

44/02

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université de Blida  
Institut d'Aéronautique



Mémoire de Fin d'Etudes en Vue de l'Obtention du Diplôme  
d'Etudes Universitaires Appliquée en Aéronautique

Option : Propulsion

Présentée Par :

M<sup>lle</sup> MOUSLI Mériem Farah

Thème :

Conception des Tuyères Supersoniques à Corps  
Central Type à Bouchon ' PLUG NOZZLE '

Soutenu le : Mercredi 03 Juillet 2002

Devant le jury d'examen composé de :

Président :	M <sup>r</sup> BOUKRAA Salah	Maître de Conférences,	I. A. B.
Rapporteur :	M <sup>r</sup> ZEBBICHE Toufik	Chargé de Cours,	I. A. B.
Examineurs :	M <sup>r</sup> BEKKA Nadir	Maître Assistant,	I. A. B.
	M <sup>r</sup> KBAB Hakim	Maître Assistant	I. A. B.

Promotion 2001 / 2002

Institut d'Aéronautique, Université de Blida,  
B.P. 123, Rue de Souma, Blida, 09400

Tél : 00 213 25 43 10 00.

Fax : 00 213 25 43 36 36

## Dédicaces

Je dédie les fruits de ce modeste travail :

A, ma très chère mère et mon très cher père, qui ont consacré toute leur vie pour mon éducation et ma réussite, à qui je souhaite une longue vie heureuse.

A ma très chère sœur RYM, ainsi que ma cousine SABRINA.

A oncle HABIB et sa famille, ainsi A mon oncle CHAWKI et sa famille.

A toute ma famille

A mes amies : NADIA, FELA, MAHDIA, BAYA, NESSRINE, FIZOHRA, MOUHAMED, RAOUF, OMAR, BACHIR, SMAIL, LAMIA, LILA

A tous mes amis de l'institut d'aéronautique de Blida.

**MAYA**

## Remerciements

Je tient tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail. Je remercie mes très chers parent pour leurs aide et leur soutient durant cette période de réalisation de se travail. Ainsi que ma sœur **Rym**.

Je remercie M<sup>f</sup> **Toufik ZEBBICHE**, Chargé de Cours à l'institut d'Aéronautique de Blida pour le soutien et les conseils qu'il m'a apporté dans la réalisation de cet mémoire. Je lui suis très reconnaissante .

Je remercie M<sup>f</sup> **Salah BOUKRAA**, Maître de Conférences a l'institut d'Aéronautique de Blida d'avoir bien voulu prendre en considération cette mémoire et pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

J'adresse aussi mes plus sincères remerciements à Messieurs M<sup>f</sup> **Hakim KBAB**, Maître Assistant à l'institut d'Aéronautique de Blida, M<sup>f</sup> **Nadir BEKKA**, Maître Assistant à l'institut d'Aéronautique qui ont également examiné le manuscrit de ce mémoire et d'avoir accepté d'être membres de jury.

Je remercie le directeur de l'institut M<sup>f</sup> **Said BERGHEL**, ainsi que le corps administratif et plus particulièrement M<sup>lle</sup> **O. NAIMI**, **L. BOUKHATEM** , ainsi que **Smail, Kamel** et **Maamer**.

Je remercie Mme. **A. FATIHA** de la bibliothèque, ainsi que Mme. **DALILA** du centre de calcul post graduation pour leur aide.

Je remercie **FAROUK** du Cyber King pour son aide qui m'a apporté durant tous se travail

Arrivé a ce stade de ma formation, je remercie tous les professeurs de l'institut d'Aéronautique de Blida en particulier Messieurs **ABADA Omar**, **BENTRAD Hocine**, **BECHRI Attia**, **KIRAD AbdelKader**, **HAMOUDA Mohamed**, **ZERGOUG** et **Hayet BOUDJELLAL**, **AMTOUT Lounis**, **NECHE Ahmed**, **LARBI Farid**, **DILMI Smail**.

Je remercie tout mes amies si nombreux pour leur soutient moral surtout **L.SABRINA**, **T. BAYA** et **K. MAHDIA**.

## Résumé

Cette étude représente une contribution au domaine des écoulements supersoniques. Le but principal est de réaliser un programme numérique permettant de calculer les paramètres de l'écoulement et de tracer convenablement les profils des tuyères supersoniques en utilisant la détente de Prandtl Meyer, en supposant le gaz thermiquement et caloriquement parfait (température inférieure au seuil de dissociation), pour le type de tuyère à corps central à bouchon 'Plug Nozzle' de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, et d'avoir pour un même nombre de Mach plusieurs longueurs en changeant le rapport des chaleurs spécifiques.

## Abstract

This research presents a contribution to the field of supersonic flow. The principal aim of this investigation is to develop a computational program based on the relationship of Prandtl Meyer to calculate the flow parameters in a nozzle and to draw the supersonic nozzle profiles, where we consider the gas thermally and calorically perfect, for the type of Plug Nozzle in order to allow an uniform and parallel flow at the exit section and to have, for the same Mach number, some lengths, where we change the value of the specific heat ratio.

## Liste des Figures

Figure (I.1)	Figure (I.1) Variation du rapport des sections en fonction du $M$ pour $\gamma = 1.40$ .....	5
Figure (I.2)	Ecoulement supersonique isentropique dans une tuyère .....	7
Figure (I.3)	Ecoulement subsonique dans une tuyère .....	8
Figure (I.4)	Variation du débit avec la pression de sortie ; illustration de l'écoulement critique .....	10
Figure (I.5)	Illustration des lignes de Mach et de caractéristiques .....	12
Figure (I.6)	Illustration de la relation entre $\mu$ et $M$ .....	12
Figure (I.7)	Illustration d'une onde de choc normale .....	13
Figure (I.8)	Illustration d'une onde de choc oblique .....	14
Figure (I.9)	Différence entre une compression et une détente .....	14
Figure (I.10)	Déviations de l'écoulement à travers une onde de Mach correspondant à une compression ou une détente .....	14
Figure (I.11)	Tuyère conique .....	17
Figure (I.12)	Forme de la tuyère à zone d'expansion .....	18
Figure (I.13)	Forme générale d'une tuyère à détente centrée .....	18
Figure (I.14)	Forme d'une tuyère à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' .....	19
Figure (I.15)	Présentation du régime sur adapté d'une tuyère .....	20
Figure (I.16)	Présentation du régime adapté d'une tuyère .....	20
Figure (I.17)	Présentation du régime sous adapté .....	20
Figure (I.18)	Différentes couches de l'atmosphère .....	22
Figure (II.1)	Etat de l'écoulement au col et à la sortie de la tuyère .....	25
Figure (II.2)	Aperçue sur la géométrie de la tuyère à corps central .....	26
Figure (II.3)	Présentation de l'angle $\Psi$ de déviation de 'Lip' .....	26
Figure (II.4)	Naissance des ondes de détente divergente au point A du 'Lip' .....	27
Figure (II.5)	Présentation des angles de Mach du col et de la section de sortie .....	28
Figure (II.6)	Présentation de quelques paramètres .....	29
Figure (II.7)	Discrétisation de la zone de détente .....	30
Figure (II.8)	Présentation des propriétés d'une ligne de Mach intermédiaire .....	31
Figure (II.9)	Présentation de deux lignes de Mach adjacentes .....	32
Figure (II.10)	Calcul sur un triangle .....	33
Figure (II.11)	Relation entre coordonnées polaire et coordonnées cartésiennes .....	34
Figure (II.12)	L'arc de la partie inférieure du corps central .....	41
Figure (III.1)	Organigramme simplifié du programme de calcul numérique .....	50
Figure (III.2)	Forme du corps central d'une tuyère donnant à la sortie un nombre de Mach respectivement égale à 2.00, 2.50 et 3.00 pour $\gamma = 1.40$ .....	52
Figure (III.3)	Variation du rapport de pression $P/P_0$ le long de la paroi du corps central de la tuyère pour différentes valeurs de $M_S$ avec $\gamma = 1.40$ .....	54
Figure (III.4)	Variation du rapport des températures $T/T_0$ le long de la paroi de la tuyère du corps central pour différentes valeurs de $M_S$ avec $\gamma = 1.40$ ..	55
Figure (III.5)	Variation du rapport $\rho / \rho_0$ le long de la paroi du corps central pour $\gamma = 1.40$ avec différentes valeurs du nombre de Mach de sortie $M_S$ .....	56

Figure (III.6)	Variation de nombre de Mach le long de la paroi du corps central pour différentes valeurs de $M_s$ avec $\gamma=1.40$ .....	57
Figure (III.7)	Variation de l'angle d'inclinaison de la paroi du corps central pour différentes valeurs de $M_s$ avec $\gamma=1.40$ .....	58
Figure (III.8)	Forme du corps central donnant à la sortie un nombre de Mach $M_s=3.00$ avec différentes valeurs de $\gamma$ .....	60
Figure (III.9)	Courbes de variations de la longueur du corps central de la tuyère en fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	65
Figure (III.10)	Courbes de variations de la masse du corps central de la tuyère En fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	66
Figure (III.11)	Courbes de variations de l'inclinaison du 'LIP' par rapport à la vertical en fonction de nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	67
Figure (III.12)	Courbes de variations de la position de la section de sortie par rapport au 'Lip' en fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	68
Figure (III.13)	Courbes de variations de l'angle polaire $\varphi_E$ du LIP en fonction de Nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	69
Figure (III.14)	Courbes de variations de la déviation de la paroi du corps central au col en fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	70
Figure (III.15)	Courbes de variations de la force de poussée de corps central En fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	71
Figure (III.16)	Courbes de variations du rayon de sortie $R_s$ en fonction de nombre de Mach $M_s$ de sortie pour différentes valeurs de $\gamma$ .....	72
Figure (III.17)	Variation de la longueur de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie $M_s$ avec $\gamma=1.40$ pour différentes formes de tuyères connues en propulsion .....	77
Figure (III.18)	Variation de la masse de la structure de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie $M_s$ avec $\gamma=1.40$ pour différentes formes de tuyères connues en propulsion .....	78
Figure (III.19)	Différentes formes des tuyères supersoniques planes donnant à la sortie un écouement uniforme et parallèle pour $M_s=2.50$ et $\gamma=1.40$ ....	79

## Liste des tableaux

Tableau (III.1)	Résultats du dimensionnement en fonction de la discrétisation de la paroi du corps central .....	51
Tableau (III.2)	Résultats du dimensionnement des tuyères à corps central planes pour différentes valeurs de nombre de Mach $M_S$ avec $\gamma = 1.40$ .....	53
Tableau (III.3)	Résultats du dimensionnement des tuyères à corps central planes Pour différentes valeurs de $\gamma$ avec un nombre de Mach de sortie $M_S$ égale à 3.00 .....	59
Tableau (III.4)	Résultats numériques du dimensionnement pour $\gamma = 1.17$ d'une tuyère à corps central plane type à boucon ' PLUG NOZZLE ' .....	61
Tableau (III.5)	Résultats numériques du dimensionnement pour $\gamma = 1.14$ d'une tuyère à corps central plane type à boucon ' PLUG NOZZLE ' .....	62
Tableau (III.6)	Résultats numériques du dimensionnement pour $\gamma = 1.66$ d'une tuyère à corps central plane type à boucon ' PLUG NOZZLE ' .....	63
Tableau (III.7)	Position de la section de la paroi du corps central possédant une inclinaison donnée .....	73
Tableau (III.8)	Résultats approchés du dimensionnement d'une tuyère à corps central plane donnant à la sortie $M_S = 2.50$ avec $\gamma = 1.40$ avec une inclinaison non nulle de paroi à la section de sortie .....	74
Tableau (III.9)	Résultats de conception entre diverses formes des tuyères de propulsion .....	75

## Liste des symboles

M	.....	Nombre de Mach de l'écoulement.
$\mu$	.....	Angle de Mach.
v	.....	Fonction de Pandtl Meyer.
$\theta$	.....	Déviatiion du vecteur vitesse de l'écoulement.
$\gamma$	.....	Rapport des chaleurs spécifiques.
u	.....	Composante horizontale du vecteur vitesse.
v	.....	Composante verticale du vecteur vitesse.
V	.....	Module du vecteur vitesse de l'écoulement.
A	.....	Aire d'une section de la tuyère.
P	.....	Pression de l'écoulement.
$\rho$	.....	Masse volumique de l'écoulement
T	.....	Température de l'écoulement.
$\Pi$	.....	Débit massique.
$\phi$	.....	Angle polaire d'un point de la aroi par rapport au 'Lip'.
L	.....	Longueur de la tuyère.
r	.....	Constante thermodynamique du gaz.
R	.....	Rayon d'une section de la tuyère.
$\psi$	.....	Déviatiion du ' Lip ' par rapport à la vertical.
x y	.....	Coordonnées cartésienne d'un point.
t	.....	Epaisseur du matériau utilisé

### Les indices

s	.....	Section de sortie
E	.....	Rentrée du col
*	.....	Condition critique.
c	.....	Condition au col.
m	.....	Concernant le matériau.
arc	.....	Concenant un arc du corps central
PLUG	.....	Concernant le corps central.

# Table des matières

Dédicaces .....	I
Remerciements .....	II
Résumé .....	III
Liste des figures .....	IV
Liste des tableaux .....	VI
Liste des symboles .....	VII
Table des matières .....	VIII
<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I      Généralités sur les tuyères supersoniques</b> .....	<b>3</b>
1.1 Ecoulement dans une tuyère .....	3
1.1.1 Hypothèses .....	3
1.1.2 Equations de la conservation .....	4
1.1.3 Etude de l'écoulement dans tuyère .....	5
1.1.4 Débit massique .....	9
1.2 Rôle et utilisation d'une tuyère .....	10
1.2.1 Moteur fusée .....	10
1.2.2 Moteur d'avion .....	10
1.2.3 Soufflerie .....	11
1.3 Définitions importantes .....	11
1.3.1 Nombre de Mach .....	11
1.3.2 Angle et ligne de Mach .....	12
1.3.3 Onde de choc .....	13
1.4 Détente de Prandtl-Meyer .....	14
1.5 Différentes formes de tuyères .....	17
1.5.1 Tuyère conique .....	17
1.5.2 Tuyère à zone d'expansion .....	17
1.5.3 Tuyère à détente centrée .....	18
1.5.4 Tuyère à corps central .....	18
1.6 Régimes supersoniques de l'écoulement .....	19
1.6.1 Régime sur adapté .....	19
1.6.2 Régime adapté .....	20
1.6.3 Régime sous adapté .....	20
1.7 Aperçu sur l'atmosphère .....	21
1.7.1 Différentes couches de l'atmosphère .....	21
1.7.2 Modèles sur l'atmosphère .....	22
<b>Chapitre II      Conception des tuyères à corps central                          type à bouchon 'Plug Nozzle'</b> .....	<b>24</b>
II.1 Hypothèse fondamentales .....	27
II.2 Présentation de la méthode .....	27
II.2.1 Discrétisation .....	30
II.2.2 Procédé de calcul .....	35

II.2.3 Paramètres thermodynamiques .....	38
II.3 Longueur et masse de la tuyère .....	39
II.4 Force de pression exercée sur la paroi .....	42
<b>Chapitre III      Résultats et Discussion .....</b>	<b>45</b>
III.1 Effet de la discrétisation sur la convergence du problème .....	50
III.2 Variation du nombre de Mach $M_S$ de sortie pour $\gamma$ fixé .....	52
III.3 Variation des paramètres pour $\gamma$ fixé .....	54
III.3.1 Variation du rapport $P/P_0$ le long de la paroi de la tuyère .....	54
III.3.2 Variation du rapport $T/T_0$ le long de la paroi de la tuyère .....	55
III.3.3 Variation du rapport $\rho/\rho_0$ le long de la paroi de la tuyère .....	56
III.3.4 Variation de nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère .....	57
III.3.5 Variation de l'inclinaison de la paroi du corps central .....	57
III.4 Variation de $\gamma$ pour $M_S$ fixé .....	59
III.5 Résultats numériques et graphiques du dimensionnement .....	60
III.5.1 Variation du rapport $\frac{L}{\lambda_E}$ en fonction de $M_S$ .....	64
III.5.2 Variation du rapport $\frac{\text{Masse}}{\rho \cdot \lambda_E}$ en fonction de $M_S$ .....	65
III.5.3 Variation de l'angle $\Psi$ en fonction de $M_S$ .....	66
III.5.4 Variation du rapport $\frac{X_{\text{PLUG}}}{\lambda_E}$ en fonction de $M_S$ .....	68
III.5.5 Variation de l'angle $\varphi_E$ en fonction de $M_S$ .....	69
III.5.6 Variation de l'angle $\theta'$ en fonction de $M_S$ .....	70
III.5.7 Variation du rapport $\frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$ en fonction de $M_S$ .....	71
III.5.8 Variation du rapport $\frac{R_S}{\lambda_E}$ en fonction de $M_S$ .....	72
III.6 Idée de troncation de la tuyère .....	73
III.7 Comparaison avec d'autres types de tuyère .....	74
<b>Conclusion .....</b>	<b>80</b>
<b>Références .....</b>	<b>82</b>

## Introduction

L'aérodynamique numérique, c'est à dire, l'étude du problème de l'aérodynamique par voie numérique, est un domaine de recherche relativement récent. Les aérodynamiciens soulèvent la question de savoir si ce domaine de recherche devrait être considéré comme théorique ou bien expérimentale. Ils estiment toutes que, l'aérodynamique numérique constitue en fait une discipline spécifique, mais qui présente des points communs avec l'aérodynamique théorique, en raison des nombreux essais numériques nécessaires pour pallier aux insuffisances de la connaissance des méthodes de calcul. Depuis une vingtaine d'années, on peut dire que l'aérodynamique numérique a perdu beaucoup de son caractère empirique grâce aux efforts convergents des mathématiciens pour résoudre les problèmes mathématiques liés aux méthodes de calcul en aérodynamique et les aérodynamiciens pour mieux analyser les algorithmes qu'ils mettent en œuvre. On peut partager l'aérodynamique en deux branches essentielles, aérodynamique externe et interne. Cette dernière est spécialisée dans l'étude des écoulements internes des fluides, telle que les moteurs fusées, les moteurs d'avions et les tuyères. L'autre branche est consacrée à l'étude de l'écoulement en présence de l'air libre, telle que les écoulements autour des profils d'ailes.

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles, les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques réels.

Les tuyères supersoniques planes et axisymétriques générant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie sont d'un grand intérêt dans les applications aéronautiques. Si on veut réaliser expérimentalement un écoulement supersonique autour d'un profil d'aile, il faut modéliser l'écoulement aux frontières qui doit être uniforme et en particulier en amont du profil. Pour cela, un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie est désiré.

Dans les moteurs fusées, l'organe tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dont le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Dans le cas d'un écoulement parallèle à la section de sortie de la tuyère, les pertes de poussée sont nulles. Par conséquent, la poussée délivrée par le moteur est complètement utilisée pour la propulsion et s'il est uniforme à la section de sortie, les paramètres de l'écoulement sont constants et la variation de la quantité de mouvement est égale à  $\Pi_s V_s$ . Pour ces deux applications essentielles, la tuyère doit fonctionner en régime adaptée.

Le but de ce modeste travail est de développer un programme permettant de calculer et tracer convenablement les profils des tuyères supersoniques planes très récentes qui sont nommées tuyères à corps central par une méthode proposée par le

promoteur dans le cadre de l'hypothèse d'un gaz parfait au dessous de la température de dissociation, qui donna un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, comme la suite du travail présentée dans la référence [6]. La tuyère est appelée pour certains auteurs par tuyère à bouchons (en anglais 'Plug Nozzle').

Le problème posé est de dimensionner ce type de tuyère pour présenter aux lecteurs qu'il présente comme solution aux problèmes de poids lors de la conceptions des engins aérospatiaux. Pour arriver à notre but, on a réalisé ce travail composé par trois chapitres essentiels, dont la séquence trace l'objectif assigné.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement dans une tuyère d'une manière général accompagné par un bref historique sur le développement du domaine des tuyères ainsi que la présentation de quelques notions fondamentales indispensables pour l'étude de la conception d'une tuyère dans le domaine supersonique avec un aperçu sur l'étude de l'atmosphère

Dans le deuxième chapitre, on a préféré de présenter la méthode développée théoriquement qui est basée sur la détente de Prandtl Meyer ainsi que le procédé numérique de calcul sous la considération de quelques hypothèses de base

Le troisième chapitre est consacré à la description du programme globale réalisé, suivi par la présentation des résultats numériques obtenus par le programme et la comparaison avec la théorie, et démonstration par les graphes, l'efficacité et la réponse de ce type de tuyère par rapport aux tuyères conventionnelles de points de vue, la masse, la longueur et la force de pression délivrée.

En fin une conclusion clôturant le travail réalisé et suivi par quelques travaux de futur comme la poursuite de cet axe de recherche dans le domaine de l'aérodynamique interne ou la propulsion.

# Chapitre I

## Généralités sur les tuyères supersoniques

Une tuyère est un organe mécanique passif qui met en communication deux réservoirs à des pressions différentes et dont le profil doit permettre un écoulement adiabatique réversible.

### I.1 Ecoulement dans une tuyère

Pour les applications aéronautiques, le réservoir amont est généralement la chambre de combustion, dont il faut connaître en premier lieu, avant faire l'étude de l'écoulement dans la tuyère, la température et la pression  $T_0$  et  $P_0$  ainsi que la vitesse  $V_0$  de cette chambre qui sont appelées les conditions génératrices. Si par exemple, la pression varie dans la tuyère de la valeur  $P_0$  à une valeur nulle dans le sens de l'écoulement, il faut que le profil soit convergent puis divergent et que la section de sortie soit infinie. la section d'entrée sera elle même infinie si la vitesse d'entrée est nulle. Il est possible d'étudier l'écoulement de gaz à travers une tuyère, dont le rôle de cette dernière est d'accélérer les gaz à une vitesse très élevée à fin de produire une force de poussée comme une résultante de cette accélération. La forme générale d'une tuyère est présentée dans la figure (I.2a).

#### I.1.1 Hypothèses

La résolution du problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques consiste à résoudre simultanément les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement axiale et radiale et de l'énergie. Notons que ces équations sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas connue a priori, étant donné encore que le profil de la tuyère est lui même inconnu et recherché. A ce titre, le calcul se fait sur la base des hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est entièrement établi (stationnaire).
2. Les forces à distances, telle que, l'effet de la pesanteur, les interactions entre les particules de fluide sont négligées et les forces extérieures de source électrique et magnétique sont absentes.
3. Le gaz est parfait. Cependant, le volume occupé par les molécules du gaz est supposé nul, ce qui implique que l'effet de la viscosité est négligé.
4. Le gaz est thermiquement parfait. Cependant, la variation ou l'augmentation de la température ne permet pas la dissociation des molécules.
5. Le gaz est calorifiquement parfait. Ce qui donne que  $c_p$  et  $\gamma$  restent constantes durant la détente du gaz et ne dépendent pas de la température.
6. L'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc
7. L'écoulement est idéal. Le transfert de chaleur par conduction entre les différentes particules de gaz négligé.
8. L'écoulement est irrationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.

9. Le transfert de chaleur forcé par convection ou rayonnement avec la paroi de la tuyère est absent.

### I.1.2 Equations de la conservation

Les équations générales du mouvement d'un fluide sont essentiellement les équations de conservations qui découlent des lois fondamentales de la dynamique. Dans la réalité, on ajoute à ces équations de conservation, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation d'état du gaz considéré [1], [5] et [6].

#### A°) Equation de continuité

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. L'augmentation de masse pendant un certain temps du fluide contenu dans un volume donné doit être égale à la somme des masses du fluide qui y entrent diminuées de celles qui en sortent. Elle représente encore la différence des débits massiques qui entrent et sortent du volume considéré. Pour un mouvement conservatif et permanent, elle est donnée par :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.1)$$

#### B°) Conservation des quantités de mouvements

Cette équation est un principe de la mécanique Newtonienne qui se traduit par l'équation de conservation de quantité de mouvement. Pour un fluide parfait en écoulement permanent et en négligeant les forces de volumes, elle est nommée par équations d'EULER, données par deux équations suivant les deux axes de coordonnées  $x$  et  $y$  respectivement par :

$$\frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

#### C°) Conservation de l'énergie

Pour un gaz parfait en écoulement permanent isentropique et en l'absence de travail des forces extérieures (travail des forces internes est nul), et en négligeant l'énergie potentielle, le premier principe énoncé sous sa forme la plus générale se réduit à :

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \quad (1.4)$$

avec :  $V^2 = u^2 + v^2$   
et  $a = \sqrt{\gamma r T}$

Cette équation est valable suivant une ligne de courant.

