République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saad Dahleb Blida 1

Faculté des sciences
Département de physique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : **Physique Théorique**

Thème :

Etude des problèmes de la mécanique quantique dans l'espace non commutatif

Présenté par :

Kouma Khaoula

Soutenu le 22/09/ 2022 devant le jury composé de :

Oulld Mohamed Mounir	MCB	USDB 1	Président
Hadj Moussa M'hamed	MCB	USDB 1	Encadreur
Imadalou Mourad	MCA	USDB 1	Examinateur

Blida 1-2021/2022

Remerciement

Je souhaiterais en premier remercier Dieu Le Tout Puissant de m'avoir donné la santé, le courage et la volonté dans la concrétisation de ce projet.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Tout d'abord, je voudrais adresser toute ma gratitude à mon encadreur de ce mémoire, Dr.Hadj Moussa M'hamed , pour sa patience , sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion .

Je tiens à exprimer mes remerciements à Dr.Oulld Mouhamed Mounir , pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je remercie tout particulièrement Dr.Imadalou Mourad , pour avoir accepté d'examiner ce travail

Mon plus grand remerciement va aux membres de ma famille. A mon père Ahmed qui m'a enseigné et guider tout au long de ma scolarité , et ma mère Bahia qui m'a élevé, encouragé patiemment et supporter à qui jesouhaite un bon rétablissementet à mes frères pour leur constant soutien Chaouki , Yacer, Haithem et Sedik .

Je tiens à remercier Sabrina , Soumia pour leurs conseils et leur orientation

Enfin , je remercie bien sur mes amies avec qui j'ai passé de bons moments et avec qui j'ai créé de jolies souvenirs Samah, Fifi, Feriel,Yasmine, Soumia et Abir . Et un remercient particulier à ma jumelle Yousra.

KOUMA KHAOULA

Contents

Chapter 1

INTRODUCTION

Au d ébut du XXe siècle (1885-1962), les physiciens réalisent que la physique classique décrit les effets aux niveaux macroscopiques, mais elle ne peut pas à l'échelle microscopique et dans ce contexte la physique classique étudiait l'univers comme un système composé de matière et de rayonnement. En revanche, le rayonnement était supposé être régi par les lois de l'électromagnétisme formulées de manière unifiée par James Clark Maxwell[1]. Tous ces développements aux niveaux macroscopiques (lois de Newton et les équations de Newton) et radiologiques (le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique, le modèle de Bohr d'un atome, l'effet Compton) ont conduit les scientifiques à la découverte d'une nouvelle théorie physique à l'échelle microscopique, qui se base sur deux formes différentes : mécanique matricielle (Heisenberg 1925) et mécanique ondulatoire (Schrödinger 1926). Cette nouvelle théorie était universellement appelée mécanique quantique. Ce n'est pas tant parce que les idées de base sont difficiles que parce qu'elles sont étranges [2].

Par conséquent, une révolution complète dans le concept des lois physiques est appelé la physique moderne, de deux composés principaux:

La théorie de la relativité est importante pour expliquer les observations d'objets se déplaçant à grande vitesse.

Quant à la mécanique quantique, elle a prouvé que la structure et le comportement des atomes et des noyaux, en montrant que les particules de très petits niveaux sont gouvernées par les propriétés des ondes, et sans aucun doute, la solution du problème du corps noir a marqué le début de la théorie quantique. Max Planck à résolu ce problème, en supposant que l'énergie E des atomes ne peut être échangée que par des multiples d'un certain nombre, proportionnel à la fréquence ν du rayonnement , et avec une nouvelle constante appelée $\hbar$ depuis la constante de Planck , qui à ensuite été reconnue comme une des quatre constantes fondamentales.

Et la différence entre les deux recherches prouvent que la mécanique quantique à des théories plus complexes que la mécanique classique, mais donne des résultats précis même pour de très petites tailles de particules. La mécanique quantique traite de la dualité onde-particule des atomes et des molécules.

La théorie de la relativité restreinte d'Einstein(1905) traite de très petites particules, tandis que la relativité d'Einstein (1916) peut être utilisée pour étudier toutes les particules générales [3] .

Depuis Albert Einstein, elle s'est faite connaître grâce aux Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg et bien d'autres ; Ces deux théories ont profondément changé notre façon d'apprendre le monde qui nous entoure. Récemment, Bohr' a confirmé l'idée que la description de mécanique quantique de la nature peut être considérée comme complète [4]

La proposition de géométrie non commutative a été développée en 1980 par [5] et a prouvé que la géométrie non commutative serait un schéma pour étendre le modèle standard de plusieurs manières[6] , et les espace-temps non commutatifs ont été proposés dans différentes approches de la gravité quantique en tant qu'outils algébriques utiles pour décrire les scénarios de longueur minimale et le flou de l'espace-temps qui résulterait des propriétés quantiques de l'espace-temps à l'échelle de Planck [7] ,[8] .

Au cours des quinze dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour la géométrie non commutative (et/ou quantique) tant en mathématiques qu'en physique. Dans le contexte algèbre, une C*-algèbre non commutative sera maintenant considérée comme l'algèbre des fonctions continues sur un "espace virtuel non commutatif"[9] et l'idée de structure non commutative de l'espace a été suggérée par Heisenberg et plus tard formalisée par Snyder [10].

La mécanique quantique non commutative (NC), issue de la théorie des cordes [11] [12] [13], a orienté les recherches théoriques sur de nombreux sujets connexes, notamment : la théorie des matrices [14], l'effet Hall quantique [15] , la gravité quantique [16] et les règles de quantification [17] , effet Aharonov-Bohm [18] , effet Aharonov-Casher [19] et niveaux de Landau [20] . Des commentaires inestimables sur l'interface du sujet avec la théorie quantique des champs peuvent être trouvés dans les réfs [21] [11] [13] [22] [23] .

Ce travail est organisé comme suit : Dans le chapitre 2, nous présentons les formules mathématiques que nous avons utilisé dans la mécanique quantique comme la relation de fermeture , produit scalaire , relation de l'incertitude de Heisenberg, ...etc. Dans le chapitre 3 nous considérons un espace non commutatif où nous avons donné les formes de cet espace puis nous avons donné des autres formulaires dans le contexte de la longueur minimale, puis nous avons résolu l'équation de Schrödinger a 1-Dimension et 2-Dimensions dans le cas de la particule libre. Dans le chapitre 4, nous avons calculé la solution exacte de l'équation de Schrödinger dans le cas de la longueur minimale et dans l'espace non commutatif, Enfin, nous avons donné une conclusion sur notre travail qui est présenté dans le chapitre 5.

Chapter 2

Rappels mathématiques:

La mécanique classique doit être invariante sous les transformations de Galilée, cette invariance est valable pour les systèmes physiques fermés [24] , en pratique les effets des corps éloignés sont souvent négligeables et on fait l'approximation que le système est fermé.

Pour faire correspondre les structures algébriques de la mécanique classique et quantique, il faut que [25] .

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{i}{\hbar} [f \ , g]_{-}^{\hbar} = \{f \ , g\} \tag{2.1}$$

et

$$\frac{1}{2} \lim_{\hbar \to 0} [f \ , g]_{+}^{\hbar} = f \ .g \tag{2.2}$$

La mécanique quantique algébrique est une abstraction et une généralisation de la formulation spatiale d'Hilbert de la mécanique quantique due à von Neumann [26]. Tout d'abord avec Jordan and Wigner a été l'une des premières tentatives d'aller au-delà de l'espace d'Hilbert. Deuxièmement, il a fondé la théorie mathématique des algèbres d'opérateurs, ces algèbres d'opérateurs qu'il a introduites et qui sont maintenant appelées à juste titre les algèbres de von Neumann jouent toujours un rôle central dans l'approche algébrique de la théorie quantique [27].

2.1 Formalisme de la mécanique classique

2.1.1 Théorème d'Ehrenfest

Dans la mécanique classique,soit une fonction $F(q,p,t)$ de l'espace des phases, on peut associer une équation du mouvement qui s'écrit :

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t} \tag{2.3}$$

Où H est l'Hamiltonien associé au système considéré. Ces équations sont

l'équivalent classique des équations d'Heisenberg en mécanique quantique. Notons que, pour une fonction F qui ne dépend pas explicitement du temps, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \{F,H\} \tag{2.4}$$

(F ne dépend pas explicitement du temps) .

2.1.2 Crochets de Poisson

on a défini le crochet de Poisson pour trois composants f ,g , h par la formule suivante [28] :

$$\{f\ ,g\ h\} = \{f\ ,g\ \}\,h + g\,\{f\ ,h\} \tag{2.5}$$

Ou bien : on utilise la relation $(uv)' = u'v + v'u$.

Alors, par rapport à les coordonnées p et q, on a la relation suivante [28] :

$$\{f\ ,g\ h\} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}h + g\frac{\partial h}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}h + g\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)\right] \tag{2.6}$$

Crochet de Poisson pour deux fonctions$\{f,g\}$ c'est-à-dire, on fixe la fonction $h=1$, on obtient sur la formule connue comme suit [29] :

$$\{f\ ,g\ \}(p,q) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \tag{2.7}$$

Le crochet de Poisson est antisymétrique et vérifie l'identité de Leibniz et qu'il satisfait à l'identité de Jacobi selon les formules suivantes [29] :

·Antisymétrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{2.8}$$

·La règle de Leibniz :

$$\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\} \tag{2.9}$$

Où, $f, g, h \in C^{\infty}(M)$

·Identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\} \ , \ h\} + \{\{g, h\} \ , \ f \ \} + \{\{h, f\} \ , \ g\} = 0 \tag{2.10}$$

Le développement temporel du système est donné par les équations d'Hamilton, qui s'expriment facilement en termes de crochets de Poisson suivante :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2 Formalisme de la mécanique quantique:

-Les opérateurs :

Un opérateur est un objet mathématique qui agit sur une fonction et la transforme en une autre fonction. On note conventionnellement les opérateurs par un symbole alphabétique surmonté d'un accent circonflexe.

L'opérateur a transformé une fonction portée à sa droite :

$$\hat{A}\psi = \grave{\psi} \tag{2.12}$$

On distingue plusieurs types d'opérateurs :

·:Les opérateurs différentiels. Ex:$\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

· Les opérateurs multiplicatifs. Ex :$\hat{A} = \frac{1}{2}kx^2$. $\Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{1}{2}kx^2.\psi$.

