

004/02  
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT D'AERONAUTIQUE**



**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE**

Option :

**STRUCTURE**

**THÈME**

**CALCUL DES COEFFICIENTS  
AERODYNAMIQUE D'UN PROFIL  
D'AILE EN ECOULEMENT  
VISQUEUX**

**Présenté par :**

MEHDI Abderahim

HADJALLAH HADJALLAH Farouk

**Proposé & dirigé par :**

Mr ZEBICHE Toufik

Promotion 2001 / 2002

Dédicace

*Je dédie se modeste travail a toute ma famille , en  
particulier mon père , mes amis et tous les  
enseignants de l'institut d'aéronautique*

*H .Farouk*

Dédicace

*Je dédie se modeste travail a toute ma famille, mes  
amis et tous les enseignants de l'institut  
d'aéronautique*

*M. Abderahim*

## Remerciement

*Nous remercions toute personnes qui ont été un soutien et un exemple de réussite pour nous de près ou de loin , en particulier les enseignants de l'institut d'aéronautique , nous avons eus le grand honneur de travailler avec notre promoteur Mr ZEBICHE Toufik on le remercie surtout pour sa patience , pour sa compétence et pour l'apport de son expérience qui a été précieux et sans oublier les membres de jury qui ont accepté d'être examinateurs a notre sujet et nous remercions aussi les honorables assistants.*

Résumé

*L'objet de cette étude est de déterminer le champ de vitesses de perturbation et la Distribution des paramètres de la couche limite laminaire et turbulente, par une étude numérique de l'écoulement visqueux autour d'un profil symétrique.*

*Pour cela, l'étude réalisée s'est déroulée suivant deux grands axes Une première partie qui traite le cas de l'écoulement non visqueux, qui serviront de conditions aux limites pour l'écoulement visqueux.*

*Une deuxième partie qui traite le cas de l'écoulement visqueux, où on va résoudre les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.*

*Ce travail présente une méthode numérique de calcul des différents paramètres, d'un tel écoulement autour d'un profil symétrique et que l'on peut étendre à des profils quelconques.*

---

## Summary

*This study consisted primarily in the resolution of the equations of Navier-Stokes. This resolution and according to nature of the flow.*

*Like first observation, that we could make, is that the results obtained, by the various methods numerical analytical methods (theoretical).*

*The study of the laminar boundary layer simple and easy to solve that it is analytically or numerically. On the other hand that of the turbulent boundary layer still runs up against the forecast of the phenomena of transition and modeling from turbulence.*

# SOMMAIRE

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b> .....	01
<b>CHANTRE 1 : ECOULEMENT NON VISQUEUX</b>	
I.1. INTRODUCTION.....	03
I.2. EQUATIONS GENERALES DE L'ECOULEMENT NON VISQUEUX...03	
I.2.1. Equation de quantité de mouvement.....	04
I.2.2. Equation de continuité.....	04
I.2.3. Equation d'état et de vitesse du son.....	04
I.1.4. Equation de conservation de l'énergie.....	04
I.3. MÉTHODE DE RÉOLUTION DE L'ECOULEMENT NON VISQUEUX..05	
I.3.1. Equation des vitesses potentielles.....	05
I.3.2. Linéarisation de l'équation des vitesses potentielles.....	07
I.3.3. Solution de l'équation d'onde.....	10
I.3.4. Condition aux limites.....	11
I.3.5. Calcul des vitesses de perturbation .....	13
I.3.6. Calcul des températures, des pressions et des densités .....	14
I.3.7. Résumé du procédé de calcul.....	15
<b>CHAPITRE II : ÉTUDE DE L'ECOULEMENT VISQUEUX</b>	
II.1. INTRODUCTION.....	17
II.2. PARAMETRES DE LA COUCHE LIMITE.....	17
II.2.1. Epaisseur de la couche limite.....	18
II.2.2. Épaisseur de déplacement.....	18
II.2.3. Epaisseur de quantité de mouvement.....	19
II.2.4. Facteur de forme .....	19



II.3. LA COUCHE LIMITE DANS UN ÉCOULEMENT PLAN.....	20
II.4. MÉTHODE DE RESOLUTION.....	24
II.5. ÉCOULEMENT LAMINAIRE COMPRESSIBLE.....	25
II.5.1. Facteur de forme pariétal.....	25
II.5.2. Facteur de forme.....	25
II.5.3. Coefficient de frottement laminaire compressible.....	26
II.5.4. Equation de Von Karman pour les couches limites laminaires.....	27

### **CHAPITRE III : ECOULEMENT VISQUEUX TURBULENT**

III.1. INTRODUCTION.....	30
III.2. RELATION GLOBALE DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT .....	30
III.3. MÉTHODE DE HEAD POUR LA COUCHE LIMITE TURBULENTE.....	30
III.3.1. Méthode de Head pour la couche limite turbulente incompressible...30	
III.3.2. Méthode de Head pour la couche Limite turbulente compressible.....33	
III.3.3. Equation générale .....	33
III.3.4. Équation de Von Karman.....	34
III.3.5. Détermination du coefficient de frottement.....	34
III.16, Détermination du coefficient des températures de paroi et de frottement.....	35
III.3.7. Facteur de forme pariétal.....	36
III.3.8. Paramètre de forme en écoulement compressible.....	36
III.3.9. Méthode de résolution de l'écoulement visqueux.....	42
III.3.9.1. ExemplePrincipe de la méthode.....	42
III.3.9.2. Exemple.....	43

### **CHAPITRE IV : INTERPRÉTATION NUMÉRIQUE ET ANALYSE DES RESULTATS**

IV.1. INTRODUCTION.....	45
-------------------------	----

IV.1.1. Caractéristiques géométriques du profil d'aile.....	45
IV. 1.2. Influence de la forme du profil.....	45
IV.2. PROFIL UTILISE.....	46
IV.2.1. Description du corps utilisé.....	46
IV.3. ALGORITHME DE CALCUL.....	48
IVA. ORGANIGRAMME DE CALCUL.....	49
IV.5. RESULTATS OBTENUS.....	51
IV.6. ANALYSE DES RESULTATS.....	58
IV.6.1. Résultats relatifs à l'écoulement non visqueux.....	58
IV.6.2. Résultats relatifs à l'écoulement visqueux.....	59
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>61</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>62</b>
<b>ANNEXE</b>	

## NOMENCLATURE

- $\gamma$  : Rapport des chaleurs spécifiques.
- $\rho$  : Masse volumique.
- $a$  : La célérité du son.
- $A$  : Paramètre de forme (Polhausen).
- $\Phi$  : Potentiel de vitesse.
- $\Phi'$  : Potentiel de vitesse de perturbation.
- $\mu$  : Viscosité dynamique.
- $\nu$  : Viscosité cinématique.
- $U_\infty$  : Vitesses à l'infini (écoulement libre).
- $E$  : Epaisseur du profil utilisé.
- $C$  : Corde du profil
- $p$  : La force de pression par unité de surface.
- $H_1$  : Facteur de traînée.
- $\bar{H}$  : Facteur de forme (écoulement incompressible).
- $H$  : Facteur de forme (écoulement compressible).
- $\delta$  : Epaisseur de la couche limite.
- $\delta_1$  : Epaisseur de déplacement.
- $\delta_2$  : Epaisseur de la quantité de mouvement.
- $C_f$  : Coefficient de frottement compressible.
- $C_f^*$  : Coefficient de frottement incompressible.
- $Re_{y_c}$  : Nombre de Reynolds (paramètre adimensionnel).
- $\tau_0$  : Force de contrainte.
- $M_\infty$  : Le nombre de Mach à l'infini amont (paramètre adimensionnel)

- $T_\infty$  : Température à l'infini (écoulement libre).
- $\rho_\infty$  : Masse volumique à l'infini (écoulement libre).
- $P_\infty$  : Pression à l'infini (écoulement libre).
- $\alpha$  : L'angle d'incidence.
- $Re$  : Le nombre de Reynolds unitaire.
- $u'$  : Vitesse de perturbation selon l'axe (x).
- $v'$  : Vitesse de perturbation selon l'axe (y).
- $V$  : Vitesse de l'écoulement potentiel.
- $P$  : Nombre de Prandtl.
- $Re_{\delta_2}$  : Nombre de Reynolds ( $\delta_2$  la longueur caractéristique).
- $u_e$  : Vitesses extérieure de l'écoulement libre.
- $M_e$  : Nombre de Mach à l'extérieure de la couche limite.
- $x,y,z$  : Cordonnées cartésiennes.

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION GENERALE

La dynamique des fluides, branche particulière, à la fois de la mécanique des milieux continus et de la thermodynamique, a pour objectif l'étude des écoulements générés par le mouvement relatif d'un corps plongé dans un fluide.

De puis quelques décennies, la dynamique des fluides a subi des développements considérables, qui tiennent, pour l'essentiel, aux progrès incessants effectués à la fois dans les domaines du calcul numérique et techniques expérimentales.

Le domaine d'application de la mécanique des fluides est extrêmement vaste incluant ainsi par exemple, les domaines de l'aéronautique, la combustion, le nucléaire et l'hydraulique.

Dans une étude sur " Le mouvement du fluide avec de petits frottements présentée dans un congrès à Heidelberg en 1904. Prandtl a montré comment il était possible d'analyser les fluides visqueux à l'aide des considérations théoriques et de simples expérimentations, il a prouvé que le fluide près d'un solide peut être divisé en deux régions

- Une très mince couche (couche limite) immédiatement voisine à la paroi où l'effet de la viscosité est dominant.

- Une région hors cette couche où l'effet de la viscosité peut être négligé.

Avec cette étude Prandtl a ainsi réussi à donner une explication physique de l'importance des écoulements visqueux.

La théorie de la couche limite arrive à résoudre un grand nombre de problèmes de la mécanique des fluides, mais elle reste limitée et ne peut s'appliquer dans certains cas où l'écoulement contenant des décollements (chambre de combustion, etc.)

La non linéarité des équations de la dynamique des fluides (équation de Navier-Stokes) présente une barrière à la résolution analytique des problèmes posés dans ce domaine à l'exception de quelques cas simples. Cependant avec l'apparition de l'outil informatique une nouvelle voie s'est ouverte aux ingénieurs.

L'objet de cette étude est de déterminer le champ de vitesses de perturbation et la distribution des paramètres de la couche limite laminaire et turbulente, par une étude numérique de l'écoulement visqueux autour d'un profil symétrique.

Pour cela, l'étude réalisée s'est déroulée suivant deux grands axes Une première partie qui traite le cas de l'écoulement non visqueux, qui serviront de conditions aux limites pour l'écoulement visqueux.

Une deuxième partie qui traite le cas de l'écoulement visqueux, où on va résoudre les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.

Ce travail présente une méthode numérique de calcul des différents paramètres, d'un tel écoulement autour d'un profil symétrique et que l'on peut étendre à des profils quelconques.

CHAPITRE I  
ÉCOULEMENT  
NON VISQUEUX



# ÉCOULEMENT NON VISQUEUX

## I.1- INTRODUCTION

La résolution des équations différentielles de Navier-Stokes pour un écoulement visqueux, représente un problème mathématique considérable, cela est la conséquence de leur non - linéarité: Mais, il reste possible de trouver des solutions exactes pour des cas particuliers et simples.

En première approximation, on considère que l'écoulement autour du corps est non visqueux en résolvant ce problème, dit problème extérieur. On dispose d'une distribution  $(U_e, P_e, \rho_e, T_e)$  des vitesses, pressions, densités et températures à la frontière du corps Cette distribution servira de donnée à l'infini pour l'étude de la couche limite. Ces équations générales de l'écoulement autour du corps sont simplifiées par les hypothèses suivantes :

- écoulement permanent et bidimensionnel
- forces de viscosité et volumiques négligeables
- fluide parfait
- écoulement adiabatique et irrotationnel

Toutes ces suppositions conduisent à des équations simplifiées de l'écoulement bidimensionnel, compressible et non visqueux.

## I.2.EQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉCOULEMENT NON VISQUEUX

Pour la détermination des paramètres décrivant l'écoulement du fluide autour du corps, on considère l'équation de quantité de mouvement et trois équations scalaires (l'équation de continuité, l'équation d'état et l'équation d'énergie).(81

### I.2.1. Equation de quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement d'un écoulement non visqueux, en négligeant les forces extérieures, est :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (I-1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (I-2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (I-3)$$

### 1.2.2. Equation de continuité :

Le principe de conservation de la masse pour un écoulement compressible est donné par l'expression vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (I-4)$$

Pour un écoulement permanent, bidimensionnel, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (I-5)$$

### 1.2.3. Equation d'état et vitesse du son :

L'équation d'état d'un gaz parfait est :

$$P = \rho r T \quad (I-6)$$

Où  $r$  est la constante caractéristique des gaz parfait

Pour un écoulement irrotationnel,

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = a^2 \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} \quad (I-7)$$

Où  $a$  : est la célérité du son

L'équation exprimant l'irrotationnel est :

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (I-8)$$

### 1.2.4. Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'exprime par :

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \text{cste} \quad (I-9)$$

### 1.3.METHODE DE RESOLUTION DE L'ECOULEMENT NON VISQUEUX

Les équations de l'écoulement du fluide non visqueux autour du corps forment un système d'équation aux dérivées partielles qui ne peut être résolu analytiquement ou on a recours à des méthodes numérique donnant une bonne approximation de la solution du problème. La méthode consiste à linéarisée les équations de l'écoulement en supposent que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée (écoulement supersonique et subsonique), dans laquelle on admet que ces vitesses de perturbation sont petites en comparaison à des vitesses de l'écoulement et de la vitesse du -son [5]. Le corps que nous considérons est un profil mince permettant d'utiliser la méthode des petites perturbations et les équations décrites ci dessus peuvent être réduites à une seule équation, l'équation d'onde.

Cette équation est hyperbolique, non linéaire et sa résolution est complexe

#### 1.3.1. Equation des vitesses potentielles : [2]

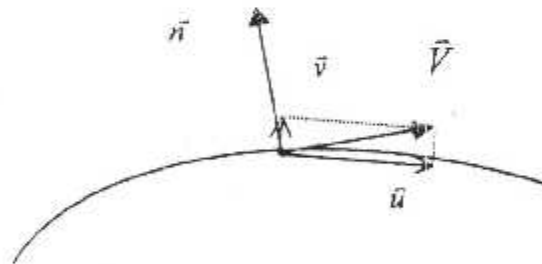


Figure .1.1 Profil des vitesses

Reprenons les équations (I-2) et (I-3)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

L'équation (I-7) donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

Les équations (I-2) et (I-3) deviennent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (I-10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (I-11)$$

D'autre part, l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = 0 \quad (I-12)$$

Des équations (I-10) et (I-11) on tire les valeurs de  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{\rho}{a^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (I-14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = - \frac{\rho}{a^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (I-15)$$

En reportant ces deux expressions dans l'équation (I-12) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[ u \left( - \frac{\rho}{a^2} \right) \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \left( - \frac{\rho}{a^2} \right) \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0$$

En tenant compte de l'irrationalité de l'écoulement, cette équation devient :

$$\left( \frac{u^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{v^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2u.v}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (I-16)$$

Si un écoulement stationnaire est irrotationnel, son champ de vitesse dérive d'un potentiel  $\phi$  tel que :

$$\vec{V} = \text{grad}\phi$$

On a en coordonnées cartésiennes :

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (I-16) on obtient :

$$\left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right) \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2u.v \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = 0 \quad (I-17)$$

C'est une équation hyperbolique non linéaire.

### 1.3.2. Linéarisation de l'équation des vitesses potentielles : [2]

L'écoulement ne doit pas présenter de choc courbe, puisque celui-ci engendre un écoulement rotationnel. L'hypothèse de linéarisation peut être faite lorsque les perturbations apportées à l'écoulement uniforme par la présence de l'obstacle restent faibles.

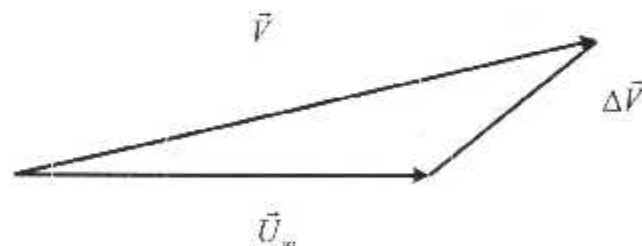


Figure 1.2 Représentation des directions des vitesses

Le potentiel des vitesses  $\phi$  s'exprimera comme la somme du potentiel dû à la vitesse  $U_\infty$  et du potentiel de perturbation  $\phi'$  associé aux vitesses  $u'$  et  $v'$  :

$$\phi = U_\infty x + \phi' \quad (I-18)$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U_\infty + u' \quad (I-19)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial y} = v' \quad (I-20)$$

$$P = P_{\infty} + P' \quad (I-21)$$

$$\rho = \rho_{\infty} + \rho' \quad (I-22)$$

$$a = a_{\infty} + a' \quad (I-23)$$

Où :  $\phi'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $\rho'$ ,  $P'$ ,  $a'$  sont les perturbations causées par la présence du corps dans le fluide.