### D°) Equation d'état d'un gaz parfait

L'équation d'état d'un gaz parfait est donnée par :

$$\frac{P}{P_0} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]^\gamma \quad (1.5)$$

ou par  $P = \rho r T$

Ce système est constitué de cinq équations avec cinq inconnues ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $P$ ,  $T$ )

### I.1.3 Etude de l'écoulement dans une tuyère

On commence l'étude de l'écoulement dans une tuyère par la présentation d'une équation très importante relie le nombre de Mach avec le rapport des sections de la tuyère à la section du col sonique trouvée à partir des équations de conservations et l'état [1]. Cette équation s'écrit :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right] \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (1.6)$$

Elle implique que :

- $M = f\left(\frac{A}{A_*}\right)$  : le nombre de Mach à une section dépend du rapport de cette section à la section du col sonique.
- La section  $A$  doit être supérieure ou égale à  $A_*$ . Le cas où  $A < A_*$  est physiquement impossible dans un écoulement isentropique.
- Le rapport  $\frac{A}{A_*} > 1$  donne deux solutions de  $M$  pour  $\frac{A}{A_*}$  donné, une valeur subsonique et l'autre supersonique. La figure (I.1) suivante illustre la variation du rapport  $\frac{A}{A_*}$  en fonction du nombre de Mach  $M$  d'une façon générale.

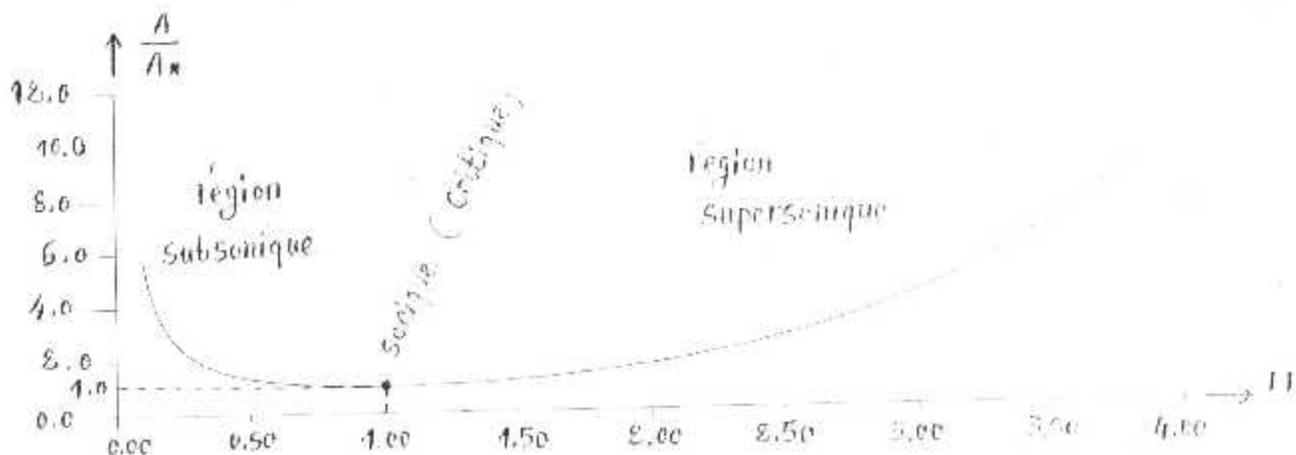


Figure (I.1) Variation du rapport des sections en fonction du  $M$  pour  $\gamma = 1.40$

- Pour des valeurs de  $M$  subsonique, si  $M$  augmente, le rapport  $\frac{A}{A_*}$  diminue, la tuyère converge jusqu'à  $M=1$ ,  $\frac{A}{A_*}=1$
- Pour des valeurs de  $M$  supersoniques, si  $M$  augmente, le rapport  $\frac{A}{A_*}$  augmente, la tuyère diverge.

Ces résultats sont consistants avec la discussion physique des tuyères convergentes divergentes. Considérons maintenant une tuyère convergente divergente illustrée dans la figure (I.2a). Supposons que le rapport des sections à l'entrée  $\frac{A}{A_*}$  soit très grand et que l'écoulement est alimenté à partir d'un certain réservoir de gaz (chambre de combustion) tel que l'écoulement est stationnaire. D'après la relation (I.6), le nombre de Mach subsonique de la section d'entrée est très petit,  $M_e \approx 0.0$ , la pression et la température à cette section sont  $P_0$  et  $T_0$  respectivement.

Supposons maintenant qu'on ait une détente isentropique de gaz à travers cette tuyère jusqu'au nombre de Mach  $M_s = M_{s,6}$  à la section de sortie, la pression correspondante est  $P_{s,6}$ . La distribution de la section de la tuyère,  $A=A(x)$  est donnée. Pour cette détente, l'écoulement est sonique au col, ( $M=1$  et  $A_c=A_*$ ). Les propriétés de l'écoulement dans la tuyère sont fonctions du rapport des sections  $\frac{A}{A_*}$  et sont obtenues par :

1. Le nombre de Mach local est fonction de  $x$  et il est obtenu à partir de l'équation (I.6), sa distribution le long de l'axe de la tuyère est illustrée dans la figure (I.2b).
2. Les variations de  $P$ ,  $T$  et  $\rho$  peuvent être obtenues respectivement à partir des équations [1] et [5] et sont données par :

$$\frac{P}{P_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (I.7)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (I.8)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (I.9)$$

Les distributions de  $\frac{P}{P_0}$  et  $\frac{T}{T_0}$  sont présentées respectivement dans les figures (I.2c) et (I.2d). D'après ces variations, pour une détente isentropique, le nombre de Mach croît à partir du voisinage de zéro à l'entrée jusqu'à  $M=1$  au col et jusqu'à une valeur supersonique  $M_{s,6}$  à la sortie. La pression diminue à partir de la valeur d'entrée  $P_0$

jusqu'à  $0.528 P_0$  (pour  $\gamma=1.40$ ) et jusqu'à  $P_{s,6}$  dans la section de sortie. La température diminue à partir de  $T_0$  de l'entrée jusqu'à  $0.833 T_0$  au col et une valeur minimale  $T_{s,6}$  à la section de sortie.

Si on veut produire un écoulement supersonique isentropique, la pression de sortie  $P_s$  doit être inférieure à la pression d'entrée  $P_0$ . Autrement dit, le rapport

$$\frac{P_s}{P_0} = \frac{P_{s,6}}{P_0} < 1.$$

Si le rapport  $\frac{P_s}{P_0}$  est différent de la valeur isentropique, l'écoulement à l'intérieur ou à l'extérieur de la tuyère devrait être différent à celui présenté dans la figure (I.2).

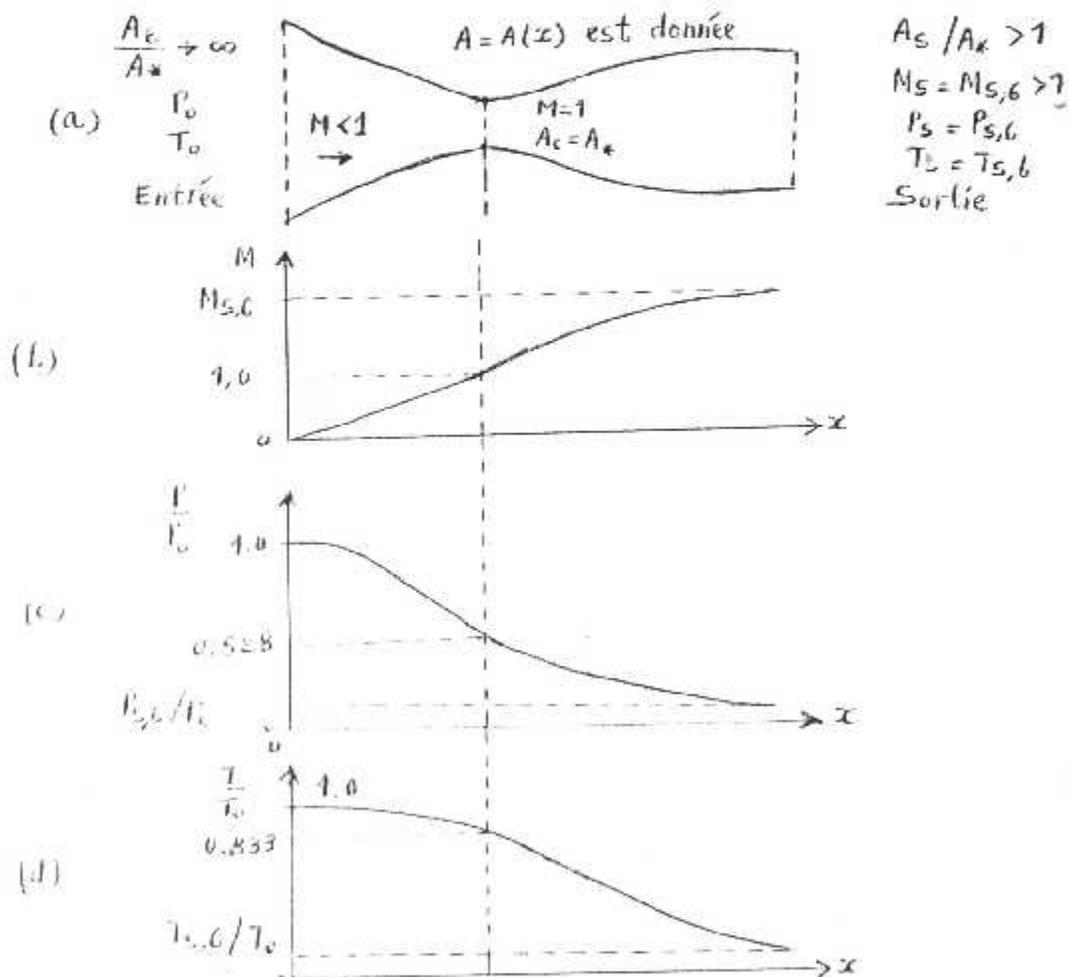


Figure (I.2) Ecoulement supersonique isentropique dans une tuyère

Examinons le type d'écoulement où  $\frac{P_s}{P_0}$  est différent de la valeur isentropique pour  $M_{s,6}$ . Considérons une tuyère convergente-divergente comme celle représentée dans la figure (I.3a).

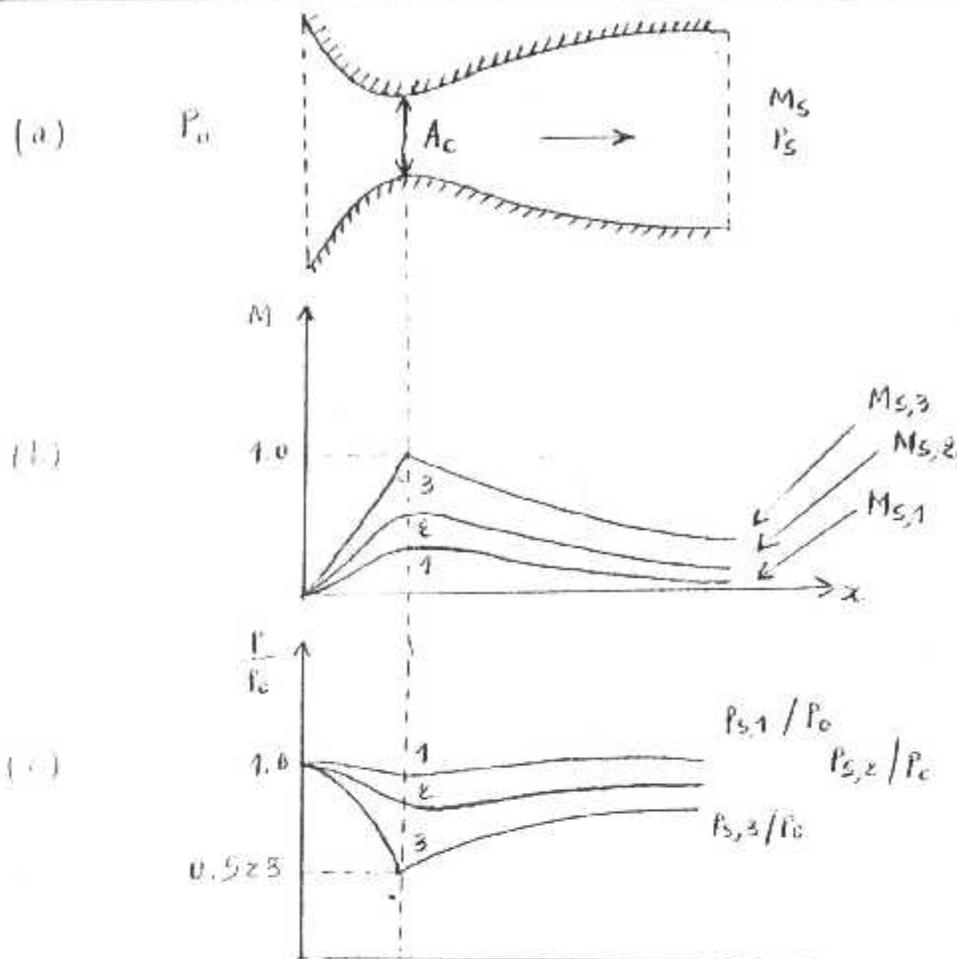


Figure (I.3) Ecoulement subsonique dans une tuyère

Si  $\frac{P_s}{P_0} = 1$ , il n'y a pas de différence de pression, et par conséquent, il n'y a aucun écoulement de fluide.

Supposons maintenant que  $P_s$  diminue instantanément au dessous de  $P_0$ , telle que  $\frac{P_s}{P_0} = 0.999$ . Cette petite différence peut produire une petite vitesse subsonique à l'intérieure de la tuyère. Le nombre de Mach augmente légèrement à travers la partie convergente, atteint une valeur maximale au col, comme le présente la courbe 1 dans la figure (I.3b). Ce nombre de Mach au col n'est pas sonique mais a plutôt une valeur subsonique. Après le col, le nombre de Mach local diminue dans la section divergente, atteint une valeur finie  $M_{s,1}$  dans la section de sortie. La pression dans le convergent diminue de  $P_0$  à la section d'entrée jusqu'à une valeur minimale au col, ensuite augmente jusqu'à la valeur  $P_{s,1}$  à la sortie. Cette situation est décrite par la courbe 1 de la figure (I.3c), et l'écoulement est subsonique partout dans la tuyère. Dans ce cas, la section  $A_c$  est différente de  $A^*$ . Cependant, pour un écoulement purement subsonique, on a :  $A_c > A^*$ .

Supposons que l'on diminue encore la pression de sortie comme dans la figure (I.3), notée par la valeur  $P_s = P_{s,2}$ . L'écoulement maintenant est illustré par la courbe 2 de la figure (I.3). L'écoulement reste toujours subsonique et le nombre de Mach maximal au col augmente, mais reste inférieure à l'unité.

Maintenant, supposons que  $P_s$  soit réduite encore à une valeur  $P_s = P_{s,3}$ , tel que l'écoulement atteint les conditions critiques au col. Cela est présenté par la courbe 3 de la figure (I.3). Les conditions au col sont :

$$M = M_c = 1$$

$$\frac{P_c}{P_0} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{T_c}{T_0} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{-1}$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{-1}{\gamma - 1}}$$

L'écoulement dans la partie divergente est subsonique. En comparant les figure (I.2) et (I.3), pour une tuyère de géométrie donnée, nous voyons qu'il ya uniquement une seule solution donnant un écoulement supersonique isentropique et représentée dans la figure (I.2). Par contre, il ya un nombre infini de solutions d'écoulements subsoniques, avec chaque cas correspondant à une valeur de  $P_s$ , telle que  $P_0 \geq P_s \geq P_{s,3}$ .

#### I.1.4 Débit massique

Considérons le débit massique à travers une tuyère convergente divergente illustrée dans la figure (I.3). Le débit massique  $\Pi$  peut être calculer par l'application de l'équation de continuité au col, par :

$$\Pi = \rho_c V_c A_c \quad (I.10)$$

D'après la figure (I.3), si  $P_s$  diminue,  $V_c$  augmente et  $\rho_c$  diminue. Le pourcentage d'augmentation de  $V_c$  est beaucoup plus grand que la diminution de  $\rho_c$ . Comme résultat, le débit  $\Pi$  augmente [1].

Si  $P_s$  est encore réduite au dessous de  $P_{s,3}$ , le nombre de Mach  $M_c$  au col ne peut dépasser l'unité. En conséquence, le débit reste constant quelque soit  $P_s < P_{s,3}$ , comme le montre la figure (I.4). Cette valeur est [1] :

$$\Pi = A_c P_0 \left[ \frac{\gamma}{r T_0} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (I.11)$$

Ce phénomène est appelée 'Bloquage sonique' ou 'amorçage de la tuyère'. Pour un écoulement isentropique, les valeurs totales  $P_0$ ,  $T_0$  et  $\rho_0$  restent constantes durant l'écoulement.

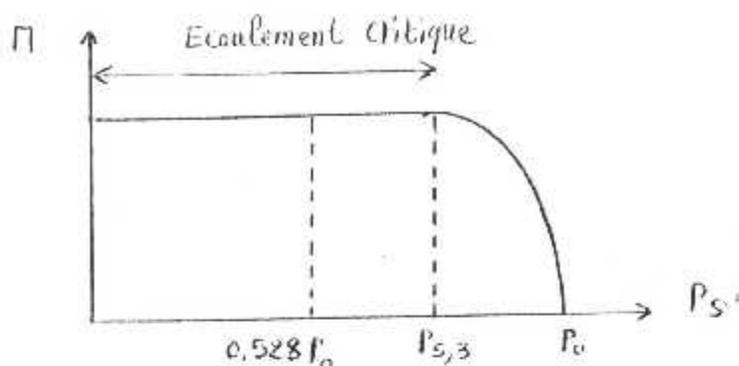


Figure (1.4) Variation du débit avec la pression de sortie ; illustration de l'écoulement critique.

## 1.2 Rôle et utilisation de la tuyère

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs fusée et missile, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques [4].

### 1.2.1 Moteur fusée

Dans les moteurs fusées, l'organe tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dont le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Notons ici que la structure d'un missile est constituée par la chambre de combustion et la tuyère et que cette dernière constitue environ de 70% de la masse totale d'une chambre propulsive.

### 1.2.2 Moteur d'avion

Le progrès majeur qui a été réalisé en aviation au cours de ce siècle, sans doute est l'avènement du vol supersonique, qui a ses debout n'a d'ailleurs pas provoqué un changement d'attitude immédiat chez les constructeurs, car le souci primordial pour les premiers avions supersoniques militaires c'est d'assurer de bonne conditions de vol subsonique ou transsonique de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de sur détente à ces vitesses modérées.

La rentabilité de tels projets n'est assurée que si les performances optimales sont obtenues de tous les éléments du moteur, dans tels projets le rôle assigné à la tuyère est définie de la façon suivante :

- Elle doit assurer la détente optimale des gaz de combustion, c'est-à-dire, la poussée maximale du régime de croisière. Ce problème est délicat, car la section

de sortie doit être raccordée au maître couple du moteur, ou la structure de l'avion par carénage.

- La tuyère doit assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement par la variation de la surface au col en fonction du débit et des conditions de températures et de pression des gaz à évacuer.
- Au régime du vol intermédiaire, la tuyère ne doit pas provoquer des pertes de poussée trop élevées du fait de son inadaptation.
- Elle doit contribuer au freinage de l'avion à la phase d'atterrissage et à l'atténuation du bruit.

### 1.2.3 Soufflerie

Une soufflerie permet de créer un courant d'air artificiel. Il existe plusieurs type de souffleries, mais d'une façon générale une soufflerie se compose de trois parties principales :

- Le collecteur ou le convergent
- La chambre d'expérience
- Le diffuseur ou divergent : que l'air traverse à sa sortie de la chambre d'expérience, en direction de ventilateur qui l'aspire et le rejète ensuite à l'extérieur. Le diffuseur à la forme d'un tronc de cône dont la section va en augmentant ; ainsi la vitesse du courant d'air se réduit progressivement jusqu'aux pale de ventilateur mû par un moteur électrique.

Parmi les roles d'une soufflerie, est de faire la simulation des écoulements réels mais sur des prototypes à echelles réduit. Pour arriver à ça, il faut modéliser l'écoulement à la sortie de la tuyère qui doit être uniforme et parrallèle comme l'air libre de l'atmosphère

## 1.3 Définitions Importantes [2-4, c]

### 1.3.1 Nombre de Mach

Il est définit comme le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse de propagation de l'onde sonore (vitesse de son) par :

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.12)$$

Avec :

V : vitesse de l'écoulement  
a : vitesse du son

Telle que la vitesse du son peut se calculer par la relation suivante :

$$a = \sqrt{\gamma r T} \quad (1.13)$$

ou

$\gamma$  : Rapport des chaleurs spécifiques  
 $r$  : Constante du gaz parfait.  
 $T$  : Température de l'écoulement

### I.3.2 Angle et ligne de Mach

On observe expérimentalement dans un écoulement supersonique la formation des lignes, plus précisément deux lignes droites faisant un angle  $\mu$  de part et d'autre du vecteur vitesse comme le montre la figure (I.5). Ces lignes sont appelées **lignes de Mach** et l'angle formé entre cette ligne et le vecteur vitesse est appelé **angle de Mach** désigné par  $\mu$ . On peut démontrer que la valeur de l'angle  $\mu$  est donnée par :

$$\mu = \arcsin \left| \frac{1}{M} \right| \quad (I.14)$$

Il est clair d'après la relation (I.14) que ces lignes de Mach ne se trouvent que si  $M \geq 1$ , c'est à dire, dans le régime supersonique, pour que  $0 \leq \frac{1}{M} \leq 1$  afin qu'il existe une valeur réelle de  $\mu$  donnée par :

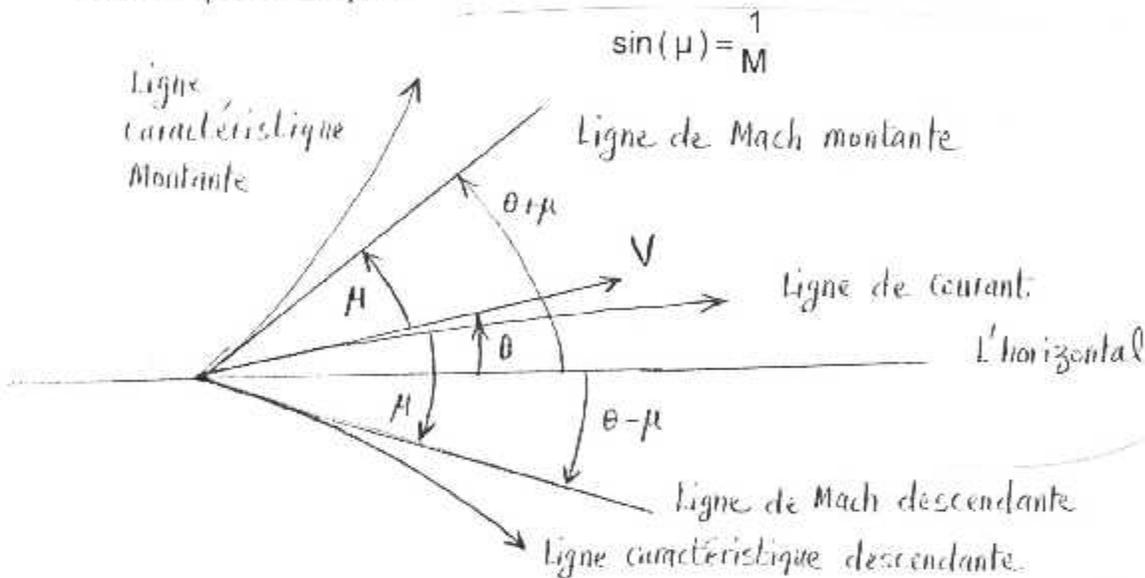


Figure (I.5) Illustration des lignes de Mach et de caractéristiques

On peut présenter graphiquement la relation existante entre le nombre de Mach et l'angle de Mach  $\mu$  par la figure (I.6) suivante :

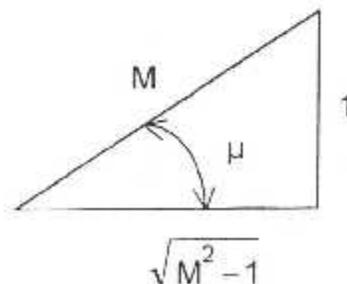


Figure (I.6) Illustration de la relation entre  $\mu$  et M

### I.3.3 Onde de choc

Une onde de choc est une zone d'accumulation de perturbation élémentaires où les phénomènes physiques sont extrêmement violents [1], [2], [3], [4] et [5]. A travers cette zone d'épaisseur très faible (de l'ordre de  $1/10000$  m), il en résulte une discontinuité de pression, température, masse volumique et vitesse.

Les ondes de choc se développent lorsqu'un écoulement décélère rapidement en réponse à une augmentation successive de la pression ou encore, lorsque l'écoulement change de direction ce qui en résulte une variation très rapide des caractéristiques de l'écoulement qui s'effectue sur une distance extrêmement courte, de telle sorte que l'onde de choc apparaît comme une discontinuité séparant des écoulements amont est aval continue. Il y a deux type d'onde de choc :

- L'onde de choc droite
- L'onde de choc oblique

#### A°) Onde de choc droite (normale)

La vitesse de propagation d'une onde de choc dépend des conditions de pression et de densité de part et d'autre du choc. Dans le cas où le vecteur vitesse est perpendiculaire au front du choc on parle d'une onde de choc droite ou normale.

