

005/02



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En Vue de l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'état en Aéronautique

Option :

Structure – Propulsion

THEME :

***APPLICATION DE LA M.E.F ET LA
METHODE DES ITERATIONS INVERSE
POUR LA DETERMINATION DES MODES
ET FREQUENCES PROPRES D'UNE AILE
D'AVION***

Proposé et dirigé par :

Mr : ZEBBICHE Toufik

Présenté par :

Mr : BARCA Hamid

Mr : BENGHERBIA Tarek

Soutenu le Mardi 02 Juillet 2002 .

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé au centre de calcul des Structures de l'Institut d'aéronautique de BLIDA, dirigé par le Professeur. ZEBBICHE Toufik, dans le cadre d'un mémoire de fin d'études.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Saïd BERGUEL, directeur de notre institut et Monsieur Salah BOUKRAA, maître de conférence à l'I.A.B. ainsi qu'à Monsieur Djamel NECHE professeur à l'I.A.B, qui ont accepté de juger ce mémoire, et leur présence parmi les membres du jurys nous honore.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur REZOUGUE qui nous a accordé sa confiance et apporté ses conseils.

Nous tenons à remercier très sincèrement tous nos professeurs et surtout Messieurs BENOURED et CHEGRANI qui nous ont soutenue tout au long de ces trois années avec enthousiasme et patience, ils nous ont permis de réaliser ce travail dans les meilleurs conditions techniques et scientifiques, mais surtout dans un environnement humain très motivant.

Nous remercions particulièrement Monsieur ZEBBICHE Toufik qui a permis la réalisation de ce travail et l'a suivi avec attention et intérêt ainsi que pour son savoir-faire qui nous a permis de développer le programme de cette étude avec efficacité.

Il serait difficile d'oublier les techniciens et secrétaires, notamment Kamel, Wahida, Liella, et Djamila, pour leur grande gentillesse et leur disponibilité. Ils nous ont toujours accueillis avec un grand sourire. Ils sont indispensables pour la bonne marche d'une formation et l'on ne les en remerciera jamais assez.

Je voudrais exprimer ma
gratitude à ma mère bien aimée, mon
père, en reconnaissance de leurs
sacrifices, et soutien ;

A mes chères sœurs, et frères.

A Isabelle, Wafa, Nawel.

A tous ceux qui me sont chers(e)

Tarek

Dédicace

Après de nombreuses années d'études, me voici arrivé à la fin et ce grâce à mes très chers parents qui m'ont tout facilité en mettant à ma disposition tous les moyens, et qui méritent toute ma gratitude et tout le bonheur de la vie .

Je leur dédie ce mémoire ainsi qu'à ma sœur Samia, mon frère Samy, ma fiancée Kenza qui m'a beaucoup soutenu et qui a été toujours présente avec moi, ainsi qu'à tous mes amis .

H.A.M.I.D B.A.R.C.A

RESUME

Notre travail est basé sur la conception d'un programme numérique qui permet de déterminer les fréquences et modes de vibration appliqués à une aile d'avion, l'aile étant assimilée à une poutre, comme première approximation dans notre étude pour but de comparer nos résultats du programme avec ceux des solutions exactes concernant quelques exemples.

En premier lieu on donne une présentation de l'aile, ainsi quelques organes qui la constitue.

La deuxième partie est consacrée à la méthode des éléments finis. l'étude essentiel concerne la discrétisation du domaine par la méthode des éléments finis ainsi nous montrerons la convergence des éléments finis.

Un des mérites de cette étude est d'établir de façon précise, un critère clair sur le choix de discrétisation, ce résultat est important au niveau économique car le temps de calcul d'une aile est proportionnel au nombre de nœuds choisis

Après avoir présenté la méthode des éléments finis on a abordé les différentes méthodes pour l'analyse modale, dont la méthode d'itération inverse est détaillée vu son efficacité de convergence dans le cas des problèmes de grandes dimensions .

Par la suite , nous donnons la formulation générale du problème de flexion d'une aile d'avion, afin d'attaquer les méthodes de stockages .

A la fin nous concluons notre travail avec des remarque que nous avons jugés nécessaires a citer.

TABLE DES MATIERES

- Avant propos
- Dédicaces
- Résumé
- Généralités sur l'avion

Chapitre I : Architecture de l'aile

I.1. LES DIFFERENTS TYPES DES AILES	02
I.1.1. AILE MONO-LONGERON A REVETEMENT TRAVAILLANT	02
I.1.2. AILE BILONGERON A REVETEMENT NON TRAVAILLANT	02
I.1.3. AILE A REVETEMENT TRAVAILLANT EN TORSION	03
I.1.4. AILE A CAISSON PUR	03
I.2. ANALYSE DES DIFFERENTS ELEMENTS CONSTITUANTS LA VOILURE	04
I.2.1. LES LONGERONS	05
I.2.2. LES SEMELLES ET LES AMES	06
I.2.3. LES NERVURES	11
I.2.4. LES RAIDISSEURS	13
I.2.5. LE REVETEMENT	14
I.3. IDEALISATION DES STRUCTURES	14
I.4. PRINCIPES FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE	16
I.4.1. HISTORIQUE	16
I.4.2. JUSTIFICATION DES ETUDES DE VIBRATIONS	17
I.4.3. NOTION DE CONDITIONS AUX LIMITES	18
I.4.4. NOTION DE DEGRE DE LIBERTE	18
I.4.5. CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES D'UNE STRUCTURE	18
I.4.6. SOURCES D'EXCITATION ET TYPES DE CHARGEMENTS	19
DYNAMIQUES	
I.4.7. ORIGINE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES EN AERONAUTIQUES	20
I.4.8. PHENOMENE DE RESONANCE ET SON EFFET	21
I.5. VIBRATIONS TRANSVERSALES DES POUTRES ELANCEES	22
I.5.1. INTRODUCTION	22
I.5.2. POUTRE EN FLEXION	22

Chapitre II : La méthode des éléments finis

II.1. INTRODUCTION AUX METHODES MODERNES DE CALCUL DES STRUCTURES	28
II.2. HISTORIQUE	28
II.3. MILIEUX CONTINUS ET STRUCTURES DISCRETES : LE CONCEPT D'ELEMENT FINI	30
II.4. FORMULATIONS MATRICIELLES NIVEAU ELEMENTAIRE ET GLOBAL	31
II.5. CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS	33
II.5.1. LES PROBLEMES LINEAIRES	33
II.5.2. LES PROBLEMES NON-LINEAIRES	35
II.6. APPLICATIONS	37
II.6.1. ANALYSE DYNAMIQUE DU RADIOMETRE METEOSAT	37
II.6.2. APPLICATIONS SPATIALES	38
II.7. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	39
II.7.1. LES METHODES D'APPROXIMATION	39
II.7.1.1. notions générales	39
II.7.1.2. méthodes d'approximation universelles	40
II.7.1.3. méthodes variationnelles : méthode de Ritz	42
II.7.2. LE CONCEPT D'ELEMENT FINI	46
II.7.2.1. différentes formulations	46
II.7.2.2. le modèle déplacement	47
II.7.2.3. propriétés des éléments de type déplacement	47
II.7.3. MISE EN EQUATION DES SYSTEMES	51
II.7.3.1. discrétisation en élément finis	51
II.7.3.2. énergie potentielle - matrice de raideur	52
II.7.3.3. énergie cinétique - matrice masse	56
II.7.3.4. assemblage	58

Chapitre III : Les Méthodes d'Analyse Modale

III.1. INTRODUCTION	59
III.2. METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES	60
III.2.1. Généralités, classification des méthodes	60

III.2.2. Méthodes de calcul des valeurs et vecteurs propres	61
III.2.2.1. Méthode de Ritz	61
III.2.2.2. Méthode de sous-espaces	63
III.2.2.3. Méthode de Jacobi	64
III.2.2.4. Méthode d'itération directe	66
III.2.3. Méthode d'itération inverse	73
III.2.3.1. Introduction	73
III.2.3.2. Principe	73
III.2.3.3. Convergence	76
III.2.3.4. Itération inverse avec décalage spectral	77
<i>Chapitre IV : Etude Théorique</i>	
<i>Chapitre V : Les Méthodes de Stockage</i>	
V.1. REMARQUES PRELIMINAIRES	83
V.2. METHODES DE STOCKAGE SOUS FORME DE VECTEUR	83
V.2.1. STOCKAGE EN COLONNE	84
V.2.2. STOCKAGE EN DIAGONAL	86
V.2.3. STOCKAGE EN LIGNE	87
V.2.4. STOCKAGE EN LIGNE DE SERPENT	88
V.2.5. STOCKAGE EN ESCALIER	89
V.3. ALGORITHMES DE RESOLUTION DIRECTE DE SYSTEME D'EQUATIONS	91
V.3.2. METHODE DE CHOLESKY	92
V.3.1. METHODE DE KHIALETSKI	98
<i>Chapitre VI : Résultats et Discussions</i>	
V.1. ORGANIGRAMME	100
V.2. EFFET DE LA DISCRETISATION SUR LA CONVERGENCE DU PROBLEME	100
▪ ANNEXE A	
▪ ANNEXE B	
▪ CONCLUSION GENERALE	
▪ REFERENCES	

GENERALITES SUR L'AVION

Les éléments essentiels d'un avion sont la cellule (composée du fuselage, des ailes, des empennages), le groupe motopropulseur, le train d'atterrissage, les équipements de pilotage, de génération de puissance et de sécurité.

Le fuselage

Le fuselage comprend le poste de pilotage et les aménagements nécessaires au transport de passagers ou de fret. Afin de limiter la consommation de carburant et d'augmenter l'autonomie, la plupart des avions volent à haute altitude, car la résistance de l'air y est moindre et le rendement des réacteurs meilleur. Pour la sécurité des occupants, il est donc nécessaire de pressuriser l'intérieur du fuselage, lequel, à 11 000 m d'altitude, doit résister à une surpression de l'ordre de 60 kPa. Le fuselage de section circulaire est celui qui offre le meilleur compromis entre résistance maximale et poids minimal des structures, ainsi que d'excellentes qualités aérodynamiques. Le plancher (ou pont) est disposé de façon quasi diamétrale afin de maximiser le nombre de sièges de front et d'optimiser l'habitabilité, tout en réservant un volume important aux soutes, situées sous le plancher. Le fuselage est réalisé par l'assemblage de plusieurs tronçons constitués de structures (ou couples) annulaires reliées par des lisses. Ils sont renforcés par des longerons et revêtus de panneaux extérieurs et intérieurs, le pont contribuant à rigidifier l'ensemble. La partie arrière du fuselage est relevée afin de permettre le cabrage de l'appareil lors du décollage et de l'atterrissage; le nez est très court afin d'offrir le meilleur champ de vision possible durant ces phases.

Les ailes

Les ailes (ou voilure) constituent le système sustentateur principal de l'avion. Leurs qualités aérodynamiques, qui dépendent essentiellement de leur position par rapport au fuselage, de leurs caractéristiques géométriques (forme, surface, profil) et de leur état de surface, sont fortement influencées par la vitesse de l'avion et la densité de l'air. La solution idéale, mais compliquée, des ailes à géométrie variable n'étant pas envisageable pour l'instant sur les avions commerciaux, les constructeurs, afin de limiter la consommation de carburant, définissent la partie fixe de l'aile en fonction de la vitesse de croisière (aile en flèche pour les avions subsoniques, aile delta pour le Concorde) et lui associent des surfaces mobiles destinées à adapter son profil aux différentes conditions de vol.

Les ailerons

Des ailerons prolongent le bord de fuite (partie arrière des ailes) et pivotent vers le haut ou vers le bas en opposition de phase sur chacune des ailes afin d'incliner l'avion lors des virages selon l'axe longitudinal (contrôle du roulis). Ils sont divisés en

deux groupes, les ailerons basse vitesse (ou extérieurs) et les ailerons grande vitesse (ou intérieurs), situés respectivement à l'extrémité de l'aile et à proximité de son emplanture.

Les contraintes subies par les ailes

La recherche d'un rendement aérodynamique optimal n'est pas la seule préoccupation des concepteurs. La voilure est en effet un élément structurel fortement sollicité qui doit présenter d'excellentes caractéristiques de résistance mécanique tout en offrant un volume suffisant pour contenir le carburant ainsi que, sur certains avions, des systèmes comme les atterrisseurs. Les forces de propulsion, de réaction du sol lors de l'atterrissage, et les charges aérodynamiques dans un environnement turbulent (rafales de vent, trous d'air) engendrent d'importantes contraintes de cisaillement, de torsion et de flexion, cette dernière pouvant entraîner en bout d'aile une déformation absolue de 5 m. Aussi la conception de l'aile est-elle orientée vers la recherche d'une élasticité en tous points maîtrisée. Sa structure interne est une poutre de type caisson formée sur l'envergure de deux ou trois longerons. Ceux-ci sont reliés par des nervures sur lesquelles sont fixés les panneaux de revêtement. Une grande partie du caisson est utilisée comme réservoir de carburant.

Les empennages

Situés sur la partie arrière du fuselage, ils jouent un rôle fondamental dans le pilotage et le maintien de la stabilité de l'avion. L'empennage vertical est constitué d'une partie fixe, la dérive, et d'une partie mobile qui lui est rattachée, la gouverne de direction. L'empennage horizontal est formé par les stabilisateurs, sur lesquels sont articulés les gouvernes de profondeur. Aux grandes vitesses, ces dernières sont verrouillées et l'ensemble plans fixes-gouvernes de profondeur peut pivoter vers le haut ou vers le bas.

Le train d'atterrissage

Il est composé de deux (ou quatre) atterrisseurs principaux fixés sous les ailes et d'un atterrisseur auxiliaire logé sous le nez de l'appareil. Leur fonction principale est d'absorber l'énergie d'impact au sol et de créer une suspension durant le roulage. Sur les atterrisseurs de type direct, les plus répandus dans l'aviation commerciale, elle est assurée par un élément unique, la jambe, qui se comporte comme un amortisseur oléopneumatique. Chaque atterrisseur comporte plusieurs roues qui répartissent la charge sur la piste. Elles sont équipées de freins à disque très puissants et peuvent être orientées lors des manœuvres au sol. Afin d'améliorer l'aérodynamique, les atterrisseurs sont escamotables. Sur les avions-cargos, il est possible de modifier la position en hauteur de la cellule en faisant varier la longueur de jambe de chaque atterrisseur, ce qui facilite les opérations de chargement.

Les organes de propulsion

Les avions commerciaux utilisent des turbopropulseurs et surtout des turbo-réacteurs. Les réacteurs, dont le diamètre est inférieur à celui des moteurs à hélices, offrent l'avantage d'une plus grande liberté quant au choix de leur emplacement. Contenus dans une nacelle, ils sont généralement suspendus sous l'aile par l'intermédiaire d'un élément structurel, le mât réacteur. Les réacteurs sont équipés d'inverseurs de poussée qui participent au freinage de l'avion en déviant le jet de gaz. Un même avion peut recevoir, au choix de la compagnie, l'un ou l'autre des moteurs disponibles sur le marché sans modification structurelle majeure. Sur certains biréacteurs les moteurs sont fixés à l'arrière, de part et d'autre du fuselage, et, sur les triréacteurs, le troisième est logé dans la dérive ou dans la pointe arrière du fuselage.

Les systèmes de pilotage

Le poste de pilotage centralise l'instrumentation nécessaire à la navigation, les commandes de vol, les systèmes de communication hertzienne, les commandes et instruments de contrôle des autres systèmes. Les progrès réalisés dans la conception de ces équipements convergent vers une plus grande précision, une sécurité accrue, une réduction du poids, mais surtout vers une meilleure assistance au pilotage et un plus grand confort. Les commandes de vol électriques remplacent la traditionnelle timonerie mécanique et contrôlent, grâce à des servocommandes, les moteurs et vérins hydrauliques des éléments mobiles (gouvernes, ailerons, train d'atterrissage...) ainsi que la poussée des réacteurs. Les ordres de pilotage, tout comme les données fournies par d'innombrables capteurs, sont traités numériquement par des ordinateurs affectés à des fonctions spécifiques (commandes de vol, navigation, etc.). Ceux-ci assistent le pilote et, à sa demande, prennent en charge le contrôle de l'appareil (pilotage ou atterrissage automatiques sans visibilité), le pilote pouvant à tout moment reprendre la main. Des écrans multifonctionnels en couleurs remplacent de nombreux cadrans et offrent une grande souplesse d'utilisation ainsi qu'une grande richesse de présentation (écriture de texte, schémas fonctionnels, cartographie...).

Les systèmes auxiliaires

Ils génèrent l'énergie électrique et hydraulique, et assurent la pressurisation et le conditionnement de l'air. Pour des raisons de sécurité, différents circuits indépendants coexistent pour chaque fluide. Ils ont pour source principale les moteurs, pour source secondaire une turbine à gaz logée dans le cône arrière du fuselage, le groupe auxiliaire de puissance. Au sol, ce dernier permet le démarrage des réacteurs par envoi d'air sous pression, assure le conditionnement de l'air, et fournit l'énergie électrique grâce à un alternateur. En vol, les réacteurs entraînent des alternateurs et des pompes hydrauliques et fournissent l'air de conditionnement via les systèmes de pressurisation. En cas de panne, ils sont relayés par le groupe auxiliaire et, en dernier recours, des circuits électriques de secours fonctionnant sur batteries entrent en service.

Chapitre I

ARCHITECTURE DE L'AILE

ARCHITECTURE DE L'AILE

La constitution élémentaire de la voilure est liée à la résistance des matériaux et au type d'avion que le constructeur veut créer.

Une aile est constituée généralement de 3 parties :

- Le bord d'attaque, généralement, est aménagé pour le passage des commandes, des conduites diverses, des câblages électrique, des dispositifs hypersustentateurs, etc..
- Le plan central «ou poutre d'aile» est chargé de transmettre les efforts les plus importants, et sert généralement de réservoir pour le carburant

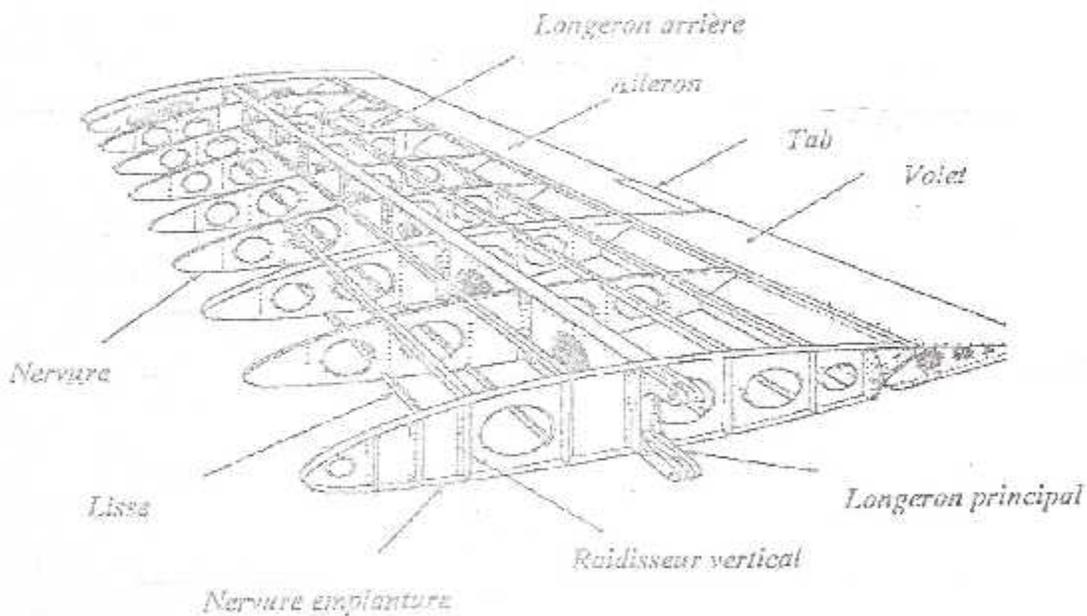


Figure (1.1) : Structure générale d'une aile

Le bord de fuite termine le profil. Il est constitué, souvent, par les ailerons ou les volets hypersustentateurs avec devant ces derniers les spoilers ou les aérofreins

I.1. LES DIFFERENTS TYPES DES AILES

I.1.1. AILE MONO-LONGERON A REVETEMENT TRAVAILLANT :

La structure du bi-longeron n'atteint pas le rendement maximum, car les deux longerons, ne peuvent pas être à la fois au point où l'épaisseur est maximum sur la voilure, leur inertie n'est pas plus grande valeur possible.

Tandis que dans la voilure mono-longeron, le longeron qui supporte la totalité de la flexion est placé au voisinage où l'épaisseur est maximum sur le profil, figure (I.2)

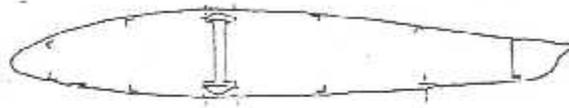
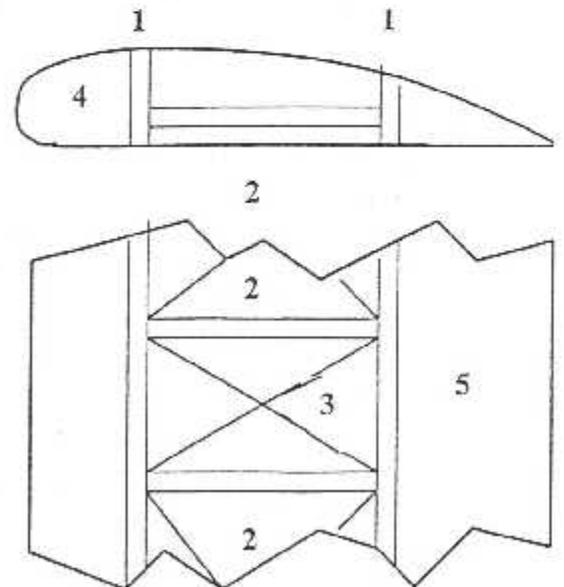


Figure (I.2) : Aile mono-longeron à revêtement travaillant

I.1.2. AILE BILONGERON A REVETEMENT NON TRAVAILLANT

Une aile bilongeron à revêtement non travaillant est une construction ancienne, l'aile comporte deux longerons, des entretoises qui servent à maintenir l'écartement et un croisillonnage intérieur dans le plan de l'aile figure (I.3)



- 1-Deux longerons.
- 2-Entretoise.
- 3-Haubanage de trainée.
- 4-Nervures.
- 5-Revêtement.

Figure (I.3) : Aile bi-longeron à revêtement non travaillant

I.1.3. AILE A REVETEMENT TRAVAILLANT EN TORSION :

C'est la solution la plus répandue pour la construction des voilures évidemment, mais aussi pour les empannages horizontaux et verticaux.

Elle est caractérisée par la présence de deux longerons situés de part et d'autre du maître-couple du profil réunis entre eux par des parois de revêtement raidies longitudinalement, figure(1.4)

Un développement de cette construction est la voilure multi-longerons .

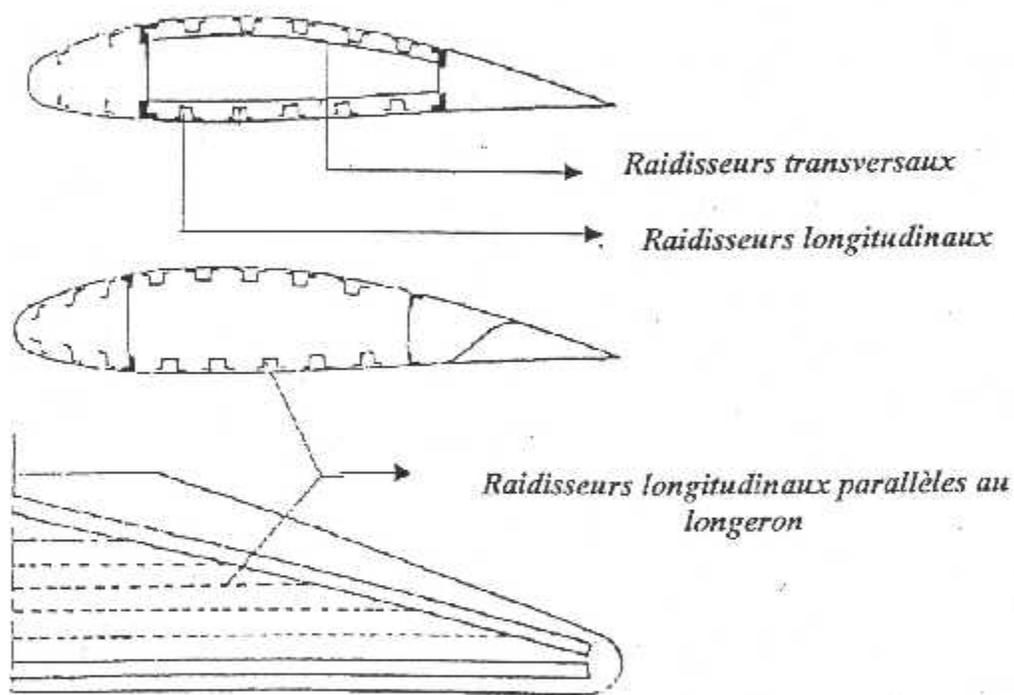


Figure (I.4) : Aile bi-longeron à revêtement travaillant en torsion

I.1.4. AILE A CAISSON PUR :

Si dans la construction bi-longeron avec caisson inter-longeron on augmente beaucoup le raidissage du revêtement en diminuant simultanément l'importance des semelles de longeron jusqu'à en faire de simples cornières d'assemblage, tous les efforts de flexion et de torsion sont encaissés par le revêtement . celui-ci doit avoir une épaisseur importante et peut être fortement raidi pour ne pas flamber sous l'action des contraintes de flexion.

La structure est dite dans ce cas : structure caisson. figure (I.5)

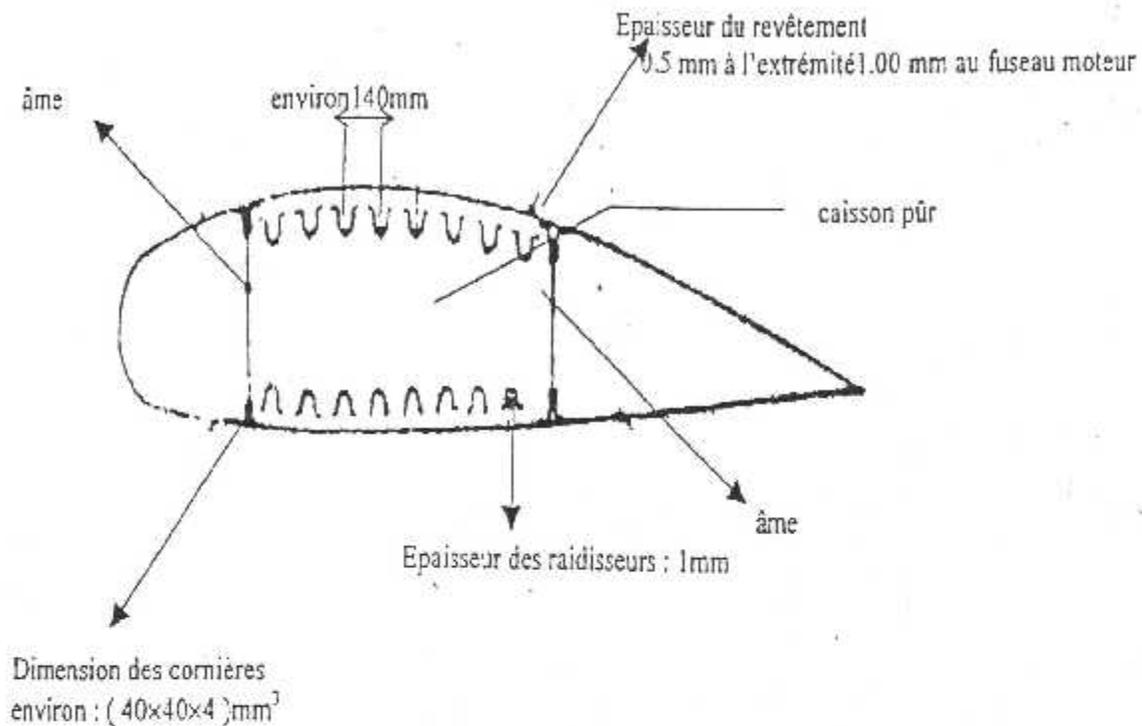


Figure (I.5) : Aile à caisson pur

Le caisson ne comporte que deux âme mais en diminuant les contraintes de cisaillement dans le revêtement on peut utiliser âmes, ces constructions sont appelées « cellulaires » ou à âmes multiples.