La Linéarisation de problème considère que les perturbations sont petites par rapport aux paramètres de l'écoulement uniforme (non perturbé), on aura :

$$\frac{U'}{U_{\infty}}; \frac{P'}{P_{\infty}}; \frac{\rho'}{\rho_{\infty}}; \frac{\phi'}{\phi}; \frac{a'}{a_{\infty}}; \frac{V'}{V_{\infty}} \ll 1$$

L'indice  $\infty$  caractérise les paramètres à l'infini amont : écoulement non perturbé de l'équation de l'énergie (I-9), on déduit :

$$\frac{1}{2} \left[ (U_{\infty} + u')^2 + v'^2 \right] + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U_{\infty}^2}{2} + \frac{a_{\infty}^2}{\gamma - 1} \quad (I-24)$$

En négligeant les termes de perturbation du second ordre, on aura :

$$U_{\infty} u' + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_{\infty}^2}{\gamma - 1}$$

$$(\gamma - 1) U_{\infty}^2 \frac{u'}{U_{\infty} a_{\infty}^2} + \frac{a^2}{a_{\infty}^2} = 1$$

Le nombre de Mach.  $M_{\infty} = \frac{U_{\infty}}{a_{\infty}}$  à l'infini amont donne :

$$\frac{a^2}{a_{\infty}^2} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \cdot 2 \cdot \frac{u'}{U_{\infty}}$$

Le produit :

$$\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \cdot 2 \cdot \frac{u'}{U_\infty}$$

Est très petit devant l'unité ; on a alors en développant :

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 - (\gamma-1) M_\infty^2 \frac{u'}{U_\infty} + o\left(M_\infty^4 \frac{u'^2}{U_\infty^2}\right) + \dots$$

Où le symbole  $o(\ )$  représente les termes d'ordre de grandeur négligeable.

On en déduit :

$$\frac{u^2}{a^2} = \left( \frac{U_\infty^2 + 2U_\infty u' + u'^2}{a_\infty^2} \right) \left[ 1 + (\gamma-1) M_\infty^2 \frac{u'}{U_\infty} \right]$$

Donc :

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{U_\infty^2}{a_\infty^2} + f\left(\frac{u'}{U_\infty}\right)$$

$$\frac{u^2}{a^2} = M_\infty^2 \tag{I-25}$$

Toutes les termes de l'équation (I-17) qui sont multipliés par  $v$  sont petits et cette équation devient :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0 \tag{I-26}$$

L'équation linéarisée d'un écoulement plan irrotationnel et stationnaire du fluide compressible non visqueux est donc :

$$B^2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0 \tag{I-27}$$

Avec :  $B^2 = \pm(M_\infty^2 - 1)$

C'est une équation linéaire en  $\phi'$  et dans le calcul des profils d'aile, notre travail consiste à rechercher une méthode permettant de résoudre de telles équations.

### 1.3.3. Solution de l'équation d'onde [8]

L'équation (1-27) est une équation d'onde plane dont la solution est en général de la forme :

$$\phi' = f(x - By) + g(x + By) \quad (1-28)$$

Où  $f$  et  $g$  sont des fonctions arbitraires qui seront définies par les conditions aux limites suivantes:

Ses directions  $(x - by = \text{cste})$  et  $(x + by = \text{cste})$  sont appelées caractéristiques montantes ou descendantes de l'écoulement. Ces directions ; en effet, les perturbations entraînées par un point  $O$  placé dans un écoulement se propagent à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet  $\Psi$  tel :

$$\tan \Psi = \frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$\tan^2 \Psi = \frac{1}{M_\infty^2 - 1} = \frac{\sin^2 \Psi}{\cos^2 \Psi}$$

D'où :  $\sin \Psi = \pm \frac{1}{M_\infty}$

On en déduit que  $\Psi$  est l'angle de Mach

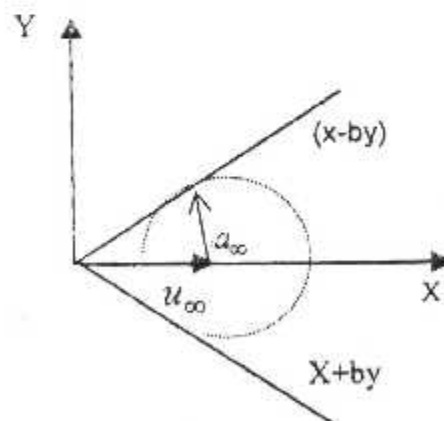


Figure 1.3. Zone de perturbation



On constate, d'après la définition de B ; et la figure :1-3 que les directions  $(x+by)$  et  $(X+by)$  sont parallèles aux génératrices du cône de Mach Les directions caractéristiques sont aussi les ligne de Mach de l'écoulement. Du fait que les zones de perturbations sont délimitées par des zones bien déterminées (cônes de Mach) et que les perturbations qui influent sur le mouvement du fluide proviennent du corps on doit avoir dans l'espace au dessus du profil ( $y > 0, g=0$ ), de sorte que :

$$\phi = f(x - By)$$

Et que dans l'espace au dessous du profil ( $y < 0, f=0$ )

$$\phi = g(x + By)$$

### I.3.4. Conditions, aux limites [8]

La condition de glissement impose sur le profil, un vecteur vitesse qui est tangent en tout point

Ceci s'exprime par :

$$\vec{V}_p \cdot \vec{n} = 0 \quad (\vec{n} \text{ demi-normale extérieure})$$

La tangente au profil en un point donné est

$$y' = h'(x) \quad (I-29)$$

La pente du vecteur vitesse devant être égale à la pente de la tangente, on a :

$$[h'(x)]_p = \frac{v}{u} = \frac{V'}{U_\infty + u'} \quad (I-30)$$

$u'$  étant négligeable devant  $U_\infty$ , la relation (I-30) devient

$$v = U_\infty [h'(x)]_p \quad (I-31)$$

Le corps est de forme élancée; donc la valeur de  $y_p$  (ordonnée du point sur la paroi) est petite, on peut alors en n'importe quel point  $(x, y)$  de la paroi exprimer la vitesse  $v$  en série de Taylor développée autour du point  $(x, 0)$ ; ce qui correspond à la position le long de la corde :

$$v(x, y) = v(x, 0) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x,0} y_p + \dots \quad (I-32)$$

En négligeant tous les termes du premier ordre dans (I-32), on a alors dans ce cas :

$$V(x,y) = v(x,0)$$

Et l'équation (1-31) devient :

$$v(x, y) = U_{\infty} [h'(x)] p \quad (I-33)$$

Si on considère un profil symétrique par rapport à la corde (profil supersonique), l'équation donnant la forme d'un tel corps sera :

$$y = \pm h(x)$$

Déterminons les fonction f et g telles que

$$\phi' = f(x - By)$$

Pour  $y < 0$

$$\phi' = g(x + By)$$

1. Pour  $y > 0$  ;  $\phi' = f(x - By)$  et  $y = h(x)$

Conditions aux limites

$$v(x,0) = U_{\infty} [h'(x)] p$$

$$\text{Avec : } v(x,0) = \left( \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\text{implique : } \left( \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)_{y=0} = \left[ \frac{\partial \phi'}{\partial (x - By)} \right] = -B \cdot f'(x)$$

On déduit :

$$f'(x) = -\frac{U_{\infty}}{B} [h'(x)] p \quad (I-34)$$

Une intégration simple donne :

$$f(x) = -\frac{U_{\infty}}{B} h(x) + c \quad (I-35)$$

Les perturbations n'étant causées que par la présence du corps dans le fluide, la constante d'intégration est donc nulle.

L'équation (2-36) devient alors :

$$f'(x) = -\frac{U_\infty}{B} h(x) \quad (I-36)$$

Par conséquent :

$$\phi''(x, y) = f(x - By) = -\frac{U_\infty}{B} h(x, By)$$

2. pour  $y < 0$  ;  $\phi'' = g(x + By)$  et  $y = -h(x)$  (I-37)

$$g(x) = \frac{U_\infty}{B} (-h(x))$$

donc :  $\phi''(x, y) = g(x + By) = \frac{U_\infty}{B} h(x + By)$  (I-38)

### I.3.5 Calcul des vitesses de perturbations [2]

Pour  $y > 0$  :

$$\phi''(x, y) = -\frac{U_\infty}{B} h(x - By)$$

$$u' = \frac{\partial \phi''}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{B} h'(x - By)$$

$$v' = \frac{\partial \phi''}{\partial y} = U_\infty h'(x - By) = Bu'$$

Pour  $y < 0$  :

$$\phi''(x, y) = -\frac{U_\infty}{B} h(x + By)$$

$$u' = \frac{\partial \phi''}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{B} h'(x + By)$$

$$v' = \frac{\partial \phi''}{\partial y} = U_\infty h'(x + By) = Bu'$$

Du fait de la symétrie du profil, les calculs sont faits sur l'extrados ( $y > 0$ ) et les résultats sur l'intrados seront déduits par symétrie.

Donc pour  $y > 0$ , les perturbations  $u'$  et  $v'$  sur la paroi sont :

$$u' = -\frac{U_\infty}{B} h'(x_p + By_p)$$

$$v' = -Bu'$$

La vitesse totale en un point est :

$$\vec{V} = (U_\infty + u')\vec{i} + v'\vec{j}$$

$$\text{On : } \vec{V} = \vec{U}_\infty + \text{grad}\phi''$$

Le module de la vitesse totale :

$$V = \sqrt{(U_\infty + u')^2 + v'^2}$$

Le nombre de Mach en un point de la paroi est :

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1}$$

Où  $M_1$  : nombre de Mach local

$a_1$  : vitesse du son local

La relation entre  $a_1$  et les autres paramètres est : [ 1].

$$\left(\frac{a_1}{a_\infty}\right)^2 = 1 / \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left[ 1 - \left(\frac{\bar{v}}{v_\infty}\right)^2 \right] \right] \quad (\text{I-39})$$

Où :  $a_\infty$  est la vitesse du son à l'infini

Ainsi, tous les paramètres permettant de calculer  $a_1$  et  $v_\infty$ , donc le nombre de Mach en un point P de la paroi sont déterminés.

### 1.3.6. Calcul des températures, pressions et densités [2]

La température en un point P sur le corps est donnée par la distribution suivante :

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left( \frac{2u'}{v_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{v_\infty} \right) \quad (\text{I-40})$$

Où  $T_x$  est la température à l'infini

On en déduit la valeur de la température en un point de la paroi du profil, ainsi que la pression et densité sur le profil

Pour un écoulement isentropique :

$$P_1 = P_\infty \left( \frac{a_1}{a_\infty} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{I-41})$$

et :

$$\rho_1 = \rho_\infty \left( \frac{P_1}{P_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\text{I-42})$$

### U.3.7. Résumé du procédé de calcul

$$u'_L = -\frac{U_\infty}{B} h'(x_p + By_p)$$

$$V'_L = -Bu'_L$$

$$V_1 = \sqrt{(U_\infty + u'_L)^2 + v_L'^2}$$

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} \quad P_1 = P_\infty \left( \frac{a_1}{a_\infty} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad \rho_1 = \rho_\infty \left( \frac{P_1}{P_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\left( \frac{a_1}{a_\infty} \right)^2 = 1 / \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left[ 1 - \left( \frac{\bar{v}}{v_\infty} \right)^2 \right] \right]$$

$$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left( \frac{2u'}{v_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{v_\infty} \right)$$

Toutes les grandeurs sont déterminées en un point P du profil suffisamment éloigné de l'onde de choc provoqué par le corps. Pour la détermination des paramètres juste après le choc, on utilisera la théorie des ondes de choc obliques, car la méthode des perturbations n'est pas applicable au voisinage du point d'arrêt du profil. La vitesse de perturbation et de la vitesse à l'infini amont en ce point, sont égales en module et opposées.

### **Remarque**

L'écoulement autour du profil est supersonique, donc il y a une onde de choc qui se produit au bord d'attaque. l'onde de choc peut être attachée ou détachée du corps. Dans notre étude, on propose une onde de choc attachée pour avoir un écoulement complètement supersonique à l'aval.

CHAPITRE II  
ETUDE DE  
L'ÉCOULEMENT  
VISQUEUX

# ETUDE DE L'COULEMENT LAMINAIRE VISQUEUX

## II.1. INTRODUCTION

Dans un écoulement visqueux autour d'un corps quelconques les effets de viscosité se manifestent dans une mince couche adjacente à la paroi appelée couche limite.

Le premier a avoir introduit la notion de couche limite est Ludwig Prandtl en 1904.

L'épaisseur de la couche limite

L'épaisseur de déplacement

L'épaisseur de quantité de mouvement

Le coefficient de frottement.

## II.2. PARAMETRE DE LA COUCHE LIMITE

Si l'on considère une couche de particules très petites en contact avec une paroi plane, laquelle présente toujours des aspérités, les actions de parois sont telles qu'on peut admettre une adhérence complète, donc une vitesse d'écoulement nulle pour cette première couche de fluide.

De fait, à partir de la paroi, et perpendiculairement à elle, la vitesse de l'écoulement s'accroît depuis zéro jusqu'à une valeur stable  $U_0$  appelée vitesse à l'infini ou vitesse libre. Cet accroissement d'abord rapide est ensuite de plus en plus lent.

Le Profil des vitesses correspondant à la section normale  $\Sigma$  de l'écoulement.

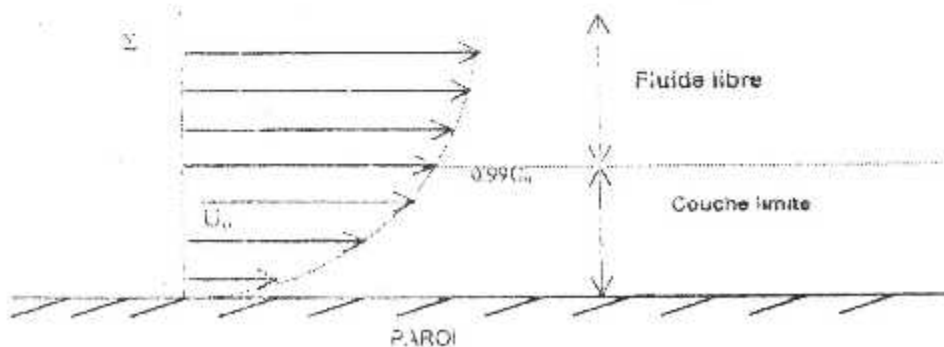


Figure II.1. Profil des vitesses



De façon précise, l'épaisseur du fluide, en contact avec paroi à travers laquelle la vitesse passe de zéro à  $0,99U_0$  est appelé la couche limite dynamique.

Au delà de la couche limite, la vitesse est pratiquement invariable, on est dans une zone de fluide libre ou les effets de viscosité ne se font plus sentir.

### II.2.1. Epaisseur de la couche Limite

En général, l'épaisseur de la couche limite dynamique s'accroît dans le sens de l'écoulement et à partir de l'extrémité amont de la paroi (bord d'attaque de l'obstacle) ceci en raison de la transmission progressive à travers le fluide, des effets de freinage de la paroi.

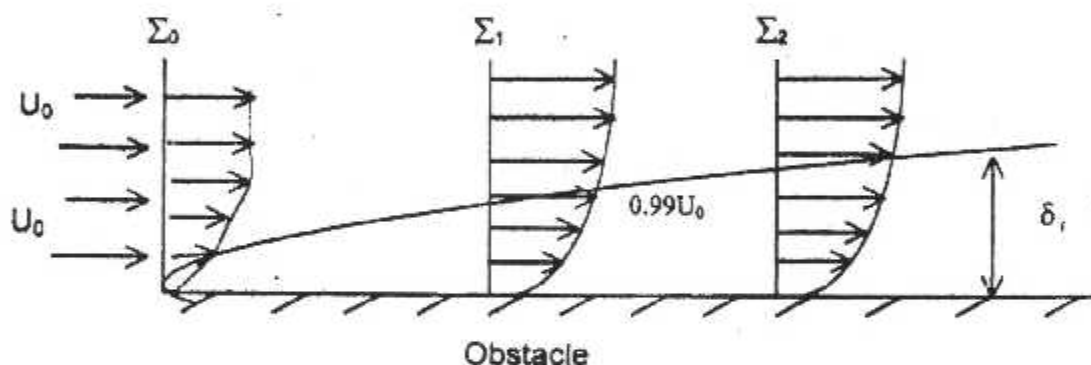


Figure.11.2  $\delta$  : épaisseur de la couche limite dans la section  $\Sigma_2$ .

