 /rad	$L_p$	-12.4092 /rad.sec
$C_{Lr}$	0.0960 /rad	$L_r$	2.5346 /rad.sec
$C_{L\dot{\alpha}}$	0.1780 /rad	$L_{\dot{\alpha}}$	57.4984 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{L\ddot{\alpha}}$	0.0147 /rad	$L_{\ddot{\alpha}}$	4.7485 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{N\beta}$	0.0650 /rad	$N_{\beta}$	10.1194 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{Np}$	-0.0300 /rad	$N_p$	-0.3817 /rad.sec
$C_{Nr}$	-0.0990 /rad	$N_r$	-1.2597 /rad.sec
$C_{N\dot{\alpha}}$	-0.0530 /rad	$N_{\dot{\alpha}}$	-8.2512 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{N\ddot{\alpha}}$	-0.0657 /rad	$N_{\ddot{\alpha}}$	-10.2284 /rad.sec <sup>2</sup>
$C_{Y\beta}$	-0.3100 /rad	$Y_{\beta}$	-32.2554ft/rad.sec <sup>2</sup>
$C_{Yp}$	-0.0370 /rad	$Y_p$	-0.3147 ft/rad.sec
$C_{Yr}$	0.2100 /rad	$Y_r$	1.7859 ft/rad.sec
$C_{Y\dot{\alpha}}$	0.0000 /rad	$Y_{\dot{\alpha}}$	0.0000 ft/rad.sec <sup>2</sup>
$C_{Y\ddot{\alpha}}$	0.1870 /rad	$Y_{\ddot{\alpha}}$	19.4730 ft/rad.sec <sup>2</sup>

### 1.10.3. MODELE D'UN AVION "CESSNA\_182"

D'après les caractéristiques de l'avion CESSNA-182, et les valeurs des coefficients de stabilité, on peut déduire les matrices A,B

$$A = \begin{bmatrix} -0.1473 & -0.0014 & -0.9918 & 0.1498 \\ -28.7492 & -12.4092 & 2.5346 & 0 \\ 10.1194 & -0.3817 & -1.2597 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0889 & 0 \\ 4.7485 & 57.4984 \\ -10.2284 & -8.2512 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.11. CONCLUSION

La formulation du modèle mathématique du vol est validé pour les angles d'attaques et de dérapages importants. Le comportement aérodynamique de l'avion devient très complexe, car les moments et les forces aérodynamiques sont étudiés par la méthode de soufflerie.

Due à la complexité aérodynamique pour des angles d'attaques et de dérapages importants, il est impossible de formuler un modèle mathématique dynamique du vol latéral global, mais cette méthodologie de travail nous donne une image générale d'un mouvement dynamique pour des manoeuvres bien spécifiques.

CHAPITRE : II

***ETUDE DE STABILITE,  
MANIABILITE ET LES  
ELEMENTS DE CONTROLE***

# ETUDE DE STABILITE, MANIABILITE ET LES ELEMENTS DE CONTROLE

## II.1.INTRODUCTION

L'étude de l'équilibre de l'avion autour du centre de gravité se traduit par l'étude de la stabilité. Un appareil est dit stable lorsqu'il revient en dehors de l'intervention du pilote au régime initial de vol permanent dont il a été écarté.

Dans ce qui suit, on essaye de soumettre une configuration à des études de stabilité dynamique en vue d'ajuster ses paramètres géométriques s'il ya lieu pour assurer une stabilité adéquate dans le cadre de la mission demandée par l'utilisateur.

Avant de commencer l'analyse de stabilité, il est utile de préciser la différence entre la stabilité statique et dynamique.

## II.2.STABILITE STATIQUE

### II.2.1.DEFINITION

La stabilité statique étudie les couples de rappel de l'avion à sa position initiale d'équilibre. Un avion est dit statiquement stable, si le centre de gravité est situé en avant du foyer, dans ce cas l'avion tend à voler avec une vitesse constante et à un angle d'attaque invariable tant que les commandes n'ont pas été changées. [14],[16].

Autrement dit : si un avion a la tendance de retourner à la position d'équilibre après une perturbation alors l'avion est positivement statiquement stable, sinon est négativement statiquement stable.

### II.2.2.STABILITE STATIQUE DE DIRECTION (LACET)

### II.2.2.1.DEFINITION

La stabilité de direction se réfère au comportement de l'avion en lacet lorsqu'il y a une rotation suivant l'axe vertical causée par un moment de lacet. L'avion sera d'autant plus stable que pour une perturbation donnée ( $\Delta\beta$ ) la variation du moment de rappel c'est à dire  $\Delta C_n$  sera grand. La valeur de la stabilité dépend donc de la valeur de la pente de la courbe  $C_n = f(\beta)$ . En effet: [1],[16]

$$\text{stabilité} = 1/\text{maniabilité} = \Delta C_n / \Delta\beta$$

Autrement dit, si l'avion a la tendance d'annuler cet angle de dérapage  $\beta$  alors on a une stabilité de direction positive, sinon est négative. (voir figure II.1)

### II.2.2.2.REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA STABILITE DE DIRECTION

La représentation de la variation de  $C_n$ (CG) en fonction de  $\beta$  (angle de dérapage pour un avion statiquement stable en lacet est donnée sur la (figure II.2) avec une pente positive [1],[16].

\_ A l'équilibre  $\beta = 0$ .

\_ Si  $\beta$  augmente de  $(+\Delta\beta)$  alors  $C_n > 0$  =====> Moment aerodynamique à tourner à droite, l'avion revient sur sa trajectoire.

\_ Si  $\beta$  diminue de  $(-\Delta\beta)$  alors  $C_n < 0$  =====> Moment aerodynamique à tourner à gauche, l'avion revient sur sa trajectoire.

### II.2.2.3.LES ELEMENTS DE CONTRIBUTION DE STABILITE EN LACET

#### II.2.2.3.1.AILES (WINGS)

La contribution de l'aile dans la stabilité statique positive est petite. (voir figure II.3). Lorsqu'il y a un dérapage positive (vecteur vitesse à droite) , l'aile de droite produit une portance (Lift) supérieure que l'aile de gauche qui va influencer sur la stabilisation, et de même pour la force de traînée (Drag).[16].

#### **II.2.2.3.2.FUSELAGE**

Joue un rôle de déstabilisation dans la stabilité de pitch et de direction lorsqu'il ya un angle de dérapage ( $\beta$ ), car la surface du fuselage avant le centre de gravité est supérieure que l'arrière, d'où la pression du vent relative dans cette surface crée une déstabilisation

#### **II.2.2.3.3.MOTEUR**

Joue un rôle de déstabilisation s'il se trouve en avant du centre de gravité (CG).

#### **II.2.2.3.4.EMPENNAGE VERTICAL (VERTICAL TAIL)**

Joue un rôle de stabilisation important, car il se trouve derrière le centre gravité (CG). Lorsqu'il ya un dérapage ( $\beta$ ), alors on a une création d'une force horizontale en aérodynamique, cette force va augmenter la stabilisation du moment de lacet par rapport au centre de gravité.

— créer, en cas de dérapage ( $\beta$ ), une résultante aérodynamique R donnant par rapport au centre de gravité un moment de rappel de l'avion sur sa trajectoire. (voir figure II.4)

$$\text{MOMENT AERODYNAMIQUE} = R \cdot X$$

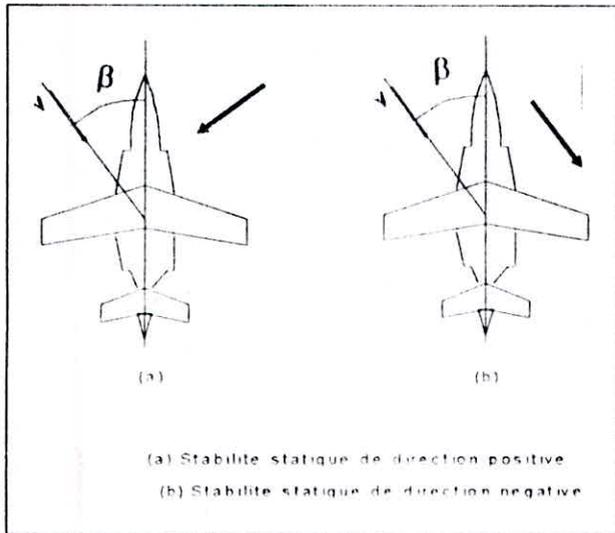


FIGURE II.1 : "Stabilité statique de direction"

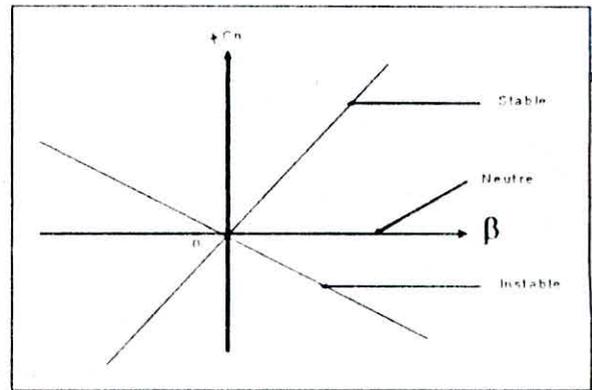


FIGURE II.2: "Coefficient du moment de lacet en fonction de dérapage"

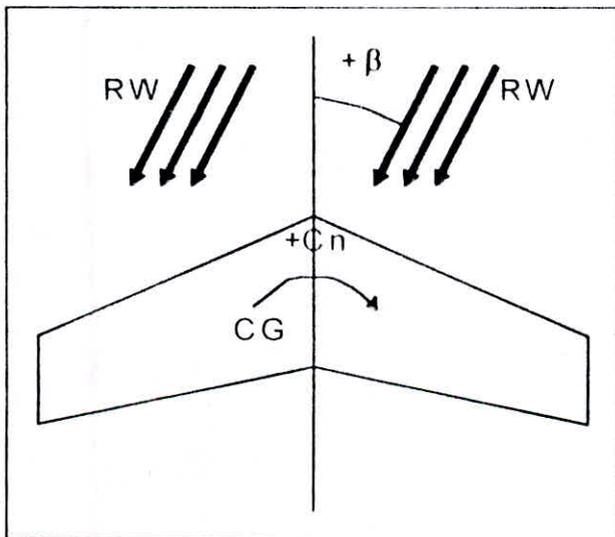


FIGURE II.3: "Contribution de l'aile dans la stabilité statique directionnelle"

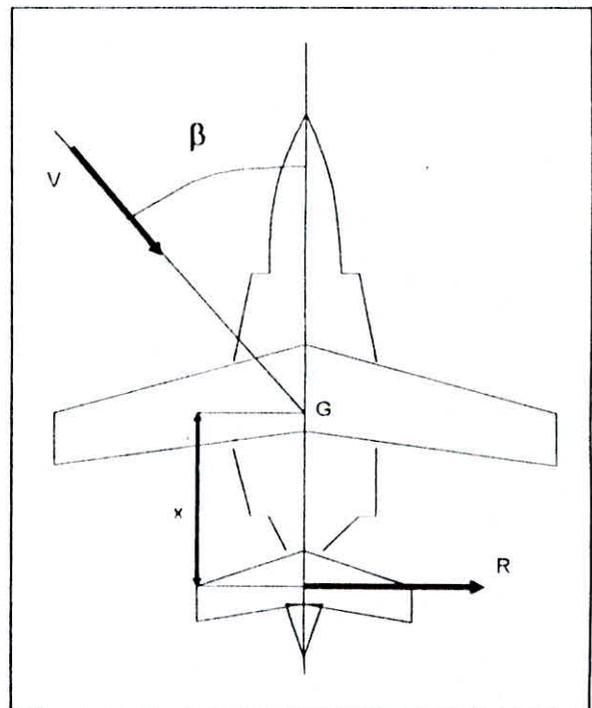


FIGURE II.4: "Contribution de l'empennage vertical dans la stabilité statique de direction"

#### **II.2.2.3.5.EFFET D'ANGLE D'ATTAQUE IMPORTANT (effect of high angle of attack)**

Si l'empennage vertical est complètement dans l'air relative (RW) à cause des angles d'attaques importants. Alors la stabilité statique de direction est détériorée, d'où le coefficient du moment de lacet  $C_n$  diminue. (voir figure II.5)

#### **II.2.2.3.6.EFFET DE NOMBRE DE MACH (mach number)**

Le nombre de mach peut réduire la stabilité statique de direction ou devient instable lorsqu'on a une combinaison d'angle de dérapage et le nombre de mach importants (voir figure II.6).

### **II.2.3.STABILITE STATIQUE LATERALE (ROULIS)**

#### **II.2.3.1.DEFINITION**

La stabilité statique latérale se réfère au comportement de l'avion suivant l'axe de roulis. Le moment de roulis est causé soit: **[16]**

- par l'activation du pilote sur les ailerons.
- lorsqu'il ya un dérapage.

Dans cette section on s'intéresse aux effets de dérapage sur le moment de roulis. on peut distinguer trois cas:

- roulis stable due au dérapage. (voir figure II.7.1)
- roulis instable due au dérapage. (voir figure II.7.2)
- roulis neutre due au dérapage. (voir figure II.7.3)

En fin pour un dérapage positive il faut un moment de roulis négative, et vice versa.

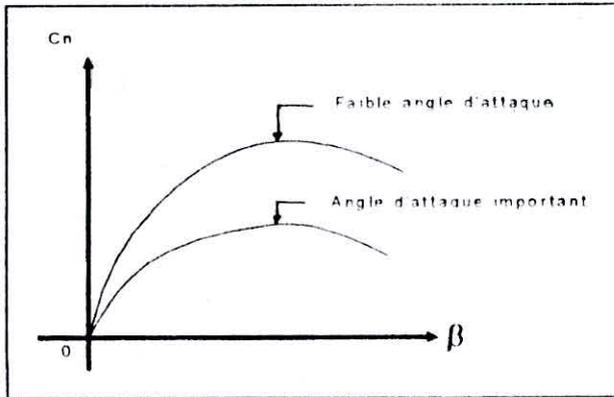


FIGURE II.5: "Effet d'angle d'attaque"

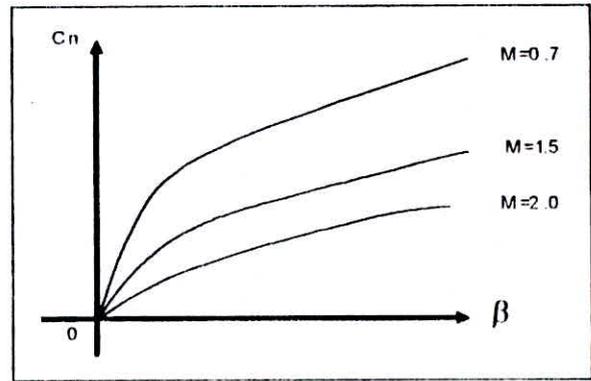


FIGURE II.6: "Effet de nombre de mach"

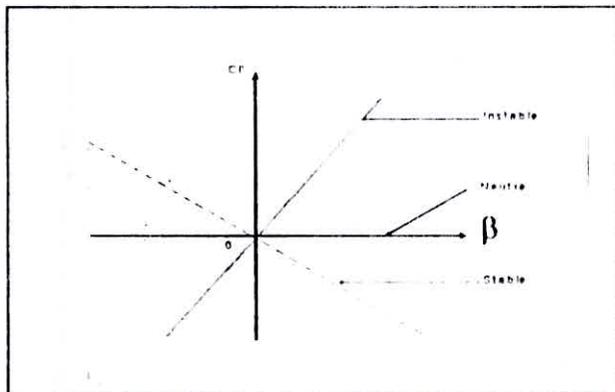


FIGURE II.8: "Représentation graphique du coefficient de moment de roulis en fonction de dérapage"

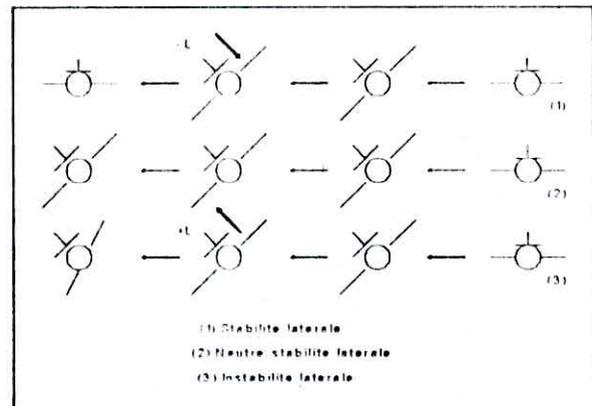


FIGURE II.7: "Stabilité statique de roulis"

### II.2.3.2 REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA STABILITE LATERALE

La représentation de la variation de  $C_l$  (CG) en fonction de  $\beta$  pour un avion statiquement stable en roulis est donnée sur la (figure II.8) avec une pente négative. [1] [16]

### II.2.4.MANIABILITE

#### DEFINITION

Un avion est dit maniable si, pour un faible braquage de la gouverne de direction ( $\Delta\delta_r$ ), on obtient une variation sensible de derapage avion ( $\Delta\beta$ ).

D'ou on écrit :

$$Maniabilité = \frac{\Delta\beta}{\Delta\delta_r}$$

### II.3.STABILITE DYNAMIQUE

#### II.3.1.DEFINITION:[16]

La stabilité dynamique est la tendance des amplitudes de mouvement de l'avion à s'annuler ou à atteindre des valeurs correspondantes à un nouveau état stationnaire après un certain temps où la perturbation sera achevée.

Il faut rappeler à ce stade que pour la stabilité dynamique on peut distinguer:

- \_ Stabilité avec commandes bloquées: c'est à dire que les commandes sont maintenues à une certaine valeur de braquage par le pilote,peut importe qu'il soit humain ou automatique.
- \_ Stabilité avec commandes libres: c'est à dire que le pilote les relache de façon à ce que les gouvernes prennent d'elle même une position sous l'effet des seules forces aerodynamiques.

Il est aussi nécessaire de préciser que la stabilité est aussi modifiée selon que les moteurs de l'avion fournissent ou non de la puissance.

## II.3.2. ETUDE DE LA STABILITE DYNAMIQUE LATERALE ET DIRECTIONNELLE

### II.3.2.1. EQUATIONS DE MOUVEMENT ET FONCTIONS DE TRANSFERT

Les équations de mouvement latéral d'un avion qui est sujet à des petites perturbations relativement à des conditions de vol stationnaire sont données sous la forme matricielle.

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{avec } X^T = [\beta, p, r, \phi]$$

$$Y = CX \quad U^T = [\delta_r, \delta_a]$$

A, B, C sont données en premier chapitre.

La fonction de transfert G(S) est donnée par:

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$g_{11} = [\beta/U]_{\delta_r 0} \quad , \quad g_{12} = [\beta/U]_{\delta_a 0}$$

$$g_{21} = [\phi/U]_{\delta_r 0} \quad , \quad g_{22} = [\phi/U]_{\delta_a 0}$$

### II.3.2.2. MODES D'OSCILLATIONS EN MOUVEMENT DYNAMIQUE LATERAL

L'équation caractéristique du mouvement dynamique latéral peut s'écrire sous la forme standard suivante. [14]

$$DEN = (T_1 S + 1)(T_2 S + 1)(S^2 + 2\lambda W_n S + W_n^2) = 0$$

Les racines de cette équation sont données par:

$$\mu_1 = -1/T_1 = -0.0112$$

$$\mu_2 = -1/T_2 = -12.4341$$

$$\mu_{3,4} = -\lambda W_n \pm j W_n (1 - \lambda^2)^{1/2} = -0.6854 \pm j 3.3073$$

Le mouvement latéral est donc le résultat de la superposition de trois modes:

a)\_ Un mouvement lentement convergent, appelé *mouvement spirale*. c'est un mouvement transversal aperiodique décrit l'avion pendant une certaine inclinaison (voir figure II.9).

On dira qu'un avion est stable en spirale s'il a la tendance à desserrer un virage.

b)\_ Un mouvement qui converge rapidement appelé *mouvement de roulis simple*.

(voir figure II.10)

c)\_ Un mouvement faiblement amorti de faible fréquence d'oscillation appelé *mouvement de roulis hollandais*. c'est un phénomène due au couplage Lacet Roulis.

## II.4. DIFFERENT TYPES DE VIRAGE

### II.4.1. VIRAGE CORRECT

L'influence du virage sur les performances de l'avion peut être assimilée à l'influence du poids:

\_ Avant le virage le poids égal à  $P$ .

\_ En virage le poids égal à  $P_a = n P$ .

Il existe trois type de virage : [1]

\_ Virage à  $Z$  et  $V$  constants.

\_ Virage à  $Z$  et  $\alpha$  constants.

\_ Virage à  $Z$  et  $W_n$  constants

Dans notre étude on s'intéresse au virage de type l'altitude ( $Z$ ) et l'angle d'attaque ( $\alpha$ ) constants. (voir figure II.11).

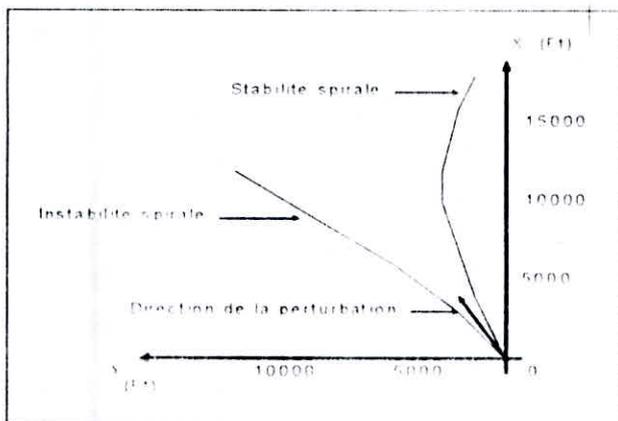


FIGURE II.9: "Mouvement spiral"

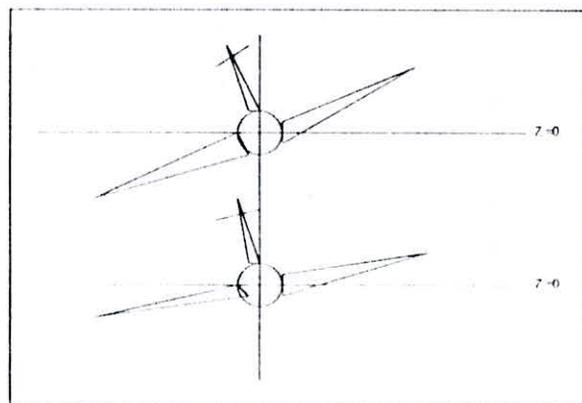


FIGURE II.10: "Mouvement de roulis"

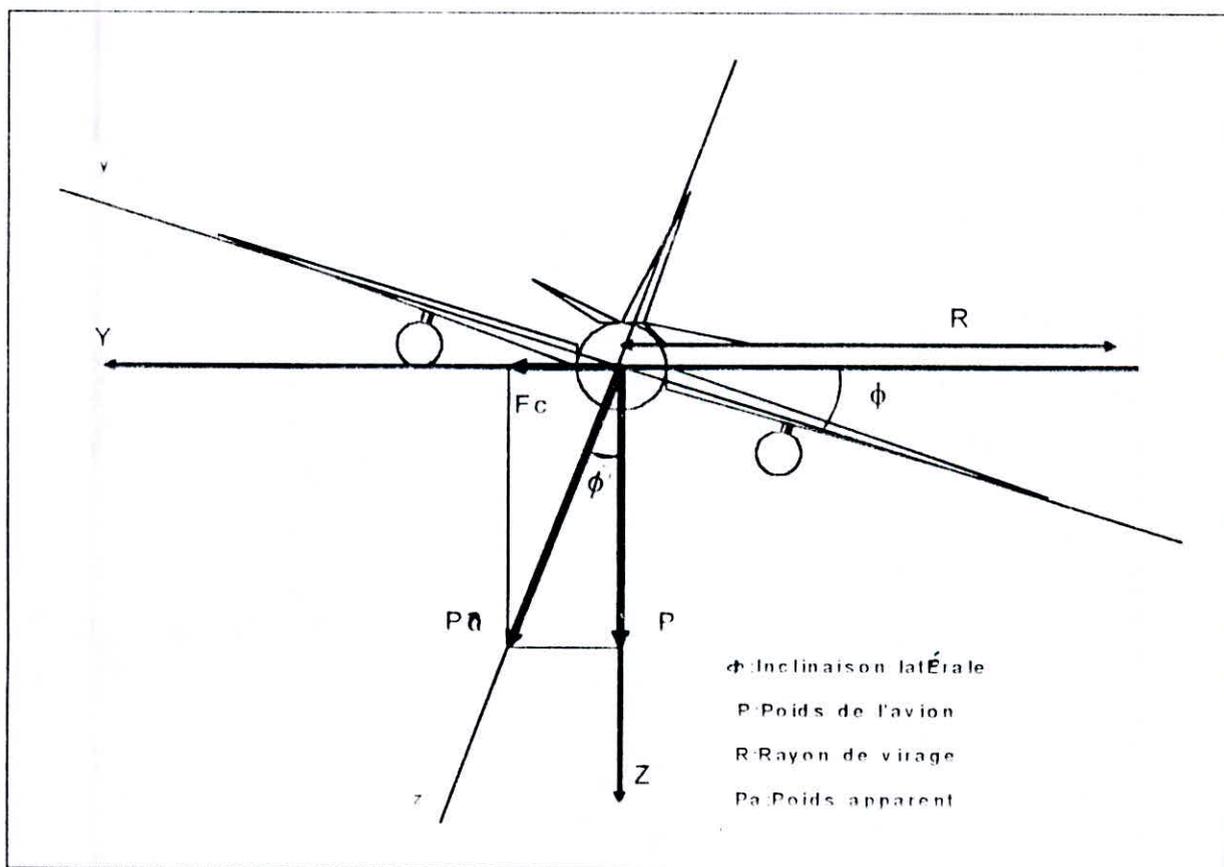


FIGURE II.11: "Virage correct"

On écrit :

$$V = V_{sp} = \sqrt{\frac{2}{\rho S} n \cdot P \frac{l}{C_z}} = V_0 \sqrt{n}$$

avec

$V_0$  : vitesse du vol avant le virage.

$n$  : facteur de charge. ( $n = P_a/P = 1/\cos(\phi)$ ).