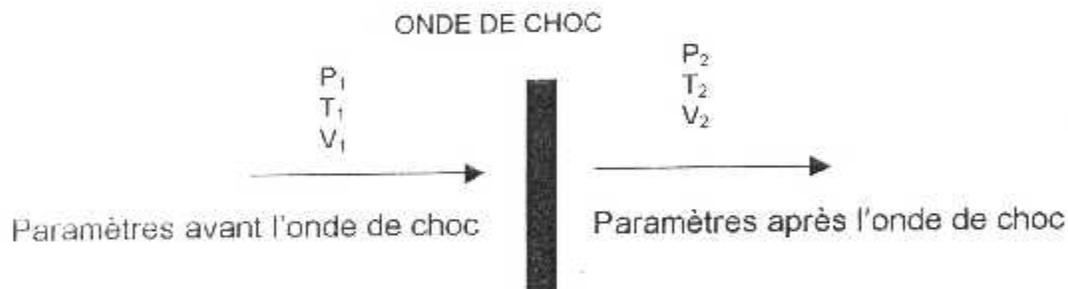


Figure (I.7) Illustration d'une onde de choc normale

#### B°) Onde de choc oblique

Plusieurs expériences ont prouvés l'existence des chocs obliques, soit à l'avant d'un obstacle placé devant un écoulement supersonique, soit lors de la variation brusque de la direction d'une paroi longée par un écoulement supersonique. L'écoulement ici trouve une certaine compression à travers l'obstacle ce qui provoque une décélération d'écoulement et en parallèle une augmentation de pression d'où naissance d'une onde de choc oblique. L'intensité du choc varie suivant inclinaison de la paroi et la vitesse. On peut parler ici d'une onde de choc attachée et d'autre détachée [1].



La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une petite déviation de l'écoulement  $\Delta\theta$  en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse  $\Delta v$ , qui se calcule d'après la figure (I.10) par :

$$V \Delta\theta \approx (V_n - V'_n) \cos(\mu) \quad (I.15)$$

$$\Delta V = V' \cos(\Delta\theta) - V \approx (V_n - V'_n) \sin(\mu) \quad (I.16)$$

Le rapport entre ces deux équations donne l'expression différentielle suivante :

$$d\theta = - \frac{dV}{V} \cotg(\mu) \quad (I.17)$$

D'après l'équation (I.14), on peut écrire :

$$\cotg(\mu) = \sqrt{M^2 - 1} \quad (I.18)$$

En insérant l'équation (I.18) dans l'équation (I.17), on obtient :

$$d\theta = - \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (I.19)$$

Notons que, l'angle  $d\theta$  est positif quand l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde de choc (onde de compression), et négatif quand l'écoulement se rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente). La différence de pression  $\Delta P$  de part et d'autre de l'onde est fournie par l'équation de Bernoulli. Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = \text{cte}$$

qui, sous forme différentielle devient :

$$\rho v dv = - dp \quad (I.20)$$

La combinaison des équations (I.19) et (I.20) donne :

$$dP = \rho V^2 \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} = \gamma P M^2 \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (I.21)$$

pour intégrer l'équation (I.19), il faut exprimer  $\frac{dV}{V}$  en fonction de  $M$ . Par différentiation

Logarithmique de la relation  $M = \frac{V}{a}$  et de l'équation d'énergie sous la forme :

$$\left[ \frac{a}{a_0} \right]^2 = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1}$$

On obtient respectivement :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{da}{a}$$

$$2 \frac{da}{a} = \frac{(\gamma-1) M}{\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]} dM$$

alors :

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \frac{dM}{M} \quad (I.22)$$

Par substitution de l'équation (I.22) dans (I.19), on obtient :

$$-d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]} \frac{dM}{M} \quad (I.23)$$

qui, L'intégration entre deux états 1 et 2 donne :

$$-(\theta_2 - \theta_1) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]} \frac{dM}{M} = v(M_2) - v(M_1) \quad (I.24)$$

où  $v(M)$  présente la fonction suivante :

$$v(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]} \frac{dM}{M}$$

qui donne, après intégration :

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} \right] - \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{M^2-1} \right]$$

Ceci est la fonction de Prandtl Meyer. La constante d'intégration est prise nulle puisque on a considéré l'intégrale à partir du nombre de Mach  $M=1$ . Alors, il faut noter ici que,

durant le calcul, il faut mesurer l'angle  $\nu$  par rapport au vecteur vitesse correspondant au nombre de Mach  $M=1$ .

## 1.5 Différentes forme de tuyères

Les tuyères sont des canaux d'éjection ayant pour rôle principale de transformer l'énergie de pression en énergie cinétique. Les profils de ces tuyères sont tels qu'ils se confondent avec une ligne de courant.

Au début, les tuyères ont été considérées comme étant des organes annexes. Leurs rôles consistaient essentiellement pour le cas d'un turboréacteur, d'assurer le fonctionnement du compresseur à un régime de vol donné et cela pour une adaptation convenable de sa forme géométrique. La nécessité d'atteindre des vitesses supersoniques pour des besoins, surtout militaires, les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leur consommation dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère [4], [5] et [6]. Citons, quelques formes les plus connues :

### 1.5.1 Tuyère conique

La tuyère conique possède une forme géométrique qui est facile à réaliser. Le convergent est constitué d'un simple tronc de cône, tel que le demi-angle du divergent pris entre  $12^\circ$  et  $30^\circ$ . L'angle du convergent est compris entre  $30^\circ$  et  $45^\circ$ . Il est raccordé au divergent par un arc de cercle de rayon  $R_c$ , tel que :  $0,5 R_c < R < 1,5 R_c$ .

Avec :  $R_c$  : Rayon du col de la tuyère.

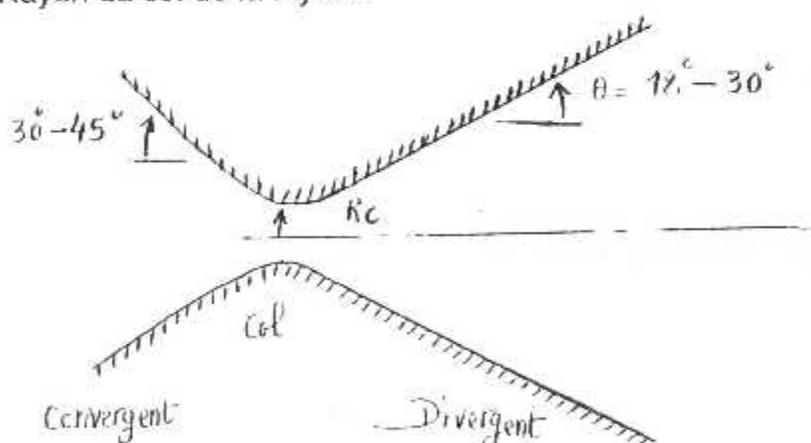


Figure (I.11) Tuyère conique

### 1.5.2 Tuyère à zone d'expansion

La forme de la zone d'expansion de la partie divergent, est un peu arbitraire. Typiquement, une forme d'arc circulaire de grand rayon, est utilisée dans les souffleries. A la sortie de la tuyère, l'écoulement devient uniforme et parallèle à l'axe de révolution comme indique la figure (I.12) suivante [4], [5] et [6] :

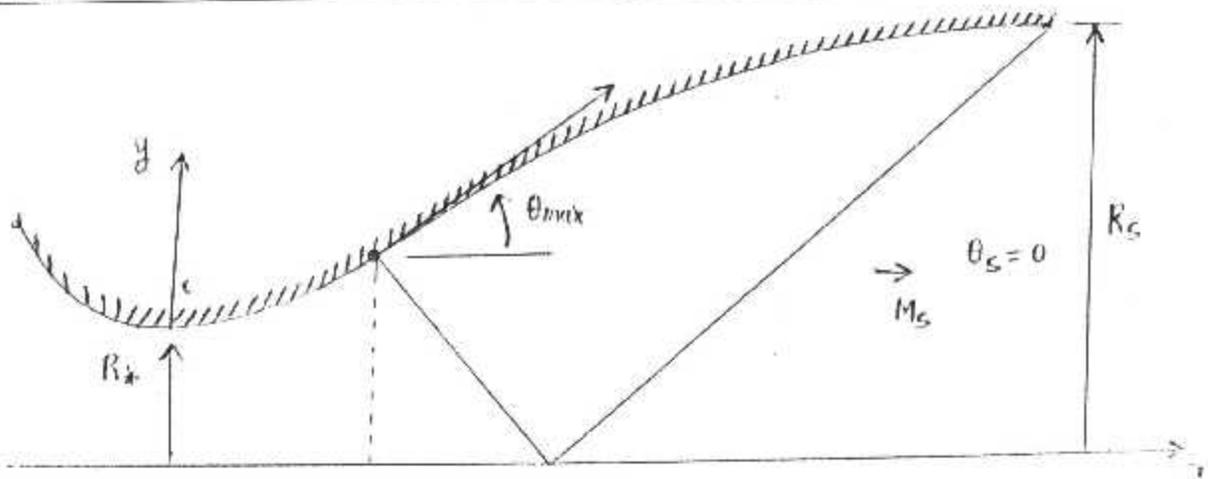


Figure (I.12) Forme de la tuyère à zone d'expansion

### I.5.3 Tuyère à détente centrée

Si la zone d'expansion est contractée en un point, la tuyère devient de type à détente centrée, où la détente prend place à travers des ondes de Prandtl Meyer centrées et générées à partir de coin du col de la tuyère avec un angle initial  $\theta^*$  comme le montre la figure (I.13) suivante [4], [5] et [6] :

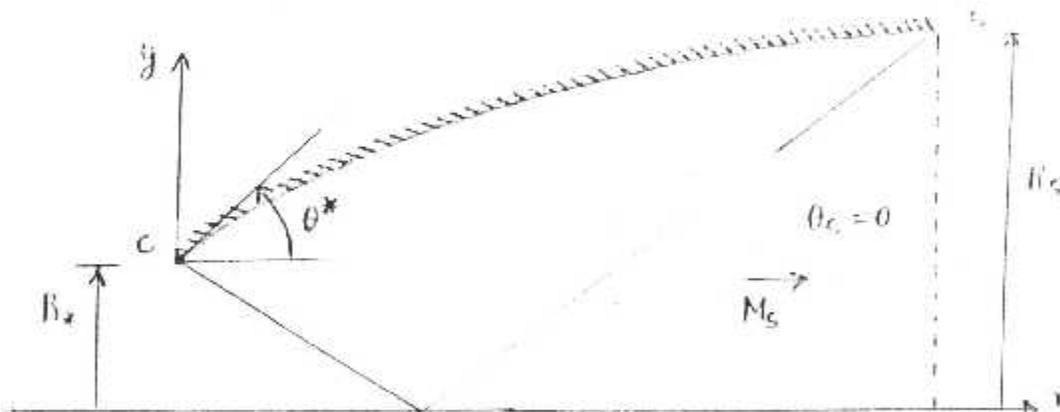


Figure (I.13) Forme générale d'une tuyère à détente centrée.

### I.5.4 Tuyère à corps central

Ce type de tuyère possédant un corps central et dont la chambre de combustion est directement reliée à la station du col, afin de réduire les pertes en poussée. L'écoulement qui traverse la chambre de combustion passe à travers la section où l'obstacle est placé. Il subit une détente s'effectuant entre un carénage externe supposé rectiligne et un corps profilé jusqu'à la pression ambiante. Ils sont très récents en applications. D'après la référence [4], on peut dire :

- Ces tuyères sont courtes en les comparant aux tuyères conventionnelles, telle qu'une tuyère à détente centrée par exemple.
- La chambre de combustion annulaire est très simple à fabriquer.

Elles sont appelées parfois par <sup>tuyères</sup> ~~tyères~~ à bouchon (en anglais 'Plug Nozzle'). Dans le cas général, on peut avoir deux configurations nommées par :

1. Tuyère à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' présentée dans la figure (I.14), qui est le but de la réalisation de ce modeste travail.
2. Tuyère à corps central type détente réflexion 'Expansion Deflexion Nozzle'

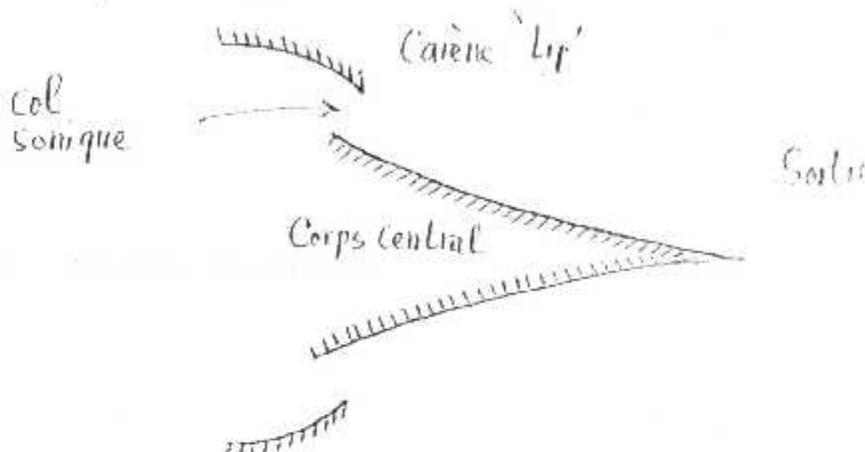


Figure (I.14) Forme d'une tuyère à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle'

## I.6 Régimes supersoniques de l'écoulement

Il est classique en propulsion de considérer qu'une tuyère soit adaptée à des conditions de vol données. Pour les missiles généralement on adapte la tuyère au niveau du sol (niveau de la mer). La notion d'adaptation d'une tuyère est quand la pression du jet dans la section de sortie de la tuyère est égale à la pression du milieu ambiant non perturbée. En général, on peut déterminer trois types différents de régimes décrit par la tuyère [4], [5] et [6].

### I.6.1 Régime sur adapté

C'est un régime en dehors des conditions d'adaptation. Si le fluide se détend à une pression inférieure à la pression extérieure  $P_a$ , la tuyère se trouve dans régime appelé régime sur adapté, régime sur détendu. La tuyère est appelée tuyère longue. Cette situation est présentée dans la figure (I.15). L'effort axial s'exerçant sur la paroi de la tuyère sera une traînée, donc la poussée totale va chuter. L'écoulement dans la tuyère est entièrement isentropique. Le rapport des sections  $\frac{A}{A^*}$  est plus grand que

celui de la détente complète. Le fluide se détend en plus dans la tuyère et devra être comprimé à l'extérieur pour rendre la pression compatible avec la pression ambiante. Cette compression prend place à travers une onde de choc attachée à la section de sortie. L'inclinaison du choc augmente avec l'augmentation de  $P_a$ .

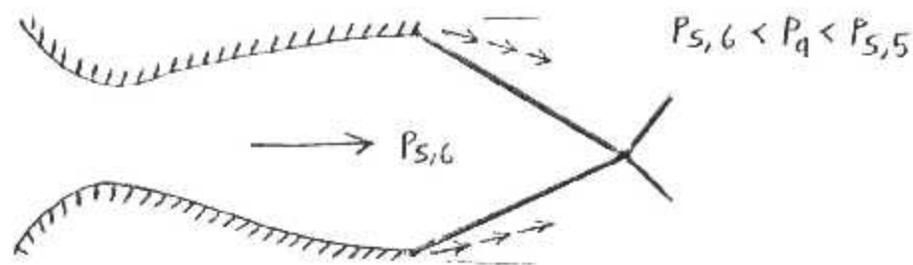


Figure (I.15) Présentation du régime sur adapté d'une tuyère

### I.6.2 Régime adapté

Une tuyère est dite adaptée, si à la sortie de celle-ci, la pression de sortie  $P_s$  est égale à la pression ambiante  $P_a$ . La poussée totale de propulsion née par la projection horizontale de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère est dans ce cas maximale. Cette situation est présentée dans la figure (I.16)

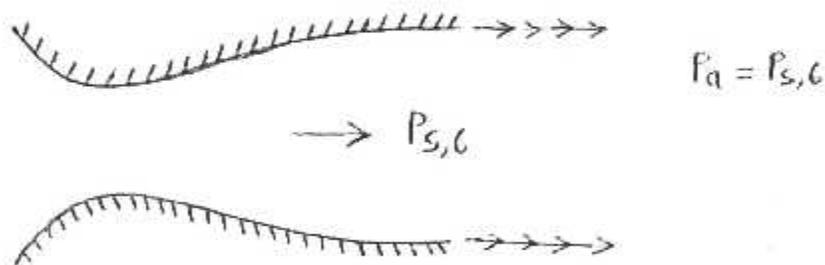


Figure (I.16) Présentation du régime adapté d'une tuyère

### I.6.2 Régime sous adapté

C'est un régime en dehors de l'adaptation des conditions de la tuyère. Si le fluide se décharge à une pression supérieure à celle de la pression extérieure  $P_a$ , la tuyère entre dans un régime appelé régime sous-détendue. Le rapport des sections  $\frac{A}{A^*}$  est petit par rapport à celui de la détente complète. La détente est par conséquent incomplète dans la tuyère et elle continuera à l'extérieur. Cette détente prend place d'un faisceau d'onde de détente centré et attaché à la section de sortie comme le montre la figure (I.17).

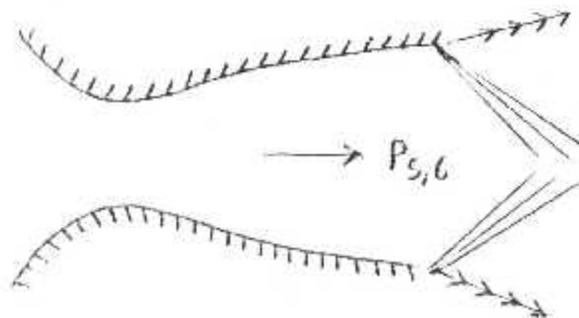


Figure (I.17) Présentation du régime sous adapté

## 1.7 Aperçu sur l'atmosphère

Pour faire les études sur les engins aéronautiques et spatiales, il est indispensable de savoir la variation des paramètres thermodynamiques en fonction de l'altitude dans le domaine de la possibilité du vol. Pour cela, on a préféré dans ce modeste travail d'éclaircir un peu sur ce domaine qui intéresse encore les météorologiste [8].

### 1.7.1 Différentes couches de l'atmosphère

L'atmosphère est divisée en plusieurs couches caractérisée par leurs structures thermique verticale. Nous ne retiendrons ici que les deux premières séparées pas une limite importante en météorologie aéronautique : **troposphère** et **stratosphère** séparées par la tropopause, avec un petit aperçu sur les autres couches qui sont :

- Mésosphère
- Ionosphère
- Thermosphère
- Exosphère

#### A°) Troposphère

Les limites de cette couche sont le sol et la surface tropopause (au dessus de 11000 m) : Entre ces limites, la température décrois en moyenne de 6 à 7°par km, jusqu'à la surface tropopause où la température est égale à  $-56,6^{\circ}\text{C}$  environ [4] et [6]. C'est une couche où il y a le vent ( mouvement d'air) et les nuages. La limite supérieure de la couche troposphère est appelée tropopause. Le niveau le plus bas à partir duquel la température diminue de moins de  $2^{\circ}\text{C}$  par 1000 m et ceci sur une épaisseur d'au moins 200m.

#### B°) Stratosphère

Elle s'étend de la tropopause vers 50 km, altitude où la température est redevenue progressivement voisine de  $0^{\circ}\text{C}$ . Cet échauffement progressive, à partir de la tropopause, est l'œuvre de la couche d'ozone ( concentration maximale vers 40 km ) dont la température s'élève par absorption des radiations ultraviolettes du soleil. De 12 km à 25 km, la température reste constante :  $T^{\circ} = \text{constante} = -56,6^{\circ}\text{C}$ .

#### C°) Mésosphère

C'est une couche atmosphérique qui s'étend entre la stratosphère et la thermosphère (de 40 Km à 80 km d'altitude environ ). La température diminue jusqu'à  $(-88^{\circ}\text{C})$  à l'altitude de 80 km.

#### D°) Thermosphère

C'est une couche atmosphérique supérieure à la mésosphère (de 80 km à 800 km environ) où la température croit régulièrement avec l'altitude, elle atteint les  $750^{\circ}\text{C}$ .

### E°) Exosphère

C'est une couche atmosphérique qui s'étend au-dessus de 1000 km environ, où les molécules les plus légères échappent à la pesanteur et s'élève lentement vers l'espace interplanétaire. Les avions actuels vols dans la tropopause.

La figure (I.18) résume les différentes couches de l'atmosphère en fonction de l'altitude. Une définition de l'atmosphère jusqu'à 47000 m est largement suffisante pour les besoins aéronautiques et actuels.

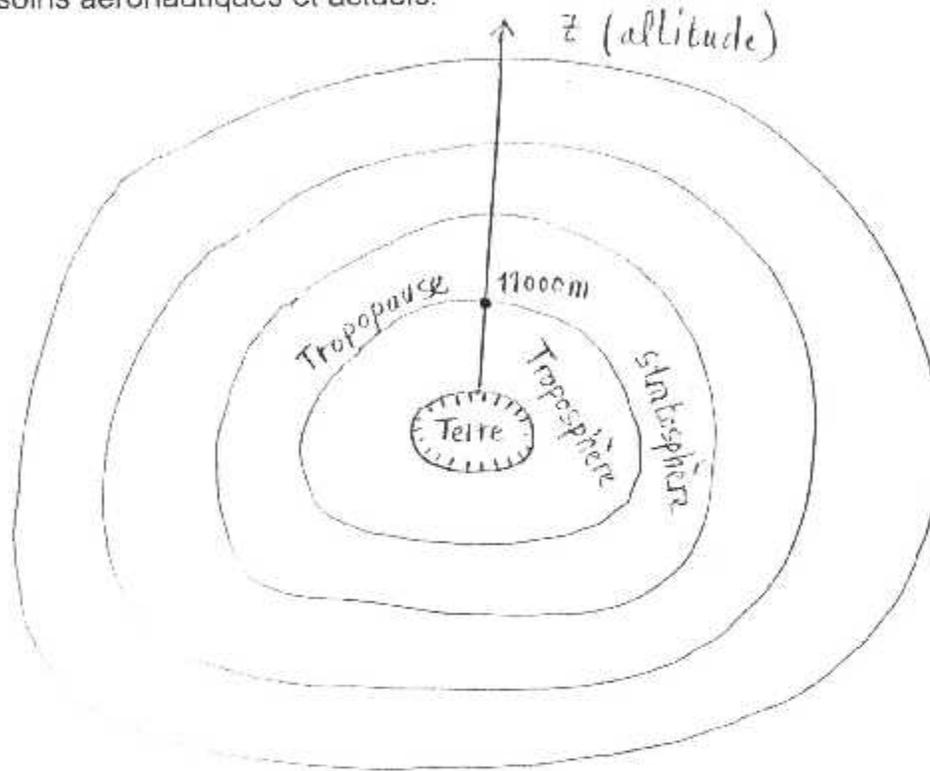


Figure (I.18) Différentes couches de l'atmosphère

### I.7.2 Modèles sur l'atmosphère

Les spécialistes dans le domaine de la météologie ont considérés l'atmosphère en plusieurs modèles. Citons les plus connus et utilisé.

#### A°) Atmosphère standard

L'atmosphère réelle est essentiellement variable et fluctuante (vents, courant, ...) qui est donc aussi la répartition en altitude des pressions, températures et masse volumiques. Au début de l'aviation, le besoin se fit sentir de définir une échelle stable à laquelle on pourrait rapporter les performances d'un avion. En effet, la résistance due à l'air, la sustentation, la puissance de propulsion varient avec la masse volumique de l'air et les performances réellement par un avion dépendent du temps qu'il fait. C'est dans ce but qu'on a défini en 1919 l'**atmosphère standard** ayant les caractéristiques suivantes :

- L'accélération  $g$  est constante et égale à sa valeur à Paris  $g = 9.98 \frac{m}{s^2}$  à l'altitude zéro, niveau de la mer.
- La pression est normale et égale à 76 mm de mercure (hg).
- La température égale à  $15^\circ C$  ( $T=288^\circ K$ ).
- La masse volumique de l'air  $\rho = 1.25 \frac{kg}{m^3}$ .
- A partir d'altitude  $z=0$  m à  $z=11000$  m (tropopause), on définit une couche d'air appelée troposphère où la température décroît linéairement suivant la loi :

$$T = 288 ( 1 - 0.000226 z ) \quad ( T \text{ en } ^\circ K, \quad z \text{ en mètre } )$$

- La température et la pression décroissent suivant des lois analogues à celle de l'atmosphère polytropic.
- Au delà de  $z = 11000$  m (stratosphère), la température reste constante et égale à  $-56,5^\circ C$  ( $216,5$  K°). La pression décroît alors suivant la loi isotherme.

### B°) Atmosphère réelle

L'atmosphère standard se rapproche des conditions moyennes de l'atmosphère réelle en France [8]. Cependant, il peut exister des écarts considérables entre les valeurs réelles et les valeurs standard. Ainsi dans les couches atmosphériques qui s'étendent jusqu'à quelques kilomètres d'altitude, la température réelle diminue régulièrement en général, c'est la troposphère dont le plafond a été fixé à 11000 m mais qui est susceptible de varier beaucoup : 7600 m aux pôles, 18000 m à l'équateur. A basse altitude, la température des couches d'air est directement influencée par le sol et les nuages, aussi se produit-il parfois une inversion de température : la température augmente avec l'altitude.