Si le nombre de Reynolds ( $R_e = \frac{u_0 \cdot l}{\mu}$ ) est faible, la couche limite est laminaire.

Pour des nombres de Reynolds élevés (supérieurs au nombre critique), la couche limite devient turbulente

Il est commode d'introduire à la place de l'épaisseur de la couche limite les épaisseurs suivantes.

### II.2.2. L'épaisseur de déplacement (de refoulement)

Cette quantité dont il faudrait déplacer la paroi limitant un écoulement pour conserver l'épaisseur de déplacement.

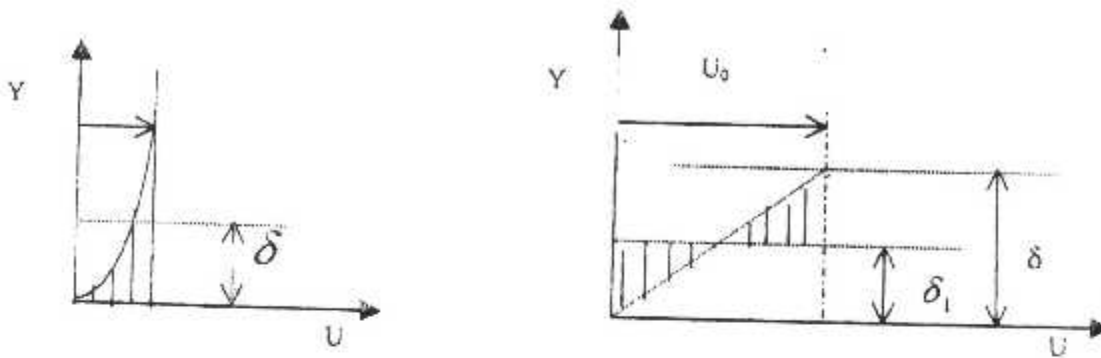


Figure II.3 Epaisseur de déplacement

En effet  $q_v = \int_0^{\delta} (u_0 - u) dy$ ,

$q_v$  : le débit volumique qui manque par unité de profondeur.

Deuxième manière, on peut écrire :

$$q_v = U_0 \delta_1 \quad (\text{II-1})$$

De deux expressions, on a :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy \quad (\text{II-2})$$

### II.2.3. L'épaisseur de quantité de mouvement

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (\text{II-3})$$

### II.2.4. Facteur de forme

On appelle facteur de forme ou paramètre de forme :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (\text{II-4})$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible, H est lié à la loi de distribution des vitesses dans la couche limite.

L'épaisseur de perte de débit dans la couche limite est définie par :

$$\Delta = \delta_2 - \delta_1 \quad (\text{II-5})$$

### II.3. LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE\_ [6]

Considérons un corps cylindrique balayé par un courant de fluide à propriétés physiques constantes dont la vitesse au loin de  $U$  est perpendiculaire au génératrices : Il s'agit donc d'un écoulement plan que nous supposons, en outre, stationnaire.

Si A est le point d'arrêt, tout point P du profil peut être défini par une abscisse curviligne  $x$ , comptée à partir du point d'arrêt A (Fig.II.3), pour définir, au voisinage de la paroi, la position d'un point M.

Si P est le point d'intersection de cette normal avec la paroi, le point M est repéré par les valeurs de  $x$  et de  $PM = y$ .

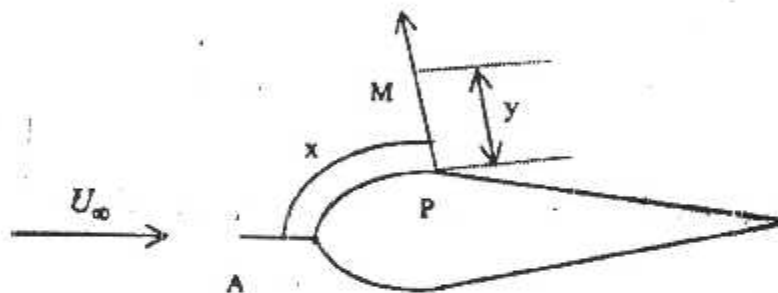


Figure.II.4. Propriétés physiques de l'écoulement

La mesure des pressions à la paroi permet de connaître l'évolution de la vitesse  $u_e$  dans l'écoulement libre à la frontière de la couche limite.

La méthode de la résolution approchée utilisée permet de confondre la vitesse  $U_e$  au point définissant l'épaisseur de la couche limite.

La méthode de Pohlhausen utilise une condition, de continuité de la vitesse (dérivée seconde) à la frontière de la couche limite. Pohlhausen suppose que la distribution des vitesses dans la couche limite laminaire peut être représentée par un polynôme allant jusqu'au terme  $((y/\delta)^4)$ .

$$\frac{u}{u_s} = a(x)\left(\frac{y}{\delta}\right) + b(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + c(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + d(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \quad (II-6)$$

Il n'y a pas de terme constant puisque  $u = 0$ , pour  $y = 0$ .

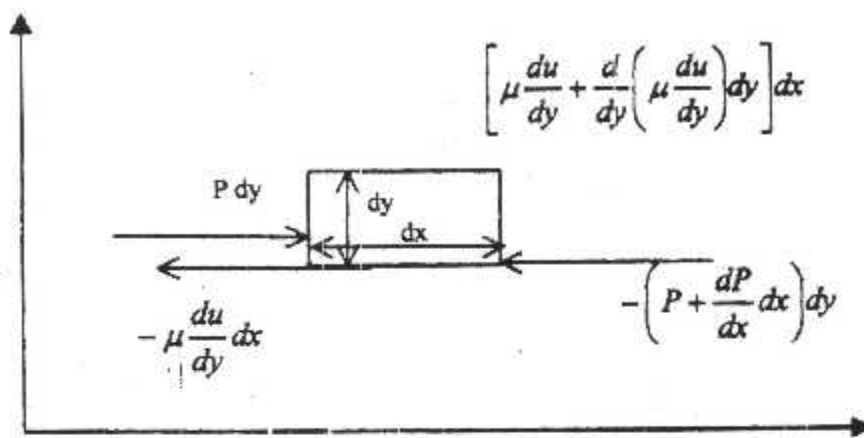


Figure II.5 Forces s'exerçant sur le volume de fluide

les forces d'inertie étant négligeables au voisinage immédiat de la paroi, on doit admettre que, tout près de la paroi, dans un petit volume  $dx dy$ , il y a équilibre entre les forces de frottement et les forces de pression qui s'exercent toutes les deux parallèlement à la paroi (Fig.II.5.)

$$\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right)_p dy dx - \frac{dP}{dx} dx dy.$$

Par suite :

$$\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right)_p = \frac{dP}{dx} = -\frac{\delta^2}{2\nu} \frac{du_\delta}{dx} \quad (\text{II-7})$$

De l'expression (II-6), puis de l'équation (II-7), il résulte que :

$$b = \frac{\delta^2}{2u_\delta} \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right)_p = -\frac{\delta^2}{2\nu} \frac{du_\delta}{dx} \quad (\text{II-8})$$

Si nous introduire le paramètre de forme  $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_\delta}{dx} \quad (\text{II-9})$$

Il vient :

$$b = -\frac{\hat{\Lambda}}{2}$$

Les trois autres coefficients a, c et d se déterminent par les trois conditions :

$$u = u_\delta, \partial u / \partial y = 0, \partial^2 u / \partial y^2 = 0, \text{ pour } y = \delta$$

On arrive ainsi au polynôme :

$$\frac{u}{u_\delta} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 + \left( \frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{y}{6\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (\text{II-10})$$

Par suite, le profil est donné, en chaque point, par la valeur de facteur de forme  $\Lambda$  en ce point.

Dans le cas de la plaque plane  $\Lambda = du_\delta / dx = 0$  : on obtient alors la loi de distribution de vitesse.

$$\frac{u}{u_\delta} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 + \left( \frac{y}{\delta} \right)^4,$$

En utilisant les expressions des épaisseurs

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d \left( \frac{y}{\delta} \right)$$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d \left( \frac{y}{\delta} \right)$$

La relation (II.10) permet de calculer l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$  et la contrainte de frottement à la paroi  $\tau_p$  en fonction de  $\delta$  et de  $u$ , on obtient aisément

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{130}, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \quad (\text{II-II})$$

Et

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = \mu \frac{\Lambda + 12}{6} \frac{u_\delta}{\delta} \quad (\text{II-12})$$

Si nous portons ces expressions de  $\delta_1$ , de  $\delta_2$  et de  $\tau_p$  dans la relation globale de quantité de mouvement (II-13), nous obtenons

$$\delta \left( \frac{3}{10} - \frac{\hat{\nu}}{130} + \frac{74}{315} - \frac{2\hat{\nu}}{945} - \frac{\hat{\nu}^2}{4536} \right) \frac{du_\delta}{dx} + u_\delta \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{37}{315} - \frac{\hat{\nu}}{945} - \frac{\hat{\nu}^2}{9072} \right) \delta \right] = \frac{1+12\nu}{6} \frac{\nu}{\delta} \quad (\text{II-13})$$

Les relations (III.4) et (III.9) conduisent à une équation différentielle du premier ordre mais non linéaire pour  $\hat{\nu}$  :

$$\frac{d\nu}{dx} = \frac{du_\delta}{u_\delta} g(\hat{\nu}) + \frac{d^2 u_\delta}{\frac{du_\delta}{dx}} h(\hat{\nu}) \quad (\text{II-14})$$

qui en principe, permet de déterminer  $\hat{\nu}_A(x)$ , si l'on connaît la loi  $u_\delta(x)$  ou, ce qui revient au même, la loi de distribution de pression le long de la paroi.

La fonction  $\hat{\nu}(x)$  étant connue, on peut déterminer  $\delta(x)$  à partir de l'expression (II-9). Ces calculs sont longs, l'équation non linéaire (II-15) comportant les points singuliers  $u_\delta = 0$  et  $du_\delta/dx = 0$

## II.4. METHODE DE RESOLUTION

Dans le cas d'un bord d'attaque arrondi, au point d'arrêt A,  $u_a$  est nul, d'après (II-13), la relation (II-14) se simplifie et donne, si l'on y porte l'expression de  $du_\delta/dx$ , tirée de (II-9), la valeur  $\hat{\alpha}_0$  à l'impact.

On trouve  $\hat{\alpha}_0 = 7.052$

De la valeur de  $\hat{\alpha}_0$ , on peut déduire celle de  $\delta_0$  à l'aide de (III-4)

Le calcul, en chaque point du profil, de l'épaisseur  $\delta_2(x)$  peut se conduire de la manière suivante :

La relation globale de quantité de mouvement pour un fluide iso-volume (incompressible) (équation II-7) s'écrit en multipliant ses deux membres par  $\delta_2 u_2 / v$ .

$$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_\xi} = \frac{U_\xi \delta_2}{v} \frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) \frac{\delta_2^2}{dx} \quad (\text{II-15})$$

Nous allons calculer  $\delta_2(x)$  à partir de cette relation :

Pour cela, introduisons un nouveau paramètre de forme :

$$K = \frac{\delta_2^2}{v} \frac{du_\delta}{dx} \quad (\text{II-16})$$

qui ne diffère de l'expression (II-9) de  $\hat{\alpha}$  qui par le remplacement de  $\delta$  et  $\delta_2$  compte tenu de (II-13), cette expression peut encore s'écrire :

$$K \left( \frac{37}{315} - \frac{\hat{\alpha}}{945} - \frac{\hat{\alpha}^2}{9072} \right)^2 \hat{\alpha} \approx \frac{37 \hat{\alpha}}{315} \quad (\text{II-17})$$

Les expressions de  $\delta_1/\delta_2$  et de  $-r P62/uu_b$ , rapports qui figurent dans l'équation (II-10), sont, d'après les expressions (II-13) et (II-14), des fonctions de A, et par suite des fonctions de k; elle peuvent respectivement s'écrire :

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = f_1(K) = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\hat{\alpha}}{130}}{\frac{37}{315} - \frac{\hat{\alpha}}{945} - \frac{\hat{\alpha}^2}{9072}} \approx \frac{\frac{3}{10} - \frac{\hat{\alpha}}{130}}{\frac{37}{315} - \frac{\hat{\alpha}}{945}} \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_b} = f_2(k) = \left( 2 + \frac{\Delta}{6} \right) \left( \frac{37}{315} - \frac{\Delta}{945} - \frac{\Delta^2}{9072} \right) \quad (\text{II-19})$$

## II.5. ECOULEMENT LAMINAIRE COMPRESSIBLE

### II.5.1. Facteur thermique pariétal [6]

Le facteur thermique pariétal ( $r$ ) ne dépend pratiquement que de la nature du fluide ; il est fonction du nombre de Prandtl  $P$ , on a

$$r = \sqrt{P_1}$$

où  $P$ , est le nombre de PRANDTL turbulent dont la valeur la plus précise est pour l'air, si l'on prend  $P=0.72$ , on trouve  $r=0.85$ .

Alors que  $r=1$  pour  $P=1$

### II.5.2. Paramètre de forme $F_i$

La transformation pour le paramètre de forme laminaire compressible est donnée par :

$$H = \bar{H} + \alpha M_e^2 + \beta \frac{T_p T_p}{T_e}$$

Où :  $\bar{H}$  est le paramètre de forme en écoulement laminaire incompressible.

La plaque étant athermane;  $T_p = T_p$

Pour un écoulement laminaire  $\alpha = 0.667$

Donc  $H = \bar{H} + 0.667 M_e^2$

### II.5.3 Coefficient de frottement laminaire compressible

Le coefficient de frottement est donné par :

$$C_f = \frac{T_e}{T_m} \bar{C}_f$$

Avec  $\frac{T_e}{T_m} = \frac{1}{1 + 0.144 r M_e^2}$

Comme:  $r=0.85$

$$\frac{T_e}{T_m} = \frac{1}{1 + 0.122 M_e^2}$$



Donc :

$$C_F = \left( \frac{1}{1+0.122M_e^2} \right) \overline{C_F}$$

Pour le calcul de la couche limite  $\delta$ , Rebuffet [ 12 ] utilise l'expression :

$$\delta = \left( 1 + \frac{5\overline{H}}{2H} \right) \delta_1$$

### RECAPITULATIF

$$\mu = 1.7111 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{T_e}{273}} \left( 1 + \frac{S}{273} \right) / \left( 1 + \frac{S}{T_e} \right) \quad [4]$$

où :  $\mu$  : viscosité dynamique .

$S = 110.4^\circ\text{K}$  : constante qui dépend du gaz .

$$F = \frac{0.47}{\rho u_e^2} \mu \int_0^{\delta} u_e^2 dx = \overline{\delta}^2$$

$$\overline{\delta}_2 = F^{1/2}$$

$$\wedge = \frac{\delta^2 \rho}{\mu} \frac{du_e}{dx}$$

$$\overline{H} = \left( \frac{335}{37} \right) \wedge$$

$$H = \overline{H} + 0.667 M_e^2$$

$$\overline{C_F} = \frac{\mu}{\rho \mu_e} \left( 2 + \frac{\wedge}{2} \right) \left( \frac{37}{315} - \frac{\wedge}{945} \right) \frac{1}{\delta_2}$$

$$C_F = \left( \frac{1}{1+0.122M_e^2} \right) \overline{C_F}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{C_F}{2} \frac{\delta_2 (H+2-M_e^2)}{M_e (1+0.122M_e^2)} \frac{dM_e}{dx}$$

$$\delta_1 = H\delta_2 \quad ; \quad \delta = \left( 1 + \frac{5\overline{H}}{2H} \right) \delta_1$$

### II.5.4 Equation de Von Karman pour les couches limites laminaires [3]

Dans ce cas l'écoulement libre ( hors de la couche limite ) est sans gradient de pression le long de la plaque :

$$\frac{dp_0}{dx} = 0 \quad \frac{d\omega_0}{dx} = 0$$

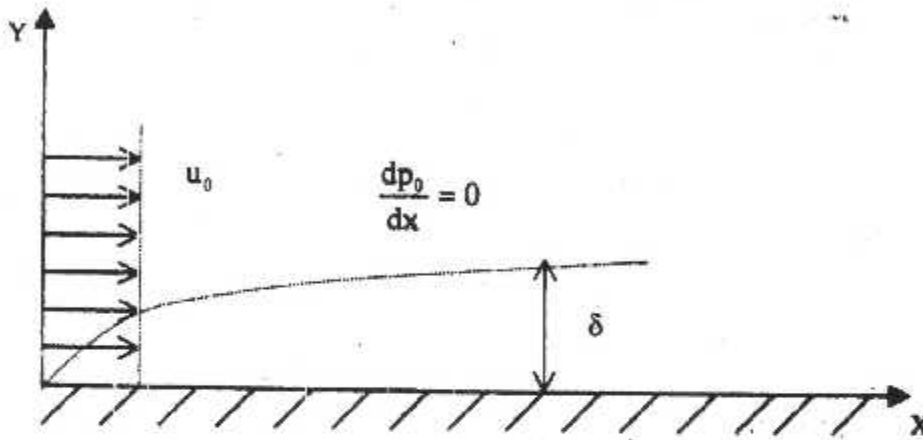


Figure II.6. La couche limite laminaire sur la plaque

Dans ces conditions l'équation de KARMAN s'écrit :

$$\frac{\tau_0}{\rho u_0^2} = \frac{d\delta_2}{dx} \quad (\text{II-20})$$

pour intégrer cette équation , il faut connaître la loi de distribution de la vitesse dans une couche limite .