1.2. ANALYSE DES DIFFERENTS ELEMENTS CONSTITUANTS LA VOILURE

Une aile d'avion est constituée de longeron, semelles, âmes, nervures, raidisseurs et le revêtement qui recouvre notre aile, nous allons les expliquer en détail dans ce qui suit :

I.2.1. LES LONGERONS

Le longeron principal est l'élément robuste de l'aile, il encaisse la majorité des contraintes en flexion, c'est une poutre placée dans le sens longitudinal qui va de l'emplanture à l'extrémité de l'aile.

a) Longeron tubulaire :

pour des raisons d'économie et de facilité de construction ils sont d'abord utilisés comme longeron des tubes de différentes formes fournis par la métallurgie, le seul problème dans la construction de ces profils c'est qu'ils ne résistent pas à la torsion (figure I.7)

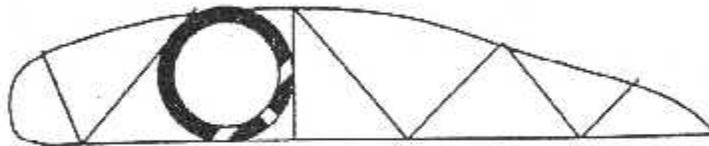


Figure (I.7) : Profil d'aile avec longeron tubulaire

b) longeron composé

actuellement ce genre de longeron remplace les longerons tubulaires dans lequel l'utilisation des pièces séparément adaptées à la fonction qu'elles doivent remplir permet une économie de poids appréciable (figurI.8)

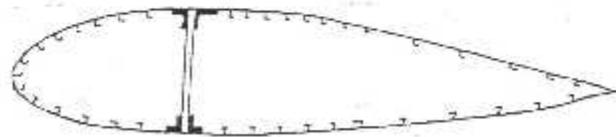


Figure (I.8) : Profil à longeron composé

I.2.2. LES SEMELLES ET LES AMES

Les semelles supportent les efforts de flexion horizontale et les efforts de cisaillement dus à cette flexion et des efforts de cisaillement qui proviennent de la torsion.

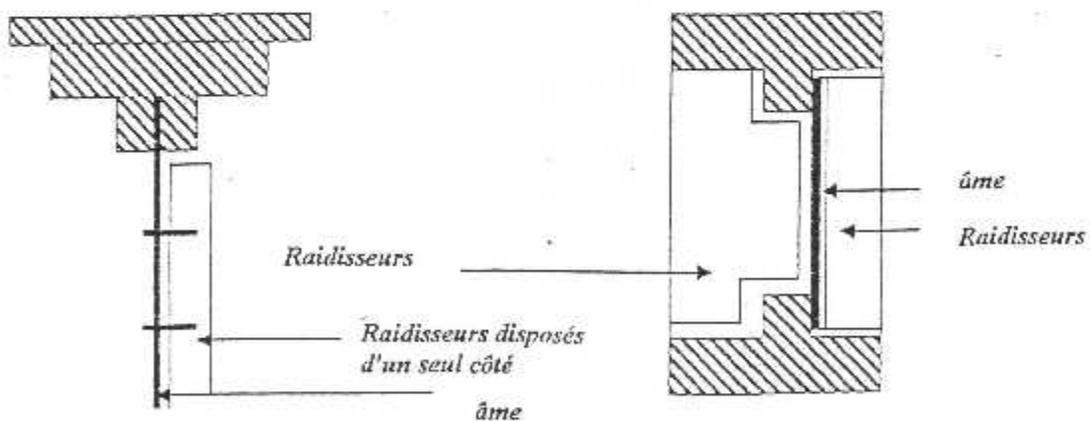
Les éléments principaux qui entrent dans ces longerons composés sont les âmes et les semelles.

a) LES AMES

pour la construction des longerons on utilise deux types d'âmes qui sont :

- AMES SIMPLES :

Ce genre d'âmes est utilisé à cause de leur facilité de construction, une âme simple ou mince d'où l'épaisseur peut varier environ de 0.8mm à 1 suivant les efforts à encaisser. Ces faibles épaisseurs peuvent être admis, car le couplage d'une âme dans une certaine limite n'entraîne pas sa détérioration. Néanmoins ces âmes doivent être raidies par des raidisseurs qui sont placés verticalement, assemblés par rivetage et disposés soit d'un seul côté de celle-ci, soit de part et d'autre. dans ce dernier cas, on utilise souvent une ligne de rivets pour la fixation de deux raidisseurs (figure I.9)



(Figure I.9) Fixation des raidisseurs sur les âmes.

- AMES DOUBLES

Les longerons métalliques comportent deux âmes et ils sont appelés « longerons caissons » figure (I .10)

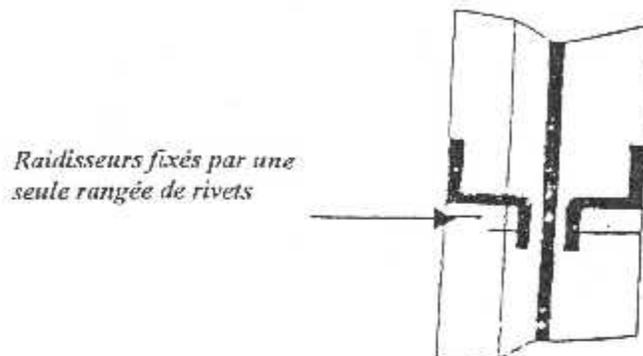
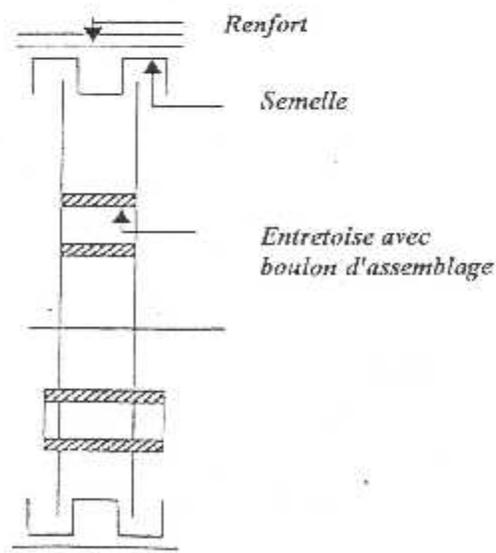


Figure (I .10): Fixation des raidisseurs sur une âmes double

La liaison entre deux âmes est réalisée par deux façons différentes :

Lorsque les deux âmes sont très rapprochées, on place entre elles des entretoises consistées soit par des cales massives en métal très léger, tel que le magnésium, soit par de petits tubes d'entretoises traversés par un boulon de serrage. figure(I.11)



Figure(I.11) : Assemblage des âmes doubles rapprochées

lorsque le longeron est large, on remplace les entretoises par des diaphragmes à bords tombés espacés régulièrement à l'intérieur du longeron et disposés soit verticalement, soit selon un schéma en N. ces diaphragmes sont parfois fortement ajourés par trous d'allégement. figure (I.12)

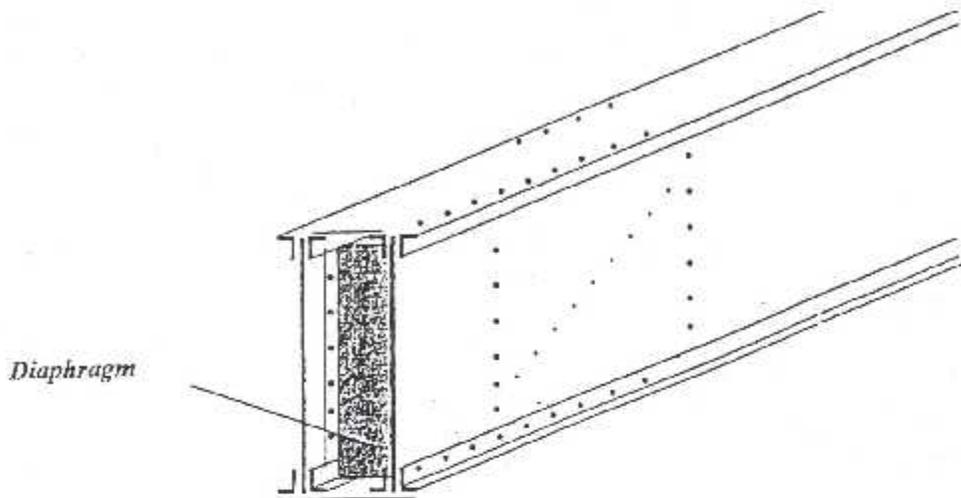


Figure (I.12): Assemblage des âmes doubles éloignées.

La figure suivante nous montre le mode de construction d'une âme en treillis qui a pour avantage de faciliter les visites d'inspection.

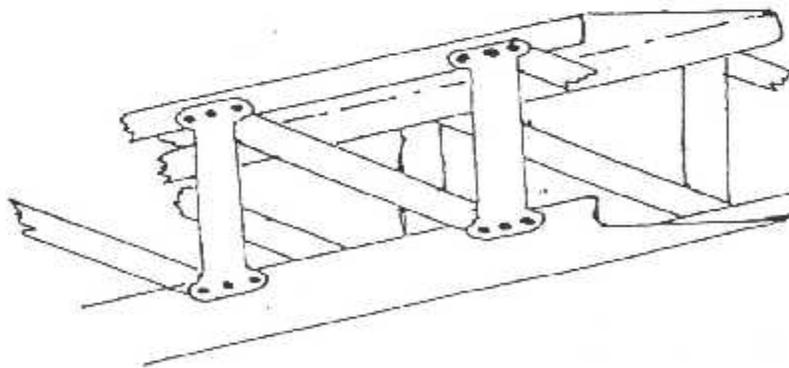


Figure (I.13): Longeron muni d'une âme en treillis

c) LES SEMELLES.

Les semelles de longeron qui encaissent des efforts importants peuvent être fabriquées en acier s'il s'agit d'appareils de gros tonnage, mais pour les appareils de faible et moyen tonnage, l'alliage de Duralumin est le plus employé.

Ils existe deux sortes de semelles :

- SEMELLES PLATES

Les semelles sont soit un empilage de tôles planes, soit une tôle plate comme l'indique la figure (I.14), mais la difficulté réside dans la fixation des âmes aux semelles qui nécessite l'emplois des pièces intermédiaires de liaison (cornières) qui, plus ou moins bien solidarisiées avec la semelle, ne participent que peu à son travail et sont une cause d'alourdissement, on préfère donc généralement accepter une légère complication de la forme de la semelle qui permet la fixation de l'âme sans l'addition d'autres éléments.

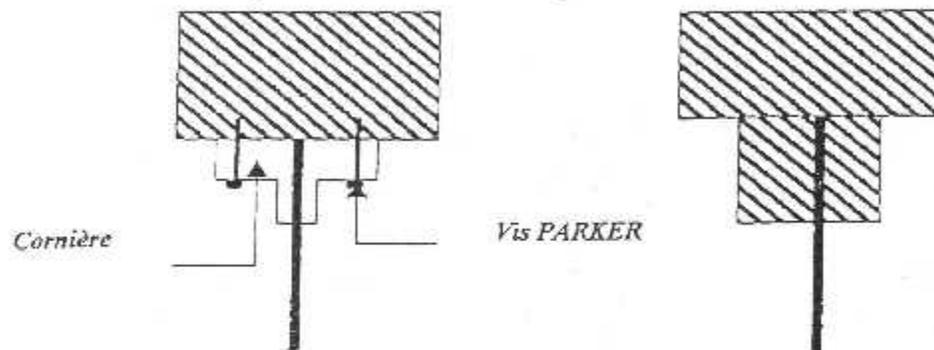
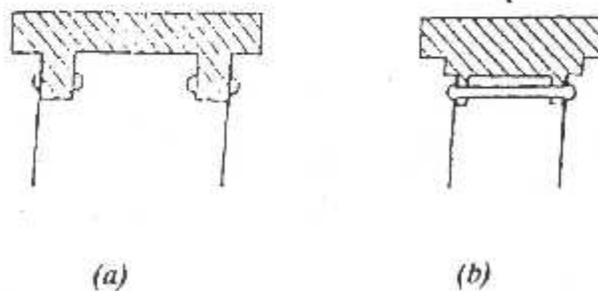


Figure (I.14): a) Cornières b) Sans adjonction

- SEMELLES DE FORMES

Semelles de forme pour âme double : Ce genre de semelles a une forme étiré à bords tombés, en forme de U ou d'oméga Ω

Pour les structure fermées, il est difficile de faire le rivetage, si les âmes sont ajourées, le rivetage est facile car on peut accéder facilement aux têtes intérieures des rivets mais, par contre si le longeron est assez étroit, on peut utiliser les mêmes rivets pour les deux âmes. figure(I.15)



Figure(I.15) a) : Semelle de forme avec âme double ajourée

Figure(I.15) b) : Semelle de forme avec âme double étroite

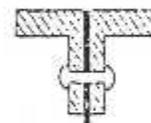
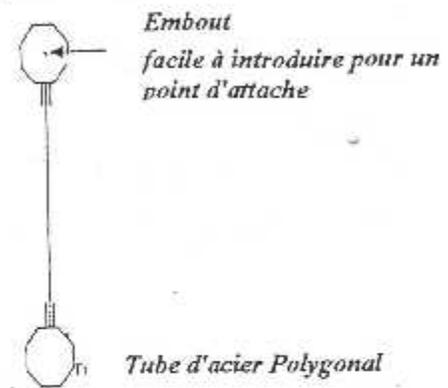
S'il s'agit d'un longeron- caisson à âmes pleines trop écartées pour être rivets simultanément, on est obligé pour fermer le caisson, de reporter les rivetages à l'extérieur.

- SEMELLES DE FORMES POUR ÂME SIMPLE :

S'il s'agit d'un longeron à une âme unique, on peut adopter différentes dispositions qui nous permettent de fixer facilement l'âme à la semelle. Lorsque les semelles sont fabriquées à partir de la tôle, on peut les réaliser à partir d'une pièce en utilisant un profilé à bords tombés qui se referme sur l'âme. Lorsque les semelles sont constituées par un profilé, massif, plusieurs solutions sont possibles :

On divise la semelle en deux parties en utilisant des cornières (figure I.16)

Figure(I.16) a) Semelle et âme en une seule pièce
b) Assemblage par rivetage



soit la faire d'une seule pièce en lui donnant la forme d'un profilé en T et en fondant la barre verticale de manière à y introduire l'âme figure(I.17).

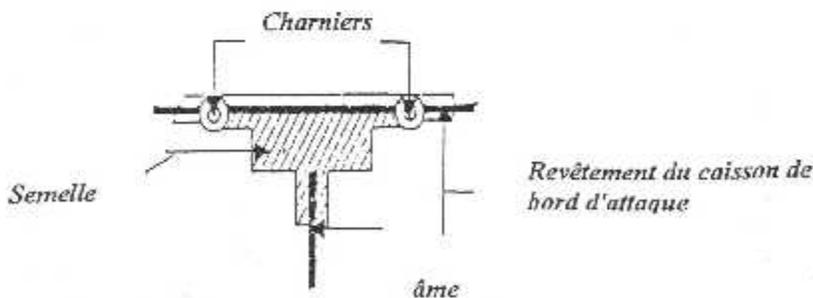


Figure (I.17) : Semelles en T

I.2.3. LES NERVURES

Ce sont des éléments transversaux de la voilure qui ont pour but rôle de transmettre les efforts aux longerons et de donner la forme au profil.

Elles supportent des efforts locaux importants, en conséquence, on envisage deux types de nervures :

- Les nervures courantes assurant le maintien du profil et la rigidité générale.

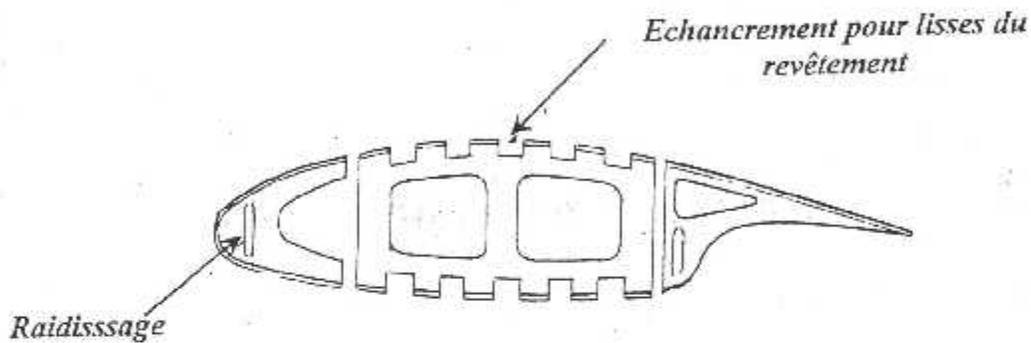
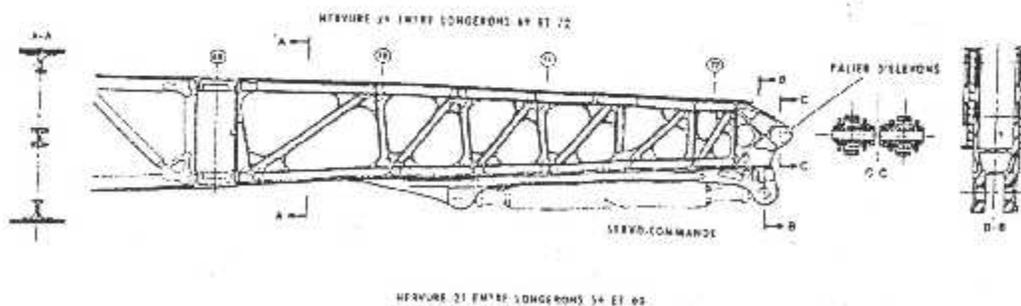


Figure (I.18): Forme d'une nervure

- Les nervure fortes placées aux points d'introduction d'efforts locaux.



Figure(I.19) : Forme de la nervure forte

Les nervures sont constituées de 2 semelles – chapeaux et d'une âme en tôle emboutie, ajourée, quelquefois raidi transversalement.

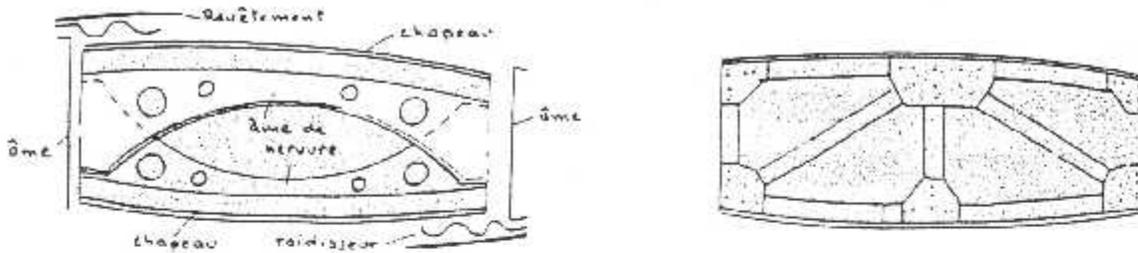


Figure (I.20): Eléments constituant une nervure.

Les nervures fortes ont des semelles usinées ou forgées et une âme raidie ou forgée.

Les nervures étanches ferment les extrémités des réservoirs structuraux ou intégraux, l'intérieur de l'aile constitue le réservoir par lui même.

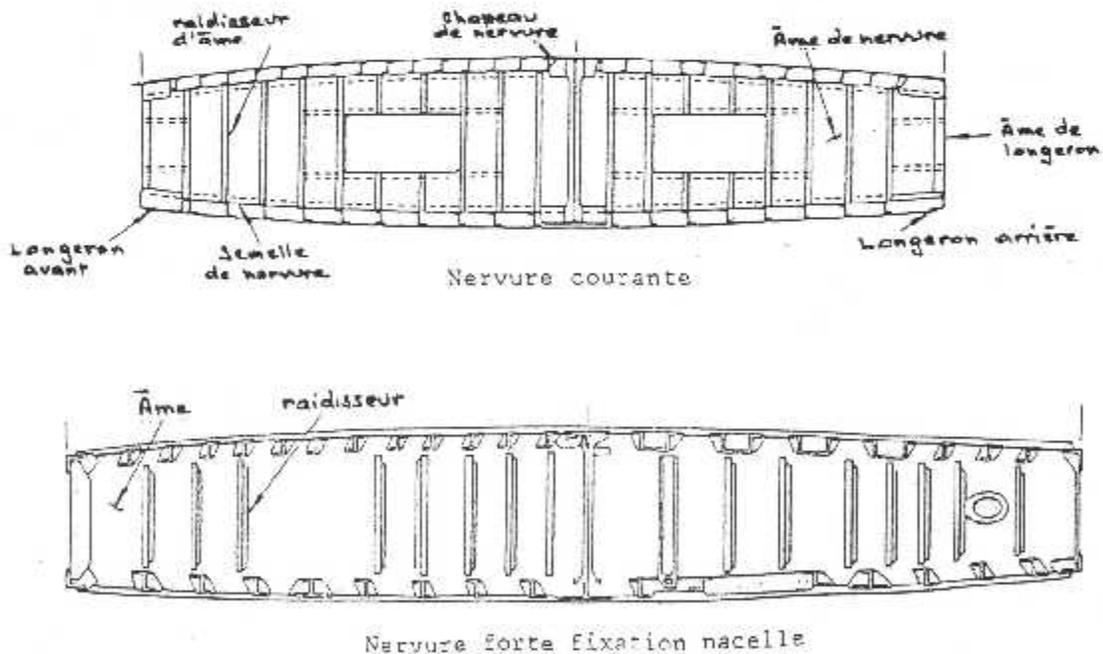


Figure (I.21) : Autres exemples de nervures

I.2.4. LES RAIDISSEURS

Les raidisseurs sont des poutre dans les échancrements des nervures, elles ont le même sens que les longerons, de l'emplanture au bout d'aile, elle servent à répartir les charge et à fixer le revêtement.

Les raidisseurs peuvent être dirigés perpendiculairement à l'envergure, c'est à dire parallèlement aux nervures. pour que la tôle participe à la flexion de la voilure on doit placer les raidisseurs parallèlement à l'envergure de l'aile.

Les lisses ou raidisseurs ont des formes variés sur les avions modernes le raidissement longitudinal est assuré par les lisses rapportées (rivés, soudés, collés) ou bien des lisses intégrées par usinage(fraisage à longue course) dans l'épaisseur du revêtement figure (I.22)

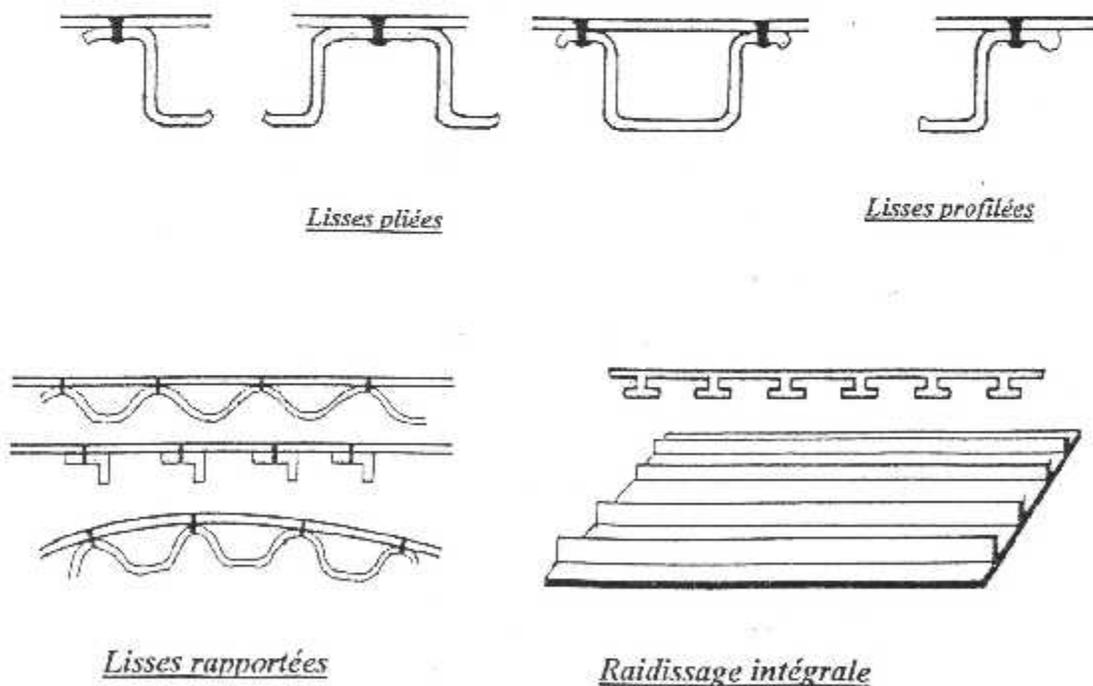


Figure (I.22) : Les différents types de raidisseurs

1.2.5. LE REVETEMENT :

Sur tous les avions modernes le revêtement participe partiellement ou totalement aux efforts, les revêtement extrados travaillent à la compression et les revêtement intrados à la traction en vol.

Il est constitué d'un matériaux à épaisseur variable, croissante de l'extrémité d'aile vers l'emplanture et de nature différente entre l'intrados (alliage léger au cuivre) et l'extrados (alliage léger au zinc) le revêtement métallique est généralement riveté, parfois collé.

Il existe des revêtement constitués de panneaux pour former des raidisseurs intégrés qui donnent une rigidité et une résistance car lorsque ce revêtement travaille au cisaillement sous les effort de traînée et de torsion, les tôles claquent et ces raidisseurs sont nécessaire pour résister aux efforts de compression que la tôle ne peut encaisser .

1.3. IDEALISATION DES STRUCTURES

Les composantes actuelles des structures d'avions sont très complexes, il est nécessaire de faire quelques simplifications à condition que le degré de complicité soit déterminé avec précision, la limite de sa simplification a une très grande importance car la solution finale doit être proche de la réalité.

Les structure semi-monocoques sont idéalisées par un modèle de structure simple de telle sorte que la répartition de toutes les forces seront presque comme sur la structure réelle.

Dans la figure (I.24), les raidisseurs longitudinaux et les semelles portent les contraintes directes ou longitudinales par contre le revêtement effectif résiste aux contraintes de cisaillement et parfois les contraintes directe .

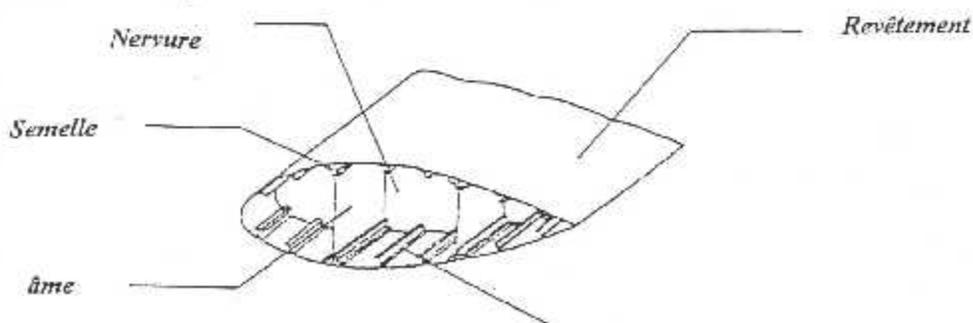


Figure (I.24) : Eléments principaux de l'aile. - Raidisseur

Il est simple de faire une idéalisation des structures à section caisson, ou les raidisseurs et les semelles portent les forces directes, le revêtement et les âmes portent les forces de cisaillement.