Au delà de la tropopause s'étend une région où la température varie peu et qui s'étend jusqu'à 30 000 m à 38 000 m. Sa température fixée à  $-56.5^\circ C$  peut également osciller entre  $-48$  et  $-69^\circ C$ . Les spécialistes mentionnent qu'ils ont relevés  $-92^\circ C$  à l'équateur. Il s'ensuit donc pour la pression et la masse volumique de très importantes variations.

La composition de l'air ne varie pratiquement pas avec l'altitude, aussi bien dans la troposphère que dans la stratosphère, sauf en ce qui concerne la vapeur d'eau qui disparaît à peu près complètement dans la stratosphère.

Les 9/10 de la masse atmosphérique se trouvent dans les 20 premiers kilomètres et les 99/100 dans les 60 premiers kilomètres.

Au-delà de 80 km, les propriétés de l'atmosphère sont encore assez mal connues et s'éloignent de celles des fluides habituels.

Les spécialistes font des nouveaux relevés et renouvellement des caractéristiques de l'atmosphère réelle chaque 10 ans à Paris.

## Chapitre II

### Conception des tuyères à corps central type à bouchon ( Plug Nozzle )

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important pour la conception des engins aérospatiaux. Les concepteurs aéronauticiens ont débutés les applications en 1935 par les tuyères coniques. A cette époque, toutes les études sont basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'a pas été encore commencé.

Après certaines années et en parallèle avec le développement expérimentales et numériques, les concepteurs ont pensés sur l'amélioration des performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqués que les tuyères coniques délivrent une certaine poussée mais avec une perte due à l'inclinaison de la portion supersonique qui est entre  $15^\circ$  et  $30^\circ$ . Donc, si l'inclinaison de la tuyère à la sortie est nulle, la poussée sera maximale. Ce problème sera réglé, si on cherche une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle. Les numériciens développent une méthode appelée méthode des caractéristiques afin de résoudre ce problème. Après un certain temps, ils ont trouvés plusieurs formes citons deux plus importantes, celle tuyère à détente centrée et l'autre à zone de détente. Depuis plusieurs années, les applications sont basées sur l'utilisation de ces deux formes surtout celle à détente centrée puis qu'elle pèse moins par rapport à la tuyère à zone d'expansion (détente).

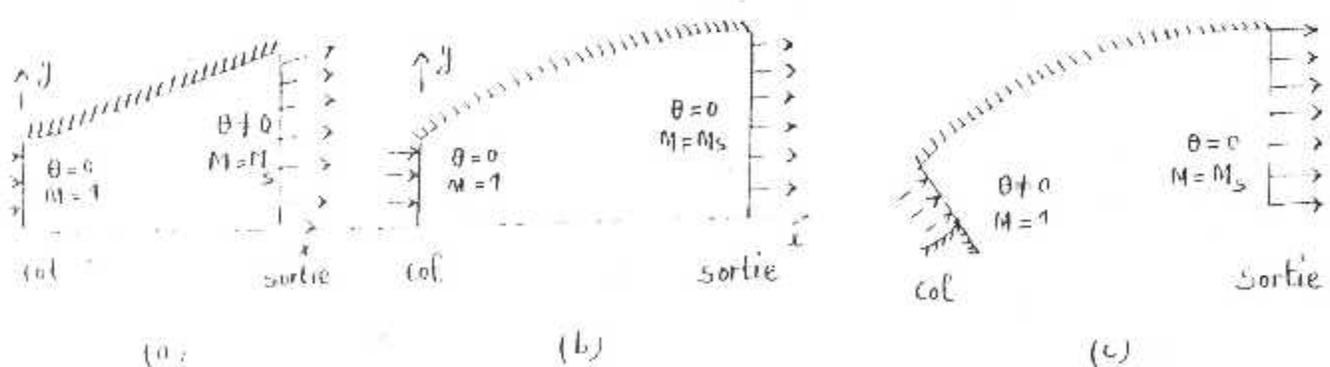
Jusqu'à maintenant, on a trouvé trois formes de tuyères répondant à la conception, chacune à ces inconvénients et ces avantages. On peut remarquer que les trois n'ont pas forcément la même masse si sont-elles utilisées pour la même délivrance de poussée. On peut poser maintenant une question basée sur la masse. Est ce qu'on peut trouver une forme plus performante pesant moins par rapport aux autres formes et qui délivre les mêmes performances thermodynamiques. Ici, on peut dire que cette question est intéressée par les concepteurs des missiles et des avions supersoniques. A titre information, pour les missiles, une chambre propulsive est constituée par deux parties, la tuyère et la chambre de combustion. L'organe tuyère, constitue environ 70% de la masse de la structure et quelle est formée par deux tranches, une partie convergente et l'autre divergente et que la partie convergente est indispensable et sert à faire la liaison entre la chambre de combustion et la partie divergente de la tuyère afin de donner un écoulement critique au col de la tuyère. Les concepteurs des souffleries n'ont pas ce problèmes puisque pour eux, l'essentielle est que la tuyère donne un écoulement uniforme et parallèle mais le plus important est que le gaz sortant doit être froid le plus possible. On peut dire ici, que le gaz utilisé influe sur la forme de la tuyère à conceptionnée, et par conséquent sur la masse de la tuyère. Avant de répondre à la question posée, on peut dire que l'écoulement à la rentrée du col et la sortie de la tuyère est horizontale pour toutes les formes mentionnées connues pour les concepteurs.

La théorie unidimensionnelle reste toujours valable pour vérifier le rapport des sections entre la sortie et le col afin de comparer le calcul numérique par la méthode

des caractéristiques. Le problème de calcul de l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est assez délicat puisque la forme de la tuyère est a priori inconnue. Autrement dit, il faut trouver en même temps, le calcul de l'écoulement et la forme de la tuyère. Concernant la tuyère convergente, il n'y a pas une forme meilleure par rapport à l'autre, l'essentielle est que cette partie a pour rôle de donner un écoulement critique au col et la forme divergente à pour rôle d'accélérer l'écoulement de  $M=1$  au col jusqu'à,  $M=M_s$  à la sortie. Il faut qu'il y a une certaine détente dans la tuyère pour accélérer l'écoulement et comme l'écoulement est horizontal au col et à la sortie, il faut une déviation de la paroi jusqu'à un certain angle maximal ce que l'on appelle une zone de détente ou d'expansion ensuite un redressement pour donner  $\theta=0$  à la sortie ce que l'on appelle zone de redressement. La longueur de la tuyère supersonique (partie divergente) dépend essentiellement de la longueur de la tuyère dans la zone d'expansion. Si on fait une inclinaison de l'écoulement au col au lieu d'être horizontal, il sera incliné d'un certain angle et gardant toujours uniformité de l'écoulement pour que la théorie 1D reste valable et on coupe la partie convergente en faisant la liaison directe entre le col de la tuyère et la chambre de combustion on obtient une nouvelle forme qui répond bien à la question posée auparavant. Ce type de tuyère est appelée tuyère à corps central et qui est le but de modeste travail. Les concepteurs ont trouvés deux formes dans ce contest.

- La tuyère à corps central type à bouchon ' Plug Nozzle ' qui est le but de ce modeste travail.
- La tuyère à corps central de type ' Expansion Deflexion Nozzle '.

L'écoulement à travers la paroi se redresse uniquement de l'angle  $\theta=0^*$  au col jusqu'à l'horizontal  $\theta=0$  à la sortie. Ici la zone d'expansion est absente. Autrement dit, elle est contractée en un point. Donc on peut dire maintenant sans entré dans le calcul qu'on a une possibilité de gagner une masse de la tuyère. Dans le chapitre suivant des résultats, on va présenter les divers résultats obtenus sur la forme de tuyère étudiée et la comparaison avec les anciennes formes de point de vue masse, longueur et performance. La forme de l'écoulement à l'entrée et la sortie des anciennes formes et la nouvelle forme sont présentées dans la figure suivante :



- (a) Tuyère conique  
 (b) Tuyère à zone d'expansion et à détente centrée  
 (c) Tuyère à corps central

Figure (II.1) Etat de l'écoulement au col et à la sortie de la tuyère.

La figure (II.1) présente l'historique du développement des tuyères basées sur la considération de l'écoulement au col et à la sortie. La forme (c) est conçue pour la tuyère à corps central. C'est la forme la plus récente. Pour arriver à dévier au col, on introduit un 'Lip' avec une inclinaison  $\Psi$  considérée par rapport à la verticale et l'écoulement se trouve à l'extérieur comme le montre la figure suivante :

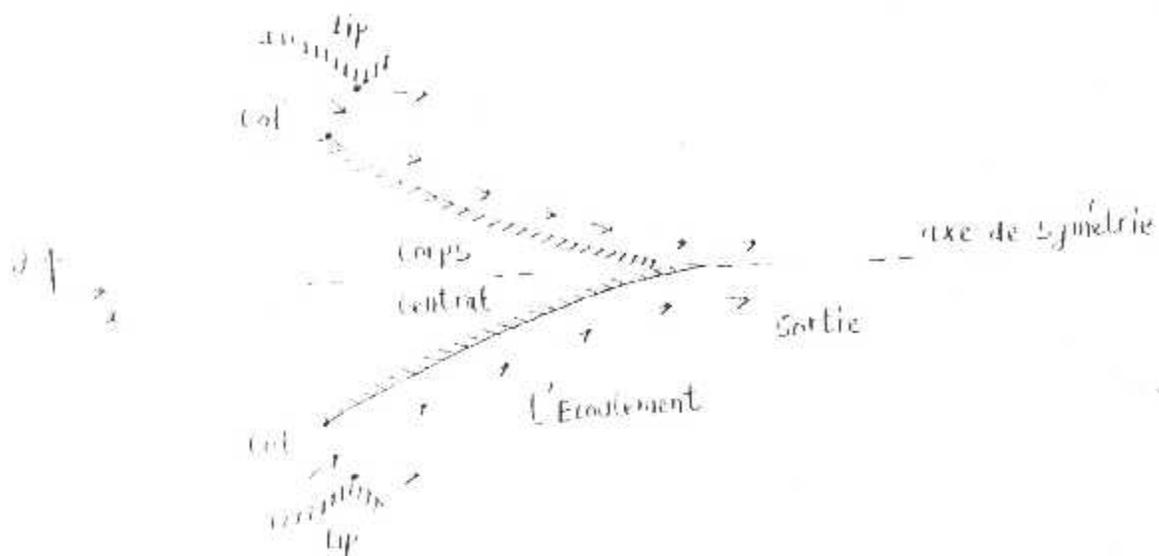


Figure (II.2) Aperçue sur la géométrie de la tuyère à corps central

Donc le 'Lip' sera incliné d'un angle  $\Psi$  comme indique la figure suivante :

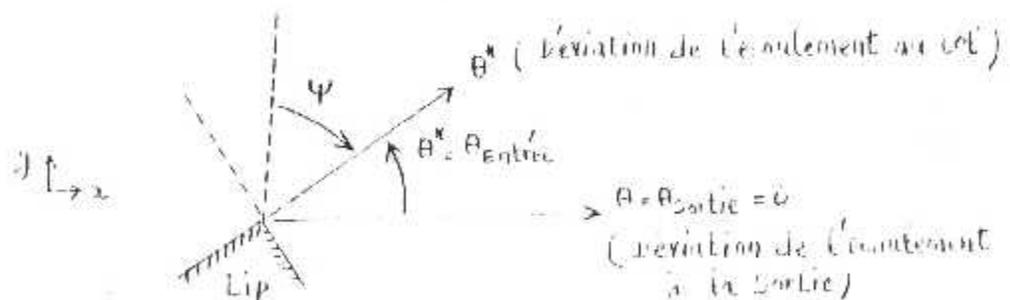


Figure (II.3) Présentation de l'angle  $\Psi$  de déviation de 'Lip'

Pour arriver maintenant à calculer l'écoulement et la détermination de la forme de la tuyère, on va présenter et récapituler les diverses hypothèses considérées.

## II.1 Hypothèses fondamentales

Les hypothèses fondamentales introduites pour présenter le modèle mathématique de calcul sont les suivantes :

- (1) le gaz utilisé est considéré comme parfait.
- (2) le gaz est considéré thermiquement parfait.
- (3) le gaz est considéré calorifiquement parfait.
- (4) l'écoulement est permanent et irrotationnel.
- (5) l'écoulement est bidimensionnel.

## II.2 Présentation de la méthode

En premier lieu, le calcul de l'écoulement et la détermination du contour de la tuyère sont basés essentiellement sur la détente de Prandtl Meyer présentée dans le chapitre I, où des ondes centrées divergentes seront issues du point A du « Lip » de la tuyère à corps central comme le montre la figure (II.4) suivante :

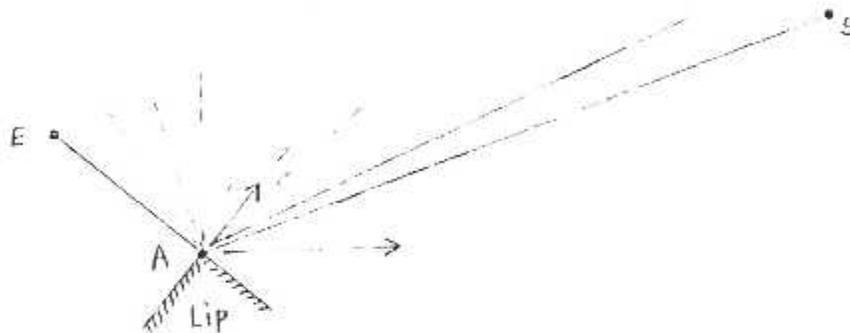


Figure (II.4) Naissance des ondes de détente divergente au point A du 'Lip'

Les lignes AE et AS présentent respectivement les ondes de Mach du col et de la section de sortie. Les angles de Mach  $\mu$  par conséquent sont calculés par la formule suivante, mesuré par rapport à la déviation du vecteur vitesse de l'écoulement :

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right)$$

Alors, au col 
$$\mu_E = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1}\right) = 90^\circ$$

Pour la section de sortie on a 
$$\mu_S = \arcsin\left(\frac{1}{M_S}\right) \quad \text{avec } M_S > 1.0$$

Comme  $M_S > 1.0$  alors  $\mu_S < \mu_E$

La figure suivante présente les angles de Mach  $\mu_E$  et  $\mu_s$  de l'écoulement.

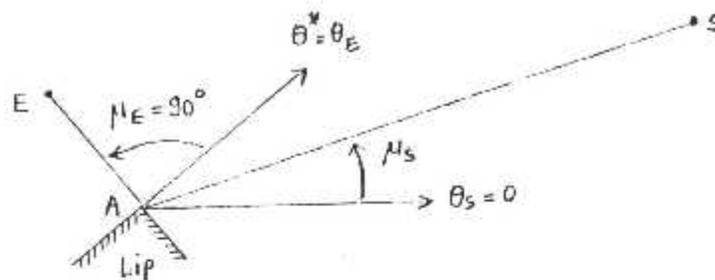


Figure (II.5) Présentation des angles de Mach du col et de la section de sortie

Entre les lignes de Mach AE et AS, il y a une infinité d'onde de Mach  $M$  et par conséquent une vitesse  $V$  de l'écoulement qu'on peut facilement à partir de ce vecteur déduire un point de la paroi. Comme le gaz est parfait, et d'après la définition d'une ligne de courant, le vecteur vitesse est toujours tangent à une ligne de courant qui sera considéré comme le contour de la paroi de la tuyère à rechercher. Les conditions au col AE de la tuyère est que  $M=1.00$  et il y en a une détente d'un angle  $90-\Psi$  et le nombre de Mach augmente de  $M=1$  jusqu'à  $M=M_s$  à la sortie pour donner un écoulement uniforme et parallèle. La relation entre le nombre de Mach et le rapport des sections donnée par la théorie unidimensionnelle est résumée par :

$$\frac{A}{A_s} = \frac{1}{M} \left\{ \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (II.1)$$

Chaque point sur le contour du corps central, le nombre de Mach est relié avec l'angle de Mach  $\mu$  par la relation suivante :

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) \quad (II.2)$$

Les propriétés de l'écoulement, telles que, le nombre de Mach, la déviation de l'écoulement, les rapports des pressions  $\frac{P}{P_0}$ , température  $\frac{T}{T_0}$ , masse volumique  $\frac{\rho}{\rho_0}$ , sont constants le long de chaque ligne de Mach issues du point A. Cette propriété nous donne un avantage de déterminer rapidement et explicitement la position du point de la paroi.

La détente de Prandtl Meyer est calculée mathématiquement en utilisant la relation suivante :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \sqrt{\left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1) \right]} - \arctg \sqrt{M^2 - 1} \quad (II.3)$$

l'angle  $v$  est mesuré par rapport au vecteur vitesse du col ( c'est à dire pour  $M=1$ ).

Généralement la conception de la tuyère supersonique se fait sur la base des données suivantes :

- Le nombre de Mach  $M_s$  de sortie.
- Le gaz de propulsion utilisé. C'est à dire, il faut connaître le rapport  $\gamma$  des chaleurs spécifiques
- le rayon polaire  $AE$  du col

En plus quelque données sur la géométrie demandées par le calcul numérique.

Chaque ligne de Mach issue du point A sera absorbée par la paroi de la tuyère. Réellement, il y a une réflexion de cette onde sur la paroi, mais si la tuyère est plane, on peut démontrer quelle sera absorbée par la paroi qui donne après le calcul la position du point de la paroi de la tuyère à recherché. Si la tuyère est de type axisymétrique, le calcul sera très délicat vue la réflexion des ondes de Mach sur la paroi ainsi la naissance des zones de l'écoulement où le calcul sur la base des ondes de Mach est impossible. Dans ce cas, il faut faire appel à la méthode des caractéristiques [1], [2], [5]. Notre travail est consacré pour la forme plane.

La figure (II.6) suivante présente la forme générale de la tuyère à corps central à étudiée.

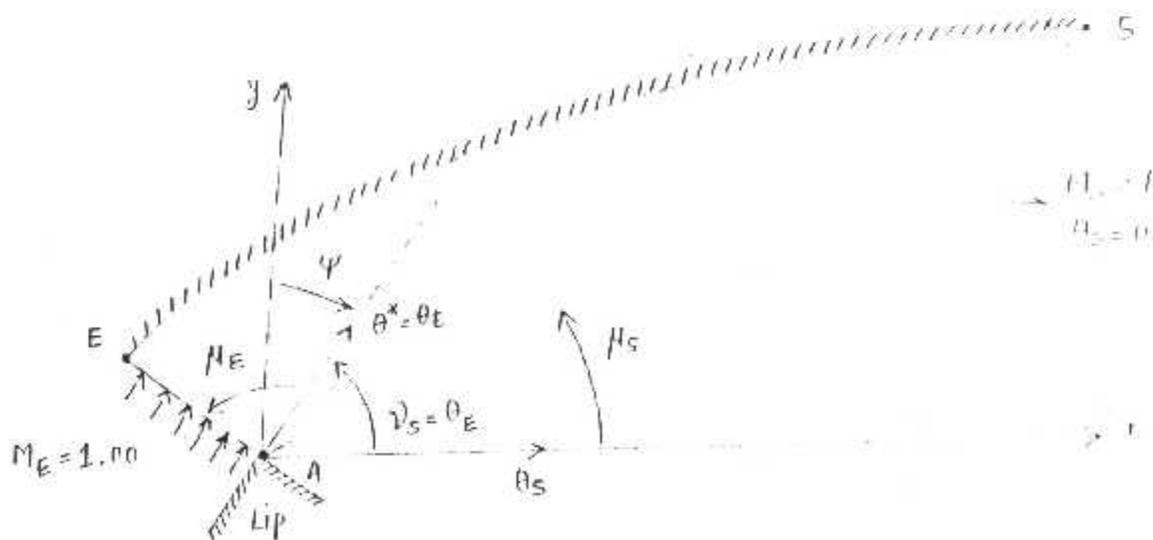


Figure (II.6) Présentation de quelques paramètres

Sur la figure (II.6), l'angle  $\theta_E$  n'est pas connu a priori. Si la conception de la tuyère se fait sur la base de  $M_s$  et  $\gamma$  et pour avoir en écoulement uniforme et parallèle comme indique la figure (II.6) on peut déterminer facilement l'angle  $\theta_E$  par la relation suivante :

$$\theta_E = \nu_s = \text{FPM}(M_s) \quad (\text{II.4})$$

avec **FPM** : Fonction de **P**randtl **M**eyer

Une fois l'angle  $\theta_E$  est déterminé, on peut par suite facilement déterminer l'inclinaison du 'Lip' par rapport à la verticale, par la relation suivante :

$$\psi = 90^\circ - \nu_s \quad (\text{II.5})$$

Une fois on détermine ces paramètres on peut par suite passer à la détermination du profil du corps central.

Comme on a déjà dit qu'il y a une infinité de d'onde de Mach qui seront issues du point A et comme le calcul est purement numérique, il faut discrétiser la paroi en un nombre fini assez grand. Le profil de la tuyère sera déterminé avec une exactitude élevé si le nombre des ondes de Mach choisi sera élevé. Dans le chapitre suivant de résultats, on va présenter l'effet de nombre des ondes de Mach choisi sur la convergence du profil de la tuyère vers celui de l'exacte qui est inconnu. On note ce nombre par  $N_p$ .

On va procéder maintenant à la présentation des résultats sur une onde de Mach quelconque entre les ondes de Mach AE et AS

### II.2.1 Discrétisation

On va partager la zone de détente AE et AS en  $N_p$  onde de Mach y compris les extrémités et on numérotions ces ondes on obtient le schéma suivant :

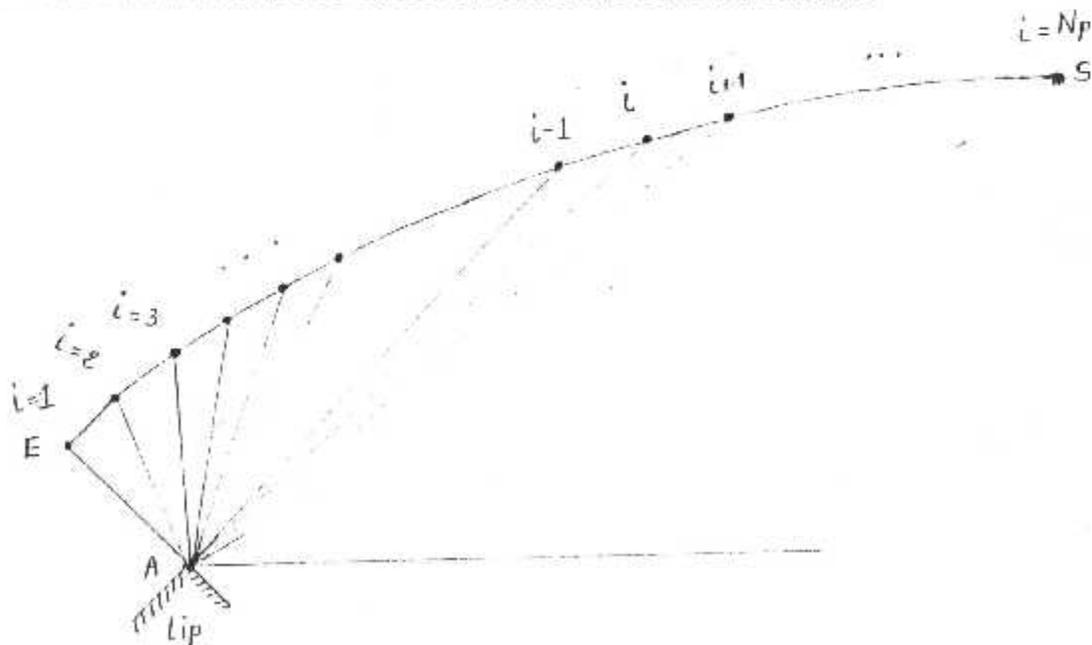


Figure (II.7) Discrétisation de la zone de détente.

On voit clairement que plus le nombre  $N_p$  des ondes de Mach est grand, plus on va avoir une très bonne représentation de l'allure du corps central. Ici on a le choix entre le point de commencement de calcul. Soit du point S de sortie vers le col et dans ce cas il faut connaître le rayon de la section de sortie, soit du point E du col vers la sortie S et dans ce cas il faut connaître le rayon AE du col. On a préféré dans notre travail de commencer du col vers la sortie, c'est à dire de gauche vers la droite.

La détermination des points de la paroi se fait d'une façon explicite, c'est à dire, si on connaît la position et les propriétés d'un point sur la paroi, on peut facilement déterminer celles du point adjacent à droite et vis vers ça jusqu'à où on arrive à la section de sortie. Notons ici que les lignes de Mach sont des lignes droites qui nous facilite la tâche par la connaissance de l'équation mathématique.