· Les opérateurs vectoriels: qui transforment une fonction scalaire en fonction vectorielle.

Ex: $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}\ i^{\rightarrow} + \frac{\partial}{\partial y}\ j^{\rightarrow} + \frac{\partial}{\partial z}\ k^{\rightarrow} \Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\ i^{\rightarrow} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\ j^{\rightarrow} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\ k^{\rightarrow}$.

-Propriétés des opérateurs:

1-Produit de deux opérateurs :

l'action du produit $A.B$ de deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sur une fonction ψ s'obtient en faisant agir $\hat{B}$ puis $\hat{A}$:

$$\hat{A}.\hat{B}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \tag{2.13}$$

2-Somme de deux opérateurs :

l'action de la somme $A + B$ de deux opérateurs $\hat{A}$et $\hat{B}$ sur une fonction ψ s'obtient comme suit :

$$(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi \tag{2.14}$$

3-Linéarité : soit la combinaison linéaire $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$de deux fonctions $\psi_1$et ψ_2 . L'opérateur $\hat{A}$ est linéaire si :

$$\hat{A}\psi = a\hat{A}\psi_1 + b\hat{A}\psi_2 \tag{2.15}$$

L'opérateur $A = \frac{\partial}{\partial x}$est linéaire. L'opérateur $\hat{A} = \sqrt{}$n'est pas linéaire.

4-Hermiticité : L'opérateur Â est hermitien si :

$$\int_{espace} \psi_1^* \hat{A}\psi_2 dv = (\int_{espace} \psi_2^* \hat{A}\psi_1 dv)^* \forall \psi_1\ \psi_2 \tag{2.16}$$

En pratique, on ne manipule que des opérateurs linéaires et hermitiens.

Considérez l'opérateur $\hat{A}$ tel que $\hat{A}\ |\alpha_i\rangle$est également en H et $|\ \langle\beta|\ \hat{A}\ |\alpha\rangle$

S'il y a un autre opérateur désigné par $\hat{A}^+$ de telle sorte que:

$$\langle\hat{A}^+|\beta a\rangle = |\phi\rangle \tag{2.17}$$

Ensuite, nous disons que $\hat{A}^\dagger$est l'adjoint hermite de $\hat{A}$ (Cela ne signifie pas que Â est hermitique).

Opérateur le plus simple possible $\hat{A} = a$ (où a est un certain nombre):

$$\langle a|\beta a\rangle = \langle\beta|a\alpha\rangle = \alpha\langle\beta|\alpha\rangle = \langle a^*\beta|\alpha\rangle \tag{2.18}$$

D'où $a^\dagger\ = a^*$ c'est-à-dire que l'adjoint hermite d'un nombre complexe est son conjugué complexe.

Considérez l'opérateur :

$$\hat{D} = \langle\beta|\left|\hat{D}\alpha\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi_\beta^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x) \tag{2.19}$$

Par intégration par parties :

$$\psi_\beta^*(x)\psi_\alpha(x) \nearrow 0 \ |_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx(\frac{\partial}{\partial x}\psi_\beta^*(x))\psi_\alpha(x) \tag{2.20}$$

Les termes de surface s'annulent en raison de l'état de normalisation, donc :

$$\hat{D}^+\ = \hat{D} \tag{2.21}$$

Dans le cas particulier où [30] :

$$\hat{A}^+\ =\ \hat{A} \tag{2.22}$$

2.2.1 Opérateurs dans l'espace régulier et leurs propriétés:

Les opérateurs de position et d'impulsion introduits par Schrödinger [31] , ces opérateurs sont illimités sur l'espace d'Hilbert $L^2\ (R^3)$ et sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{q}^j &= x^j \\ \hat{p}^j &= -i\hbar\partial_x\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ces opérateurs satisfont la relation de commutation canonique suivante :

$$\left[\hat{p}_j, \hat{q}^k\right] = -i\hbar\delta_j^k \tag{2.24}$$

Les approches de quantification basées sur les relations de commutations canoniques sont généralement appelées quantifications canoniques et dans ce cadre Dirac [32] [33] a fait l'observation importante que les relations de commutations canoniques ressemblent aux crochets de Poisson en mécanique classique.. Il a suggéré qu'une carte de quantification $f \to Q(f)$ (dans laquelle une fonction f sur l'espace des phases, considérée comme un observable classique, est remplacée par un opérateur sur un espace d'Hilbert interprété comme l'observable quantique correspondant) devrait satisfaire la condition suivante [34] :

$$Q(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}\left[Q(f), Q(g)\right] \tag{2.25}$$

Cette dernière relation est bien expliquée le passage entre la mécanique classique et mécanique quantique.

Le théorème d'Ehrenfest dans la mécanique quantique est donné selon la formule suivante :

$$\frac{d\left\langle \hat{A}\right\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{A}, \hat{H}\right]\right\rangle + \frac{\partial\left\langle \hat{A}\right\rangle}{\partial t} \tag{2.26}$$

où $\hat{A}$ est un opérateur quantique quelconque et $\left\langle \hat{A}\right\rangle$ sa valeur moyenne, et $\hat{H}$ est opérateur hamiltonien.

2.2.2 Opérateurs unitaires :

Un opérateur unitaire U vérifie :

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1 \tag{2.27}$$

2.2.3 Orthonormalité :

Si la dimension de l'espace vectoriel est finie, on peut trouver un ensemble complet de vecteurs $u^{\rightarrow}$ dans le cas de notre base est u tel que :

$$u_i^{\rightarrow} \cdot u_j^{\rightarrow} = \delta_{ij} \tag{2.28}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = j \\ 0, & \text{pour } i \neq j \end{cases} \tag{2.29}$$

Pour une base orthonormée$\{|\phi_n\rangle\}$ de l'espace d'Hilbert dans le cas notre espace est de position (x) ,le produit scalaire est donné suit :

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \int \phi_n^* \phi_{n'} dx = \delta_{nn'} \tag{2.30}$$

2.2.4 Relation de complétude (fermeture):

Soit $\{|\phi_{ni}\}$ une base orthonormée dénombrable de l'espace $l^{(2)}$, alors
$\sum \mid \phi_n\rangle\langle\phi_n \mid= I_d$
et :

$$\sum_n^{\infty} \mid x\rangle\langle x \mid= I_d \tag{2.31}$$

De même, soit $\{|P_i\}$l'ensemble des vecteurs propres de l'opérateur impulsion $\hat{P}$,alors :

$$\int \mid p\rangle\langle p \mid dp = Id \tag{2.32}$$

2.2.5 L'équation de Schrödinger dépendante du temps :

Erwin Schrödinger expose les idées de Louis de Broglie les ondes de matière en posant des questions : qu'est-ce que c'est que cette onde qui n'a pas d'équation ? En effet, en général, les physiciens, normalement posant d'abord des équations, puis ils cherchent à résoudre, mais dans ce cas, au contraire de Broglie avait d'abord postulé l'existence d'une onde sans en avoir posé d'équation.

Alors à la suite de sa réflexion, Schrödinger entame sa recherche et trouve en 1925 une équation valable pour les ondes de Louis de Broglie, justifiant bien ainsi les fondamentales bases de la mécanique ondulatoire reposant sur le principe d'équivalence entre la mécanique ondulatoire et la nouvelle mécanique dite aussi mécanique quantique et déduisant avec l'utilisation des quatre équations essentielles de Maxwell sa nouvelle équation nommée sur son nom.

Le passage de la mécanique quantique relativiste s'est effectué à partir d'une généralisation de l'équation de Schrödinger à un système relativiste. L'étude d'un système microscopique est bassée sur la résolution de cette équation. L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non-relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle que l'équation de Newton, de Lagrange ou d'Hamilton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique en cherchant ce qu'on appelle la fonction d'onde ainsi le spectre d'énergie des différents états possibles.

La résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps ($H\psi = E\psi$) donne les états propres (énergie et fonction d'onde) d'un système quantique. Toutefois, un système quantique peut évoluer au cours du temps, et au lieu de s'intéresser à ses états stationnaires, on peut vouloir à écrire cette évolution temporelle. Ainsi, l'équation de Schrödinger dépendante du temps s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{2.33}$$

Maintenant, la fonction d'onde $\psi(\{r^{\rightarrow}, t\})$ dépend du temps en plus des autres variables du problème coordonnées spatiales, spins, etc. On se limite ici pour un problème unidimensionnel $(1+1)$avec une particule de masse"m" soumis à un potentiel $V(x)$,, donc l'équation (2.33) devient :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{2.34}$$

Tel que $V(x)$ est le potentiel .

2.2.6 Formalisme de Dirac et la probabilité quantique:

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'origine de la mécanique quantique à partir des travaux de physique théorique comme la découverte de la mécanique ondulatoire(L. Broglie et Schrödinger)la mécanique des matrices(M. Borne.H.K Heisenberg P Jordan) et puis dans leurs prolongement et le renforcement à partir de l'analyse d'expériences réalisées pour déterminer l'état d'un système physique capable de se représenter en plusieurs états différents(interférence entre les états quantiques par exemple) ainsi est apparue une sorte de triptyque dans l'ensemble de formulation: (la mécanique ondulatoire, la mécanique matricielle, le formalisme invariant) [35] .

En fait, on appelle généralement plusieurs bras un élément de l'espace dual $\hat{E}^{\{*\}}$de E qui est l'espace regroupant l'ensemble des fonctionnelle linéeaires sur E. Une fonctionnelle linéaire est une application linéaire qui associe un nombre complexe à un ket.Mathématiquement, la fonctionnelle ϕ se résume par la définition formelle $\phi : \left|\psi_{\{i\}}\right\rangle \to \phi\left(\left|\psi_{\{i\}}\right\rangle\right) \epsilon\, C$. A tout ket $\left|\psi_{\{i\}}\right\rangle$ il existe un bra correspondant à l'application prendre le produit scalaire avec$|\psi_i\rangle$ mais la réciproque est fausse [36] [37] [38] .

2.2.7 Base orthonormée :

une base orthonormée $\{|\phi_n\rangle\}$de l'espace d'Hilbert est une base telle que

$$\langle \phi_n|\phi_{n'}\rangle = \delta_{nn'} \tag{2.35}$$

où $\delta_{nn'}$ est symbole de Kronecke$r$.