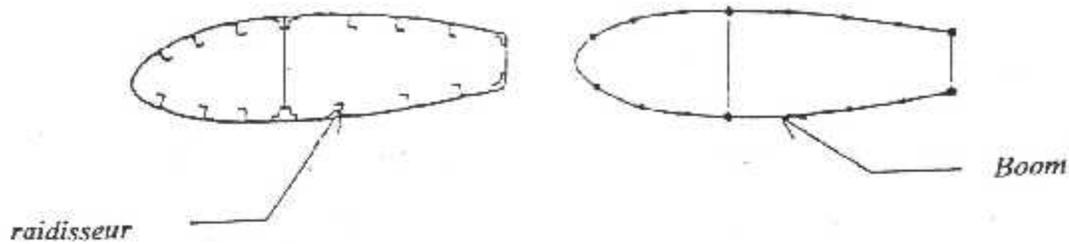


Figure (I.25) : Idéalisations des raidisseurs

La figure (I.25) représente ce type de composantes où les raidisseurs sont idéalisés par des cercles représentés comme des booms.

- **définition d'un boom :**

C'est une surface concentrée sur le revêtement, les valeurs des contraintes directes sont calculées au centre de ces surfaces et sont supposées constantes à travers la section transversale et les forces de cisaillement sont uniformes à travers l'épaisseur du revêtement et les âmes.

L'idéalisation est basée sur la conservation des paramètres suivants :

- les moments d'inertie.
- la masse.
- La surface du boom doit être égale à la surface réelle du raidisseur.
- La position du raidisseur.

Dans notre étude on a assimilé l'aile à une poutre encastree libre, en vue de déterminer les modes et fréquences propres de vibration, avant d'arriver à se stabiliser en faisant un aperçu général sur le phénomène de vibration en posant l'exemple d'une poutre en flexion. Ce travail est représenté dans le sous chapitre suivant.

I.4. PRINCIPES FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE

I.4.1. HISTORIQUE

Les phénomènes vibratoires jouent un rôle déterminant dans presque toutes les branches de la physique (mécanique, électricité, optique, acoustique, ...etc), malgré leurs grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique.

L'homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il a construit les premiers instruments de musique. Les musiciens et les philosophes cherchent les lois de la production du son et les appliquèrent à la construction des instruments de musique. Par exemple, Pythagore (507-582) a prouvé expérimentalement que si-deux cordes sont tendues, les tons qu'elles produisent diffèrent d'un octave, quand la longueur de l'une est le double de la longueur de l'autre. Malgré les connaissances acquises par les anciens, il faut attendre le début du 17^{ème} siècle pour que Galilée (1564-1642) démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence des vibrations. Le phénomène de battement fut mis en évidence par Sauveur en (1653-1716) à la fin du même siècle. C'est Bruck Taylor (1685-1731) qui a pour la première fois, retrouvé par voie mathématique les résultats expérimentaux de Galilée et d'autres chercheurs. Plusieurs mathématiciens renommés ont étudiés le problème de la corde vibrante. Citons Bernoulli (1700-1782), D'Alembert (1717-1783), Euler(1707-1783), Lagrange (1736-1813) et Fourier (1768-1830). Leurs études ont montrés qu'une corde peut vibrer latéralement de différentes façons appelées modes de vibration. Le premier mode correspond à la fréquence la plus basse. La déformée de la corde correspond à une demi sinusoïde. Le second mode correspond à une fréquence double de celle du premier et à une déformation sinusoïdale de la corde qui présente un nœud en son milieu. Sauveur donna le nom de fondamentale à la plus basse fréquence et celui d'harmonique à la fréquence la plus élevée. La superposition linéaire des harmoniques fut proposée pour la première fois par Bernoulli. Enfin Fourier présenta en (1822) son mémoire célèbre sur la théorie des séries harmoniques; D'Alembert établissait vers (1750) l'équation différentielle régissant les vibrations d'une corde. On a reconnu plus tard le caractère ondulatoire de cette équation qui porta dès lors le nom d'équation d'onde. à partir de la loi de Hooke (énoncé en 1676), Euler et Bernoulli ont étudiés les vibrations des poutres. Leurs calculs étaient basés sur la conservation de l'énergie. cette méthode a été développée plus tard par Lord Rayleigh (1842-1919) et porte depuis son nom.

L'étude des vibrations des plaques et des membranes a été abordé beaucoup plus tard, en particulier par Khirchoff (1842-1887) et Poisson (1781-1840).

Parmi les chercheurs contemporains, mentionnons Stodola (1859-1943) qui a établi une méthode d'analyse des vibrations des poutres lors de ces travaux sur les vibrations des aubes de turbine.

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des ordinateurs ainsi que les méthodes expérimentales a permis des progrès importants de la mécanique vibratoire. Il est maintenant possible d'aborder l'étude des systèmes complexes soumis à des sollicitations quelconques, déterministes ou aléatoires.

Dans ce domaine l'apparition des calculateurs électroniques, dans les années (1950), a autorisé le développement des méthodes numériques à la puissance colossale, tel que la méthode des éléments finis. Celle-ci est aujourd'hui d'un usage courant dans l'industrie pour l'étude des structures dont la complexité rend vaines les méthodes de la résistance des matériaux classiques. C'est ainsi que la conception de la plus part des structures "que se soit les constructions fixes du génie civil, du génie nucléaire ou du génie océanique, les machines ou parties de machine, les constructions aéronautiques, automobiles ou navales" exige à présent la détermination de leurs réponse aux sollicitations de nature dynamique qu'elles sont amené à rencontrer au cours de leurs existence. Or le comportement dynamique d'une structure est très fréquemment lié à des phénomènes que ne peut permettre de prévaloir la seule considération des chargements statiques ou pseudo- statique auxquels sont souvent assimilées les sollicitations dynamiques rencontrées dans la réalité: le tristement fameux pont de Tacoma, ou la rupture d'une aile d'avion par flottement aéro-élastique constituent des exemples heureusement extrêmes de tels phénomènes.

I.4.2. JUSTIFICATION DES ETUDES DE VIBRATIONS

Il faut rappeler ici qu'on désigne couramment par vibration, les petits mouvements d'un système mécanique, autour d'une position d'équilibre ou d'un mouvement permanent. Ces petits mouvements induisent généralement :

- 1- des petites contraintes au sein du matériau qui peuvent occasionner des ruptures de fatigue,
- 2- des frottements qui peuvent occasionner des usures de matériau,
- 3- des chocs qui peuvent détériorer localement le matériau,
- 4- des bruits qui sont émis à l'extérieur et qui posent parfois problèmes importants d'environnement.

Mais dans certains cas très particuliers, des mouvements de fortes amplitudes peuvent apparaître, en entraînant la ruine rapide des structures. Ces mouvements ont pour origine des mécanismes d'instabilité.

Les vibrations touchent toutes les branches de l'industrie : aéronautique, chemin de fer, automobile, industrie pétrolière, ... etc. L'industrie aéronautique n'échappe pas à la règle du fait de considérations d'environnement, de vitesse, de taille des structures. Un aspect particulier de l'industrie aéronautique réside dans les impératifs très strictes des règles de sécurité. La prévision des risques vibratoires en fonctionnement doit être effectuée avec un soin particulier. De plus ces règles imposent d'envisager un certain nombre de situations accidentelles. Signalons enfin que les vibrations sont un domaine de recherche largement ouvert et les méthodes de prévisions actuelles demandent encore de nombreux perfectionnement.

I.4.3. NOTION DE CONDITIONS AUX LIMITES

Toutes les opérations de réduction des variables de déplacement ayant été effectuées, il faut se poser le problème des conditions aux limites du système mécanique. Ceci revient, dans la pratique, à savoir où arrêter le système et préciser les connections avec les parties que l'on ne considère pas. Cette opération souvent délicate est évidemment très dépendante de la nature du problème à traiter.

I.4.4. NOTION DE DEGRE DE LIBERTE

Le mouvement d'un système mécanique est défini par un ensemble de variables de déplacements indépendantes, ces variables sont appelées degrés de liberté du système, ils sont :

- soit sous la forme d'un nombre fini de fonctions du temps (problèmes de corps solides, de masses localisées, discrétisées en éléments finis),
- soit sous la forme de fonctions de l'espace et du temps (problèmes continus mono -, bi -, ou tridimensionnels), satisfaisants les conditions aux limites à la frontière du domaine de définition du système.

I.4.5. CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES D'UNE STRUCTURE

Généralement l'étude des vibrations est basée sur la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure. Ces caractéristiques peuvent être énoncées comme suit :

- les fréquences propres - les modes propres - les facteurs d'amortissement.

a) Fréquences Propres :

Pour un système libre et non amorti, les fréquences propres ou bien (fréquences naturelles) sont les fréquences dans lesquelles le système est susceptible de vibrer sous l'effet de son inertie seule. La détermination des fréquences propres est nécessaire lors de tout projet d'étude de vibration des structures à cause surtout des graves dommages que pourrait causer le phénomène de résonance.

b) Modes Propres :

C'est les modes de base sous lesquels la structure libre et non amortie, est susceptible de vibrer, sous l'effet de sa propre inertie chacun de ces modes se caractérise par sa "déformée", et sa fréquence de vibration propre équivalente. Lors de l'établissement de l'avant projet, dès que la définition structurale est achevée, les modes propres de vibration sont calculés. Tout mode de vibration quelconque de cette structure peut être considéré comme une combinaison linéaire des modes propres de vibration.

c) Facteur D'amortissement :

Dans les cas réels, on a toujours une dissipation d'énergie pendant la vibration de la structure, lorsque cette énergie est négligeable, l'analyse d'une structure peut être faite sans tenir compte de l'amortissement. mais quand ce dernier est significatif, son effet doit être inclus dans l'analyse, particulièrement quand l'amplitude de vibration est demandée.

Il faut rappeler ici que notre étude sera surtout basé sur les caractéristiques (a) et (b) ; (c) étant supposée négligeable.

1.4.6. SOURCES D'EXCITATION ET TYPES DE CHARGEMENTS DYNAMIQUES

Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous une forme ou une autre. D'un point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements dynamiques donnés :

- Chargements périodiques
- Chargements non périodiques

I.4.7. ORIGINE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES EN AERONAUTIQUES

Les vibrations qui affectent parfois divers éléments des structures ont en générales trois sources principales :

- 1) Les vibrations d'origine mécanique,
- 2) Les vibrations d'origine aérodynamique (aéro-vibration),
- 3) Le phénomène de flottement (flutter).

1) Vibration d'origine mécanique :

L'équilibrage imparfait de certains ensembles mécaniques, constitue une première cause d'excitation dont l'effet sur les divers éléments dépend naturellement des caractéristiques vibratoires propres à ceux-ci. Les vibrations qui en résultent sont souvent d'amplitude assez faible (micro-vibration) et elles n'ont en général d'autres inconvénients que d'augmenter le niveau du bruit à l'intérieur de la cabine. Cependant dans quelques cas particuliers, elles peuvent provoquer par fatigue, des criques sur les tôles insuffisamment raidies ou même exceptionnellement, et cela peut-être alors très grave (des ruptures de pièces très importantes).

2) Vibration d'origine aérodynamique (Aéro-vibration) :

Les sillages et les décollements aérodynamiques peuvent constituer des excitations qui provoquent des vibrations communément appelées "buffeting". Les cas suivants se rencontrent assez fréquemment :

- Les tourbillons liés aux pâles d'hélices peuvent faire vibrer aussi bien les tôles du fuselage dans le plan des hélices que l'empennage situé en arrière de l'hélice et dont la fréquence propre serait voisine de la fréquence de passage des pâles.
- L'écoulement turbulent derrière un "karman" mal dessiné ou une hypersustentation trop braquée, peut provoquer des vibrations en arrivant sur une gouverne.
- L'apparition des vibrations sur un profil donné dépend souvent de l'incidence, mais parfois aussi du nombre de Mach (décollement de la couche limite). Le caractère non stationnaire de tels écoulements peut dans certains cas être suffisamment violent pour compromettre le contrôle de l'appareil.

3) Le flottement (flutter) :

Le flottement est un phénomène vibratoire qui n'existe que par suite de la souplesse des structures d'avions placés dans certaines conditions de vol (vitesse et altitude). On peut alors le décrire comme une auto excitation dynamique d'une structure élastique par des forces aérodynamiques. En effet, une déformation de l'aile en torsion engendre une variation de la portance de cette dernière, donc un effet de flexion, de même, si le centre de gravité d'une section de l'aile n'est pas placé sur l'axe élastique, toute vibration de flexion engendre par inertie une vibration de torsion. On dit qu'il y a couplage, car les deux vibrations ne peuvent exister l'une sans l'autre. Pour que ces vibrations deviennent dangereuses, il faut qu'elles s'amplifient, car elles sont généralement amorties par tous les frottements internes. L'amplification suppose un apport d'énergie par le vent relatif (la vitesse). En effet la vibration de flexion voit sa fréquence croître avec la vitesse, alors que celle de torsion voit sa fréquence diminuer dans les mêmes conditions ; lorsque ces vibrations ont la même fréquence, elles peuvent alors s'entretenir, voir même s'amplifier. On dit que l'on est dans des conditions de vol critique et qu'il y a flottement (flutter). La vitesse à laquelle se produit ce phénomène s'appelle la vitesse critique de vibration ou vitesse de flottement.

1.4.8. PHENOMENE DE RESONANCE ET SON EFFET

Comme on l'a déjà précisé auparavant, il est nécessaire d'analyser les vibrations des structures afin de prédire les fréquences naturelles ou propres et la réponse à l'excitation envisagée. Ceci parce que si la fréquence de la force excitatrice ou perturbatrice coïncide exactement avec la fréquence de vibration libre du système structural, on aura le phénomène de résonance qui se caractérise par de très hautes amplitudes de vibration. Le phénomène de résonance peut avoir des conséquences fâcheuses, notamment lorsque la structure subit en certains cas plusieurs centaines de cycles de contraintes de fatigue. Pour cela dans plusieurs situations d'étude de structure, il n'est pas seulement nécessaire de considérer la résistance à la fatigue sous une charge statique donnée, mais il est aussi important de déterminer la capacité de ces composantes structurales. La structure peut être analysée seulement en dehors de la plage de fréquence d'excitation où la résonance peut être évitée. Il n'est pas toujours nécessaire de trouver toutes les fréquences naturelles de la structure. Ceci parce que plusieurs de ces fréquences ne seront pas excitées et dans n'importe quel cas, elles vont donner des amplitudes faibles de résonance. La structure devient de plus en plus rigide à la déformation à mesure qu'on atteint les modes de vibration propre correspondant aux fréquences propres supérieures de vibration. En conséquence la fréquence fondamentale est souvent d'un plus grand intérêt que les fréquences supérieures, puisque sa réponse forcée dans la plus part des cas la plus large.

I.5. VIBRATIONS TRANSVERSALES DES POUTRES ELANCEES

I.5.1. INTRODUCTION

Parmi les éléments constituant une structure on trouve fréquemment des éléments de poutre, de plaque, de coque, les solutions analytiques permettant de déterminer leur comportement n'existent que rarement, dans le cas la recherche de solution analytique est très pénible, il est préférable d'utiliser systématiquement des méthodes numériques.

I.5.2. POUTRE EN FLEXION :

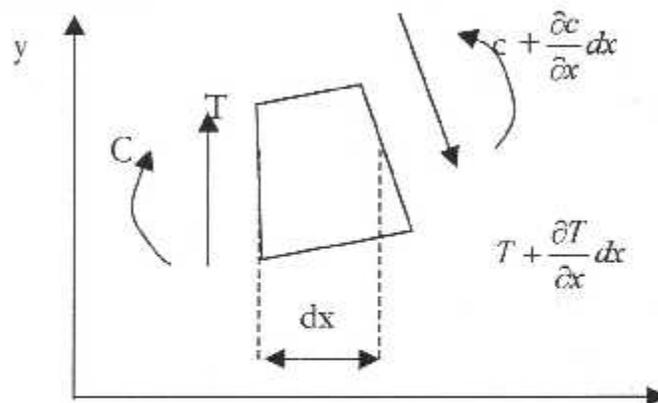


Figure (I.26)

- y : flèche.
- ψ : pente due au moment fléchissant.
- T : effort tranchant.
- C : moment fléchissant.
- T_{ex} : force extérieure par unité de longueur.
- I : inertie de section.
- a : facteur de forme de l'ordre de l'unité pour des sections usuelles.

L'application des théorèmes généraux de la dynamique conduit à :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx + T_{ex} dx$$

$$\rho I dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -C + C + \frac{\partial C}{\partial x} dx - T dx$$

soit après simplification :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial T}{\partial x} + T_{ex} \quad (I.1)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial C}{\partial x} - T \quad (I.2)$$

Par ailleurs, entre T , C , y , ψ les relations classique de la résistance des matériaux sont les suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{c}{EI} \quad (I.3)$$

$$\psi - \frac{T}{aSG} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (I.4)$$

Les termes $\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ et $\frac{T}{aSG}$ sont les effet secondaires de flexion. Le premier est l'effet d'inertie de rotation , le second est l'effet de cisaillement, pour une poutre ou les effets secondaires ne sont pas pris en compte les équations deviennes :

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial T}{\partial x} + T_{ex} \\ EI & \\ \frac{\partial C}{\partial x} - T &= 0 \end{aligned} \quad (I.5)$$

Par élimination de T , C , ψ entre les quatre équations précédentes l'équation aux dérivées partielles du mouvement :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_{ex} \quad (I.6)$$

et pour une poutre de section constante

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_{ex} = 0 \quad (I.7)$$

L'équation est utilisée dans le cas où il n'y a pas d'efforts extérieurs ($F_{ex}=0$), les sections droites des poutres sont supposées constantes et les équations du mouvement libre sont résolues par la méthode classique de séparation de variables.

Posons :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (I.8)$$

qui reportée dans (7) entraîne:

$$EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} T(t) + \rho S X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (I.9)$$

la séparation de la fonction de la variable d'espace et de celle du temps :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{X(x)} \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = \frac{1}{T(t)} + \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = cte = \omega^2 \quad (I.10)$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \rho S \frac{\rho S}{EI} \omega^2 X(x) &= 0 \end{aligned} \quad (I.11)$$

la solution de (11) est :

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (I.12)$$

La solution de 12 est obtenue en posant:

$$X(x) = X e^{rx} \quad (I.13)$$

Et l'équation caractéristique:

$$r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{EI} = 0$$

a comme racines :

$$r = \beta, -\beta, j\beta, -j\beta$$

avec

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}} \quad (I.14)$$

A partir de (14) et des quatre valeurs de r:

$$X(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x + E \operatorname{sh} \beta x + F \operatorname{ch} \beta x \quad (I.15)$$

les pulsations de résonance ω_n sont déterminées par l'application des conditions aux limites, les plus courantes sont:

$$\begin{array}{ll} \text{Libre (L)} & : \quad T=0 \quad , \quad C=0 \\ \text{Encastrées (E)} & : \quad \psi=0 \quad , \quad Y(\text{flèche})=0 \\ \text{Appuyée (A)} & : \quad C=0 \quad , \quad Y(\text{flèche})=0 \end{array}$$

Dans le cas d'une poutre encastree libre et en supposant que l'extrémité encastree soit à $x=0$ et l'extrémité libre à $x=L$ on a compte tenu de (16) et(15)

$$D+F=0 \quad (I.18)$$

$$C+E=0$$

$$-\sin \beta L - D \cos \beta L + E \operatorname{sh} \beta L + F \operatorname{ch} \beta L = 0$$

$$-c \cos \beta L + D \sin \beta L + E \operatorname{ch} \beta L + F \operatorname{sh} \beta L = 0$$

Les solutions autre que les solutions identiquement nulles impliquent que le déterminant du système (18) soit nu, alors tous les calculs effectués:

$$1 + \cos \beta L \operatorname{ch} \beta L = 0 \quad (I.19)$$

en écrivant les solutions de cette équation sous la forme:

$$\begin{array}{l} \beta_1 L = X_1 \\ \beta_2 = X_2 \end{array} \quad (I.20)$$

les pulsations de résonance, compte tenu de (8) et (12), s'écrivent :

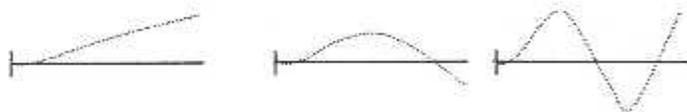
$$\omega_n = \frac{X_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (I.21)$$

Le tableau ci-dessous donne les premiers valeurs de X de la solution exacte pour les conditions aux limites les plus courantes données par les programmes suivants:

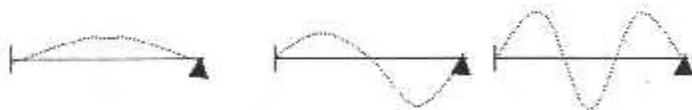
		X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2
EL	$1 + \operatorname{ch} x \cos x = 0$	3.516	22.03	61.69	120.9	199.8
EE	$1 - \operatorname{ch} x \cos x = 0$	22.37	61.67	120.9	199.8	298.5
EA	$\operatorname{Tg} x \operatorname{th} x$	15.41	49.96	104.2	178.2	272.0

Il existe en plus une fréquence nulle dans le cas A-L ET deux dans le cas L-L.
Les relations (16) et (21) permettent de déterminer les modes qui sont représentés ci-dessous:

EL :



EA



EE



RELATION D'ORTHOGONALITE :

A partir de (6) on a en mouvement libre :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \rho S \omega^2 y \quad (I.22)$$

et puisque cette équation est vérifiée pour les couples ω_i, y_i et ω_j, y_j :

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 y_i}{dx^2}) = \rho S \omega_i^2 y_i \quad (1.23)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 y_j}{dx^2}) = \rho S \omega_j^2 y_j \quad (1.24)$$

En intégrant deux fois par partie et dans le cas conditions aux limites courantes : libre, appuyée, encastree, il vient :

$$\int_0^L EI \frac{d^2 y_i}{dx^2} \frac{d^2 y_j}{dx^2} dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S y_i y_j dx \quad (1.25)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 y_i}{dx^2} \frac{d^2 y_j}{dx^2} dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho S y_i y_j dx \quad (1.26)$$

ce qui permet de déduire les conditions d'orthogonalité

$$\int_0^L \rho S y_i y_j dx = 0 \quad (1.27)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 y_i}{dx^2} \frac{d^2 y_j}{dx^2} dx = 0 \quad (1.28)$$

de même on démontre que :

$$\omega_i^2 = \frac{\int EI (\frac{d^2 y_i}{dx^2})^2 dx}{\int \rho S y_i^2 dx} = \frac{K_i}{m_i} \quad (1.28)$$

Les intégrales K_i , et m_i sont les raideurs et masses modales du mode i .

Chapitre II

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1. INTRODUCTION AUX METHODES MODERNES DE CALCUL DES STRUCTURES

Les techniques de calcul des structures ont connu ces trente dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi que la méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F.) est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, techniques offshore, etc....

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F. appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, car elle met au œuvre les trois connaissances de base :

- la mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc....
- l'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres...
- l'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grand logiciels.

On se propose, dans cette présentation générale, d'introduire les notions de base nécessaires à la compréhension de ces méthodes et de faire le point sur leur état actuel d'avancement. Pour cela il est utile d'en faire un bref historique.

II.2. HISTORIQUE

Les bases théoriques de la M.E.F. reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

En ce qui concerne les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier : en 1819, NAVIER définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité, puis MAXWELL en 1864 et GASPIGLIANO en 1878 établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie. Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été pratiquement inexistantes à cause de l'indisponibilité de moyens de calcul. Il faut noter, en 1932, l'établissement

par H.CROSS d'une méthode rendant possible l'analyse de systèmes de poutres avec les moyens de calcul de l'époque. Cependant, ces techniques ne permettaient pas jusqu'alors la résolution de problèmes de milieux continus rendue possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20^{ème} siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ en 1908 et de GALERKIN en 1915. puis, en 1943, COURANT établit les bases de la M.E.F. en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation spatiale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Après la deuxième guerre mondiale on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes avec les calculatrices de bureaux disponibles alors. Parmi les contributions les plus importantes, citons celles de LEVY en 1947 et GARVEY en 1951 pour la méthode des forces et LEVY en 1953 pour la méthode des déplacements. En 1954, DENKE systématise la méthode des forces. Enfin, en 1955, ARGYRIS présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante TURNER et CLOUGH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F. comme technique de calcul des structures complexes. En effet, ces publications, grâce à l'introduction du concept d'élément fini, ont apporté une unification des méthodes matricielles employées jusqu'alors pour les structures discrètes et des méthodes de résolution de problèmes de milieux continus.

A partir de 1956, la M.E.F. va connaître un développement intense sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs. La méthode des déplacements va être choisie de façon quasi universelle comme technique de résolution matricielle de préférence à la méthode des forces malgré la mise au point de procédures de traitement automatique des inconnues hyperstatiques par ROBINSON ET DENKE. Dès lors, on assiste au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques, éléments de volume et à l'établissement de nouvelles formulations telles que les formulations équilibre ou mixtes (FRANJS de VEUBEKE, PLAN). Par ailleurs, le domaine d'application de la M.E.F. limité au début à la statique linéaire s'étend progressivement à la dynamique linéaire sous l'impulsion notamment de ARCHER et HURTY au flambement linéarisé (stabilité initiale) et plus récemment à l'analyse non-linéaire avec non-linéarités géométriques et constitutives sous l'impulsion de ODEN, MARCATI, GALLAGER.

Cet historique serait incomplet si l'on omettait de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse (encore appelés codes généraux) à partir des années 60. Ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement abouti à faire rentrer la M.E.F. dans la pratique industrielle. Il est certain que, d'une part, la M.E.F. se prête bien à la programmation sur ordinateur, et que d'autre part, la M.E.F. se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers ; d'où l'idée de développer des codes généraux. C'est ainsi que vers 1965 on assiste en Europe et aux U.S.A. au développement intensif de tels programmes sous l'impulsion d'universités, d'agences gouvernementales, et de groupes industriels. Parmi les codes actuels les plus importants, citons : NASTRAN, ASKA, MARC, STARDYNE, ANSYS, SAMCEF, SYSTUS, ABAQUS...

II.3. MILIEUX CONTINUS ET STRUCTURES DISCRETES : LE CONCEPT D'ELEMENT FINI

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie d'élasticité ou de modèles théoriques qui en, sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). Dans le paragraphe précédent, on a pu voir que c'est à des assemblages de poutres que le concept de structure discrète a été appliqué tout d'abord. En effet, cette notion de modèle discret est évidente pour de telles structures car :

- on dispose d'un modèle théorique simple à une dimension (théorie des poutres),
- la notion d'élément est intuitive et l'on peut caractérisé d'une façon simple le comportement de chaque élément,
- les interfaces entre éléments sont simples : ce sont les nœuds de l'assemblage,
- les conditions de compatibilité et d'équilibre aux nœuds se formulent d'une façon simple.

Cependant, il est bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple. Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriés. Dans le cadre de la M.E.F., on étudie un modèle discret du continuum. Ce modèle est basé sur une subdivision du domaine continu en sous-domaines de forme géométrique simple qu'on appellera 'élément fini' interconnectés en des points remarquables appelés 'nœuds'. De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la

solution aux nœuds. par le problème de l'ouverture circulaire dans une plaque rectangulaire sollicitée en traction uniforme. On y voit que les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation. On voit que le concept d'élément fini permet d'unifier le traitement des problèmes de milieux continus les plus divers.

On peut classer les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments peuvent être distinguées :

- les éléments unidimensionnels (1D) : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs ;
- les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane [déformation ou contrainte plane (plaque ou membrane)], plaques en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire ;
- les éléments tridimensionnels (3D) : éléments de volume ou coques épaisses ;
- les éléments axisymétriques qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques ou méridienne courbe avec éventuellement un traitement en séries de FOURIER suivant la coordonnée circonférencielle.