Le schéma du modèle sous la présence d'une ligne de Mach est présenté dans la figure suivante :

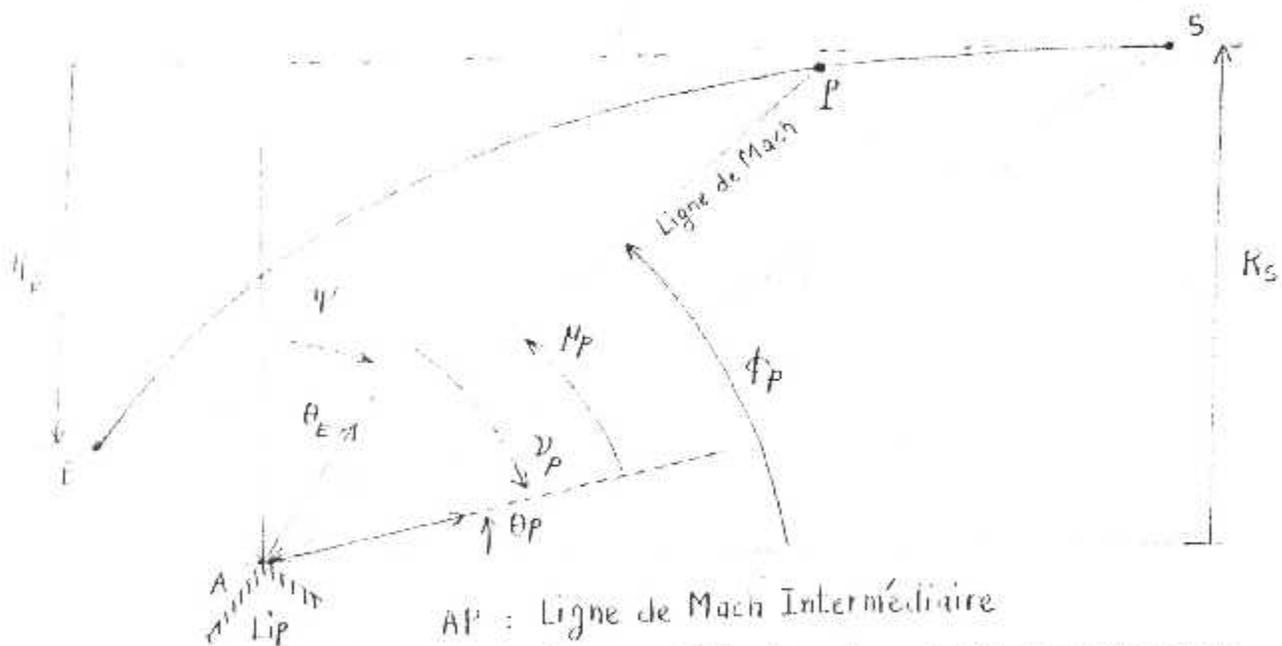


Figure (II.8) Présentation des propriétés d'une ligne de Mach intermediaire

D'apres la figure(II.8) on a :

$$\mu_p = \arcsin\left(\frac{1}{M_p}\right) \tag{II.6}$$

et  $v_p = \text{FPM}(M_p)$  (II.7)

$$\phi_p = 90 - \psi - v_p + \mu_p \tag{II.8}$$

avec  $M_p$  : Nombre de Mach au point p de la paroi.

**FPM**: Fonction de Prandtl Meyer

Pour déterminer les propriétés physiques et thermodynamiques en un point P de la paroi, considérons le schéma suivant à deux lignes de Mach adjacentes

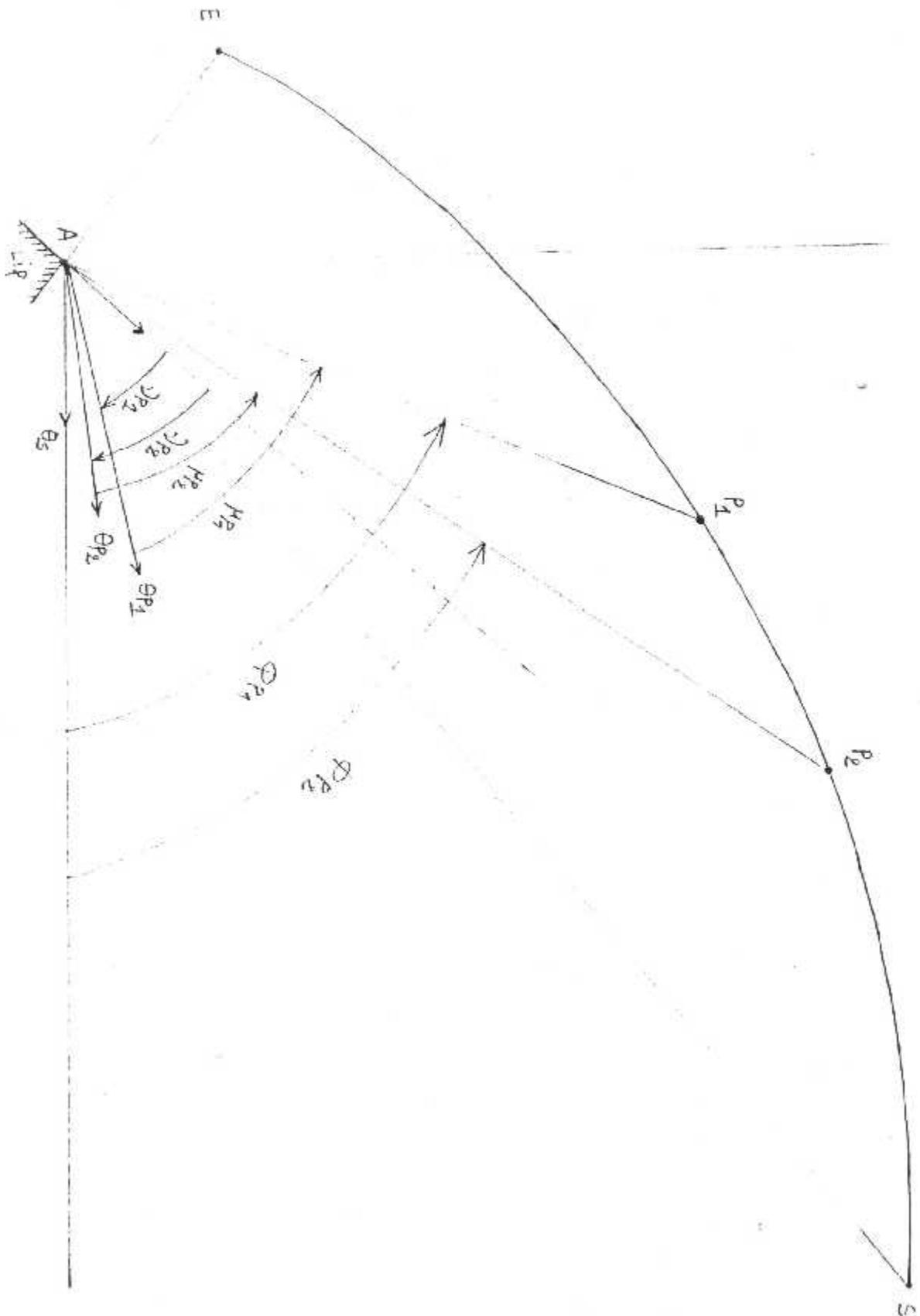


Figure (II.9) Présentation de deux lignes de Mach adjacentes

Sur la figure (II.9), toutes les propriétés et la position du point  $P_1$  sont connues, puisqu'on a dit que le calcul est explicite et il se fait de gauche à droite. Alors  $M_{P_1}$ ,  $\phi_{P_1}$ ,  $\theta_{P_1}$ ,  $v_{P_1}$ ,  $X_{P_1}$ ,  $Y_{P_1}$  sont connus. Le problème maintenant consiste à déterminer celles du point  $P_2$ . Pour arriver aux résultats, essayons d'isoler le triangle  $AP_1P_2$ , on aura la configuration suivante avec les trois angles internes déduits à partir de la figure (II.9)

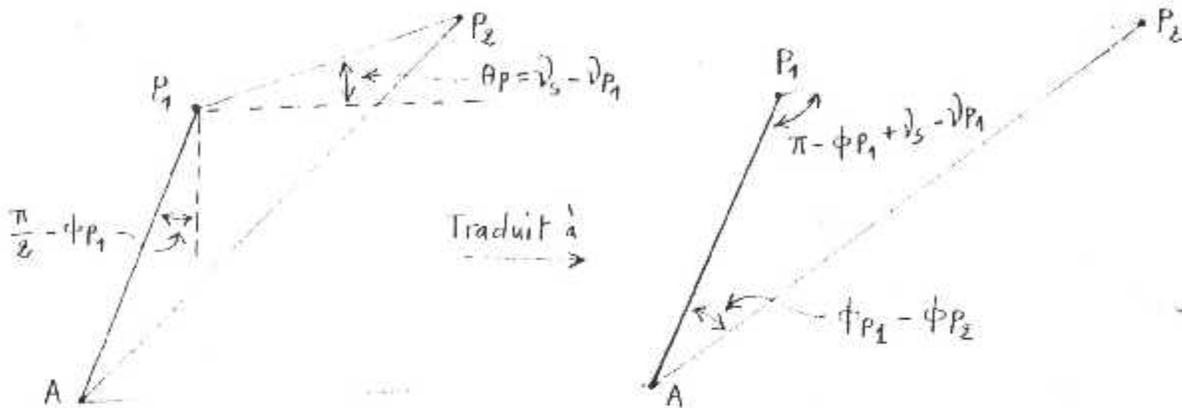


Figure (II.10) Calcul sur un triangle

On peut calculer le troisième angle  $\widehat{P_1P_2A}$  par :

$$(\pi - \phi_{P_1} + v_s - v_{P_1}) + (\phi_{P_1} + \phi_{P_2}) + \widehat{P_1P_2A} = \pi$$

alors :

$$\widehat{P_1P_2A} = \phi_{P_2} + v_s + v_{P_1}$$

Désignons par  $\lambda_{P_1}$ ,  $\lambda_{P_2}$  le rayon polaire respectivement des lignes  $AP_1$  et  $AP_2$

alors :

$$\lambda_{P_1} = AP_1$$

$$\lambda_{P_2} = AP_2$$

D'après la relation dans le triangle  $P_1P_2A$ , on peut écrire :

$$\frac{\sin(\widehat{P_1P_2A})}{\lambda_{P_1}} = \frac{\sin(v_s - \phi_{P_1} - v_{P_1})}{\lambda_{P_2}}$$

alors :

$$\lambda_{P_2} = \lambda_{P_1} \frac{\sin(v_s - \phi_{P_1} - v_{P_1})}{\sin(v_s - \phi_{P_2} - v_{P_1})} \tag{II.9}$$

L'angle polaire  $\phi_{P_2}$  du point  $P_2$  peut être déterminé en utilisant la figure ( II.8) par :

$$\phi_{P_2} = 90 - \psi - \nu_{P_2} + \mu_{P_2} \quad (II.10)$$

avec :  $\nu_{P_2} = \text{FPM}(M_{P_2})$   
 $\mu_{P_2} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{P_2}}\right)$

où : **FPM** : Fonction de Prandtl Meyer.  
 $M_{P_2}$  : Nombre de Mach sur la ligne de Mach A  $P_2$   
 $\mu_{P_2}$  : Angle de Mach du point  $P_2$

Une fois le rayon polaire  $\lambda_{P_2}$  ainsi que l'angle polaire  $\phi_{P_2}$  sont trouvés, on peut facilement déterminer les coordonnées du point  $P_2$  par les relations suivantes en utilisant la figure (II.11) :

$$x_{P_2} = \lambda_{P_2} \cos(\phi_{P_2}) \quad (II.11)$$

$$y_{P_2} = \lambda_{P_2} \sin(\phi_{P_2}) \quad (II.12)$$

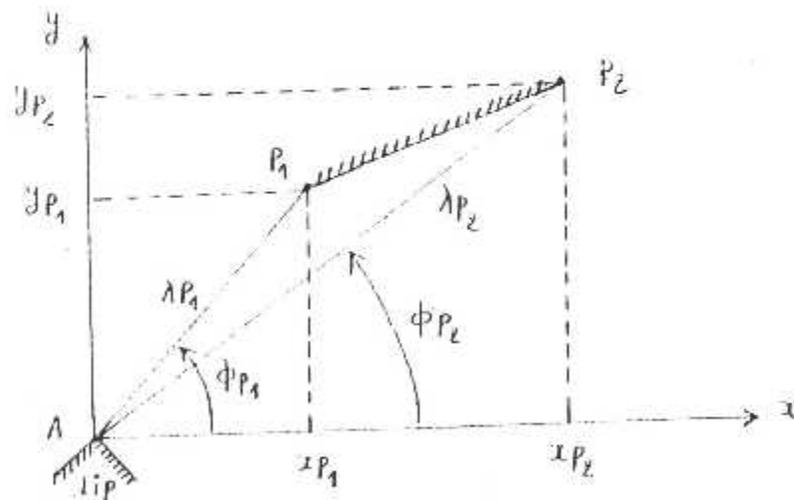


Figure (II.11) Relation entre coordonnée polaire et coordonnées cartésiennes

On peut dire que chaque point P sur la paroi possède son propre nombre de Mach M différent aux autres points et que tous sont reliés avec le point A par une ligne de Mach. Alors au point A, il y a une infinité de valeur de nombre de Mach et par conséquent **le point A est un point de discontinuité en M, 0.**

Pour arriver à concevoir la tuyère il faut discrétiser soit :

1. La zone de variation du nombre de Mach  $M$  sur la paroi qui est  $M \in [1, M_s]$  en  $N_p$  valeurs y compris les valeurs des extrémités.
2. Soit la zone de variation de la déviation de l'angle d'écoulement  $\theta$  et par conséquent de la paroi qui est  $\theta \in [\theta_E, 0]$  en  $N_p$  valeurs y compris les valeurs des extrémités.
3. Soit la zone de variation de l'angle de Prandtl Meyer  $\nu \in [0, \nu_s]$  en  $N_p$  valeurs y compris les valeurs des extrémités.

Ainsi que possible, par la zone de variation de l'angle  $\mu$ . Pour notre cas, on a choisi la discrétisation du nombre de Mach. C'est à dire, supposer le nombre de Mach au point  $P$  connu égal à  $M \in [1, M_s]$  et sur cette base déterminer le reste des résultats. Pourquoi ce choix ? Parce que, sur cette base, le calcul sera rapide et on n'a pas besoin de résoudre une équation implicite, pour déterminer l'angle  $\nu$  de Prandtl Meyer servant pour le calcul. Autrement dit, si on a choisi par exemple, la discrétisation par rapport à l'angle  $\nu$  de Prandtl Meyer, on aura forcément pour chaque ligne de Mach, faire la résolution d'une équation implicite de Prandtl Meyer pour déterminer le nombre de Mach  $M$  correspondant à cet angle  $\nu$  et dans ce cas le temps de calcul sera élevé et sera encore non recommandé si la discrétisation est très élevée.

### II.2.2 Procède de calcul

Avant de procéder au schéma général de calcul, on note les données nécessaires de la conception qui sont :

1. La valeur de  $M_s$  (puisque le dimensionnement se fait sur cette base)
2. La valeur de  $\gamma$  (choix du gaz)
3. Le rayon polaire au col  $\lambda_{AE}$ . Ici on a pris  $\lambda_{AE}=1$  pour addimensionnaliser les résultats par rapport à ce rayon.
4. La discrétisation du nombre de Mach en  $N_p$  valeurs.

en plus il faut déterminer quelques résultats nécessaires pour la conception qui sont :

1. La valeur de la **Fonction de Prandtl Meyer** à la sortie de la tuyère  $\nu_s = \text{FPM}(M_s)$ .
2. La valeur de l'angle de Mach pour  $M=M_s$ .
3. La déviation du 'Lip' par rapport à la verticale par :  $\Psi = 90 - \nu_s$ .
4. Rapport des sections théorique donné par la théorie unidimensionnelle  $\frac{A_s}{A_*} = f(M_s)$  en utilisant la relation (II.1). Ce rapport nous servira plus tard comme une source de comparaison de validation de notre calcul numérique. Autrement dit, durant le procédé, on calcul le rapport  $\frac{A_s}{A_*}$  donné par la méthode développée en fonction de  $N_p$  et de voir la convergence.

Comme le procédé de calcul présenté par les relations (II.9), (II.10), (II.11) et (II.12) sont en fonction de deux points successifs (à une forme de suite), il faut donner les résultats au point de départ. Le point de départ comme on a mentionné est le point E ou sur la première ligne de Mach AE. Sur cette ligne, on a :

- Le nombre de Mach au point E est égale à l'unité :

$$M_E = 1.00 \quad (\text{entrée sonique})$$

- L'angle de Mach au point E est donner par :

$$\mu_E = \arcsin\left(\frac{1}{M_E}\right) = 90^\circ$$

- La valeur de la fonction de Prandtl Meyer au point E est donner par :

$$v_E = 0.0$$

- L'angle polaire  $\phi_E$  au point E est donné par :

$$\phi_E = 90 - \Psi - v_E + \mu_E$$

- Le rayon polaire  $\lambda_E$  du point E est donné par :

$$\lambda_E = 1.00 \quad (\text{parmi les données}).$$

- Position du premier point de la paroi de la tuyère (c'est le point E) est donné par :

$$\begin{aligned} X_E &= \lambda_E \cos(\phi_E) \\ Y_E &= \lambda_E \sin(\phi_E) \end{aligned}$$

- L'angle  $\theta'$  de l'écoulement au col est donné par :

$$\theta' = \phi_E - \mu_E$$

- La distance entre l'axe de symétrie et le point E est donné par :

$$R_1 = R_S - Y_E$$

On passe maintenant au calcul des propriétés de l'écoulement au point P suivant adjacente à droite au point E. On donne en premier lieu un nombre de Mach supérieur à l'unité mais proche de l'unité. alors ce point :

$$M_P = 1 + \Delta M$$

Avec :  $\Delta M$  une valeur très petite.

On peut facilement sur cette considération déterminer les paramètres au point P par :

- Valeur de la Fonction de Prandtl Meyer au point P Par :

$$v_p = \text{FPM} (M_p)$$

- Angle de Mach au point P par :

$$\mu_p = \arcsin\left(\frac{1}{M_p}\right)$$

- Angle polaire au point P par

$$\phi_p = 90 - \psi - v_p + \mu_p$$

- Angle de déviation de la paroi au point P donné par :

$$\theta_p = \phi_p - \mu_p$$

- Le rayon polaire au point P donné par :

$$\lambda_p - \lambda_E \frac{\sin(v_s - \phi_E - v_E)}{\sin(v_s - \phi_p - v_E)}$$

- La position du point P donné par :

$$X_p = \lambda_p \cos(\phi_p)$$

$$Y_p = \lambda_p \sin(\phi_p)$$

une fois le calcul est fait en deuxième point, on peut facilement et avec la même démarche passer directement au troisième point en incrémentant en premier lieu le nombre de Mach par rapport au point gauche P comme le point E.

Le calcul sera répété autant de fois jusqu'à où en arrive à un nombre de Mach égal à  $M_s$  en un point P sur la paroi. Ce point pour est par conséquent, le point de la section de sortie et dans ce cas le dimensionnement est fait totalement et la forme de la tuyère est obtenue.

A partir des résultats du dernier point (point de la section de sortie), on peut fixé quelques paramètres :

1. Position du point s de sortie

$$x_s = x_p$$

$$y_s = x_p$$

Le point P dans ce cas est le dernier point du dimensionnement.

2. Angle et rayon polaire du point s :  $(\lambda_s ; \phi_s)$
3. Le rayon  $R_s$  de la section de sortie calculé par:

$$R_s = y_s$$

4. Distance du bouchon (corps central) par rapport au 'Lip' nommée par  $X_{\text{PLUG}}$  donnée par :

$$X_{\text{PLUG}} = X_S$$

5. La section de sortie  $A_s$  par unité de frondeur ( puisque c'est une tuyère plane ) donné par :

$$A_s = 2 R_s$$

6. Rayon du col  $A_c$  calculé par :

$$A_c = 2 \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 2 \lambda_E = 2$$

7. Rapport des sections calculé numériquement par :

$$\text{Rapport} = \frac{A_s}{A_c}$$

### II.2.3 Paramètres thermodynamiques

Une fois la conception est faite, on peut déterminer ensuite les rapports thermodynamiques en chaque point de la paroi du corps central. A cette étape, en chaque point, on connaît le nombre de Mach  $M = M_P$  du point E jusqu'au point s.

Le rapport des pression  $\frac{P}{P_0}$  au point P de la paroi ayant un nombre de Mach  $M = M_P$  peut être calculé par :

$$\left[ \frac{P}{P_0} \right]_P = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_P^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{II.13})$$

Ce rapport nous servira pour la détermination de la pression statique en chaque point de la paroi qui sera traduit plus tard au calcul de la force de pression exercé sur la paroi du corps central. Aux points E et S on a respectivement :

$$\left[ \frac{P}{P_0} \right]_E = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\left[ \frac{P}{P_0} \right]_S = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_S^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

comme il y a une détente du gaz à travers la paroi du corps central, qui veut dire qu'il y a une augmentation du nombre de Mach, alors par conséquent, il y a diminution de la pression le long de la paroi du col E à la sortie s de la tuyère.

Le rapport des températures  $\frac{T}{T_0}$  au point P de la paroi ayant un nombre  $M=M_p$  de peut être calculé par :

$$\left[ \frac{T}{T_0} \right]_P = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_P^2 \right]^{-1} \quad (II.14)$$

ce rapport nous servira de déterminer la température statique en chaque point de la paroi qui sera traduit plus tard au choix du matériaux convenable qui peut résister à cette température sans perdre de la dureté. aux points E et S, ce rapport est égale à :

$$\left[ \frac{T}{T_0} \right]_E = \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-1}$$

$$\left[ \frac{T}{T_0} \right]_S = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right]^{-1}$$

comme il y a une détente de gaz sortant de la chambre de combustion avec une température  $T_0$ , le gaz sera très chaud au voisinage du col et qui se refroidit graduellement jusqu'à la section de sortie.

Le rapport des masses volumiques  $\frac{\rho}{\rho_0}$  au point P de la paroi ayant un nombre de Mach  $M=M_p$ , peut être calculé par :

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_P = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_P^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (II.15)$$

aux points E et S, il est égal à :

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_E = \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_S = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

### II.3 Longueur et masse de la tuyère

Jusqu'à cette étape on a déterminé la position des points de la paroi du corps central. Le problème qui se pose maintenant c'est la détermination la longueur totale de la tuyère ainsi que le poids ou la masse du corps central trouvé.

Pour arriver à la détermination de la longueur et la masse, il faut considérer quelques supposition :

1. Le corps central est constitué uniquement d'une paroi ayant une épaisseur  $t$  constante supposée donnée et réaliser avec le même matériau de masse volumique  $\rho_m$  supposé donnée.
2. On suppose qu'entre deux points de la paroi trouvés par le calcul, que la forme de cette dernière est une ligne de droite. Cette supposition donne un bon résultat si le nombre de points de la conception est très élevé afin que les points sont rapprochés l'un de l'autre et on peut assimiler la courbure de la paroi à une ligne de droite.

**Remarque :**

On peut utiliser une méthode d'interpolation afin de déterminer une équation analytique de la paroi, ensuite utiliser une technique pour arriver au calcul de la masse du corps central. Parmi les formules d'interpolations connues, on peut citer :

1. Interpolation linéaire
2. Interpolation de Lagrange
3. Interpolation de Hermite
4. Interpolation exponentielle
5. Interpolation 'cubic spline'

dans notre modeste travail, on a utiliser l'interpolation linéaire entre deux points successifs.

La longueur totale de la tuyère, est mesuré comme la distance axiale entre le « Lip » (le point E) et le point S de la section de sortie. Alors :

$$L = X_S - X_E \quad (\text{II.16})$$

Comme notre calcul est addimensionnel, on a choisi d'addimensionaliser le résultat par rapport au rayon  $\lambda_E$  du col. Alors :

$$\frac{L}{\lambda_E} = \left[ \frac{X_S}{\lambda_E} - \frac{X_E}{\lambda_E} \right] \quad (\text{II.17})$$

concernent le calcul de la masse, on peut dire ici qu'il est lié avec le calcul de la longueur de l'arc de la paroi de la tuyère. Donc, on s'intéresse au calcul de l'arc de la paroi. Avant de passer au calcul, on va déterminer la relation entre la masse et l'arc de la paroi. Connaissant:

$$\text{masse} = \rho_m \cdot \text{volume}$$

avec

$$\text{volume} = t \cdot L_{\text{arc}} \cdot L$$

telle que :

$\rho_m$ :	Masse volumique du matériau
volume :	Volume occupé par le matériau
$t$ :	Epaisseur du matériau ( supposé constante )

$L_{arc}$  : Longueur de l'arc de la tuyère [ voir figure (II.12) ]  
 $L$  : unité de frondeur (puisque la tuyère est plane).

Comme il y a une symétrie de la tuyère et comme elle est plane on va considérer uniquement le calcul sur une partie de la tuyère (partie inférieure).

Si la paroi de la tuyère contient  $N_p$  points y compris les deux points de l'extrémités, on obtient par conséquent  $(N_p - 1)$  segments de droite.