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = n^{'} \\ 0 \text{ pour } n \neq n' \end{cases} \tag{2.36}$$

2.2.8 Représentation et écriture dans une base :

Muni du produit scalaire, on retrouve la notion naturelle de base de l'espace d'Hilbert et de décomposition d'un vecteur dans la base . Ainsi, si l'on note $\{|\,|\psi_n\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel, et que l'on décompose un ket $|\psi\rangle$dans cette base, les coefficients étant les produits scalaires $C_n = \langle\phi_n|\psi\rangle \in C$, on peut l'écrire sous la forme:

$$|\psi\rangle = \sum \psi_n\,|\phi_n\rangle = \sum_n \langle\phi_n|\psi_n\rangle\,|\phi_n\rangle \tag{2.37}$$

On dit que les $\langle\phi_n|\psi_{i'}\rangle$sont la représentation de $|\psi\rangle$dans la base des$\{|\phi_n\rangle\}$.Il n'y a rien de fondamentalement nouveau par rapport à notre notions de la mécanique : le vecteur de position r ou vitesse v sont des concepts abstraits que nous pouvons manipuler pour trouver des relations. Nous pouvons aussi choisir de travailler directement avec leurs composantes dans une base choisie correspondant à un j de coordonnées, comme $(x\ ,y\ ,z)$ (coordonnées ou représentation cartésienne(s), base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$) ou (r, θ, ϕ)(coordonnées ou représentation sphérique(s), base$\{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi}\}$) .

2.2.9 L'opérateurs dans le formalisme de Dirac:

L'opérateur est une application linéaire qui agit sur les éléments de l'espace d'Hilbert. Il transforme un ket en un autre ket et ce de manière linéaire. On lui met un chapeau pour le distinguer des nombres complexes.

on note par exemple $\hat{A}$ l opérateur de A.

Formellement comme suit: $\hat{A} : |\psi\rangle \rightarrow |A\psi\rangle \equiv \hat{A}\,|\psi\rangle \in E$.

La linéarité se traduit par la définition [36] :

$$\hat{A}\,|\alpha\phi + \beta\psi\rangle = \alpha\hat{A}|\phi\rangle + \beta\hat{A}|\psi\rangle \tag{2.38}$$

Avec le temps, il est habituel de ne plus mettre les chapeaux sur les opérateurs si l'on comprend bien ce quel'on manipule.

2.2.10 Représentation d'éléments de matrice d'un opérateur :

De mème qu'un ket, un opérateur est un objet qui contient toute l information sur la transformation linéaire. On peut manipuler les sommes, produits, inverses...

d'opérateurs de façon abstraite en appliquant les régles de l'algèbre linéaire. Si l'on souhaite travailler avec une représentation de l'opérateur: c'est-à-dire des nombres, on choisit une base$\{\phi_n\}$. La représentation de l'opérateur est alors un matrice. Comme les $\{\hat{A}|\phi_n\rangle\}$ représentent un ensemble de vecteurs colonnes, on peut les représenter en les projetant sur la base. Il est donc naturel dans les notations de Dirac, d'écrire sous la forme suivante les éléments de matrice A_{nm} associé a $\hat{A}$ dans la base$\{|\phi_n\rangle\}$:

$$A_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle \in C \tag{2.39}$$

L'encore, on retrouve des choses connues : une rotation dans l'espace à trois dimensions, qui est une opération linéaire, est représentée par une matrice de rotation dont la forme dépend de la base choisie.

2.2.11 Produit d'opérateurs :

comme ce que vous connaissez de l'algébre linéaire, composer les applications revient à les multiplier

$$\left|(\hat{A}\cdot\hat{B})\psi\right\rangle = \hat{A}\left|\hat{B}\psi\right\rangle = \hat{A}\left(\left|\hat{B}\psi\right\rangle\right) = \hat{A}\hat{B}\left|\psi\right\rangle \tag{2.40}$$

Le symbole du produit est souvent écrit de façon implicite, on note juste les opérateurs a la suite. Attention, comme pour les matrices, ce produit est en géenéral non-commutatif, c'est-à-dire que l'ordre des opérateurs compte, on verra des conséquences importantes pour la physique.

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} \tag{2.41}$$

Nous notons que les trois opérateurs $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont vérifiés les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\hat{C} &= \alpha\hat{A}\hat{C} + \beta\hat{B}\hat{C} \\
(\alpha\hat{A})(\beta\hat{B}) &= \alpha\beta A(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\hat{C} = \alpha\hat{A}\hat{C} + \beta\hat{B}\hat{C} \\
[\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où $\alpha, \beta \in C$

La formule de Glauber est donnée sous la forme suivante :

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.43}$$

2.2.12 Opérateurs nul et identité:

Ils sont notés souvent 0 et 1 respectivement , tels que

$$\begin{aligned}
\hat{A} + 0 &= \hat{A} \\
\hat{A}0 &= 0\hat{A} = 0 \\
\hat{A}^* &= \hat{A}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Avec le temps, l'opérateur identité est noté 1 ou même omis lorsqu'il est multiplié par des constantes, comme dans l'expression:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \to [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{2.45}$$

2.2.13 Opérateur adjoint :

L'opérateur adjoint de $\hat{A}$ est celui qui va agir dans l'espace des bras (espace dual) pour transformer le bra correspondant a un ket en le bra correspondant au ket transformé. Il est noté $\hat{A}^\dagger$ donc formellement défini par:

$$\hat{A}^\dagger \ : \langle\psi| \to \left\langle \hat{A}\psi \right| = \langle\psi| \, \hat{A}^\dagger \ \in E^*. \tag{2.46}$$

On obtient alors facilement la représentation de cet opérateur en fonction de celle de $\hat{A}$. La matrice associée a $\hat{A}^\dagger$est l'hermitienne conjuguée de celle de $\hat{A}$, c'est-'a-dire qu'on prend la transposée de$[A_{nm}]$ puis le complexe conjugué de chaque élément. Ainsi, on a la relation :

$$\hat{A}^\dagger_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}^\dagger|\phi_m\rangle = \langle\phi_m|\hat{A}^\dagger|\phi_n\rangle^* = A^*_{mn}. \tag{2.47}$$

Cela est transparent lorsqu'on l´ecrit avec les notations de Dirac :

$$\langle\phi_n|\hat{A}^\dagger|\phi_m\rangle = \langle A\phi_n|\phi_m\rangle = \langle\phi_m|A\phi_n\rangle^* = \langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle^* \tag{2.48}$$

2.2.14 Relations de fermeture :

si l'on étend le sous-espace précédent a toute une base orthonormée de l'espace d'Hilbert, on obtient que le projecteur est l'identité. Cela s'écrit sous la forme suivante

$$\sum |\phi_n\rangle \langle\phi_n| = 1 \tag{2.49}$$

2.2.15 Les Représentations:

L'opérateur du spin $\frac{1}{2}$ agit sur un espace d'Hilbert de dimension 2, correspondant aux deux états de spin orthogonaux : les kets $|+i\rangle$ (spin up $\uparrow$) et $|-i\rangle$ (spin down $\downarrow$) forment une base

orthonormale, complète, de l'espace d'Hilbert de spin :

$$S_z |s\rangle = s\frac{\hbar}{2} |s\rangle \langle \, s|s'\rangle = \delta_{ss'} \quad \sum_s |s\rangle \langle s| = 1 \quad s = \{+, -\} \tag{2.50}$$

Dans le cas de l'opérateur de position $\hat{X}$, le spectre est continu :

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle , x \in R \tag{2.51}$$

que chaque point x correspond à un état quantique de position $|x\rangle$ différent. Les conditions d'orthonormalitéet de complétude de la base s'écrivent alors:

$$\langle \, x|x'\rangle = \delta(x - x') \qquad \int dx |x\rangle \langle x| = 1 \tag{2.52}$$

où la somme a été remplacée par une intégrale est ce delta de Kronecker par celle de Dirac.

- Un état $|\psi_i\rangle$ dans l'espace d'Hilbertd'une particule dans un potentiel, peut donc s'écrire comme superposition des états $|x\rangle$, de la base position :

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle \, x|\psi\rangle \qquad \langle \, x|\psi\rangle = \psi(x)\epsilon C \tag{2.53}$$

où les coordonnées $\psi(x)$ sont les amplitudes de probabilité ou simplement, la fonction d'onde de la particule dont la valeur absolue au carré donne la densité de probabilité de la position .

2.2.16 La fonction Delta de Dirac:

$\delta(x)$ est une disrebution centrée $\delta(x)$ selon la relation :

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ pour } -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases} \tag{2.54}$$

$\delta(x)$ est vérifié les propriétés suivantes :

$$\int \delta(x-x_0)dx = 1$$
$$\int f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$
$$TF\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.55}$$

2.3 La probabilité quantique:

Lorsqu'on mesure la grandeur physique A sur un système dans l'état normé $|\psi\rangle$, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme le résultat de la valeur propre a_n de l'observable A

correspondante vaut:

$$P(a_n) = \sum_i^{gn} \left|\langle|u_n^i|\psi\rangle\right|^2 = \sum_i^{gn} |C_n^i|^2 \tag{2.56}$$

car $\quad |\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{gn} C_n^i |u_n^i\rangle$

$g_n$est le degré de dégénérescence de a_n.

$\{|u_n^i\rangle\}(i = 1, 2, \ldots\ldots, g_n)$ est un système orthonormé de vecteurs propres associé à a_n sous-tendant le sous-espace ξ_n.

Si $g_n = 1$ (le spectre discret est non dégénéré), alors :

$$P_n(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |C_n|^2 \tag{2.57}$$

où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normé de A associé à a_n.

Si le spectre est continu et non dégénéré : La probabilité $P(\alpha)$ d'obtenir un résultat compris entre α et $\alpha + d\alpha$ vaut :

$dP(a) = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2$ où $|v_\alpha\rangle$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre α de l'observable A associée à la grandeur physique A.