II.4. FORMULATIONS MATRICIELLES NIVEAUX ELEMENTAIRE ET GLOBAL

Nous avons vu précédemment comment la M.E.F. permettait de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés par application de critères énergétiques. Ces paramètres sont de nature différente selon la méthode employée. On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles :

- la méthode des forces dans laquelle les paramètres inconnus sont les contraintes ou les forces résultantes dans les éléments ;
- la méthode des déplacements dans laquelle les paramètres inconnus sont les déplacements (et éventuellement leurs dérivées) aux nœuds.

Lorsqu'on utilise ces deux types de méthodes ou ces techniques matricielles, on est amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- la formulation élémentaire au niveau de l'élément fini,
- la formulation globale au niveau de la structure complète.

• EXEMPLE

Pour expliciter ces deux niveaux, nous prendrons l'exemple de la méthode des déplacements.

- La formulation élémentaire consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des inconnus élémentaires, ici déplacements aux nœuds de l'élément. Ceci nécessite le calcul de matrices caractéristiques de l'élément : matrices de rigidité, de masse, vecteurs de forces équivalentes. On a par exemple (fig.) dans le cas de l'analyse statique, les expressions suivantes en fonction du vecteur q^e des déplacements aux nœuds de l'élément :

- énergie de déformation :

$$U_e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e \quad (II.1)$$

- travail des forces appliquées :

$$\tau_e = q^{eT} F^e \quad (II.2)$$

avec : K^e matrice de rigidité élémentaire,
 F^e vecteur des forces équivalentes élémentaires.

- La formulation globale consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus en tout les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrice de rigidité, de masse, vecteurs forces équivalentes) pour tous les éléments. Dans le cas de l'analyse statique, on a fig(II.4) pour la structure complète les expressions suivantes en fonction des vecteurs de déplacements aux nœuds de la structure complète :

- énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (II.3)$$

- travail des forces appliquées :

$$\tau = q^T F \quad (II.4)$$

avec : K matrice de rigidité de la structure complète,
 F vecteur des forces équivalentes, pour la structure complète.

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des nœuds. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \delta U = \delta \tau \\ \delta .q^T K .q - \delta .q^T F \end{array} \right| \quad \forall \delta q \neq 0 \quad (II.5)$$

D'où :

$$K .q = F \quad (II.6)$$

La résolution de ce système linéaire des équations d'équilibre permet de déterminer le vecteur q des déplacements inconnus.

On peut récapituler les considérations précédentes en concluant que la formulation globale consiste d'une part à obtenir les caractéristiques énergétiques globales à partir des caractéristiques élémentaires et d'autre part à déterminer les inconnues du problème (déplacement aux nœuds) par la résolution des équations d'équilibre (ou du mouvement dynamique).

II.5. CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS

Nous avons vu précédemment comment le concept d'élément fini et l'utilisation de méthodes matricielles permettait de ramener le problème continu à un système d'équations à un nombre fini d'inconnues de déplacement. Examinons maintenant les grandes classes de problèmes de calcul des structures et les types de traitement numérique qui en résultent.

II.5.1. LES PROBLEMES LINEAIRES

Ils peuvent se subdiviser en : voir fig(II.5)

• PROBLEMES STATIQUES

- Analyse statique linéaire

C'est le problème le plus simple. Il consiste à déterminer déplacements et contraintes dans une structure à comportement linéaire sous l'influence de charges statiques ou à variation lente. Ce problème se ramène à la résolution du système linéaire :

$$K \cdot q = F \quad (II.7)$$

- Analyse de stabilité initiale

Nous incluons ce cas dans cette classe des problèmes statiques linéaires. Il s'agit dans ce cas d'étudier la possibilité de bifurcation d'état d'équilibre à partir d'un état de pré flambage linéaire.

Ce type d'analyse correspond à l'étude du flambage d'Euler pour les poutres. Il ne permet d'obtenir une prédiction convenable des phénomènes de flambage que pour certains types de structures (poutres et plaques). Dans ce cas on se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres du type suivant :

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G] \mathbf{x} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Avec : \mathbf{K}_G matrice de rigidité géométrique.

Les solutions propres du système homogène ci-dessus sont respectivement les paramètres de charge critique λ_K et les modes de flambage correspondants $\mathbf{x}^{(K)}$.

• PROBLEMES DYNAMIQUES

L'analyse dynamique linéaire consiste à déterminer les déplacements (éventuellement vitesses et accélérations) et contraintes en fonction du temps pour une structure à comportement linéaire sollicitée par des forces dynamiques. Dans la méthode des déplacements ce type de problème se ramène à la résolution du système différentiel du second ordre des équations du mouvement, soit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (\text{II.9})$$

avec : \mathbf{M} matrice de masse

\mathbf{C} matrice d'amortissement.

Les différentes sortes d'analyses dynamiques sont les suivantes :

- Analyse modale ou recherche des modes propres de vibration

Le cas le plus simple (modes réels) se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres symétriques :

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{x} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Les solutions propres du système homogène ci-dessus sont respectivement pour le mode K :

$$\lambda_K = \omega_K^2 \quad \text{carré de la pulsation propre}$$

$$\mathbf{x}^{(K)} \quad \text{forme propre associée}$$

- Réponse dynamique

La résolution du système différentiel des équations du mouvement, soit :

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + Kq = F(t) \quad (\text{II.11})$$

peut s'envisager de deux façons différentes :

- a) la méthode de superposition modale.
- b) La méthode d'intégration directe pas à pas.

II.5.2. LES PROBLEMES NON-LINEAIRES

Les éventuelles non-linéarités dans le comportement des structures appartiennent à l'une des deux classes suivantes :

- Non-linéarités géométriques

Elles interviennent lorsque les déplacements et éventuellement les déformations sont suffisamment importants. Dans ce cas, les caractéristiques de la structure sont non-linéaires.

- Non-linéarités constitutives

Elles se produisent dans les cas où le comportement du matériau ne peut plus être considéré comme élastique linéaire. citons, à titre d'exemple, la plasticité et le fluage.

On peut aussi classer les problèmes non-linéaires en problèmes statiques et dynamiques.

• STATIQUE NON-LINEAIRE

Dans le cas de variation lente des charges, l'analyse non-linéaire se ramène à la résolution de système non-linéaire d'équations algébriques. On utilise pour cela des méthodes incrémentales ou itératives (type Newton-Raphson) ou encore une combinaison des deux. Remarquons que, à chaque palier de charge, peut se poser le problème d'unicité et de la stabilité des états d'équilibre.

Deux sortes de phénomènes de flambage peuvent se produire :

- la bifurcation d'état d'équilibre,
- l'instabilité par point limite ou effondrement.

• DYNAMIQUE NON LINEAIRE

Dans le cas de variation brusque de charges, le problème se ramène à la résolution d'un système non-linéaire d'équations différentielles. Cette résolution à l'aide de schémas d'intégration pas à pas est souvent délicate.

Un très grand nombre de problèmes rencontrés en pratique (analyse des contraintes, calculs dynamiques) peuvent être résolus avec une précision suffisante à l'aide de méthodes linéaires. Cependant, certaines classes de problèmes ne peuvent être analysés correctement qu'à l'aide de méthodes non-linéaires ; citons, à titre d'exemple, la stabilité des coques minces et le comportement des élastomères. Ces méthodes, nécessairement basées sur des formulations théoriques non-linéaires, sont de mise en œuvre délicate ; elles sont encore en pleine évolution en dépit d'un début d'utilisation industrielle.

II.6. APPLICATIONS

Il est intéressant d'illustrer ce chapitre introductif par des exemples d'application à caractère industriel. Les exemples présentés ci-près appartiennent au domaine aéronautique et spatiale. On pourra trouver de nombreux autres types d'application dans la littérature spécialisée.

II.6.1. ANALYSE DYNAMIQUE DU RADIOMETRE METEOSAT

Les applications de la M.E.F dans le secteur aéronautique sont multiples ; les deux exemples présentés ont été choisis parmi les études réalisées ces dernières années dans le département Etudes Générales de la Division Avion de l'Aérospatial Toulouse.

- Analyse dynamique d'un avion civil type Airbus A320

L'élaboration du modèle éléments finis d'un avion est obtenue par assemblage des modèles élaborés par les différents partenaires industriels du programme Airbus à l'aide de leur code propre (MSC/NASTRAN, SAMCEF, ASELF). Chaque industriel réalise ses modèles que des transcodeurs permettent de transcrire dans le code de l'Aérospatiale afin de réaliser l'assemblage global de l'avion, ce modèle final (fig.), de l'ordre de 100 000 d.d.l. pour l'A320, est alors condensé à quelques milliers de d.d.l. afin d'être associé à un modèle de masses et ainsi de permettre une analyse dynamique de l'avion entier, en particulier pour les études de flottement.

- Analyse statique d'un aileron en carbone / Epoxy-Sandwich de l'A340

Le concept structural nouveau retenu pour les ailerons a nécessité un modèle éléments finis très détaillé (fig.) de chacun des deux ailerons : 3000 nœuds, 17 000 d.d.l. les éléments utilisés sont spécifiques des matériaux composites : plaques composites orthotropes à 8 nœuds et 5 d.d.l. par nœud ; plaques sandwich orthotropes de 3 couches à 8 nœuds et 5 d.d.l. par nœud. Ces modèles ont permis d'atteindre les objectifs suivants :

- analyse prévisionnelle des déformations des ailerons et détermination de la forme de fabrication des ailerons afin qu'en vol de croisière le bord de fuite des ailerons déformés soit aligné avec celui de la voilure.
- Analyse des contraintes dans les éléments de la structure, revêtements, longerons, nervures, dans les différents cas de charge de vol et cas d'essais.
- Détermination des marges de sécurité à travers la corrélation calculs d'essais.

II.6.2. APPLICATIONS SPATIALES

L'utilisation des éléments finis pour l'analyse des structures spatiales a commencé au début des années soixante dix. Depuis, cette technique est devenue un outil de base utilisé couramment dans l'industrie spatiale, tant pour les études structurales de lanceurs que de satellites.

- Analyse statique et dynamique du satellite SPOT 1

Les éléments finis ont été utilisés de façon intensive pour les études structurales du satellite SPOT 1. ce projet a été à l'origine d'exigences nouvelles en matière de techniques de modélisation :

- L'architecture modulaire du satellite liée à la spécification de réutilisation de la plate-forme pour différentes missions d'une part, le découpage industriel du projet d'autre part, ont pratiquement imposé l'utilisation d'une technique de sous-structuration à plusieurs niveaux,
- Les exigences de stabilité dimensionnelle ont conduit au choix de matériaux composites de type carbone / époxy pour les nombreux éléments structuraux de la charge utile,
- L'importance de la masse d'hydrazine embarquée a conduit à une modélisation appropriée des réservoirs avec prise en compte des effets d'interaction fluide-structure.

Au niveau de chaque sous-structure, des modèles ont été élaborés par les industriels à l'aide de leurs codes propres (MSC/NASTRAN ou ASKA). Des analyses structurales préliminaires ont été réalisées pour vérifier le respect des spécifications de dimensionnement (statique, dynamique, éventuellement stabilité dimensionnelle).

Ces modèles ont été assemblés après transcodage pour constituer le modèle complet du satellite. Ce modèle est représenté en (fig.), en configuration de vol, assemblé au modèle du satellite suédois VIKING. Ce modèle a été exploité par le CNES pour les analyses structurales du satellite au niveau système en particulier en vue de :

- la création d'un modèle condensé pour les analyses couplées ; lanceur-satellite et la vérification des sollicitations dynamique de lancement, résultant de ces études,
- la prévision des essais dynamiques,
- la vérification des exigences de stabilité dimensionnelle.

Cet exemple illustre bien le rôle des éléments finis dans la conception et la vérification des structures de satellites.

II.7. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les méthodes matricielles nous permettent d'analyser des structures discrètes constituées par des éléments simples (barres, poutres) de signification physique évidente et que l'on pouvait caractériser à l'aide de solutions analytiques. Cependant, les structures sont souvent constituées par des milieux continus (plaques, coques ou élasticité 3D) aux géométries les plus diverses pour lesquels on ne possède pas de solutions analytiques et que les méthodes matricielles traditionnelles ne permettent pas d'analyser. Dans ce cas, il faut avoir recours à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximations adéquates pour discrétiser ces continua. La M.E.F. est parmi ces techniques la plus utilisée car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet ainsi l'analyse des structures complexes.

II.7.1. LES METHODES D'APPROXIMATION

II.7.1.1. NOTIONS GENERALES

Le problème général de l'approximation consiste à chercher la meilleur approximation d'une fonction $u(M)$ à domaine de définition D de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. Pour cela, on définit une approximation \bar{u} en posant :

$$\bar{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(M) \quad (\text{II.12})$$

Les $\phi_i(x, y, z)$ sont des fonctions choisies "a priori" et constituent une base fonctionnelle. Les coefficients inconnus a_i sont appelés coordonnées généralisées.

On appelle $\bar{u}(M)$, approximation de u dans la base fonctionnelle ϕ_i . On peut encore écrire en utilisant la notation matricielle :

$$\bar{u} = [\phi]^T [a] \quad (\text{II.13})$$

Les fonctions d'approximation doivent satisfaire certaines conditions : continuité, conditions aux limites et complétude.

- Définition

Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction arbitraire, $u(M)$ dans D , en augmentant le nombre de coordonnées généralisées, soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[u(M) - \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \right] = 0 \quad (\text{II.14})$$

Les fonctions polynomiales, trigonométriques, les polynômes de Tchebyshev sont des exemples de bases fonctionnelles complètes.

Le principe des méthodes d'approximations consiste à remplacer la résolution d'un problème continu à un nombre fini d'inconnues : les coordonnées généralisées a_i . On détermine les coefficients inconnus a_i définissant la "meilleure" approximation en minimisant un critère d'erreur, ou encore en exprimant les conditions d'orthogonalité de l'erreur avec des fonctions de pondération données.

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales suivant la formulation du problème. En effet les lois physiques peuvent s'exprimer des deux manières suivantes :

- **Sous forme locale** : c'est-à-dire sous forme d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites associées.
- **Sous forme globale** : ou variationnelle (énergétique) c'est-à-dire sous forme de conditions de stationnarité de fonctionnelles (ou énergies potentielles).

Les méthodes d'approximation se classent donc en :

- **Méthodes Universelles** : utilisables dans le cas d'une formulation locale du problème (méthodes de Galerkin, moindres carrés, collocation, ... etc.).
- **Méthodes Variationnelles** : utilisables dans le cas d'une formulation variationnelle du problème (méthode de Ritz, Kantorovitch, Trefftz, ... etc.).

II.7.1.2. METHODES D'APPROXIMATION UNIVERSELLES

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles $L(u)=0$ dans D avec les conditions aux limites associées.

Soit $u(M)$, l'approximation de u dans la base fonctionnelle $\phi_i(M)$:

$$\bar{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad \forall M(x, y, z) \quad (\text{II.15})$$

Les fonctions ϕ_i devront constituer une base complète et satisfaire toutes les conditions aux limites :

On définit une fonction erreur dans D par la relation :

$$E(M) = L[\bar{u}(M)] \quad (\text{II.16})$$

Cette fonction erreur est évidemment une fonction non nulle. Dans ce cas, le problème d'approximation consiste à chercher les coordonnées généralisées les plus satisfaisantes selon un certain critère :

- soit sous forme de minimum d'une norme,

- soit sous forme de conditions d'orthogonalité de la fonction erreur avec certaines fonctions de pondération données $W_i(M)$.

Ainsi, les différentes méthodes d'approximation appartenant à cette catégorie peuvent être considérées comme variantes de la méthode de pondération de l'erreur :

$$[E, W_i] = \int_D E(M) W_i(M) dv \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.17})$$

Les différentes méthodes se distinguent par des choix particuliers des fonctions de pondération. On a ainsi :

- **Méthode de Galerkin**

$$W_i(M) = \phi_i(M) \rightarrow \int_D E(M) \phi_i(M) dv = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.18})$$

Ces N conditions d'orthogonalité conduisent à un système linéaire si l'opérateur L est linéaire, le système linéaire est symétrique si L est auto-adjoint.

- **Méthode de Miklin (moindres carrés)**

$$W_i(M) = \frac{\partial E}{\partial a_i} \quad (\text{II.19})$$

$$\int_D E(M) \frac{\partial E}{\partial a_i} dv = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.20})$$

- **Méthode de collocation par points**

Dans le cas d'un problème à une dimension, on a :

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (\text{fonction impulsion de Dirac}) \quad (\text{II.21})$$

$$\int_{\Omega} E(x) \delta(x - x_i) dx = E(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.22})$$

Parmi toutes ces méthodes, la méthode de Galerkin semble la plus intéressante de par sa plus grande facilité de mise en œuvre.

II.7.1.3. METHODES VARIATIONNELLES : METHODE DE RITZ

Dans certains cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est-à-dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle. C'est le cas de la mécanique des structures. En effet, la solution du problème de mécanique des structures pouvait être caractérisés par la stationnarité d'une fonctionnelle : énergie potentielle totale $V[u_i]$, énergie potentielle complémentaire $V_c[\sigma_{ij}]$ ou fonctionnelle de Reissner $J_R[u_i, \sigma_{ij}]$ suivant l'approche retenue.

Il existe des méthodes d'approximation adaptées à de telles formulations Variationnelles. Parmi ces méthodes, la méthode de Ritz est certainement la plus simple et la plus généralement utilisée. C'est également la plus importante car elle constitue généralement le fondement des méthodes aux éléments finis utilisées pour l'analyse des structures. Des variantes de cette méthode ainsi que des méthodes Variationnelles différentes existent également. Citons parmi elles la méthode de Kantorovitch et la méthode de Trefftz. On va à présent présenter le principe de la méthode de Ritz dans le cadre de la formulation déplacement.

- **PRINCIPE DE LA METHODE DE RITZ**

La solution exacte du problème variationnel et celle qui, appartenant à l'espace des fonctions admissibles satisfaisant les conditions aux limites cinématiques, rend extrémale l'énergie potentielle totale, c'est-à-dire :

$$\delta V = 0 \quad \forall \delta u \text{ cinématiquement admissible}$$

avec:

$$V[u] = \int_{\Omega} F \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right) dv \quad (\text{II.23})$$

Soit m l'ordre de cette fonctionnelle c'est-à-dire, dans ce cas, l'ordre maximal de dérivation des déplacements apparaissant dans l'expression du potentiel de déformation. On dit que la solution est caractérisée par un extremum absolu.

Dans la méthode de Ritz, on cherche la meilleure approximation appartenant au sous-espace de dimension finie N de fonctions cinématiquement admissibles engendré par les fonctions base $\phi_i(M)$:

$$\bar{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad (\text{II.24})$$

Les fonctions base doivent être cinématiquement admissibles, c'est-à-dire continues et satisfaire les conditions aux limites cinématiques.

La meilleure approximation est celle qui appartenant à ce sous-espace ainsi défini, rend extrémale l'énergie potentielle totale $\bar{V}[\bar{u}] = \bar{V}[a_i]$. Cette solution approchée est donc caractérisée par un extremum relatif. On peut exprimer l'énergie totale \bar{V} sous forme algébrique en fonction des a_i . La meilleure approximation est donc caractérisée par les N conditions de stationnarité de \bar{V} par rapport aux a_i , soient :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.25})$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\nabla_a \bar{V} = 0 \quad (\text{II.26})$$

Si l'énergie potentielle totale peut se mettre sous critère quadratique (forme quadratique par rapport aux a_i), les conditions de stationnarité précédentes conduisent à un système linéaire que l'on peut considérer comme le système des équations d'équilibre généralisées. En effet, on peut écrire dans ce cas :

$$\bar{V} = \frac{1}{2} a^T A a - a^T b \quad (\text{II.27})$$

D'où les conditions de stationnarité

$$\nabla_a \bar{V} = A a - b = 0 \quad (\text{II.28})$$

Si l'on choisit pour coordonnées généralisées les déplacements aux nœuds de la structure, on peut écrire :

$$\bar{V} = \frac{1}{2} q^T K q - q^T F \quad (\text{II.29})$$

D'où les conditions de stationnarité :

$$\nabla_q \bar{V} - K q - F = 0 \quad (\text{II.30})$$

Il est intéressant de mentionner la valeur du minimum de l'énergie potentielle totale :

$$\bar{V}^* = \frac{1}{2} q^T F - q^T F = -\frac{1}{2} q^T F \quad (\text{II.31})$$

La méthode de Ritz converge de façon monotone en énergie si les fonctions base de l'approximation satisfont des conditions de complétude et d'admissibilité. En effet la méthode de Ritz a la propriété remarquable d'assurer une convergence monotone de l'énergie potentielle totale soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{V}_N^* = V^* \quad (\text{II.32})$$

Avec V^* énergie potentielle totale correspondant à la solution exacte, \bar{V}_N^* ($\neq V^*$) énergie potentielle totale correspondant à une solution approchée définie par N fonctions de base. De plus, la propriété de minimum absolu de l'énergie potentielle totale correspondant à la solution exacte, on peut déduire l'inégalité suivante :

$$\bar{V}_N^* > V^* \quad (\text{II.33})$$

D'où d'après le relation (II.20) :

$$q_{\text{exact}}^T F > q_{\text{approx}}^T F \quad (\text{II.34})$$

On peut en déduire que la méthode de Ritz conduit à des modèles approchés de structures qui sont plus rigides que ne l'est la structure réelle.

• CONDITIONS DE CONVERGENCE

1- COMPLETEUDE

Les fonctions $\phi_i(M)$ doivent constituer une base complète, de manière à pouvoir évaluer correctement les états de déformation constante et en particulier les états de déformations nulle et donc les modes rigides. Il est donc dangereux d'exclure

de l'approximation les premières fonctions base permettant de représenter ces états de déformation constante. La troncature de la base fonctionnelle doit toujours se faire en excluant les termes d'ordre élevé.

2- ADMISSIBILITE

Les fonctions base doivent être admissibles, c'est-à-dire :

- a) Satisfaire les conditions de continuité requises par le problème, conditions qui dépendent essentiellement de l'ordre m de la fonctionnelle.
- b) Satisfaire les "conditions aux limites rigides" du problème variationnel, c'est-à-dire les conditions aux limites "cinématiques" dans le cas d'une formulation déplacement.

Dans le cas de la mécanique des structures, deux cas peuvent se rencontrer dans le cas d'une formulation déplacement :

Le cas $m = 1$ qui est le cas de tous les problèmes d'élasticité.

On a en effet :

$$V[U_i] = \int_V W(\epsilon_{ij}) dv - \int_V f_i u_i dv - \int_{S_\sigma} \phi_i u_i ds \quad (II.35)$$

Avec :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (II.36)$$

Le cas $m = 2$ qui se présente dans les problèmes de flexion de poutres, plaques ou coques ; on a en effet, pour une poutre en flexion :

$$V[v] = \int_0^L EJ v''^2 dx - \int_0^L p(x)v(x) dx \quad (II.37)$$

II.7.2. LE CONCEPT D'ELEMENT FINI

II.7.2.1. DIFFERENTES FORMULATIONS

La méthode de Ritz est limitée à des géométries relativement simples ; en effet, il n'est pas toujours possible de trouver des fonctions base qui conviennent à des géométries complexes. Ceci limite le domaine d'application de la méthode de Ritz. La M.E.F. est une extension de la méthode de Ritz, et qui permet l'analyse des structures complexes par la méthode des déplacements .

Le principe de base de la M.E.F. consiste à subdiviser la structure en sous domaines de forme relativement simple appelés éléments finis. On va alors définir une approximation de la solution (déplacements et /ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ces éléments constitutifs. Le choix, comme coordonnées généralisées de paramètres physiques, permet alors d'exprimer simplement les conditions de continuité de la solution entre éléments adjacents ainsi que les conditions d'équilibre inter éléments et finalement de résoudre le problème à l'aide de la méthode des déplacements. On peut donc considérer que la M.E.F. est une méthode de Ritz par sous-domaines ou "par morceaux".

Il y a plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures.

1°) **FORMULATION DEPLACEMENT** dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacements, le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale.

2°) **FORMULATION CONTRAINTES** ou équilibre dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme de champ de contraintes en équilibre ou soit sous la forme d'une fonction de contraintes. Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

3°) **FORMULATIONS HYBRIDES** (par exemple la formulation hybride de type contrainte) dans lesquelles le plus souvent on définit la solution en terme d'approximation d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire .

4°) **LES FORMULATIONS MIXTES** dans lesquelles on définit la solution en termes d'approximation de champs indépendants, généralement le champ des déplacements et celui des contraintes. Le critère variationnel utilisé est alors généralement basé sur la fonctionnelle de Reissner .

Il faut enfin mentionner que la démarche fondamentale de la M.E.F. n'est pas nécessairement associée aux méthodes d'approximation de type Ritz mais peut également s'appliquer avec d'autres méthodes d'approximation. de plus, la M.E.F. bien que développée initialement pour l'analyse des structures peut être également avec succès à d'autres domaines de la physique.

II.7.2.2. LE MODELE DEPLACEMENT

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F., il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler ci-après dans le cas des modèles déplacements :

- La discrétisation de la structure en éléments,
- Le choix d'une approximation pour chaque élément,
- Le choix de coordonnées généralisées "physiques" (déplacements nodaux) pour chaque élément.

II.7.2.3. PROPRIETES DES ELEMENTS DE TYPE DEPLACEMENT

Il y a des propriétés qui sont nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir de "bonnes" solutions au niveau de la structure complète. En particulier, les conditions de convergence de la M.E.F., qui a été présentée comme une méthode de Ritz par morceaux, se déduisent des conditions de convergence de la méthode de Ritz, c'est-à-dire complétude et compatibilité.

• COMPLETUDE

Un élément fini est dit complet quand il permet la définition d'un champ de déplacements complet au sens de Ritz, c'est-à-dire quand l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur des déformations quand on diminue la taille de l'élément. ce critère s'applique d'une part aux états de déformation nulle, c'est-à-dire aux modes rigides, et d'autre part aux états de déformation élastique ; on peut donc déduire les deux critères suivants :

- Représentation des modes rigides

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant à un déplacement d'ensemble, on doit trouver un état de déformation nulle dans l'élément et donc des forces nodales nulles.

- Représentation des états de déformation constante

Quand on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondantes à des états de déformation constante, on doit effectivement trouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément .

Ces deux critères induisent une condition sur le degré minimal des polynômes utilisés pour l'approximation des déplacements.

Pour les problèmes d'ordre 1, c'est-à-dire les problèmes d'élasticité, l'approximation des déplacements doit comporter au moins un polynôme complet du premier degré. Ainsi, pour les problèmes d'élasticité plane, l'approximation "minimale" correspond à l'expression suivante des déplacements :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 + a_3 y \\ v(x,y) &= a_4 + a_5 + a_6 y \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

En effet, les six coordonnées généralisées permettent de représenter correctement :

- **Les modes rigides :**

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 = C^{ste} \\ v &= a_4 = C^{ste} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= a_3 - a_5 = C^{ste} \end{aligned} \right| \quad (\text{II.39})$$

- **Les états de déformation constants**

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_6 \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_3 + a_5 = C^{ste} \end{aligned} \right| \quad (\text{II.40})$$

Pour les problèmes d'ordre 2, c'est-à-dire les problèmes de coques avec flexion dans le cas le plus général, le respect des critères précédents est plus difficile, en particulier la représentation correcte des modes rigides de l'élément dans le cas particulier des plaques en flexion avec les hypothèses de Kirchoff, le respect des critères de complétude nécessite une approximation du déplacement transverse comportant au moins un polynôme complet du deuxième degré soit :

$$w(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \quad (\text{II.41})$$

Les six coordonnées généralisées permettent la représentation :

- des modes rigides :

$$\begin{aligned} w &= a_1 = C^{ste} \\ w_{,x} &= a_2 = C^{ste} \\ w_{,y} &= a_3 = C^{ste} \end{aligned} \quad (II.42)$$

- des états de courbure constants :

$$\begin{aligned} w_{,xx} &= 2a_4 = C^{ste} \\ w_{,yy} &= 2a_6 = C^{ste} \\ w_{,xy} &= a_5 = C^{ste} \end{aligned} \quad (II.43)$$

• COMPATIBILITE

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ compatible au sens de Ritz (déplacement continu), de par le principe même de la M.E.F., cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments et aux interfaces inter-éléments.