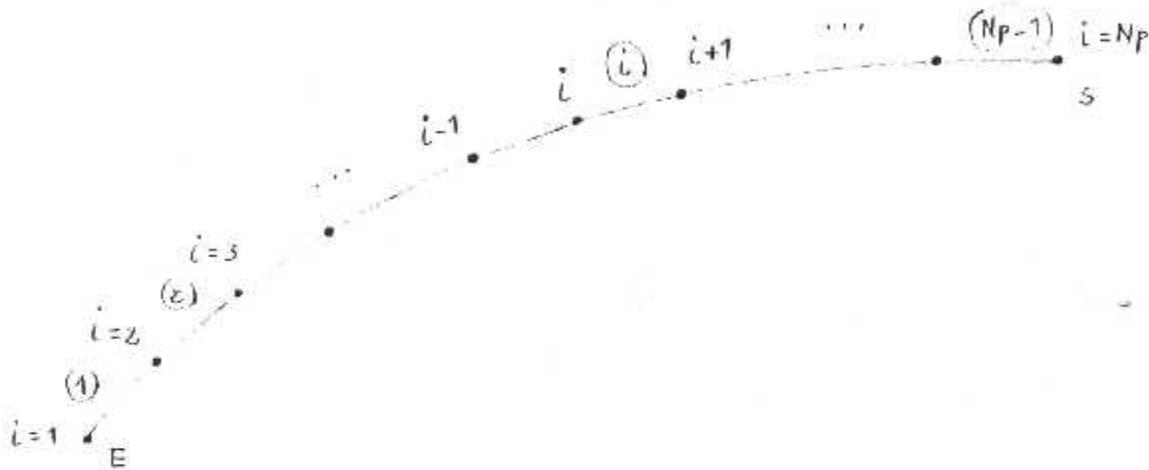


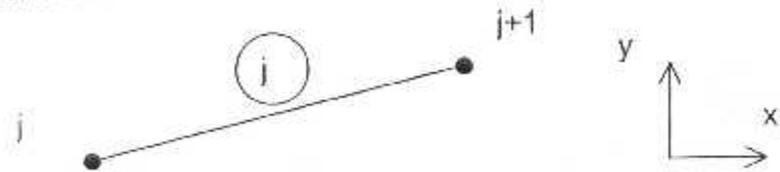
Figure (II.12) L'arc de la partie inférieure du corps central

Alors

$$L_{arc} = \sum_{j=1}^{j=N_p-1} \Delta L_{seg(j)}$$

Avec :  $\Delta L_{seg(j)}$  : Longueur du segment numéro (j)

isolons le segment numéro j, on aura :



donc

$$\Delta L_{seg(j)} = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

par conséquent la longueur total de l'arc de la paroi du corps central est donnée par :

$$L_{arc} = \sum_{j=1}^{j=N_p-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

La masse totale de la structure de la paroi du corps central est donnée par :

$$\text{Masse} = 2 t \rho_m l \sum_{j=1}^{j=N_p-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

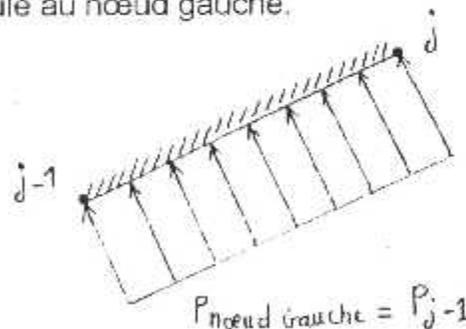
Comme nos calculs sont tous addimensionnels, on a préféré de présenter le résultat par la formule suivante :

$$\frac{\text{Masse}}{\rho_m \cdot l \cdot \lambda_E} = 2 \sum_{j=1}^{j=N_p-1} \sqrt{\left[ \frac{x_{j+1} - x_j}{\lambda_E} \right]^2 + \left[ \frac{y_{j+1} - y_j}{\lambda_E} \right]^2} \quad (\text{II.18})$$

#### II.4 Force de pression exercé sur la paroi

Pour arriver au calcul de la force de poussée exercée sur la paroi du corps central, il faut poser quelques considérations :

1. On suppose que, entre deux points de la paroi la forme de la courbe est une ligne de droite, cette supposition donne un bon résultat si le nombre de points de la conception est très élevé afin que les points sont rapprochés l'un de l'autre et on peut assimiler la courbure de la paroi à une ligne droite.
2. La pression exercée sur chaque traçons est supposée égale à la pression statique calculé au nœud gauche.

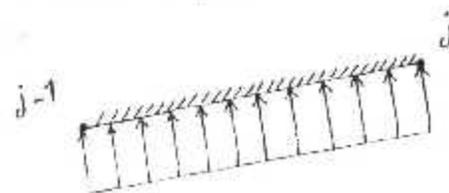


$$P_{\text{tronçon}} = P_{\text{nœud gauche}}$$

#### Remarque

Concernant la deuxième supposition, on peut considérer ici plusieurs cas :

- on considère la pression exercé sur chaque portion égale à la pression calculé au nœud gauche par :

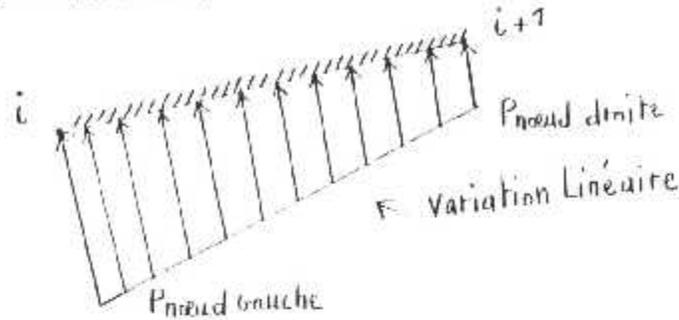


$$P_{\text{tronçon}} = P_{\text{nœud droite}} = P_j$$

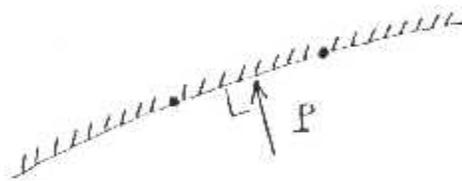
- On peut considérer aussi que la pression exercé sur chaque panneaux égale à la moyenne des pressions calculés entre les nœuds gauche et droite, c'est à dire :

$$P_{\text{tronçon}} = \frac{P_{\text{noeud gauche}} + P_{\text{noeud droite}}}{2}$$

- On peut même considérer qu'elle est linéaire sur le tronçon entre les pressions  $P_{\text{noeud gauche}}$  et  $P_{\text{noeud droite}}$  par :



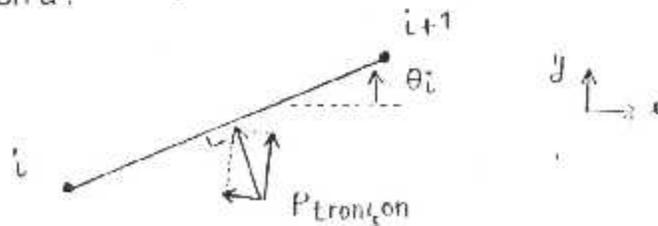
comme la force de pression est exercée perpendiculairement à la paroi comme indique le schéma suivant :



alors, sur toute la paroi et sur la base de la considération prise, la force de pression exercée à la configuration suivante :



Sur le panneau numéro (i) on a :



Si on a  $N_p$  nœuds sur la paroi, on aura par conséquent  $(N_p - 1)$  tronçons. Rappelons que la pression exercée sur le panneau numéro (i) est considéré par :

$$P_{\text{tronçon}} = P_i$$

Chaque tronçon est supposé incliné d'un angle  $\theta$  de l'écoulement du nœud gauche du panneau. Pour le tronçon numéro (i) on a :

$$\theta_{\text{tronçon (i)}} = \varphi_i - \mu_i \quad (\text{II.19})$$

alors, la force de pression de composante horizontale par unité de longueur exercée sur le tronçon numéro(i) peut être calculée par :

$$F_{\text{tronçon (i)}} = P_{\text{tronçon (i)}} \cdot L_{\text{tronçon (i)}} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}] \cdot l$$

Telle que :

$L_{\text{tronçon}}$  : longueur du tronçon (i) calculée par :

$$L_{\text{tronçon (i)}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (\text{II.20})$$

D'où, la force de pression exercée sur la paroi complète d'une demi tuyère est calculée par :

$$F = l \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{\text{tronçon (i)}} \cdot L_{\text{tronçon (i)}} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}]$$

Comme la tuyère est symétrique, alors elle contient deux parois identiques et il faut ajouter l'effet de la deuxième paroi, on obtient par conséquent :

$$F = 2 l \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{\text{tronçon (i)}} \cdot L_{\text{tronçon (i)}} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}] \quad (\text{II.21})$$

remplaçant, l'expression (II.20) dans celle (II.21) on obtient:

$$F = 2 l \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{\text{tronçon (i)}} \cdot \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}]$$

Comme le calcul ad dimensionnel, alors, il sera mieux de trouver le résultat comme suit :

$$F = 2 l \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_0 \left[ \frac{P_{\text{tronçon (i)}}}{P_0} \right] \lambda_E \sqrt{\left[ \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_E} \right]^2 + \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda_E} \right]^2} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}]$$

ou, la forme adimensionnelle par :

$$\frac{F}{P_0 \lambda_E l} = 2 l \sum_{i=1}^{i=N_p-1} \left[ \frac{P_{\text{tronçon (i)}}}{P_0} \right] \sqrt{\left[ \frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_E} \right]^2 + \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda_E} \right]^2} \cdot \sin [\theta_{\text{tronçon (i)}}] \quad (\text{II.22})$$

le rapport des pressions est donné par la formule (II.13)

## Chapitre III

### Résultats et Discussion

Dans le chapitre précédent, on a présenté les divers étapes nécessaires à l'obtention des paramètres du dimensionnement d'une tuyère à corps central donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle. Les paramètres sont :

- La forme de la tuyère supersonique à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle'.
- La longueur de la tuyère.
- Déviation du 'Lip' nommée par l'angle  $\psi$ .
- La masse de la structure de la tuyère (de bouchon).
- La variation de nombre de Mach le long de la paroi du corps central.
- La variation de la pression le long de la paroi du corps central.
- La variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère.
- La longueur de bouchon.
- La force de pression exercée sur la paroi du corps central.
- La distance entre le 'LIP' et la section de sortie.
- Le rapport des sections  $A_S/A_c$  calculé en fonction de la discrétisation.
- Le rapport des sections  $A_S/A_c$  exacte donné par la formule théorique (II.1)
- La section au col de la tuyère  $A_{COL}$ .

Les données qu'on a pris ici sont les suivants :

- Rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$
- Le nombre de Mach à la section de sortie  $M_S$
- Le rayon polaire du col de la tuyère  $\lambda_E$
- La discrétisation du corps central par le nombre de points  $N_P$

Dans ce chapitre, notre objectif est la mise en application de la méthode développée sur ordinateur.

Avant d'écrire les résultats obtenus, il faut noter qu'ils seront présentés sous formes de courbes et suit par les résultats numériques.

Le programme a été réalisé en double précision avec résolution dans la mémoire centrale et lancé sur un micro ordinateur Pentium III (550 MHz+32 Méga de RAM). Le procédé de calcul est donné par l'organigramme de la figure (III.1) qui résume les parties de base du programme pour la résolution du problème proposé. Le temps de calcul effectué varie suivant la discrétisation choisie et le type de résultat.

On a choisi de présenter les profils des tuyères pour trois valeurs de nombre de Mach de sortie  $M_S=2.00, 2.50$  et  $3.00$  et pour trois valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma=1.17, 1.40$  et  $1.66$ . Les courbes de variations de  $M, \theta, P/P_0, T/T_0$  et  $\rho/\rho_0$  le

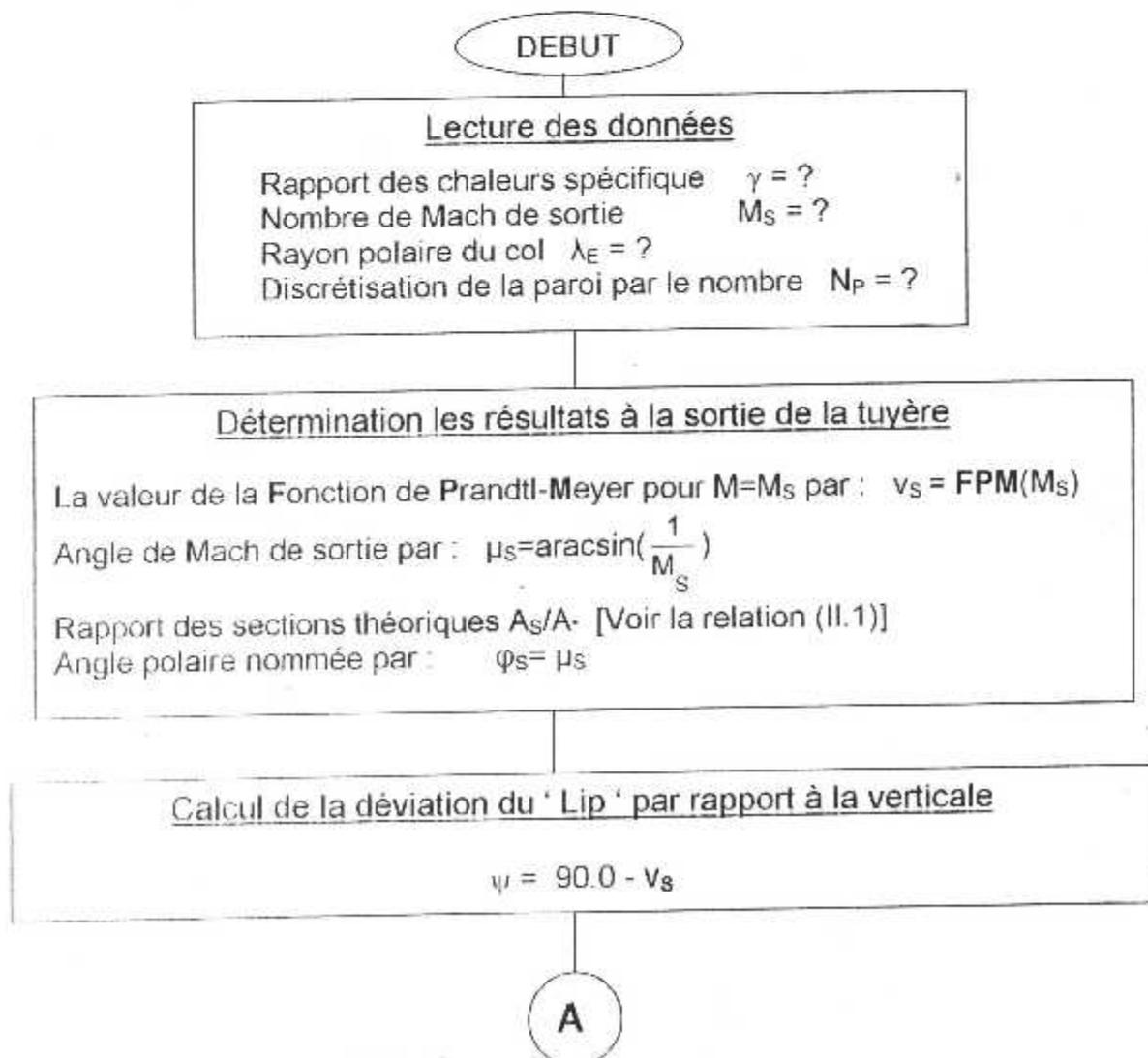
long de la paroi de la tuyère sont choisies pour  $\gamma=1.40$ , telle que, chaque figure englobe trois courbes de variation pour  $M_s=2.00, 2.50$  et  $3.00$ .

Les résultats numériques du dimensionnement  $\frac{L}{\lambda_E}, \frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}, \psi, \frac{X_{\text{PLUG}}}{\lambda_E}, \frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$

$\theta^*, \frac{X_E}{\lambda_E}, \frac{Y_E}{\lambda_E}, \frac{R_S}{\lambda_E}, \frac{R_E}{\lambda_E}, \varphi_E, \varphi_S, \frac{\lambda_S}{\lambda_E}$  en fonction de nombre de Mach de sortie  $M_s$  sont

présenter graphiquement dans l'intervalle  $[1.00, 4.00]$ , tels que, chaque figure englobe trois courbes de variation pour  $\gamma = 1.17, 1.40$  et  $1.66$ .

L'échelle sur les figures est pris orthonormé seulement pour la présentation des profils des tuyères. Concernant la validité des résultats, on a deux sources de comparaisons. La première source de comparaison est celle de rapport de section  $A_s/A_c$  donné par la théorie unidimensionnelle qui reste toujours valable pour notre cas puisque au col et a la sortie, l'écoulement est unidirectionnel. La deuxième source de comparaison est celle des résultats trouvés dans l'article [7]. Les valeurs des résultats de dimensionnement sont obtenues après la convergence du rapport  $A_s/A_c$  calculé numériquement, vers la valeur exacte avec une précision volue.



A

Résultats au col

Valeur de la Fonction de Prandtl-Meyer au col :  $v_E = 0.0$   
 Angle de Mach au col  $\mu_E = 90.00$   
 Angle polaire au col  $\varphi_E = 90 - \psi - v_E - \mu_E$   
 Rayon polaire au col  $\lambda_E = 1.0$   
 Position du 'Lip'  $X_E = \lambda_E \cos(\varphi_E)$  ,  $Y_E = \lambda_E \sin(\varphi_E)$

Initialisation les paramètres à zéro

Longueur de la tuyère  $Along = 0.0$   
 Longueur de l'arc de la tuyère  $Alarc = 0.0$   
 Force de pression  $F_P = 0.0$   
 Distance entre le col et la sortie de la tuyère  $X_{PLUG} = 0.0$

Position et paramètres du point gauche 1

$X_{P1} = X_E$   
 $Y_{P1} = Y_E$   
 $\lambda_{P1} = \lambda_E$   
 $\varphi_{P1} = \varphi_E$   
 $v_{P1} = v_E$

Calcul le pas du nombre de Mach

$$\Delta M = \frac{M_S - 1.0}{N_P - 1}$$

I = 1

Calcul les paramètres au point de droite 2 de la discrétisation par :

10 → Nombre de Mach  $M_{P2}$  par  $M_{P2} = 1.00 + \Delta M * (I-1)$   
 Valeur de la Fonction de Prandtl-Meyer par :  $v_{P2} = FPM(M_{P2})$   
 Angle de Mach par :  $\mu_{P2} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{P2}}\right)$   
 Angle polaire  $\varphi_{P2} = 90 - \psi - v_{P2} + \mu_{P2}$   
 Inclinaison de la paroi par :  $\theta_{P2} = \varphi_{P2} - \mu_{P2}$

B

B

Rayon polaire par :  $\lambda_{P2} = \lambda_{P1} \frac{\sin(\nu_S - \varphi_{P1} - \nu_{P1})}{\sin(\nu_S - \varphi_{P2} - \nu_{P1})}$

Position du point  $p_2$  par :  $X_{P2} = \lambda_{P2} \cos(\varphi_{P2})$  ,  $Y_{P2} = \lambda_{P2} \sin(\varphi_{P2})$

Calcul de la distance axiale entre les points 1 et 2 de gauche et de droite par :

$$XX = X_{P2} - X_{P1}$$

Calcul de la longueur du segment de la paroi entre les points 1 et 2 par :

$$L_{12} = \sqrt{(X_{P2} - X_{P1})^2 + (Y_{P2} - Y_{P1})^2}$$

Calcul les paramètres thermodynamiques au point 2

Rapport des pressions  $P/P_0$  [Voir la relation (II.13)] par :  $PP0P = ?$

Rapport des températures  $T/T_0$  [voir la relation (II.14)] par :  $TT0P = ?$

Rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  [voir la relation (II.15)] par :  $ROOP = ?$

Incrémentation aux valeurs des paramètres physiques et thermodynamiques

$$\text{Along} = \text{Along} + XX$$

$$\text{Alarc} = \text{Alarc} + L_{12}$$

$$F_p = F_p + L_{12} * PP0P * \sin(\theta_{P2})$$

Affectation les résultats du point 2 de droite dans celui 1 de gauche

$$X_{P1} = X_{P2}$$

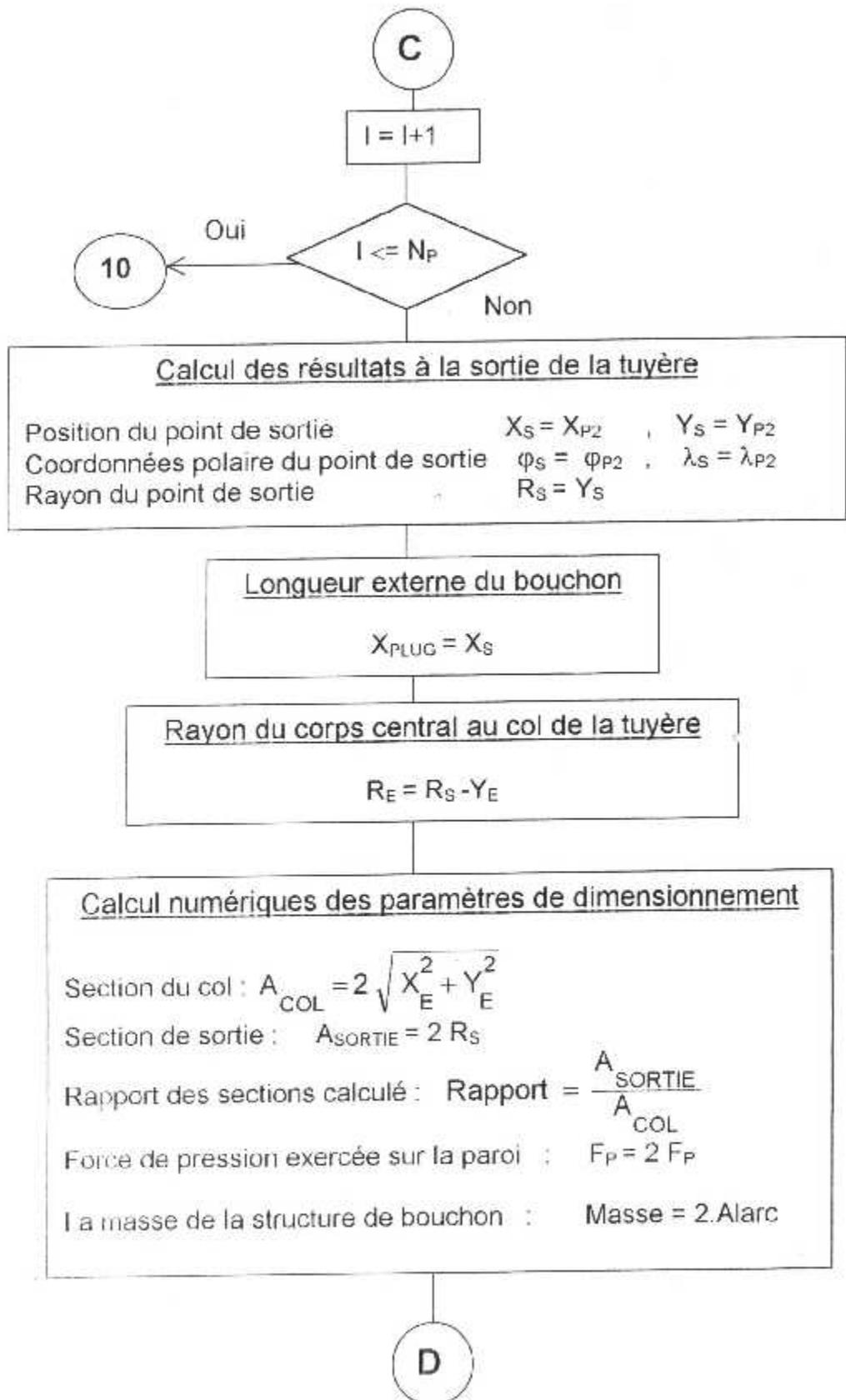
$$Y_{P1} = Y_{P2}$$

$$\varphi_{P1} = \varphi_{P2}$$

$$\lambda_{p1} = \lambda_{p2}$$

$$\nu_{p1} = \nu_{p2}$$

C



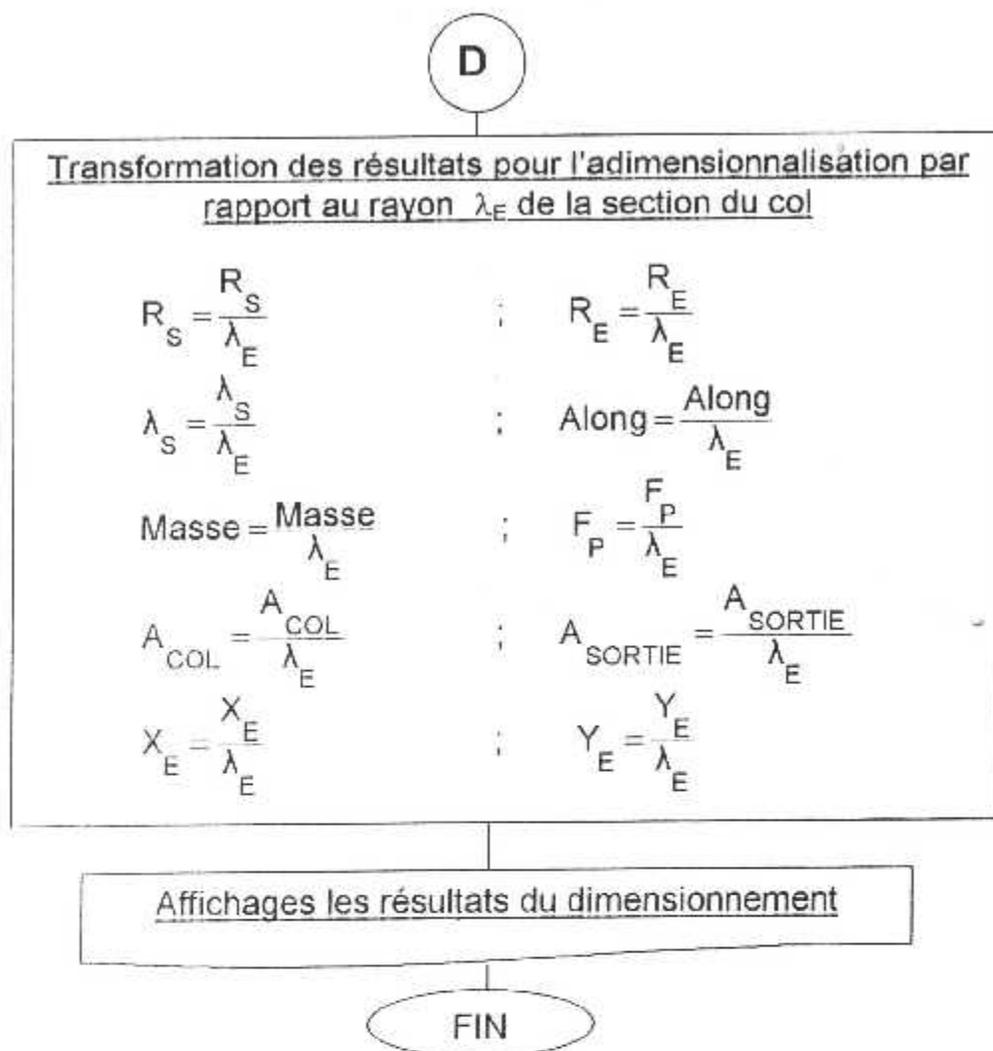


Figure (III.1) Organigramme simplifié du programme de calcul numérique

### III.1 Effet de la discrétisation sur la convergence du problème

Le but de ce paragraphe c'est de voir la convergence du problème en essayant d'augmenter le nombre de nœuds sur la paroi du corps central et de calculer pour chaque cas, les différents paramètres caractérisant la conception de la tuyère supersonique. L'exemple qu'on a pris ici est pour  $\gamma = 1.40$  avec un nombre de Mach de sortie  $M_S = 3.00$ . Le rayon de la section au col  $\lambda_E = 1.00$ .