Autre écriture de $P(a_n)$:

$$P(a_n) = \langle\psi|P_n|\psi\rangle \tag{2.58}$$

où P_n est le projecteur sur le sous-espace ξ_n.

$$P_n = \sum_i^{gn} \left|u_n^i\right\rangle \left\langle u_n^i\right| \tag{2.59}$$

2.4 Relation d'incertitude en forme générale :

La relation inégalité qui liée entre Δx et Δp elle a établi par Heisenbegpour déterminer relation, nous utilisons la fonction suivante :

on a :

$$\phi(x) = (x + ikp)\psi(x) \tag{2.60}$$

oũ k est un paramètre réel donc :

$$\langle\phi|\phi\rangle = \int \phi^*(x)\phi(x)dx \tag{2.61}$$

maintenant on remplace la dernière relation on obteint :

$$\langle\phi|\phi\rangle = \int \phi^*(x)(x - ikp)(x + ikp)\phi(x)dx \tag{2.62}$$

$$= \int \phi^*(x)\left[x^2 + ikxp - ikxp + k^2p^2\right]\psi(x)dx \tag{2.63}$$

$$= \int \psi^* x^2\psi(x)dx + k^2 \int \psi^*(x)p^2\psi(x)dx + ik \int^* \psi\,[x,p]\,\psi(x)dx \tag{2.64}$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = k^2 \left\langle p^2\right\rangle + i\left\langle [x,p]\right\rangle k + \left\langle x^2\right\rangle \tag{2.65}$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = \left\langle p^2\right\rangle k^2 + i\left\langle [x,p]\right\rangle k + \left\langle x^2\right\rangle \ \geq 0 \tag{2.66}$$

parce que le produit scalaire $\langle\phi|\phi\rangle$ est positif ou nul .

cette dernière relation est une équation de deuxième degré, quand on la résoudre, ont obteint comme suit :

$$\left\langle p^2\right\rangle k^2 + i\left\langle [x,p]\right\rangle k + \left\langle x^2\right\rangle = 0 \tag{2.67}$$

Dans ce cas, selon le signe de déterminan Δ nous avons trois cas :

-1$^{\text{er}}$cas $\Delta = 0$:on a une solution doublée réelle.

-2$^{\text{eme}}$cas $\Delta \rangle\ 0$: on a deux racines complexes conjuguées.

-3$^{\text{eme}}$cas $\Delta \langle\ 0$: on'a pas de solution réelle.

L'incertitude de relation d'Heisenberg est réalisé pour le troisième cas où $\Delta \langle\ 0$ on a :

$$\Delta = -\langle[x,p]\rangle^2 - 4\left\langle p^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\langle 0. \tag{2.68}$$

$$\Rightarrow -\langle[x,p]\rangle^2 - 4\left\langle p^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\langle 0.$$

$$\Longrightarrow -4\left\langle p^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\ \langle\langle[x,p]\rangle \tag{2.69}$$

$$\Longrightarrow -\left|4\left\langle p^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\right|\ \geq |\langle[x,p]\rangle|^2 \tag{2.70}$$

$$\Longrightarrow \left|\left\langle p^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\right|\ \geq \frac{1}{4}|\langle[x,p]\rangle|^2 \tag{2.71}$$

On a : $\Delta x = \sqrt{(x-\langle x\rangle)^2} = \langle x'^2\rangle \quad \Longrightarrow (\Delta x^2) = \langle x'^2\rangle$.
$\Delta p = \sqrt{(p-\langle p\rangle)^2} = \sqrt{\langle p''^2\rangle} \quad \Longrightarrow (\Delta p^2) = \langle p'^2\rangle$.
donc :

$$\Longrightarrow \left|\left\langle p'^2\right\rangle\left\langle x'^2\right\rangle\right|\ \geq \frac{1}{4}|\langle[x,p]\rangle|^2 \tag{2.72}$$

Et ainsi que nous avons :

$$\langle\Delta A\rangle = A - \langle A\rangle \Longrightarrow \langle\Delta A\rangle = 0 \Longrightarrow \langle\Delta A\rangle^2 = 0$$
$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle = \left\langle A^2 - 2\langle\Delta A\rangle + \left\langle A^2\right\rangle\right\rangle = \left\langle A^2\right\rangle - \langle A\rangle^2 = \left\langle A^2\right\rangle$$
donc
$$\langle\Delta x\rangle^2 = \left\langle x'^2\right\rangle\ = \left\langle x^2\right\rangle \text{ et } \langle\Delta p\rangle^2 = \left\langle p'^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle \tag{2.73}$$

on remplace la dernière relation (2.79) dans l'équation (2.78) on trouve la relation d'incertitude comme suit :

$$\langle\Delta x\rangle\ \langle\Delta p\rangle \geq \frac{1}{2}|\langle[x,p]\rangle| \tag{2.74}$$

Cas particulier: dans l'espace ordinaire:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.75}$$

2.5 Opérateurs de créations $\hat{a}^+$ et d'annulations $\hat{a}$ dans l'espace régulier:

États cohérents de l'oscillateur harmonique:

Dans cette partie, le concept d'états cohérents sera introduit. Tout d'abord, nous allons étudier l'oscillateur harmonique en MQ. Il s'avérera que les états cohérents représentent les équations du mouvement de l'oscillateur harmonique classique. Les quantités suivantes sont appelées opérateurs d'échelles :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,(ip + m\omega x) \tag{2.76}$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,(-ip + m\omega x) \tag{2.77}$$

Ici l'opérateur $\hat{a}^+$ est appelé opérateurs de créations et $\hat{a}$ d'annihilation sont des opérateurs mathématiques qui ont des applications répandues dans la mécanique quantique, notamment dans l'étude des oscillateurs harmoniques quantiques et des: systèmes à particules nombreuses.

Le commutateur d'un $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$ peut être calculé directement à partir de leur définition:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = \frac{i}{\hbar}\,[p, x] = 1 \tag{2.78}$$

on rappelle que dans l'espace ordinaire, les opérateurs de position $\hat{x}$ et d'impulsion $\hat{p}$ dans le cas de l'isolateur harmonique sont donnés en fonction des opérateurs de créations $\hat{a}^+$ et d'annulations $\hat{a}$ par la formule suivante:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^+ + \hat{a}\right) \tag{2.79}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right) \tag{2.80}$$

m est la masse de particules [39] .

$\hat{a}^+$ est l'opérateur création, il fait passer le système d'un état $|\psi\rangle$ d'énergie E_n à un état $|\psi_{n+1}\rangle$ d'énergie $E_n + \hbar\omega$.

a est l'opérateur annihilation, il fait passer le système d'un état $|\psi\rangle$ d'énergie E_n à un état $|\psi_{n-1}\rangle$ d'énergie $E_n - \hbar\omega$.

Les mathématiques pour les opérateurs de création et d'annihilation pour bosons sont les mêmes que pour les opérateurs d'échelles de l'oscillateur harmonique quantique d'un système de bosons identiques en nombre indéterminé. On introduisit deux opérateurs $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^+$ associé à l'état $|u_i\rangle$ de la base de H. Leur action sur un état de la base nombre d'occupation de n_i est définie par:

$$\hat{a}_i^+ |n_1, n_2....n_i...\rangle = \sqrt{n_{i+1}} |n_{1,} n_2, ...n_{i+1}\rangle \tag{2.81}$$

$$\hat{a}_i |n_1, n_2....n_i...\rangle = \sqrt{n_i} |n_{1,} n_2, ...n_{i-1}\rangle \tag{2.82}$$

Ainsi, l'opérateur compte le nombre des particules dans l'état $|u_i\rangle$

$$N_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \tag{2.83}$$

L'opérateur de nombre total des particules est donné par:

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \tag{2.84}$$

On peut également établir les relations de commutation:

Dans la dernière de ces équations, on a sous-entendu dans le membre de droite l'opérateur identité de l'espace de Fock $H_\lambda \infty$. Ces relations de commutation sont caractéristiques d'une assemblée d'oscillateurs harmoniques.

Pour calculer les relations de commutation de l'opérateur nombre de particules avec les créateurs et annihilateurs, on utilise l'identité suivante, ou $\hat{A}$,$\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont trois opérateurs:

$$[AB, C] = A [B, C] + [A, C] B \tag{2.85}$$

On déduit les relations:

$$\left[N, \hat{a}_i^+\right] = \sum_j \left[\hat{a}_i^+ \hat{a}_i, \hat{a}_i^+\right] = \sum_j \left(\hat{a}^+ j \left[\hat{a}_i, \hat{a}_i^+\right] + \left[\hat{a}_j^+, \hat{a}_i^+\right] \hat{a}_j\right) = \hat{a}_i^+ \tag{2.86}$$

Cette relation de commutation avec l'opérateur nombre de particules $\hat{N}$ est caractéristique d'un opérateur qui augmente le nombre de particules d'une unité Pour l'opérateur $\hat{a}_i$, qui diminue le nombre de particules d'une unité,on obtient:

$$[N, \hat{a}_i] = -\hat{a}_i \quad \text{et} \qquad \left[N, \hat{a}_i^+\right] = \hat{a}_i^+ \tag{2.87}$$

2.6 Équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger en 1925, et été publiée dans quatre articles en 1926 un peu après la mécanique des matrices de Heisenberg (1925) et s'est développé d'abord dans le but de décrire les petits objets (atomes) constitués d'une seule particule située dans un certain champ de force (l'électron au sein de l'atome d'Hydrogène, par exemple). L'objet central de la théorie de Schrödinger, nommée aussi mécanique ondulatoire, est une fonction $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ valeurs complexes, appelée fonction d'onde.

Cette fonction satisfait :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\overrightarrow{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v(r)\right]\psi(\overrightarrow{r}, t) \tag{2.88}$$

L'équation (eq1) est une équation aux dérivées partielle du premier ordre par rapport au temps et second ordre par rapport aux cordonner de l'espace ordinaire, cette équation jouent un rôle fondateur en mécanique quantique par analogue à l'équation de Newton en mécanique classique et les équations de Maxwell en électromagnétisme.

En mécanique quantique, l'évolution au cours du temps de l'état d'un système quantique (atome, photon) est d'écrite par l'équation de Schrödinger. Comme les équations de la mécanique classique, l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées déterministe. Parfois, en mécanique classique.

- Cette équation est postulée (tout comme, par exemple l'équation de Schrödinger). Sa validité est prouvée par les conséquences que l'on peut en tirer.

- L'équation de Schrödinger est une équation au premier ordre par rapport au temps. la connaissance de $\psi(r, t = 0)$ suffit pour déterminer l'évolution de $\psi(r, t)$.

En effet, dans l'approche probabiliste de Borne, ψ permet de trouver la probabilité de trouver la particule de r en tout temps. La connaissance seule de $\psi(r, t = 0)$ doit donc suffire pour déterminer l'évolution.

- Les équations de Schrödinger dependent du temps sont des équations différentielles du premier ordre.