Cette notion de compatibilité s'explique à la fois par des considérations mathématiques et par des considérations physiques assez évidentes. En effet, on peut montrer que la compatibilité est requise si l'on veut exprimer l'énergie potentielle totale de la structure complète comme la somme des énergies potentielles élémentaires :

$$V = \sum_{\text{éléments}} V^e \quad (II.44)$$

Ou sous forme développée :

$$\int_V \epsilon^T c \epsilon dv - \int_V f^T u dv - \int_{S_p} p^T u ds = \sum_e \int_{V^e} \epsilon^T c \epsilon^e dv - \int_{V^e} f^T u^e dv - \int_{S_{p^e}} p^T u^e ds \quad (II.45)$$

Enfin on peut noter que pour un type d'élément, la compatibilité aux interfaces est assurée à la fois par le choix d'une approximation, et par celui des déplacements généralisées aux nœuds.

• CONVERGENCE

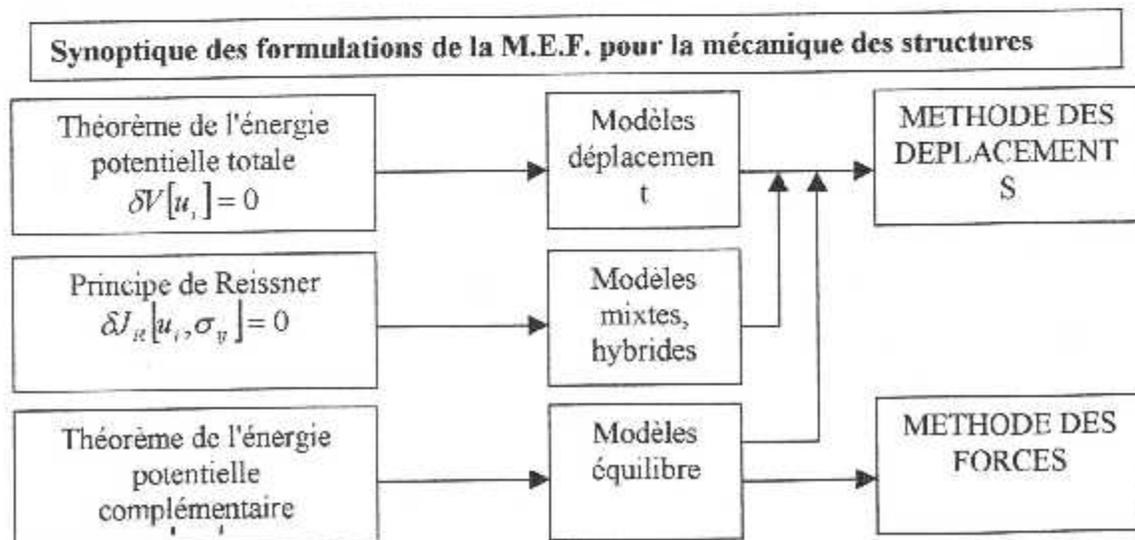
Les conditions de convergence de la M.E.F., se déduisent de celle de la méthode de Ritz : les éléments finis type déplacement convergent en énergie s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité présentées précédemment.

En d'autres termes, l'énergie potentielle totale des modèles tend vers sa valeur exacte de minimum absolu lorsqu'on augmente ainsi le nombre N de d.d.l., ou ce qui est équivalent dans le cas d'un chargement ponctuel les déplacements convergent "par le bas".

• INVARIANCE GEOMETRIQUE

Les éléments ne doivent pas avoir de direction préférentielle ou être sensibles à leurs numérotation propre. Les éléments qui satisfont ce critère sont dits invariants. L'invariance est une qualité souhaitable que l'on doit s'efforcer de rechercher.

L'invariance implique l'utilisation de polynômes complets pour la définition de l'approximation dans le cas où l'élément est développé en utilisant un système d'axes locaux particuliers.



II.7.3 MISE EN EQUATION DES SYSTEMES

La méthode des éléments finis peut être présentée simplement. les étapes en sont les suivantes :

La structure est discrétisée en élément de dimensions finies appelés éléments finis qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds, situés sur leur contour.

A partir d'hypothèses raisonnables sur le vecteur déplacement d'un point de l'élément i , on calcule l'énergie cinétique T_i , l'énergie potentielle U_i et la fonction de dissipation D_i de l'élément i .

Si la structure est composée de N élément alors :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N T_i \\ U &= \sum_{i=1}^N U_i \\ D &= \sum_{i=1}^N D_i \end{aligned} \quad (II.46)$$

Les fonctions généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures.

L'application des équations de Lagrange permet d'obtenir le système d'équations différentielles traduisant le comportement dynamique de la structure. Afin de simplifier la présentation de la méthode il est supposé dans ce qui suit qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie.

II.7.3.1 DISCRETISATION EN ELEMENT FINIS

On choisie le type d'élément à utiliser compte tenu de la géométrie et du comportement de la structure. la discrétisation en éléments finis, c'est a dire le maillage, est en grande partie affaire d'expérience.

Il faut en particulier tenir compte des discontinuités géométriques, discontinuités de matériaux, des conditions aux limites, du type de forces.

Dans un calcul de contraintes, ou au voisinage de discontinuités.

II.7.3.2 ENERGIE POTENTIELLE - MATRICE DE RAIDEUR

Dans ce qui suit par souci de simplification d'écriture, l'indice i correspondant au $i^{\text{ème}}$ élément est omis. Alors pour cet élément :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon' \sigma d\tau \quad (\text{II.47})$$

Le vecteur déplacement d d'un point est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux par l'intermédiaire d'une matrice N , résultat d'une hypothèse raisonnable sur les déplacements, ceci donne une relation du type :

$$d = N\delta \quad (\text{II.48})$$

A partir de (3) il vient par dérivation :

$$\varepsilon = B\delta \quad (\text{II.49})$$

Relation qui relie les déformations et les déplacements nodaux.
Dans la mesure où il n'y a pas de contraintes initiales, les contraintes et les déformations sont reliées par :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{II.50})$$

où D est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, en général le module de Young E et le coefficient de poisson ν

en utilisant (5) et (4), (2) devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} (B\delta)' BD\delta d\tau \quad (\text{II.51})$$

$$U = \frac{1}{2} \delta' \int_{\tau} B^T DB d\tau \delta \quad (\text{II.52})$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \delta' K \delta \quad (\text{II.53})$$

avec

$$K = \int_{\tau} B^t B D d\tau \quad (II.54)$$

Matrice raideur de l'élément, elle est symétrique car D est symétrique et $B^t B$ l'est donc aussi.

Illustrons par l'exemple de la poutre en flexion la technique de détermination de U et donc de K, l'élément représenté sur la figure 1 a deux nœuds et deux degrés de liberté par nœuds : V la flèche ψ la pente. les effets secondaires sont négligés.

le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\sigma = [V_1 \psi_1 V_2 \psi_2]^t \quad (II.55)$$

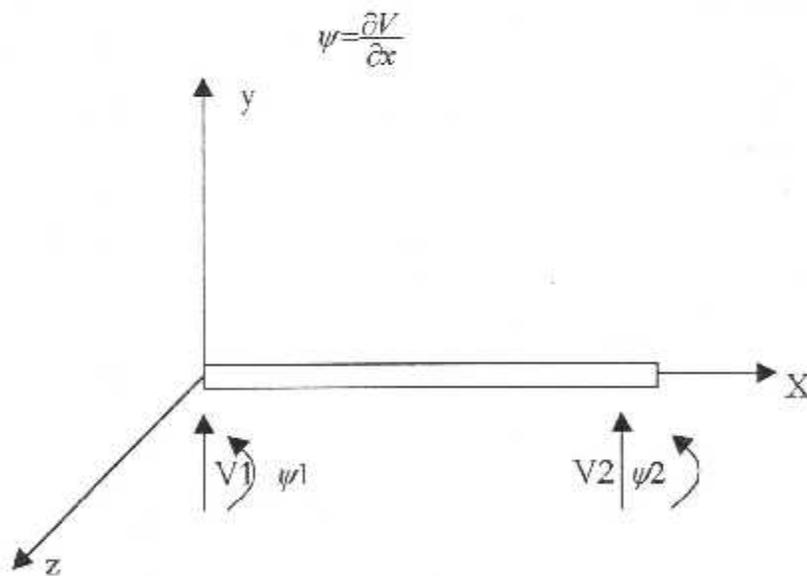


figure 01

Comme il y a quatre déplacements nodaux la fonction de déplacement choisie est :

$$V = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \quad (II.56)$$

et la pente a comme expression :

$$\psi = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 \quad (II.57)$$

les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 sont déduites des valeurs de V et de ψ aux nœuds (1) et (2).

En $x=0$

$$V_1 = a_1 \quad (II.58)$$

$$\psi_1 = a_2$$

En $x=L$.

$$V_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \quad (II.59)$$

$$\psi_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Les équations (13), (14) permettent le calcul de a_1, a_2, a_3, a_4 en fonction de V_1, ψ_1, V_2, ψ_2 , tous les calculs effectués :

$$V = \begin{vmatrix} \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x & \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \psi_2 \end{vmatrix} \quad (II.60)$$

et cette relation correspond à la relation (3).

D'autre part une poutre en flexion a la matrice D se réduit au scalaire E , et :

$$\sigma = \sigma_x = E \varepsilon_x = E \varepsilon \quad (II.61)$$

Avec

$$\varepsilon = -y \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (II.62)$$

A partir de (15),(17) devient :

$$V = -y \begin{vmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & x & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} & \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} & \frac{6x}{L^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \psi_2 \end{vmatrix} \quad (\text{II.63})$$

En reportant B de (18) dans (7) , il vient:

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{vmatrix} V_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \psi_2 \end{vmatrix}^T \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \psi_2 \end{vmatrix} \quad (\text{II.64})$$

Et la matrice de raideur K a donc comme expression:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

Cette matrice est deux fois singulière ; ceci est du au relations d'équilibre de l'élément Afin d'améliorer la matrice de raideur d'un élément , des fonctions supplémentaires peuvent être utilisées dans la définition du déplacement d'un point . dans ce cas (3)s'écrit :

$$d = N\delta + N_s\delta_s \quad (\text{II.66})$$

ou δ représente le vecteur des inconnues supplémentaires. En désignant par F le vecteur des forces extérieurs agissant aux nœuds de l'élément et en minimisant l'énergie potentielle totale de l'élément :

$$\begin{vmatrix} k & k_s \\ k_s^T & k_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta \\ \delta_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.67})$$

Relation qui se décompose en :

$$K\delta + K_s\delta_s = F \quad (\text{II.68})$$

$$K_s^T\delta + K_{ss}\delta_s = 0 \quad (\text{II.69})$$

A partir de (25) on a :

$$\delta_s = -K_{ss}^{-1} K_s^T \delta \quad (\text{II.70})$$

Qui, reporté dans (24), donne:

$$F = K\delta - K_s K_{ss}^{-1} K_s^T \delta \quad (\text{II.71})$$

c'est à dire :

$$F = (K - K_s K_{ss}^{-1} K_s^T) \delta \quad (\text{II.72})$$

la matrice de raideur améliorée K^* s'écrit :

$$K^* = K - K_s K_{ss}^{-1} K_s^T \quad (\text{II.73})$$

II.7.3.3. ENERGIE CINETIQUE -MATRICE MASSE

Par définition:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 d\tau \quad (\text{II.74})$$

En général : $V = d^o$ et compte tenu de (3)

$$V = N\delta^o \quad (\text{II.75})$$

En reportant (75) dans (74):

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (N\delta^o)^T N\delta^o d\tau = \frac{1}{2} \delta^{oT} \int \rho N^T N d\tau \delta^o \quad (\text{II.76})$$

Qui peut se mettre sous la forme:

$$T = \frac{1}{2} \delta^{oT} m \delta^o \quad (II.77)$$

Avec

$$M = \int \rho N^T N d\tau \quad (II.78)$$

Matrice de masse symétrique.

Dans le cas de l'élément de poutre en flexion , en utilisant la matrice N définie dans (15) , T s'écrit:

$$T = \frac{\rho S L}{840} \begin{bmatrix} V_1^o \\ \psi_1^o \\ V_2^o \\ \psi_2^o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^o \\ \psi_1^o \\ V_2^o \\ \psi_2^o \end{bmatrix} \quad (II.79)$$

Et la matrice de masse a donc comme expression:

$$m = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (II.80)$$

enfin on utilise très souvent une expression de l'énergie cinétique et donc une matrice de masse , obtenue en concentrant les masse aux nœuds des élément. Ceci à l'avantage de faciliter la construction des matrices et surtout rend la matrice de masse diagonale.

Dans le cas de la poutre en flexion l'énergie cinétique des masses concentrées a comme expression:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho s L}{2} (V_1^o + V_2^o) \quad (II.81)$$

d'ou la matrice de masse concentrée

$$m_c = \frac{\rho S L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.82)$$

II.7.3.4. ASSEMBLAGE

Les énergie de tout la structure sont la somme des énergie des cinétique et potentielle de chaque élément . après application des équation de lagrange, on obtient le système classique.

$$M\ddot{q} + Kq = F(t) \quad (\text{II.83})$$

Ces matrice sont symétriques, bandes, définies ou semi-définies positives, les vecteurs δ et $F(t)$ regroupent ici tous les déplacement nodaux et les forces généralisées

Chapitre III

LES METHODES D'ANALYSE MODALE

METHODES D'ANALYSE MODALE

III.1. INTRODUCTION

L'analyse dynamique d'une structure peut se ramener à la résolution d'un système d'équations du second ordre. Deux approches fondamentales sont envisageables pour cette résolution : l'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre méthode consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibration de la structure. Cette méthode qui est appelée méthode de superposition modale est la plus largement utilisée en analyse dynamique linéaire lorsque le contenu fréquentiel de l'excitation correspond au spectre basse fréquence de la structure.

Dans la cas de structures faiblement amorties, le plus fréquent pour de nombreux domaines d'application et, en particulier celui des structures aérospatiales, la méthode de superposition modale utilise les modes propres réels de la structure non amortie. On se ramène donc, dans ce cas, à l'étude des petites oscillations libres (analyse modale) de la structure non dissipative associée, c.à.d à la résolution du problème au valeurs propres général.

$$Kx = w^2 Mx \quad (\text{III.1})$$

avec : K matrice rigidité de la structure, symétrique définie positive dans le cas de structures iso- ou hyperstatiques extérieurement, semi-définie positive dans le cas de structures libres,

M matrice de masse symétrique généralement définie positive pouvant être semi-définie positive dans le cas de degrés de libertés affectés de masse nulle.

Le système homogène (1) de dimension n a n solutions propres $x^{(i)}$ permettant de définir les déformées modales de la structure et n valeurs propres associées, carrés des pulsations propres w_i^2 . La difficulté principale de résolution du problème (1) réside dans son ordre élevé ; en effet, les modélisations par éléments finis entraînent couramment des nombres de d.d.l. de quelques milliers, voire quelques dizaines de milliers. Même avec les ressources informatiques actuellement disponibles, une résolution satisfaisante d'après le critère économique n'est possible qu'en utilisant des méthodes performantes, particulièrement adaptées à ce type de problème.

Dans ce qui suit on va parler des méthodes d'analyse modale, c.à.d. aux méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres (1) de grande taille qui résultent de l'application de la méthode des éléments finis. A l'analyse dynamique des structures complexes.

III.2. METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES

III.2.1. GENERALITES, CLASSIFICATION DES METHODES

Dans la résolution des problèmes dynamiques par superposition modale, c'est la recherche des solutions propres qui constitue la phase de calcul la plus difficile et qui nécessite le plus de temps de calcul. Généralement on s'intéresse aux premiers modes propres correspondant à la partie basse fréquence du spectre. Deux stratégies de base peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes de grande taille résultant de modélisation par éléments finis : les méthodes de condensation et les méthodes de résolution directe.

La première classe de méthodes, celle des méthodes de condensation, consiste à réduire la taille du problème initial tout en n'altérant pas son spectre de basse fréquence. En général, on choisit la taille du problème réduit (ou condensé) de manière à permettre une résolution en mémoire centrale. La première méthode de condensation utilisée a été celle de la condensation statique des rigidités associée à l'utilisation de masses concentrées. Au contraire, la méthode de condensation de Guyan procède par condensation parallèle et cohérente des rigidités de masses ; c'est la méthode la plus utilisée malgré l'importance du temps de calcul nécessaire et le caractère déterminant pour la précision, de la qualité du choix des d.d.l. retenus pour la condensation. La matrice de masse résultant d'une condensation étant pleine, on a souvent recours à certaines méthodes permettant de ramener le problème aux valeurs propres condensé à une forme standard, en calculant une matrice de flexibilité dynamique par décomposition de Cholesky de la matrice de masse ou de rigidité. On procède à la résolution de ce problème aux valeurs propres en mémoire centrale en utilisant des méthodes classiques, méthode d'itération directe, si l'on s'intéresse seulement à un petit nombre de modes, méthodes de transformation de transformation si l'on désire tous les modes du problème condensé. Parmi les méthodes de transformation usuelles citons celles de Jacobi, de Givens ou la méthode de householder généralement considérée comme la plus performante. Ces méthodes consistent à transformer la matrice concernée, en une matrice diagonale (Jacobi) ou en matrice tridiagonale (Givens, Householder) dont les valeurs propres sont déterminées par factorisations successives d'après l'algorithme QR ou QL. Les vecteurs propres correspondants peuvent être obtenus par itération inverse avec décalage.

La deuxième stratégie envisageable pour la résolution du problème aux valeurs propres initial de grande taille correspond à une organisation dominante hors mémoire centrale. Si l'on ne dispose pas de possibilité de résolution de grands systèmes linéaires hors mémoire centrale, la seule méthode envisageable est celle de minimisation du quotient de Rayleigh par gradients conjugués ou par relaxation. Cette méthode est simple de mise en œuvre mais très peu performante comparée aux

méthodes suivantes. La plupart des méthodes sont basées sur l'utilisation répétée d'un module de résolution de systèmes linéaires à organisation hors mémoire centrale et sur la propriété des suites de Sturm, elle consiste à évaluer directement les racines de l'équation $\det(K - \mu M) = 0$ dans une bande de fréquences prescrite ce qui nécessite une factorisation *L.D.I.* de la matrice $(K - \mu M)$ pour chaque valeur de décalage spectral. Des valeurs approchées des valeurs propres sont évaluées en utilisant une technique de bisection et les vecteurs propres correspondants sont calculés par itération inverse avec décalage. On voit que la méthode peut tirer avantage du caractère bande ou creux de la matrice de rigidité cependant, elle n'est performante que pour de petites largeurs de bande, la méthode d'itération inverse peut être considérée comme une variante hors mémoire centrale de la méthode classique d'itération. dans cette méthode, la valeur propre la plus basse et le vecteur propre associé sont obtenus en itérant sur un vecteur de départ en résolvant un système linéaire à chaque itération. En utilisant la technique du décalage spectral, on peut obtenir la valeur propre la plus proche de la valeur de décalage spécifiée ainsi que le vecteur propre associé. Cette méthode est peu économique en temps de calcul quand on s'intéresse à un grand nombre de modes et connaît des difficultés de convergence dans la cas de valeurs propres multiples. La méthode d'itération inverse sur sous espace ou sa variante, la méthode d'itération simultanée est basée sur des itérations inverses effectuées en parallèle sur un groupe de vecteurs de départ. Ceci permet la définition d'un problème aux valeurs propres d'interaction qui permet la séparation des solutions propres et dont la résolution peut se faire en mémoire centrale en utilisant une des méthodes classiques de transformation. La méthode de Lanczos-Grandall est basée sur la transformation du problème aux valeurs propres initial en un problème de dimension réduite sous forme standard avec une matrice tridiagonale. Cette méthode peut être considérée comme une méthode de condensation automatique plus fiable que celle de Guyan. Par ailleurs, de récentes améliorations apportées à la méthode de base l'ont rendu pratiquement insensible à l'instabilité numérique. Elle est avec la méthode d'itération inverse sur sous espace la méthode la plus efficace pour la résolution des problèmes aux valeurs propres de grande taille.

III.2.2. METHODES DE CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver des couples $\lambda_i, \{x_i\}$ qui satisfont la relation :

$$([K] - \lambda[M])\{x\} = \{0\} \quad (\text{III.2})$$

où : $[K]$ est la matrice rigidité de la structure

$[M]$ est la matrice masse

$\{x\}$ est le vecteur des déplacements de la structure définissant le $i^{\text{ème}}$ mode propre de vibration

$\lambda_i = w^2$ est le carré de la pulsation correspondante

III.2.2.1. METHODE DE RITZ

La méthode de Ritz permet de transformer un problème de valeurs propres de grand dimension en un problème de dimension plus réduit.

Nous contraignons chaque vecteur propres du système (1) à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de P vecteurs indépendants q_i dit vecteur de Ritz .

$$\{x_i\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_p \{q_p\} \tag{III.3}$$

$$\{x\} = \left[\begin{matrix} \{q_1\} & \{q_2\} & \dots & \{q_p\} \end{matrix} \right] \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{matrix} \tag{III.4}$$

(n*1),.....,(n* p),.....,(p*1)

On cherche les coefficients $\{a\}$ tel que le vecteur $\{x\}$ soit aussi proche que possible d'un vecteur propre de système (1) , pour cela cherchons à rendre stationnaire le quotient de Rayleigh.

$$R(\{V\}) = \frac{\langle X \rangle [K] \{X\}}{\langle X \rangle [M] \{X\}} = \frac{\langle a \rangle [\bar{K}] \{a\}}{\langle a \rangle [\bar{M}] \{a\}} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= [Q]^T [K] [Q] \\ [\bar{M}] &= [Q]^T [M] [Q] \end{aligned} \tag{III.6}$$

La condition de stationnarité $\delta R = 0$ pour tout $\langle \delta a \rangle$ s'écrit :

$$([\bar{K}] - R[\bar{M}])\{a\} = 0 \tag{III.7}$$

Cette expression définit un problème de valeurs propres de dimension P , dont les P vecteurs propres $\{A_i\}$ est valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ vérifient :

$$[\bar{K}][A] = [\bar{M}][A][\bar{\lambda}_i] \tag{III.8}$$

$$[A] = [\{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_p\}]; [\bar{\lambda}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 \\ \dots & \bar{\lambda}_2 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \bar{\lambda}_p \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

Les valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ constituent des approximations des valeurs propres du système (III.2)

Ces approximations sont d'autant meilleurs que les vecteurs de Ritz génèrent un sous espace qui contient les vecteurs propres cherchés .

De plus les valeurs propres approchée $\bar{\lambda}_i$ et exactes , λ_i vérifient la relation

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1, \lambda_2 \leq \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_p \leq \bar{\lambda}_p < \lambda_n \quad (III.3)$$

De manière a obtenir rapidement les valeurs propres , nous pouvons choisir comme vecteur de Ritz , les solutions de :

$$[K]\{q_i\} = \{F_i\} \quad (III.10)$$

ou : $\{F_i\}$ sont des vecteurs unitaires qui sollicitent les degrés de liberté j

$$\{F_i\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ \vdots \\ i \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } j \quad (III.11)$$

Les vecteurs propres approchés de système (1) sont obtenus à partir des vecteurs $\{A_i\}$ grâce à (15).

III.2.2.2. METHODE DE SOUS ESPACE

Cette méthode est très largement utiliser pour calculer les P premiers valeurs propres d'un système de grand dimension , elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse.

La méthode de Ritz force $\{x\}$ a rester orthogonaux entre eux , alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de Ritz, de manière a assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondant.

La méthode du sous espace enchaîne les opérations suivantes :

- Choisir P vecteur initiaux :

$$[x] = [\{x_1\}, \dots, \{x_p\}]$$

- Exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les n vecteurs de Ritz $\{q_i\}$ en résolvant :

$$[K]\{q_i\} = [M]\{X_i\} = \{F_i\}$$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

$$[K]\{Q\} = [M]\{X\}$$

- Appliquer la méthode de Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous espace de Ritz

$$([K] - \bar{\lambda}_i [M])\{A_i\} = 0$$

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q]$$

$$[\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q]$$

$$\{\bar{x}\} = [Q]\{A\}$$

- On teste la convergence des $\bar{\lambda}_i$ et refaire les opérations b, c, d

III.2.2.3. METHODE DE JACOBI

Cette méthode permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimension limitée ($n < 100$) dont les matrices sont symétriques et définies positives

Elle consiste à transformer les matrices $[K]$ Et $[M]$ En des matrices diagonales en utilisant des transformations successive.

$$[K^1] = [K], [M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q^1]^T [K^1] [Q^1], [M^2] = [Q^1]^T [M^1] [Q^1]$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$[K^{k-1}] = [Q^{k-1}]^T [K^k] [Q^{k-1}], [M^{k-1}] = [Q^{k-1}]^T [M^k] [Q^{k-1}]$$

Les matrices, et $[M^{k-1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K]$, et $[M]$ lorsque k tend vers les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$\lambda = [K] [M]^{-1} \text{ ou } \lambda_i = \frac{K_{ii}^d}{M_{ii}^d} \tag{III.13}$$

$$\chi = [Q^1][Q^2] \dots [Q^{k+1}] \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Chaque matrice $[Q^k]$ est choisi de manière a ce qu'un terme (i, j) non diagonale et non nul de $[K^k]$ et $[M^k]$ sit nul après transformation de (16) , la matrice $[Q^k]$ a la structure suivante :

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & a & \\ & & 1 & \\ & b & & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Les coefficients a, b sont calculés en écrivant que :

$$K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0 \quad (\text{III.16})$$

Soit , en supprimant par simplicité l'indice $K+1$ sur les termes de chaque matrice .

$$\begin{aligned} aK_{ii} + (1 + ab)K_{jj} + bk_{jj} &= 0 \\ aM_{ii} + (1 + ab)M_{jj} + bM_{jj} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas particulier ou :

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}} = \frac{K_{jj}}{M_{jj}} \quad (\text{III.18})$$

Les valeurs a, b sont :

$$a = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$b = -\frac{K_{jj}}{M_{jj}}$$

Dans le cas général :

$$C_1 = K_u M_y - M_u K_y$$

$$C_2 = K_y M_y - M_y K_y$$

$$C_3 = K_u M_y - M_u K_y$$

$$d = \frac{C_2}{2} \sqrt{\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2}$$

$$a = \frac{C_2}{d}, b = -\frac{C_1}{d}$$

Lorsque $[M]$ est défini positive, le coefficient $\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2$ est positif lorsque $d = 0$, a et b sont données.

- CONVERGENCE

La vitesse de convergence de l'itération inverse est proportionnelle à $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, où λ_2 est la première valeur propre supérieure à λ_1 , elle peut devenir très faible lorsque λ_1 et λ_2 sont proche, un décalage « a » améliore la convergence si :

$$\frac{\lambda_2 - a}{\lambda_1 - a} > \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{III.20})$$

Le décalage « a » peut être égale au rapport de Rayleigh, $R(\psi^{i+1})$ ceci accélère beaucoup la convergence mais exige la triangulation de $[K] - \lambda[M]$ à chaque itération.

III.2.2.4. METHODE D'ITERATION DIRECTE

La méthode d'itération directe appelée encore méthode de la puissance directe convient plus particulièrement pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme classique, lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de solutions propres. Le principe de l'algorithme est exposé si après :

Considérons le problèmes aux valeurs propres classiques :

$$D.x = \lambda.x \text{ avec } \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (\text{III.21})$$

dont les solutions propres sont :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_n$$

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)} \quad (\text{III.22})$$

Soit y_0 un vecteur de départ donné. A la première itération, on calcule le vecteur :

$$y_1 = D.y_0 \quad (\text{III.23})$$

On itère ensuite le vecteur y de telle manière que :

$$y_{i+1} = D.y_i \quad (\text{III.24})$$

Tout vecteur de départ y_0 peut se décomposer dans la base des vecteurs propres $x^{(j)}$, soit :

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j x^{(j)} = \varphi.\beta \quad (\text{III.25})$$

de : $y_{i-1} = D.y_i$, on tire :

$$y_i = D^i.y_0$$

d'où :

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j D^i x^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^i x^{(j)} \quad (\text{III.26})$$

ou encore :

$$y_i = \lambda_1^i \left\{ \beta_1 x^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i x^{(j)} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Si l'on suppose que D à n valeurs propres distinctes, on a :

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1 \quad \text{pour } j = 2..n \quad (\text{III.28})$$

Ainsi, lorsque le nombre d'itérations i devient grand, les itérés successifs deviennent colinéaires au vecteur propre $x^{(1)}$:

$$y_i \rightarrow \lambda_1^i \beta_1 x^{(1)} \quad (\text{III.29})$$

de plus, on a :

$$\frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|} \rightarrow \lambda_1 \quad (\text{III.30})$$

On a de façon évidente, la propriété suivante : si y est un vecteur quelconque, alors $S.y$ est orthogonal à $x^{(1)}$.