On peut diviser les paramètres de dimensionnement en deux parties. La première partie ne dépend pas de la discrétisation  $N_P$  de la paroi, tels que, la déviation de 'Lip', les angles polaires  $\varphi_E$ ,  $\varphi_S$  du col et de la section de sortie ainsi que la position du 'Lip'  $X_E$ ,  $Y_E$ . Cependant, ces paramètres dépendent uniquement des valeurs de  $M_S$  et  $\gamma$  et pour l'exemple choisi, le tableau suivant résume les valeurs numériques trouvées.

$\Psi$ (degré)	40.2426532557
$\varphi_S$ (degré)	19.4712206355
$\varphi_E$ (degré)	139.75734674
$X_E / \lambda_E$	- 0.7633153127
$Y_E / \lambda_E$	0.6460261089
$A_S / A_*$ (Exacte)	4.2345679012
$\Theta^*$ (degré)	49.75734674

La deuxième partie présentée par le reste des paramètres, dépendent essentiellement de la discrétisation de la paroi du corps central. Le tableau (III.1) suivant résume les divers résultats numériques obtenus par le programme.

$N_P$	$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	$\frac{R_S}{\lambda_E}$	$\frac{R_E}{\lambda_E}$	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{X_{PLUG}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}$	$\frac{F_P}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{A_S}{A_*}$ calculé
10	17.88670	5.96223	5.316209	17.627062	16.86374	37.813324	1.297811	5.962235
50	13.43793	4.47931	3.833285	13.432720	12.66940	28.779263	1.462054	4.479311
100	13.05843	4.35181	3.706785	13.074924	12.31160	28.006675	1.480310	4.352811
200	12.87819	4.29273	3.646704	12.904991	12.14167	27.639569	1.489070	4.292730
500	12.77284	4.25761	3.611588	12.805667	12.04235	27.424942	1.494168	4.257614
1000	12.73816	4.24605	3.600030	12.772975	12.00966	27.354288	1.495832	4.246056
3000	12.71516	4.23838	3.592363	12.751292	11.98797	27.307421	1.496927	4.238389
6000	12.70943	4.23647	3.590451	12.745884	11.98256	27.295733	1.497198	4.236477
10000	12.70714	4.23571	3.589687	12.743722	11.98040	27.291060	1.497306	4.235713
20000	12.70542	4.23514	3.589114	12.742102	11.97878	27.287557	1.497387	4.235140
50000	12.70439	4.23479	3.588770	12.741130	11.97781	27.285456	1.497436	4.234797
80000	12.70413	4.23471	3.588684	12.740887	11.97757	27.284931	1.497448	4.234711
100000	12.70404	4.23468	3.588656	12.740806	11.97749	27.284756	1.497452	4.234682
200000	12.70387	4.23462	3.588599	12.740644	11.97732	27.284405	1.497460	4.234625
400000	12.70378	4.23459	3.588570	12.740563	11.97724	27.284230	1.497464	4.234596
500000	12.70377	4.23459	3.588564	12.740546	11.97723	27.284195	1.497465	4.234590
800000	12.70374	4.23458	3.588556	12.740522	11.97720	27.284143	1.497466	4.234582
1000000	12.70373	4.23457	3.588553	12.740514	11.97719	27.284125	1.497466	4.234579
2000000	12.70372	4.23457	3.588547	12.740498	11.97718	27.284090	1.497467	4.234573
5000000	12.70371	4.23457	3.588544	12.740488	11.97717	27.284069	1.497467	4.234570
10000000	12.70370	4.23456	3.588542	12.740485	11.97716	27.284062	1.497468	4.234569

Tableau (III.1) Résultats du dimensionnement en fonction de la discrétisation de la paroi du corps central

On remarque bien qu'une fois le rapport des sections  $\frac{A_S}{A_*}$  calculé

numériquement converge vers la valeur théorique, les paramètres de conception converge aussi vers les valeurs exactes dont on connaît pas a priori. Par exemple, si on veut faire une conception d'une tuyère avec une erreur de 0.001 % du rapport des sections, on peut prendre une discrétisation environ de  $N_P = 10000$  de points. Si on prend une discrétisation  $N_P = 1000000$  de points on arrive à une erreur des rapport environ de 0.000001%.

### III.2 Variation du nombre de Mach $M_s$ de sortie pour $\gamma$ fixé

Le but de ce paragraphe c'est de voir la forme du corps central en changeant le nombre de Mach de sortie en fixant le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  et en essaye de tracer sur le même graphe les trois formes des tuyères à fin de voir la forme en échelle orthonormé. L'exemple choisi ici est pour  $\gamma = 1.40$  avec trois valeurs de nombre de Mach  $M_s = 2.00$ ,  $2.50$  et  $3.00$ . Les résultats du dimensionnement sont présentés dans le tableau (III.2). La discrétisation est choisie pour  $N_p = 1000000$  de points sur le corps central.

La figure (III.2) suivante présente l'allure du corps central à partir du col jusqu'à la section de sortie pour différentes valeurs du nombre de Mach de sortie. On remarque clairement que plus le nombre de Mach désiré à la section de sortie  $M_s$  est grand demande une forme plus grande par rapport à un nombre de Mach petit.

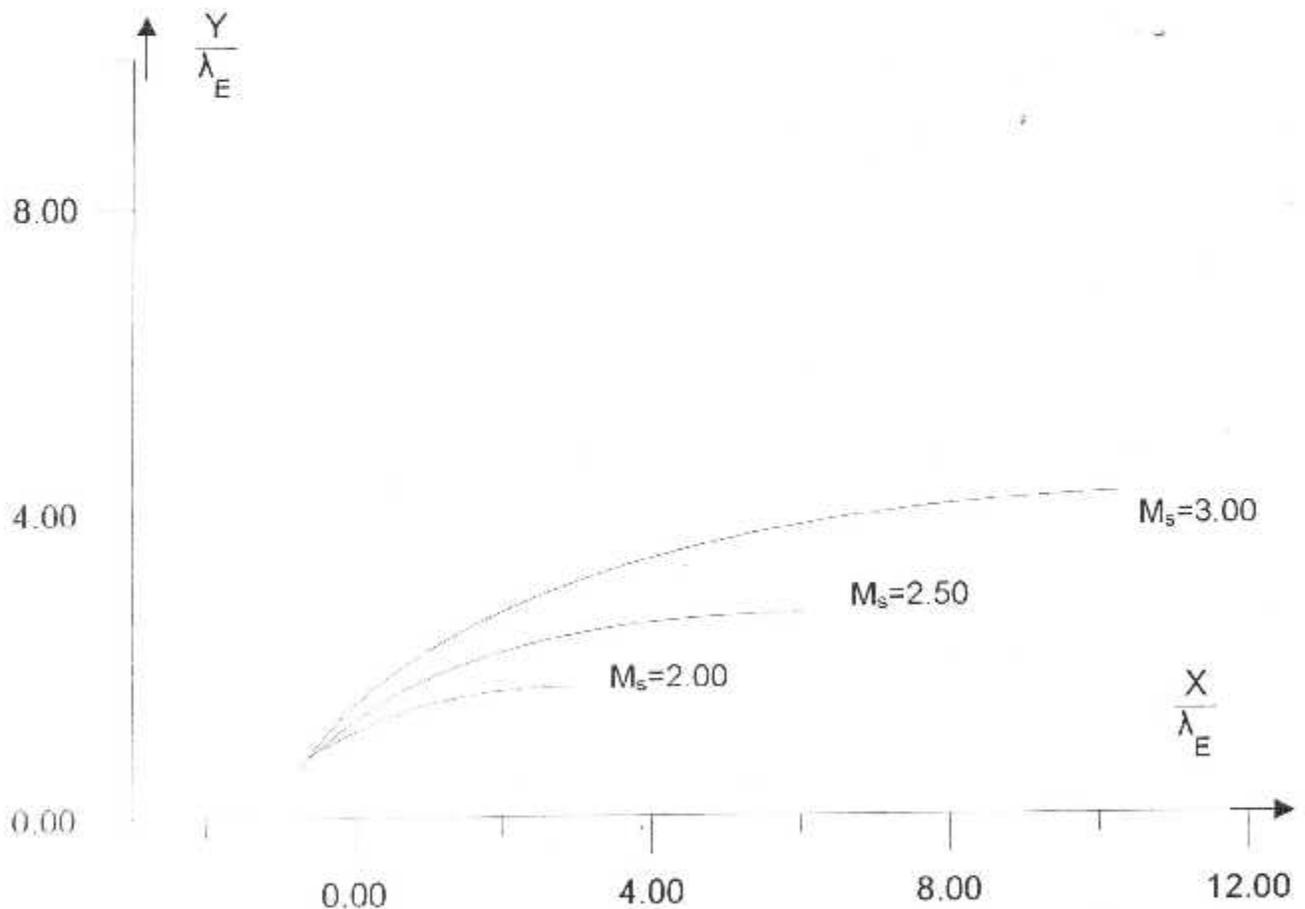


Figure (III.2) Forme du corps central d'une tuyère donnant à la sortie un nombre de Mach respectivement égale à 2.00 , 2.50 et 3.00 pour  $\gamma = 1.40$ .

Concernant les paramètres de conception, on remarque toujours que, la masse du corps central, la poussée, longueur de la tuyère et les autres paramètres augmentent avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_s$ . La discrétisation choisi pour

l'exécution du programme est  $N_p = 1000000$  points. Les résultats sont présentés par rapport au rayon polaire  $\lambda_E$  du col afin d'adimensionaliser le calcul.

$M_S$	2.00	2.50	3.00
$\psi$ (degré)	63.6202391866	50.8764361721	40.2426532557
$\varphi_S$ (degré)	30.0000000000	23.5781784795	19.4712206355
$\varphi_E$ (degré)	116.3797608134	129.1235638279	139.7573467443
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	3.3750020935	6.5918067011	12.703780673
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.6875010469	2.6367226806	4.2345793560
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.7916322794	1.8609357149	3.5885532471
$\frac{X_E}{\lambda_E}$	-0.4443187498	-0.6309949159	-0.7633153127
$\frac{Y_E}{\lambda_E}$	0.8958687675	0.7757869657	0.6460261089
$\frac{L}{\lambda_E}$	3.3671563006	6.6724855507	12.7405144244
$\frac{X_{PLUG}}{\lambda_E}$	2.9228375508	6.0414906348	11.9771991117
$\frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}$	6.9973190076	14.1710695713	27.2841258567
$\frac{F_P}{P_0 \lambda_E^2}$	0.5751436628	1.04200542957	1.4974666302
$\theta^*$ (degré)	26.3797608134	39.1235638279	49.7573467443
$\frac{A_S}{A_*}$ (Calculé)	1.6875010469	2.6367226806	4.2345793560
$\frac{A_S}{A_*}$ (Exacte)	1.6875000000	2.6367187500	4.2345679012

Tableau (III.2) Résultats du dimensionnement des tuyères à corps central planes pour différentes valeurs de nombre de Mach  $M_S$  avec  $\gamma = 1.40$

### III.3 Variation des paramètres pour $\gamma$ fixé

Le but de ce paragraphe est de voir la variation des paramètres thermodynamiques et physique sur le long de la paroi du corps central du col jusqu'à la section de sortie de la tuyère. Les exemples choisis ici sont pour  $\gamma = 1.40$  et trois valeurs de  $M_S$  qui sont  $M_S=2.00$ ,  $M_S=2.50$  et  $M_S=3.00$  avec une discrétisation de  $N_p = 1000000$  points.

#### III.3.1 Variation du rapport $P/P_0$ le long de la paroi de la tuyère

La figure (III.3) présente la variation du rapport  $P/P_0$  sur la paroi du corps central pour  $\gamma = 1.40$ . On remarque une diminution du rapport du col vers la sortie ce qui donne une diminution de la pression et par conséquent une augmentation du nombre de Mach, cela explique une détente rapide à travers le divergent (c'est le corps central)

On remarque une autre chose qu'il y a une variation très rapide et chute de pression juste après le col de la tuyère ensuite une diminution assez faible après cette station jusqu'à la section de sortie.

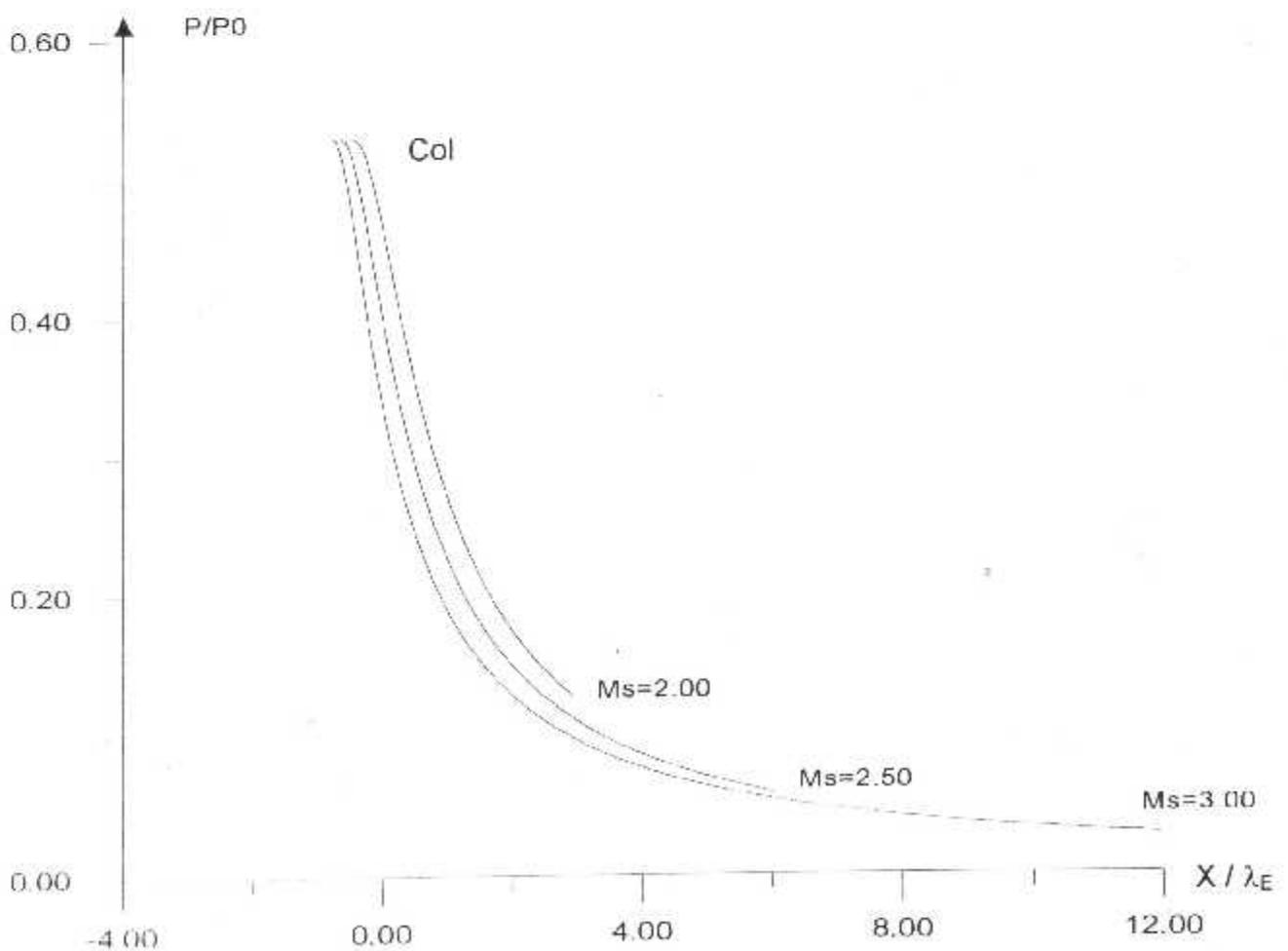


Figure (III.3) Variation du rapport de pression  $P/P_0$  le long de la paroi du corps central de la tuyère pour différentes valeurs de  $M_S$  avec  $\gamma = 1.40$

Les valeurs du rapport  $P/P_0$  au col et à la sortie de la tuyère pour  $\gamma = 1.40$  sont présentées dans le tableau suivant :

$M_s$	2.00	2.50	3.00
$P/P_0$ (Col)	0.5282817917	0.5282817917	0.5282817917
$P/P_0$ (Sortie)	0.1278045261	0.0585276631	0.0272236831

On remarque que la pression à la section de sortie diminue considérablement lorsque le nombre de Mach  $M_s$  à la sortie augmente. La valeur du rapport  $P/P_0$  au col est la même puisque  $M=1.00$  et pour les trois courbes on a pris  $\gamma = 1.40$ .

### III.3.2 Variation du rapport $T/T_0$ le long de la paroi de la tuyère

La figure (III.4) représente la variation du rapport des températures  $T/T_0$  le long de la paroi du corps central.

On remarque que les sections aux voisinages du col sont chaudes à raison du rapport élevé de  $T/T_0$  au niveau de ces régions ensuite un changement considérable dans une courte région et diminution jusqu'à la section de sortie. Alors le gaz à la sortie de sortie est froid par rapport à la région du col. On peut dire ici qu'il faut un matériau réfractaire puissant résistant à la température surtout dans la zone proche du col puisque la température est élevée et rapprocher de celle de la chambre de combustion  $T_0$ .

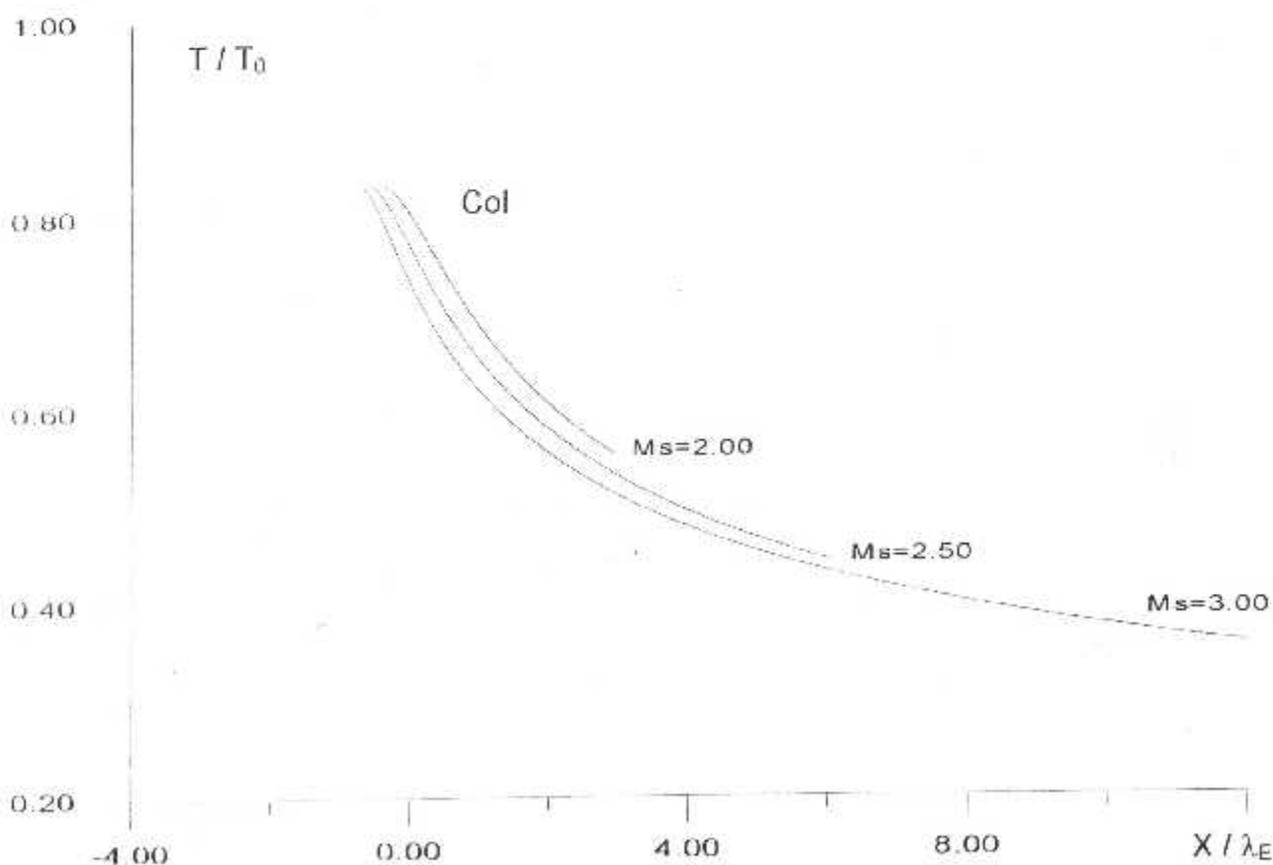


Figure (III.4) Variation du rapport des températures  $T/T_0$  le long de la paroi de la tuyère du corps central pour différentes valeurs de  $M_s$  avec  $\gamma = 1.40$

Les valeurs du rapport  $T/T_0$  au col et à la sortie de la tuyère pour  $\gamma=1.40$  sont présentées dans le tableau suivant :

$M_s$	2.00	2.50	3.00
$T/T_0$ (Col)	0.8333333416	0.8333333416	0.8333333416
$T/T_0$ (Sortie)	0.5555555702	0.4444444591	0.3571428708

On remarque encore que la température à la section de sortie diminue si le nombre de Mach  $M_s$  augmente, ce qui veut dire qu'il y a une transformation de l'énergie thermique de la chambre de combustion à une énergie cinétique. Le rapport  $T/T_0$  est le même au col pour les trois courbes puisque ici on a  $M=1.00$  et  $\gamma=1.40$ . Autrement dit, le rapport  $T/T_0$  au col dépend que de  $\gamma$ .

### III.3.3 Variation du rapport $\rho/\rho_0$ le long de la paroi de la tuyère

La figure (III.5) représente la variation du rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  à travers la paroi du corps central de la tuyère.