Pour une inclinaison latérale  $\phi$  (assiette latérale) on a :

$$\tan(\phi) = \frac{F_c}{P} = \frac{\frac{M V^2}{R}}{M \cdot g} = \frac{V^2}{R \cdot g} \Rightarrow V^2 = R \cdot g \cdot \tan(\phi)$$

#### II.4.2. VIRAGE DERAPE

Le facteur de charge en virage dérapé, est plus élevé qu'en virage correct. En effet  $n = P_a/P$ . De plus  $P_a$  n'est pas dans le plan de symétrie, l'avion dérape, la bille n'est pas au milieu.

#### REMEDES

diminuer  $F_c$ , or  $F_c = M V^2/R$ , soit en diminuant la vitesse  $V$ , soit en augmentant le rayon du virage  $R$ .

augmenter l'inclinaison  $\phi$  jusqu'à ce que la bille soit au milieu.

#### II.4.3. VIRAGE GLISSE

Le facteur de charge en virage glissé est plus faible qu'en virage correct, en effet :  $n = P_a/P$ .

De plus  $P_a$  n'est pas dans le plan de symétrie, l'avion glisse, la bille n'est pas au milieu.

## REMEDES

- \_ augmenter  $F_c$ , soit en augmentant la vitesse  $V$ , soit en diminuant le rayon  $R$ .
- \_ diminuer l'assiette latérale  $\phi$  jusqu'à ce que la bille soit au milieu.

## II.5. NOTIONS SUR LES ELEMENTS DE COMMANDES

### II.5.1. DEFINITION

Les commandes de vol sont des systèmes mécaniques permettant à l'avion d'évaluer un mouvement autour de trois axes de référence ayant le centre de gravité comme origine. [4].

Les organes permettant le mouvement autour de l'axe de roulis sont appelés *gouvernes de gauchissement* (ailerons) et suivant l'axe de tangage sont appelés *gouvernes de profondeur* (stabilisateurs), et *gouvernes de direction* pour le mouvement autour de l'axe de lacet.

### II.5.2. ROLES DES GOUVERNES

Provoque ou annule le mouvement autour des axes de références lors du braquage de la gouverne, il se produit une zone de surpression du côté où la gouverne est braquée. Alors qu'à l'opposé il se produit une zone de dépression, ces forces produisent un moment par rapport au centre de gravité de l'avion, entraînant son évaluation.

#### II.5.2.1. AILERONS

Les ailerons ce sont des gouvernes ou des volets, généralement sont disposés encastés dans chaque aile à l'extrémité agissant en sens inverse (différentiellement).

##### **virage à gauche:**

- \_ aileron droite descend
- \_ aileron gauche se lève

##### **virage à droite:**

- \_ aileron droite se lève
- \_ aileron gauche descend

### II.5.2.2.SPOILERS

Sur les avions volant à grande vitesse les ailerons peuvent provoquer un mouvement opposé à celui atteint par suite des déformations élastiques de l'aile

Cette vitesse est appelée *vitesse d'inversion*. Pour palier cet inconvénient il faut augmenter au maximum la rigidité de l'aile (en torsion), ou bien l'utilisation des spoilers qui assistent les ailerons (exemple B737) ou bien les ailerons à grande vitesse et basse vitesse (exemple B727).

### II.5.3.PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DES GOUVERNES

Le tableau ci-dessous résume le fonctionnement des gouvernes.

Type d'actionneur	Gouvernes	Fonctionnement	Axes demouvement
volant à gauche où à droite	ailerons	pencher à gauche où à droite	roulis
manche en avant où en arrière	gouverne de profondeur	piquer ou cabrer	tangage
pédales	gouverne de direction	tourner à droite où à gauche	lacet

#### II.5.4. CARACTERISTIQUES DES GOUVERNES: (exemple d'un avion subsonique A300)

<b>Grandeurs</b>	<b>G. Profondeur</b>	<b>Aileron</b>	<b>G. Direction</b>
Course (mm)	110	110	140
Vitesse (mm/s)	130	130	140
Hystéresis ( $\pm$ mm)	0.09	0.09	0.09
Inertie ( $\text{kg.m}^2$ )	35	20	90
Const. de temps (ms)	110	110	200
Force (dan)	5000	7000	10000

CHAPITRE : III

***COMMANDE ADAPTATIVE  
AVEC UN MODELE DE  
REFERENCE***

# COMMANDE ADAPTATIVE AVEC UN MODELE DE REFERENCE

## III.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on va étudier la synthèse des commandes avec un modèle de référence basée sur les concepts de positivité et d'hyperstabilité lorsqu'on fait subir au système différentes sortes de perturbations extérieures où une variation de ses paramètres internes. Et avant de commencer la synthèse de commandes, on essaye de minimiser les interférences du système.

## III.2. MINIMISATION D'INTERFERENCES.

La minimisation des interférences à l'état d'équilibre consiste à trouver un contrôleur  $K(S)$  de telle façon que la fonction de transfert en boucle fermée est diagonale (voir figure III.1)

On pose

$$Q = G \cdot K$$

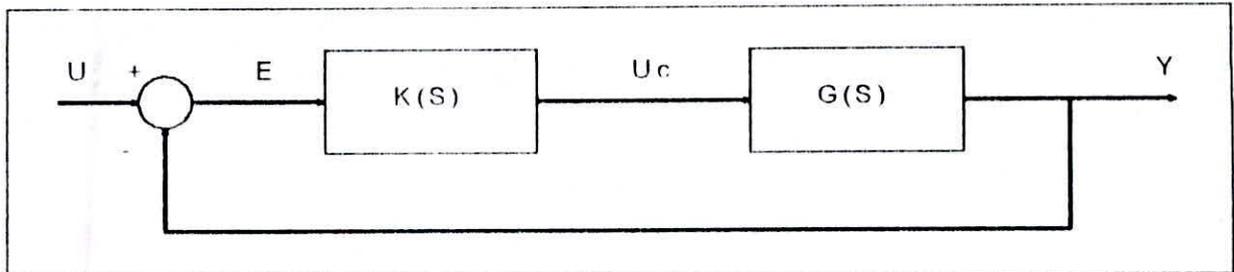
donc

$$R(S) = \frac{Y}{U} = [I + Q]^{-1} \cdot Q = I \Rightarrow I + Q = Q$$

Ce qui conduit en régime permanent ( $S$  tend vers zéro):

$$\left. \begin{array}{l} q_{ij} = q_{ji}, \quad i \neq j \\ \\ 1 + q_{ii} = q_{ii}, \quad i = j \end{array} \right\} \Rightarrow q_{ii}(S) = \frac{1}{S} \cdot P_{ii}(S) \quad (D)$$

D'après l'équation (I), on remarque qu'un contrôleur de type intégrateur permet de minimiser les interférences et les erreurs à l'état d'équilibre (steady state).



**FIGURE III.1:** " Diagramme bloc d'un contrôleur de minimisation d'interférences "

Dans le cas où la fréquence de travail est donnée, il est meilleur d'utiliser un algorithme d'alignement qui porte le nom "align".

### III.2.1. ALGORITHME ALIGN

Cet algorithme est basé sur la minimisation de critère définie comme étant:

$$\phi_i = \sum_{j=1,2,\dots,m} \frac{|\varepsilon_j|}{|\varepsilon_j|} \dots (II)$$

avec

$$\varepsilon_i = G(S_0) K_i \quad \text{ou} \quad S_0 : \text{Fréquence de travail}$$

Le choix optimum de K est obtenu par la détermination des  $K_i$  qui minimise  $\phi_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$

On pose :

$$X = j^{\text{ème}} \text{ ligne de } G(S_0)$$

L'équation (II) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\phi_i = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{|X_j \cdot K_i|^2}{|X_j \cdot K_i|}}{\frac{K_i^T D_i K_i}{K_i^T C_i K_i}}$$

avec

$$C_i = (X_i^T X_i + X_i X_i^T) / 2$$

$$D_i = \sum C_j$$

La fonction  $\phi_i$  est optimale si

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial k_i} = 0 \rightarrow (D_i - \phi_i C_i) \cdot k_i = 0$$

Ceci correspond à la petite valeur de  $\phi_i$  satisfaisant :  $\det(D_i - \phi_i C_i) = 0$

Si  $D_i$  est non singulière comme c'est le cas général, il se suit que  $K_i$  est le vecteur propre de la matrice  $D_i^{-1} C_i$  correspondant à la valeur propre maximale. Donc, l'algorithme "align" à pour but d'aligner les colonnes de  $G(S_0) K_i$  avec les vecteurs de base  $\epsilon_i$ .

### III.2.2.SIMULATION

Par le biais de programmation dans le langage pc matlab,l'algorithme (align) donne les resultats suivants:

FREQUENCES $\omega_n$ (rad/s)	$K=[K_{11},K_{12},K_{21},K_{22}]$
0.628	[1, 1, 0.7603, -0.9889]
6.28	[1, -0.9522, -0.1902, 1]
62.8	[1, -0.5866, -0.0836, 1]
628	[1, -0.0233, -0.0826, 1]

### III.3.COMMANDE ADAPTIVE AVEC UN MODELE DE REFERENCE (MRAC)

#### III.3.1.INTRODUCTION

Dans le cas où les paramètres du système ne sont pas connus,on cherche alors à adapter l'organe de commande de façon à ce que le processus se comporte comme le modèle de référence. Cette technique de commande porte le nom de *commande adaptive avec un modèle de référence*.

Les premiers algorithmes étaient constuits à partir des méthodes de gradients. Actuellement, la synthèse d'algorithmes de commande adaptive avec un modèle de référence se fait soit à l'aide de la théorie de Liapouov soit a partir du concept d'hyperstabilité et de positivité. Ce sont des dernières approches qui sont les plus répondues et que nous allons développer cette dernière méthode dans ce chapitre.

### III.3.2.SYNTHESE DE SYSTEME DE COMMANDE ADAPTIVE BASEE SUR LES CONCEPTS DE POSITIVITE ET D'HYPERSTABILITE

#### III.3.2.1.FONCTIONS REELLES POSITIVES:[2]

##### DEFINITION\_1

Une fonction  $F(Z)$  de la variable complexe  $Z = \alpha + j\omega$  est dite réelle positive ( $F(Z) \in \{P.R.\}$ ) si :

- 1)  $F(\alpha)$  est réelle
- 2)  $\operatorname{Re}\{F(Z)\} \geq 0$  pour tout  $Z$  telque  $\operatorname{Re}\{Z\} \geq 0$

##### Remarque:

Si  $F(Z)$  est réelle positive, on peut la realiser à l'aide de circuits passifs (impédances,et admittance).

##### DEFINITION\_2

Une fonction rationnelle  $F(Z)$  de la variable complexe  $Z = \alpha + j\omega$  est dite strictement réelle positive ( $F(Z) \in \{S.P.R.\}$ ) si :

- 1)  $F(\alpha)$  est réelle
- 2) Les pôles de  $F(Z) \in$  demi plan  $\operatorname{Re}\{Z\} < 0$
- 3)  $\operatorname{Re}\{F(j\omega)\} > 0, -\infty < \omega < +\infty$

##### DEFINITION\_3

La matrice de transfert  $G(S) = C_e (S.I - A_m)^{-1} B_p$  est "S.P.R" si est seulement si:  
 $\exists P$  et  $Q / P > 0, Q > 0$  telque:

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

$$C_e = B_p^T P$$

\_ Si  $G(S)$  est "S.P.R"  $\implies$  L'erreur  $X_e$  est globalement asymptotiquement stable

\_ Si  $G(S)$  est "P.R"  $\implies$  L'erreur  $X_e$  est globalement stable

### III.3.3.CHOIX DU MODELE DE REFERENCE

Dans notre projet, le modèle de référence est choisi selon trois critères:

- 1) \_ La matrice d'état  $A_m$  est négative définie pour assurer la stabilité et la maniabilité de l'avion au même temps.
- 2) \_ Un dérapage induit par les ailerons est nul, pour assurer un virage correct.
- 3) \_ Une inclinaison  $\phi$  induit par les gouvernes de direction est négative pour améliorer la stabilité statique.

En respectant les trois critères cités ci-dessus, les matrices paramètres de l'équation d'état du modèle de référence ( $\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m$ ) que nous allons utiliser tout le long de notre travail seront égales à [8]

$$A_m = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & -10 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.82 & 1.01 \\ -9.49 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_m^T = [\beta_m, p_m, r_m, \phi_m] ; \quad U_m^T = [U_{m1}, U_{m2}]$$

### III.3.4.SYNTHESE DES COMMANDES ADAPTATIVES AVEC UN MODELE DE REFERENCE (MRAC):[2],[15]

#### III.3.4.1.MRAC SANS PERTURBATION EXTERIEURE $d(t)$

Considérons un système physique décrit par les équations d'état suivantes:

$$\dot{X}_P = A_P X_P + B_P U_P \quad (III.1)$$

$$Y_P = C_P X_P \quad (III.2)$$

$X_p$  : vecteur d'état de dimension  $n$

$U_p$  : vecteur de commande de dimension  $m$

$A_p$  : matrice de dimension  $n \times n$

$B_p$  : matrice de dimension  $n \times m$

Le modèle de référence étant décrit par :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m \quad (III.3)$$

$$Y_m = C_m X_m \quad (III.4)$$

avec  $A_m$  négative définie

$$\text{La dynamique de l'erreur } X_e = X_m - X_p \quad (III.5)$$

est régit par l'équation d'état suivante

$$\dot{X}_e = A_m X_e + (A_m - A_p) X_p + B_m U_m - B_p U_p \quad (III.6)$$

(voir figure III.2)

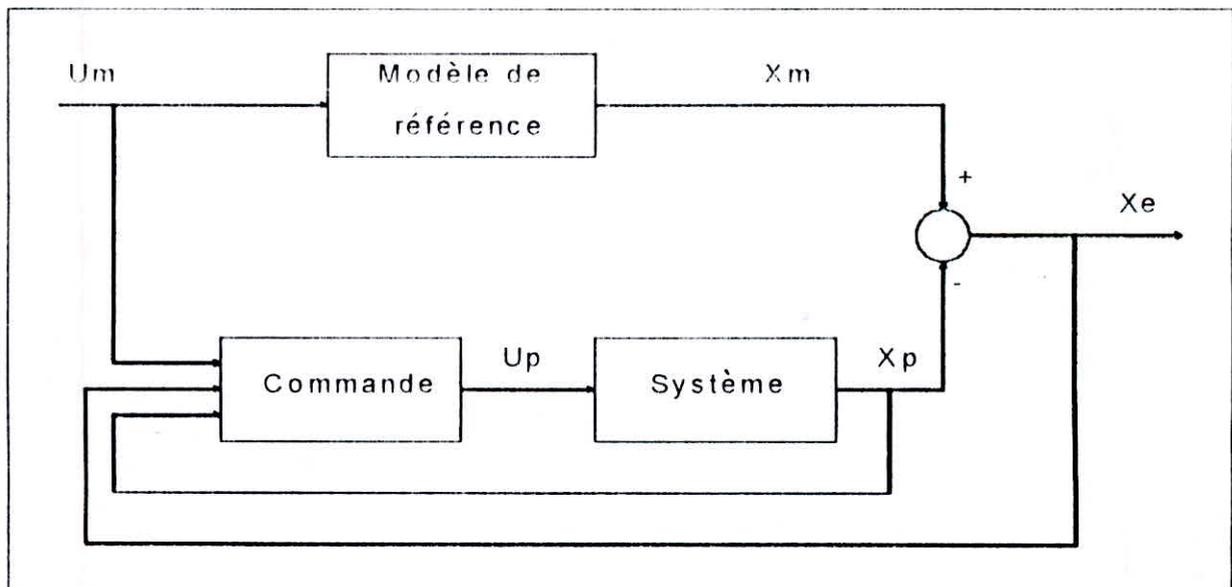


FIGURE III.2 : " Schéma synoptique de la commande adaptative avec un modèle de référence "

D'après les conditions d'Erzerberger : [15]

$$A_m - A_p = B_p B_p^{\dagger} (A_m - A_p) \quad (III.7)$$

$$B_m = B_p B_p^{\dagger} B_m \quad (III.8)$$

où

$$B_p^{\dagger} = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T : \text{pseudo inverse gauche de penrose.}$$

On remplace les équations III.7,8 dans l'équation III.6 on obtient :

$$\dot{X}_e = A_m X_e - B_p [ B_p^{\dagger} (A_p - A_m) X_p - B_p^{\dagger} B_m U_m + U_p ] \quad (III.9)$$

$$\dot{X}_e = A_m X_e - B_p \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = B_p^{\dagger} (A_p - A_m) X_p - B_p^{\dagger} B_m U_m + U_p \quad (III.10)$$

La méthode de l'hyperstabilité à la synthèse de systèmes de commande adaptative consiste à ramener le problème de synthèse à un problème d'hyperstabilité. En effet, on cherche à élaborer un mécanisme d'adaptation des paramètres variables de façon à ce que le système de commande adaptative soit asymptotiquement stable c'est à dire: l'erreur  $X_e$  tend vers à zero en régime permanent.

Donc il suffit de choisir les éléments variables de système linéaire de façon à ce que sa fonction de transfert soit strictement réelle positive de façon à ce que le bloc de contre réaction à caractéristique non linéaire, vérifie l'inégalité de *popov*:

A partir des équations (III.5,10) on obtient le système suivant:

$$\dot{X}_e = A_m X_e - B_p \Phi \quad (III.11)$$

$$Y_e = C_e X_e \quad (III.12)$$

Le système décrit par les équations (III.11,12) peut être représenté par un schéma bloc. (voir figure III.3)

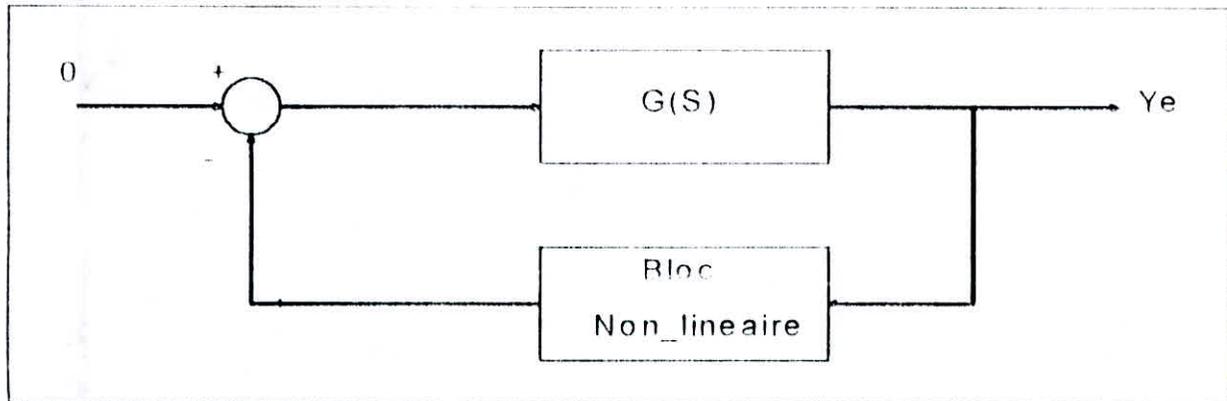


FIGURE III.3 : " Système hyperstable "

#### III.3.4.1.1.FORME PROPORTIONNELLE (P)

Soit la commande

$$U_p = K_n U_m + K_p N_p \quad (III.13)$$

On applique l'inégalité de popov [2],[15]

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(Y_c) \cdot Y_c \cdot dt \geq -\gamma_0^2 \quad (III.14)$$

où

$\gamma_0^2$  : constante positive indépendante de t

$Y_c$  : l'entrée du système non-linéaire

$\phi$  : la sortie du système non-linéaire.

On remplace l'équation (III.10) dans l'équation (III.14). On obtient:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[ K_X - B_p^+ (A_m - A_p) \right] X_p + (K_u - B_p^+ B_m) U_m \right\}^T y_c dt \geq -\gamma^2_0$$

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ X_p^T \left[ K_X - B_p^+ (A_m - A_p) \right]^T y_c + U_m^T (K_u - B_p^+ B_m)^T y_c \right\} dt \geq -\gamma^2_0$$

Une solution qui vérifie l'équation (III.16) est la suivante:

$$[K_X - B_p^+ (A_m - A_p)]^T = \alpha (X_p Y_c^T)^{N-1} \quad (III.17)$$

$$[K_u - B_p^+ B_m]^T = \beta (U_m Y_c^T)^{N-1} \quad (III.18)$$

avec

$\alpha$  : matrice strictement positive définie de dimension  $n \times n$

$\beta$  : matrice strictement positive définie de dimension  $m \times m$

Si  $N = 0$  alors, on peut déduire  $K_X$ ,  $K_u$  de l'équation (III.17,18). Et on écrit:

$$K_X = B_p^+ (A_m - A_p) + Y_c X_p^T \alpha^T \quad (III.19)$$

$$K_u = B_p^+ B_m + Y_c U_m^T \beta^T \quad (III.20)$$

### III.3.4.1.2. FORME PROPORTIONNELLE INTEGRATEUR (P.I)

On définit la forme de la commande  $U_p$  comme étant: [8]

$$U_p = K_r r - [K_X, K_u] [X_p, U_m]^T \quad (III.21)$$

où

Le gain  $K_r$  est la somme du gain intégrateur et proportionnel c'est à dire :

$$K_r = K_p + K_i \quad (III.22)$$

avec

$$K_p = Y_c r^T \beta \quad (III.23)$$

$$\dot{K}_i = Y_c r^T \alpha \quad (III.24)$$

$$K_i(0) = K_{i0} \quad (III.25)$$

$$Y_c = C_c (X_m - X_p) \quad (III.26)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  sont des matrices  $(n_r \times n_r)$  invariant dans le temps, et  $K_{i0}$  est le gain d'intégration initial.

L'équation (III.10) peut s'écrire donc :

$$\dot{\phi} = [B_p^T (A_p - A_m), -B_p^T B_m] [X_p, U_m]^T + U_p - (I_r + K_r) r \quad (III.27)$$

On applique le critère de popov (éq. III.14), on obtient :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [ (I_r + K_r) r ]^T Y_c dt \geq -\gamma_0^2 \quad (III.28)$$

En remplaçant les (Eq. III.22,23,24,25,26) dans l'Eq. III.28), Cette dernière s'écrira donc :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [ r^T [ I_r^T + \left( \int_{t_0}^t Y_c r^T \alpha dt \right)^T ] Y_c dt + \int_{t_0}^{t_1} r^T \beta^T r Y_c^T Y_c dt \geq -\gamma_0^2 \quad (III.29)$$

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} r^T \alpha^T [ \alpha^{-1} L_r^T + \int_{t_0}^t r Y_c^T dt ] Y_c dt + \int_{t_0}^{t_1} r^T \beta^T r Y_c^T Y_c dt \geq -\gamma_0^2 \quad (III.30)$$

La dernière équation (III.30) est vérifiée si  $\alpha^T > 0$  et  $\beta^T > 0$ .

$X_c$  est asymptotiquement stable si et seulement si:

- 1) la fonction de transfert  $G(S) = C_c.(S.I - A_m)^{-1}.B_p$  est strictement positive réelle.
- 2)  $\alpha^T > 0$ , et  $\beta^T \geq 0$

### III.3.4.2. MRAC AVEC UNE PERTURBATION EXTERIEURE D

De la même façon que pour le MRAC sans perturbations extérieures ou internes, cependant il suffit de connaître la valeur maximale de la perturbation. Considérons le système physique décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{X}_p = A_p.X_p + B_p.u_p + D \quad (III.31)$$

où

D: perturbation extérieure.

On définit la commande  $U_p$  comme étant:

$$U_p = K_x.X_p + K_u.U_m + K_d \quad (III.32)$$

où les gains  $K_x$ ,  $K_u$  sont les sommes du gain intégrateur et proportionnel.

L'équation (III.9) peut s'écrire :

$$\dot{X}_c = A_m.X_c - B_p.[(K_x - B_p^+.A_m - A_p).X_p + (K_u - B_p^+.B_m).U_m + K_d + B_p^+.D] \quad (III.33)$$

En utilisant le critère de Popov, l'équation (III.30) s'écrira donc :

$$\eta_d(t_0, t_1) = \eta(t_0, t_1) + \int [K_d + B_p^+.D]^T.Y_c \geq -\gamma_0^2 \quad (III.34)$$

avec :  $\eta(t_0, t_1)$  ayant les mêmes conditions que le (MRAC) sans perturbation extérieure.

La solution qui vérifie l'équation (III.34) est la suivante:

$$K_d^1 = \gamma \cdot \text{Sign}(Y_e^1) \quad (\text{III.34})$$

$$\gamma \geq \text{MAX} |B_p^1 \cdot D| \quad (\text{III.35})$$

### III.4.SIMULATION ET INTERPRETATION

#### III.4.1.SIMULATION

Par le biais de programmation dans le langage *SIMNON*, on va simuler la réponse de notre système (avion) par la commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC). le signal de référence est choisi égale à 10 degrés.

#### FIGURE\_III.4.5.6.7:

On applique une commande adaptative avec un modèle de référence sans aucune perturbation extérieure ou une variation des paramètres internes, et avec une forme proportionnelle du gain de commande, pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

#### FIGURE\_III.8:

On applique une commande adaptative avec un modèle de référence avec une action intégrale (P.I) et sans aucune perturbation extérieure ou une variation des paramètres internes, où  $\alpha = 0.005$  et  $\beta = 0.001$ .

#### FIGURE\_III.9:

On applique une commande adaptative avec un modèle de référence avec une perturbation extérieure suit la loi gaussienne.

$$\alpha = \beta = 0.1 \text{ et } \gamma = 0.1$$

#### FIGURE\_III.10:

On montre l'erreur dynamique  $X_e$  pour chaque commande.

## III.4.2.INTERPRETATION

### FIGURE III.4.5.6.7:

Le signal de sortie suit le modèle de référence ( $\beta_m, \phi_m$ ) avec une erreur constante pour un bon choix des constants  $\alpha$  et  $\beta$ . Les commandes ( $U_{p1}, U_{p2}$ ) sont stables et bornées.

La fréquence d'oscillation est très faible (commande lisse).

### FIGURE III.8:

On observe une très bonne poursuite du modèle de référence par le signal de sortie car l'effet du terme d'intégrateur joue un rôle très important dans l'obtention d'une meilleure poursuite du modèle de référence sachant que l'erreur est presque nulle. Les commandes sont un peu lisses, et présentent des valeurs d'amplitude convenable aux caractéristiques des ailerons et des gouvernes de direction.