La force de frottement par unité de surface sur la paroi est :

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_0}{\delta} \quad (\text{II-21})$$

Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement on respectivement pour les valeurs :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) dy = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{3y}{2\delta} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} \right) dy = \frac{3}{8} \delta \quad (\text{II-22})$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy = \frac{39}{280} \delta \quad (\text{II-23})$$

En portant les valeurs (III-18) et  $t_0$  (III-16) dans l'équation de Karman (III-1), nous obtenons :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}x}} \quad (\text{II-24})$$

En suite on peut calculer :

$$\frac{\delta_1}{x} = \frac{1.740}{\sqrt{\text{Re}x}} \quad (\text{II-25})$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0.646}{\sqrt{\text{Re}x}} \quad (\text{II-26})$$

avec  $\text{Re}x = \frac{u_0 x}{\nu}$

Le coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho u_0^2}{2}} = \frac{0.646}{\sqrt{\text{Re}x}} \quad (\text{II-27})$$

CHAPITRE III  
ÉCOULEMENT  
TURBULENT VISQUEUX

# L'ÉCOULEMENT VISQUEUX TURBULENT

## III.1. INTRODUCTION :

L'écoulement turbulent est un écoulement qui s'accompagne d'un brassage du fluide et des pulsations des vitesses et des pressions. Les particules de fluide se déplacent dans toutes les directions au hasard et leurs trajectoires sont souvent des courbes très compliquées.

Strictement parlant, un écoulement turbulent est non permanent puisque les valeurs des vitesses et des pressions ainsi que les trajectoires des particules fluides ici varient avec le temps.

## III.2. RELATION GLOBALE DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT [6]

Le théorème de la quantité de mouvement conduit à égaliser les expressions de POHLHAUSEN  $\frac{dm}{dx}$  et  $\frac{dF}{dx}$  où le premier terme est la variation du débit et le second variation des forces de frottement. Après simplification, on obtient l'équation de Von Karman :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left( \frac{H+2}{u_e} \right) \frac{du_e}{dx} + \frac{\delta_2}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \quad (\text{III.1})$$

La méthode de Head permet d'intégrer cette équation et de déterminer les paramètres de la couche limite turbulente. Pour mieux assimiler cette méthode, on va l'appliquer au cas d'un fluide incompressible.

## III.3. METHODE DE HEAD POUR LA COUCHE LIMITE TURBULENT [16]

### III.3.1. Méthode de Head pour la couche limite turbulente incompressible

En écoulement incompressible, les expressions précédentes deviennent :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (\text{III-2})$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (\text{III-3})$$

$$\Delta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} dy \quad (\text{III-4})$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left( \frac{H+2}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx} \right) \quad (\text{III-5})$$

L'équation de quantité de mouvement est intégrée en utilisant une équation auxiliaire qui est le débit d'entraînement du fluide dans la couche limite définie par :

$$\frac{d\Delta}{dx} = F \frac{\Delta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (\text{III-6})$$

où : F: est le coefficient d'entraînement , fonction du facteur de forme d'entraînement

$H_1$  définit par :

$$H_1 = \frac{\Delta}{\delta_2} = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_2} \quad (\text{III-7})$$

La relation empirique de Head entre F et  $H_1$  est :

$$F = 0.0299(H_1 - 3)^{-0.6169} \quad (\text{III-8})$$

Une autre relation entre le facteur de forme H et le facteur de forme d'entraînement  $H_1$  valable pour  $H < 2.2$  est donnée par la loi des puissances

$$H_1 = \frac{2.H}{H-1} \quad (\text{III-9})$$

En explicitant  $\Delta$  dans l'équation (III-6) on aura :

$$\frac{d(H_1\delta_2)}{dx} = F \frac{H_1 \delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (\text{III-10})$$

Après différenciation ? on obtient :

$$H_1 \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{dH_1}{dx} = F \frac{H_1 \delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (\text{III-11})$$

En utilisant l'équation de Von -Karman (équation de quantité de mouvement) (III-5) et après substitution , il vient :

$$\frac{dH_1}{dx} = -\frac{2}{(H-1)^2} \frac{dH}{dx} \quad (\text{III-12})$$

En substituant  $H_1$  et  $\frac{dH_1}{dx}$  dans (III-11) on obtient finalement :

$$-\frac{dH}{dx} = H(H^2 - 1) \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + [(H-1)F - H.C_F] \quad (\text{III-12})$$

La relation de Ludwing et Tillman entre le coefficient de friction et le facteur de forme est [5] :

$$C_F = 0.246 R_{\delta_2}^{0.268} \exp(-1.65 H) \quad (\text{III-13})$$

Avec :

$$R_{\delta_2} = \frac{u_e \delta_2}{\nu_e} = \frac{\rho_e u_e}{\mu_e} \delta_2$$

On obtient ainsi un système de trois équations à trois inconnues ( $\delta_2, H, C_F$ )

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} (H+2) = \frac{C_F}{2} \quad (\text{III-14})$$

$$H(H^2-1) \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{(H-1)}{2} [(H-1)F - HC_F] = -\delta_2 \frac{dH}{dx} \quad (\text{III-15})$$

$$C_f = 0.246 \exp(-1.56H) R_{\delta_2}^{-0.268} \quad (\text{III-16})$$

Si on connaît les conditions à l'infini, le nombre de Reynolds et les valeurs initiales de  $\delta_2$  et  $H$ , le système d'équations précédent peut être résolu.

Après avoir déterminé  $\delta_2, H$  et  $C_F$  en tous points, on déduit :

$$\delta_1 = H \delta_2 \quad (\text{III-17})$$

On peut calculer

$$H_1 = \frac{2H}{H-1}$$

$$\text{D'où} \quad : \quad \delta = H_1 \delta_2 + \delta_1 \quad (\text{III-18})$$

On a ainsi déterminé tous les paramètres de l'écoulement visqueux incompressible du point de vue dynamique.

### III.3.2 Méthode de HEAD pour la couche limite turbulente compressible :

En écoulement compressible, un paramètre important entre dans les équations régissant l'écoulement ; s'il s'agit du nombre de Mach local qui suivant l'abscisse  $x$ .

Grenn a montré que la relation, entre le coefficient d'entraînement  $F$  et le facteur de forme d'entraînement  $H_1$ , reste inchangée pour l'écoulement compressible.

#### Hypothèse de Grenn : [6]

La distribution des vitesses dans la couche limite compressible est caractérisée par le paramètre de forme défini par :

$$(H_1)_K = \frac{\int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} dy}{\int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy} \quad \text{(III-19)}$$

L'indice  $K$  dénote une propriété cinématique des couches limites compressibles.

La fonction d'entraînement  $F$  et le paramètre  $(H_1)_K$  satisfont les relations empiriques obtenues par Head.

La fonction d'entraînement est définie comme :

$$F = \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u dy \quad \text{(III-20)}$$

### III.3.3. Equations générales :

L'équation d'entraînement (III-20) permet d'écrire l'équation du débit la couche limite compressible :

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e \Delta) = \rho_e u_e F \quad \text{(III-21)}$$

Avec  $\Delta$  pour l'écoulement compressible est :

$$\Delta = \delta - \delta_1 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy$$

Après substitution (voir annexe), l'équation (III-21) s'écrit :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{F}{\delta_2} \frac{H_1}{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} + (M^2 - 1) \frac{H_1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad \text{(III-22)}$$

Avec :  $F = 0.0179(H_1 - 3)^{-0.616}$



### III.3.4. Equation de Von-Karman :

Nous avons vu précédemment que l'équation de Von- Karman s'écrit :

$$\frac{C_F}{2} = \frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left( \frac{H+2}{u_e} \right) \frac{du_e}{dx} + \frac{\delta_2}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \quad (\text{III-23})$$

Après transformation  $C_f$ , (voir annexe) l'équation ( III-23) devient :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1 C_F}{2\delta_2} + \frac{H_1(H+1)}{M_e(1+0.2M_e^2)} \frac{dM_e}{dx} \quad (\text{III-24})$$

### 3.5. Détermination du coefficient de frottement :

pour déterminer le coefficient de frottement , Spence a proposé de transformer le coefficient de frottement de l'écoulement incompressible par l'équation d'Eckert , en utilisant le concept de la température intermédiaire :

$$T_m = 0.5(T_p + T_e) + 0.22(T_f - T_e) \quad (\text{III-25})$$

Le coefficient de friction est donné par l'équation de Spence :

$$C_f = \frac{T_e}{T_m} \overline{C_f} \quad (\text{III-26})$$

où :

$C_f$  : Coefficient de frottement en écoulement compressible

$\overline{C_f}$  : Coefficient de frottement en écoulement incompressible

$T_m$  : Température intermédiaire ( moyenne) dans la couche limite

$T_p$  : Température en un point de la paroi

$T_f$  : Température de frottement

Les relations empiriques les plus usuelles en écoulement incompressible donnant le coefficient de frottement sont celles de Ludwig et Tilman :

$$\overline{C_f} = 0.246 \overline{R\delta_2}^{-0.268} \cdot 10^{-0.678 \cdot \overline{H}}$$

$$\overline{C_f} = 0.246 \exp(-1.56\overline{H}) \overline{R\delta_2}^{-0.268} \quad (\text{III-27})$$

La relation de Coles

$$C_f = \frac{0.3e^{-1.33\bar{H}}}{\left(\log_{10} \bar{R}_{\delta_2}\right)^{1.74+0.31\bar{H}}} \quad (\text{III-28})$$

Avec :

$$\bar{R}_{\delta_2} = \frac{\rho u_e \delta_2}{\mu_2}$$

On optera pour la relation de Coles , car elle donne  $C_f$  avec une précision de l'ordre de  $\pm 3\%$  tandis que celle de Ludwig et Tillman est de l'ordre de  $\pm 10\%$

### 3.6. Détermination des températures de paroi de frottement

Si la température de l'écoulement libre est  $T_e$  la température de la paroi P est  $T_p$  , la température pariétale est définie par le nombre sans dimensions :

$$r = \frac{T_f - T_e}{T_p - T_e} \quad (\text{III-29})$$

dans laquelle  $T_f$  est la température de frottement et  $T_0$  la température d'arrêt de l'écoulement extérieur.

L'équation de Barré de Saint venant donne :

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \quad (\text{III-30})$$

$$\text{Ou : } T_0 - T_e = T_e \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_e^2$$

$$\text{Donc : } T_f - T_e = -r(T_0 - T_e) = r T_e \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_e^2$$

D'où l'on déduit le rapport :

$$\frac{T_f}{T_e} = 1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \quad (\text{III-31})$$

pour une paroi athermane la température de paroi  $T_p$  est égale à la température de frottement.

### III.3.7. Facteur de forme pariétal : [6]

En écoulement turbulent le facteur thermique pariétal est :

$$r = P_t^{1/3}$$

où  $P_t$  est le nombre de Prandtl turbulent

La valeur expérimentale la plus précise du nombre de Prandtl turbulent est celle de Van-Driest :

$$P_t = 0.70 \quad ; \quad r = (0.70)^{1/3} = 0.89$$

Avec la loi adiabatique :

$$T_w - T_e = \frac{u_\tau^2}{2C_p} = T_e \frac{\gamma - 1}{2} M_\tau^2$$

où :  $T_{ic}$  est la température d'arrêt extérieure

$C_p$  est la chaleur massique à pression constante

$r$  permet d'exprimer l'échauffement de frottement en fonction de la vitesse  $U_e$  à l'extérieur de la couche limite.

### III.3.8. paramètre de forme H en écoulement compressible :

Comme pour le coefficient de frottement, on a la transformation suivante pour le paramètre de forme compressible :

$$H = \frac{T_p}{T_e} \bar{H} - \frac{T_f}{T_e} - 1 \quad (\text{III - 32})$$

où  $\bar{H}$  est le paramètre de forme en écoulement incompressible

La paroi étant athermane :  $T_p = T_f$

Donc :

$$H = \frac{T_f}{T_e} (\bar{H} + 1) - 1 = \frac{T_p}{T_e} (\bar{H} + 1) - 1$$

En écoulement incompressible :

$$\bar{H} = \frac{1 + (H_1 + 0.68.4)}{(40.7H_1 - 86.8)} \quad (\text{III - 33})$$

Avec :

$$H_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_2} \quad \text{et} \quad \frac{T_f}{T_e} = 1 + r \frac{\delta_1 - 1}{2} M_e^2$$

comme  $r = 0.89$

$$\gamma = 1.4 \quad (\text{air})$$

$$\text{Donc : } \frac{T_f}{T_e} = 1 + 0.178 M_e^2$$

$$\text{Et } H = (1 + 0.178 M_e^2)(\overline{H} + 1) - 1$$

La température intermédiaire est :

$$T_m = 0.5(T_p + T_e) + 0.22(T_f - T_e)$$

comme  $T_p = T_f$

$$T_m = T_e \left[ 0.5 \left( \frac{T_f}{T_e} + 1 \right) - 0.22 \left( \frac{T_f}{T_e} - 1 \right) \right]$$

D'autre part :

$$\frac{T_f}{T_e} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2$$

Donc :

$$T_m = T_e (1 + 0.144 r M_e^2)$$

pour  $r = 0.89$

On aura :

$$\frac{T_e}{T_m} = \frac{1}{1 + 0.128 M_e^2}$$

pour calculer le coefficient de frottement en écoulement incompressible , il

faut déterminer  $\overline{R}_{\delta_2}$

Le passage de compressible en incompressible se fait par :

$$\overline{R}_{\delta_2} = \frac{\mu_e}{\mu_m} R_{\delta_2}$$

Le rapport des viscosités  $\frac{\mu_e}{\mu_m}$  est relié par la loi de Sutherland [12] au rapport des température correspondante  $\frac{T_e}{T_m}$  par l'équation :

$$\frac{\mu_e}{\mu_m} \left( \frac{T_e}{T_m} \right)^r$$

Où  $r$  est le facteur thermique pariétal

$$\text{Donc : } \bar{R}_{\delta_2} = \left( \frac{T_e}{T_m} \right)^r R_{\delta_2} = \left( \frac{1}{1+0.128M_e^2} \right) R_{\delta_2} \quad (\text{III-34})$$

$$R_{\delta_2} = \frac{\rho u}{\mu} \cdot \delta_2$$

Si l'on connaît les paramètres  $x_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0$  et  $\mu_0$  en un point  $x_0$ , on pourra déterminer les paramètres  $x$ ,  $\rho$ ,  $u$  et  $\mu$  en un point  $x$  par les équations de la dynamique des gaz :

$$R_{\delta_2} = \frac{\rho_e u_e}{\mu_e} \cdot \delta_2 = R_u \cdot \delta_2$$

$R_u$  est le nombre de Reynolds unitaire :

$$R_{u0} \text{ unitaire} = \frac{\rho_0 u_0}{\mu_0} = R_{u0}$$

$$R_u \text{ unitaire} = \frac{\rho_e u_e}{\mu_e} = R_u$$

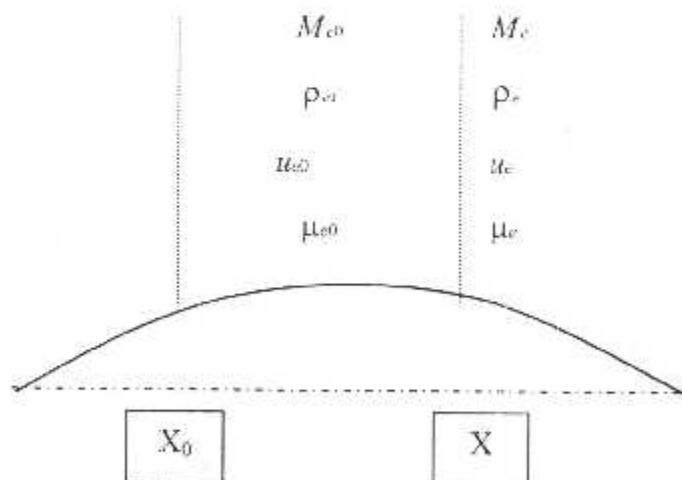


Figure III.4. Distribution sur l'obstacle

On a donc :

$$\frac{R_{e1}}{R_{e0}} = \frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \frac{u_e}{u_{e0}} \frac{\mu_0}{\mu_e} \quad (\text{III-35})$$

Nous allons donc exprimer  $\frac{\rho_e}{\rho_{e0}}$ ,  $\frac{u_e}{u_{e0}}$  et  $\frac{\mu_e}{\mu_0}$  en fonction du nombre de Mach.