- L'équation de Schrödinger est homogène est linéaire. si ψ_1 et ψ_2 en sont des solutions, alors

$$\psi_3(r, t) = \alpha\ \psi_1(r, t) + \beta\ \psi_2(r, t)$$

$\psi_3(r, t)$ Est aussi solution de l'équation de Schrödinger.

- La fonction d'onde est dite normalisée si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r\ \psi^*\ \psi = 1$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger d'un système quantique sont appelées les fonctions d'ondes, elles peuvent être considérées comme un postulat quantique qui décrit l'état quantique d'une particule et contient tout les informations qu'on veut connaitre du système. Cette fonction satisfaisait les conditions suivantes :

- Elle doit être normalisée. Cela implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme r approche à l'infinie c'es-à-dire :

$$\int \psi^*\ \psi\ d^3r = \int |\psi|^2\ \ d^3r = 1$$

C'est la condition de normalisation, cette relation montre que $\psi(r, t)$ est interprétée comme une amplitude de probabilité de présence d'une particule à la position r à l'instant t . La probabilité de trouver la particule dans tout l'espace, à l'instant t, est égale à l'unité.

Avec$|\psi(r, t)|^2$ est la densité de probabilité.

- La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues dans tout l'espace.

Chapter 3

Solution de l'équation de Schrodinger de la particle libre:

Nous allons traiter problème de résoudre l'équation de Schrodinger selon la dimention de l'espace 1-D ou 2-D , et aussi selon le choix du potentiel vectoriel $V(x)$ pour 1-D ou $V(x, y)$ pour 2-D.

Dans ce chapitre on va résoudre l'équation de schrödinger dans diffirentes cas selon le dimention de l'espace ordinaire . Nous avons pour le premier cas , nous traitons le problème dans le cas le potentiel véctoriel est nul, c'est-à-dire la particle libre avec 1-dimension (1-D), et pour le deuxième cas nous traitons le problème dans le cas le potentiel véctoriel est nul dans 2-dimensions (2-D).

3.0.1 La particule libre pour 1-D où ($V(x) = 0$)

On pose dans cette section ($\hbar = c = 1$)

Dans le cas de la particule est libre, , l'Hamiltonien $\hat{H}$ est défini par la relation suivante:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{3.1}$$

où

$$\hat{p} = -i\frac{d}{dx} \tag{3.2}$$

On a l'équation deSchrödinger comme suit :

$$\hat{H}\psi\left(x,t\right)=E\psi\left(x,t\right) \tag{3.3}$$

On introduit le formalisme précédent réel.(3.1), (3.2) , on obtient comme suit:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi\left(x,t\right)=E\psi\left(x,t\right) \tag{3.4}$$

Pour simplifier les calcules, on choisit $\hat{p}^2=\hat{p}_x^2$ et ainsi qu'on introduit le cas stationnaire suivant: en posant:

$$\psi\left(x,t\right)=\phi\left(x\right)\exp\left(-iEt\right) \tag{3.5}$$

Dans ce cas, on obtient sur l'équation différentielle selon la formule suivante:

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi\left(x\right)+2mE\phi\left(x\right)=0 \tag{3.6}$$

Cette équation différentielle est deuxième d'ordre et linéaire, la solution générale est donnée par la formule exceptionnelle suivante:

$$\phi\left(x\right)=C_1\exp(i\sqrt{2mE}x) \tag{3.7}$$

où C_1 est la constante de normalisation.

Pour calculer le spectre d'énergie on choisit la condition suivante:

$\phi(x=\pi)=0$, maintenant on remplace cette condition dans la solution précédente, on trouve:

$$A\cos(\sqrt{2mE}\pi)+iA\sin(\sqrt{2mE}\pi)=A\cos(n+\frac{1}{2})\pi \tag{3.8}$$

On déduit le spectre d'énergie E_n dans ce cas comme suit:

$$E_n=\frac{1}{2m}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{3.9}$$

3.0.2 Equation de Schrodinger de la particule libre pour 2-D où ($V(x,y)=0$)

Dans le cas de la particule est libre , l'Hamiltonien $\widehat{H}$ en $2D$ est défini par la relation suivante:

$$\widehat{H}=\frac{\widehat{p}^2}{2m}=\frac{\widehat{p_x}^2+\widehat{p_y}^2}{2m} \tag{3.10}$$

On a l'equation de Shrödinger comme suit :

$$\widehat{H}\Psi(x,y,t)=E\Psi(x,y,t) \tag{3.11}$$

et

$$\frac{\widehat{p}^2}{2m}\Psi(x,y,t)=\left[\frac{\widehat{p_x}^2+\widehat{p_y}^2}{2m}\right]\Psi(x,y,t)=i\frac{d}{dt}\Psi(x,y,t) \tag{3.12}$$

si on utilise le cas stationnaire , on a :

$$\Psi(x,y,t)=\Phi(x,y,t)e^{-iEt} \tag{3.13}$$

donc :

$$\left[\frac{\widehat{p_x}^2+\widehat{p_y}^2}{2m}\right]\Phi(x,y,t)=E\Phi(x,y,t) \tag{3.14}$$

nous avons aussi :

$$\begin{cases}\widehat{p_x}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\\ \widehat{p_y}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\end{cases} \quad \text{on pose } \hbar=c=1 \text{ ,} \tag{3.15}$$

$$\begin{cases}\widehat{p_x}=-i\frac{\partial}{\partial x}\\ \widehat{p_y}=-i\frac{\partial}{\partial y}\end{cases} \tag{3.16}$$

On remplace la relation (3) dans eq.(2) , on trouve comme suit :

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\Phi(x,y)=-2mE\Phi(x,y) \tag{3.17}$$

Pour résoudre l'equation (4), nous utilisons la méthode de séparation des variables :

On pose

$$\Phi(x,y)=f(x)g(y) \tag{3.18}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2} = g(y)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \end{array} \right. \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{f(x)g(y)}\left\{\left\{g(y)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x)\frac{d^2 g(y)}{dy^2}\right\} f(x)g(y) + 2mEf(x)g(y)\right\} = 0$$

Il est sufisant on écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (mE - \lambda)\, f(x) = 0 \\ \frac{d^2 g(y)}{dy^2} + (mE + \lambda)\, g(y) = 0 \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Les deux équations sous la forme ,

$$y'' + ay = 0 \tag{3.21}$$

alors,

$$\Phi(x) = C \exp\left\{i\left[(\sqrt{mE - \lambda})x + (\sqrt{mE + \lambda}y\right]\right\} \tag{3.22}$$

où C est la constante de normalisation de la fonction $\Phi(x)$.
Par calculer le spectre d'énergie , on choisit la condition suivant:

$$\Phi\left(x = \pi, y = \pi\right) = 0 \tag{3.23}$$

après les calcules on obtient le spectre d'énergie selon la forme suivante :

$$E = \frac{1}{4m}(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{m(n + \frac{1}{2})^2}\lambda^2 \tag{3.24}$$

Chapter 4

L'équation de Schrödinger avec la présence le Potentiel Véctoriel

Dans ce chapitre on va résoudre l'équation de schrodinger dans diffirentes cas selon le potentiel choisi ou l'agèbre choisi. Nous avons dans premier cas on va résoudre l'équation de schrodinger dans l'éspace déformé ou le potentiel véctoriel $V(x)$ est linéaire dans (1-D), et dans la dernire séction on vas traiter le même problème mais dans l'espèce non-commutative avec le potentiel véctoriel $V(x,y)$ est linéaire dans (2-D). Dans ce contexte on va présenter les formalisemes des algèbres utilisé dans notre calcules

Formalisme algèbrique utilisé

Dans cette séction, nous présontons les formèles algèbrique qui nous allons utilisé dans notre calcules, nous avons dans le premier cas l'algèbre de généralistion de l'incertitude de Heisenberg (GIH) avec les paramètres de déformation de l'éspace.

dans le deuxième cas nous présontons les formèles algèbrique de l'éspèce nos commutative qui construit de généralisation de l'opérateur de position X .

4.1 Representation (GIH) dans l'espace d'impulsion :

On considère l'algèbre associative de Heisenberg engendrée par x et p obéissant à la relation de commutation suivante:

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar\left(1+\beta p^{2}\right) \tag{4.1}$$

with $\beta \rangle 0$
La relation d'incertitude correspondante est

$$\Delta X\Delta P\geq\ \frac{\hbar}{2}\left[1+\beta\left(\Delta P\right)^{2}+\beta\left\langle P\right\rangle^{2}\right] \tag{4.2}$$

L'incertitude de position minimale est

$$\Delta X_{\min}\left(\left\langle P\right\rangle\right)\geq\ \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\beta\left\langle P\right\rangle^{2}} \tag{4.3}$$

Le produit scalaire definie par :

$$\left\langle\psi\ \phi\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^{2}}\psi^{*}\left(p\right)\phi\left(p\right) \tag{4.4}$$

Le produit scalaire des états propres d'impulsion p est :

$$\left\langle P\ P^{'}\right\rangle=\left(1+\beta p^{2}\right)\delta\left(P-P^{'}\right) \tag{4.5}$$

pour l'algebre de (3+1) dimensions, le développement du domaine de recherche lié au problème du minimum d'incertitude pour les systèmes quantiques relativistes et non relativistes a été principalement réalisé par [11] qui ont établi des relations de commutation généralisées selon les dimensions de l'espace de représentation des impulsions. La généralisation 3D du QM introduite dans la sous-section précédente par rapport à la relation de commutation de l'algèbre de Kempf déformée en trois dimensions prend la forme tensorielle suivante [40] :

$$[X_{i},P_{j}]=i\hbar[\delta_{ij}(1+\beta P^{2})+\beta^{'}p_{i}p_{j}], \tag{4.6}$$

$$[X_i, X_j] = -i\hbar[2\beta - \beta^{'} + (2\beta + \beta^{'})\beta P^2]\epsilon_{ijk}L_k, \tag{4.7}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{4.8}$$

où β , $\beta^{'}$et γ sont de très petits paramètres non négatifs.