### FIGURE III.9:

On a toujours une très bonne poursuite du modèle de référence par le signal de sortie. Les commandes deviennent oscillatoires qui ne répondent plus aux caractéristiques des gouvernes.

### FIGURE III.10:

On remarque dans les deux premières fenêtres que l'erreur est bornée, et devient très petite dans les deux dernières fenêtres.

Figure III.4 : "Simulation par la commande MRAC sans action integrale avec  $\alpha=\beta=0$ "

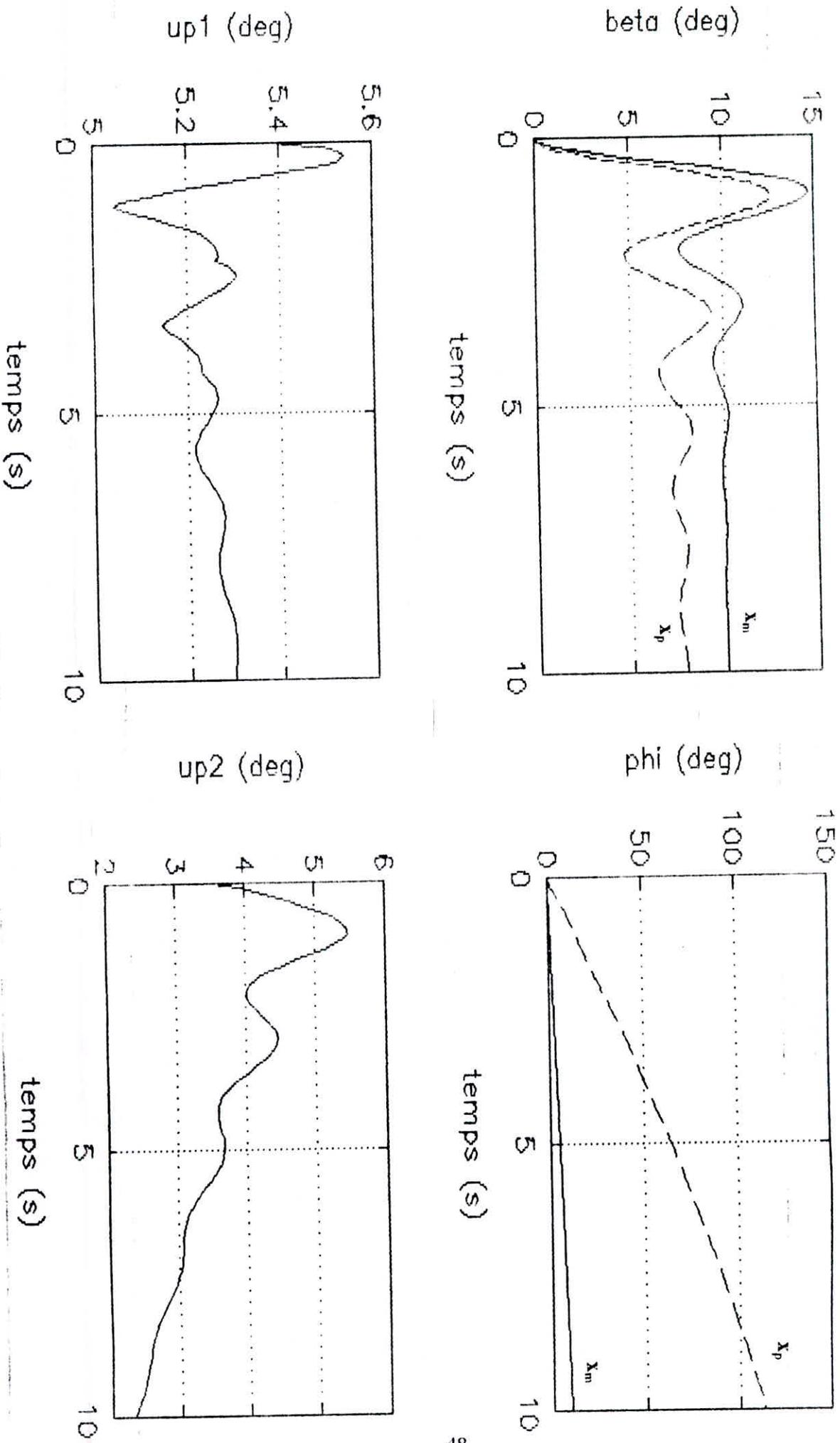


Figure III.5: "Simulation par la commande MRAC sans action integrale avec

$\alpha=0; \beta=0.01; \Gamma$

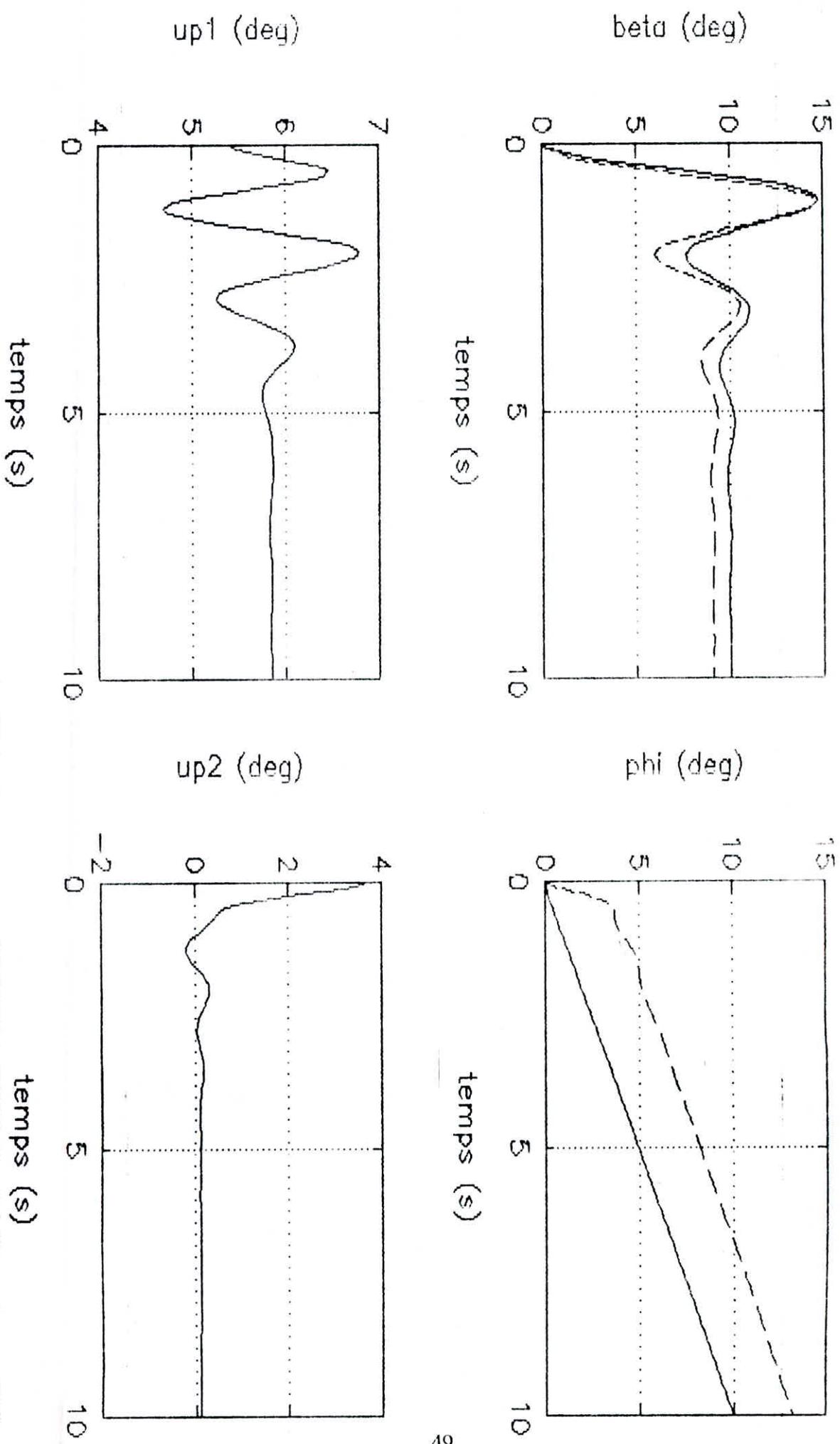


Figure III.6: "Simulation par la commande MRAC sans action integrale avec

$\alpha=0.01$  . 1 :  $\beta=0$ "

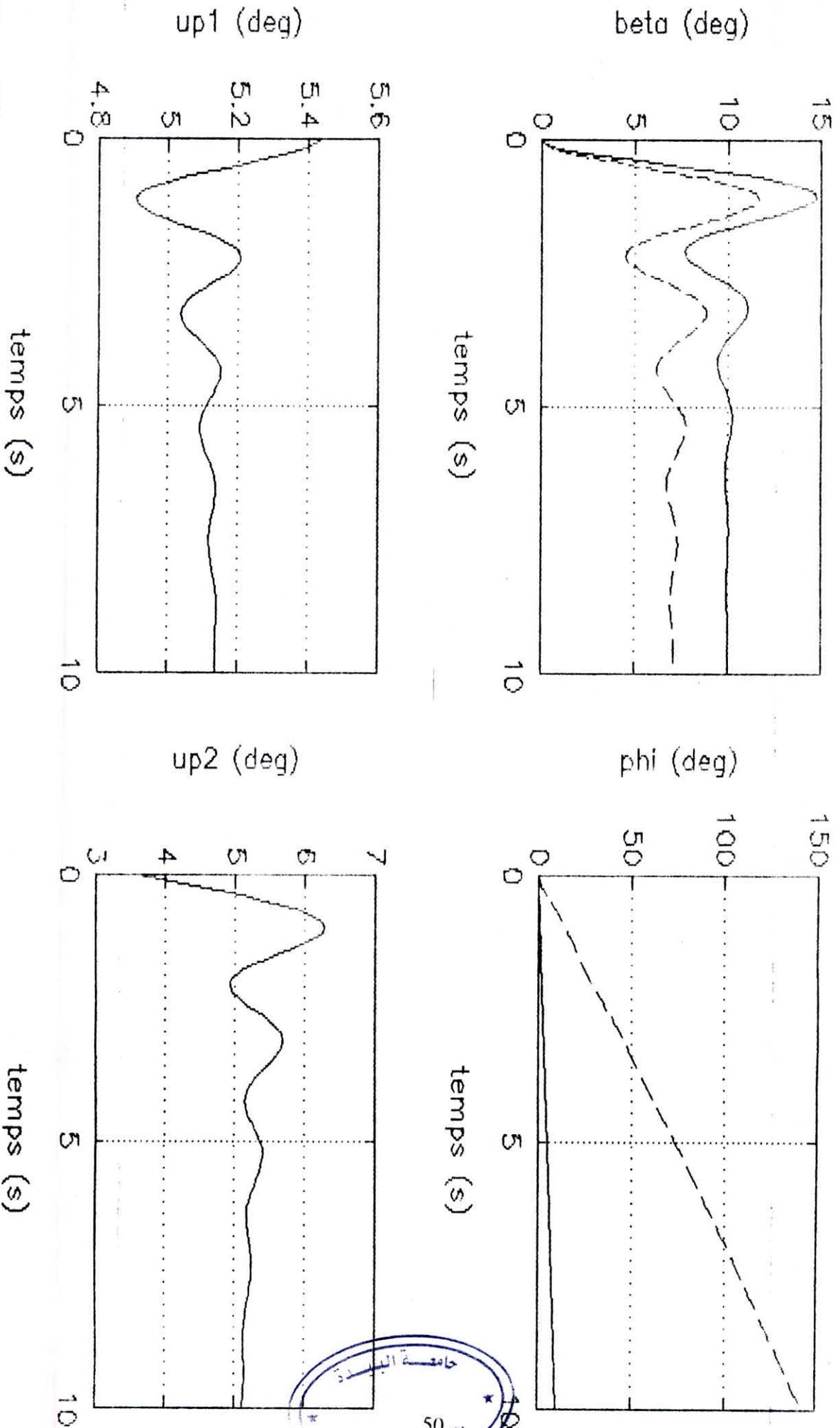


Figure III.7: "Simulation par la commande  $\alpha=0$  sans action intégrale avec

$$\alpha=0.01, \quad \beta=0.01, \quad \Gamma^0$$

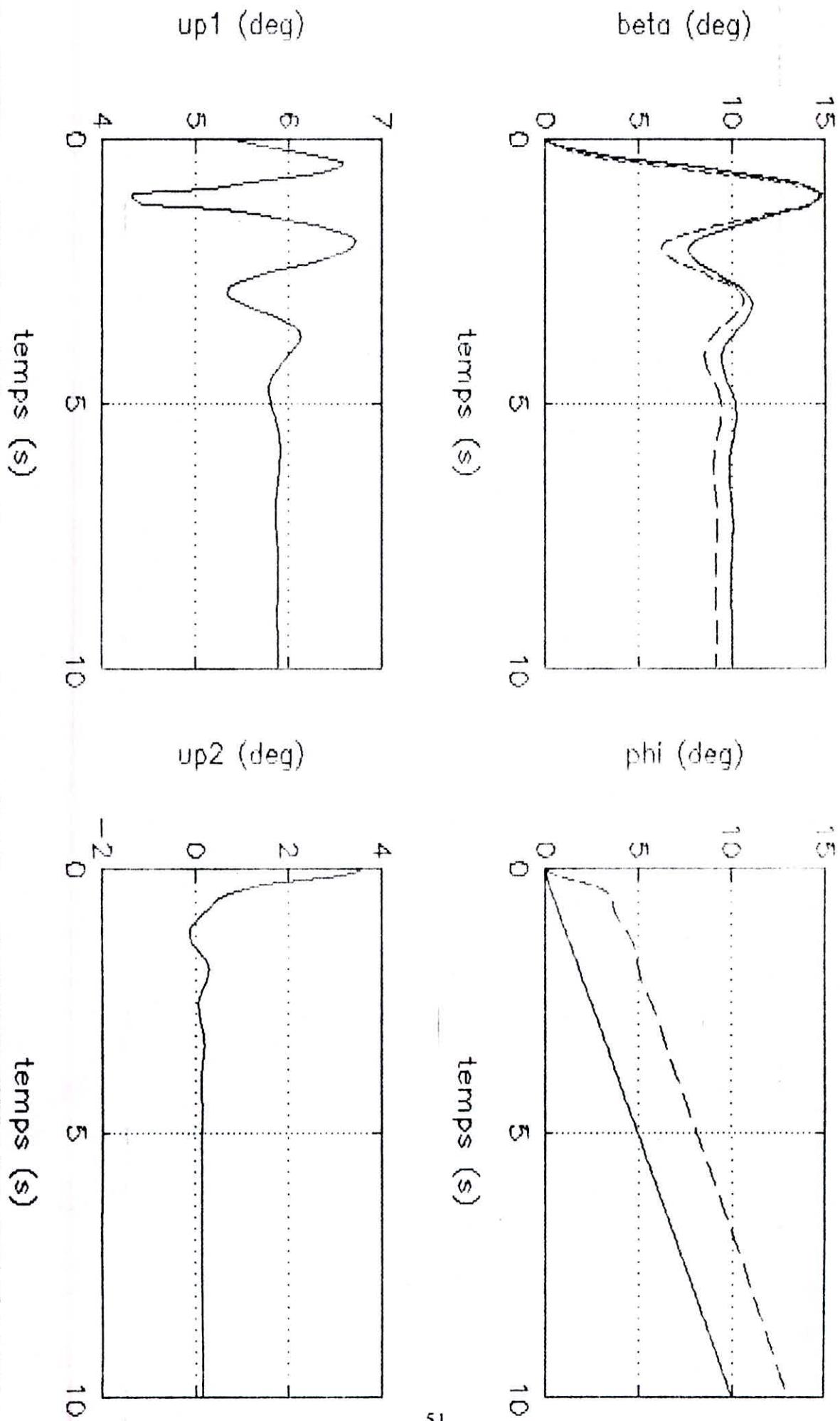


Figure III.8: "Simulation par la commande MRAC avec action integrale ou

$\alpha=0.005$  ;  $\beta=0.001$  ;  $\Gamma$ "

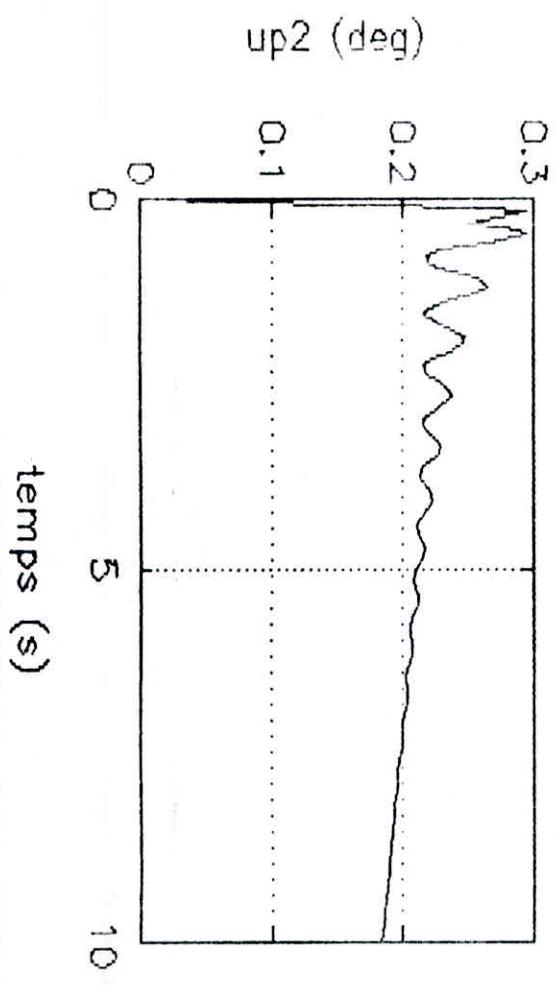
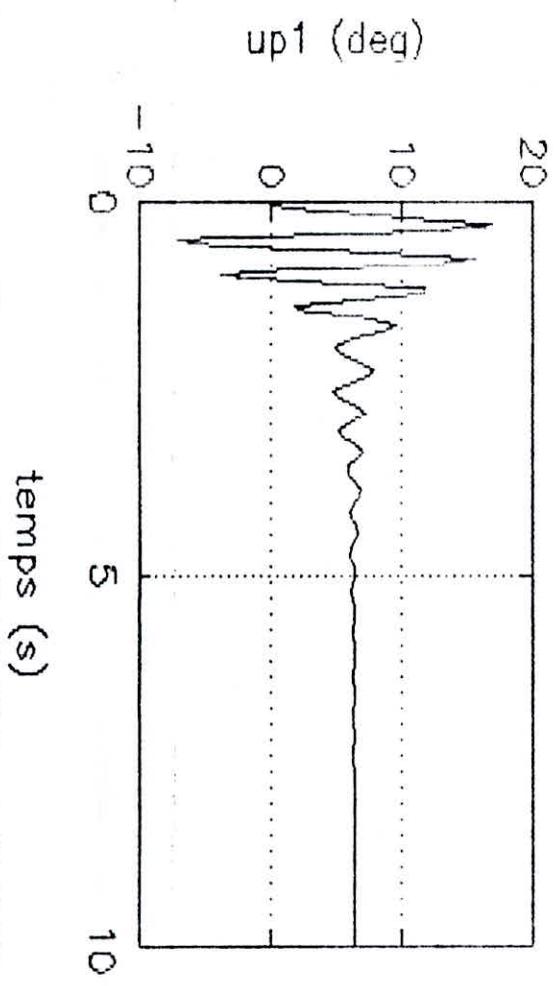
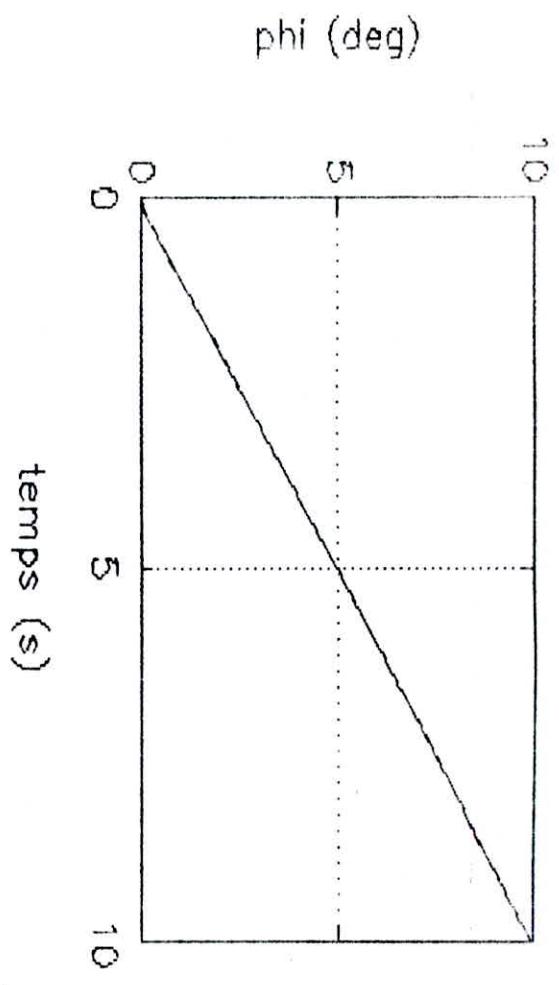
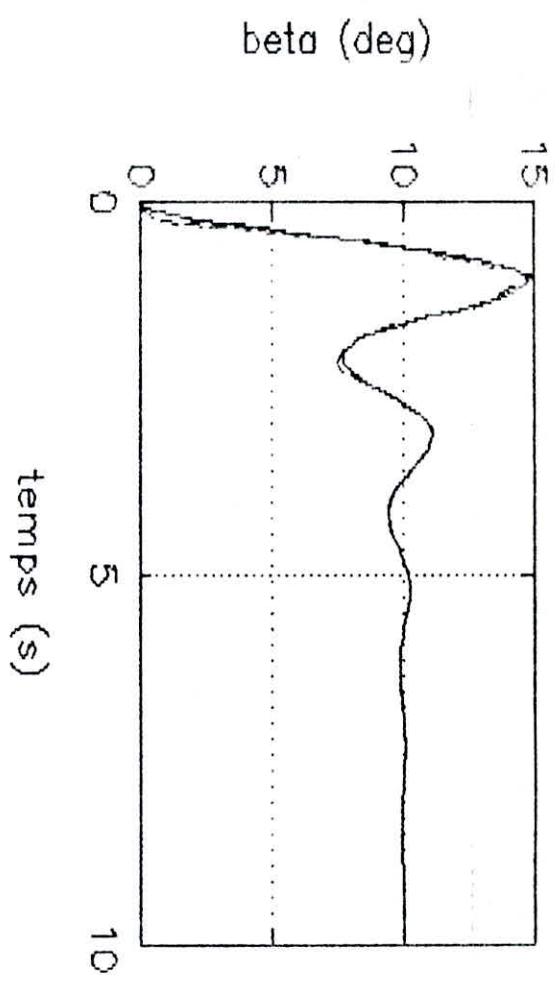


Figure III.9: "Simulation par la commande MRAC avec une perturbation exterieure"