En effet :

$$S.y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^{(1)}} \sum_{j=2}^n x_j^{(1)} y_j \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

D'où :

$$x^{(1)T} S.y = -\left[\sum_{j=2}^n x_j^{(1)} y_j \right] + x_2^{(1)} y_2 + \dots + x_n^{(1)} y_n = 0$$

Le processus d'itération converge vers le vecteur propre $x^{(2)}$ si on itère sur la matrice DS , soit :

$$z_i = DS_{i-1} \quad (\text{III.38})$$

$$y_i = \frac{z_i}{\|z_i\|}$$

Ce procédé de déflation orthogonale peut être généralisé par récurrence de la façon suivante. Supposons connues les k valeurs propres les plus élevées et les vecteurs propres correspondants. On doit alors projeter les itérés successifs y dans un sous-espace orthogonal aux vecteurs propres $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, soit :

$$x^{(i)T} y = 0 \quad \text{avec } i = 1 \dots k$$

Ces conditions d'orthogonalité peuvent s'écrire de façon matricielle :

$$B.y_1 + C.y_2 = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & \dots & x_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \dots & \dots & x_k^{(k)} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} x_{k-1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k-1}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Les sous-vecteurs y_1 et y_2 étant définis par:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{III.39}$$

d'où:

$$y_1 = -B^{-1}.C.y_2 \tag{III.40}$$

Ceci permet de définir une matrice de déflation telle que:

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & -B.C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.41}$$

Si y est un vecteur quelconque alors $S_k.y$ est un vecteur orthogonal à $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$.

En effet:

$$S_k.y = \begin{bmatrix} 0 & -B^{-1}.C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}.C.y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{III.42}$$

D'où:

$$x^{(i)T} S_k y = -x_1^{(i)T} B^{-1} C y_2 + x_2^{(i)T} y_2 \text{ avec } x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_{k-1}^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Mais par ailleurs, si l'on pose :

$$A = B^{-1} C \quad (\text{III.44})$$

On a :

$$B A = C \text{ ou } A^T B^T = C^T$$

D'où:

$$A^T [x_1^{(1)} \dots x_1^{(k)}] = [x_2^{(1)} \dots x_2^{(k)}] \quad (\text{III.45})$$

Où:

$$A^T [x_1^{(i)}] = [x_2^{(i)}] \text{ pour } i = 1, \dots, k$$

D'où:

$$[x_1^{(i)}]^T B^{-1} C = [x_2^{(i)}]^T \quad (\text{III.46})$$

Et :

$$x^{(i)T} S_k y = 0$$

Ainsi le processus d'itération va converger vers le vecteur propre $x^{(k+1)}$ et la valeur propre λ_{k+1} , si on itère sur la matrice $D S_k$ précédemment définie.

- Convergence

Comme pour de nombreuses méthodes numériques en dynamique, il est utile pour étudier la convergence des méthodes d'itération de se placer dans la base des vecteurs propres.

Soit le vecteur de départ :

$$y_0 = \varphi \cdot \beta \quad \text{avec} \quad \varphi = [x^{(1)} \dots x^{(n)}] \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Les itérés successifs peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$z_i = \lambda_1^i \cdot \beta_1 \cdot \varphi \cdot \gamma_i ; \quad y_i = \varphi \gamma_i \quad \text{avec:} \quad \gamma_i^T = \left[1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^i, \dots, \frac{\beta_n}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^i \right] \quad (\text{III.48})$$

Au bout d'un nombre d'itérations suffisamment grand, on a: $\gamma_i \rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Ainsi la convergence de γ_i vers e_1 caractérise la convergence de y_i vers $x^{(1)}$. Par souci de simplification, choisissons un vecteur de départ, tel que:

$$\beta^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \dots 1]$$

On a dans ce cas:

$$\gamma_i^T = \left[1, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^i, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^i \right] \quad (\text{III.49})$$

Le taux de convergence est caractérisé par la limite du rapport des normes euclidiennes du vecteur écart :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\gamma_i - e_1\|_2}{\|\gamma_{i-1} - e_1\|_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{III.50})$$

Ainsi la convergence est linéaire et le taux de convergence est de (λ_2/λ_1) . C'est donc le rapport des deux valeurs propres les plus élevées qui détermine la rapidité de convergence vers le vecteur propre $x^{(1)}$. Ce résultat peut être étendu au cas de la convergence vers les modes supérieurs. En ce qui concerne la précision relative sur les

fréquences propres, on peut montrer que le nombre r d'itérations nécessaire pour l'obtention d'une précision de s chiffres significatifs:

Soit pour:

$$\left| \frac{\lambda_{1(r)} - \lambda_{1(r-1)}}{\lambda_{1(r-1)}} \right| \leq 10^{-s}$$

Est obtenu par l'expression approchée:

$$r = \frac{s}{\left| \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|}$$

Ainsi la méthode d'itération directe a un taux de convergence qui dépend de la séparation des valeurs propres. La convergence est très mauvaise dans le cas de valeurs propres très voisines.

III.2.2.5. METHODE D'ITERATION INVERSE

La méthode d'itération inverse encore appelée méthode de la puissance inverse convient pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme générale:

$$Kx = \omega^2 Mx$$

Lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de solutions propres. De plus, elle s'adapte bien à la résolution directe hors mémoire centrale du problème non condensé. Son principe est exposé ci-après:

- Principe

Soit à résoudre le problème aux valeurs propres général :

$$Kx = \lambda Mx \quad \text{avec} \quad \lambda = \omega^2 \quad (\text{III.51})$$

dont les solutions propres sont:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$$

La méthode de la puissance inverse consiste à itérer sur un vecteur y de telle sorte qu'à l'itération i , on ait à résoudre le système linéaire :

$$K.y_i = M.y_{i-1} \quad (\text{III.52})$$

Tout vecteur de départ y_0 peut se décomposer dans la base des vecteurs propres $x^{(j)}$, soit:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot x^{(j)} \quad (\text{III.53})$$

d'où en utilisant (III.52) :

$$K.y_1 = M.y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot M.x^{(j)} \quad (\text{III.54})$$

mais on a :

$$K.x^{(j)} = \lambda_j \cdot M.x^{(j)}$$

d'où:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\lambda_j} \cdot x^{(j)} \quad (\text{III.55})$$

Ce résultat peut être étendu à l'itération i , d'où:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{1}{\lambda_j} \right)^i x^{(j)} \quad (\text{III.56})$$

ou encore:

$$y_i = \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^i \left\{ \beta_1 x^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right)^i x^{(j)} \right\} \quad (\text{III.57})$$

Dans le cas de n valeurs propres distinctes, on a :

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right) < 1 \quad \text{pour } j = 2, \dots, n$$

Ainsi, lorsque le nombre d'itérations devient grand, les itérés successifs deviennent colinéaires au vecteur propre $x^{(1)}$:

$$y_i \rightarrow \left(\frac{1}{y_1}\right)^i \beta_1 x^{(1)} \quad (\text{III.58})$$

De plus, on a :

$$\frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

D'où le résultat fondamental suivant : Dans la méthode de la puissance inverse, les itérés successifs y_i convergent vers le vecteur propre $x^{(1)}$ correspondant à la valeur propre la plus petite λ_1 ; le rapport des normes de deux itérés successifs converge vers $\frac{1}{\lambda_1}$.

On s'affranchit de la croissance ou de la décroissance excessive des composantes des itérés en normant le vecteur y_i après chaque itération.

D'où l'algorithme de la méthode de la puissance inverse :

$$K z_i = M y_{i+1}$$

$$y_i = \frac{z_i}{\|z_i\|}$$

Dans ce cas, après un nombre suffisant d'équations :

$$\|z_i\| \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

On peut remarquer que la méthode ne nécessite pas le passage à la forme standard du problème aux valeurs propres ce qui est un avantage important. Cependant, elle nécessite à chaque nouvelle itération la résolution d'un système linéaire. Elle se prête bien à une organisation hors mémoire centrale. L'obtention des

modos superiores s'effectue par la méthode de déflation orthogonale ou celle du décalage spectral.

- Convergence

Les propriétés de convergence de la méthode de la puissance inverse sont identiques à celles de la méthode de la puissance directe, alors en utilisant une démarche similaire, les itérés successifs s'expriment dans la base modale sous la forme suivante:

$$z_i = \frac{\beta}{(\lambda_1)^i} \varphi \gamma_i, \quad y_i = \varphi \gamma_i \quad (\text{III.59})$$

avec:

$$\gamma_i^T = \left[1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^i, \dots, \frac{\beta_n}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^i \right]$$

Au bout d'un nombre d'itérations suffisamment grand, on a :

$$\gamma_i \rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour un vecteur de départ tel que $\beta^T = [1 \dots 1]$, on aura :

$$\gamma_i^T = \left[1, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^i, \dots, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^i \right] \quad (\text{III.60})$$

Le taux de convergence de γ_i vers e_1 qui caractérise la convergence de y_i vers $x^{(1)}$ s'exprime sous la forme suivante:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\gamma_i - e_1\|_2}{\|\gamma_{i-1} - e_1\|_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (\text{III.61})$$

Ainsi le taux de convergence vers le mode fondamental est de (λ_1/λ_2) . Ce résultat peut être étendu aux modos superiores. La méthode d'itération inverse présente donc des propriétés de convergence mauvaises dans le cas de valeurs propres voisines. Le nombre d'itérations r requis pour l'obtention d'une précision de s chiffres significatifs sur les valeurs propres :

Soit pour:

$$\left[\frac{\lambda_{1(r)} - \lambda_{1(r-1)}}{\lambda_{1(r-1)}} \right] \leq 10^{-s}$$

est obtenu par l'expression approchée :

$$r = \frac{s}{\left[\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]} \quad (\text{III.62})$$

Ainsi, par exemple, l'obtention d'une erreur relative de 10^{-6} sur les valeurs propres nécessite plus de 60 itérations pour des valeurs voisines de 10% près (fréquences voisines à 5% près).

- Itération inverse avec décalage spectral

On utilise souvent la méthode de la puissance inverse en effectuant un décalage du spectre des valeurs propres d'une valeur λ_0 donnée, ce qui permet l'obtention des valeurs propres proches de λ_0 et l'amélioration du taux de convergence de la méthode. On a :

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \quad (\text{III.63})$$

Le problème aux valeurs propres devient alors:

$$[K - \lambda_0 M]x = \mu Mx \quad (\text{III.64})$$

L'algorithme de la méthode de la puissance inverse appliqué à l'équation précédente, devient alors :

$$[K - \lambda_0 M]z_i = M.y_{i-1} \quad (\text{III.65})$$

$$y_i = \frac{z_i}{\|z_i\|}$$

Dans ce cas, la méthode va converger vers la valeur propre $\mu_k = (\lambda_k - \lambda_0)$ de telle sorte que $|\lambda_k - \lambda_0|$ soit minimum et vers le vecteur propre correspondant. On obtient ainsi la valeur propre λ_k la plus proche de λ_0 .

L'utilisation de la méthode de la puissance inverse avec décalage spectral est intéressante quand on dispose d'une valeur approchée de la valeur propre recherchée

obtenue préalablement par une autre méthode par exemple, la méthode du déterminant (suites de Sturm); elle permet alors avec un nombre très faible d'itérations de raffiner cette valeur approchée et d'obtenir le vecteur propre correspondant. Cependant, on remarquera que la méthode nécessite une décomposition de la matrice $[K - \lambda_0 M]$ pour chaque valeur de décalage ce qui peut être coûteux en temps de calcul.

Pour étudier la convergence, exprimons les itérés dans la base des vecteurs propres, soit:

$$y_i = \phi \gamma_i \quad (\text{III.66})$$

On montre facilement l'expression suivante de γ_i :

$$\gamma_i^T = \left[\left(\frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} \right)^i \cdots \left(\frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_{k-1} - \lambda_0} \right)^i, 1, \left(\frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_{k+1} - \lambda_0} \right)^i \cdots \left(\frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_n - \lambda_0} \right)^i \right] \quad (\text{III.67})$$

Avec λ_k valeur propre la plus proche de λ_0 . Au bout d'un nombre suffisant d'itérations, on a :

$$\gamma_i \rightarrow e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k \quad (\text{III.68})$$

D'où le taux de convergence:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\gamma_i - e_k\|_2}{\|\gamma_{i-1} - e_k\|_2} = \max_{l \neq k} \left| \frac{\lambda_l - \lambda_0}{\lambda_k - \lambda_0} \right| \quad (\text{III.69})$$

Ainsi, les itérés successifs convergent vers $x^{(k)}$ avec un taux de convergence qui est le plus grand des deux rapports:

$$\left| \frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_{k-1} - \lambda_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\lambda_k - \lambda_0}{\lambda_{k+1} - \lambda_0} \right|$$

Chapitre IV

ETUDE THEORIQUE

ETUDE THEORIQUE

Le but de ce chapitre c'est de présenter le cheminement est les différentes étapes de discrétisation, assemblage jusqu'à ou on arrive à l'obtention des matrices $[M]$ et rigidité $[K]$ de la structure étudiée. Les schémas généraux étudiés concerne une poutre encastree libre présentant une aile ou une pale d'hélicoptère en vol comme le montre la figure suivante

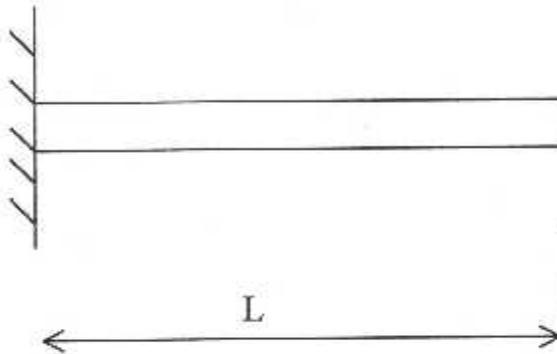


FIGURE : schémas générale de la structure étudiée

La section de l'aile peut avoir différentes formes. Citons a titre d'exemple, les profils NACA, RAE,...

La forme générale de la section de l'aile est présentée par la figure suivante:

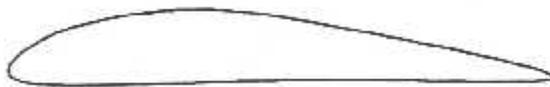
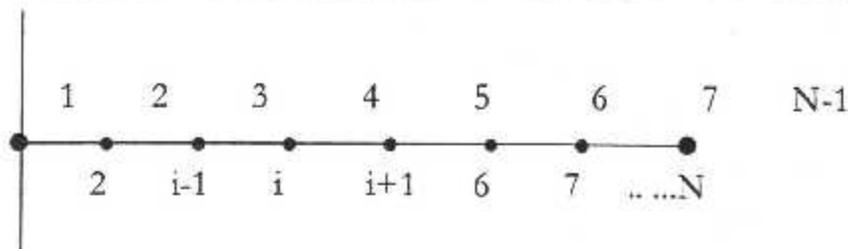


Figure 2 section d'une aile.

Si le profile est plein, il peut être utiliser pour les pales d'hélicoptère ou même pour les aubes d'une turbine. Si le profile est creux, il peut être utiliser pour les ailes d'avions.

La première étape consiste à décomposer la poutre en petites morceaux ce que l'on appel des éléments finis et faire la numérotation des élément et les nœuds .



la numérotation des éléments est faite par des cercles ou on note ici par :

NN : nombre de nœuds.

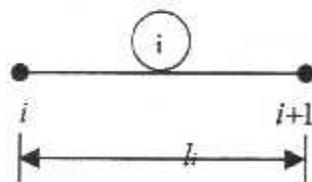
NE : nombre des éléments finis

Si la discrétisation contient NN nœuds, alors le nombre des élément finis est données par

$$NE = NN - 1 \dots\dots\dots 1$$

L'ordre de numérotation des éléments finis ne pose aucun problème sur la fiabilité du programme de calcul, ce qui est n'est pas le cas pour la numérotation des nœuds que doit être de l'ordre bien choisi surtout si les matrices [M] et [K] sont considéré comme des matrices bandes, le problème de numérotation devient sérieux si le rang des matrices devient de plus en plus élevé.

On aura:



si la discrétisation est uniforme chaque élément fini à une longueur

$$li = \frac{L}{NE} \quad i=1,2,3,\dots,NE$$

Avec L :longueur total de la poutre.

Chaque élément fini à son propre caractéristique mécanique et géométrique alors, ici pour l'élément i on a :

Module de young: E_i Moment d'inertie : I_i Masse volumique : ρ_i
 Aire da la section : A_i

Concernant le moment d'inertie I utilisé dans le calcul, il faut prendre celui qui intervient pour la flexion considéré dans le calcul.

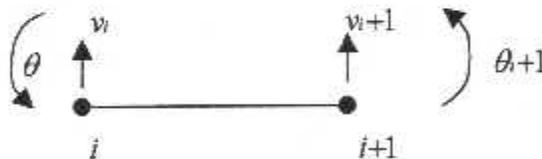
Les matrices $[M]$ et $[K]$ de cet élément typique on a:

$$[M]^e = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [K]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L \end{bmatrix}$$

Notons ici, que le déterminant de la matrice $[K]^e$ est égal à zéro pour tous les éléments finis et ce n'est pas le cas pour les masses.

Remarquons bien que, pour avoir les matrices $[M]^e$ et $[K]^e$ de tous les éléments finis, il faut connaître les caractéristiques de chaque élément finis, pour cela, il faut décaler des vecteurs nommés par $E(NE)$, $AI(NE)$, $RO(NE)$, et $etA(NE)$ de dimension égale au nombre de nœuds NE et décaler encore de matrice $AME(4.4)$ et $AKE(4.4)$ pour stocker respectivement les matrices masse et rigidité des éléments finis. Ici on remarque que la taille de ces matrices est de l'ordre 4×4 parce que, chaque élément fini contient 4 inconnues au total, deux par nœuds, ces inconnues sont :

Un déplacement vertical v (pour la flexion vertical) et une rotation comme le montre la figure suivante:



le vecteur de déplacement de cet élément fini est donné par :

$$\{q\}^e = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix}$$

Notons ici que la présentation et l'écriture des matrices $[M]^e$ et $[K]^e$ dépendent de l'écriture du vecteur de déplacement.

Maintenant, pour arriver à la détermination des matrices $[M]$ et $[K]$ globale de toute la poutre, il faut assembler les matrices élémentaires $[M]^e$ et $[K]^e$ des éléments finis.

La poutre est une structure continue, elle contient une infinité de degré de liberté. L'étape de la discrétisation rend le nombre de DDL fini, mais assez grand, alors les rangs des matrices $[M]$ et $[K]$ globales sont égaux.

$$\text{Rang} = 2 * NE$$

Plus le rang est grand, plus la taille des matrices est grande et plus le problème de mémorisation devient délicat.

Notons ici, quelle sont des matrices symétriques et bande, vu la numérotation des nœuds choisis.

Durant le calcul, et vue des deux propriétés on a utiliser une technique avancé permettent de stocker uniquement une partie de chaque matrice (partie supérieure) vue la symétrie, sans les zones qui se trouvent à l'extérieur de la bande. La structure de la matrice $[M]$ et $[K]$ est considéré comme un vecteur.

Chapitre V

LES METHODES DE STOCKAGE

LES METHODES DE STOCKAGE

Cette partie du projet est consacrée à la résolution du problème numériquement. On a réalisé un programme en langage **Fortran** dont les annexes A et B présentent les résumés de listing de chaque parties du programme.

V.1. REMARQUES PRELIMINAIRES

- Le programme proposé est conçu spécialement surtout pour un cadre de discrétisation élevée.
- L'élément fini utilisé dans le programme est un élément de poutre deux (2) nœuds.
- Le travail a été limité pour des matrices $[K]$ symétriques et bandes. Ces deux propriétés nous ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande, dans un vecteur uni colonne (ou uni-ligne), qui donne l'équivalence des cases pour la matrice $[K]$ dans le vecteur $\{vk\}$ qui représente la matrice de rigidité fictive.

La méthode de calcul est simple et consiste à donner à chaque fois qu'on tombe dans une case d'une matrice $K(i, j)$, sa position dans le vecteur $\{vk\}$ à partir d'une certaine formule qui varie avec la façon de stockage .

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessus de la diagonale (dans la partie supérieure) mais à l'extérieur de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle et elle ne présente aucun changement de résultat d'addition, puisque on connaît au départ, sans calcul, le résultat des opérations (d'addition, soustraction, multiplication, division et autres opérations de fonctions) d'un nombre quelconque avec le zéro.

Si une fois on tombe dans une case $K(i, j)$ au dessous de la diagonale (dans la partie inférieure), il suffit uniquement d'utiliser la propriété $K(i, j)=K(j, i)$ (puisque dans le programme on a choisi le stockage de la partie supérieure) et le traitement se fait comme une case $K(i, j)$ avec les deux cas précédants.

V.2. METHODES DE STOCKAGE SOUS FORME DE VECTEUR

Considérons une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$ symétrique et bande avec la largeur de la demi bande est B . Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur $\{vk\}$. Il est parfois plus difficile de faire une équivalence

entre une case de la matrice [K] et la case de vecteur {vk}, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages (ou même infini) sous la forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence. On va proposer cinq (05) formes de stockages en prenant une matrice [K] d'ordre (7x7) symétrique et sa bande B est égale à 4 et cela pour fixé les idées.

V.2.1. STOCKAGE EN COLONNE

La méthode de stockage choisie est représenté par la direction des flèches, c'est-à-dire, colonne par colonne, comme le montre la figure (V.1) :

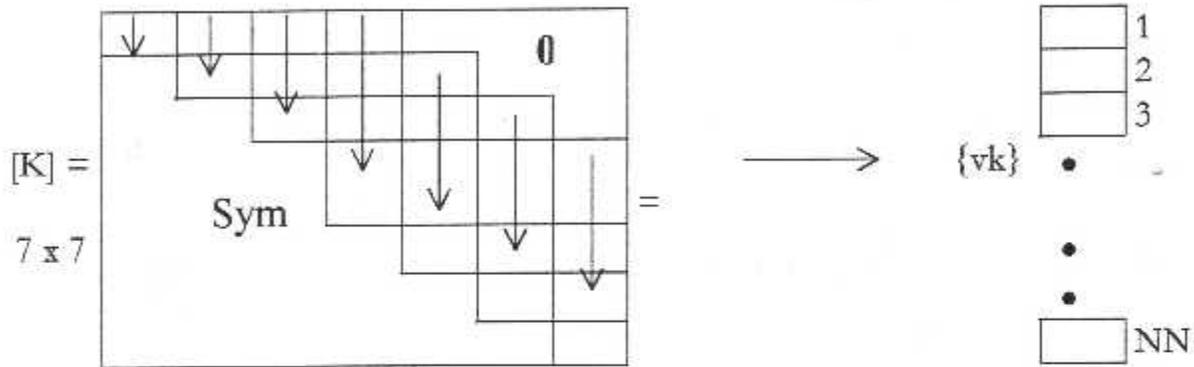


Figure (V.1) Stockage en colonne

vk(1)=K(1,1)	vk(2)=K(1,2)	vk(3)=K(2,2)	vk(4)=K(1,3)
vk(5)=K(2,3)	vk(6)=K(3,3)	vk(7)=K(1,4)	vk(8)=K(2,4)
vk(9)=K(3,4)	vk(10)=K(4,4)	vk(11)=K(2,5)	vk(12)=K(3,5)
vk(13)=K(4,5)	vk(14)=K(5,5)	vk(15)=K(3,6)	vk(16)=K(4,6)
vk(17)=K(5,6)	vk(18)=K(6,6)	vk(19)=K(4,7)	vk(20)=K(5,7)
vk(21)=K(6,7)	vk(22)=K(7,7)		

On peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur {vk} est égale à 22, c'est à dire NN = 22.

Maintenant si on veut généraliser à une matrice [K] d'ordre (N x N) symétrique avec largeur de la demi bande égale à B, la dimension du vecteur {vk} doit être égale à :

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (N - B) \cdot B$$

$$= \sum_{i=1}^{i=B} i + B \cdot (N - B)$$

comme $\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B+1)}{2}$ suite arithmétique de raison unité, alors :

$$NN = \frac{B(B+1)}{2} + (N-B) \cdot B$$

$$\text{donc : } NN = \frac{B(2N-B+1)}{2} \quad (\text{V.1})$$

On peut vérifier la validité de cette formule pour l'exemple précédent :

$$\begin{cases} N = 7 \\ B = 4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de stockage des éléments de la matrice [K] (les éléments de la bande supérieure uniquement) dans le vecteur $\{vk\}$, c'est-à-dire, l'équivalence d'une case de la matrice [K] dans le vecteur $\{vk\}$.

Pour trouver la formule de récurrence, on divise la matrice [K] en deux blocs.

* Pour une case K (i, j), telle que $j \leq B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ avec :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j-1) + i = \frac{(j-1)j}{2} + i$$

$$\text{alors } L = \frac{(j-1)j}{2} + i \quad \text{si } j \leq B \quad (\text{V.2})$$

on peut remarquer que le nombre $(j-1)j$ est un nombre paire.

* Pour une case K (i, j), telle que $j > B$, son équivalence (position) dans le vecteur $\{vk\}$ est $vk(L)$ est donnée par :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (j-B-1)B + i - (j-B) = i - j + \frac{B(1-B+2j)}{2}$$

$$\text{alors : } L = i - j + \frac{B(1-B+2j)}{2} \quad \text{si } j > B \quad (\text{V.3})$$

Remarques :

- Pour la formule (V.2), le compteur 'i' varie de $1 \leq i \leq j$.
- Pour la formule (V.3), le compteur 'i' varie de $j - (B-1) \leq i \leq j$.
- La fonction $L(i, j)$ est continue au point $j = B$, c'est-à-dire, pour $j = B$ on peut appliquer n'importe quelle formules (V.2) ou (V.3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrences de stockage sans détailler les calculs [5], [7].

V.2.2. STOCKAGE EN DIAGONAL

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure) sera transférée diagonalement dans le vecteur {vk} par [5] :

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = \sum_{p=1}^{p=j-i} (N+1-P) + i = \frac{1}{2} (j-i) (2N-j+i+1) + i \tag{V.4}$$

avec $\begin{cases} j=1, 2, 3, \dots, B \\ i=j, 2, 3, \dots, B \end{cases}$ et $\begin{cases} j=B+1, B+2, \dots, N \\ i=j-B, j-B+1, \dots, j \end{cases}$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre (7 x 7) illustre schématiquement le transfert des cases entre la matrice et le vecteur correspondant.