À partir des relations de commutation généralisées au-dessus des opérateurs de position et d'impulsion dans l'espace des impulsions, on définit la forme suivante

$$X_i = i\hbar[(1 + \beta P^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta^{'} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i] \qquad , \quad \widehat{P}_i = p_i. \tag{4.9}$$

L'opérateur de moment cinétique est donné dans cette représentation par

$$L_i = (1 + \beta P^2)^{-1}\epsilon_{ijk}X_j P_k \qquad\qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.10}$$

Le (2.93) satisfait la relation de commutation bien connue comme suit

$$[L_i, X_j] = ih\epsilon_{ijk}X_k \qquad , \qquad [L_i, P_j] = ih\epsilon_{ijk}P_j. \tag{4.11}$$

Nous pouvons exprimer la forme modifiée de GUP (2.75) comme

$$\triangle X_i \triangle P_i \geq \frac{\hbar}{2}[1 + 3\beta(\triangle P_i)^2 + \beta^{'}(\triangle P_i)^2]. \tag{4.12}$$

Comme pour la relation d'incertitude minimale généralisée en 3D (2.79), l'incertitude minimale de la position est isotrope

$$(\triangle X)_{\min}(\langle p\rangle) = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}. \tag{4.13}$$

La relation de complétude (2.86) dans l'espace des impulsions devient

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{\left([1 - (\beta + \beta')p^2]^{1-\frac{\gamma-\beta'}{\beta+\beta'}}\right)} \mid p\rangle\langle p \mid . \tag{4.14}$$

Enfin, le produit scalaire dans (2.85) devient

$$\langle\psi \mid \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{[1 - (\beta + \beta')p^2]^{1-\frac{\gamma-\beta'}{\beta+\beta'}}}\psi^*(p)\varphi(p). \tag{4.15}$$

4.2 Algèbre de Heisenberg généralisé (AHG)

Dans la mécanique quantique, le premier a été proposé cette algèbre par A.Kempf pour modification la relation d'incertitude de Heisenberg. Cette algèbre est défini comme suit [40]

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\left[\delta_{ij} + \beta\hat{p}^2\delta_{ij} + \beta^{'}\hat{p}_i\hat{p}_j\right] \tag{4.16}$$

Où les paramètres $\beta, \beta^{'}$ sont paramètres positives .

selon la relation 4.16 la relation de commutation entres les opérateurs de position $\hat{X}_i, \hat{X}_j$ est défini par :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar\frac{\left(2\beta - \beta^{'}\right) + \left(2\beta + \beta^{'}\right)\beta\hat{p}^2}{1 + \beta\hat{p}^2}\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i \tag{4.17}$$

les opérateurs de position $\hat{X}_i$ et impulsion $\hat{P}_i$ sont répresenté dans l'espace d'impulsion par la formule suivante:

$$\begin{cases} \hat{X}_i = i\hbar\left[\left(1+\beta p^2\right)\partial_{p_i} + \beta^{'}p_ip_j\partial_{p_j} + \beta^{'}p_ip_j + \gamma p_i\right] \\ \hat{P}_i = p_i \end{cases} \tag{4.18}$$

4.3 Representation Algèbrique dans l'espace Non-Commutative

Les espaces non commutatifs peuvent être réalisés comme des espaces où l'opérateur de coordonnées x^{μ} satisfait les relations de commutation

$$[x^{\mu}, x^{\gamma}] = i\theta^{\mu\gamma} \tag{4.19}$$

où $\theta^{\mu\gamma}$ est un tenseur antisymétrique et est de dimension spatiale (length)^2.

L'algèbre commutative des fonctions avec le produit usuel $f(x)g(x)$ est remplacée par le *-produit Algèbre de Moyal.

$$(f * g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2}\theta_{\mu\gamma}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\gamma}\right] f(x)g(y)\,|_{x=y} \tag{4.20}$$

Dans le cas où $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, la mécanique quantique non commutative est :

$$H(\hat{p}, \hat{x}) * \psi(\hat{x}) = E\psi(\hat{x}) \tag{4.21}$$

réduit à l'habituel et décrit par

$$H(\hat{p}, \hat{x})\,\psi(\hat{x}) = E\psi(\hat{x}) \tag{4.22}$$

Where

$$\hat{X}_i = x_i - \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}p_j \qquad , \quad \hat{P}_i = p_i \tag{4.23}$$

Les nouvelles variables satisfont les relations de commutation canoniques usuelles :

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad , \; [p_i, p_j] = 0 \qquad , \qquad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{4.24}$$

4.3.1 Algèbre non-commutative utilisé et sa propriété:

Dans cet espace, il y a deux cas selon notre choix , on a l'espace de position et l'espace d'impulsion.

Dans l'espace d'impulsion:

À partir de la relation de commutation dans l'espace non-commutative $\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}$ et dans l'espace d'impulsion, les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sont donnés comme suit [18] :

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= \hat{p}_i \\ \hat{X}_i &= \hat{x}_i - \frac{\hbar}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j \end{aligned} \tag{4.25}$$

Considérons l'algèbre d'Heisenberg associative générée par les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$, satisfaisant à la relation de commutation :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{4.26}$$

Dans l'espace de position

on va définir pour l'espace de la position dans le cadre du principe d'incertitude généralisée nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= \hat{x}_i \\ \hat{P}_i &= f\ (\hat{p}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

où $\hat{x}$ est $\hat{p}$ sont les opérateurs habituels de la mécanique quantique vérifiant la relation de commutation suivante:

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{4.28}$$

et $f\ (\hat{p})$ est une fonction injective qui se choisie (où vérifie notre algèbre $\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$) selon la forme suivante :

$$f\ (\hat{p}) = \hat{p}_i + \frac{\hbar}{2}\mu_{ij}^2\hat{x}_i \tag{4.29}$$

et aussi les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ vérifiant la relation de commutation suivante:

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} f^{\ '}(\hat{p}) \tag{4.30}$$

En tenant compte du fait que :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \tag{4.31}$$

Ce choix actuel convient à une longueur minimale. Et selon les relations (2.120) et (2.121) on choisit les deux opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ selon la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= \hat{x}_i \\ \hat{P}_i &= \hat{p}_i + \frac{\hbar}{2}\mu_{ij}^2\hat{x}_i \end{aligned} \tag{4.32}$$

où μ_{ij} est un paramètre de l'espace non-commutative.

Relation d'incertitude dans l'espace non-commutative

L'incertitude d'Heisenberg $\Delta x \Delta p$ dans notre espace déformé est calculé selon la manière suivante:

à partir de la relation d'incertitude d'Heisenberg généralisée suivante:

$$\langle \Delta x \rangle \ \langle \Delta p \rangle \geq \frac{1}{2} \left| \langle [x, p] \rangle \right| \tag{4.33}$$

et dans notre espace déformé on a :

$$\left[\hat{X}, \hat{P} \right] = i\hbar \tag{4.34}$$

on remplace cette dernière relation(4.34) dans l'équation (4.33) , on obtient comme suit:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{4.35}$$

où $\Delta p = p - \langle p \rangle$.

4.4 L'équation de Schrödinger avec l'algèbre de Heisenberg généralisé (AHG) :

on va étudier l'oscillateur harmonique à une dimension $(1+1)$ est constitué par une particule de masse et potentiel vectoriel linéaire $V(x)$ où:

$$V(x) = \alpha_1 X \tag{4.36}$$

L'algèbre de Heisenberg modifie est donnée par la relation de commutation suivante :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j \right] = i\hbar \left[\delta_{ij} + \beta \hat{p}^2 \delta_{ij} + \beta' \hat{p}_i \hat{p}_j \right] \tag{4.37}$$

où les paramètres β, β' sont paramètres positives .

cette modification de l'algèbre de Heisenberg est donnée le nouveau commutateur entre les deux opérateurs de position $\hat{X}_i$, $\hat{X}_j$ comme suit :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar \frac{\left(2\beta - \beta^{'}\right) + \left(2\beta + \beta^{'}\right)\beta\hat{p}^2}{1 + \beta\hat{p}^2}\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i \tag{4.38}$$

les opérateurs de position $\hat{X}_i$ et impulsion $\hat{P}_i$ sont réprésenté dans l'espace d'impulsion par la formule suivante:

$$\begin{cases} \hat{X}_i = i\hbar\left[\left(1 + \beta p^2\right)\partial_{p_i} + \beta^{'} p_i p_j \partial_{p_j} + \beta^{'} p_i p_j + \gamma p_i\right] \\ \hat{P}_i = p_i \end{cases} \tag{4.39}$$

Dans le cas particulier on va choisir $\beta = \beta^{'} = 0$, dans ce chois l'algèbre(4.39) est modifie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{X}_i = i\hbar\left[\partial_{p_i} + \gamma p_i\right] = x_i - \lambda p_i \\ \hat{P}_i = p_i \end{cases} \tag{4.40}$$

où, on change $i\hbar\gamma$ par λ c'est-à-dire $i\hbar\gamma \to -\lambda$

L'équation de Schrödinger à une dimension $(1+1)$ est définié comme suit

Ce qui donne :

$$\hat{H}\psi_1(x,t) = \left[\frac{p_x^2}{2m} + V\left(X\right)\right]\psi_1(x,t) = i\frac{d}{dt}\psi_1(x,t) \tag{4.41}$$

on introduit l'état stationnaire suivante:

$$\psi_1(x,t) = \phi_3\left(x\right)\exp\left(-iEt\right) \tag{4.42}$$

On obtient sur l'équation indépendente du temps comme suivante:

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + \alpha_1\left(x - \lambda p_x\right)\right]\phi_3\left(x\right) = E\phi_3\left(x\right) \tag{4.43}$$

Maintenant, on remplace l'algèbre (4.40) dans Eq.(4.43), on obtient une equation diférentielle ordinaire de deuxième ordre comme suit :

$$\left[\partial_x^2 - 2i\alpha_1\lambda m\partial_x - 2\alpha_1 m x + 2mE\right]\phi_3\left(x\right) = 0 \tag{4.44}$$

pour résoudre l'équation différentille Eq.(4.44), on utilise la formule suivante :

$$\phi_3\left(x\right) = f_3\left(x\right)\exp\left\{B_1 x\right\} \tag{4.45}$$

Cette formule Rel.(4.45) permete d'élimination la partie imaginaire dans l'éq (4.44) , et pour cela après de remplacer cette formule Rel.(4.45), on obtient comme suit:

$$\left[\partial_x^2 + (2B_1 - 2i\alpha_1\lambda m)\,\partial_x - 2\alpha_1 mx + (B_1)^2 - 2i\alpha_1\lambda m B_1 + 2mE\right] f_3(x) = 0 \tag{4.46}$$