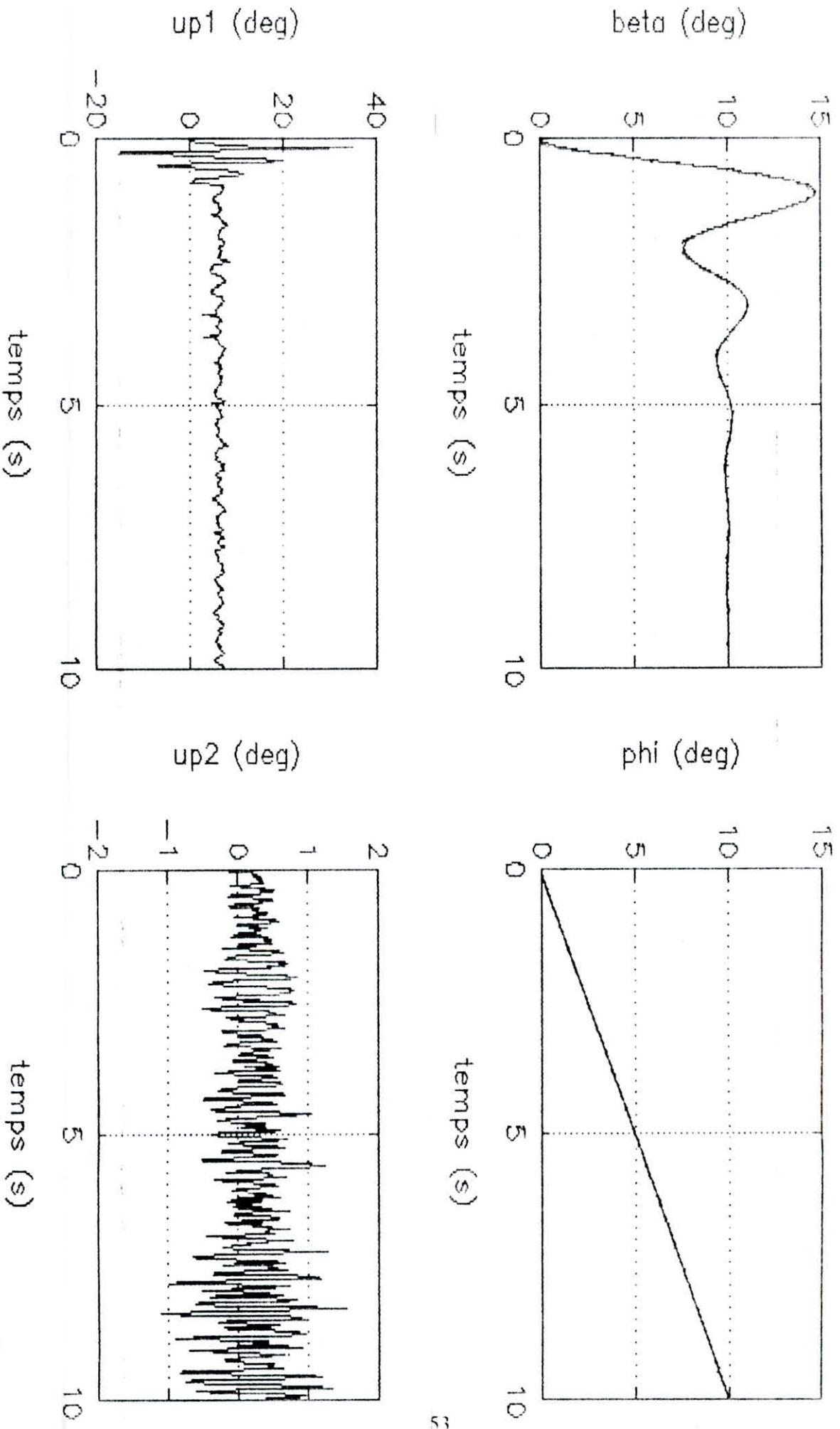
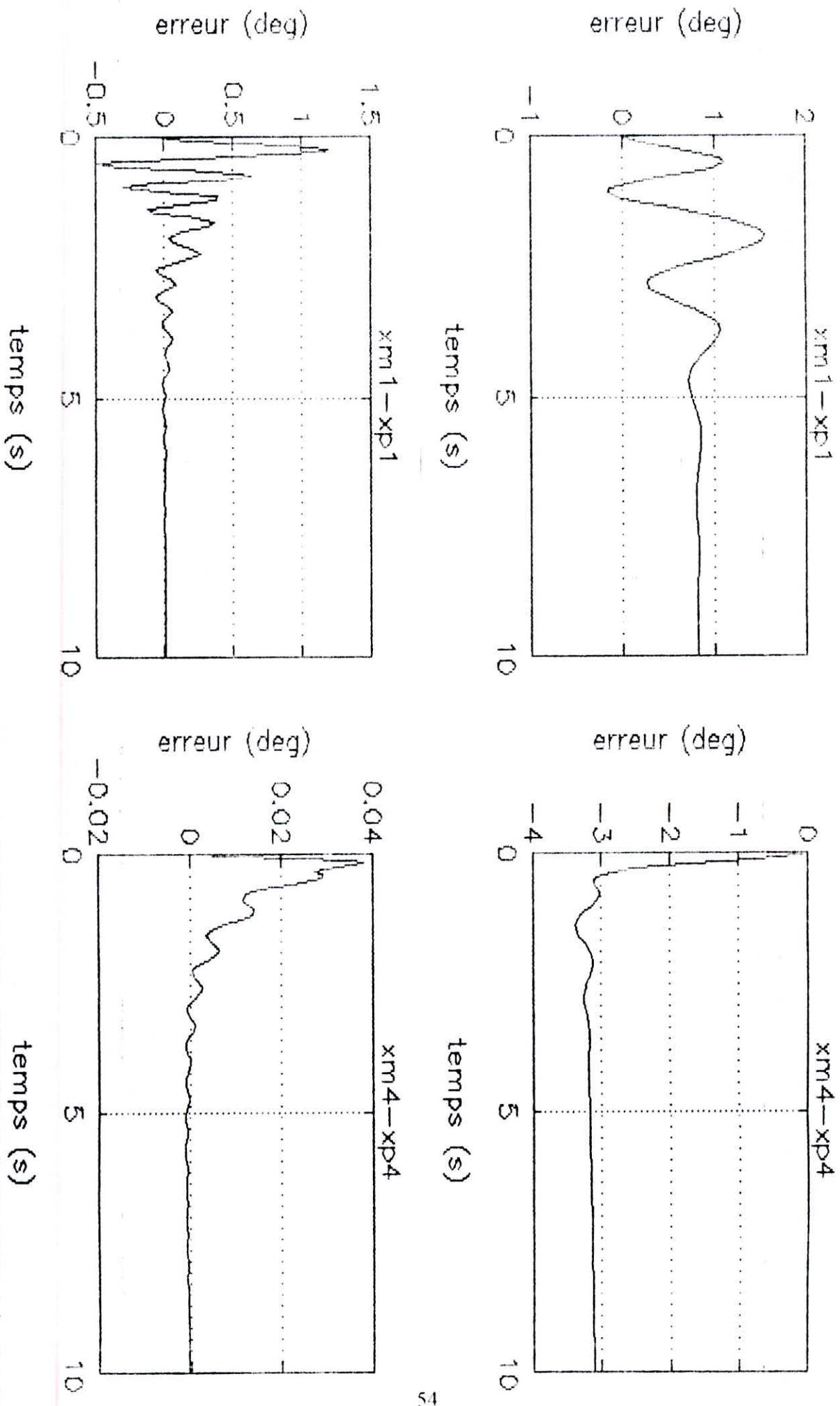


Figure III.10: "Erreur dynamique entre le systeme et le modele de reference"



### III.5. CONCLUSION

La commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC) a connu maintes applications industrielles, et surtout dans le domaine de l'aéronautique. En effet, la convergence de tels algorithmes est liée à une condition de positivité concernant soit une matrice soit une fonction de transfert.

La commande adaptative avec un modèle de référence donne une très bonne poursuite du modèle de référence avec une erreur qui reste bornée. Les commandes sont un peu lisses sauf en présence des perturbations extérieures, il apparaît des oscillations qui ne répondent plus aux caractéristiques des gouvernes, d'où la nécessité des commandes adaptatives par auto-optimisation (SOAC).

CHAPITRE : IV

***COMMANDE ADAPTATIVE  
PAR AUTO-OPTIMISATION***

# COMMANDE ADAPTATIVE PAR AUTO-OPTIMISATION (SOAC)

## IV.INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on va étudier la synthèse des commandes adaptatives par auto-optimisation (SOAC) lorsqu'elles sont appliquées à notre système (avion), puis on testera les performances de chaque commande lorsqu'il ya une perturbation extérieure où une variation des paramètres internes du système.

L'étude se portera sur les commandes suivantes

- \_ commande de découplage
- \_ Commande d'état (State controllers)
- \_ Commande à paramètres optimaux (Parameter optimized controllers)
- \_ Commande à variance minimale (Minimum variance controllers).
- Commande prédictive généralisée (Generalized predictor controllers).

En premier lieu, on commence par l'étude théorique de chaque commande, puis on simulera la réponse de notre système qui n'est autre que la position latérale de l'avion de point vue l'angle d'inclinaison et de dérapage lorsqu'il soumis à des perturbations extérieures où une variation des paramètres internes. En fin, on déduit les performances des commandes appliquées

## IV.1.COMMANDE DE DECOUPLAGE

### IV.1.1.INTRODUCTION

On a vu dans le chapitre précédent, le contrôleur "align" pour la minimisation des interférences pour les systèmes multivariables continus, et maintenant, on va essayer de concevoir un contrôleur de découplage pour les systèmes multivariables discrets avec la dimension des entrées égale au dimension des sorties.

#### IV.1.2. DIFFERENTS MODES DE DECOUPLAGE:

Soit la figure ci-dessous :

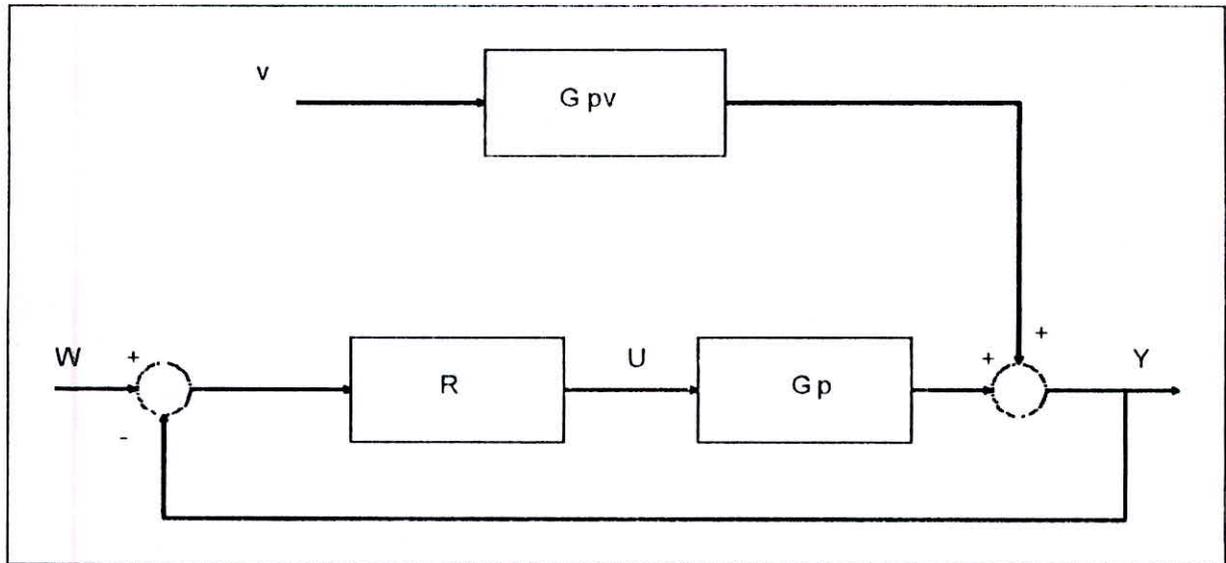


FIGURE IV.1 : " Diagramme bloc d'un système de commande de découplage "

avec

$$\dim Y = \dim U = \dim W$$

Pour les signaux d'entrées W et V on a:

$$Y = [I + G_p \cdot R]^{-1} \cdot G_{pv} \cdot V + [I + G_p \cdot R]^{-1} \cdot G_p \cdot R \cdot W$$

Les modes sont décrit par l'équation suivante:

$$[I + G_p \cdot R] \cdot Y = 0$$

On peut distinguer trois types de modes de non-interaction: **[13]**

#### IV.1.2.1.SANS INTERACTION AVEC LES SIGNAUX DE REFERENCES

La variable de référence  $W_i$  influe seulement sur la variable de sortie  $Y_i$  d'où on écrit:

$$G_W = [I + G_p.R]^{-1} . G_p.R = D_W = \text{Matrice diagonale}$$

#### IV.1.2.2.SANS INTERACTION AVEC LES SIGNAUX DE PERTURBATIONS

La perturbation  $V_i$  influe seulement sur la  $i^{\text{ème}}$  sortie  $Y_i$  d'où on écrit:

$$G_V = [I + G_p.R]^{-1} . G_{pV} = D_V = \text{Matrice diagonale}$$

#### IV.1.2.3.SANS INTERACTION AVEC LES MODES

Les boucles n'influent pas sur les autres, et les éléments de  $Y$  sont découplés, et la matrice de transfert en boucle ouverte est diagonale c'est à dire :

$$G_p.R = D_0 = \text{Matrice diagonale.}$$

Si les modes d'un système sont indépendants, alors les entrées de références sont aussi sans interaction.

La matrice diagonale est choisie sans limites, et peut être choisie comme les fonctions de transferts des boucles découplées, cependant on écrit:

$$R = G_p^{-1} . D_0 = \frac{\text{Adj } G_p}{\text{Det } G_p} . D_0 \quad (1)$$

#### IV.1.3.SIMULATION

Soit la matrice de transfert de notre système (avion):

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

Et la matrice du contrôleur

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

Si la matrice diagonale  $D_0$  ayant la forme suivante:

$$G_0 = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$$

alors

$$R = G_0^{-1} D_0 = (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21})^{-1} \begin{bmatrix} g_{22} D_{11} & -g_{21} D_{22} \\ -g_{12} D_{11} & g_{11} D_{22} \end{bmatrix}$$

Par le biais de programmation dans le langage *pc-matlab*, on va déterminer les éléments de la matrice R, en utilisant la fonction "CONV".

On obtient :

$$NR11 = [0, 0, 0.111, -0.0198, -0.0020, 0.0185, -0.0044, -0.0045, 0.0012]$$

$$NR12 = [0, 0, -0.0082, 0.0108, 0.0100, -0.0172, -0.0001, 0.0057, -0.0010]$$

$$NR21 = [0, 0, -0.007, 0.0023, -0.0005, -0.0019, -0.0006, 0.0004, -0.0001]$$

$$NR22 = [0, 0, 0.0111, -0.0198, -0.0020, 0.0185, -0.0044, -0.0045, 0.0012]$$

$$DR = [0, 0, 0.0106, -0.0184, -0.0016, 0.0164, -0.0042, -0.0040, 0.0012]$$

où

NR : Numérateur

DR : Dénominateur

## IV.COMMANDE D'ETAT (STATE CONTROLLERS)

### IV.2.1.COMMANDE D'ETAT AVEC EQUATION CARACTERISTIQUE DONNEE

Soit le processus discret controlable,représenté le système d'équation d'état suivant:

$$X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) \quad (I.1)$$

$$Y(k) = C.X(k) \quad (I.2)$$

La commande par retour d'état est définie par l'équation suivante:

$$U(k) = -k_x X(k) + k_r r(k) \quad (I.3)$$

avec

$k_x, k_r$  : matrices gains

$r(k)$  : signal de référence

On remplace l'équation (I.3) dans l'équation (I.1), on obtient:

$$X(k+1) = [A - B K_x].X(k) + B.K_r.r(k) \quad (I.4)$$

$$Y(k) = C.X(k)$$

Les coefficients de l'équation caractéristique : **[13]**

$$\det [ Z.I - A + B K_x ] = 0 \quad (I.5)$$

sont données.

La procédure du controleur d'état par placement des pôles, pour un système mono-entrée, mono-sortie (SISO), consiste à transformer l'équation d'état sous la forme canonique controlable.

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k)$$

Et la commande:

$$U(k) = -K_x^T X(k) + K_r r(k) = [k_m \ k_{m-1} \ \dots \ k_1] X(k) + K_r r(k) \quad (1.6)$$

A partir des équations (1.5,6), on obtient:

$$X(k+1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-a_m - k_m) & (-a_{m-1} - k_{m-1}) & \dots & (-a_1 - k_1) \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_r r(k) \quad (1.7)$$

Cependant, l'équation caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} \det [Z.I - A + B.K^T] &= (a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})Z + \dots + (a_1 + k_1)Z^{m-1} + Z^m \\ &= \alpha_m + \alpha_{m-1}Z + \dots + \alpha_1 Z^{m-1} + Z^m = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cette dernière équation (1.8), nous permet de trouver le vecteur  $K^T$ .

$$K_i = \alpha_i - a_i \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, m$$

Les coefficients  $K_i$  sont nuls, si l'équation caractéristique ne subit à aucun changement par le retour d'état.

## IV.2.2.SIMULATION ET INTERPRETATION

### IV.2.2.1.SIMULATION

Pour déterminer la matrice K, on procède par la méthode de l'emplacement des pôles par retour d'état, c'est à dire qu'on impose les pôles du système et on détermine la matrice K.

Grace à la structure des matrices paramètres A, B, déjà définies ci-dessus, il est facile de voir que le système décrit par les équations (I.1.2) est contrôlable.

L'utilisation de la fonction *PLACE* de matlab, nous permet de déterminer la matrice K, en choisissant des valeurs propres qui assument un comportement du système plus proche au comportement du modèle de référence (voir chapitre précédent).

Les pôles placés sont :

$$P = [ 1, 0.3679, 0.8907 \pm 0.2755j ]$$

où

$$K = \begin{bmatrix} 0.2946 & 0.0322 & -0.0540 & 0.0484 \\ -0.4609 & -0.0273 & 0.0735 & -0.0060 \end{bmatrix}$$

$$K_r = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Par le biais de programmation dans le langage "SIMNON", on va simuler la réponse de notre système (avion). Cette réponse se traduit par l'angle de dérapage ( $\beta$ ) et l'angle d'inclinaison ( $\phi$ ) de l'avion. On choisira un signal de référence  $r(t)$  égale à un signal échelon d'amplitude 10 degrés.

Toutes les courbes obtenues par le contrôleur d'état seront représentées sur les quatre fenêtres de la figure (IV.2).

**FENETRE\_1:** On a représenté la première sortie de notre système (angle de dérapage).

**FENETRE\_2:** On a représenté la deuxième sortie de notre système (angle d'inclinaison).

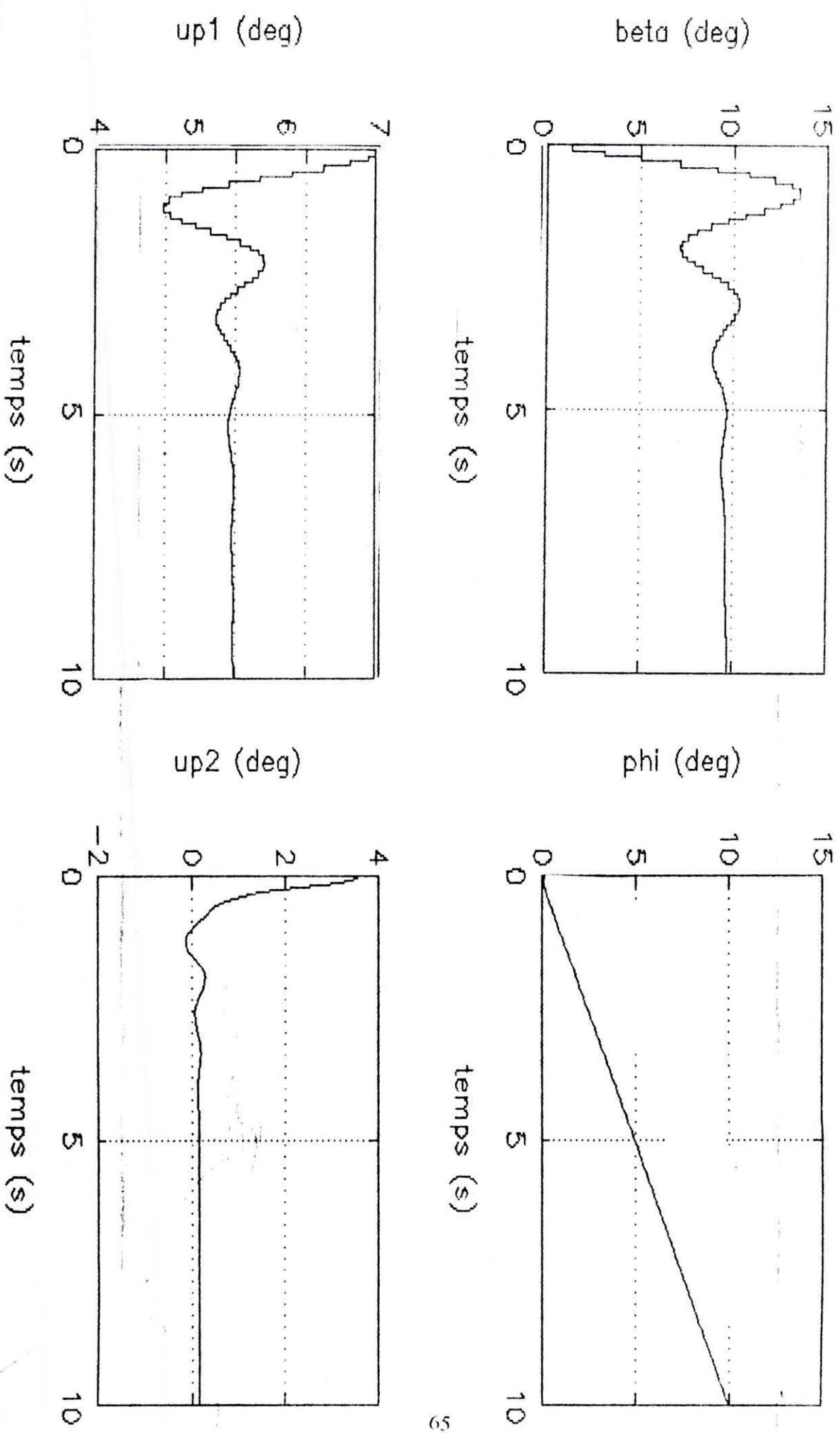
**FENETRE\_3:** On a montré la forme de la première commande (déflexion des gouvernes de direction)

**FENETRE\_4:** On a montré la forme de la deuxième commande (déflexion des ailerons).

#### **IV.2.2.2.INTERPRETATION**

- \_ Les commandes ( $U_{P1}$  ,  $U_{P2}$ ) sont stables et bornées .
- \_ Dépassement maximale d'amplitude inférieur à quelques degrés.
- \_ Fréquence d'oscillation très faible (commande un peu lisse).

Figure IV.2 : "Simulation par la commande d'etat"



## IV.3.COMMANDE A PRAMETRES OPTIMAUX (PARAMETER-OPTIMIZED CONTROLLERS)

### IV.3.1.INTRODUCTION

Tous les controleurs à paramètres optimaux sont des controleurs: **P, PI, PID**. En premier lieu, on commence par la discrétisation de l'équation d'un **PID** continu, en utilisant la méthode d'intégration rectangulaire pour les système à période d'échantillonnage petite, et par la méthode d'intégration trapezoidale si la période d'échantillonnage ( $T_n$ ) est importante.

### IV.3.2.DISCRITISATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE D'UN P.I.D CONTINU

#### IV.3.2.1.EQUATION D'UN PID CONTINU

$$U(t) = K_p [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) . d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}] \quad (III.1)$$

avec

$K_p$  : Gain

$T_i$  : Temps d'intégration

$T_d$  : Temps de dérivation.

Le passage du continu au discret, il suffit de remplacer

$\int$  .....  $\Sigma$

$d/dt$  ..... Diff

#### IV.3.2.2.EQUATION D'UN PID DISCRET

$$U(t) = K. [e(k) + \frac{T_0}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i-1) + \frac{T_d}{T_0} (e(k) - e(k-1))] \quad (III.2)$$

L'équation (III.2) s'appelle : *algorithme de position non récursif*.

$$U(k) - U(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2). \quad (III.3)$$

avec

$$q_0 = K(1 + T_d/T_0)$$

$$q_1 = -k(1 + 2T_d/T_0 - T_0/T_i)$$

$$q_2 = K.T_d/T_0$$

$T_0$  : Temps d'échantillonnage (petit).

L'équation (III.3) s'appelle : *algorithme de vitesse*.

#### REMARQUE

Si la période d'échantillonnage ( $T_0$ ) est importante, alors on utilise la méthode d'intégration de trapeze c'est à dire :

$$U(k) = K. [e(k) + \frac{T_0}{T_i} (\frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=0}^k e(i)) + \frac{T_d}{T_0} (e(k) + e(k-1))] \quad (III.4)$$

où bien

$$U(k) = U(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (III.5)$$

avec

$$q_0 = K(1 + T_0/2T_i + T_d/T_0)$$

$$q_1 = -K(1 + 2T_d/T_0 - T_0/2T_i) \quad \text{où } T_0 : \text{quelconque}$$

$$q_2 = K \cdot T_d/T_0$$

#### IV.3.3. CONTROLEUR A PARAMETRES OPTIMAUX D'ORDRE INFERIEUR

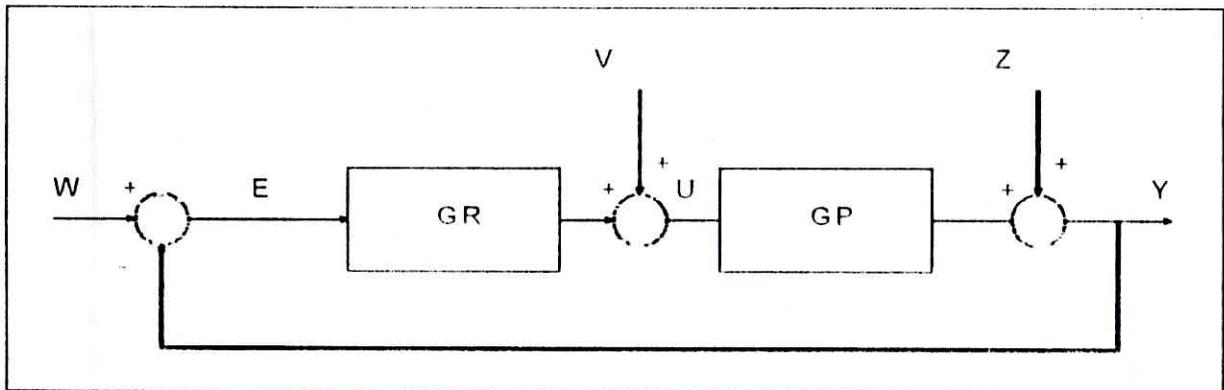


FIGURE IV.3 : " Diagramme bloc d'un système de commande a parametres optimaux "

$$G_r(Z^{-1}) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} \quad (III.5)$$

où

$$B(Z^{-1}) = b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-m}$$

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}$$

$$G_R(Z^{-1}) = \frac{U(Z)}{E(Z)} = \frac{Q(Z^{-1})}{P(Z^{-1})} \quad (III.6)$$

où

$$Q(Z^{-1}) = q_0 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2} + \dots + q_m Z^{-v}$$

$$P(Z^{-1}) = 1 + p_1 Z^{-1} + p_2 Z^{-2} + \dots + p_\mu Z^{-\mu}$$

Cet algorithme est réalisable si et seulement si  $p_0 \neq 0$ . Cependant,  $v \leq \mu$  or  $\mu > v$ . Et dans la plus part des cas  $q_0 \neq 0$  et  $p_0 = 1$ .

Le plus simple algorithme de controle possède un pôle à  $Z = 1$ . D'où on écrit: [13]

$$G_R(Z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2} + \dots + q_m Z^{-v}}{1 - Z^{-1}} \quad (III.7)$$

### CAS PARTICULIERS

1)-  $v = 1 \implies G_R(Z) = (q_0 + q_1 Z^{-1}) / (1 - Z^{-1})$       Controleur PI

2)-  $v = 2 \implies G_R(Z) = (q_0 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2}) / (1 - Z^{-1})$       Controleur PID

3)-  $v = 3 \implies G_R(Z) = (q_0 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2} + q_3 Z^{-3}) / (1 - Z^{-1})$       Controleur PID\_2

On peut déduire l'équation aux différence du controleur d'ordre  $v$  :

$$U(k) - U(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots + q_v e(k-v) \quad (III.8)$$

#### IV.3.4.DETERMINATION DES PARAMETRES DU CONTROLEUR $q_i$

Pour déterminer les paramètres  $q_i$ , on utilise deux méthodes:

##### IV.3.4.1.METHODE ANALYTIQUE

Cette méthode est utilisable pour les contrôleurs d'ordre  $v \leq 3$ . Et basée sur la valeur initiale de la commande  $U(0)$ .

##### IV.3.4.2.METHODE NUMERIQUE

Cette méthode, consiste à minimiser un critère de performance définie comme suit:

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^M (e^2(k) + r \cdot \Delta u^2(k))$$

où

$$e(k) = w(k) - y(k)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - \bar{u}$$

avec

$\bar{u} = u(\infty)$  = valeur finale de la commande pour une perturbation constante.