Expression de :  $\frac{u_e}{u_{e0}}$

$$u_e = \frac{M_e}{\sqrt{\gamma} r T_e} \quad , \quad u_{e0} = \frac{M_{e0}}{\sqrt{\gamma} r T_{e0}}$$

Donc :

$$\frac{u_e}{u_{e0}} = \frac{M_e}{M_{e0}} \sqrt{\frac{T_{e0}}{T_e}}$$

Mais :

$$\frac{T_{e0}}{T_e} = \frac{1 + \frac{\gamma-2}{2} M_e^2}{1 + \frac{\gamma-2}{2} M_{e0}^2} = \frac{1 + 0.2 M_e^2}{1 + 0.2 M_{e0}^2}$$

$$\text{Et } \frac{u_e}{u_{e0}} = \frac{M_e}{M_{e0}} \sqrt{\frac{1 + 0.2 M_{e0}^2}{1 + 0.2 M_e^2}} \quad (\text{III-36})$$

Où  $u_{e0}$ ,  $M_{e0}$  sont respectivement, la vitesse et le nombre de Mach à l'abscisse

$x_0$

Expression de :  $\frac{\mu_{e0}}{\mu_e}$

$$\frac{\mu_{e0}}{\mu_e} = \left( \frac{T_{e0}}{T_e} \right)^{0.7} = \left( \frac{1 + 0.2 M_e^2}{1 + 0.2 M_{e0}^2} \right)^{0.7} \quad [7]$$

Expression de :  $\frac{\rho_e}{\rho_{e0}}$

On a :  $P_e = \rho_e r T_e$  ,  $P_{e0} = \rho_{e0} r T_{e0}$

Où  $r$  est la constante des gaz parfaits

Donc :  $\frac{\rho_e}{\rho_{e0}} = \frac{P_e}{T_e} \frac{T_{e0}}{P_{e0}}$

$$\text{Et : } \frac{P_e}{P_c} = \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\delta-1}}$$

On en déduit le rapport  $\frac{R_w}{R_{w0}}$  :

$$\frac{R_w}{R_{w0}} = \frac{M_e}{M_{e0}} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{2.5} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{0.7} \left( \frac{1-0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{0.5} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)$$

Finalement :

$$\frac{R_w}{R_{w0}} = \frac{M_e}{M_{e0}} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{1.3} \quad (\text{III-37})$$

Comme :  $R_{e0} = \frac{\rho_{e0} u_{e0}}{\mu_{e0}}$

$$R_w = \frac{\rho_{e0} u_{e0}}{\mu_{e0}} \frac{M_e}{M_{e0}} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{1.3} \quad (\text{III-38})$$

Si on connaît les valeurs de  $\rho_{e0}, u_{e0}, \mu_{e0}$  et  $M_{e0}$  en un point  $x_0$ , on pourra déterminer  $R_w$  en un point  $x$  où le nombre de Mach est  $M_e$ , ainsi  $R_{\delta_2}$ , donc  $\overline{R_{\delta_2}}$  et par conséquent le coefficient de frottement pourront être calculés, pour équation on utilise la méthode d'Euler.

### Résumé de calcul

$$R_w = \frac{\rho_{e0} u_{e0}}{\mu_{e0}} \frac{M_e}{M_{e0}} \left( \frac{1+0.2M_e^2}{1+0.2M_{e0}^2} \right)^{1.3} \quad (\text{III-39})$$

$$R_{\delta_2} = R_w \cdot \delta_2 \quad (\text{III-40})$$

$$\overline{R_{\delta_2}} = \frac{1}{(1+0.128 M_e^2)^{0.39}} \cdot R_{\delta_2} \quad (\text{III-41})$$

$$\overline{C_f} = \frac{0.3 \exp(-1.33 \overline{H})}{(\log_{10} \overline{R_{\delta_2}})^{1.74+0.31H}} \quad (\text{III-42})$$

$$C_f = \frac{1}{(1 + 0.128 M_e^2)^{0.89}} \bar{C}_f \quad (\text{III-43})$$

$$\delta_1 = H \delta_2 \quad (\text{III-44})$$

$$\delta = H \delta_2 + \delta_1 \quad (\text{III-45})$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{F}{\delta} \frac{H_1(H+1)}{M_e(1+M_e^2)} \frac{dM_e}{dx} \quad (\text{III-46})$$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{C_f}{2} \frac{\delta_2(H+2-M_e^2)}{M_e(1+0.2M_e^2)} \frac{dM_e}{dx} \quad (\text{III-47})$$

$$\bar{H} = 1 + \frac{H_1 + 68.4}{40.7H_1 - 86.8} \quad (\text{III-48})$$

$$H = (1 + 0.178M_e^2)(\bar{H} + 1) - 1 \quad (\text{III-49})$$

$$F = 0.0179(H_1 - 3)^{-0.6169} \quad (\text{III-50})$$



### III.3.9. Méthode de résolution de l'écoulement visqueux

Pour intégrer les équations (III-45) et (III-46), on utilise la méthode d'Euler.

#### III.3.9.1. Principe de la méthode

La dérivée d'une fonction  $f(x)$  peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

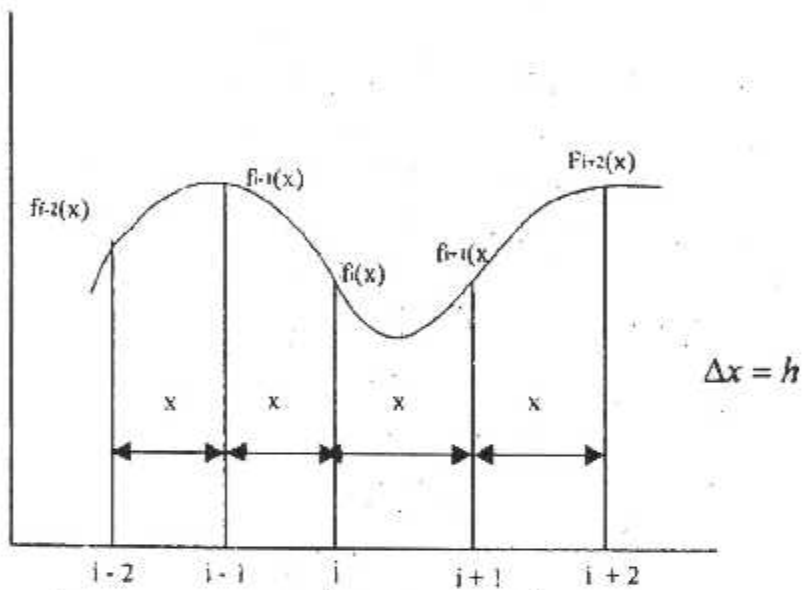


Figure III.5. Schéma d'Euler

Où :

$$\frac{\Delta}{\Delta x} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x}$$

avec : 
$$\frac{\Delta}{\Delta x} f(x) \approx \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

donc, la dérivée d'une fonction  $f(x)$  est définie par :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

### III.3.9.2.Exemple :

1. Intégration de :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1 Cf}{2\delta_2} + \frac{H_1(H+1)}{M_e(1+0.2M_e^2)} \frac{dM_e}{dx}$$

La méthode d'Euler donne :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{(H_1)_{i+1} - (H_1)_i}{S_i}$$

Avec :  $S_i = x_{i+1} - x_i$

$$\frac{dM_e}{dx} = \frac{(M_e)_{i+1} - (M_e)_i}{S_i}$$

On obtient :

$$(H_1)_{i+1} = (H_1)_i + \frac{S_i F}{(\delta_2)_i} - \frac{S_i (H_1)_i Cf}{2(\delta_2)_i} + \frac{(H_1)_i (H_1)_i + 1}{(M_e)_i (1 + 0.2(M_e)_i^2)} [(M_e)_{i+1} - (M_e)_i]$$

pour  $i=0$  (amorcer de la récurrence)

$$(H_1)_1 = (H_1)_0 + \frac{S_0 F_0}{(\delta_2)_0} - \frac{S_0 (H_1)_0 Cf_0}{2(\delta_2)_0} + \frac{(H_1)_0 (H_1)_0 + 1}{(M_e)_0 (1 + 0.2(M_e)_0^2)} [(M_e)_1 - (M_e)_0]$$

Intégration de :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{Cf}{2} \frac{\delta_2(H+2-M_e^2)}{M_e(1+0.2M_e^2)} \frac{dM_e}{dx}$$

La méthode d'Euler nous permet d'écrire :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{(\delta_2)_{i+1} - (\delta_2)_i}{S_i}$$

$$\frac{dM_e}{dx} = \frac{(M_e)_{i+1} - (M_e)_i}{S_i}$$

D'où :

$$(\delta_2)_{i+1} = (\delta_2)_i + \frac{S_i C f_i}{2} \frac{(\delta_2)_i [(M_e)_{i+1} - (M_e)_i]}{(M_e)_i (1 + 0.2(M_e)_i^2)} (H_{i+2} - (M_e)_i^2)$$

pour  $i=0$  ( amorcer de la récurrence )

$$(\delta_2)_1 = (\delta_2)_0 + \frac{S_0 C f_0}{2} \frac{(\delta_2)_0 [(M_e)_1 - (M_e)_0]}{(M_e)_0 (1 + 0.2(M_e)_0^2)} (H_0 + 2 - (M_e)_0^2)$$

CHAPITRE IV  
INTERPRETATION  
NUMERIQUE ET ANALYSE  
DES RESULTATS

## IV-INTERPRÉTATION NUMIRIQUE ET ANALYSE DES RÉSULTATS

### IV.1. INTRODUCTION

On doit tout d'abord donner une définition pratique de l'aile, avant d'aborder l'examen de ses caractéristiques géométriques.

Nous savons tous, qu'un avion ne se maintient dans l'air que grâce à une surface sustentatrice soumise aux actions aérodynamiques, lesquelles déterminent une composante verticale, dirigée vers le haut, destinée à équilibrer le poids de l'appareil.

Cette surface sustentatrice prendra le nom de voilure, et elle sera généralement distribuée symétriquement par rapport à l'axe longitudinal de la cabine. La voilure peut être monoplane ou multiplane. On ne construit plus guère, à l'heure actuelle, que des voilures monoplanes, lesquelles sont constituées d'une ou deux ailes sustentatrices. Plus généralement, nous pouvons concevoir en théorie une aile dont les dimensions transversales soient infinies, nous préciserons par la suite les qualités d'une telle surface portante.

#### IV.1.1. Caractéristiques géométriques du profil d'aile

Le profil d'aile : C'est la surface déterminée par la section d'une aile à l'aide d'un plan vertical parallèle à la direction de la vitesse relative ( l'avion étant supposé dans la position normale du vol horizontal)

#### IV.1.2. Influence de la forme du profil.[11]

Les deux paramètres fondamentaux qui caractérisent un profil, sont : son épaisseur et sa courbure ; nous allons donner leurs effets respectifs sur des ailes de même allongement, pour deux profils différents

- profil symétrique mince
- profil symétrique épais

D'après les résultats obtenus dans une veine d'une soufflerie, on peut faire les remarques ci-après:

a) Le profil symétrique mince a une traînée minimale très faible, mais une portance faible.

b) Le profil symétrique épais a une traînée minimale. plus élevée, mais une portance élevée.

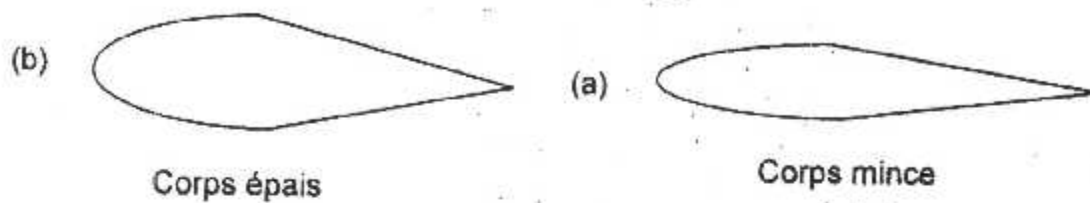


Figure IV.1. Représentation les deux différentes formes des profils symétriques.

## IV.2. PROFIL UTILISE

L'histoire de développement des profils d'ailes est longue, elle regroupe plusieurs noms renommés.

Au début du vingtième siècle, les méthodes classiques en hydrodynamique ont été appliquées avec succès aux profils d'ailes. Il devenait alors possible de prédire les caractéristiques aérodynamiques pour certaines géométrie de profils d'ailes d'une manière théorique.

En 1929, l'organisme américain de recherche aéronautique (NACA), commença à étudier les caractéristiques pour une série systématique de profils d'ailes dans le but de trouver la forme du profil la plus adéquate.

A partir de 1932, on retrouve l'apparition des profils séries NACA qui sont désignés par des chiffres dont la composition permet de déduire les principales caractéristiques géométriques.

### VI.2.1. Description du corps utilisé

C'est un profil mince biconvexe employé pour les avions dont la forme générale est donnée sur la figure ci-dessous

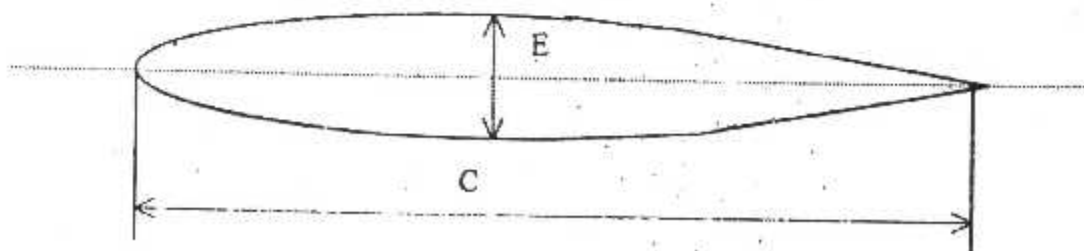


Figure IV.2. Représentation du profil utilisé (NACA 0012)

Ou : le rapport  $C/E$  s'appelle l'allongement du profil

$C$  : la corde du profil

$E$  : l'épaisseur du profil

## IV.3. ALGORITHME DE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT VISQUEUX.

### ÉCOULEMENT NON VISQUEUX

**ETAPE.1 :** Introduire des données à l'infini amont (densité, Mach, température, pression, incidence)

**ETAPE.2 :** Calcul des paramètres à l'infini amont,  $\beta$  et la célérité du son

**ETAPE.3 :** calcul des paramètres locaux de l'écoulement non visqueux (perturbation, célérité du son, température, densité, Mach et pression).

### ÉCOULEMENT VISQUEUX

**ETAPE.4 :** Calcul des paramètres de l'écoulement laminaire visqueux par la méthode de POHLHAUSEN (épaisseur de la couche limite, épaisseur de déplacement, épaisseur de quantité de mouvement, nombre de Reynolds et coefficient de frottement) par la méthode de POHL\_HAUSEN de  $l=1$ ,  $N_l$  où  $N_l$  est le point de transition qui se détermine par la chute brusque du facteur de forme qui correspond au dépassement du nombre de Reynolds critique.

**ETAPE.5 :** Calcul des paramètres de l'écoulement turbulent visqueux par la méthode de HEAD (même paramètres que l'étape 4 avec  $\delta$  (ta min aire) =  $\delta_{tr}$  (turbulent) qui est le point de transition).