On fixe le paramètre B_1 par la condition suivante : $2B_1 - 2i\alpha_1\lambda m = 0$

donc la valeur de B_1 est

$$B_1 = i\alpha_1\lambda m \tag{4.47}$$

si on fixe le paramètre B_1, l'équation (4.46) trouve la forme suivante:

$$\left[\partial_x^2 + -2\alpha_1 mx + \zeta_2\right] f_3(x) = 0 \tag{4.48}$$

où $\zeta_2 = 2mE - (\alpha_1\lambda m)^2 + \alpha_1\lambda m$

qour résoudre Eq.(4.48) , on fait le changement du variable suivant:

$$z = (-2\alpha_1 m)^{\frac{1}{3}}\left(x - \frac{\zeta_2}{2\alpha_1 m}\right) \tag{4.49}$$

après de remplacer ce changement du variable Eq(.4.49), on obtient comme suit :

$$\left[\partial_z^2 + z\right] f_3(z) = 0 \tag{4.50}$$

La solution de l'équation différentielle Eq.(4.50) est la fonction de Airy , où la fonction $f_3(z)$ est donnée selon la formule suivante :

$$f_3(z) = C_1 A_i(-z) + C_2 AB_i(-z) \tag{4.51}$$

Nous avons les fonctions $A_i(-z)$ et $B_i(-z)$ sont fonctions de Airy homogènes (The homogeneous Airy functions), mais la fonction $B_i(-z)$ est approché au infinie quand le variable $z\rangle\ 0$, dans ce cas on choisie $C_2 = 0$

alors eq .(4.51) est

$$f_3(z) = C_1 A_i(-z) \tag{4.52}$$

où C_1 est la constante de normalisation, cette constante est déterminé par la condition de normalisation d'énergie pour la fonction d'onde est continue où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_3\left(\xi\right) f_3^*\left(\xi^{'}\right) dz = \delta\left(E - E^{'}\right) \tag{4.53}$$

après les calcules, on obtient $C_1 = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m}$

la fonction $f_3\left(z\right)$ est donnée en fonction x par la formule suivante :

$$f_3\left(x\right) = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m} A_i\left[-\left(-2\alpha_1 m\right)^{\frac{1}{3}}\left(x - \frac{\zeta_2}{2\alpha_1 m}\right)\right] \tag{4.54}$$

et ainsi que : $f_3\left(x\right) = C_1 A_i\left[-\left(-2\alpha_1 m\right)^{\frac{1}{3}} x + a_n\right]$

Pour calculer le spectre d'énergie, on utilise la propriètè suivante:

$A_i\left(x = 0\right) = A_i\left(a_n\right)$, après de remplcement et simplification, on obtient la relation de spéctre d'énergie comme suit:

$$E_n = \frac{1}{2}\alpha_1^2\lambda^2 m - \frac{1}{2}\alpha_1\lambda - \frac{1}{2m}\left(-2\alpha_1 m\right)^{\frac{2}{3}} a_n \tag{4.55}$$

Cas limite: pour déduire le spectre d'énergie dans l'espèse régulière, on calcule la limite suivante :

$$\lim_{\lambda \to 0} E_n = -\frac{1}{2}\left(-2\alpha_1 m\right)^{\frac{2}{3}} a_n \tag{4.56}$$

Pour calculer la fonction d'onde $\phi_3\left(x\right)$, on utilise les relations Rel.(4.45) et Rel.(4.54) , on obtient comme suit:

$$\phi_3\left(x\right) = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m}\left[\exp\left\{i\alpha_1\lambda m\right\}\right] A_i\left[-\left(-2\alpha_1 m\right)^{\frac{1}{3}} x + a_n\right] \tag{4.57}$$

4.5 Equation de Schrödinger dans l'espace non-commutative :

l'équation de Schrödinger pour (2+1) dimensions est défini par (on pose $\hbar = c = 1$)

$$\left\{ \frac{\hat{P}_x + \hat{P}_y}{2m} + V\left(x, y\right) \right\} \psi\left(x, y, t\right) = i \frac{d}{dt} \psi\left(x, y, t\right) \tag{4.58}$$

On va choisir dans cette section le potentiel vectoriel $V\left(x, y\right)$ est linéaire comme suit $V\left(x, y\right) = \alpha_1 \left(\hat{X} + \hat{Y}\right)$

Nous avons l'algèbre dans l'espace non-commutative est définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{X}_i = \hat{x}_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j \\ \hat{P}_j = \hat{p}_j \end{array} \right. \tag{4.59}$$

Où $i, j = 1, 2$

dans le cas stationaire

$$\psi\left(x, y, t\right) = \phi_4(x, y) \exp\left\{-iEt\right\} \tag{4.60}$$

On remplace le potentiel $V\left(x, y\right)$ et les relations Rel.(4.59) et (4.60) dans l'equation Eq.(4.58), on obtient comme suit:

$$\left\{ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\alpha_1 \theta}{2}\hat{p}_x + \alpha_1 x + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} - \frac{\alpha_1 \theta}{2}\hat{p}_y + \alpha_1 y \right\} \phi_3(x, y) = E\phi_3(x, y) \tag{4.61}$$

Pour résoudre l'équation Eq.(4.61), on utilise la formule suivante :

$$\phi_4(x, y) = F\left(x, y\right) \exp\left\{ i\frac{\alpha_1 \theta m}{2}\left(-x + y\right) \right\} \tag{4.62}$$

Si on remplace la rel. (4.62) dans l'éq.(4.61) on obtient comme suit :

$$\left\{\partial_x^2 - 2\alpha_1 m x + \partial_y^2 - 2\alpha_1 m y + \frac{(\alpha_1 \theta m)^2}{2} + 2mE\right\} F(x,y) = 0 \tag{4.63}$$

Maintenant on utilise la méthode de séparation des variables comme suivante :

$$F(x,y) = f_2(x) . g_2(y) \tag{4.64}$$

Si on remolace la rel (4.64) dans l'équation Eq.(4.63), on obtient sur le système de deux équations indépendentes comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\partial_x^2 + a_2 x + b_2\right] f_2(x) = 0 \\ \left[\partial_y^2 + a_2 y + b_3\right] g_2(y) = 0 \end{array} \right. \tag{4.65}$$

Nous allons traiter ce système, et ce sera en résolvant chaque équation séparémant comme suit :

le premier equation :

$$\left[\partial_x^2 + a_2 x + b_2\right] f_2(x) = 0 \tag{4.66}$$

pour trouver la solution analytique de cette équation, on utilise le changement du variable suivant:

$$x \to x = \left[(a_2)^{-\frac{1}{3}}\right] u - \frac{b_2}{a_2} \tag{4.67}$$

ce changement du variable est transfromé l'équation Eq.(4.66) vers un équation suivante:

$$\left[\partial_u^2 + u\right] f_2(u) = 0 \tag{4.68}$$

La solution de l'éq.(4.68) est une fonction Airy $A_i(-u)$, où $f_2(u) = C_1 A_i(-u) + C_2 B_i(-u)$

selon la condition de convergence de la fonction Airi $B_i(-u)$ où $(\forall x \rangle 0 \implies B_i(-u) \to \infty)$

.

alors

$$f_2(u) = C_1 A_i(-u) \tag{4.69}$$

selon la relation de normalisation de la fonction d'onde on a: $C_1 = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m}$

Pour calculer le spectre d'énergie, nous utilisons la proprité $A_i\left(x=0\right) = A_i\left(a_n\right)$, après les calcules on obtien la relation de spectre d'énergie comme suit :

$$E_n = -\frac{\left(\alpha_1\theta\right)^2}{4}m + \frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m}a_n \tag{4.70}$$

Dans l'espace régulière le spectre d'énergie est:

$$\lim_{\theta\to 0} E_n = +\frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m}a_n \tag{4.71}$$

Selon la relation (4.69), nous avons calculé la fonction d'onde qui est donnée comme suit :

$$f_2\left(x\right) = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m}A_i\left(-\left[\left(a_2\right)^{\frac{1}{3}}\right]x + a_n\right) \tag{4.72}$$

Pour la deuxième équation en fonction y on a suivé les mêmes étapes, on obtient le spéctre d'énergie E_n et la fonction d'onde $g_2\left(y\right)$ comme suit :

$$E_n = -\frac{\left(\alpha_1\theta\right)^2}{4}m - \frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m}a_n \tag{4.73}$$

Dans l'espace régulière le spectre d'énergie est:

$$\lim_{\theta\to 0} E_n = -\frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m}a_n$$

La fonction d'onde qui est donnée comme suit :

$$g_2\left(y\right) = \sqrt[3]{-2\alpha_1 m}A_i\left(-\left[\left(a_2\right)^{\frac{1}{3}}\right]y + a_n\right)$$

Selon les deux relations (4.70) et (4.73), on déduit le spéctre d'énergie de système comme suit :

$$E_n = -\frac{\left(\alpha_1\theta\right)^2}{4}m + \sigma\frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m}a_n \tag{4.74}$$

où $\sigma = \pm 1$

Dans l'espace régulière le spectre d'énergie est:

$$\lim_{\theta \to 0} E_n = \sigma \frac{\lambda}{m} - \frac{\sqrt[3]{-2\alpha_1 m}}{m} a_n \tag{4.75}$$

La fonction d'onde de système est donnée comme suit :

$$\phi_4 (x, y) = (-2\alpha_1 m)^3 A_i \left(- \left[(a_2)^{\frac{1}{3}} \right] x + a_n \right) A_i \left(- \left[(a_2)^{\frac{1}{3}} \right] y + a_n \right) \tag{4.76}$$

Chapter 5

Conclusion

Dans ce travail de mémoire de master 2 physique théorique, nous avons traité le problème de l'équation de Schrödinger dans différents cas : dans le cas n°1, nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour $(1-D)$ et $(2-D)$. Dans les deux cas $(1-D)$ et$(2-D)$ (espace régulier): le spectre d'énergie E_n est déterminé en fonction de n et la fonction d'onde $\phi(x)$ $(1-D)$ et $\phi(x,y)$ pour $(2-D)$) est déterminé avec une forme exponentielle c'est-à-dire la forme périodique.

Pour cas n°2(espace déformé): le spectre d'énergie E_n est proportionnel avec les paramètres a_n et ainsi que λ, la fonction d'onde $\phi(x)$ est exprimé avec les fonctions de Airy $A_i(-x)$.