$\bar{u} = E\{u(k)\}$  = valeur moyenne de la commande pour une perturbation stochastique.

#### IV.3.5.ALGORITHME DE CONTROLE D'ORDRE 2

##### ALGORITHME D'ORDRE 2

$$G_R(Z) = (q_0 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2}) / (1 - Z^{-1}) \implies$$

$$U(k) - U(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k) + q_2 e(k-2). \quad (III.9)$$

Pour une entrée échelon unité on a

$$e(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$U(0) = q_0$$

$$U(1) = 2q_0 + q_1$$

$$U(2) = 3q_0 + 2q_1 + q_2$$

$$U(k) = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2$$

$$\text{Si } U(1) < U(0) \iff q_0 + q_1 < 0 \iff q_1 < -q_0$$

$$U(k) > U(k-1), k \geq 2 \iff q_0 + q_1 + q_2 > 0 \iff q_2 > -(q_0 + q_1)$$

Pour que le gain du contrôleur est positif,  $q_0 > q_2$

En résumé:

$$\begin{array}{ll} q_0 > 0 & \text{et } K = q_0 - q_2 = K \\ q_1 < -q_0 & C_d = q_1/K = T_d/T_0 \\ -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0 & C_i = (q_0 + q_1 + q_2)/K = T_0/T_i \end{array}$$

#### IV.3.6. CONTROLEURS MULTIVARIABLES A PARAMETRES OPTIMAUX

Dans le cas des systèmes multivariables discrets, on peut définir les contrôleurs multivariables principaux à paramètres optimaux comme suit

$$R_v(Z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 \cdot Z^{-1} + \dots + q_v \cdot Z^{-v}}{1 - Z^{-1}} \quad (III.10)$$

Les paramètres du contrôleur  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, v$  sont déterminés après la minimisation du critère de performance définie sous la forme suivante:

$$S_{cu}^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=0}^M [e_i^2(k) + r_i \cdot \Delta u^2(k)] \quad (III.11)$$

avec

$$\sum \alpha_i = 1$$

$\alpha_i$  : Facteur de masse des boucles principales

L'équation (III.11) possède un minimum unique, c'est à dire :

$$\frac{d S_{cu}^2}{dq} = 0 \quad (III.12)$$

où

$$q^T = [q_{01}, q_{11}, \dots, q_{v1}, q_{2p}, \dots, q_{vp}] \quad (III.13)$$

On remarque que la complexité du calcul augmente si le nombre "p" de la commande augmente, et on a une convergence très rapide pour un bon choix des paramètres du contrôleur car les résultats dépendent fortement aux signaux de commandes.

## IV.3.7.SIMULATION ET INTERPRETATION

### IV.3.7.1.SIMULATION

On utilise les contrôleurs pricipaux à paramètres optimaux d'ordre deux ( $v = 2$ ).

Les fonctions **tf2ss** et **ss2tf** de pc-matlab, nous permettent le passage entre les fonctions de transfert et les équations d'état du système.

Par le biais de programmation dans le langage *simon*, on va simuler la réponse de notre système pour une référence  $w(k) = [w_1(k), w_2(k)]^T = [10, 10]^T$ .

Les courbes obtenues seront représentées sur les quatre fenêtres de la figure (IV.4)

**FENETRE\_1:** On a représenté la première sortie de notre système (angle de dérapage).

**FENETRE\_2:** On a représenté la deuxième sortie de notre système (angle d'inclinaison).

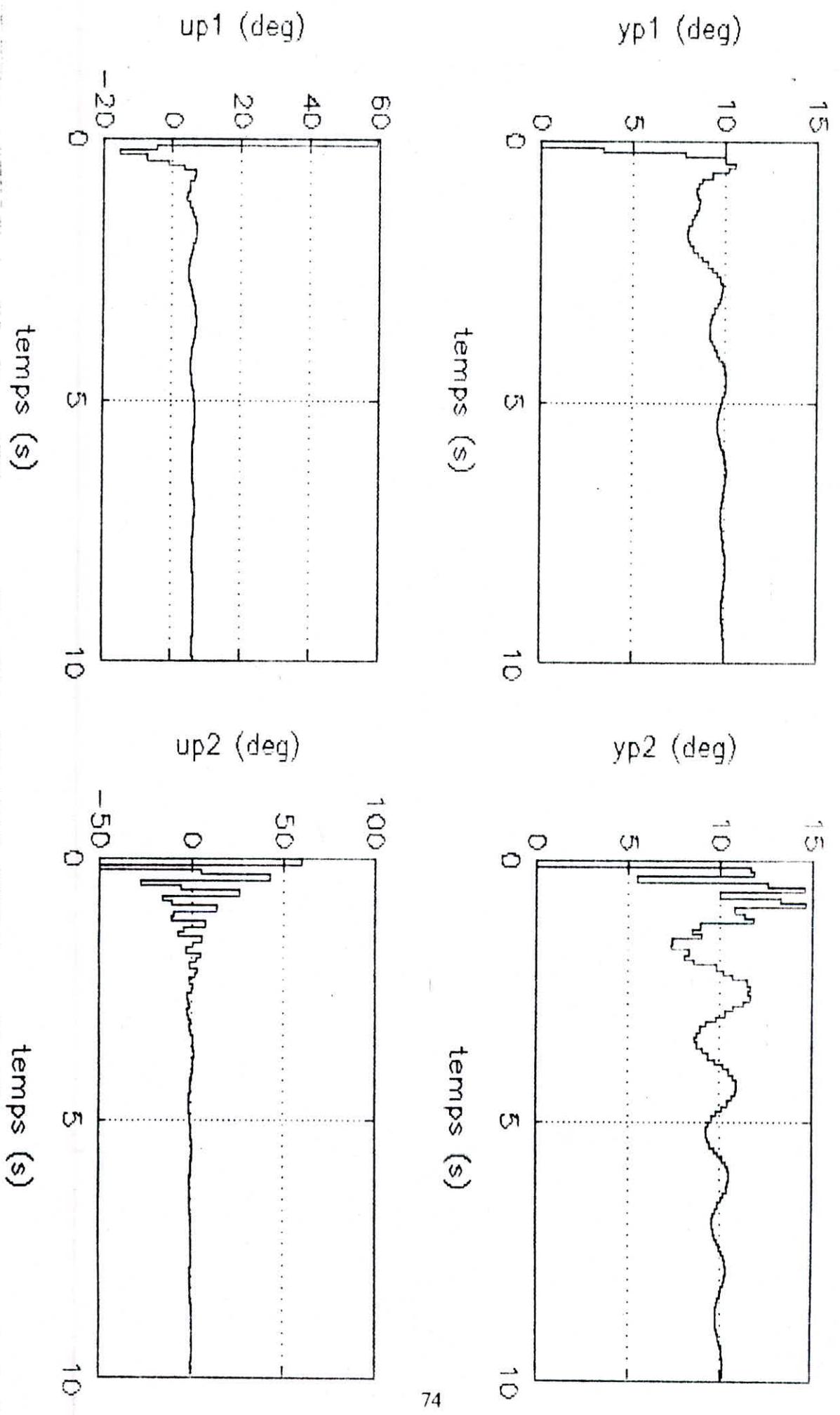
**FENETRE\_3:** On a montré la forme de la première commande (déflexion des gouvernes de direction)

**FENETRE\_4:** On a montré la forme de la deuxième commande (déflexion des ailerons).

### IV.3.7.2.INTERPRETATION

- \_ La sortie suit très bien la consigne
- \_ l'erreur en régime permanent est presque nulle
- \_ La valeur initiale de la commande  $U(0) = 60$  degrés

Figure IV.4 : "Simulation par la commande P.I.D"



## IV.4.COMMANDE A VARIANCE MINIMALE (MINIMUM VARIANCE CONTROLLERS)

### IV.4.1.INTRODUCTION

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats relatifs à la commande des systèmes représentés par les équations recurentes de type entrée-sortie en présence d'une perturbation à caractère stochastique supposée être la réalisation d'un processus normal stationnaire. [2] [13]

Le but de ce controleur est de minimiser la variance de la sortie du processus, c'est à dire:

$$\text{VAR}[Y(k)] = E\{Y^2(k)\} \text{ est minimale}$$

Dans le cas général, en introduisant le facteur  $r$  pour minimiser le critère de performance suivant:

$$E\{Y^2(k+i)+r.U(k)\}; \quad i = d + 1 \dots \text{ ou } d : \text{ temps de retard}$$

La perturbation  $n(k)$  peut être modéliser soit par un modèle paramétrique (Méthode d'estimation) ou non-paramérique (Réponse impulsionnelle)

### IV.4.2.COMMANDE A VARIANCE MINIMALE GENERALISEE POUR UN

#### PROCESSUS SANS TEMPS DE RETARD

Considerons le système discret lineare mono\_entrée mono\_ sortie décrit par la fonction de transfert suivante:

$$G_r(Z^{-1}) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} \quad (IV.1)$$

avec

$$B(Z^{-1}) = b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-m}$$
$$\Delta(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}$$

Et le filtre :

$$G_m(Z^{-1}) = \frac{u(Z)}{v(Z)} = \frac{\lambda D(Z^{-1})}{C(Z^{-1})} \quad (IV.2)$$

avec

$$D(Z^{-1}) = d_0 + d_1 Z^{-1} + d_2 Z^{-2} + \dots + d_m Z^{-m}$$
$$C(Z^{-1}) = c_0 + c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \dots + c_m Z^{-m}$$

où  $v(k)$  est statiquement indépendant,

$$E\{v(k)v(k+\tau)\} = \begin{cases} \Gamma & \text{pour } \tau = 0 \\ 0 & \text{pour } \tau \neq 0 \end{cases}$$

$$E\{v(k)\} = 0 \quad (IV.3)$$

(voir figure IV.5)

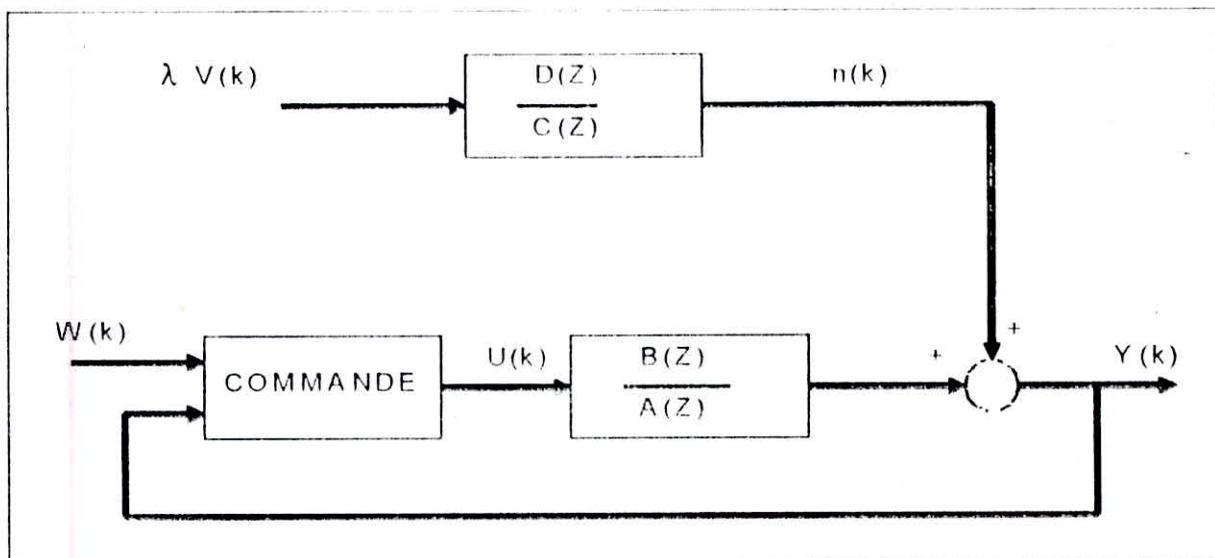


FIGURE IV.5 : " Diagramme bloc d'un système de commande à variance minimale "

Si  $w(k) \neq 0$ , alors le problème est de concevoir un contrôleur qui minimise le critère suivant

$$J(k+1) = E\{[Y(k+1) - W(k)]^2 + r[U(k) - (1/K_p)W(k)]^2\} \quad \text{où } K_p = B(1)/A(1) \quad (IV.4)$$

Le contrôleur doit être générer une entrée  $U(k)$  sachant que l'erreur produit par le bruit, du système  $\{v(k)\}$  est minimisée selon le critère (IV.4)

Dans le critère de performance (IV.4), on prend  $Y(k+1)$  comme une prédiction basée sur les valeurs du signal  $Y(k), Y(k-1), \dots$  et  $U(k), U(k-1), \dots$ . En utilisant les équations (IV.1) et (IV.2). La prédiction de  $Y(k+1)$  est

$$ZY(Z) = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} ZU(Z) + \lambda \frac{D(Z^{-1})}{C(Z^{-1})} ZV(Z^{-1}) \quad (IV.5)$$

Et

$$A(Z^{-1}).C(Z^{-1}).Z.Y(Z) = B(Z^{-1}).C(Z^{-1}).Z.U(Z) + \lambda.A(Z^{-1}).D(Z^{-1}).Z.V(Z) \quad (IV.6)$$

or

$$(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2} + \dots + a_m.Z^{-m}).(1 + c_1.Z^{-1} + c_2.Z^{-2} + \dots + c_m.Z^{-m}).Z.Y(Z) = \\ (b_1.Z^{-1} + b_2.Z^{-2} + \dots + b_m.Z^{-m}).(1 + c_1.Z^{-1} + c_2.Z^{-2} + \dots + c_m.Z^{-m}).Z.U(Z) + \\ \lambda.(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2} + \dots + a_m.Z^{-m}).(1 + d_1.Z^{-1} + d_2.Z^{-2} + \dots + d_m.Z^{-m}).Z.V(Z)$$

Après la multiplication et transformation dans le domaine temporel, nous obtenons :

$$Y(k+1) + (a_1+c_1).Y(k) + \dots + a_m.c_m.Y(k-2m+1) = b_1.U(k) + \\ (b_2+b_1.c_1).U(k-1) + \dots + b_m.c_m.U(k-2m+1) + \lambda.[V(k+1) + \\ (a_1+d_1).V(k) + \dots + a_m.d_m.V(k-2m+1)] \quad (IV.7)$$

A l'instant k, tous les valeurs des signaux sont connues sauf U(k) et V(k+1). On prend l'espérance de v(k+1) seulement sachant que v(k+1) est indépendant de tous les valeurs des signaux

La condition d'optimalité de U(k) nous donne:

$$E\{2.[Y(k+1) - W(k)].\frac{dY(k+1)}{dU(k)} + 2.r.[U(k) - \frac{1}{K_p}.W(k)]\} = 0 \quad (IV.8)$$

or

$$\frac{dY(k+1)}{dU(k)} = b_1 \\ E\{Y(k+1)\} = Y(k+1) - \lambda.v(k+1) \\ E\{v(k+1)\} = 0$$

L'équation (IV.8) peut s'écrire donc:

$$[Y(k+1) - \lambda.v(k+1)].b_1 + r.U(k) = (b_1 + r/K_p).W(k) \quad (IV.9)$$

$$b_1.[Z.Y(Z) - \lambda.Z.V(Z) - W(Z)] + r.[U(Z) - U_w(Z)] = 0 \quad (IV.10)$$

D'après l'équation (IV.5), on obtient:

$$\lambda.Z.V(Z) = [C(Z^{-1})/D(Z^{-1})].Z.Y(Z) - [B(Z^{-1}).C(Z^{-1})/A(Z^{-1}).D(Z^{-1})].Z.U(Z) \quad (IV.11)$$

Par substitution de l'équation (IV.11) dans l'équation (IV.10), on obtient la fonction de transfert du contrôleur à variance minimale généralisé.

$$U(Z) = - \{A(Z^{-1}) [D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})] / Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1}) + (r/b_1) A(Z^{-1}).D(Z^{-1})\} Z.Y(Z) + \{A(Z^{-1}).D(Z^{-1})(1+r/b_1.K_p)/Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1}) + (r/b_1) A(Z^{-1}).D(Z^{-1})\} W(Z) \quad (IV.12)$$

avec

$$G_{RMV1}(Z) = - \{A(Z^{-1}).[D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})] / Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1}) + (r/b_1).A(Z^{-1}).D(Z^{-1})\} Z \quad (IV.13)$$

#### IV.4.3.CAS PARTICULIERS

Le contrôleur  $G_{RMV1}(Z)$  contient le modèle du système ( $A(Z^{-1})$ ,  $B(Z^{-1})$ ) et le modèle du bruit ( $C(Z^{-1})$ ,  $D(Z^{-1})$ ). avec  $r = 0$ , une forme simple du contrôleur à variance minimale est produite.

$$U(Z) = \{A(Z^{-1}) [D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})] / Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1})\} Z.Y(Z) + \{A(Z^{-1}).D(Z^{-1})/Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1})\} W(Z) \quad (IV.14)$$

avec

$$G_{RMV2}(Z) = - \{A(Z^{-1}).[D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})] / Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1})\} Z \quad (IV.15)$$

Si  $C(Z^{-1}) = A(Z^{-1})$ , alors

$$G_{RMV3}(Z) = - \{[D(Z^{-1}) - A(Z^{-1})] / Z.B(Z^{-1}) + (r/b_1).D(Z^{-1})\} Z \quad (IV.16)$$

et pour  $r = 0$ , on a:

$$G_{RMV_4}(Z) = - \{ [D(Z^{-1}) - A(Z^{-1})] / Z \cdot B(Z^{-1}) \} \cdot Z \quad (IV.16)$$

#### IV.4.4. LA STABILITE

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est donnée par :

$$1 - G_R(Z) \cdot G_1(Z) = 0 \quad (IV.17)$$

Avec les contrôleurs  $MV_1, MV_2$ , on obtient :

$$[(r/b_1) \cdot A(Z^{-1}) + Z \cdot B(Z^{-1})] \cdot D(Z^{-1}) \cdot Z^{2m} = [(r/b_1) \cdot A(Z) + Z \cdot B(Z)] \cdot D(Z) = 0 \quad (IV.18)$$

#### $MV_1$ et $MV_3$ ( $r \neq 0$ ):

- Les zéros de filtre  $D(Z) = 0$ , doivent être à l'intérieur du cercle unité du plan-Z.
- Les zéros de  $[(r/b_1) \cdot A(Z) + Z \cdot B(Z)] = 0$ , doivent être à l'intérieur du cercle unité .  
Si  $r$  est très grand les zéros de  $A(Z) = 0$ , i.e les pôles du système .

#### $MV_2$ et $MV_4$ ( $r = 0$ ):

- Equation caractéristique du système en boucle fermée pour  $r = 0$ , est:  
 $[Z \cdot B(Z) \cdot D(Z)] = 0$ .
- Les zéros de système et de filtre doivent être à l'intérieur du cercle unité .
- Les poles du filtre  $C(Z) = 0$ , pour  $MV_2$  n'ont aucune influence sur l'équation caractéristique.

#### IV.4.5. FACTEUR DYNAMIQUE DU CONTROLE.

Le facteur dynamique du contrôle en boucle fermée pour le contrôleur  $MV_1$  est défini comme étant:

$$\begin{aligned} R(Z) &= Y(Z)/n(Z) = 1/1 - G_R(Z).G_F(Z) \\ &= \{Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1}) + A(Z^{-1}).D(Z^{-1}).r/b_1\} / \{Z.B(Z^{-1}) + A(Z^{-1}).r/b_1\} D(Z^{-1}) \} \quad (IV.19) \end{aligned}$$

Pour  $r = 0$ , i.e. le contrôleur  $MV_2$ ,

$$R(Z) = C(Z^{-1})/D(Z^{-1}) = \lambda.G_{FV}(Z)$$

Donc le facteur dynamique du contrôleur pour  $r = 0$ , ni que l'inverse du filtre, c'est à dire :

$$G_V(Z^{-1}) = Y(Z)/\lambda.V(Z) = R(Z).G_{FV}(Z)/\lambda = 1$$

#### IV.4.6. VARIABLE CONTROLEE Y(k)

En utilisant le contrôleur  $MV_1$ , la fonction de transfert en boucle fermée  $G_V(Z)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} G_V(Z) &= Y(Z)/\lambda.V(Z) = (1/\lambda) \cdot \{G_{FV}(Z) / [1 - G_R(Z).G_F]\} \\ &= \{Z.B(Z^{-1}).C(Z^{-1}) + A(Z^{-1}).D(Z^{-1}).r/b_1\} / \{Z.B(Z^{-1}) + A(Z^{-1}).r/b_1\}.C(Z^{-1})\} \\ &= 1 + \{A(Z^{-1}).[D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})].r/b_1\} / \{Z.B(Z^{-1}) + A(Z^{-1}).r/b_1\}.C(Z^{-1})\} \quad (IV.20) \end{aligned}$$

La variable contrôlée  $Y(K)$  pour  $r \neq 0$ , est un modèle ARMA (Autoregressive Moving Average Model) d'ordre  $2m$  pour  $MV_1$  et  $m$  pour  $MV_2$ .

Si  $r = 0$ , ie, pour  $MV_2$  et  $MV_4$ ,  $Y(Z)$  tend vers  $\lambda.V(Z)$ , c'est à dire la variable  $Y(k)$  devient statiquement indépendante (bruit blanc du système) avec une variance  $\sigma_Y^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_v^2$ , plus le facteur  $r$  est très petit, plus la variance de  $Y(k)$  est petite et converge vers un bruit blanc  $\lambda.v(k)$ .

La plus petite variance obtenue par le contrôleur à variance minimale est.

$$\text{Min Var}[Y(k)] = \lambda^2$$

#### IV.4.7.CAS SPECIAL

- Si  $D(Z^{-1}) = C(Z^{-1})$ , tous les contrôleurs à variance minimale sont nuls.

- Si un bruit blanc ( $n(k) = \lambda.v(k)$ ), alors les contrôleurs à variance minimale ne peuvent pas diminuer la variance de sortie  $Y(k)$ , sauf pour un bruit coloré, c'est à dire :

$$[D(Z^{-1}) - C(Z^{-1})] \neq 0.$$

#### IV.4.8.PROPRIETES DES CONTROLEURS A VARIANCE MINIMALE

Le tableau ci-dessous resume les propriétés des contrôleurs à variance minimale: [13]

CONTROLEURS	FONCTION DE TRANSFERT $G_R(Z)$	DANGER DE STABILITE	INSTABILITE
$MV_1$	$-Z.A.[D-C]/[Z.B.C+A.D.r/b1]$	$\bar{A} = 0$	$\bar{D} = 0$
$MV_2 (r=0)$	$-Z.A.[D-C]/Z.B.C$	$\bar{A} = 0$ $\bar{B} = 0$	$\bar{D} = 0$ $\bar{B} = 0$
$MV_3 (C=A)$	$-Z.[D-C]/[Z.B+D.r/b1]$	—	$\bar{D} = 0$
$MV_4 (C=A,r=0)$	$-Z.[D-A]/Z.B$	$\bar{B} = 0$	$\bar{D} = 0$ $\bar{B} = 0$

## REMARQUES

-  $\bar{A} = 0$ , c'est à dire, les zéros sont à l'exterieur où sur le cercle unité.

- Si  $b_0 \neq 0$ , alors  $b_1$  est remplacé par  $b_0$ , et on obtient:

$$B(Z^{-1}) = b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-m}$$

### IV.4.9. CHOIX DU FACTEUR $r$

L'influence du facteur  $r$  sur la commande  $U(k)$  peut être estimée par la relation

$$U(0) = q_0 \cdot W(0) = q_0$$

Pour le  $MV_1$ ,

$$q_0 = (d_1 - c_1) / (b_1 + r/b_1)$$

Pour le  $MV_3$ ,

$$q_0 = (d_1 - a_1) / (b_1 + r/b_1)$$

### APPROXIMATION

\*  $r/b_1 \gg b_1 \implies$  relation d'hyperbolique entre  $q_0$  et  $r/b_1$

\*  $r = 0 \implies q_0 = \dot{q}_0 = (d_1 - c_1) / b_1$

\*  $r = b_1^2 \implies q_0 = \dot{q}_0 / 2$  (réduction par la moitié)

### IV.4.10. MINIMISATION L'ERREUR EN REGIME PERMANENT (Steady Shift Error)(SSE)

Pour éliminer l'erreur en régime permanent, il suffit de vérifier la condition suivante:

$$\lim_{Z \rightarrow 1} G_R(Z) = \infty \text{ quand } Z \text{ tend vers } 1 \quad (\text{IV.21})$$

Comme cette condition n'est pas vérifiée, pour les contrôleurs à variance minimale, il est préférable d'ajouter un intégrateur en série avec le contrôleur.