**TAPE.6 :** calcul des efforts et coefficient aérodynamique ( $c_z, C_x, T_F, T_p$ )

**ETAPE.7 :** Refaire la procédure, à partir de l'étape 4, sur le nouveau corps

$$X_1 = x$$

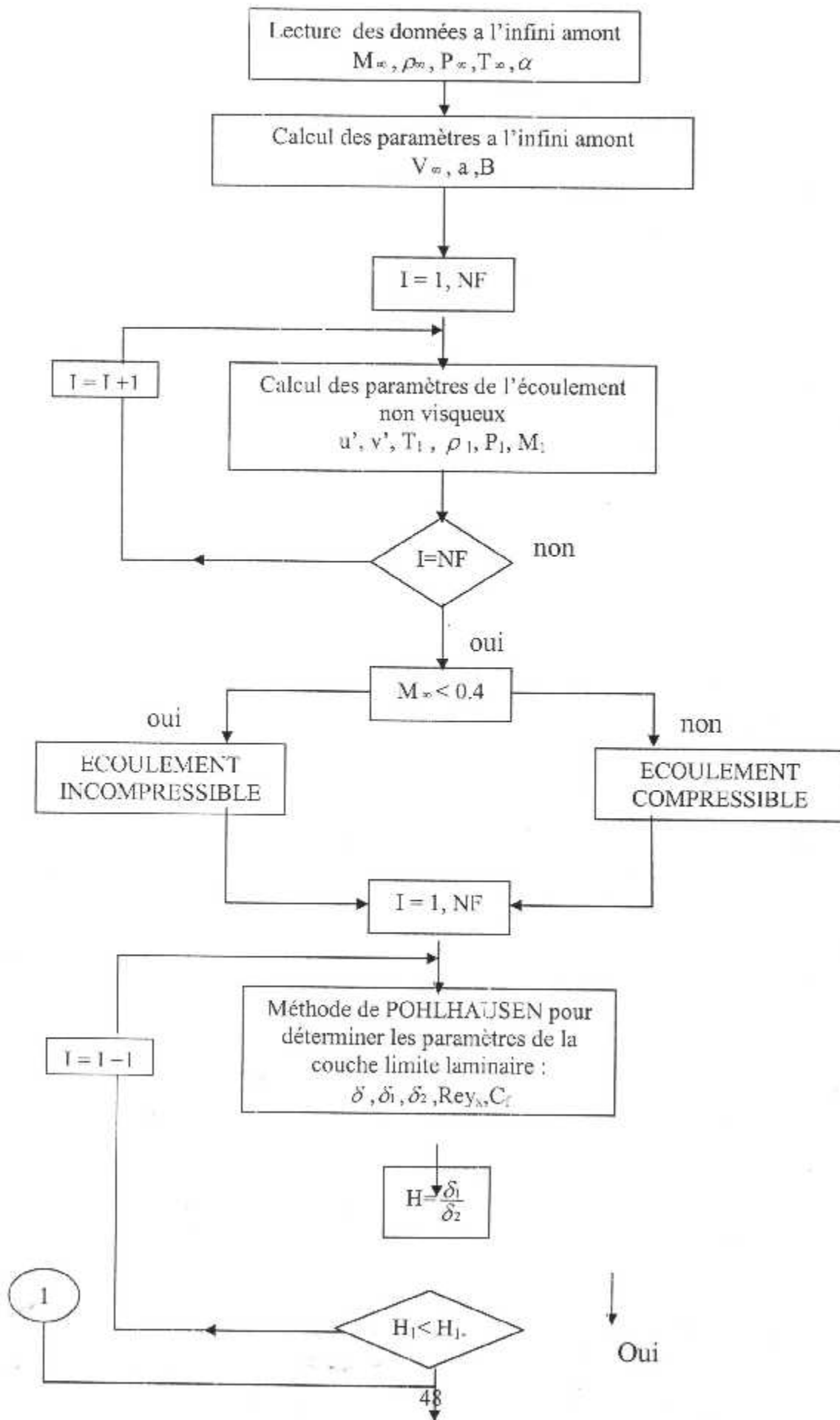
$$Y_1 = y + \delta_1$$

Jusqu'à avoir la forme optimale.

FIN DU PROGRAMME

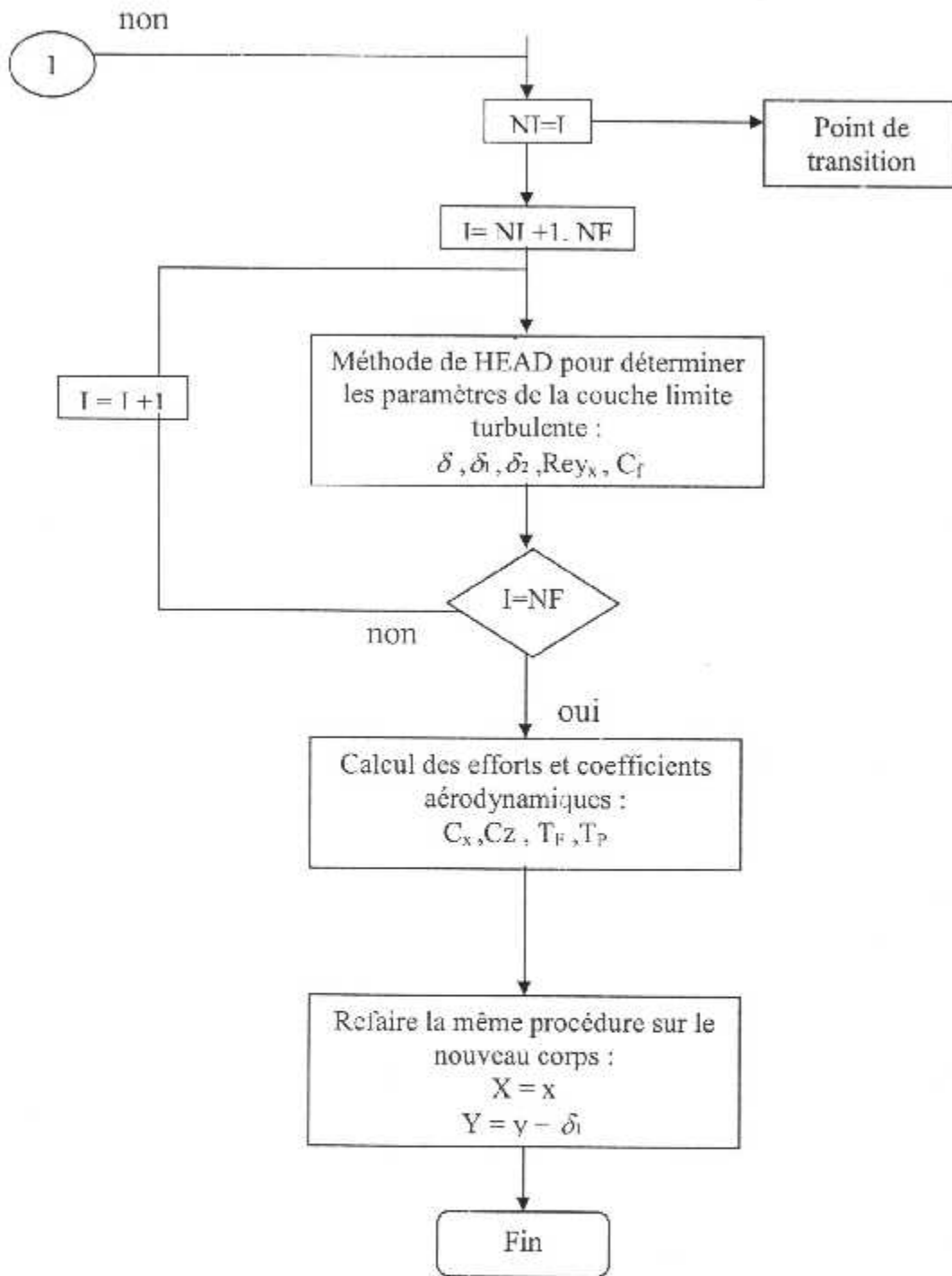


#### IV-4-ORGANIGRAMME DE CALCUL

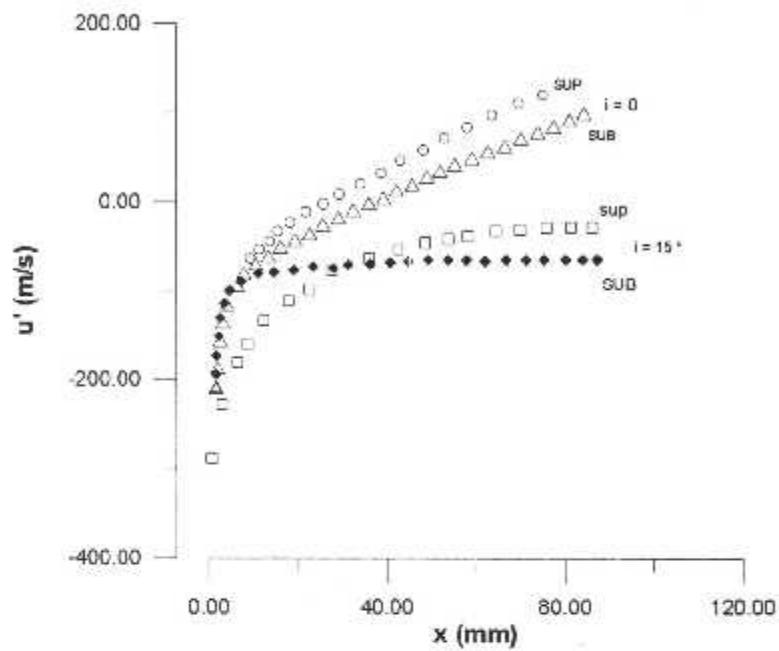


**ECOULEMENT NON VISQUEUX**

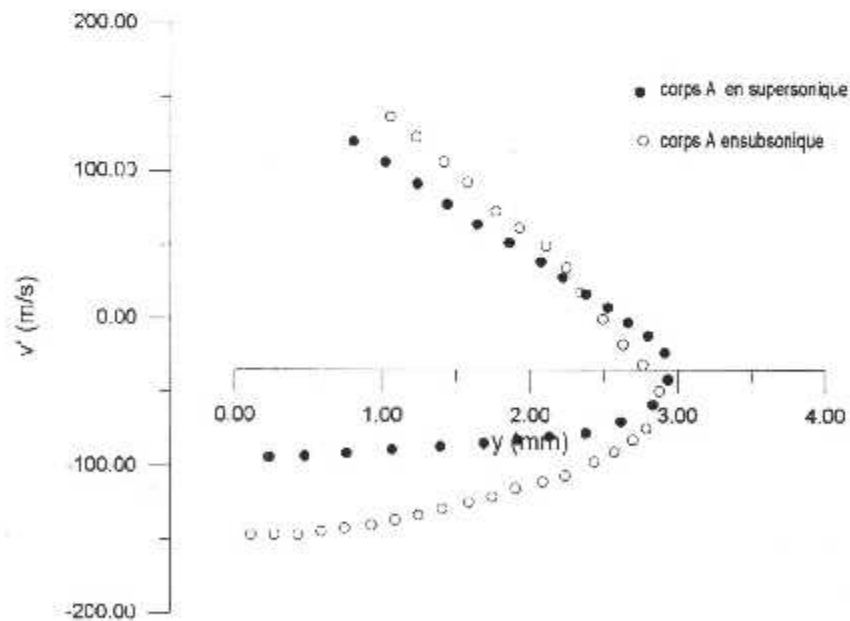
**ECOULEMENT VISQUEUX**



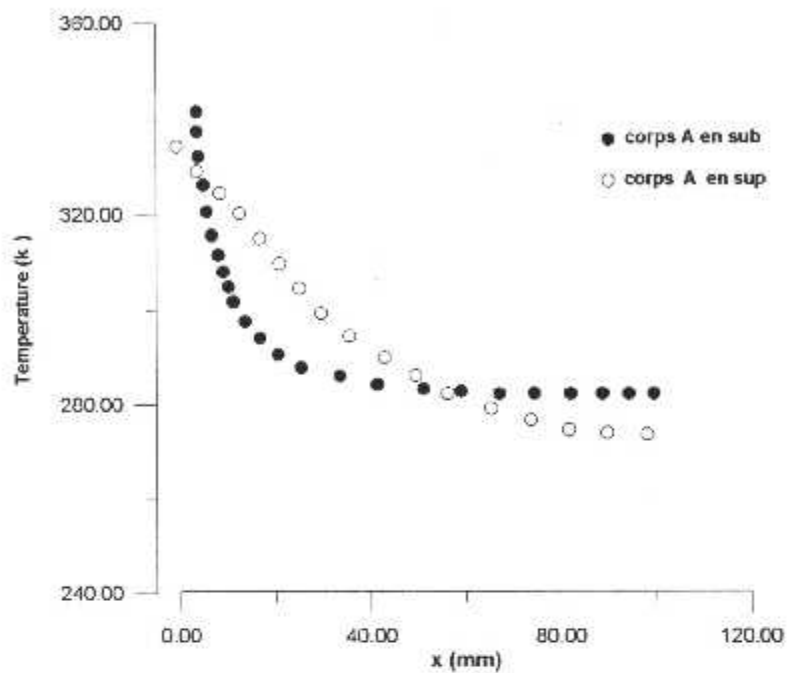
#### IV.5.RESULTATS OBTENUS



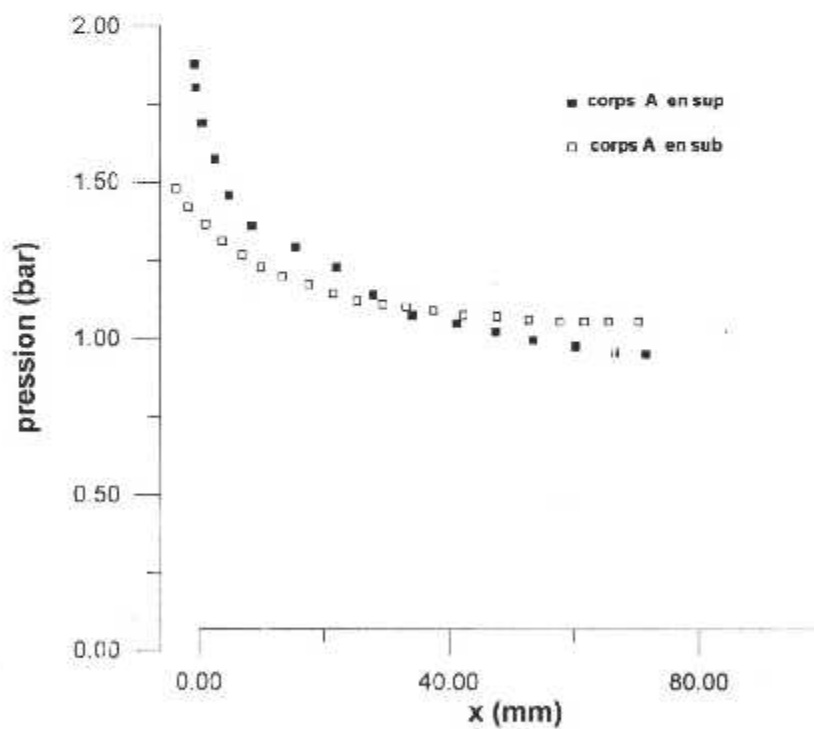
**Figure IV.1** Variation de la vitesse de perturbation selon l'axe ( $x$ ) en fonction de l'abscisse, pour un Mach de 1.3 et 0.7,  $\alpha = 15^\circ$



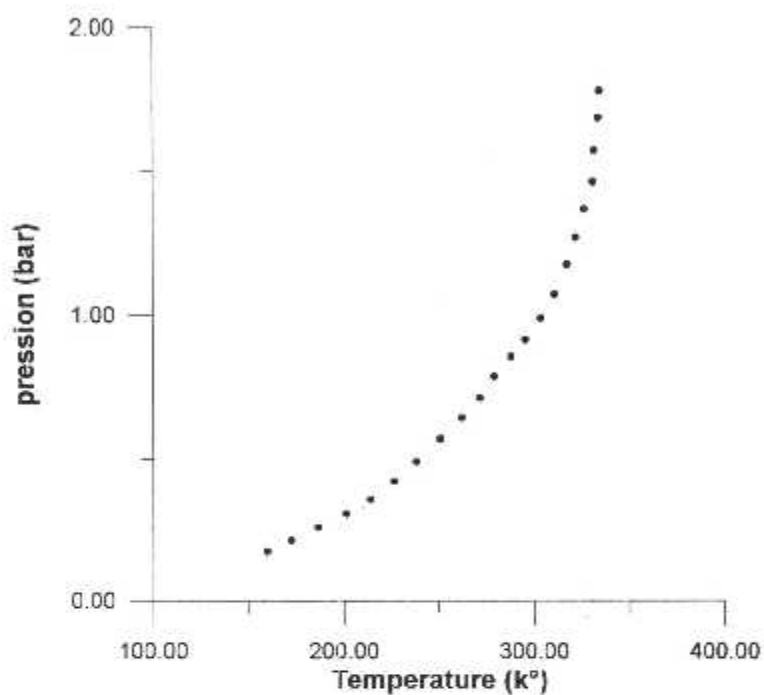
**Figure IV.2** Variation de la vitesse de perturbation selon l'axe ( $y$ ) en fonction de l'ordonnée pour un Mach de 1.3 et 0.7 incidence nulle, le long du profil