Pour cas n°3(espace déformé): dans ce cas, le spectre d'énergie E_n est proportionnel avec les paramètres a_n et ainsi que θ, la fonction d'onde $\phi(x,y)$ est exprimée avec les fonctions de Airy $A_i(-x)$ et $A_i(-y)$. Le cas limite pour le spectre d'énergie E_n est déterminé dans les deux cas n°2 et n°3 .

Bibliography

[1] Ajit Kumar.: Fundamentals of Quantum Mechanics. Cambridge University Press is part of the University of Cambridge, 1 (2018).

[2] CHALMERS W. SHERWIN.: Introduction to quantum mechanics. University of Illinois .vii Printed in the United States of America. 2(1959).

[3] Alex Andrews George .:Classical Mechanics vs Quantum Mechanics. ClearIAS, (2016).

[4] W. H. FURRY.: Note on the Quantum-Mechanical Theory of Measurement. PHYSICAL REV I EW Phys. Revi. **49,** 393 (1936).

[5] A. Connes, C* algebras and differential geometry, Compt. Rend, Acad. Sci. (Ser. I Math), A290:599-609 (1980).

[6] Michael R. Douglas, Nikita A. Nekrasov, Rev.Mod.Phys.73:977-1029, (2001).

[7] C.A. Mead Possible connection between gravitation and fundamental length Phys. Rev. **135**, B849-B862 (1964).

[8] D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano Can spacetime be probed below the string size. Phys. Lett. B. **216,**41-47 (1989).

[9] Giovanni Landi.: An Introduction to Noncommutative S aces and Their Geometries. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. m **51,** 16 (1997).

[10] H.Snyder .:Quantized space-time. phys.rev. 71, 38 (1947).

[11] Seiberg, Nathan, and Edward Witten. ”String theory and noncommutative geometry.” Journal of High Energy Physics 1999.09 (1999)

[12] Seiberg, Nathan, Leonard Susskind, and Nicolaos Toumbas. "Space/time non-commutativity and causality." Journal of High Energy Physics 2000.06 (2000)

[13] Douglas, Michael R., and Nikita A. Nekrasov. "Noncommutative field theory." Reviews of Modern Physics 73.4 (2001)

[14] Connes, Alain, Michael R. Douglas, and Albert Schwarz. "Noncommutative geometry and matrix theory." Journal of High Energy Physics 1998.02 (1998)

[15] Susskind, Leonard. "The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory." arXiv preprint hep-th/0101029 (2001).

[16] Moffat, J. W. "Perturbative noncommutative quantum gravity." Physics Letters B 493.1-2 (2000): 142-148.

[17] Duval, Christian, and P. A. Horvathy. "The exotic Galilei group and the "Peierls substitution"." Physics Letters B 479.1-3 (2000): 284-290.

[18] Masud Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu. : Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED. Physical Review Letters **86**. 2717 (2001).

[19] Mirza, B., and M. Zarei. "Non-commutative quantum mechanics and the Aharonov-Casher effect." The European Physical Journal C-Particles and Fields 32.4 (2004): 583-586.

[20] Horvathy, P. A. "The non-commutative Landau problem." Annals of Physics 299.1 (2002): 128-140.

[21] Gol'dman I I : Gol'dman I I et al. Problems in Quantum Mechanics. NewYork: Academic Press, 1960. 308

[22] Bertolami, O., et al. "Noncommutative gravitational quantum well." Physical Review D 72.2 (2005): 025010.

[23] Araki, Takeo, Katsushi Ito, and Akihisa Ohtsuka. "Supersymmetric gauge theories on noncommutative superspace." Physics Letters B 573 (2003): 209-216.

——-

[24] P.Amiot et L.Marleau.: Mécanique Classique II.Université Laval , Québec , Canada, 4(1997).

[25] N.P.Landsman.: Deformations of Algebras of observables and the classical limit of quantum mechanics. Rev.math.phys.**05**, 775-806 (1993).

[26] J. von Neumann.: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics . Princeton University Press, Berlin, (1955).

[27] F.J. Murray , J. von Neumann: On rings of operators I, II, IV. Ann. Math. 37, 116–229 (1936).

[28] Claude Aslangul.: Mécanique quantique 3, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes. Groupe De Boeck s.a., Rue des Minimes 39, B-1000 Bruxelles. **1**, 119 (2009).

[29] Allen C. Hirshfeld, Peter Henselder.:Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics.Am. J. Phys. **70**, 538 (2002).DOI: 10.1119/1.1450573.

[30] François Gieres:Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique.LYCEN 9960b.Juillet (1999).

[31] E. Schrödinger: Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen. Ann. Phys. **79**, 734–756.(1926).

[32] P.A.M.Dirac: The fundamental equations of quantum mechanics. Proc. R. Soc. Lond. A**109**, 642–653 (1926).

[33] P.A.M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics (The Clarendon Press, Oxford (1930).

[34] Daniel Greenberger, Klaus Hentschel, Friedel Weinert.: Compendium of Quantum Physics, Concepts, Experiments, History and Philosophy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 511 (2009).

[35] François Gieres:Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique1,Dédié a la mémoire de Tanguy Altherr2 (1963 - 1994) .

[36] J.J. Sakurai - Jim Napolitano: modern quantum méchanics.Second Edition(2012)

[37] Equipe Peadagogique:introduction mécanique quantique.PHY305 - UE Fondamentale .Crédits: 6 - CM: 30h - TD: 20h - TPE: 10h. See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/327681741.

[38] Michael Stone,Paul Goldbart. : Mathematics for Physics, A Guided Tour fur Graduate Students. Cambridge university press. 729 (2009).

[39] Moniek Verschuren.Coherent states in quantum méchanics.Bachelor thesis Radboud University Nijmegen Supervisor: Dr. W.D. van Suijlekom.8juillet 2011.

[40] A. Kempf.: Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. Journal of Mathematical Physics. **35**, 4483–4495(1994).

Chapter 6

Résumé-Abstract

6.1 Résumé:

Dans ce travail nous avons présenté les traitement les problèmes de résoudre de l'équation de Schrodinger dans différents cas, et pour cela nous avons forni les outils fondamentaux de formalisme de la mécanique quantique relativiste basé sur le principe d'incertitude d'Heisenberg généralisé, Nous intéressons à l'espace non-commutative. cet espace non-commutative qui est consacré de résoudre les équations relativistes par exemple l'équation de Klein Gordon, Dirac, Oscillateur harmonique, équation de Schrödinger... etc .

nous avons traité de problème de résoudre de l'équation de Schrödinger dans deux cas essential suivants :

Premier cas: la particle libre, nous avons résolu l'équation de Schrodinger dans l'espace ordinaire avec l'absence le potentiel véctoriel $V(x)$

pour 1-D et $V(x,y)$ pour 2-D, dans les deux cas le spéctre d'énergie est calculé E_n et aussi la fonction d'onde corréspendante $\phi(x)$ pour 1-D et $\phi(x,y)$ pour 2-D.

Deuxième cas:la présence du potentiel $V(x,y)$, nous avons résolu l'équation de Schrodinger avec la présence le potentiel véctoriel $V(x)$ l'espace déformé dans (1-D) et $V(x,y)$ pour l'espace non-commutative dans (2-D), dans les deux cas le spéctre d'énergie est calculé E_n et aussi la fonction d'onde corréspendante $\phi(x)$ pour l'espace déformé et $\phi(x,y)$ pour l'espace non-commutative, finalement les cas limites ont été extraits.

Mots-clés :

Mécanique Quantique, équation de Schrödinger, espace non-commutative (non commutatif).

6.2 Abstract

In this work we have presented the treatment of the problems of solving the Schrodinger equation in different cases, and for this we have provided the fundamental tools of formalism of relativistic quantum mechanics based on the generalized Heisenberg uncertainty principle, We are interested in the non-commutative space. this non-commutative space which is dedicated to solving relativistic equations for example the Klein Gordon equation, Dirac, Harmonic Oscillator, Schrödinger equation...etc.

We have dealt with the problem of solving the Schrödinger equation in the following two essential cases:

First case: the free particle, we have solved the Schrodinger equation in ordinary space with the absence of the vector potential $V(x)$ for 1-D and $V(x, y)$ for 2-D, in both cases the energy spectrum is calculated E_n and also the corresponding wave function $\phi(x)$ for 1-D and $\phi(x, y)$ for 2-D.

Second case: the presence of the potential $V(x, y)$, we solved the Schrodinger equation with the presence of the vector potential $V(x)$ the deformed space in (1-D) and $V(x, y)$ for non-commutative space in (2-D), in both cases the energy spectrum is calculated E_n and also the corresponding wave function $\phi(x)$ for the distorted space and $\phi(x, y)$ for the non-commutative space, finally the limiting cases have been extracted.

Key-words:

Quantum mechanics, Schrödinger equation, non-commutative space.

ملخص :

في هذا العمل قدمنا معالجة مشاكل حل معادلة مختلفة، ولهذا قدمنا الأدوات الأساسية لشكلية ميكانيكا الكم النسبية على أساس مبدأ اللايقين المعمم لهايزنبرغ ، و نحن مهتمون بالفضاء غير التبادلي. هذه المساحة غير التبادلية المخصصة لحل المعادلات النسبية على سبيل المثال معادلة كلاين جوردون ، ديراك ، المذبذب التوافقي ،معادلة شرودنجر ... إلخ .

لقد تناولنا مشكلة حل معادلة شرودنجرفي الحالتين الأساسيتين التاليتين :

الحالة الأولى : الجسيم الحر، لقد حللنا معادلة شرودنجر في الفضاء العادي مع غياب الجهد المتجه

V(x)

بالنسبة إلىD-1 و V(x,y) ل D-2 ، في كلتا الحالتين يتم حساب طيف الطاقة En وكذلك دالة

الموجة المقابلة Q(x) ل D-1 و Q(x,y) ل D-2 .

الحالة الثانية : وجود V(x,y)، قمنا بحل معادلة شرودنجر مع وجود الجهد المتجه V(x) المساحة

المشوهة في D-1 و V(x,y)لغير مساحة تبادلية في D-2، في كلتا الحالتين يتم حساب طيف الطاقة

En و كذلك دالة الموجة المقابلة Q(x)للمساحة المشوهة و Q(x,y) للمساحة غير التبادلية ، و أخيرا تم

إستخراج الحالات .

كلمات مفتاحية :

ميكانيك الكم ، معادلة شرودنجر ،مساحة غيرتبادلية .