### ADDITION D'UN TERME D'INTEGRATION

La modification la plus simple est d'ajouter un pôle à  $Z = 1$  dans la fonction de transfert du contrôleur.

$$G_{MV}(Z) = \frac{U'(Z)}{Y(Z)}$$

avec action *proportionnel-intégrateur* PI:

$$G_{PI}(Z) = \frac{U(Z)}{U'(Z)} = 1 + \frac{\alpha}{Z - 1} \quad (\text{IV.22})$$

qui correspond aux équations de différence suivante :

$$U(k) - U(k-1) = U'(k) - (1 - \alpha) \cdot U'(k-1) \quad (\text{IV.23})$$

avec les cas spéciaux:

$$\alpha = 0 \implies U(k) = U'(k) \quad \dots \quad (\text{action proportionnelle})$$

$$\alpha = 1 \implies U(k) - U(k-1) = U'(k) \quad \dots \quad (\text{action P.I})$$

$$\alpha \neq 0 \implies \text{L'équation (IV.21) est vérifiée.}$$

#### IV.4.11. LA MATRICE POLYNOMIALE DU CONTROLEUR A VARIANCE MINIMALE

Soit la matrice polynomiale stochastique du modèle:

$$A(Z^{-1}).Y(Z) = B(Z^{-1}).U(Z) + D(Z^{-1}).V(Z) \quad (IV.24)$$

avec  $D(Z^{-1}) = D_0 + D_1.Z^{-1} + D_2.Z^{-2} + \dots + D_m.Z^{-m}$  (IV.25)

Les contrôleurs multivariables à variance minimale sont obtenus par la minimisation du critère suivant:

$$I(k+1) = E\{[(Y(k+1) - W(k))^T (Y(k+1) - W(k))] + [(U(k) - U_w(k))^T R (U(k) - U_w(k))]\} \quad (IV.26)$$

avec

$R = R^T$  : matrice positive semi-définie

$$U_w(k) = B^{-1}(1).A(1).W(k)$$

Par l'analogie avec le cas SISO, (Equ IV.10), on a:

$$B^{-1}_1.[Z.Y(Z) - \lambda.Z.V(Z) - W(Z)] + R.[U(Z) - U_w(Z)] = 0 \quad (IV.27)$$

D'après l'Equ IV.24 :

$$V(Z) = D^{-1}(Z).[A(Z).Y(Z) - B(Z).U(Z)] \quad (IV.28)$$

On remplace l'équation (IV.28) dans l'équation (IV.27), on obtient:

$$U(Z) = [D^{-1}.B.Z + (B^{-1}_1)^{-1}.R]^{-1}\{[I + (B^{-1}_1)^{-1}.R.B^{-1}(1).A(1)].W(Z) - A^{-1}.L.D^{-1}.A.Y\} \quad (IV.29)$$

avec

$$L = Z.(D-A)$$

## IV.4.12.SIMULATION ET INTERPRETATION

### IV.4.12.1.SIMULATION

Après avoir diagonaliser la matrice de transfert du système, en utilisant un contrôleur de découplage (Equ. I), on obtient:

$$A_1(Z^{-1}) = 1 - 3.0536 Z^{-1} + 3.4337 Z^{-2} - 1.6312 Z^{-3} + 0.2512 Z^{-4}$$

$$A_2(Z^{-1}) = A_1(Z^{-1})$$

$$B_1(Z^{-1}) = 0.0569 Z^{-1} - 0.0343 Z^{-2} - 0.0336 Z^{-3} + 0.0109 Z^{-4}$$

$$B_2(Z^{-1}) = 0.1945 Z^{-1} - 0.2307 Z^{-2} - 0.0603 Z^{-3} + 0.1151 Z^{-4}$$

$$D_1(Z^{-1}) = 1 + Z^{-1} + 0.75 Z^{-2} + 0.25 Z^{-3} + 0.0625 Z^{-4}$$

$$D_2(Z^{-1}) = D_1(Z^{-1})$$

Les polynomes A et B sont obtenus à partir de la matrice de transfert G(s) du système échantillonné avec une période T0 = 0.1 seconde.

En utilisant le MV3, pour  $r_1 = b_1^2 = 0.0032$  et  $\lambda = 0.1$  (voir figure-IV.6).

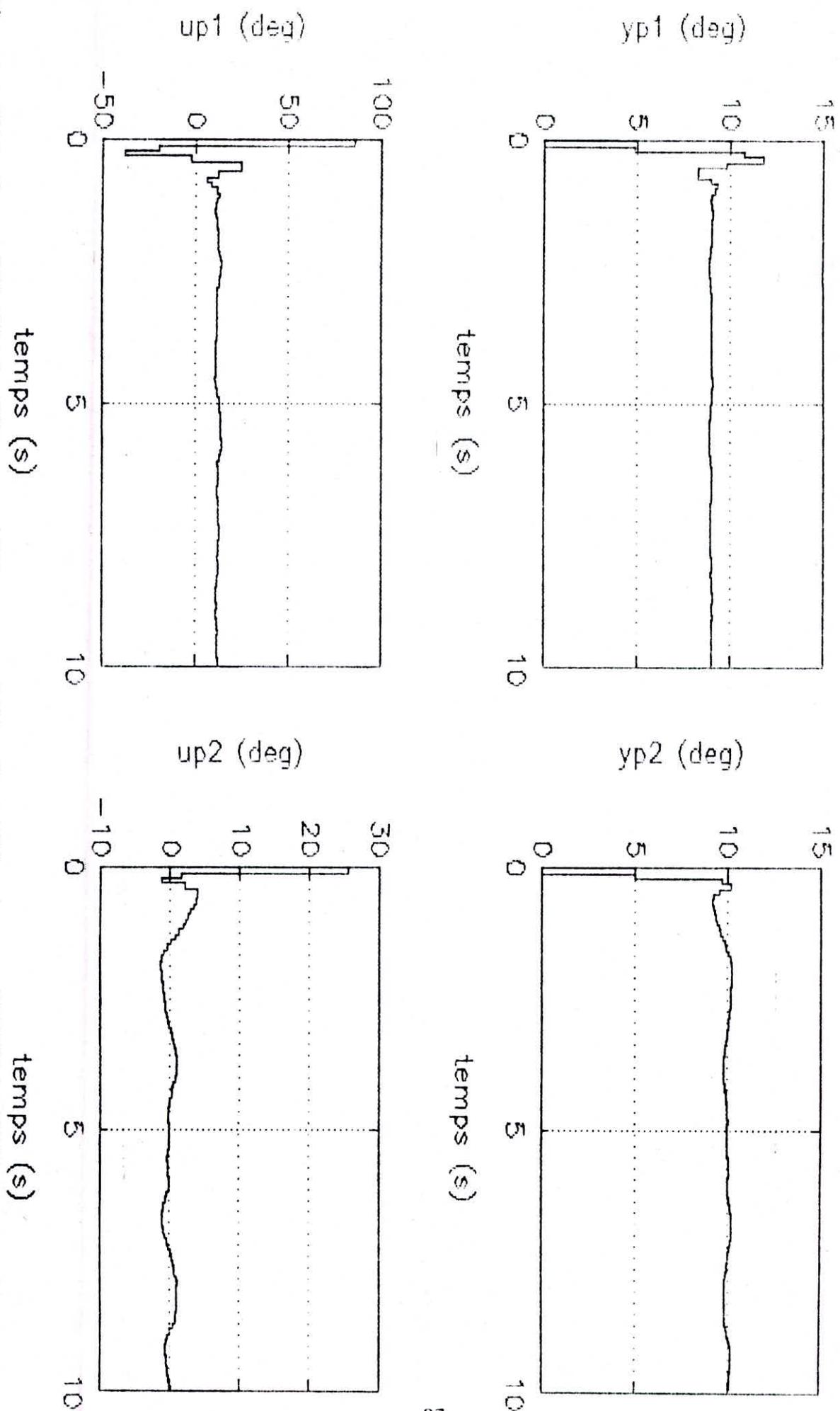
### IV.4.12.2.INTERPRETATION

- La variance de la variable Y(k) est très petite que n(k).

$$(\sigma_Y = 2.6748 ; \sigma_n = 89.4059).$$

- La valeur initiale de la commande U(0) = 90 degrés

Figure IV.6 : "Simulation par la commande G.M.V"



## IV. 5 COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE (GPC)

### IV.5.1.INTRODUCTION

On a vu dans la partie de commande à variance minimale (GMV) que le temps de retard du système doit être connu, et la condition de stabilité des système à phase non-minimale exige un facteur de poids  $\lambda \neq 0$ . Dans le cas ou le temps de retard du système est inconnu ou variant dans le temps, l'approche par la commande prédictive généralisée (GPC) permet de pallier l'ensemble de ces inconvénients

Le developpement de la loi de commande prédictive consiste en premier lieu de définir un modèle de description approprié permettant la prédiction de la sortie futur du processus, puis une fonction de coût est minimisée pour générer les signaux de contrôle .

### IV.5.2.ALGORITHME DE BASE (GPC)

#### IV.5.2.1.MODELE DE DESCRIPTION DE PROCESSUS (CARIMA)

Un système non-linéaire admet un modèle de linearisation locale sous la forme suivante:

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t-1) + x(t) \quad (V.1)$$

avec

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_{na} Z^{-na}$$

$$B(Z^{-1}) = b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_{nb} Z^{-nb}$$

$u(t)$ ,  $y(t)$  entrée, sortie du système respectivement, et  $x(t)$  représente le terme de perturbation.

La perturbation  $X(t)$  peut être modélisée par un modèle de description à moyenne glissante (MA) d'ordre  $nc$ . D'où on écrit:

$$X(t) = C(Z^{-1})e(t) \quad (V.2)$$

avec

$$C(Z^{-1}) = 1 + c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \dots + c_{nc} Z^{-nc}$$

et

$e(t)$  : Séquence aléatoire incorrélée.

A partir des équations (V.1) et (V.2), on obtient le modèle de description auto-régressif et à moyenne glissante (CARMA).

$$A(Z^{-1}).y(t) = B(Z^{-1}).u(t-1) + C(Z^{-1}).e(t) \quad (V.3)$$

Dans la plus part des applications industrielles, le modèle (CARMA) défini par l'équation (V.3) est indésirable, car ce type de modèle nécessite l'estimation de la composante DC d'offset (Hodgson, 1982) par rapport au modèle CARIMA qui utilise un intégrateur en boucle fermée (Clarke, 1982). Pour cette raison, l'introduction de l'opérateur différentielle ( $\Delta = 1-Z^{-1}$ ), nous donne le modèle approprié (CARIMA) suivant:

$$A(Z^{-1}).y(t) = B(Z^{-1}).u(t-1) + \frac{C(Z^{-1})}{\Delta}.e(t) \quad (V.4)$$

Le modèle (CARIMA) décrit par l'équation (V.4) est utilisé par (Tuffs et Clarke, 1985) pour développer la loi de commande à variance minimale (GMV). Pour la simplicité,  $C(Z^{-1})$  est choisi égale à l'unité, d'où on écrit

$$A(Z^{-1}).y(t) = B(Z^{-1}).u(t-1) + \frac{1}{\Delta}.e(t) \quad (V.5)$$

#### IV.5.2.2. PLAGE DE PREDICTION

La commande de prédiction exige une série des valeurs futurs de la sortie  $\{y(t+j), j = 1, 2, \dots\}$  donnant une information à l'instant  $t$  sur l'activité futur de la commande (Clarke et Al. 1987).

Pour générer la  $j^{\text{me}}$  prédiction de la sortie  $y(t+j)$  (au sens des moindres carrés), on considère l'identité suivante:

$$1 = E_j \cdot \Delta \cdot \Lambda + Z^{-j} \cdot F_j \quad (V.6)$$

où  $E_j, F_j$  sont deux polynomes

Compte tenu de l'identité (V.6), l'équation (V.5) s'écrira sous la forme :

$$y(t+j) = E_j B \cdot Au(t+j-1) + F_j x(t) + E_j e(t+j) \quad (V.7)$$

Comme  $E_j$  est de degré  $j-1$ , les composantes de la séquence aléatoire sont tous à l'état futur, donc elles sont indépendantes des observations, d'où la prédiction de la sortie compte tenu de l'information disponible jusqu'à l'instant  $t$  se déduit de l'équation (V.7):

$$y(t+j/t) = G_j AU(t+j-1) + F_j x(t) \quad (V.8)$$

avec  $G_j = E_j B$

Dans le développement de la loi de commande à variance minimale (GMV), on utilise une seule prédiction  $y(t+k/t)$  où  $k$  représente le temps de retard du système, par contre l'algorithme (GPC) utilise un ensemble de prédictions pour laquelle  $j$  varie d'une valeur minimale à une valeur maximale (Horizon de prédiction).

- pour  $j = k$ , la prédiction  $y(t+j/t)$  dépend entièrement aux données disponibles
- pour  $j > k$ , la prédiction  $y(t+j/t)$  nécessite le signal de commande à l'état futur

#### IV.5.2.3. LOI DE COMMANDE PREDICTIVE

Dans la plus part des cas, la séquence de référence futur  $\{w(t+j), j = 1, 2, \dots\}$  égale à une constante  $w$ , mais dans le cas où la variation de la séquence  $w(t+j)$  est inconnue (Algorithme IDCOM)(Richalet et AL. 1978).

La variation  $w(t+j)$  peut être modélisée par un modèle de premier ordre:

$$w(t) = y(t)$$

$$w(t+j) = x w(t+j-1) + (1-x)w \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots$$

ou  $x \approx 1$ .

Donc l'objectif de la loi de commande prédictive est de conduire les sorties futurs du système  $y(t+j)$  à suivre la séquence de référence  $w(t+j)$  dans le même sens. (voir figure V.1).

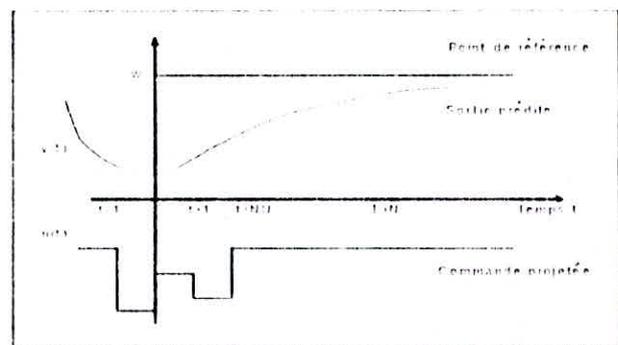


FIGURE V.1 : "Commande GPC"

Considerons la fonction de coût ayant la forme suivante:

$$J_{GPC} = E \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} |y(t+j) - w(t+j)|^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda(j) \Delta u^2(t+j-1) \right\} \quad (V.9)$$

où

$N_1$  : Horizon minimal de prédiction

$N_2$  : Horizon maximal de prédiction

$\lambda(j)$  : Facteurs de poids.

En général:

\*  $N_2 > n_b$  où  $n_b$ : degré de  $B(Z^{-1})$

\*  $N_1 \geq k$  ou  $k$ : temps de retard du système connu à priori sinon  $N_1$  est choisi égale à 1.

En raison de simplifier la dérivation de la loi de commande, (Mohtadi, 1986; Mohtadi et Tuffs, 1987; Lambert M. 1987),  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = N$  et  $\lambda(j) = \lambda$ .

On désigne par  $f(t+j)$ , les composantes de  $y(t+j)$  connues à l'instant  $t$ :

$$f(t+1) = [G_1(Z^{-1}) - g_m] \Delta u(t) + F_1 y(t) = y(t+1/t)$$

$$f(t+2) = Z [G_2(Z^{-1}) - Z^{-1}g_{m1} - g_m] \Delta u(t) + F_2 y(t) = y(t+2/t)$$

etc ...

où

$$G_i(Z^{-1}) = g_{i0} + g_{i1}Z^{-1} + \dots$$

$$g_{ij} = g_i \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots, i$$

Les équations précédentes peuvent être représentées par des vecteurs sous la forme suivante:

$$Y = GU + f \quad (V.10)$$

avec

$$Y = [y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+N)]^T$$

$$U = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N-1)]^T$$

$$f = [f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N)]^T$$

$$W = [w(t+1), w(t+2), \dots, w(t+N)]^T$$

Et  $G$  : matrice triangulaire inférieure de dimension  $N \times N$ .

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de l'équation (V.10), l'espérance de la fonction de coût définie par l'équation (V.9) s'écrira sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} J_{\text{opt}}(1, N) &= E\{(Y-W)^T(Y-W) + \lambda U^T U\} \\ &= E\{[G.U + f + e - W]^T[G.U + f + e - W] + \lambda U^T U\} \quad (\text{V.11}) \end{aligned}$$

La condition d'optimalité est donnée par l'annulation de la dérivée première de la fonction de coût par rapport au contrôle  $U$ , il vient: [18]

$$U = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (W - f) \quad (\text{V.12})$$

Comme  $\Delta u(t)$  est le premier élément du vecteur  $U$ , donc la commande  $u(t)$  correspondante est donnée par:

$$u(t) = u(t-1) + g^1 (W-f) \quad (V.13)$$

où

$g^1$  = La première ligne de la matrice  $(G^1 G + \lambda I)^{-1} G^1$ .

#### IV.5.2.4. CALCUL L'EQUATION CARACTERISTIQUE DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

Le diagramme bloc d'un système de commande prédictive (GPC) en boucle fermée est représenté sur la figure (V.2)

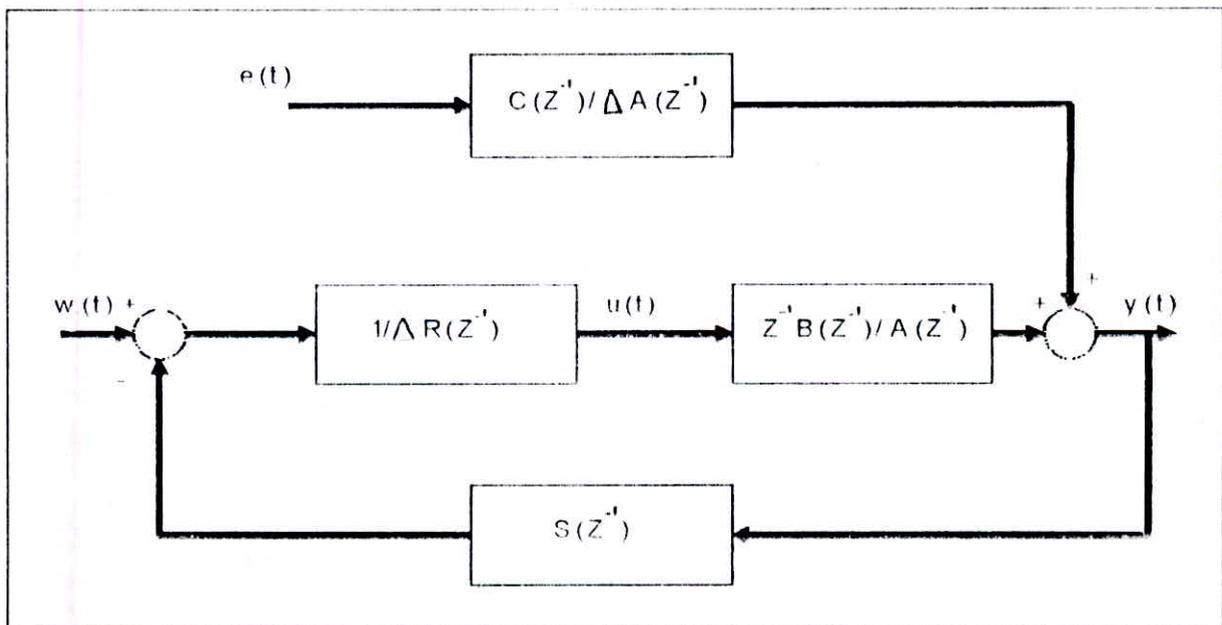


FIGURE V.2 : " Diagramme bloc d'un système de commande (GPC) "

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est donnée par:

$$R(Z^{-1}).A(Z^{-1}).\Delta + Z^{-1}.B(Z^{-1}).S(Z^{-1}) = 0 \quad (V.14)$$

avec

$$R(Z^{-1}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{nr} g_i} [1 + \sum_{i=1}^{nr} g_i F_i(Z^{-1})] \quad (V.15)$$

$$S(Z^{-1}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{ns} g_i} [\sum_{i=1}^{ns} g_i F_i(Z^{-1})] \quad (V.16)$$

et

$$nr = \text{Max}(nb, npd) \quad , \quad ns = nf \quad (\text{voir annexes B})$$

#### IV.5.3. EXTENSION DE L'ALGORITHME (GPC)

La section précédente, on a vu le concept fondamental de l'algorithme (GPC), et le développement des équations correspondantes au calcul des signaux de contrôle.

Dans cette partie, on essaye d'introduire un polynôme  $P(Z^{-1})$  de telle façon que la fonction de transfert du système en boucle fermée est bien spécifique et quelle répond aux exigences d'applications (signal de contrôle rapide ou lent) pour différents processus (robotiques, chimiques).

#### IV.5.3.1. MODELE DE REFERENCE

En introduisant une fonction de transfert  $P(Z^{-1})$  pour générer une sortie auxiliaire  $\psi(t)$ , et la minimisation consiste à utiliser la prédiction de l'erreur associée par la sortie auxiliaire. D'où écrit:

$$J_{GRE} = E \left\{ \sum_{t=1}^{N_2} [\psi(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{t=1}^{N_2} \lambda(j) \cdot \Delta u^2(t+j-1) \right\} \quad (V.17)$$

avec

$$\psi(t) = P(Z^{-1})y(t) \quad \text{et}$$

$$P(Z^{-1}) = P_n(Z^{-1})/P_d(Z^{-1}) \quad \text{ou} \quad P(1) = 1$$

L'équation d'identité (V.6) peut s'écrire:

$$\frac{P_n}{P_d} = E_j \cdot A \cdot \Delta + Z^j \frac{F_j}{P_d} \quad (V.18)$$

On multiplie les deux membres de l'équation (V.5) par  $E_j \Delta Z^j$ , on obtient :

$$\psi(t+j/t) = G_j \cdot \Delta u(t+j-1) + \frac{F_j}{P_d} \cdot y(t) \quad (V.19)$$

avec  $G_j = E_j \cdot B$

$E_j$ ,  $F_j$  peuvent être calculés par les équations récursives (Clarke et Al.1987), et la seule différence réside aux niveau des valeurs initiaux.

$$E_1 = P_n(0)/P_d(0) ; F_1 = Z(P_n - E_1 \check{A}) \quad \text{et} \quad \check{A} = A \cdot P_d \cdot \Delta$$

#### IV.5.3.2. INTERPRETATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT $P(Z^{-1})$

La fonction de transfert  $P(Z^{-1})$  ayant deux interprétations différentes:

- la première dépend de la stratégie de contrôle
- la seconde dépend de l'application

Pour le contrôle des processus où  $N_2$  est typiquement long ( $N_2 = 10$ ) et  $N_u$  est court ( $N_u = 1$ ), il est utile d'introduire un avance de phase en boucle fermée. Cependant le choix de  $P(Z^{-1})$  peut être sous la forme

$$P(Z^{-1}) = \frac{1 - \alpha \cdot Z^{-1}}{1 - \alpha} \quad (V.20)$$

Pour les applications de haute performances (contrôle robotique), l'horizon de contrôle  $N_u$  doit être supérieure à l'unité, sous cette condition (GMV), le système se comporte approximativement comme l'inverse du modèle de référence, et il est exacte quand  $\lambda = 0$ , et  $N_2 = N_u > k$ . D'où la réponse du système vis à vis de la consigne retardée  $w(t-k)$  est donnée par:  
(Voir annexes C).

$$P(Z^{-1}) = \frac{1}{P(Z^{-1})} \cdot w(t-1) \quad (V.21)$$

#### IV.5.3.3. EQUATION CARACTERISTIQUE DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

L'équation caractéristique du système en boucle fermée ayant la forme suivante:

$$R(Z^{-1}) A(Z^{-1}) A P_d + Z^{-1} B(Z^{-1}) S(Z^{-1}) = 0 \quad (V.22)$$

avec

$$nr = \text{Max}(nb, npd) \text{ et } ns = nf$$

#### IV.5.4.GPC MULTIVARIABLE

##### V.4.1.MODELE DE DISCRIPTION D'UN PROCESSUS MULTIVARIABLE

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la commande prédictives des processus multi-entrée, multi-sortie régis par le modèle de description (CARIMA) ci-dessous:

$$A(Z^{-1})\Delta y(t) = B(Z^{-1})\Delta u(t-1) + C(Z^{-1})e(t) \quad (V.23)$$

où

A, B et C sont des matrices polynomiaux de dimension  $n \times n$ .

$\Delta u$  et  $\Delta y$  sont les entrées-sorties différentielles du processus.

$e(t)$ : séquence aléatoire de dimension  $n \times 1$ .

##### IV.5.4.2.DEFINITION LA FONCTION DE COUT

La fonction de coût pour le GPC multivariable est la suivante:

$$J_{GPC} = \left\{ \sum_{j=1}^N [\psi(t+j) - w(t+j)]^T [\psi(t+j) - w(t+j)] + \sum_{j=1}^N \Delta U^T(t+j-1) \Lambda \Delta U(t+j-1) \right\} \quad (V.24)$$

avec

W : vecteur des séquences de références

$\psi$  : vecteur de prédiction des sorties auxiliaires définies comme étant:

$$\psi(t+j) = P.Y(t+j) = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t+j) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t+j) \end{bmatrix} \quad (V.25)$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & \dots & \lambda_{11} \end{bmatrix} \quad (V.26)$$

#### IV.5.4.3.DERIVATION LA LOI DE COMMANDE

D'après la méthode de minimisation (Mohtadi, 1986) de la fonction de coût (Equ.V.24), le signal de commande multivariable est donnée par:

$$\Delta u(t) = [I_n \ 0 \ \dots \ 0][G^T G + \Lambda]^{-1} G^T (w - f) \quad (V.27)$$

avec

G : une matrice de dimension  $(n \times N_2)(n \times N_u)$  ayant la forme suivante:

$$G = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & \dots & 0 \\ G_1 & G_0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \dots & G_{N-NU} \end{bmatrix}$$

$$w = [w_1(t+1), \dots, w_n(t+1), w_1(t+2), \dots, w_n(t+2), \dots, \\ w_1(t+N_2), \dots, w_n(t+N_2)]^T$$

$$f = [\psi_1(t+1), \dots, \psi_n(t+1), \psi_1(t+2), \dots, \psi_n(t+2), \dots, \\ \psi_1(t+N_2), \dots, \psi_n(t+N_2)]^T / t$$

## IV.5.5.SIMULATION ET INTERPRETATION

### IV.5.5.1.SIMULATION

Par le biais de programmation dans le langage PC-MATLAB, on va simuler la réponse de notre système (avion) par la commande prédictive généralisée (GPC). La consigne est choisie comme une série d'échelon unité.

#### FIGURE-1.2:

On applique une commande prédictive généralisée (GPC) sans variations des paramètres internes du système. Les paramètres des contrôleurs sont:  $N_1 = \text{Diag}(1,1)$ ,  $N_2 = \text{Diag}(10,5)$ ,  $\lambda$  : variable.

#### FIGURE-3.4:

On applique une commande (GPC) sans variation des paramètres internes du système. Les paramètres du contrôleur sont:  $N_1 = \text{Diag}(1,1)$ ,  $\lambda = 0$ ,  $N_2$  : variable.

#### FIGURE-5.6:

On applique une commande (GPC) avec une variation des paramètres internes du système par action sur la vitesse du vol (nombre de Mach  $M$ ). Les paramètres des contrôleurs:  $N_1 = \text{Diag}(1,1)$ ,  $N_2 = \text{Diag}(10,5)$ ,  $\lambda = 0$ ,  $M$  : variable.