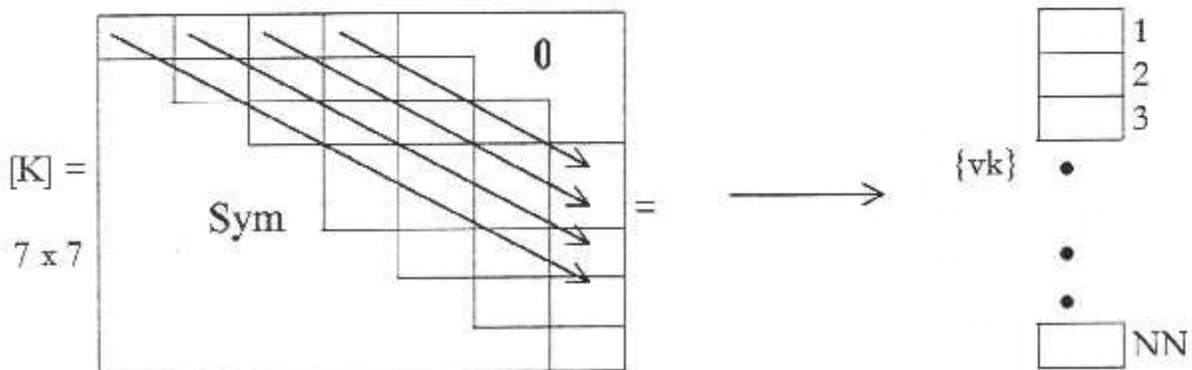


Figure (V.2) Stockage en diagonal

La dimension nécessaire du vecteur {vk} est donnée toujours par la formule (V.1). Si on applique la formule (V.4) a cette matrice d'ordre (7x7) et B=4 pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

vk(1)=K(1,1)	vk(2)=K(2,2)	vk(3)=K(3,3)	vk(4)=K(4,4)
vk(5)=K(5,5)	vk(6)=K(6,6)	vk(7)=K(7,7)	vk(8)=K(1,2)
vk(9)=K(2,3)	vk(10)=K(3,4)	vk(11)=K(4,5)	vk(12)=K(5,6)
vk(13)=K(6,7)	vk(14)=K(1,3)	vk(15)=K(2,4)	vk(16)=K(3,5)
vk(17)=K(4,6)	vk(18)=K(5,7)	vk(19)=K(1,4)	vk(20)=K(2,5)
vk(21)=K(3,6)	vk(22)=K(4,7)		

V.2.3. STOCKAGE EN LIGNE

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure) sera transférée ligne par ligne dans le vecteur {vk} par [5] :

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = (i-1)B + j \quad i+1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N-B \\ j = i, i+1, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (V.5)$$

$$L = \frac{B}{2} (2N - B + 1) - \frac{1}{2} (N - i)(N - i + 1) - N + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, \dots, N \end{cases} \quad (V.6)$$

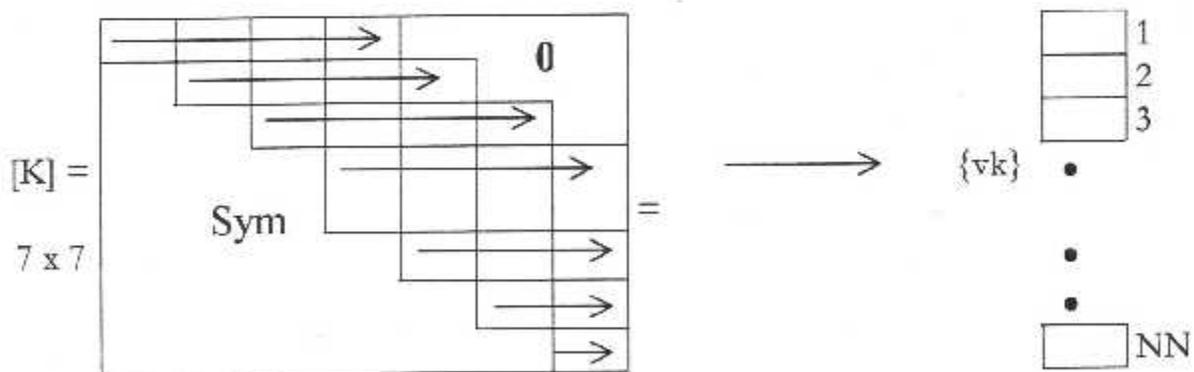


Figure (V.3) Stockage en ligne

La dimension nécessaire du vecteur {vk} est donnée toujours par la formule (V.1).

Si on applique les deux formules (V.5) et (V.6) a cette matrice d'ordre (7x7) et

B=4, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll}
 vk(1)=K(1,1) & vk(2)=K(1,2) & vk(3)=K(1,3) & vk(4)=K(1,4) \\
 vk(5)=K(2,2) & vk(6)=K(2,3) & vk(7)=K(2,4) & vk(8)=K(2,5) \\
 vk(9)=K(3,3) & vk(10)=K(3,4) & vk(11)=K(3,5) & vk(12)=K(3,6) \\
 vk(13)=K(4,4) & vk(14)=K(4,5) & vk(15)=K(4,6) & vk(16)=K(4,7) \\
 vk(17)=K(5,5) & vk(18)=K(5,6) & vk(19)=K(5,7) & vk(20)=K(6,6) \\
 vk(21)=K(6,7) & vk(22)=K(7,7) & &
 \end{array}$$

V.2.4. STOCKAGE EN LIGNE DE SERPENT

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure) sera transféré ligne par ligne alternativement dans le vecteur {vk} comme le présente la figure (V.4) [5]:

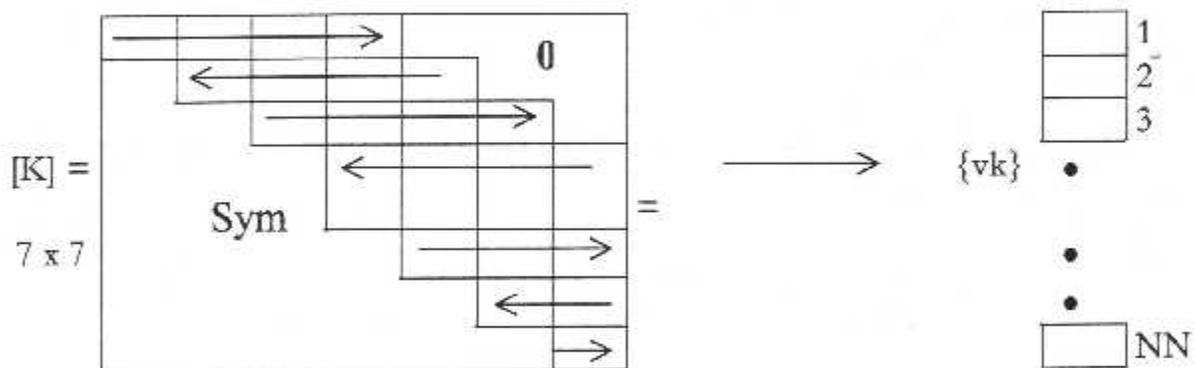


Figure (V.4) Stockage en ligne de serpent

Pour une matrice [K] d'ordre (N x N) on a :

$$vk(L) = K(i, j)$$

telle que :

$$L = (i-1)B + \begin{cases} -1 & \text{si } i = 1, 2, \dots, N-B \\ i-1 & \text{si } j = i, i+1, \dots, i-B-1 \end{cases} (j-i+1) + \left(i+1 - 2 \text{Int} \left(\frac{i}{2} \right) \right) (B+1) \tag{V.7}$$

et

$$L = \frac{B}{2} (2N-B+1) - \frac{1}{2} (N-i) (N-i+1) - N + j + \left[i+1 - 2 \text{Int} \left(\frac{N}{2} \right) \right] (N-2j+i) \tag{V.8}$$

$$\text{si } \begin{cases} i = N-B+1, \dots, N \\ j = i, i+1, \dots, N \end{cases}$$

avec $\text{Int}(x)$: Veut dire la partie entière d'un nombre fractionnaire.

De même, la dimension du vecteur $\{vk\}$ est donnée par la formule (V.1). Si on applique les deux formules (V.7) et (V.8) à cette exemple pour $N=7$, $B=4$, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

$vk(1)=K(1,1)$	$vk(2)=K(1,2)$	$vk(3)=K(1,3)$	$vk(4)=K(1,4)$	$vk(5)=K(2,5)$
$vk(6)=K(2,4)$	$vk(7)=K(2,3)$	$vk(8)=K(2,2)$	$vk(9)=K(3,3)$	$vk(10)=K(3,4)$
$vk(11)=K(3,5)$	$vk(12)=K(3,6)$	$vk(13)=K(4,7)$	$vk(14)=K(4,6)$	$vk(15)=K(4,5)$
$vk(16)=K(4,4)$	$vk(17)=K(5,5)$	$vk(18)=K(5,6)$	$vk(19)=K(5,7)$	$vk(20)=K(6,7)$
$vk(21)=K(6,6)$	$vk(22)=K(7,7)$			

V.2.5. STOCKAGE EN ESCALIER

Le schéma de transfert des éléments de la matrice $[K]$ se fait comme indique La figure (V.5) suivante pour $N=7$ et $B = 4$:

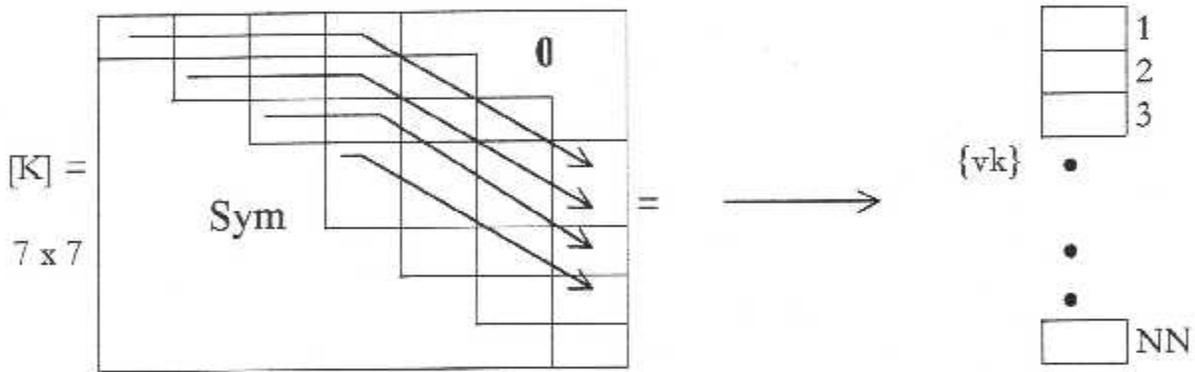


Figure (V.5) Stockage en escalier

Pour bien voir le transfert des éléments , voici la correspondance :

$vk(1)=K(1,1)$	$vk(2)=K(1,2)$	$vk(3)=K(1,3)$	$vk(4)=K(1,4)$
$vk(5)=K(2,5)$	$vk(6)=K(3,6)$	$vk(7)=K(4,7)$	$vk(8)=K(2,2)$
$vk(9)=K(2,3)$	$vk(10)=K(2,4)$	$vk(11)=K(3,5)$	$vk(12)=K(4,6)$
$vk(13)=K(5,7)$	$vk(14)=K(3,3)$	$vk(15)=K(3,4)$	$vk(16)=K(4,5)$
$vk(17)=K(5,6)$	$vk(18)=K(6,7)$	$vk(19)=K(4,4)$	$vk(20)=K(5,5)$
$vk(21)=K(6,6)$	$vk(22)=K(7,7)$		

Pour une matrice d'ordre $(N \times N)$ avec une bande B , le transfert des éléments se fait par la formule de récurrence suivante :

$$L = (i-1) \frac{(2N-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} vk(L) = K(i, j) & \text{par :} \\ i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = i, i+1, \dots, B \end{cases} \quad (V.9)$$

et

$$L = (B - j + i - 1) \frac{(2N - B + j - i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N \\ j = B + 1, B + 2, \dots, i + B - 1 \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

Remarques :

La méthode de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur nous fait gagner en espace mémoire l'ordre suivant :

Pour une matrice $[K]$ d'ordre $(N \times N)$, symétrique et bande, on a :

$$\text{NDCE} = N \times N - \text{NN} = N^2 - \frac{B(2N - B + 1)}{2}$$

avec NDCE : Nombre De Case Eliminés

Au lieu de stocker N^2 cases dans la mémoire de l'ordinateur, on stocke uniquement NN cases. Pour voir un ordre sur les valeurs de NDCE et NN, on propose les exemples suivants :

- N = 100

B	N^2	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
100	10000	5050	4950	≈ 49,50 %
70	10000	4585	5415	≈ 54,15 %
35	10000	2905	7095	≈ 70,95 %
10	10000	955	9045	≈ 90,45 %
2	10000	199	9801	≈ 98,01 %

- N = 5000

B	N^2	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
480	25000000	2285040	22714960	≈ 90,85 %
270	25000000	1313685	23686315	≈ 94,74 %
150	25000000	738825	24261175	≈ 97,04 %
70	25000000	347585	24652415	≈ 98,60 %

- $N = 100000$

B	N^2	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
480	10^{10}	47885040	9952114960	$\approx 99,52 \%$
270	10^{10}	269636685	9973036315	$\approx 99,73 \%$
150	10^{10}	14988825	9985011175	$\approx 99,85 \%$
70	10^{10}	6997585	9993002415	$\approx 99,93 \%$

Il est bien clair d'après ces exemples que plus la largeur de la demi bande est petite plus le nombre des cases gagnées augmente rapidement, ce qui veut dire que, durant la numérotation des nœuds du maillage généré, il est important de choisir celle qui donne la bande minimale, ce que l'on appelle par numérotation optimale.

On remarque bien que le nombre de cases gagnés dans les cas les plus défavorables dépasse 90% de la méthode classique de stockage complet. Donc on a bien vu l'intérêt pratique de la technique de la matrice bande. Après avoir résolu le problème de stockage, on va procéder maintenant à la description qualitative des méthodes de résolution d'un système adapter pour des matrices bandes, stockées sous forme d'un vecteur.

V.3. ALGORITHMES DE RESOLUTION DIRECTE DE SYSTEME D'EQUATIONS

On est amené à résoudre le problème après avoir rempli la matrice de rigidité $[K]$ globale et le vecteur $\{F\}$ afin de déterminer le vecteur $\{u\}$ de solution à un système d'équations suivant :

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (V.12)$$

On a choisi deux méthodes pour la résolution numérique de ce système d'équations.

V.3.1. METHODE DE KHALETSKI

Supposons dans la première étape que la matrice $[K]$ est carré mais pleine et quelconque [10]. Après avoir présenté l'algorithme de résolution [10], en essaye de faire l'extension vers une matrice pleine mais symétrique, et dans la dernière étape en déduit l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et bande.

[K] matrice carré pleine quelconque

Mettons la matrice $[K]$ sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires inférieure $[L] = [L_{ij}]$ et de la matrice triangulaire supérieure $[H] = [H_{ij}]$ à diagonale unité, c'est-à-dire :

$$[K] = [L] [H] \tag{V.13}$$

où :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ L_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{NN} & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1N} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2N} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3N} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments L_{ij} et H_{ij} se calculent d'après les formules suivantes [10]:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= K_{11} \quad , \quad H_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, N \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} H_{mj} \quad j = 1, 2, 3, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} H_{mj} \right) \quad j = i+1, i+2, i+3, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \tag{V.14}$$

On aura par suite deux systèmes d'équations à matrice triangulaire

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad \rightarrow \quad [L] \cdot [H] \cdot \{u\} = \{F\}$$

on pose $[H] \cdot \{u\} = \{y\}$ (V.15)

alors $[L] \cdot \{y\} = \{F\}$ (V.16)

La résolution de système (V-16) en suite (V-15) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right) \quad i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

et

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{m=N} H_{im} u_m \quad i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \end{cases} \quad (\text{V.18})$$

[K] matrice carrée pleine et symétrique :

Si la matrice [K] est symétrique, c'est-à-dire, si $K_{ij} = K_{ji}$ ce qui est le cas. Alors, on peut démontrer que [10] :

$$H_{ij} = \frac{L_{ji}}{L_{ii}} \quad (\text{V.19})$$

La propriété (V-19) nous a permis de ne pas déclarer la matrice [H] dans la mémoire de l'ordinateur et de calculer uniquement les éléments de la matrice [L], ce qui engendre un gain d'espace mémoire en plus.

L'algorithme présenté par les formules (V.14), (V.17) et (V.18) se simplifie à :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11} = K_{11} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} \frac{L_{jm}}{L_{mm}} \quad j = 1, 2, 3, \dots, i \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (\text{V.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left\{ F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right\} \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (\text{V.21})$$

Exemple 1 : $N = 12$; $B = 5$

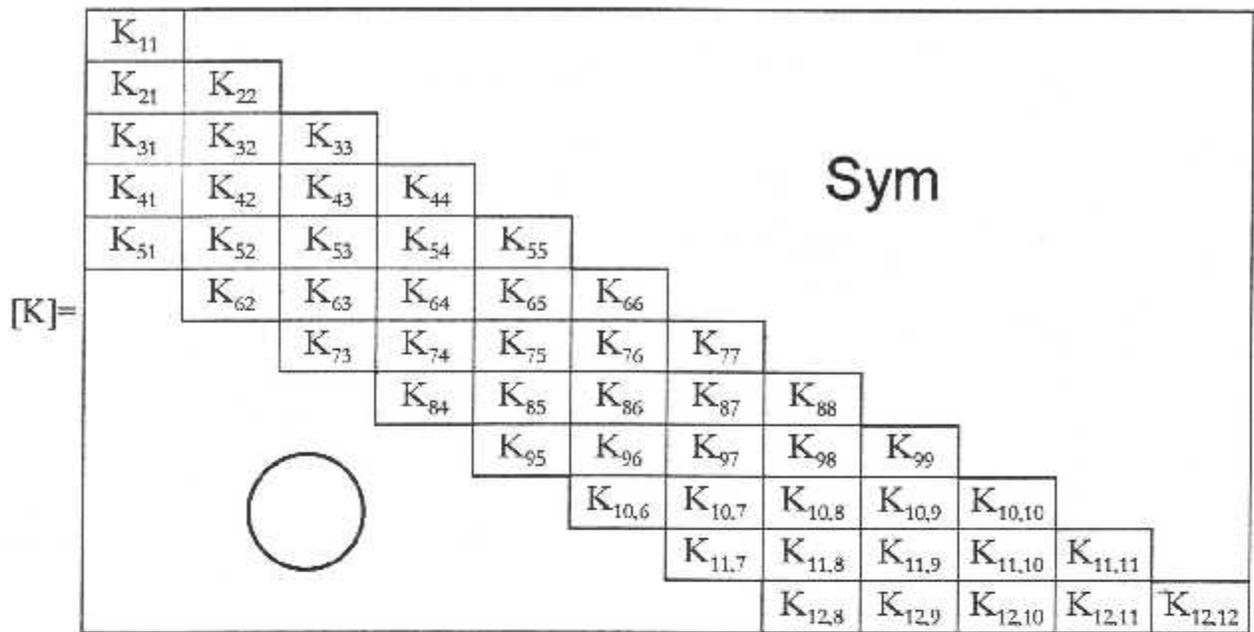


Figure (V.6) : Exemple de la matrice bande de l'équation (V.23)

Exemple 2 : $N = 10$; $B = 4$

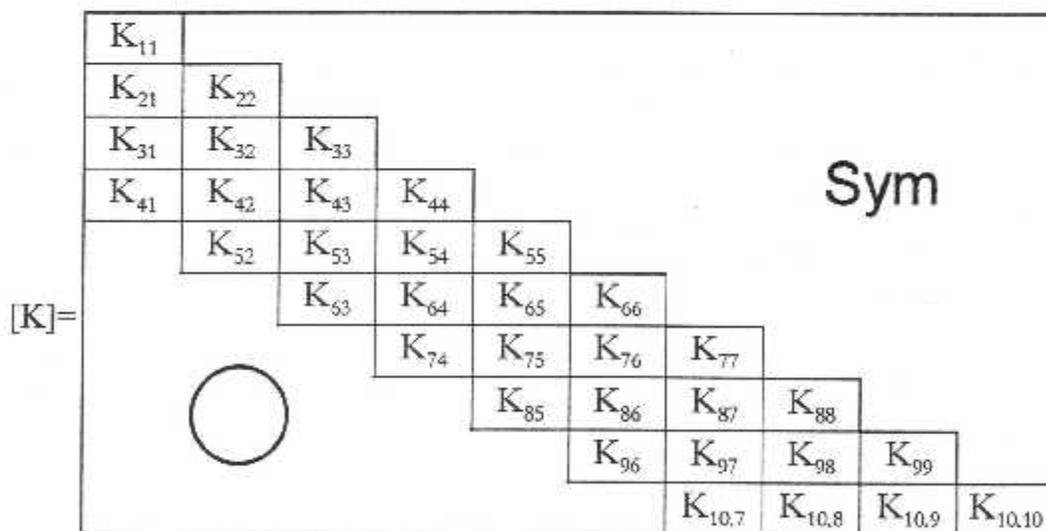


Figure (V.7) : Exemple de la matrice bande de l'équation (V.23)

Remarque :

- La matrice [L] qui vient de la décomposition de la matrice [K] possède la même structure que [K] sauf qu'elle est triangulaire. Après l'élimination des opérations

sur les zéros (les éléments à l'extérieur de la bande), la formule de décomposition (V.20) devient [5]:

$$\begin{cases} L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} & \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = 2, 3, \dots, i \end{cases} \\ L_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=i-B+1}^{j-1} L_{ir} \frac{L_{jr}}{L_{rr}} & \begin{cases} i = B+1, B+2, \dots, N \\ j = i-B+1, \dots, i \end{cases} \end{cases} \quad (V.24)$$

De la même manière les formules (V.21), et (V.22) deviennent respectivement de la forme suivante :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} y_r \right) & i = 2, 3, \dots, B \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(F_i - \sum_{r=i-B+1}^{i-1} L_{ir} y_r \right) & i = B+1, \dots, N \end{cases} \quad (V.25)$$

et

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^N L_{ri} u_r & i = N-1, N-2, \dots, N-B+1 \\ u_i = y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{i+B-1} L_{ri} u_r & i = N-B, N-B-1, \dots, 3, 2, 1 \end{cases} \quad (V.26)$$

V.3.2. METHODE DE CHOLESKY

Dans le cas d'une matrice indéfinie, la matrice [K] symétrique peut être décomposée sous la forme suivante [2], [5] :

$$[K] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T \quad (V.27)$$

avec :

[L] : Matrice triangulaire inférieure (les éléments au-dessous de la diagonal sont non nuls) avec diagonale unité.

[D] : Matrice diagonale avec les éléments Pivots $d_{ii} \neq 0$

[L]^T : La transposée de la matrice [L]

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par :

$$\det [K] = \prod_{i=1}^{i=N} d_{ii} \quad (V.30)$$

Remarque :

Si la matrice $[K]$ est symétrique et défini positive, on peut décomposer la matrice $[K]$ sous la forme suivante :

$$[K] = [L]^T \cdot [L] \quad (V.31)$$

Dans ce cas, la matrice $[L]$ est triangulaire supérieure (les éléments au-dessus de la diagonale sont non nuls) et sous la forme matricielle possède la structure suivante :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1N} \\ & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2N} \\ & & L_{33} & \cdots & L_{3N} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{NN} \end{bmatrix}$$

• **Algorithme II :**

Cet algorithme est conçu spécialement si la matrice de rigidité est défini positive. L'algorithme qui donne la factorisation de $[K]$ pour ce type de matrice est le suivant [2], [4] et [5]:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{K_{11}} \quad , \quad L_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, N \\ L_{pp} &= \sqrt{K_{pp} - \sum_{r=1}^{r=p-1} L_{rp}^2} \\ L_{pj} &= \frac{1}{L_{pp}} \left(K_{pj} - \sum_{r=1}^{r=p-1} L_{rp} L_{rj} \right) \quad j = p+1, p+2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} \\ \\ p = 2, 3, \dots, N \end{matrix} \quad (V.32)$$

Le déterminant de la matrice $[K]$ est obtenu par $\det [K] = \left(\prod_{i=1}^N L_{ii} \right)^2$

Remarques :

- Les éléments de la diagonale de la matrice $[K]$ sont tous positifs et non nuls.
- Concernant les algorithmes (V.29) et (V.32) pour la méthode de Cholesky, on n'a pas le problème de division par zéro.
- La division par d_{11} dans l'algorithme (V.29) ne pose aucun problème de division par zéro, puisque $d_{11} = K_{11}$ et on a dit que : $K_{ii} > 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$. La division par d_{ii} ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) dans l'algorithme (V.29) ne pose pas encore le problème de division par zéro, puisqu'on a : $\det [K] \neq 0$ (La solution de $\{u\}$ existe mathématiquement) et d'après (V.30), il faut que : $d_{ii} \neq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$.
- Concernant l'algorithme II de Cholesky présenté par les équations (V.32) ne pose pas de problème de division par zéro puisqu'on a : $\det [K] \neq 0$. La solution de $\{u\}$ existe, et comme $\det [K] = L_{11}^2 \cdot L_{22}^2 \cdot L_{33}^2 \cdot \dots \cdot L_{NN}^2$. Alors ils faut que les $L_{ii} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$ soient tous différents de zéro.
- Le problème de la racine d'un nombre négatif de l'algorithme (V.32) pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice $[L]$ ne se pose plus, puisque la condition supplémentaire que doit vérifier la matrice $[K]$ pour que l'algorithme II soit applicable est que la matrice $[K]$ soit définie positive.
- Les mêmes remarques présentées pour l'algorithme de Cholesky sont valables pour l'algorithme de Khaletski.
- La détermination du vecteur solution $\{u\}$ par l'algorithme de Cholesky ne diffère pas beaucoup par celui de Khaletski.

Chapitre VI

RESULTATS ET DISCUSSIONS

RESULTATS ET DISCUSSION

Après la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et la résolution numérique du problème de vibration libre des poutres en flexion, et la programmation de la méthode des itérations inverse, on arrive au stade de la présentation de quelques résultats numériques déterminés par le programme. En premier lieu on a réalisé un programme répondant à la résolution de ce problème.

L'application de la méthode des éléments finis à permet d'obtenir les résultats numériques tels que : l'assemblage des éléments finis pour obtenir les matrices masses $[M]$ et rigidité $[K]$ de la poutre, les pulsations propres de résonance, ainsi que la déformée associée et la vérification de l'orthogonalité des modes propres.

Afin de valider et interpréter ces résultats, nous avons entamé la résolution analytique du modèle mathématique pour le cas le plus courant.

La comparaison entre les résultats obtenus par la programmation de la méthode des éléments finis et les résultats analytiques du phénomène est ainsi faite.

La validité de nos résultats est justifiée en faisant augmenter le nombre des éléments finis et pour chaque cas, on a exécuté le programme et on a fait la comparaison avec les solutions analytiques.

V.1. ORGANIGRAMME

On a réalisé un programme informatique en langage Fortran exécuté sur un micro ordinateur Pentium III, 650MHz, et 64 Méga de Ram.

Le programme est présenté dans l'annexe B.

V.2. EFFET DE LA DISCRETISATION SUR LA CONVERGENCE DU PROBLEME

On a considéré ici plusieurs approximations, en augmentant le nombre des éléments finis et de déterminer pour chaque cas la première fréquence propre de résonance et le vecteur propre associé et faire la comparaison avec les solutions exactes. L'exemple qu'on a pris est le cas le plus courant concernant une aile encastrée, de section constante en plein vol.

On a considéré la présentation des résultats de façon adimensionnelle, afin de les rendre valable pour n'importe quelle aile de section constante sans faire recours aux propriétés mécaniques tels que : la masse volumique, le module de Young, et les caractéristiques géométriques comme I_x et I_y .

On a pris dans notre étude le cas d'une poutre homogène ayant les valeurs de ρ, E, S, I constantes.

L'aile est considéré ici comme étant une poutre encastrée - libre, comme l'indique la figure (V.2) présentée ci-dessous :



Figure (V.2) Aile encastrée libre

Dans le cas général, nous sommes en présence de deux flexions, l'une horizontale due à la présence de la traînée aérodynamique et de la poussée, l'autre flexion est appelée flexion verticale due à la présence du poids de l'aile et la portance aérodynamique.

On a considéré quatre exemples ; chacun à une discrétisation spécifiée :

Exemple 01 : Considérons la poutre avec un élément fini.