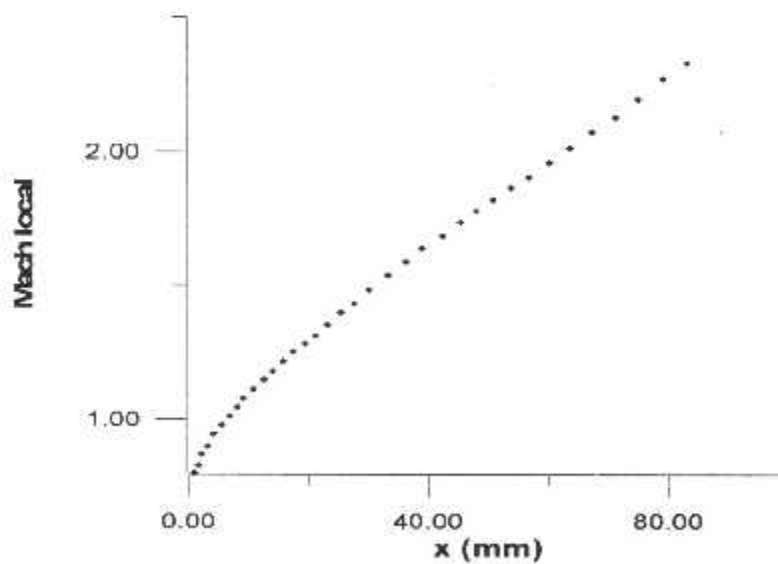
**Figure IV.3** Variation de la température en fonction de l'abscisses pour un Mach de 1.3 et 0.7 avec incidence nulle , le long du profil



**Figure IV.4** Variation de la pression en fonction de l'abscisse pour un Mach de 1.3 et 0.7 , incidence nulle , le long du profil



**Figure IV.5** Variation de la pression en fonction de la température pour un Mach de 1.3 , incidence nulle le long du profil



**Figure IV.6** Variation du Mach local en fonction de l'abscisse pour un Mach de 1.3, incidence nulle , le long du profil

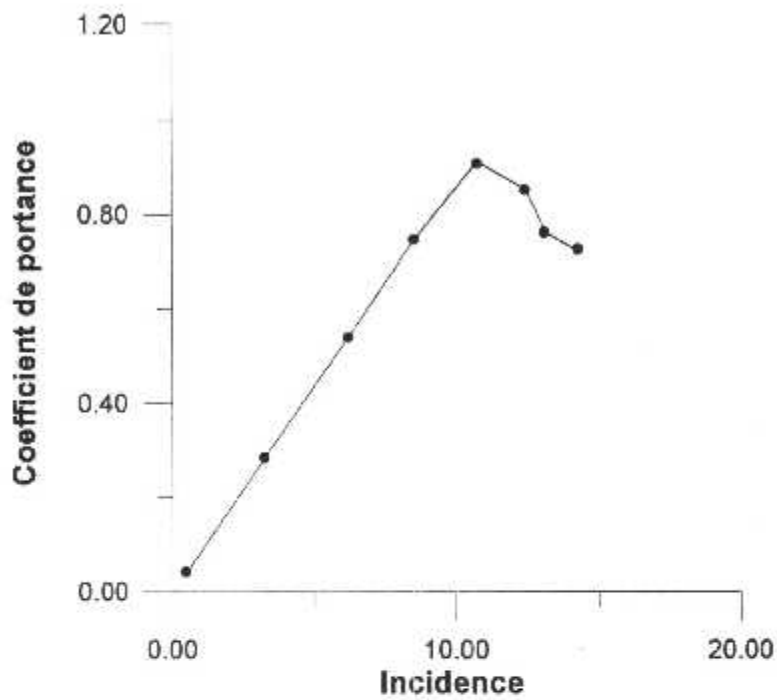


Figure IV.7 Variation de coefficient de portance en fonction de l'incidence pour un  $M = 1.4$

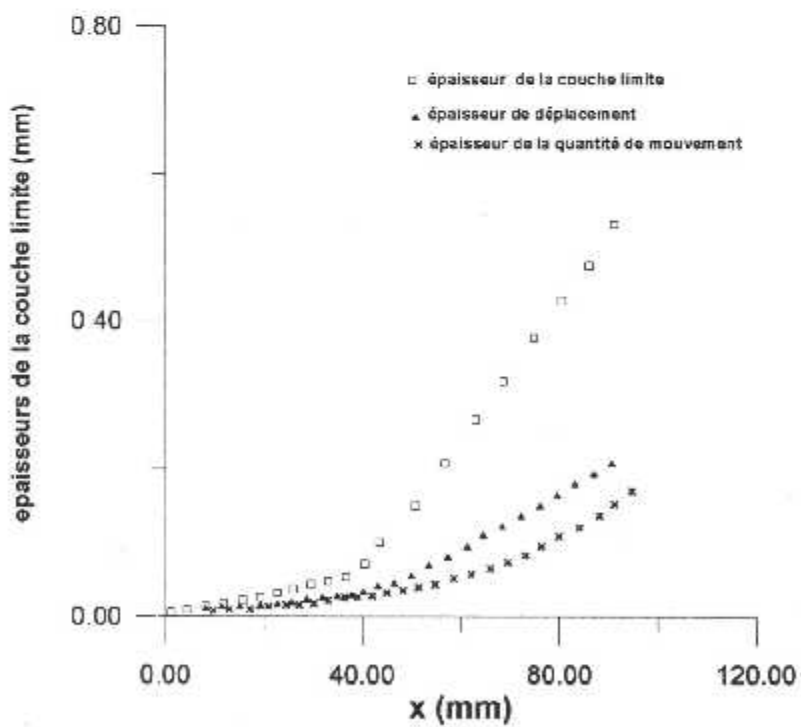
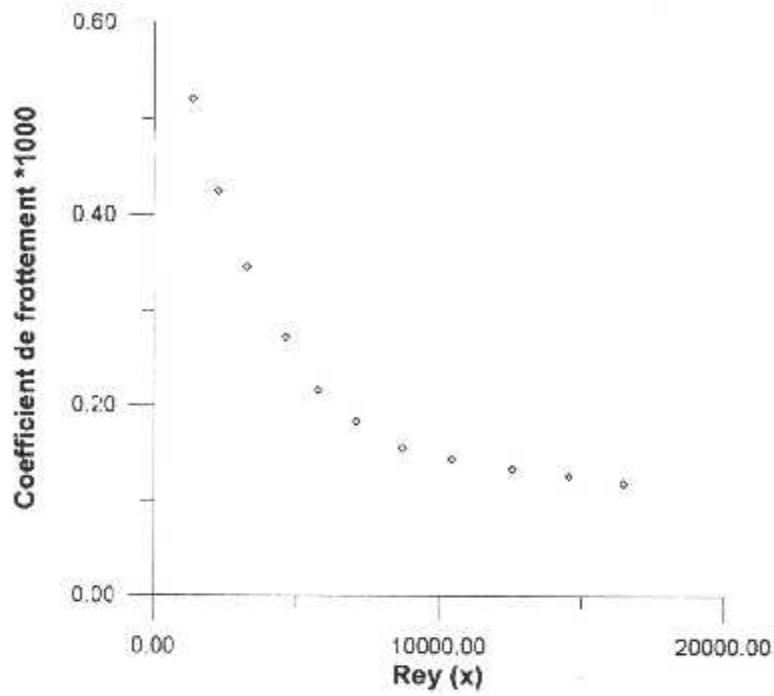
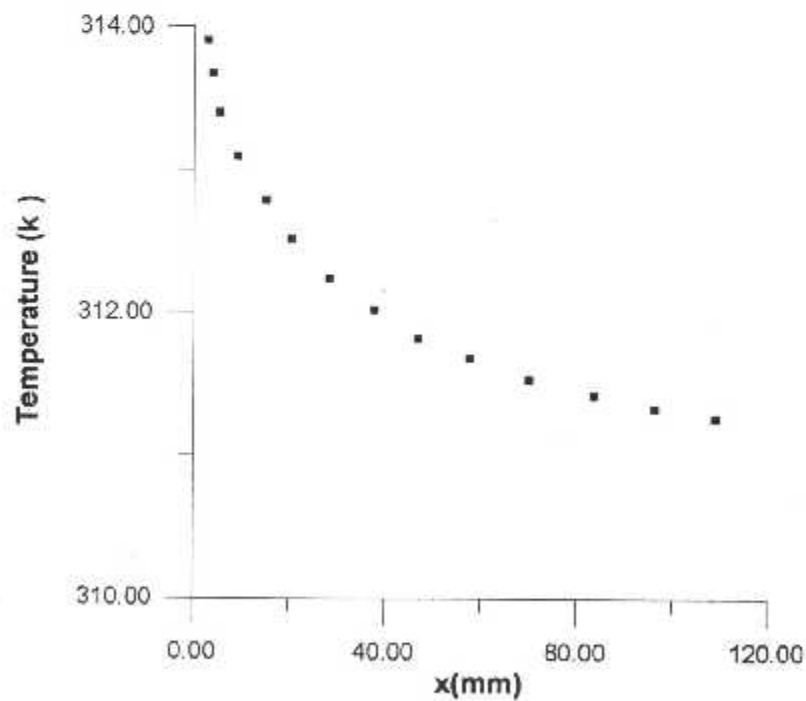


Figure IV.8 Variaticn des épaisseurs de la couche limite pour un  $M = 0.6$ , avec incidence nulle le long du profil



**Figure IV.9** Variation du coefficient de frottement en fonction de Reynolds pour un  $M=0.6$  et incidence nulle



**Figure IV.10** Variation de température en fonction de l'abscisse pour un  $M = 0.7$ , incidence nulle

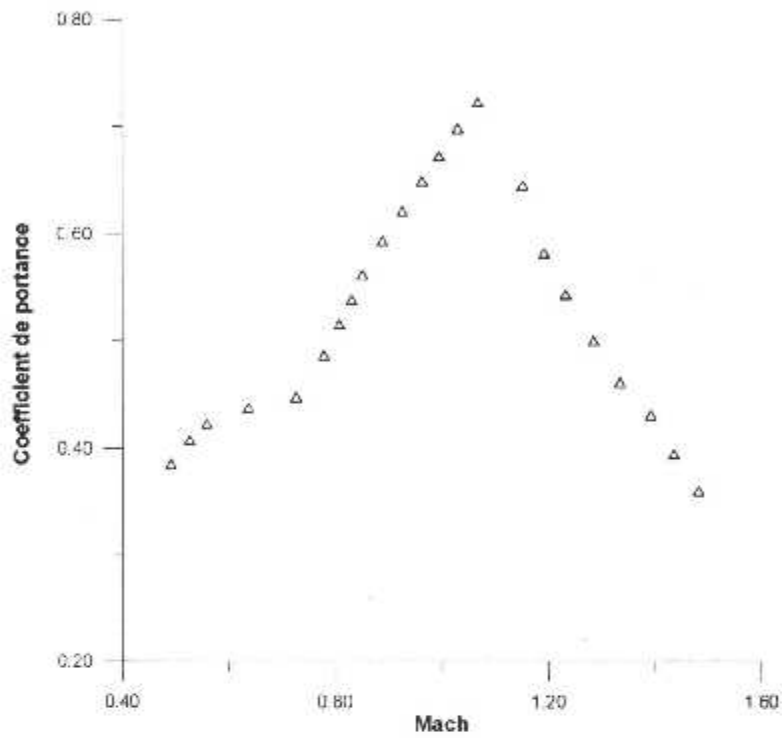


Figure.IV.11 Variation du coefficient de portance en fonction du Mach ,  $\alpha = 5^\circ$

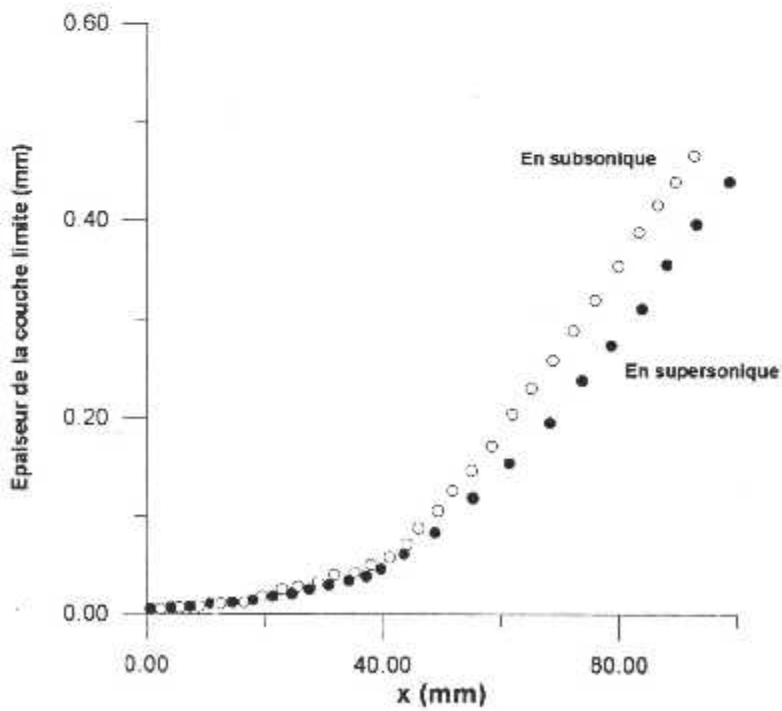


Figure IV.12 Variation de l'épaisseur de la couche limite en fonction de l'abscisse pour un Mach de 0.7 et 1.3



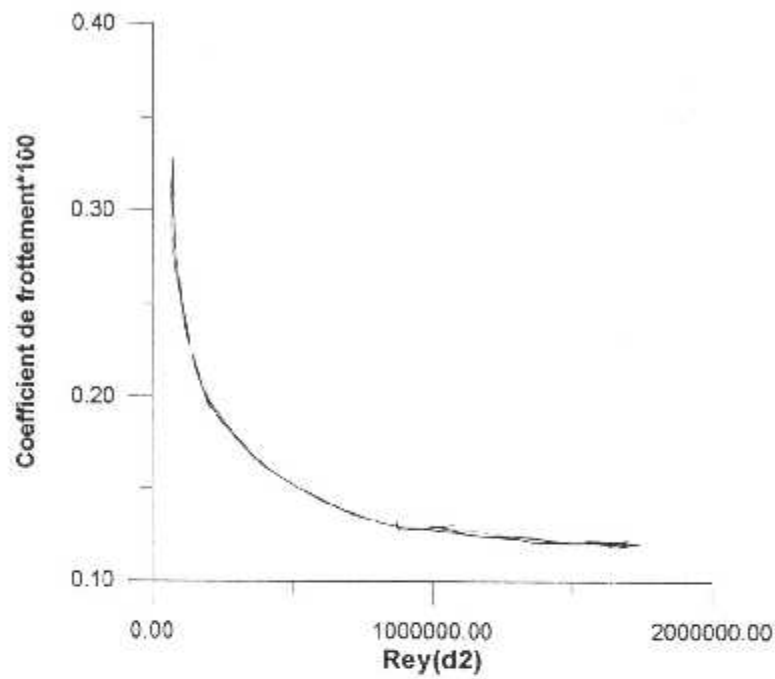


Figure IV.13 Variation du coefficient de frottement en fonction du  $Rey \delta 2$  en écoulement turbulent pour un  $M = 0.6$ , incidence nulle

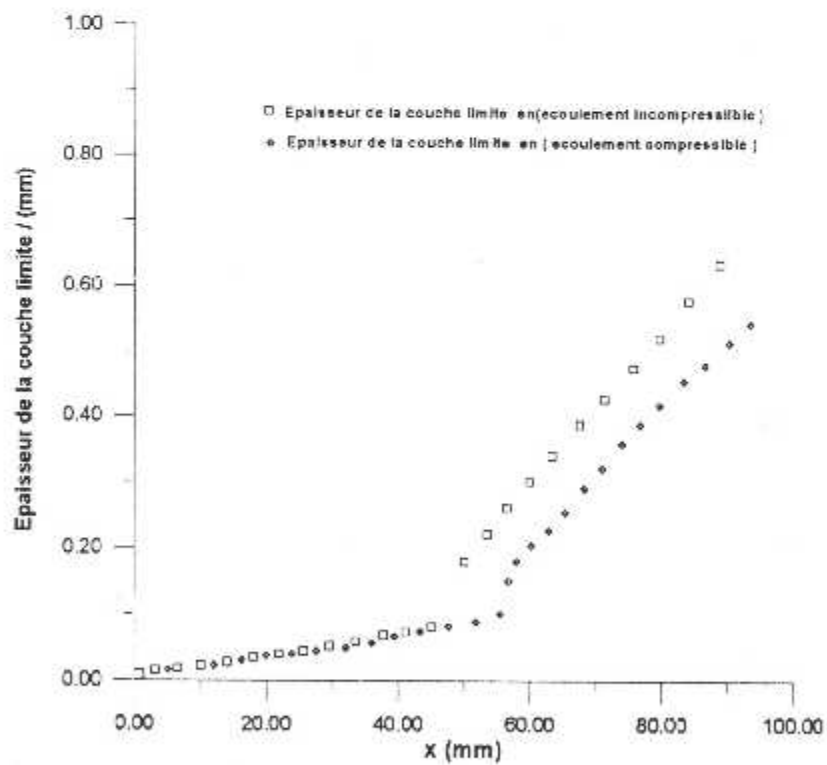


Figure IV.14 Variation de l'épaisseur de la couche limite en fonction de l'abscisse pour  $M = 0.8$  et  $0.1$ , pour incidence nulle

## IV.6. ANALYSE DES RESULTATS

On considère un écoulement d'air dans les mêmes conditions que dans une expérience en soufflerie.