#### FIGURE-7.8:

On applique une commande (GPC) avec une variation des paramètres internes du système par action sur l'angle d'attaque ( $\alpha$ ). Les paramètres du contrôleur :  $N_1 = \text{Diag}(1,1)$ ,  $N_2 = \text{Diag}(10,5)$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\alpha$  : variable.

#### IV.5.5.2.INTERPRETATION

##### FIGURE-1.2:

Le facteur  $\lambda$  joue un rôle d'amortissement. Plus la valeur de  $\lambda$  est grande, plus la réponse du système est amortie et le signal de commande est moins active. Pour  $\lambda = 0$ , la sortie suit la consigne avec une constante du temps petite, et la commande correspondante est stable. On augmente  $\lambda$ , le temps de réponse du système augmente. Pour  $\lambda = 50$ , la sortie sera très amortie et la commande correspondante sera très lente.

##### FIGURE-3,4:

On remarque pour  $N2=1$ , le signal de sortie suit la consigne brusquement et la fréquence d'oscillation de la commande correspondante sera importante. Notons que la réponse des système phase à non-minimale est instable pour  $\lambda = 0$ . On augmente  $N2$ , le temps de réponse du système augmente, et les dépassements augmentent de plus en plus jusqu'à une valeur maximale correspondante à la valeur du système en boucle ouverte, par contre la valeur initiale de la commande  $U(0)$  et la fréquence d'oscillation diminuent.  $N2=10$ , le signal de sortie suit très bien la consigne et la commande sera lisse.  $N2 = 20$ , le signal de commande ne subit à aucune variation.

##### FIGURE-5,6:

On remarque que le nombre de mach ( $M$ ) peut réduire le degré de stabilité de direction, par contre l'influence sur le degré de stabilité latérale est minimale. Le nombre de mach augmente, la fréquence d'oscillation et les amplitudes de la commande diminuent.

##### FIGURE-7,8:

On observe une commande stable et lisse avec  $U(0) = 0.5$  degrés pour  $\alpha$  est très faible de l'ordre de deux degrés. Pour les angles d'attaques  $\alpha > 4$  degrés, les dépassement augmentent et les fréquences d'oscillations diminuent.

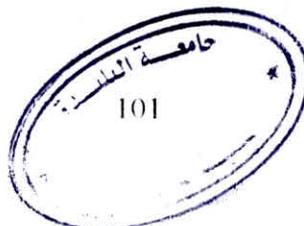


Figure 1 : "Simulation par la commande G.P.C sans variation des parametres interne du systeme avec  $\lambda$  variable"

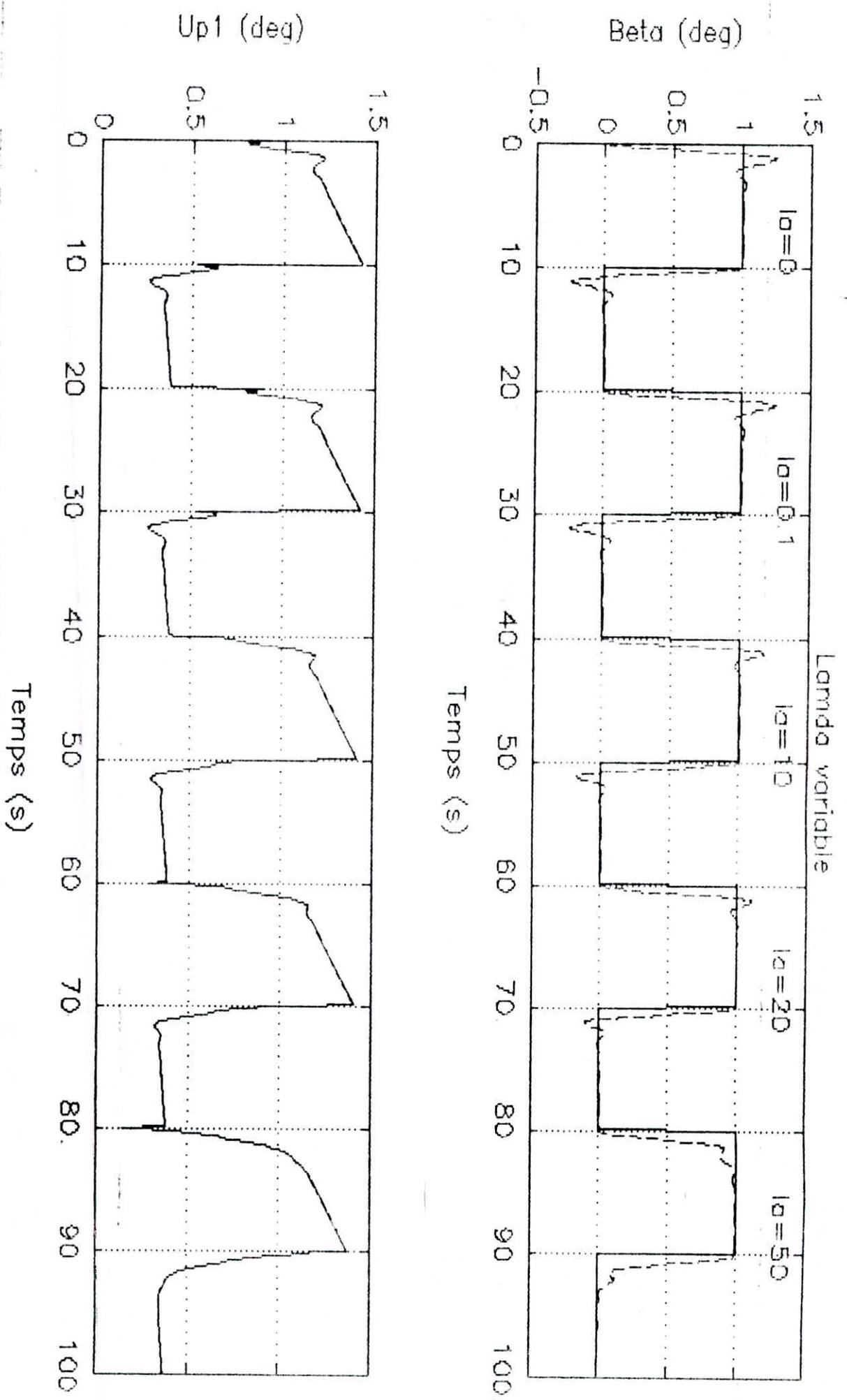


Figure 2 : "Simulation par la commande C.P.D. sans variation des paramètres interne du système avec  $\lambda$  variable "

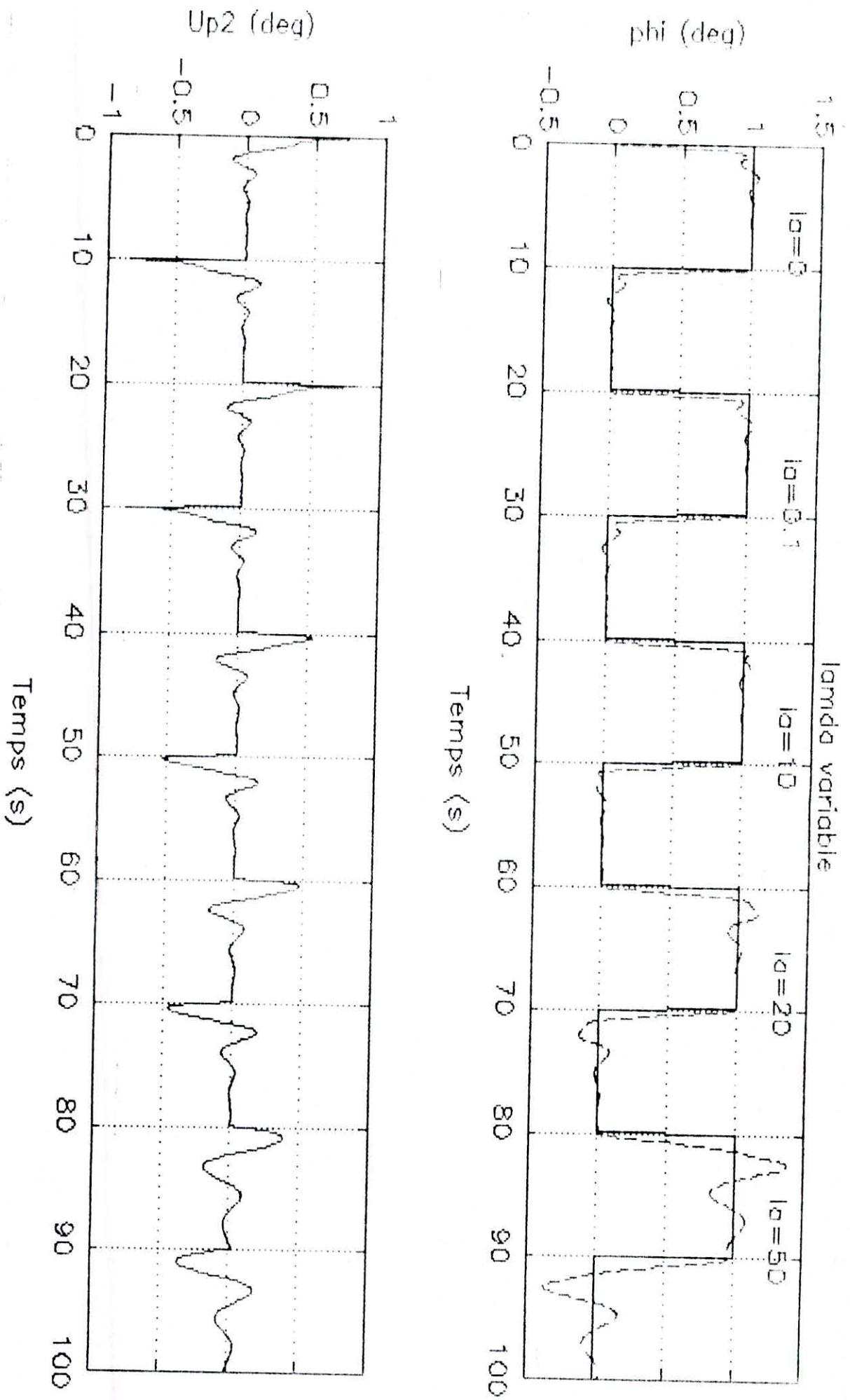


Figure 3 : "Simulation par la commande G.P.C sans variation des parametres interne du systeme avec N2 : variable "

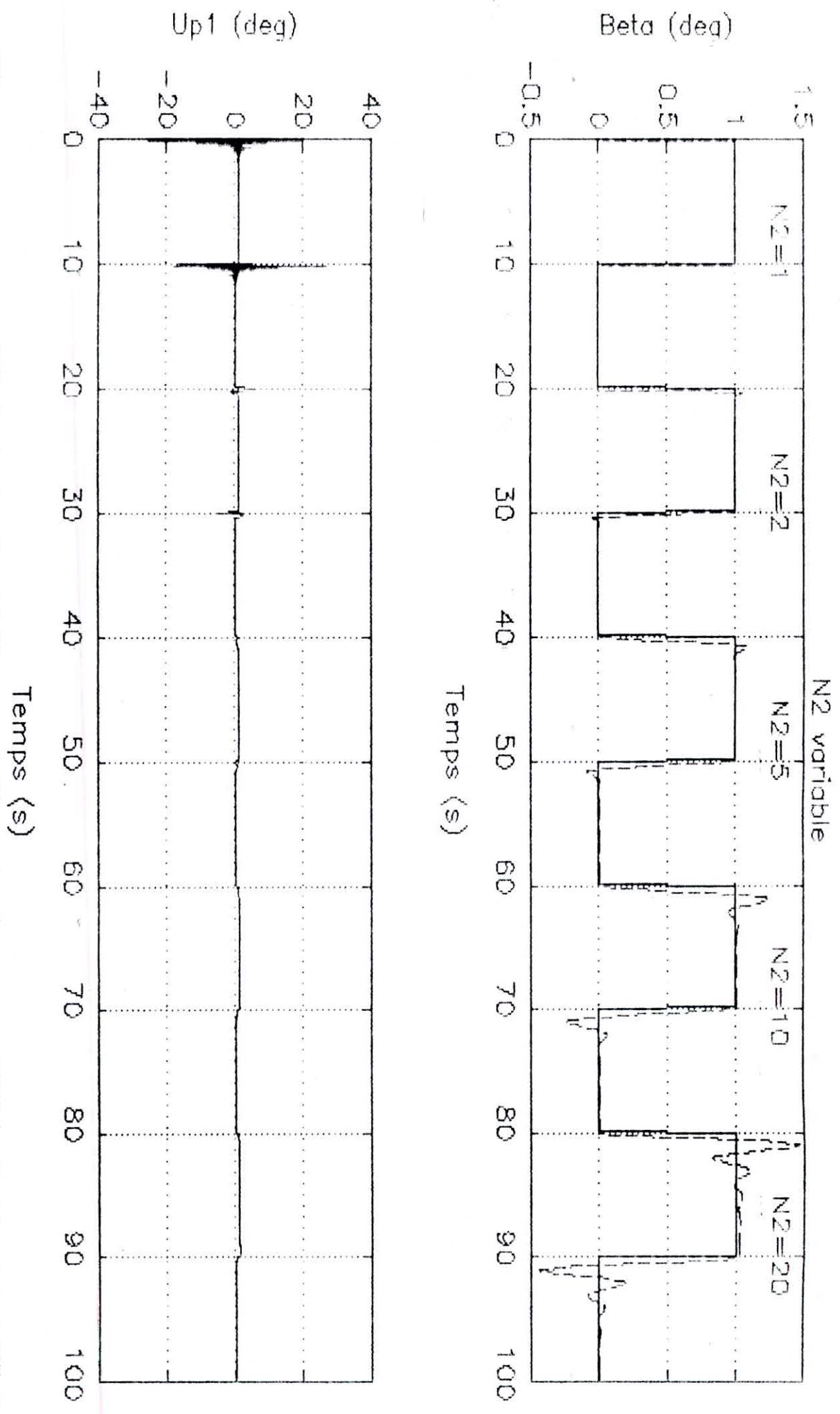


Figure 4 : "Simulation par la commande G.P.C sans variation des paramètres interne du système avec N2 : variable "

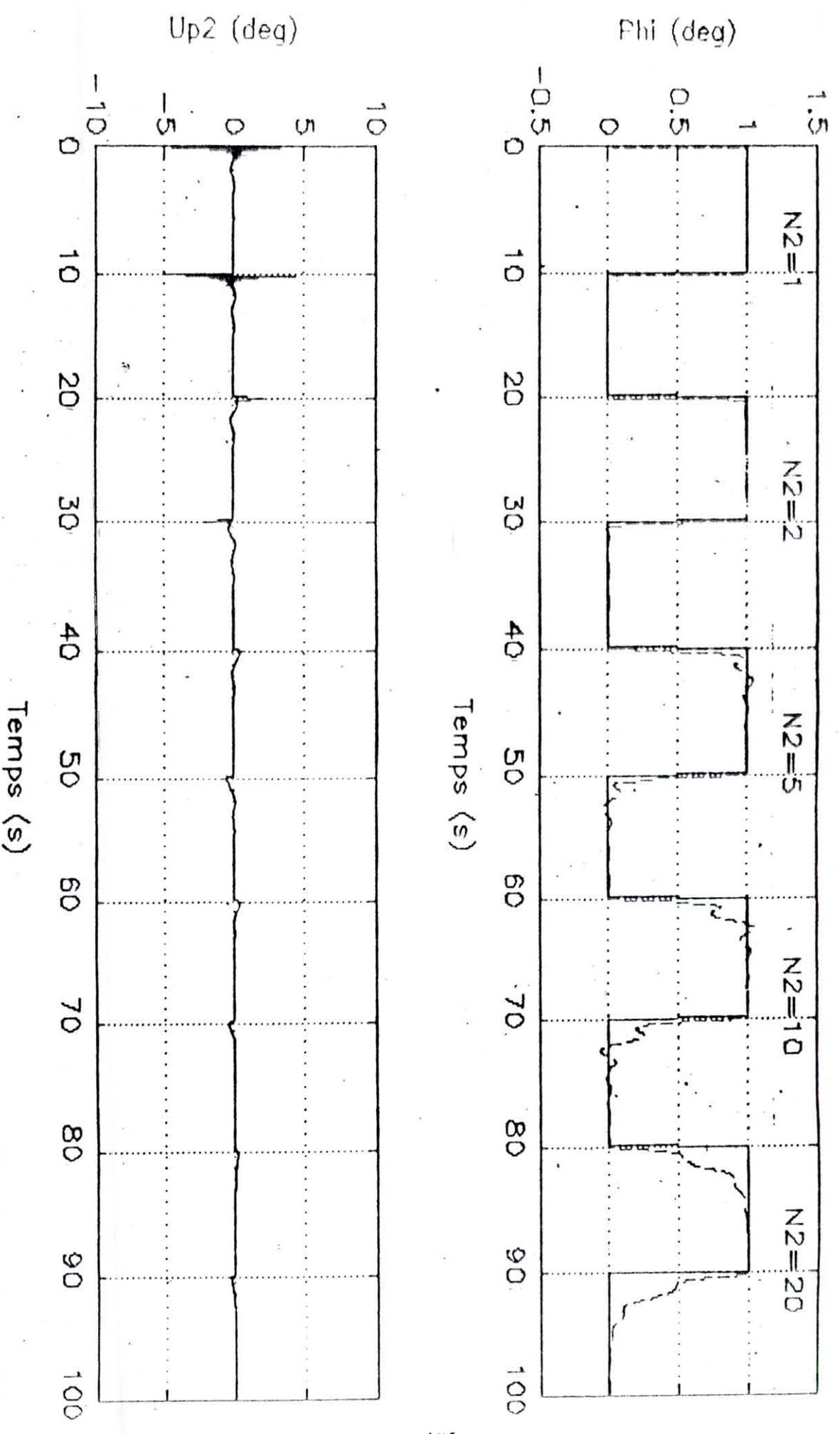


Figure 5 : "Simulation par la commande G.P.C avec variation des parametres interne du systeme par action de vitesse "

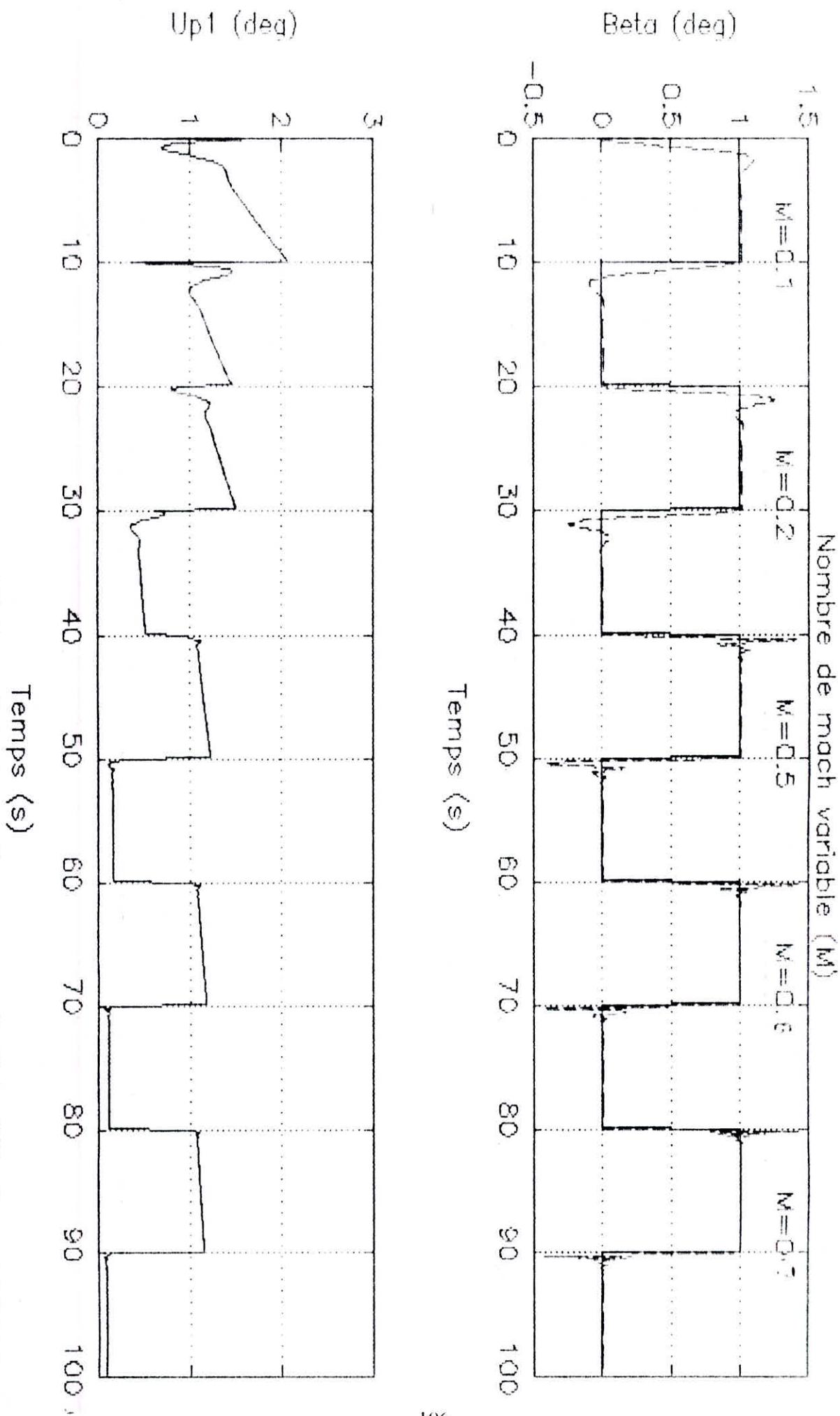


Figure 6 : "Simulation par la commande G.P.C avec variation des parametres interne du systeme par action de vitesse "

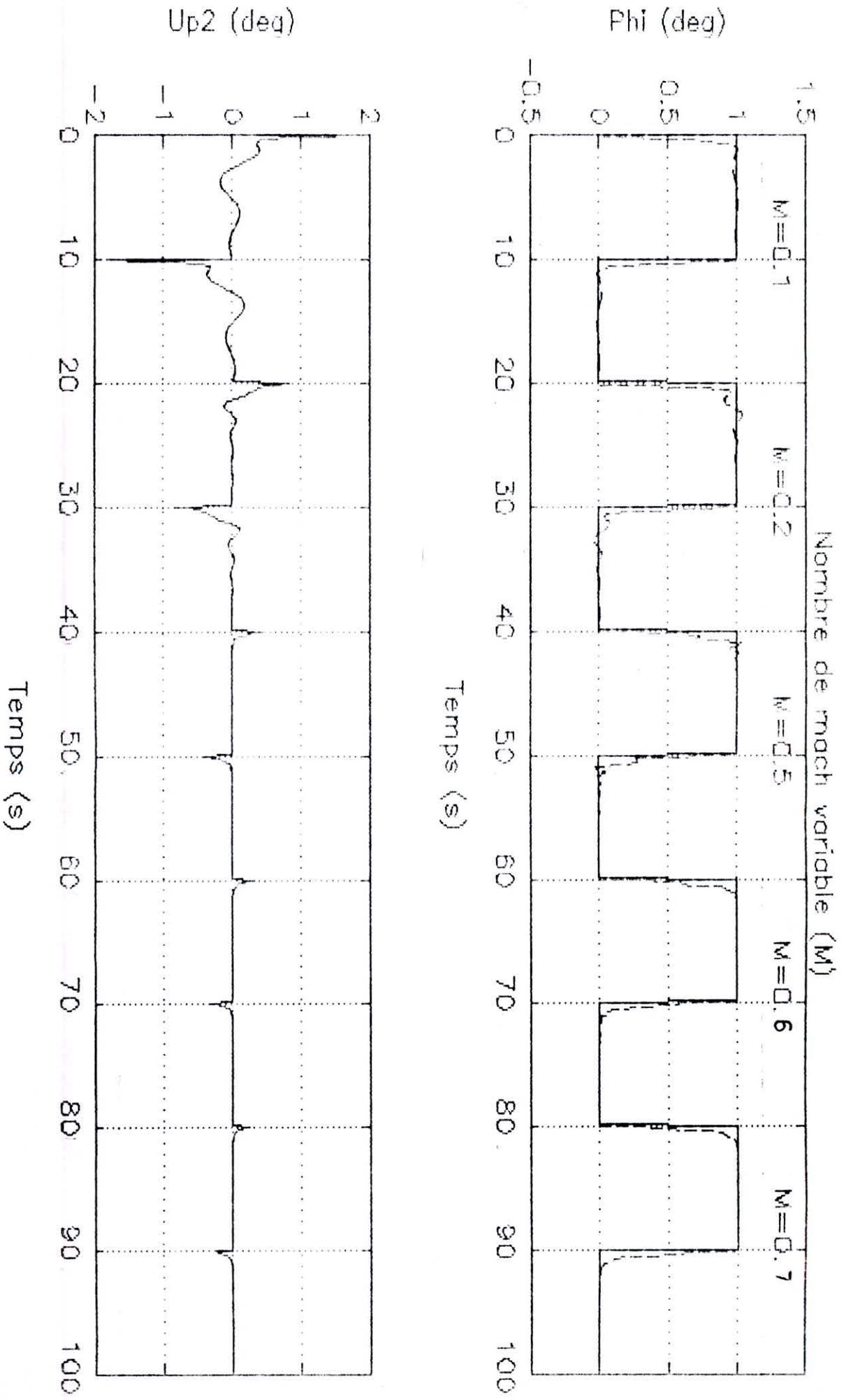


Figure 7 : "Simulation par la commande G.P.C. avec variation des paramètres interne du système par action d'angle d'attaque"