Avec : $NE=1$; alors $NW = 2$

$$I = 1 ; A = 1 ; L = 1 \text{ m}$$

$$\rho = 1 ; E = 1$$



Les matrices de rigidité et de masse sont les suivantes :

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \text{ et } [M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres associées sont représentées dans le tableau suivant :

	Calculé par le programme	exact
ω_1	3.532	3.516
ω_2	22.058	22.036
ω_3	61.712	61.690

Le premier mode ainsi déterminé par le programme est : $\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.815 \\ 3.302 \\ 2.6345 \\ 6.0376 \\ 2.77164 \end{Bmatrix}$

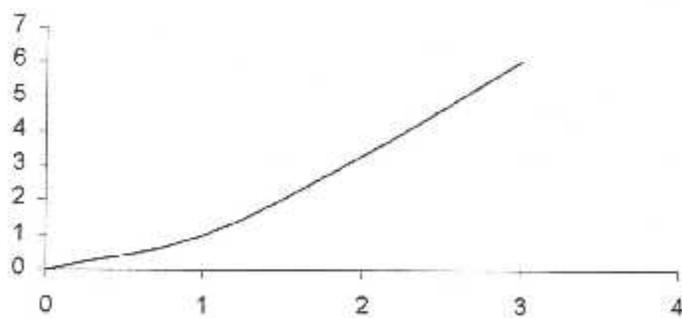
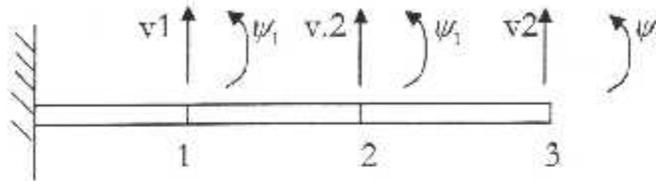


Figure donnant l'allure du premier mode

Exemple 02 : considérons la poutre avec trois éléments finis.

Avec : $NV=4$; $I=1$; $A=1$; $L=3m$

$NE=3$; $\rho=1$; $E=1$



Les matrices de rigidité $[K]$ et de masse $[M]$ sont les suivantes :

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 54 & 13 & 312 & 0 & 54 & -13 \\ -13 & -3 & 0 & 8 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres associées sont représentées dans le tableau suivant :

	Calculé par le programme	exact
ω_1	3.516	03.516
ω_2	22.10	22.036
ω_3	62.47	61.690

Les modes ainsi déterminés par le programme sont :

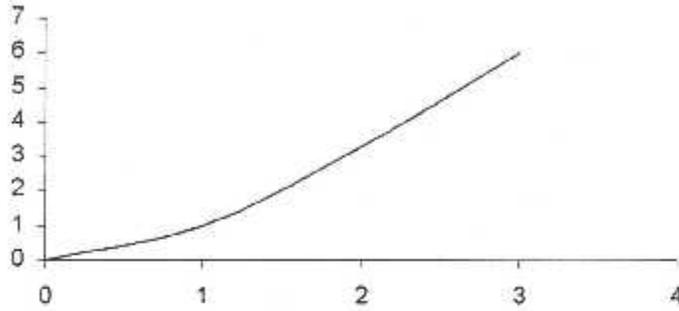
$$\{\phi_1\} = |1 \ 1.821 \ 3.3422 \ 6.36 \ 6.0412 \ 2.772|^T$$

$$\{\phi_2\} = |1, -0.7446 \ 0.8810 \ -0.5683 \ 1.344 \ 3.561 \ |$$

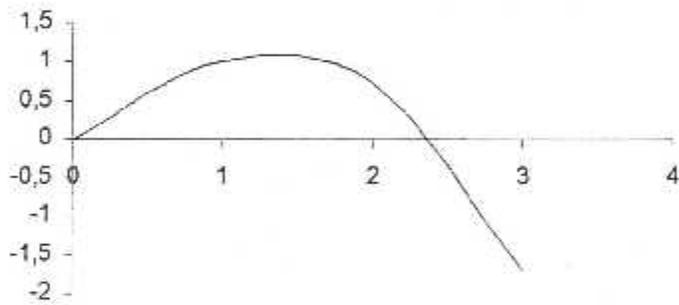
$$\{\phi_3\} = |1 \ 0.9966 \ 0.7179 \ -1.672 \ -1.695 \ -2.704|$$

Les valeurs de l'orthogonalité du troisième mode

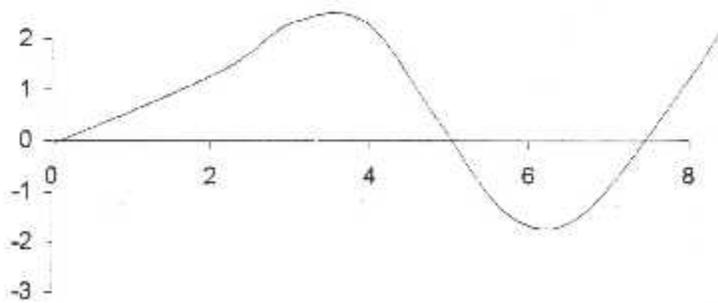
$$\phi_3 \cdot K \cdot \phi_3^T = 66.64 \frac{EI}{L^3} \quad \phi_3 \cdot M \cdot \phi_3^T = 1.342 \rho \delta L$$



L'allure du premier mode



L'allure du deuxième mode

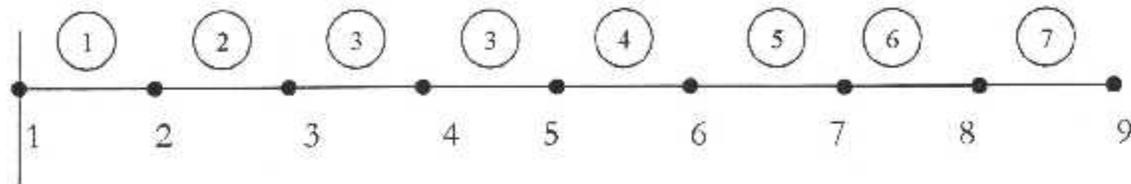


L'allure du troisième mode

Exemple 03: considérons la poutre avec sept éléments finis.

Avec : $NN=8$; $I=1$; $A=1$; $L=3m$

$NE=7$; $\rho=1$; $E=1$



Les matrices de rigidité et de masse sont les suivantes :

la matrice $M=$

356.57	0.00	61.71	-16.98	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	11.94	16.98	-4.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
61.71	16.98	356.57	0.00	61.71	-16.98	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-16.98	-4.48	0.00	11.94	16.98	-4.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	61.71	16.98	356.57	0.00	61.71	-16.98	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-16.98	-4.48	0.00	11.94	16.98	-4.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	61.71	16.98	356.57	0.00	61.71	-16.98	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-16.98	-4.48	0.00	11.94	16.98	-4.48	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	61.71	16.98	356.57	0.00	61.71	-16.98	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-16.98	-4.48	0.00	11.94	16.98	-4.48	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	61.71	16.98	356.57	0.00	61.71	16.98
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-16.98	-4.48	0.00	11.94	16.98	-4.48
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	61.71	16.98	178.29	-28.73
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-16.98	-4.48	-28.73	5.97

la matrice $K=$

16.08	0.00	-8.04	4.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	7.00	-4.59	1.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-8.04	-4.59	16.08	0.00	-8.04	4.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.59	1.75	0.00	7.00	-4.59	1.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-8.04	-4.59	16.08	0.00	-8.04	4.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	4.59	1.75	0.00	7.00	-4.59	1.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-8.04	-4.59	16.08	0.00	-8.04	4.59	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	4.59	1.75	0.00	7.00	-4.59	1.75	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.04	-4.59	16.08	0.00	-8.04	4.59	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.59	1.75	0.00	7.00	-4.59	1.75	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.04	-4.59	16.08	0.00	-8.04	4.59
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.59	1.75	0.00	7.00	-4.59	1.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.04	-4.59	8.04	-4.59
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.59	1.75	-4.59	3.50

Les pulsations propres associées sont représentées dans le tableau suivant :

	Calculé par le programme	Exacte
ω_1	3.51678	3.516
ω_2	22.0355	22.036
ω_3	61.6752	61.690

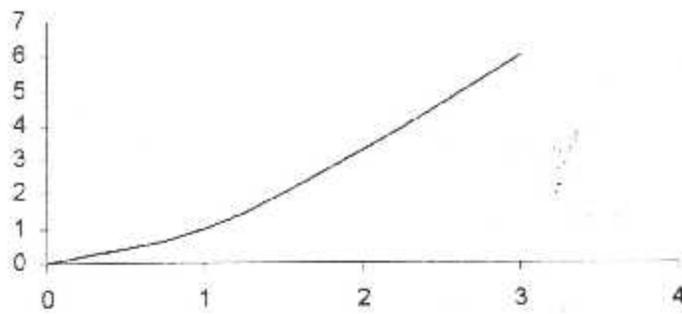
Le premier mode ainsi déterminé par le programme est :

$$\{\phi_1\} = \begin{pmatrix} 1.00000000000000 \\ 1.68867503812482 \\ 3.72028605257513 \\ 3.01133756247866 \\ 7.74747891732210 \\ 3.97862078527772 \\ 12.6884758819848 \\ 4.61635773471387 \\ 18.1908486444944 \\ 4.97058377339926 \\ 23.9679810960298 \\ 5.11085968467080 \\ 29.8271539932291 \\ 5.13215520541193 \end{pmatrix}$$

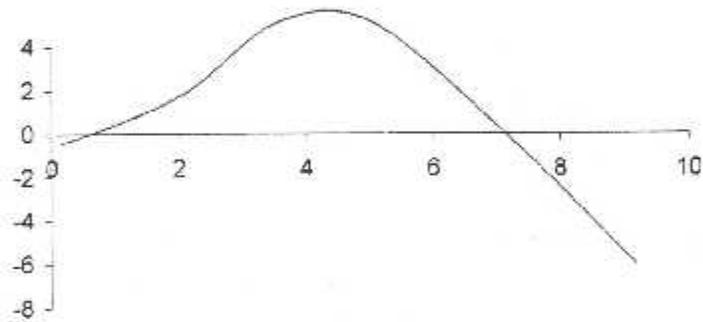
Les valeurs de l'orthogonalité du premier mode :

$$\phi . K . \phi_T = 4.16680$$

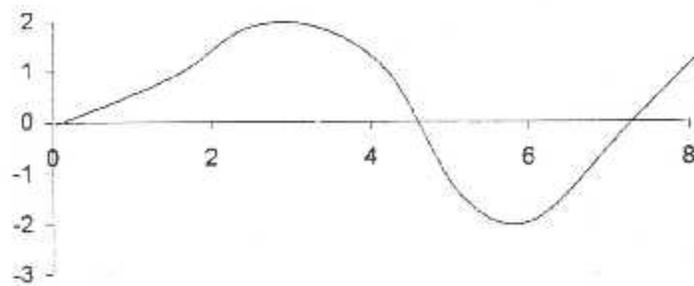
$$\phi . M . \phi_T = 27.36495$$



L'allure du premier mode



L'allure du deuxième mode



L'allure du 3ème mode

Exemple 03:

Discretisation avec un nombre élevé des éléments, alors on va traiter quelques exemples avec une discretisation assez élevée, mais on présente uniquement les résultats des résonances du premier mode propre sans procéder à la présentation des matrices de masses et de rigidité respectivement $[M]$ $[K]$, vu le rang élevé. On aboutit au résultats représentés dans le tableau ci-dessous :

Discretisation	Calculé	Exacte	Erreur%
NE=20	3.51679	3.51689	0.0028
50	3.51681	3.51689	0.0025
80	3.516820	3.51689	0.0019
100	3.51684	3.51689	0.00158
150	3.51686	3.51689	0.00083
200	3.51688	3.51689	0.000284

Le tableau suivant représente la convergence vers la solution exacte de la première pulsation propre w_1 de résonance calculée par le programme.

On remarque bien que plus la structure soit discrétisée que la méthodes des éléments finis est très puissante avec un nombre de nœuds égale à cinq nœuds (NN=5), on obtient une erreur de 0.0093%

Plus le nombre de nœuds est élevé, plus la valeur de la pulsation propre w_1 tend vers la solution exacte. Qui est l'exemple pour la discrétisation pour NE égal a 200 on remarque l'erreur est de l'ordre de 0.000284%, qui est une erreur très satisfaisante ; ce qui montre encore l'efficacité du programme élaboré ainsi que la méthodes des itérations inverse employée dans notre travail.

Avec la même discrétisation, le tableau suivant montre les valeurs de l'orthogonalité des premiers modes propres avec les matrices $[M]$ et $[K]$, on a alors :

Discretisation	$\phi_1 K \phi_1^T \frac{EI}{L^3}$	$\phi_1 M \phi_1^T \rho SL$
3	4.16700	27.36507
5	4.16618	27.36409
10	4.16620	27.36417
20	4.16649	27.36425
50	4.16637	27.36425
100	4.16649	27.36445
150	4.16698	27.36495

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les problèmes vibratoires des structures demeurent préoccupants malgré les progrès réalisés ces dernières années dans leur conception. Les vibrations transversales des ailes en sont une cause des plus importantes.

L'étude bibliographique met en évidence l'intérêt de développer un programme en élément finis adapté aux structures en nombre de discrétisation élevé permettant transitoire.

Les principes du programme sont développés dans la deuxième partie. Dont le but est de présenter le cheminement et les différentes étapes de discrétisation, assemblage jusqu'à ou on arrive à l'obtention des matrices masses $[M]$ et les matrices $[K]$ élémentaire, puis les matrices globales qui ont pour propriété d'être bandes et symétrique.

En second lieu on a développé une technique puissante par deux méthodes afin de stocker ces matrices en vecteurs.

La résolution du problème aux valeurs propres est calculées à l'aide de la méthode des itérations inverses, méthode choisie pour son efficacité et sa facilité de mise en œuvre.

Des simulations de calculs sont réalisées en augmentant le nombre des éléments finis et de déterminer pour chaque cas la première fréquence propre de résonance et le vecteur propre associé et faire la comparaison avec les solutions exactes.

Ces résultats montrent que plus le nombre des éléments discrétisés est élevé plus le résultat converge vers la solution exacte.

Il serait intéressant, pour être plus réaliste, de s'attaquer à des structures moins classiques que les poutres ou les plaques, et d'essayer d'aborder des cas de structures plus complexes touchant directement au domaine aéronautique, notamment en ce qui concerne la nature et la géométrie des matériaux, d'une part, et d'autre part la nature des chargements dynamiques et des conditions aux limites, les structures en coque raidies par exemple, ou celles en matériaux composites, devraient constituer d'intéressants sujets d'étude.

Notre grand souhait est que ce modeste travail puisse être un outil de base utile pour tout travail futur sur les problèmes de vibration des structures en aéronautique.

Annexe A

LES PROGRAMMES DES SOLUTIONS EXACTES

```

*****
*****
Programme qui détermine la solution exacte pour une poutre
encastree libre
*****
*****

```

```

C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  I=1
  X1=0.0
  Y1=F(X1)
10  X2=X1+0.5
  Y2=F(X2)
  PROD=Y1*Y2
  IF (PROD.LE.0.0) GOTO 20
  X1=X2
  Y1=Y2
  GOTO 10
20  DO 30 K=1,200
  X3=(X1+X2)/2
  Y3=F(X3)
  PROD=Y1*Y3
  IF (PROD.LE.0.0) THEN
    X2=X3
    Y2=Y3
  ELSE
    X1=X3
    Y1=Y3
  ENDIF
30  CONTINUE
  WRITE(+,+) X3**2,Y3
  I=I+1
  X1=X3+0.01
  Y1=F(X1)
  IF (I.LE.5) GOTO 10
  STOP
  END

C
  DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  F=1-COSH(X)*COS(X)
  RETURN
  END

```

```

*****
*****
Programme qui détermine la solution exacte pour une poutre
encastree appuis
*****
*****

```

```

C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  I=1
  X1=0.0
  Y1=F(X1)
10  X2=X1+0.5
  Y2=F(X2)
  PROD=Y1*Y2
  IF(PROD.LE.0.0) GOTO 20
  X1=X2
  Y1=Y2
  GOTO 10
20  DO 30 K=1,150
  X3=(X1+X2)/2
  Y3=F(X3)
  PROD=Y1*Y3
  IF(PROD.LE.0.0) THEN
    X2=X3
    Y2=Y3
  ELSE
    X1=X3
    Y1=Y3
  ENDIF
30  CONTINUE
  WRITE(*,*) X3**2,Y3
  I=I+1
  X1=X3+0.01
  Y1=F(X1)
  IF(I.LE.12) GOTO 10
  STOP
  END

```

```

C
  DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  F=DTAN(X)-DTANH(X)
  RETURN
  END

```


**Programme qui détermine la solution exacte pour une poutre
 encastrée encastrée**


```

C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  I=1
  X1=0.0
  Y1=F(X1)
10  X2=X1+0.5
  Y2=F(X2)
  PROD=Y1*Y2
  IF (PROD.LE.0.0) GOTO 20
  X1=X2
  Y1=Y2
  GOTO 10
20  DO 30 K=1,150
  X3=(X1+X2)/2
  Y3=F(X3)
  PROD=Y1*Y3
  IF (PROD.LE.0.0) THEN
    X2=X3
    Y2=Y3
  ELSE
    X1=X3
    Y1=Y3
  ENDIF
30  CONTINUE
  WRITE(*,*) X3**2,Y3
  I=I-1
  X1=X3-0.01
  Y1=F(X1)
  IF (I.LE.6) GOTO 10
  STOP
  END

C
  DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  F=1-COSH(X)*COS(X)
  RETURN
  END

```

Annexe B

LE PROGRAMME NUMERIQUE

```
*****
*****
Programme qui détermine les modes et fréquences propres de vibration d'une aile
par la méthode des itérations inverse
*****
*****
```

```
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AKE
COMMON /BK2/ AME
COMMON /BK3/ RO,A,AL,E,AI
DOUBLE PRECISION AK(200,200),AM(200,200)
DOUBLE PRECISION YP(200),YA(200),Z(200),B(200)
DOUBLE PRECISION AL(200,200),YY(200),ALAMBDA(100)
DOUBLE PRECISION A(200),RO(200),AI(200),ALONG(200),E(200)
DOUBLE PRECISION AKE(4,4),AME(4,4)

C
OPEN(UNIT=1, FILE='DON3_MODE.DAT', STATUS='UNKNOWN')
C
READ(1,*) NN,NMODE
C
READ(1,*)
NN=4
NMODE=2

C
NE=NN-1
write(*,*) 'NE=',NE
N=2*NN-2

C
ALPOUTRE=3.00

C
DO 8891 I=1,NE
ALONG(I)=ALPOUTRE/NE
A(I)=1.00
AI(I)=1.00
E(I)=1.00
RO(I)=1.00
8891 CONTINUE

C
C Remplissage des matrices AK et AM
C
DO 1799 I=2,NE
CALL K_ELEM(I)
CALL M_ELEM(I)
IPOS=2*I-1-2

C
DO 1899 J=1,4
DO 1899 K=1,4
AK(IPOS+J-1,IPOS+K-1)=AK(IPOS+J-1,IPOS+K-1)+AKE(J,K)
AM(IPOS+J-1,IPOS+K-1)=AM(IPOS+J-1,IPOS+K-1)+AME(J,K)
1899 CONTINUE

C
1799 CONTINUE

C
I=1
CALL K_ELEM(I)
CALL M_ELEM(I)
AK(1,1)=AK(1,1)+AKE(3,3)
AK(1,2)=AK(1,2)+AKE(3,4)
AK(2,1)=AK(2,1)+AKE(4,3)
AK(2,2)=AK(2,2)+AKE(4,4)
```

```

C
  AM(1,1)=AM(1,1)+AME(3,3)
  AM(1,2)=AM(1,2)+AME(3,4)
  AM(2,1)=AM(2,1)+AME(4,3)
  AM(2,2)=AM(2,2)+AME(4,4)
C
  DO 9005 I=1,N
  WRITE(*,1056) (AK(I,J),J=1,N)
9005  CONTINUE
1056  FORMAT(3X,10(2X,F6.2))
      pause
C
  IMODE=1
10   ITER=1
      DO 30 I=1,N
      YP(I)=1
30   CONTINUE
C
C   do 31 i=1,n
C   write(*,*) (AK(i,j),j=1,n)
C31  continue
C   do 32 i=1,n
C   write(*,*) (AM(i,j),j=1,n)
C32  continue
C   pause
C
C MULTIPLICATION DE LA MATRICE M PAR LE VECTEUR YP POUR OBTENIR LE VECTEUR {B}
C
35   DO 43 I=1,N
      SOME=0.0
      DO 40 J=1,N
      SOME=SOME+AM(I,J)*YP(J)
40   CONTINUE
      B(I)=SOME
43   CONTINUE
C   write(*,*)
C   do 44 i=1,n
C   write(*,*) 'B(',i,')=',b(i)
C44  continue
C   pause
C
C RESOLUTION DU SYSTEME [AK] {Z} = {YP}
C
      DO 45 I=1,N
      AL(I,1)=AK(I,1)
45   CONTINUE
C
      DO 60 I=2,N
      DO 60 J=2,I
      SCMF=0.0
      DO 70 K=1,J-1
      SCME=SCME+AL(I,K)*AL(J,K)/AL(K,K)
70   CONTINUE
      AL(I,J)=AK(I,J)-SCME
60   CONTINUE
C
      YY(1)=B(1)/AL(1,1)
      DO 80 I=2,N
      SCME=0.0
      DO 90 K=1,I-1
      SCME=SCME+AL(I,K)*YY(K)

```

```

90  CONTINUE
   YY(I)=(B(I)-SOME)/AL(I,I)
80  CONTINUE
C
   Z(N)=YY(N)
   DO 100 I=N-1,1,-1
   SOME=0.0
   DO 110 K=I+1,N
   SOME=SOME+A(I,K)/AL(I,I)*Z(K)
110  CONTINUE
   Z(I)=YY(I)-SOME
100  CONTINUE
C
   write(*,*)
C   do 101 i=1,n
C   write(*,*) 'Z(',i,')=',Z(I)
C101  continue
C   pause
C
C DETERMINATION LE MODULE {Z}
C
   AMODUL_Z=0.0
   DO 120 I=1,N
   AMODUL_Z=AMODUL_Z+Z(I)*Z(I)
120  CONTINUE
   AMODUL_Z=DSQRT(AMODUL_Z)
   amodul_z=Z(1)
C   pause
C
C DETERMINATION LE VECTEUR {YA}
C   DO 130 I=1,N
   YA(I)=Z(I)/AMODUL_Z
130  CONTINUE
C
C DETERMINATION LE MODULE DES VECTEURS {YA} et {YP}
C
   AMODUL_YA=0.0
   AMODUL_YP=0.0
   DO 140 I=1,N
   AMODUL_YA=AMODUL_YA+YA(I)*YA(I)
   AMODUL_YP=AMODUL_YP+YP(I)*YP(I)
140  CONTINUE
   AMODUL_YP=DSQRT(AMODUL_YP)
   AMCDUL_YA=DSQRT(AMODUL_YA)
C
C DETERMINATION LA VALEUR DE ALAMBDA
C
   ALAMBDA(IMODE)=1/AMCDUL_Z
C
C AFFECTATION ENTRE PRECEDENT ET ACTUEL
C
   DO 150 I=1,N
   YP(I)=YA(I)
150  CONTINUE
C
   ITER=ITER+1
   IF(ITER.LE.100) GOTO 35
C
   IF(IMODE.GE.2) ALAMBDA(IMODE)=ALAMBDA(IMODE)+ALAMBDA(IMODE-1)
   WRITE(*,*) 'ALAMBDA(',IMODE,')=',ALAMBDA(IMODE)
   WRITE(*,*)

```

```

      pause
C
C DETERMINATION LE MODE SUIVANT
C
C DETERMINATION LA NOUVELLE MATRICE [AK]
C
      DO 170 I=1,N
      DO 170 J=1,N
      AK(I,J)=AK(I,J)-(ALAMBDA(IMODE)+0.1)*AK(I,J)
170  CONTINUE
      DO 171 I=1,n
      write(*,*) (AK(i,j),j=1,n)
171  CONTINUE
      pause
      IMODE=IMODE+1
      IF(IMODE.LE.NMODE) GOTO 18
      STOP
      END
C
C Matrice de rigidite elementaire
C
      SUBROUTINE K_ELEM(I)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      COMMON /BK1/ AKE
      COMMON /BK3/ RO,A,AL,E,AI
      DOUBLE PRECISION AKE(4,4)
      DOUBLE PRECISION RO(200),A(200),ALONG(200),E(200),AI(200)
C
      AKE(1,1)=12.00
      AKE(1,2)=6*ALONG(I)
      AKE(1,3)=-12.00
      AKE(1,4)=-6*ALONG(I)
C
      AKE(2,1)=AKE(1,2)
      AKE(2,2)=4*ALONG(I)*ALONG(I)
      AKE(2,3)=-6*ALONG(I)
      AKE(2,4)=2*ALONG(I)*ALONG(I)
C
      AKE(3,1)=AKE(1,3)
      AKE(3,2)=AKE(2,3)
      AKE(3,3)=12.00
      AKE(3,4)=-6*ALONG(I)
C
      AKE(4,1)=AKE(1,4)
      AKE(4,2)=AKE(2,4)
      AKE(4,3)=AKE(3,4)
      AKE(4,4)=4*ALONG(I)*ALONG(I)
C
      DO 5 J=1,4
      DO 5 K=1,4
      AKE(J,K)=E(I)*AI(I)/ALONG(I)**3*AKE(J,K)
5     CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Matrice de masse elementaire
C
      SUBROUTINE M_ELEM(I)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      COMMON /BK2/ AME
      COMMON /BK3/ RO,A,AL,E,AI

```

```
DOUBLE PRECISION AME(4,4)
DOUBLE PRECISION RO(200),A(200),ALONG(200),E(200),AI(200)
C
AME(1,1)=156.0
AME(1,2)=22*ALONG(I)
AME(1,3)=54.0
AME(1,4)=-13.00*ALONG(I)
C
AME(2,1)=AME(1,2)
AME(2,2)=4*ALONG(I)*ALONG(I)
AME(2,3)=13.0*ALONG(I)
AME(2,4)=-3.0*ALONG(I)*ALONG(I)
C
AME(3,1)=AME(1,3)
AME(3,2)=AME(2,3)
AME(3,3)=156.0
AME(3,4)=-12.00*ALONG(I)
C
AME(4,1)=AME(1,4)
AME(4,2)=AME(2,4)
AME(4,3)=AME(3,4)
AME(4,4)=4*ALONG(I)*ALONG(I)
C
DO 5 J=1,4
DO 5 K=1,4
AME(J,K)=RO(I)*A(I)*ALONG(I)/420.0*AME(J,K)
5 CONTINUE
RETURN
END
```

Références

- [1] C. A. J. Fletcher, 'Computational Techniques for Fluid Dynamics,' Volume II, Specific Techniques for Different Flow Categories, Springer-Verlag, 1988, Austria
- [2] H. KARDESTUNCER, AND ALL, 'FINITE ELEMENT HANDBOOK,' MCGRAW- HILL BOOK COMPANY, 1987, USA.
- [3] GOURI FHATT et GILBERT TOUZOT, 'une présentation de la méthode des éléments finis,' MALOINE S.A. EDITEUR, 1984, France.
- [4] J.F. IMBERT, 'ANALYSE des STRUCTURES par ELEMENTS FINIS,' 3^{ème} Edition, SIP'AERO, CEPADUES-EDITONS, 1991, France.
- [5] ZEBBICHE Toufik, 'Eléments Finis', Cours 4^{ème} Année Ingénieur Aéronautique, Option Structure, Institut d'Aéronautique, Université de Blida.
- [6] ZEBBICHE Toufik, 'Calcul du nombre des opérations mathématiques effectuées par un programme basé sur la Méthode des Eléments Finis,' Document Personnel, Institut d'Aéronautique, 1996.
- [7] J.N. REDDY, 'An Introduction to the Finite Element Method,' Edition MCGRAW- HILL Book Company, 1988.
- [8] B. DEMIDOVITCH et I. MARRON, 'Eléments de Calcul Numérique,' Editions MIR, MOSCOU, 1987
- [9] J-LEURY. J-WELAND « Technologie Cellule » JEAN-MERMOSE
- [10] : J-CIRLES CARVEUR « modélisation des structures, par éléments finis MASSON ;1997