- Conditions atmosphériques

Pression :  $P_x = 1.013 \text{ bar}$

Température :  $T_\infty = 288 \text{ }^\circ\text{K}$

Densité :  $\rho_x = 1.225 \text{ Kg /m}^3$

Le Mach et l'incidence à l'infini sont variables pour voir leurs influences

- Géométrie du profiles

Corde :  $C = 100\text{mm}$

Epaisseur maximum :  $E = 5.998 \text{ mm}$

### IV.6.1. Résultats relatifs à l'écoulement non visqueux

a- Les vitesses de perturbations :

Les figures (IV-1) et (IV-2) montrent que les perturbations sont effectivement petites en comparaison avec la vitesse du son et celle de l'écoulement 'a l'infini.

La vitesse de perturbation est donnée par :

$$v_{per} = \sqrt{u'^2 + v'^2}$$

La figure (IV-1) montre que l'écoulement au bord d'attaque subit une diminution de la vitesse  $U$  selon l'axe.  $U = U_\infty + u'$

Cette diminution est due au contact de l'écoulement avec l'obstacle. On constate qu'à partir d'un point du profil qui correspond à la tangente maximale ( $h'(x_p - by_p) = 0$ ), la vitesse  $u$  augmente et cela est dû à la détente de l'écoulement.

La figure (IV-1) montre aussi l'influence de l'incidence sur la vitesse, on trouve que les perturbations pour une incidence non nulle (positive) sont minimales par rapport à celles de l'incidence nulle.

On peut faire les mêmes commentaires précédents pour le cas de la figure (IV.2) où les perturbations selon  $y$  sont importantes au bord d'attaque, mais elles subissent une diminution du point correspond à la tangente maximale.

b- Distribution de la pression, la température et du nombre de Mach :

D'après les figures (IV-3) et (IV-4), la pression et la température subissent une diminution le long du profil, à partir du bord d'attaque où ils sont maximaux jusqu'au bord de fuite.

Ces deux figures sont obtenues à des vitesses différentes (subsonique et supersonique.), et comme la relation entre la température est une relation hyperbolique, cette relation est vérifiée par la figure (IV-5).

Un paramètre important donné par l'écoulement non visqueux est le nombre de Mach local, donné par la figure (IV-6). Du fait que le gradient des vitesses varie en sens contraire que le gradient de pression. L'écoulement est accéléré dans le sens des abscisses croissantes, il n'y a pas de retour de fluide, ce qui évite la formation de tourbillon (écoulement irrotationnel)

#### **IV.6.2. Résultats relatifs à l'écoulement visqueux**

La figure (IV-7) montre la variation du coefficient de portance ( $C_z$ ) avec l'incidence, on constate une évolution rectiligne de ce coefficient ( $C_z = a.i$ ) dans une gamme d'incidence (0 à 15°).

La brusque diminution de ( $C_z$ ) à partir d'une certaine incidence, (15 à 20°) est due à la chute des dépressions sur l'extrados consécutive au décollement de la couche limite, la zone intéressée par le décollement augmentant d'importance avec l'incidence, les dépressions continuent à diminuer ainsi que la valeur de  $C_z$ . [9]

La figure (IV-8) montre le développement de la couche limite le long du profil où nous trouvons deux écoulements laminaire et turbulent qui sont séparés par une zone de transition qui est due à la présence d'un gradient de pression adverse, cette présence s'exerce sur le développement de la couche limite turbulente sur la forme du profil des vitesses et sur son comportement à l'approche du décollement, ce qui provoque une diminution corrélative du facteur de forme  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  dépendant du nombre de Reynolds, en laminaire de l'ordre de 2.69 et en turbulent de l'ordre de 1.45 pour notre cas.

Dans la région de transition, le coefficient de frottement augmente rapidement comme le montre en figure (IV-13).

En conséquence, l'épaisseur de la quantité de mouvement croît beaucoup plus vite contrairement à l'épaisseur de déplacement, Ainsi ce dernier n'évolue pas de façon montante à cause de la variation brutale du facteur de forme  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  [17]

La figure (IV-9) détermine la variation du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds. On remarque qu'au bord d'attaque le coefficient de frottement en écoulement laminaire est maximal, puis il subit une décroissance due à la diminution du rapport des vitesses  $U/U_c$  et de la pente à l'origine du profil des vitesses apportée par le gradient de pression positif, qui se traduit, par une décroissance de  $C_f$ . L'expérience montre le plus souvent que le décollement est "annoncé" par une augmentation rapide de  $H$  et par diminution rapide de  $C_f$  dans la région qui le précède. [7]

La figure (IV-10) montre la variation de la température à la paroi en fonction de l'abscisse en écoulement laminaire compressible, où il y a une augmentation de la température au bord d'attaque due aux frottements élevés naissants d'une diffusion de la quantité de mouvement, puis on remarque une diminution progressive de la température due à la décroissance des forces de frottement (coefficient de frottement).

La figure (IV-11) montre la variation du coefficient de portance en fonction du nombre de Mach à l'infini amont à une incidence donnée, le coefficient de portance augmente en subsonique et décroît en supersonique car ce coefficient dépend seulement de l'incidence de l'écoulement. [1]

$$C_z = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

La figure (IV-13) montre la variation de coefficient du frottement en fonction du nombre du Reynolds, en écoulement turbulent, on distingue que le coefficient de frottement est maximal au point de transition due à la naissance d'un gradient de pression positif (point de décollement), puis une diminution progressive cause de l'augmentation du nombre de Reynolds. [7]

La figure (IV-12) montre la variation d'épaisseur de la couche limite le long du profil en écoulement subsonique et supersonique où on distingue une diminution de l'épaisseur de la couche limite en  $M > 1$  à cause de la décroissance du coefficient de traînée de 0.18627 jusqu'à 0.0255138 (calculé par le programme numérique).

La figure (IV-14) montre la variation d'épaisseur la couche limite en écoulement compressible et incompressible, on remarque que l'épaisseur décroît en compressible elle due au décroissance du coefficient de traînée de 0.2983789 jusqu'à 0.19627 et l'augmentation de la viscosité (calculé par le programme numérique), à cause du dépassement du Mach critique qui est de l'ordre de 0.6 pour les profils d'aile. [15]

# CONCLUSION

## CONCLUSION

Dans ce travail, une contribution à l'étude des écoulements visqueux a été abordée, où l'effet de la viscosité sur un écoulement entourant un corps en mouvement a été considéré. Cet effet se produit dans une couche mince qu'on appelle couche limite. L'écoulement à l'intérieur de cette couche limite, peut être laminaire ou turbulent. La viscosité du fluide considéré se manifeste par plusieurs phénomènes, citant le plus important qui est la résistance au frottement. Le coefficient de frottement reste un des paramètres incontournables, dans l'étude, aussi bien de l'écoulement turbulent que laminaire.

Cette étude a consisté essentiellement dans la résolution des équations de Navier Stokes. Cette résolution a nécessité l'emploi de plusieurs méthodes numériques, et cela suivant la nature de l'écoulement.

Comme première constatation, que nous avons pu faire, est que les résultats obtenus, par les différentes méthodes numériques, sont en accord avec ceux obtenus par des méthodes analytiques (théoriques).

L'étude de la couche limite laminaire est devenue simple et facile à résoudre que ce soit analytiquement ou numériquement. Par contre celle de la couche limite turbulente se heurte encore à la prévision des phénomènes de transition et à la modélisation de la turbulence.

Le calcul numérique d'un écoulement visqueux autour d'un profil mince (symétrique), nous a permis de mieux distinguer le passage de la couche limite laminaire à celle turbulente. Ce calcul a concerné seulement les profils symétriques minces, tout en sachant que dans la pratique et dans ce domaine, d'autres géométries de profils sont utilisés, citant par exemple les profils épais.

Enfin, Comme perspectives à, on peut recommander l'approfondissement et la validation expérimentale de nos résultats, afin que ce travail constituera un apport certain dans l'étude des paramètres de la couche limite.

ANNEXE



## I. EFFORTS EXERCES SUR LE PROFIL

La traînée par unité de largeur sur le profil du corps a été calculée par intégration numérique :

$$T_{\delta} = \frac{1}{2} \int_0^c Cf(x)p_e(x)U_e^2(x)dx \quad (A-1)$$

Du fait que la traînée de frottement sur l'extrados est égale à celle de l'intrados par raison de symétrie, la traînée totale de frottement est :

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^c Cf(x)p_e(x)U_e^2(x)dx \quad (A-2)$$

La traînée d'onde est égale à la projection des forces de pression sur l'axe parallèle à la vitesse de pression totale est :

$$T_{\mu} = \frac{1}{2} \int_0^c Cf(x)p_e(x)U_e^2(x)dx \quad (A-3)$$

où  $B(x)$  est la pente de la tangente au point d'abscisse  $x$  la méthode numérique d'intégration est celle de simpson généralisée (basée sur la formule des paraboles).

Après intégration on trouve

Notons que la portance sur le corps est nulle car celle-ci est essentiellement fonction de l'incidence.

II. DEMONSTRATION DE L'EQUATION D'ENTRAINEMENT (EQUATION III.22)

L'équation du débit dans la couche limite compressible s'écrit :

$$\frac{d}{dx}(p_e U_e \Delta) = p_e U_e F \quad (\text{A-4})$$

L'équation (A-4) peut être écrite sous la forme :

$$p_e U_e \frac{d\Delta}{dx} + p_e \Delta \frac{dp_e}{dx} = F \quad (\text{A-5})$$

Ou encore :

$$\frac{d\Delta}{dx} = F - \Delta \left( \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{p_e} \frac{dp_e}{dx} \right) \quad (\text{A-6})$$

La relation entre  $p_e$ ,  $U_e$ , et  $M_e$ , est :

$$\frac{dp_e}{p_e} + M_e^2 \frac{dU_e}{U_e} = 0 \quad (\text{A-7})$$

donc :

$$\frac{1}{p_e} \frac{dp_e}{dx} = -M_e^2 \frac{dU_e}{U_e dx} \quad (\text{A-8})$$

En tenant compte de (A-8), l'équation (A-7) devient :

$$\frac{d\Delta}{dx} = F + (M_e^2 - 1) \frac{\Delta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{A-9})$$

On a comme :

$$H_1 = \frac{\Delta}{\delta_2} \quad (\text{A-10})$$

On a donc :

$$\frac{d}{dx}(H_1 \delta_2) = F + \frac{H_1 \delta_2}{U_e} (M_e^2 - 1) \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{A-11})$$

Après dérivation on obtient :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1}{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} + (M_e^2 - 1) \frac{H_1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{A-12})$$

### III. TRANSFORMATION DE L'EQUATION DE VON-KARMAN

#### (EQUATION III. 23)

L'équation de Von Karman s'écrit :

$$\frac{Cf}{2} = \frac{\tau_p}{\rho_e U_e^2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{(H+2)}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + \frac{\delta_2}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \quad (\text{A-13})$$

En tenant compte de l'équation :

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} = -\frac{M_e^2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{A-14})$$

L'équation (A-13) devient :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{Cf}{2} - \frac{\delta_2(H+2-M_e^2)}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{A-15})$$

En reportant la valeur de  $\frac{d\delta_2}{dx}$  dans (A-12), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dx} &= \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1}{\delta_2} \left[ \frac{Cf}{2} - \frac{\delta_2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H+2-M_e^2) \right] + (M_e^2 - 1) \frac{H_1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \\ &= \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1}{\delta_2} \frac{Cf}{2} + \frac{H_1}{dx} (H+1) \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

En explicitant le  $\frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$  en fonction du nombre de Mach dans l'écoulement extérieur, on aura :

A la frontière de la couche limite on a :

$$\begin{aligned} U_e &= M_e a_e = M_e \sqrt{\gamma r T_e} \\ U_e^2 &= M_e^2 (\gamma r T_e) \end{aligned}$$

La différentielle logarithmique de cette expression est :

$$\frac{dU_e^2}{U_e^2} = \frac{dM_e^2}{M_e^2} + \frac{dT_e}{T_e} \quad (\text{A-17})$$

D'autre part l'écoulement de l'énergie s'exprime par :

$$C_p dT_e + d\left(\frac{U_e^2}{2}\right) = 0 \quad (\text{A-18})$$

Avec :  $C_p = \frac{\gamma r r}{\gamma - 1}$  (A-19)

D'où :  $\frac{\gamma r r}{\gamma - 1} dT_e + \frac{dU_e^2}{2} = 0$

$$\frac{\gamma r r}{\gamma - 1} \frac{dT_e}{T_e} + \frac{1}{T_e} \cdot \frac{dU_e^2}{2} = 0 \quad (\text{A-20})$$

ou :  $\frac{dT_e}{T_e} + \frac{\gamma - 1}{\gamma r r \cdot T_e} \cdot \frac{dU_e^2}{2} = 0$

$$\frac{dT_e}{T_e} + \frac{\gamma - 1}{2a_e^2} M_e^2 \cdot \frac{dU_e^2}{2} = 0$$

$$\frac{dT_e}{T_e} = - \frac{(\gamma - 1)}{2} M_e^2 \frac{dU_e^2}{U_e^2} \quad (\text{A-21})$$

L'expression (A-17) devient alors :

$$\frac{dU_e^2}{U_e^2} = \frac{dM_e^2}{M_e^2} - \frac{(\gamma - 1)}{2} M_e^2 \frac{dU_e^2}{U_e^2} \quad (\text{A-22})$$

$$\frac{dM_e^2}{M_e^2} = \frac{dU_e}{U_e} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \frac{dU_e^2}{U_e^2}$$

$$\frac{dM_e}{M_e} = \frac{dU_e}{U_e} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)$$

$$\frac{dM_e}{dx} = \frac{dU_e}{U_e} \cdot \frac{M_e}{U_e} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)$$

$$\frac{1}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} = \frac{dM_e}{dx} \cdot \frac{1}{M_e \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)}$$

Finalement pour  $\gamma = 1.4$  (air) :

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{F}{\delta_2} - \frac{H_1 C_f}{2\delta_2} - \frac{H_1(H+1)}{M_2(1+0.2M_2^2)} \cdot \frac{dM_e}{dx} \quad (\text{A-23})$$

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bonnet & J.Luneau, **Aérodynamique, Théories de la dynamique des fluides**, Cepadues, Editions 1989.
- [2] J. D.Anderson, **Fundamentals of aerodynamics**, Edition Mc.graw-Hill, New york, Année 1991.
- [3] A. Piminov & Metrevelli, **Hydraulique approfondie, cours pour magisters**, Office de publications universitaires, Editions 1990.
- [4] J. Coustux, **Aérodynamique, Couche limite laminaire**, Editions Cepadues, 1988.
- [5] F. M-White **Viscous fluide flow**, Edition Mc.Graw-Hill. 1974.
- [6] E. A. brun, A. Martinot-Lagarde & J. Mthieu, **Mécanique des fluides. Tome 111**, Edition Dunod, 1970.
- [7] R. Michel - **Aérodynamique, couches limites et frottement et transfert de chaleur**, Ecole nationale supérieur de l'aéronautique et du vol, 1972.
- [8] H. Schlichting, **Boundary - layer theory**, seventh Edition Mc Graw - Hill, 1987
- [9] H. Flicniakoska, **Aérodynamique et mécanique du vol**, 2e Edition. Eyrolles, 1972.
- [10] R. L. Ponton, **Incompressible flow**, Édition John Wiley.R.Sens, INC, second Edition, 1995.
- [11] G.R. Serane, **Cours d'aérotechnique**, Edition Dunod, 1963.
- [12] A. Rebuffet, **Aerodynamique expérimentale. Tomes 1 et 2**, Edition Dunod, 1961.
- [13] J. L. Munoz, **Le langage fortran**, Ecole universitaire d'ingénieurs de Lille, 1990.
- [14] F.M.white, **Viscous fluid flow**, second Edition Mc Graw-Hill, 1991.
- [15] R.Comolet, **Dynamique des fluides réels**, Edition Masson et Cie, 1963.
- [16] M.R. Head., **Aeronautical research council**, Edition London RM 3123, 1957.
- [17] J.Cousteix, **Introduction aux effet visqueux et turbulents**, Département Aérodynamique, Ecole nationale supérieur de l'aéronautique et de l'espace, 1997.