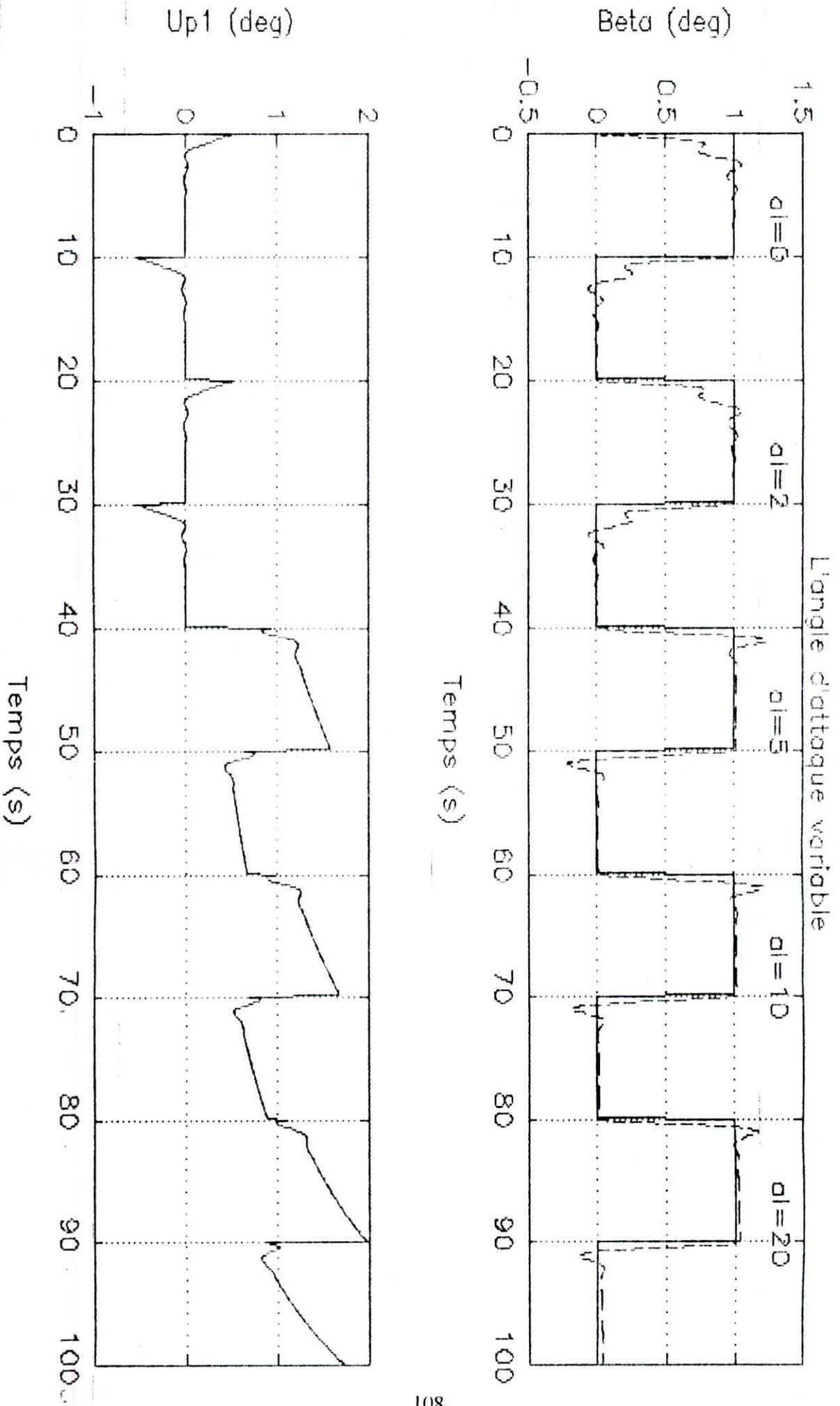
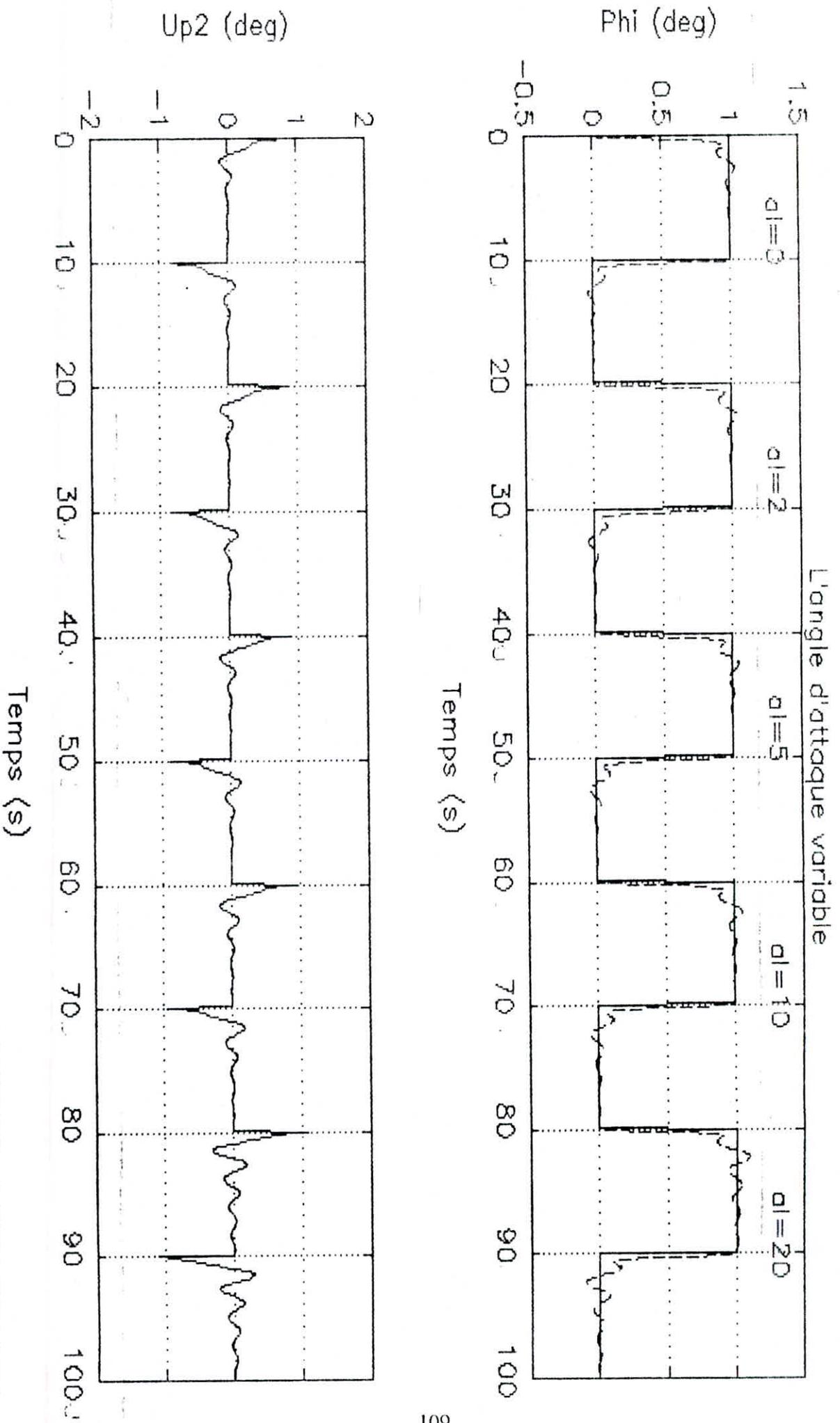


Figure 8 : "Simulation par la commande G.P.C avec variation des paramètres interne du système par action d'angle d'attaque "



#### IV.5.6.COMPARAISON DES CONTROLEURS

A titre comparatif le tableau ci-dessous, nous donne un résumé des quatre contrôleurs principaux : MRAC, PID, GMV, GPC.

	MRAC	PID	GMV	GPC
<b>Stabilité</b>	Hyperstabilité	Très limitée	Exige $\lambda \neq 0$ , pour les système a phase non-minimale	N'est pas forcément $\lambda \neq 0$
<b>Temps de retard</b>		Performances dégradées	Doit être connu	Connu ou inconnu comme il peut être variant ou invariant
<b>Paramètres du contrôleur</b>	$\alpha, \beta$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda, N1, N2, NU$
<b>Régime de régulation</b>	Permanent et transitoire	Permanent	Permanent	Permanent et transitoire
<b>Plage de prédiction</b>			Une seule prédiction	Une série de prédiction
<b>Critère de minimisation</b>		Critère de performance	Critère de performance	Critère de performance

Tableau : "Comparaison des contrôleurs MRAC, PID, GMV, GPC"

*CONCLUSION GENERALE*

## CONCLUSION GENERALE

En première étape, on a établi le modèle mathématique dynamique du vol d'un avion avec les forces et les moments aerodynamiques estimés selon les conditions de vol et les caractéristiques géométriques de l'avion. Ce modèle est représenté par un système d'équations non-lineaires couplées.

En utilisant la théorie des petites perturbations pour réduire le problème en deux systèmes d'équations lineaires découplées, le premier gouvernant le mouvement longitudinal, et le second le mouvement latéral, puis comment on arrive à les représenter par une équation d'état classique de la forme:

$$\dot{X} = A X + B U + D$$

Ensuite, grace à l'utilisation des deux langages de simulation des systèmes multivariable: *SIMNON* et *PC-MATLAB*. On a étudié plusieurs commandes lorsqu'elles sont appliquées à notre système multivariable (MIMO), et ceci en simulant l'angle de dérapage (sideslip angle), l'angle d'inclinaison (roll angle) de l'avion, et la forme de la commande

L'application de deux commandes non-lineaires appartenant à la classe des commandes adaptatives avec un modèle de référence et qui sont:

- Le MRAC avec une action proportionnelle (P)
- Le MRAC avec une action proportionnelle-intégrateur (P.I)

Et là, on a observé une très bonne poursuite du modèle de référence par le signal de sortie, car l'effet du terme d'intégration joue un rôle très important pour l'obtention d'une meilleure poursuite du modèle de référence sachant que l'erreur est presque nulle.

Les commandes (up1,up2), sont un peu lisses, et présentent des valeurs d'amplitudes convenables aux caractéristiques des ailerons et des gouvernes de direction (aileron deflection and rudder deflection).

Dans la deuxième étape, on a vu trois types de commandes adaptative par auto-optimisation et qui sont:

- commande d'état (state controller)
- commande à paramètres optimaux (parameter optimizing controller)
- commande à variance minimale (minimum variance controllers)
- commande prédictive généralisée (generalized predictor controllers)

La simulation nous a permis de constater que cette classe de commandes donnent de bons résultats de point de vue la sortie suit très bien la consigne. Les commandes obtenues par le contrôleur d'état sont presque égales à celles obtenues dans le cas de MRAC sans action intégrale, par contre le PID génère des signaux de commandes qui présentent des amplitudes de plus en plus importantes en fonction de la consigne.

Dans le cas où notre système (avion) soumis à une perturbation extérieure stochastique, le contrôleur à variance minimale joue un rôle très important, car la simulation nous a fourni de très bons résultats puisqu'on observe une très bonne poursuite de la consigne par le signal de sortie, les commandes présentent moins d'oscillation par rapport le MRAC avec des perturbations extérieures.

Mais l'inconvénient majeur de ce genre de contrôleurs (MVi) réside pour les faibles références (quelques degrés) sinon les signaux de commandes présentent des amplitudes de plus en plus importantes si on augmente la consigne. Une autre faiblesse de la commande à variance minimale provient du fait qu'il ne concerne que la régulation de la sortie du processus sans tenir compte de la réponse transitoire du système.

La commande prédictive généralisée (GPC), donne d'excellents résultats. En effet, la commande prédictive (GPC) présente de bonnes performances aussi bien, lors des variations de la consigne, que lors d'une perturbation extérieure, ou lors des variations des paramètres internes du système.

A titre comparatif, les deux types de commandes (GPC) et (GMV) donnent des résultats très voisins. Nous avons montré que la commande (GPC) présente des avantages que celle de la commande (GMV) :

- Amélioration d'une part, les performances exigées par les caractéristiques des gouvernes de direction et les ailerons de l'avion.
- Et d'autre part, la commande (GPC) ne nécessite plus la reconnaissance du temps de retard du système.
- En plus, elle tient compte, la régulation de la réponse transitoire.

Parmi les perspectives de recherche, nous pensons à approfondir l'étude du modèle mathématique d'un avion en vol supersonique pour des angles d'attaques et de dérapages importants.

*ANNEXES*

# ANNEXES A

## 1. CALCUL LA DERIVEE DE VITESSE $\dot{V}$

Soit le vecteur vitesse:

$$V = V_x i + V_y j + V_z k$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \implies 2 \text{Log}(V) = \text{Log}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$$

On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{V^2} (V_x \dot{V}_x + V_y \dot{V}_y + V_z \dot{V}_z) \dots\dots\dots (1)$$

On remplace  $V_x, V_y, V_z$  par les équations (Equ.1.25,26,27), on a:

$$\begin{aligned} \dot{V}/V = & (g/V) \cdot [ -\sin(\theta) \cdot V_x/V + \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot V_y/V + \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot V_z/V ] + \\ & (\rho V^2 S / 2mV) \cdot [ C_x \cdot V_x/V + C_y \cdot V_y/V + C_z \cdot V_z/V ] + \\ & (T/mV) \cdot V_x/V \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

or

$$V_x/V = \cos(\alpha) \cos(\beta) \dots\dots\dots (3)$$

$$V_y/V = \sin(\beta) \dots\dots\dots (4)$$

$$V_z/V = \sin(\alpha) \cos(\beta) \dots\dots\dots (5)$$

$$V_z/V_x = \text{tg}(\alpha) \dots\dots\dots (6)$$

Par substitution dans l'équation (2), on a:

$$\begin{aligned} \dot{V}/V = & (g/V) \cdot [ -\sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\beta) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\beta) ] \\ & (\rho V^2 S / 2mV) \cdot [ C_x \cos(\alpha) \cos(\beta) + C_y \sin(\beta) + C_z \sin(\alpha) \cos(\beta) ] + \\ & (T/mV) \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

## 2. CALCUL LA DERIVEE DE DERAPAGE $\dot{\beta}$

Par définition, le dérapage  $\beta$  est donnée par l'équation (4):

$$\sin(\beta) = V_y/V \implies \beta = \arcsin(V_y/V)$$

On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{\beta} = (1/V \cos(\beta)) [\dot{V}_y - \dot{V} \sin(\beta)] \dots \dots \dots (8)$$

or

$\dot{V}_y$  et  $\dot{V}$  sont données par les équations (1.26 et 9).

Par substitution dans l'équation (7)

on a :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & -[(g/V) \sin(\theta) + (q_i S/mV) C_y] \sin(\beta) + r[\cos(\alpha) + (g/V) \sin(\phi) \cos(\theta) + \\ & (q_i S/mV) C_y] \cos(\beta) - [(g/V) \cos(\phi) \cos(\theta) + (q_i S/mV) C_z] \sin(\beta) - p] \sin(\alpha) - \\ & (T/mV) \sin(\beta) \cos(\alpha) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

avec

$$q_i = \rho V^2/2 \quad (\text{Préssion dynamique})$$

## 3. CALCUL LA DERIVEE D'ANGLE D'ATTAQUE $\alpha$

Par définition l'angle d'attaque  $\alpha$  est donnée par l'équation (6):

$$\text{tg}(\alpha) = V_z/V_x \implies \alpha = \text{arctg}(V_z/V_x)$$

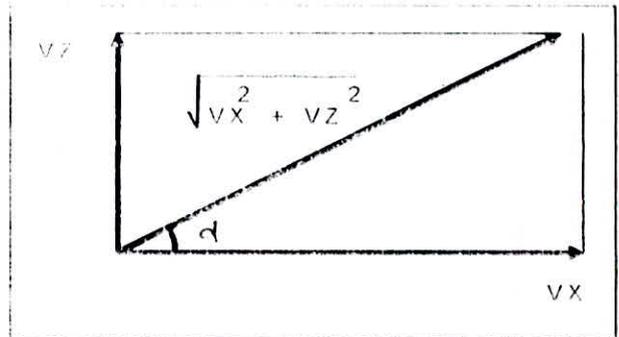


FIGURE 1

En dérivant  $\alpha$  par rapport au temps on a :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= [V_Z V_X - V_X V_Z] / [V_X^2 + V_Z^2] \\ &= [V_X^2 (V_X^2 + V_Z^2)] (V_Z/V_X) - [V_Z^2 (V_X^2 + V_Z^2)] (V_X/V_Z) \\ &= \cos^2(\alpha) (V_Z/V_X) - \sin^2(\alpha) (V_X/V_Z) \end{aligned} \quad (10)$$

(Voir figure 1)

En remplace  $V_X$  et  $V_Z$  par ses expressions correspondantes (Eq I 25 et I 27), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q + [-r \sin(\beta) \sin(\alpha) - p \cos(\alpha) \sin(\beta) + (g/V) (\sin(\theta) \sin(\alpha) + \\ &\quad \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\alpha)) + (q_1 SC_z/m) \cos(\alpha) - (q_1 SC_x/m) \sin(\alpha) - \\ &\quad (T/mV) \sin(\alpha)] (1/\cos(\beta)) \end{aligned} \quad (11)$$

## ANNEXES B

### 1. CALCUL $R(z^{-1})$ ET $S(z^{-1})$

D'après la figure (V.2), la commande pour une boucle générale est donnée par :

$$R(z^{-1}) \Delta u(t) = w(t) - S(z^{-1}) y(t) \quad (1)$$

Compte tenu de l'éq. V.12, la commande GPC est donnée par :

$$\Delta u(t) = (G^1 G^2 D)^{-1} G^1 w(t) \quad (2)$$

On note la première ligne de la matrice  $(G^1 G^2 D)^{-1} G^1$  par  $g^1$  où :

$$g^1 = [g_1, g_2, \dots, g_N]$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} f(t+1) &= [G_1 - g_{10}] \Delta u(t) + F_1 x(t) - F_1 \Delta u(t-1) + F_1 y(t) \\ f(t+2) &= Z.[G_2 - g_{21} Z^{-1} - g_{20}] \Delta u(t) + F_2 x(t) - F_2 \Delta u(t-1) + F_2 y(t) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Par substitution dans l'équation (2), on obtient

$$\Delta u(t) = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \begin{bmatrix} w - F_1 \Delta u(t-1) - F_1 y(t) \\ w - F_2 \Delta u(t-1) - F_2 x(t) \\ \vdots \\ w - F_{N-1} \Delta u(t-1) - F_{N-1} x(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Après la multiplication, l'équation (3) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$Au(t) - (\sum g_i)w - (\sum g_i F_{i1}) Au(t-1) - (\sum g_i F_{i2}) y(t) \dots \dots \dots (4)$$

Cette dernière équation (4) peut être réarrangée sous la forme

$$(1/\sum g_i) Au(t) + (\sum g_i F_{i1}/\sum g_i) Au(t-1) + \dots + (\sum g_i F_{im}/\sum g_i) Au(t-n_M) = w - (\sum g_i F_{i1}/\sum g_i) y(t) - \dots - (\sum g_i F_{im}/\sum g_i) y(t-n_M) \dots \dots \dots (5)$$

Ceci est équivalent à

$$r_0 Au(t) + r_1 Au(t-1) + \dots + r_{nR} Au(t-n_R) = w - s_0 y(t) - s_1 y(t-1) - \dots - s_{nS} y(t-n_S) \dots \dots \dots (6)$$

$$R(Z^{-1}) Au(t) = w - S(Z^{-1}) y(t) \quad \text{avec}$$

$$R(Z^{-1}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{nR} g_i} [1 - \sum_{i=1}^{nR} g_i F_i(Z^{-1})] \quad (7)$$

$$S(Z^{-1}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{nS} g_i} [\sum_{i=1}^{nS} g_i F_i(Z^{-1})] \quad (8)$$

## ANNEXES C

### CALCUL LA FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

Suposons que :  $\lambda = 0$ ,  $N1 = N2 = 1$

calculons  $F_1$  et  $\Gamma_1$  pour  $j = 1$ , nous trouvons :

$$F_1 = (1-AA)Z - \alpha \quad (9)$$

$$\Gamma_1 = (B(Z^{-1})/P_d) - g_0 \quad (10)$$

avec

$$P(Z^{-1}) = P_n/P_d = (1-\alpha Z^{-1})(1-\alpha) \quad (11)$$

En remplaçant dans les équations (7) et (8) on obtient

$$S(Z^{-1}) = F_1 = (1-AA)Z - \alpha \quad (12)$$

$$R(Z^{-1}) = B(Z^{-1})/P_d \quad (13)$$

or la fonction de transfert du système de commande GPC est donnée par:

$$Y/W = [(1/AR).Z^{-1}.(B/A)]/[1 + (1/AR).Z^{-1}.(B/A).(S/P_d)] \quad (14)$$

Compte tenu de l'éq (12) et (13), l'equation (14) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$Y/W = Z^{-1}/(P_n/P_d) = Z^{-1}/P(Z^{-1}) \quad (15)$$

Finalement:

$$y(t) = (1/P(Z^{-1})) w(t-1) \quad (16)$$

*BIBLIOGRAPHIE*

## ***BIBLIOGRAPHIE***

- [1]. D.KAUVIN. "Aerodynamique, Mécanique du vol".  
Edition 1983
  
- [2]. D.NAJIM. "Commande adaptative des processus industriels".  
Edition 1982
  
- [3]. Z.DZYGADLO and R.BOLDAK "Numerical modeling of the dynamics of aerobatic manoeuvres".  
Jornal of technical physics, 26, 2, 225-245 1985
  
- [4]. M.BOUSARD. "Choix des servomoteurs pour commandes de vol et pilote automatique".  
Revue Française de Mécanique (R.V.M)
  
- [5]. HORIN, NIKGEFORUK.PN, KANAIK. "On the improvement of an adaptive observer for multi-output systems". IEEE proceedings part D. Control theory and applications.  
Vol.135, N°1, Pages.67-71, January 1988
  
- [6]. Y.H.CHEN and S.PANDEY. "Robust control strategy for taki-off performance in a windshear".  
Vol.10, N°1, P.65-79, (1989)

- [7]. ANTHONY F HOTZ. "Direct variance design - A multiobjective control theory". IEEE. 1983
- [8]. K. SOBEL, H. KAUFMAN, and L. MABIUS. "Implicit adaptive control for a class of MIMO systems". IEEE transactions on aerospace and electronic systems. Vol. 18, N° 5, September 1982.
- [9]. A. L. GONZALEZ BLAZQUEZ. "Mathematical modelig for analysis of non-linear aircraft dynamics". Computers and structures. Vol. 37, N° 2, PP: 193-197, July 1990.
- [10]. VALDISLAV KLEIN. "Estimation of aircraft aerodynamic parameters from flight data". Prog. Aerospace Sci, Vol 26, PP: 1-77, 1989.
- [11]. HILDING ELMQVIST, KARL JOHAN ASTROM, and TOMAS SCHONTHAL. "Simmon, user's guide for MS-DOS computers" Version 1.0, August 1986
- [12]. "PC-MATLAB, For MS-DOS personal computers". Version 2.2, January 1986
- [13]. ISERMAN, R. (1981). "Digital control system". Revised and enlarged edition of digital regelsystem (1977, Sringer, Verlag, BERLIN)

[14]. BOUNEDER M, ATTAIA A et SAHHS. "Evaluation des coefficients de stabilité d'un avion léger"

Thèse d'ingénieur, I.N.E.S d'Aéronautique, Blida, Algérie, 1992.

[15] BENCHOUBANE H et CHENTIR A. "Etude de commandes de position d'un bras manipulateur classe I".

Thèse de magister, I.N.E.S d'Electronique, Blida, Algérie, 1993.

[16]. ETKIN B. "Dynamics of stability and control"

Edition: 1982

[17]. J.GROSSIN. "Système de commande automatique du vol C.A.D.V"

E.N.S.I.C.A. 1981

[18]. Clarke.D.W and Mohtadi C and Tuffs. "Generalized predictive control part I and II"

Automatica, Vol 23, N° 2, PP 137-160.

[19]. B.C. Kuo "Digital control systems", Holts-Saunders, International Editions, 1980.

[20]. C.F. Van Loan "Computing integrals involving the matrix exponential", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-23, pp.395-404, 1978.

- [21] Landau, I.D., "Adaptive control, the model reference approach",  
Marcel Dekker, New-york, 1979.
- [22] Astrom Karl.J., and Bjorn Wittenmark, "Adaptive control",  
Addison-Wesley, Publishing company, 1989.
- [23] Schmitendorf, WE., "Methods for obtaining robust tracking control laws"  
Automatica (Oxford), Vol.23; No 5; PP. 675-677; 1987.
- [24] Keyser DR., "Flight test and evaluation of fluidic flight control"  
SAE Transactions; Vol. 96; PP. 1335-1343; 1988.
- [25] Ruokangas CC., Guthmiller WA., Pierson BL., Sliwinski KE., Lee JMF., "Application of  
moderne synthesis to aircraft control"  
Journal of robotic systems; Vol. 4; No 3; PP. 355-375; 1987
- [26] Sturdivant VR., "Transformation mathematics of a mobile robot work center"  
International journal of robotics research; Vol. 5; No 4; PP.89-93; 1987
- [27] Hotz A.F and Skelton R.E., "A covariance control theory"  
Int. J. Contr. Vol. 46; No 1; PP. 13-32; 1987.
- [28] Makila P.M., "On multiple criteria stationary linear quadratic control"  
IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 34, No 12; Dec. 1989
- [29] Gonzalez A.L., "Study on high angles of attack dynamics phenomena"  
PH.D. Thesis, Polytechnica, Madrid, 1987.
- [30] Graphon S.B., "Dynamic stability derivatives of twin-jet fighter model"  
NASA TND-6091; 1971.
- [31] W. Bihrl Jr., "F14 A high angle of attack characteristics"  
Journal of an aircraft; Vol.13; No 8; PP. 576-586; 1976.

[32] Astrom J.J and Eykhoff P., "System identification"

Automatica; Vol.7; No 2; PP. 123-162; 1979

[33] Miele A., Wang T. and Melwin W.W., "Optimal flight trajectories in the presence of windshear, Part 3. Algorithms, Take-off, Rice university, Aero-Astronautics report No 193; 1985.

[34] Narendra K.S. and Valanvani L.S., "Direct and indirect model reference adaptive control"

Automatica; 15; PP. 653-664; 1979.

[35] Nikiforuk P.N., Hori N. and Kanai K., "A stable discrete time adaptive observer applied to multivariable aircraft"

Proc. ASME winter annual meeting , Miami Beach, FL,DSC-1, PP. 189-194; 1985.

[36] Peterka V. "Predictor based self-tuning control"

Automatica; 20; PP. 39-50; 1984.

رقم الجرد: 1969  
رقم الفاتورة: 1  
التاريخ: 08/02/2012  
الأصل: DON



١٤٥٣: \_\_\_\_\_  
١٤٥٤: \_\_\_\_\_  
١٤٥٥: \_\_\_\_\_  
١٤٥٦: \_\_\_\_\_