Les valeurs du rapport  $\rho/\rho_0$  au col et à la sortie de la tuyère pour  $\gamma=1.40$  sont présentées dans le tableau suivant :

$M_s$	2.00	2.50	3.00
$\rho/\rho_0$ (Col)	0.6339381437	0.6339381437	0.6339381437
$\rho/\rho_0$ (Sortie)	0.2300481409	0.1316872377	0.0762263099

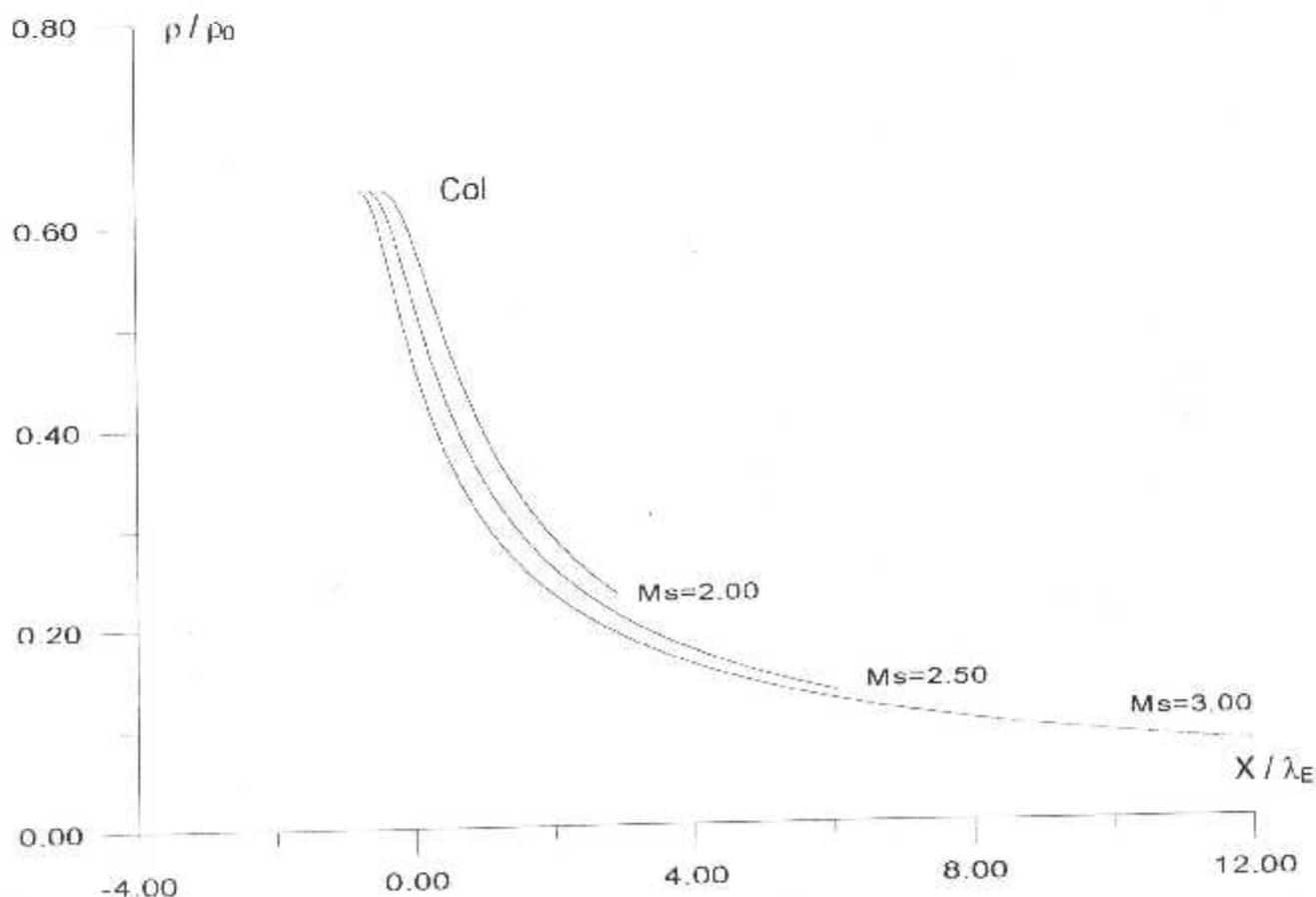


Figure (III.5) Variation du rapport  $\rho / \rho_0$  le long de la paroi du corps central pour  $\gamma=1.40$  avec différentes valeurs du nombre de Mach de sortie  $M_s$

### III.3.4 Variation de nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère

La figure (III.6) représente la variation de nombre de Mach à travers la paroi interne du corps central pour l'exemple de  $\gamma = 1.40$ . Ici, on remarque clairement l'augmentation du nombre de Mach du col jusqu'à la section de sortie. On voit clairement encore qu'au col, le nombre de Mach est égale à l'unité et à la section de sortie est égale à  $M_s$  suivant la courbe. L'écoulement à l'entrée du col et à la section de sortie de la tuyère est uniforme.

On remarque encore une variation rapide juste après le col environ de 15% de région totale où la détente de gaz est assez grande dans cette région. Cette variation est d'allure identique indépendamment de la valeur de  $\gamma$ . Par conséquent, on peut dire que cette augmentation du nombre de Mach explique naissance d'une énergie cinétique par transformation d'une énergie thermique emmagasinée dans le gaz sous forme de température élevée  $T_0$  de la chambre de combustion.

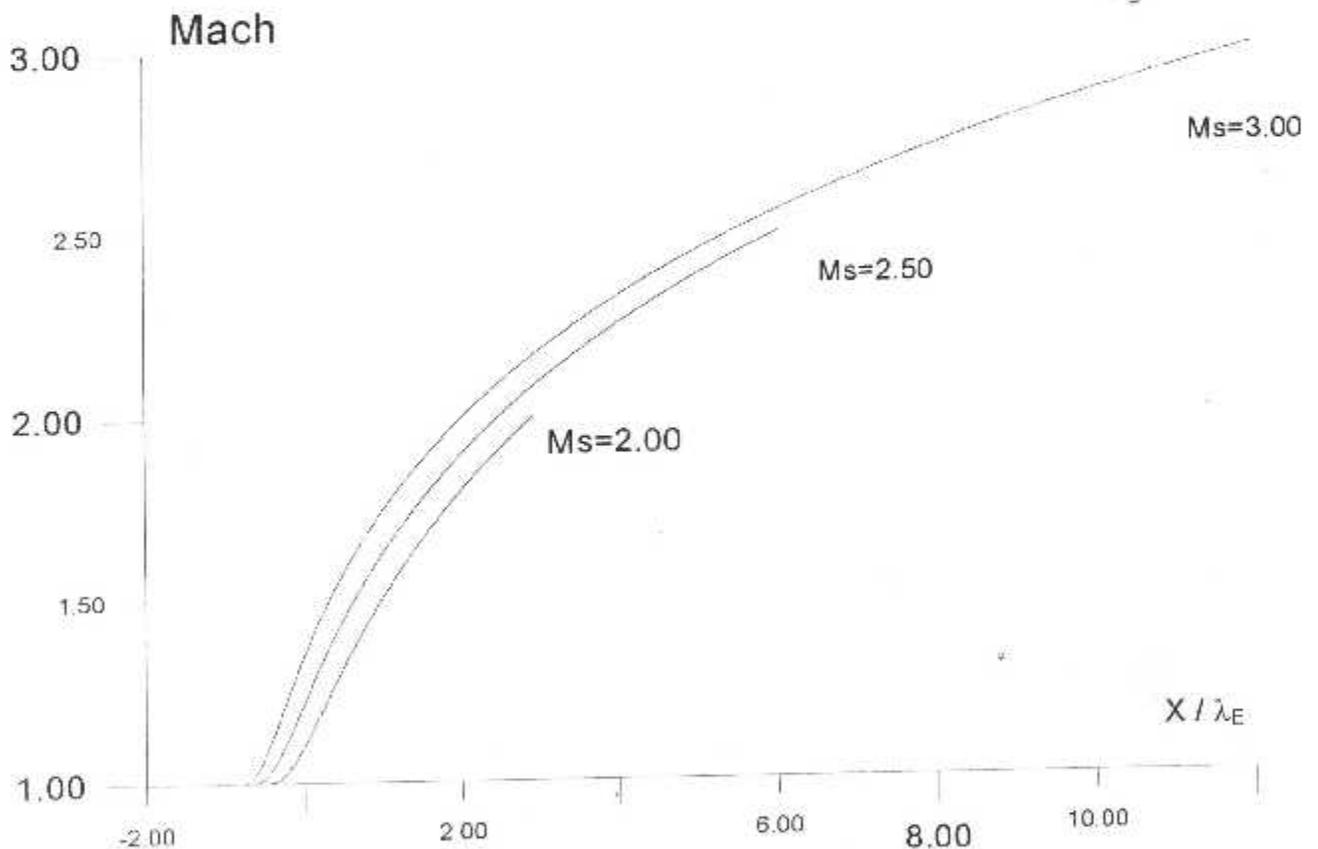


Figure (III 6) Variation de nombre de Mach le long de la paroi du corps central pour différentes valeurs de  $M_s$  avec  $\gamma=1.40$

### III.3.5 Variation de l'inclinaison de la paroi du corps central

La figure (III.7) représente la variation de l'inclinaison de la paroi du corps central pour  $\gamma=1.40$ . On remarque que l'inclinaison de la paroi à la section de sortie est nulle, ce qui donne que l'écoulement est horizontal. Autrement dit, il est unidimensionnel. Au

niveau du col de chaque allure, l'inclinaison de la paroi n'est pas nulle par rapport à l'horizontal afin d'aborder au maximum la taille de la tuyère à l'intérieur et pour donner une détente très grande et rapide et afin que la tuyère soit courte le maximum possible pour (but de gagner au maximum un poids de tuyère en conservant les mêmes performances comme la force de poussée par rapport au autre dimensionnement de tuyère lorsque l'inclinaison de la paroi au col est nulle par rapport à l'horizontal. Ce dernier type de tuyère est appelé tuyère à détente centrée ou à zone de détente [6].

Les valeurs numériques de l'inclinaison de la paroi au col de la tuyère pour  $\gamma=1.40$  sont présentées dans le tableau suivant :

$M_s$	2.00	2.50	3.00
$\theta$ (degré) ( au col )	26.3797608134	39.1235638279	49.7573467443
$\theta$ (degré) (à la sortie )	0.00	0.00	0.00

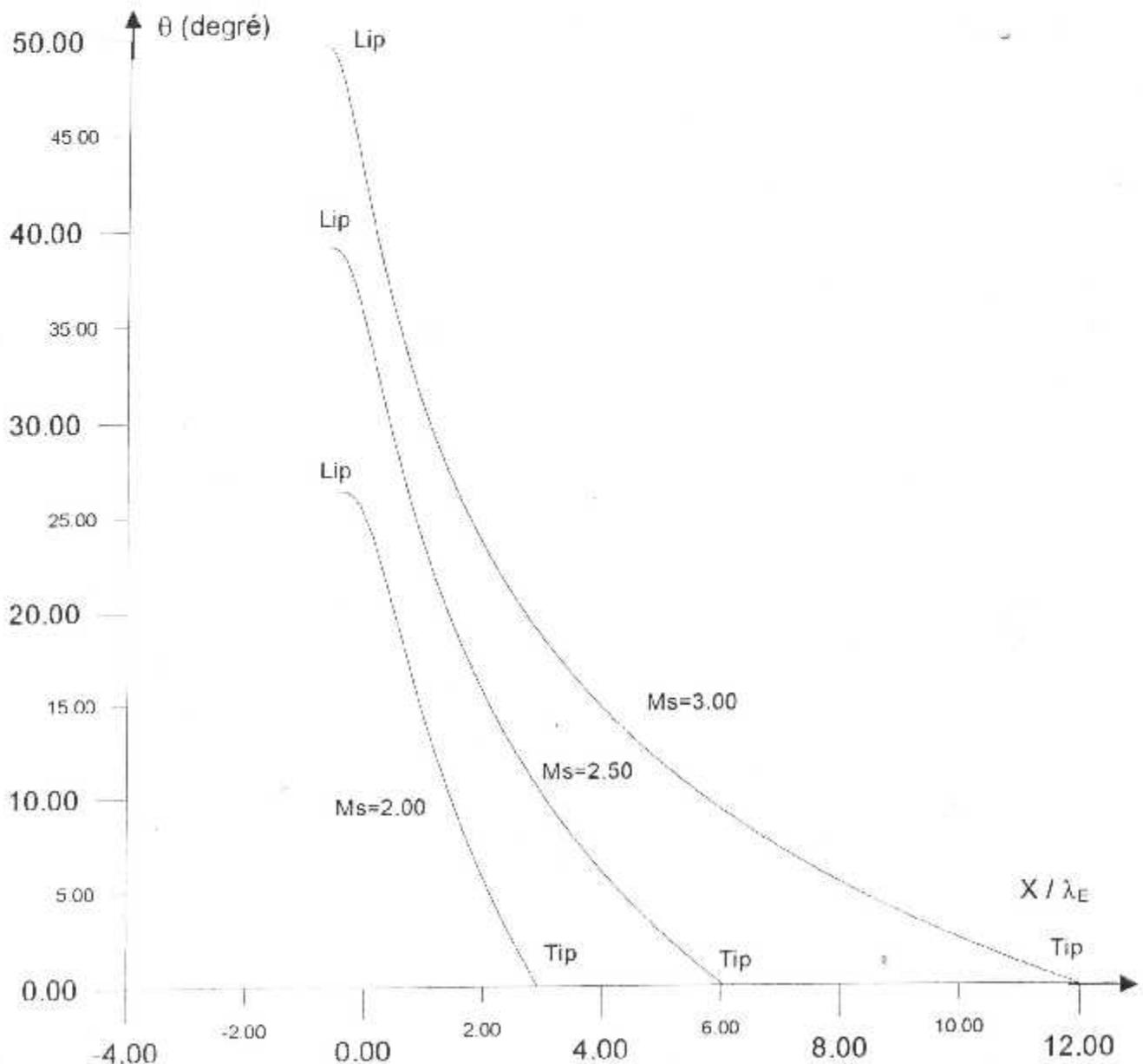


Figure (III.7) Variation de l'angle d'inclinaison de la paroi du corps central pour différentes valeurs de  $M_s$  avec  $\gamma = 1.40$

### III.4 Variation de $\gamma$ avec $M_s$ fixé

Le but de ce paragraphe est de voir le changement de la forme de la tuyère si on change le gaz de l'écoulement en gardant la même valeur du nombre de Mach  $M_s$  à la section de sortie. L'exemple choisi ici est pour  $M_s=3.00$  avec une discrétisation de  $N_p=1000000$  de points sur la paroi. Les gaz utilisés ont des rapports des chaleur spécifiques  $\gamma$  respectivement 1.17, 1.40, 1.66.

$\gamma$	1.17	1.40	1.66
$\psi$ (degré)	23.4511005186	40.2426519932	50.8484215216
$\varphi_s$ (degré)	19.4712206355	19.4712206355	19.4712206355
$\varphi_E$ (degré)	156.5488994814	139.7573480068	129.1515784784
$\frac{\lambda_s}{\lambda_E}$	22.3197216325	12.7037385895	9.0588816029
$\frac{R_s}{\lambda_E}$	7.4399072112	4.2345795301	3.0196272011
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	7.0419409587	3.5885534379	2.2441488518
$\frac{X_E}{\lambda_E}$	-0.9174000555	-0.7633153269	-0.6313741598
$\frac{Y_E}{\lambda_E}$	0.3979662525	0.6460260921	0.7754783493
$\frac{L}{\lambda_E}$	21.9606354161	12.7405149310	9.1721696417
$\frac{X_{PLUG}}{\lambda_E}$	21.0432353605	11.9771996040	8.5407954818
$\frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}$	48.2030724509	27.2841269989	19.2833173743
$\frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$	2.4523464587	1.4974666955	0.9884653210
$\theta^*$ (degré)	66.5488994814	49.7573480068	39.1515784784
$\frac{A_s}{A_*}$ (Calculé)	7.4399072112	4.2345795301	3.0196272011
$\frac{A_s}{A_*}$ (Exacte)	7.4398733187	4.2345680753	3.0196216782

Tableau (III.3) Résultats du dimensionnement des tuyères à corps central planes pour différentes valeurs de  $\gamma$  avec un nombre de Mach de sortie  $M_s$  égale à 3.00.

La figure (III.8) représente l'allure du corps central des tuyères qui ont le même nombre de Mach à la section de sortie. Pour cet exemple  $M_s=3.00$  mais des valeurs différentes de  $\gamma$ . On remarque bien que le volume de la tuyère est assez grand si on prend un gaz froid par rapport un gaz chaud. Si on utilise de l'air comme un gaz de propulsion la forme au milieu est recommandée. Mais si on veut utiliser une tuyère dans une chambre propulsive d'un moteur fusée, la forme la plus petite est recommandée pour minimiser le maximum de poids de l'appareil (fusée) et dans ce cas il faut utiliser un gaz ayant un rapport  $\gamma$  élevée, c'est ce que l'on appelle un gaz chaud. Pour les souffleries, c'est le cas contraire. On souhaite dans ce cas une tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle pour simuler un écoulement réel et en plus il faut que le gaz sortant de la tuyère doit avoir une température faible le plus possible pour ne pas détériorer l'installation des tubes et les appareils de mesures de pressions et frottement. Les résultats numériques de conception sont présentés dans le tableau (III 3)

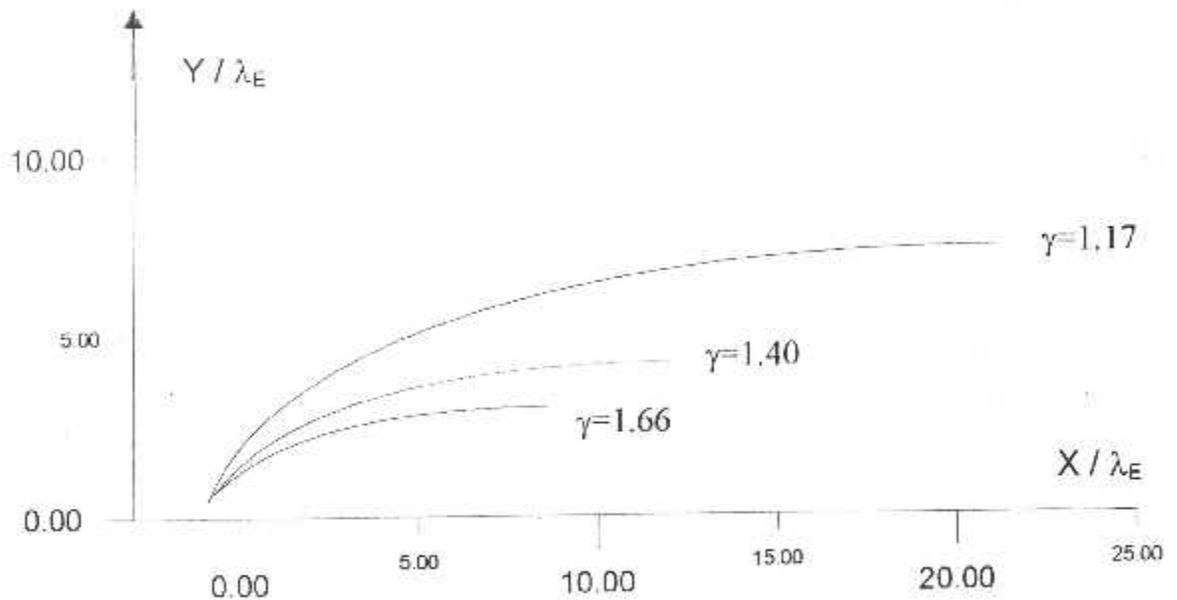


Figure (III.8) Forme du corps central donnant à la sortie un nombre de Mach  $M_s=3.00$  avec différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5 Résultats numériques et graphiques du dimensionnement

Le but de ce paragraphe c'est de présenter la variation des paramètres de dimensionnement en fonction du nombre de Mach  $M_s$  dans l'intervalle  $[1.00, 4.00]$ . On a choisi cet intervalle parce que les hypothèses prises ici pour la formulation du problème sont valables généralement dans le domaine supersonique fixé par les auteurs dans l'intervalle considéré. Au delà de ce nombre de Mach, le gaz ne devient plus caloriquement et thermiquement parfait puisque la température augmente considérablement et le gaz se dissocie pour former des atomes. Ce régime est appelé régime hypersonique où d'autres paramètres physiques doivent être pris en compte. La discrétisation choisie pour l'obtention des résultats est  $N_p = 2000000$  de points. On a choisi encore la présentation des résultats pour trois valeurs des chaleurs spécifiques  $\gamma = 1.17, 1.40$  et  $1.66$  de l'air et pour gaz chaud et l'autre froid.

$M_S$	$\psi$ (deg)	$\varphi_S$ (deg)	$\varphi_E$ (deg)	$\frac{A_S}{A_E}$	$\frac{L}{A_E}$	$\frac{X_E}{A_E}$	$\frac{Y_E}{A_E}$	$\frac{X_{PLUG}}{A_E}$	$\frac{R_E}{A_E}$	$\frac{R_S}{A_E}$	Masse $\frac{\rho_i A_E}{\rho_0 A_E}$	$\frac{F_P}{\rho_0 A_E}$	$\theta$ (deg)
1.00	90.0000	90.0000	90.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	88.5063	65.3800	91.4936	1.1097	0.4883	-0.0260	0.9996	0.4623	0.0092	1.0088	0.9769	0.0102	1.4936
1.20	85.9794	56.4426	94.0205	1.2414	0.7563	-0.0701	0.9975	0.6862	0.0370	1.0345	1.5148	0.0400	4.0205
1.30	82.9524	50.2848	97.0475	1.3993	1.0168	-0.1226	0.9924	0.8941	0.0839	1.0764	2.0420	0.0879	7.0475
1.40	79.6241	45.5846	100.3758	1.5885	1.2918	-0.1801	0.9836	1.1117	0.1510	1.1346	2.6056	0.1528	10.3758
1.50	76.1071	41.8103	103.8928	1.8153	1.5931	-0.2401	0.9707	1.3530	0.2394	1.2102	3.2320	0.2334	13.8928
1.60	72.4739	38.6821	107.5260	2.0873	1.9305	-0.3011	0.9535	1.6294	0.3510	1.3045	3.9440	0.3283	17.5260
1.70	68.7744	36.0318	111.2255	2.4139	2.3141	-0.3620	0.9321	1.9521	0.4878	1.4199	4.7651	0.4363	21.2255
1.80	65.0447	33.7489	114.9552	2.8063	2.7553	-0.4219	0.9066	2.3334	0.6524	1.5591	5.7214	0.5560	24.9552
1.90	61.3114	31.7568	118.6885	3.2784	3.2676	-0.4800	0.8772	2.7876	0.8482	1.7255	6.8435	0.6861	28.6885
2.00	57.5947	30.0000	122.4052	3.8468	3.8673	-0.5359	0.8442	3.3314	1.0791	1.9234	8.1675	0.8252	32.4052
2.10	53.9100	28.4368	126.0899	4.5314	4.5740	-0.5890	0.8080	3.9849	1.3499	2.1579	9.7365	0.9720	36.0899
2.20	50.2690	27.0356	129.7309	5.3579	4.4115	-0.6391	0.7690	4.7724	1.6663	2.4354	11.6027	1.1253	39.7309
2.30	46.6808	25.7714	133.3191	6.3549	6.4089	-0.6860	0.7275	5.7228	2.0354	2.7630	13.8286	1.2838	43.3191
2.40	43.1525	24.6253	136.8474	7.5590	7.6011	-0.7295	0.6839	6.8716	2.4656	3.1496	16.4895	1.4464	46.8474
2.50	39.6892	23.5781	140.3107	9.0137	9.0307	-0.7695	0.6386	8.2612	2.9668	3.6054	19.6762	1.6119	50.3107
2.60	36.2948	22.6198	143.7051	10.7717	10.7491	-0.8059	0.5919	9.9431	3.5510	4.1429	23.4980	1.7794	53.7051
2.70	32.9722	21.7384	147.0277	12.8966	12.8183	-0.8389	0.5442	11.9794	4.2322	4.7765	28.0868	1.9480	57.0277
2.80	29.7234	20.9248	150.2765	15.4649	15.3134	-0.8684	0.4958	14.4450	5.0273	5.5232	33.6007	2.1168	60.2765
2.90	26.5495	20.1712	153.4504	18.5690	18.3246	-0.8945	0.4469	17.4301	5.9561	6.4031	40.2300	2.2852	63.4504
3.00	23.4510	19.4712	156.5489	22.3196	21.9605	-0.9174	0.3979	21.0431	7.0419	7.4398	48.2029	2.4523	66.5489
3.10	20.4283	18.8190	159.5716	26.8498	26.3516	-0.9371	0.3490	25.4145	8.3122	8.6612	57.7930	2.6177	69.5716
3.20	17.4809	18.2090	162.5190	32.3190	31.6542	-0.9538	0.3003	30.7004	9.7993	10.0966	69.3275	2.7808	72.5190
3.30	14.6083	17.6397	165.3916	38.9179	38.0556	-0.9676	0.2522	37.0880	11.5410	11.7933	83.1977	2.9412	75.3916
3.40	11.8096	17.1046	168.1903	46.8744	45.7799	-0.9788	0.2046	44.8011	13.5819	13.7865	99.8704	3.0985	78.1903
3.50	9.0837	16.6015	170.9162	56.4603	55.0942	-0.9874	0.1578	54.1067	15.9736	16.1315	119.9016	3.2525	80.9162
3.60	6.4294	16.1276	173.5705	67.9994	66.3170	-0.9937	0.1119	65.3233	18.7767	18.8887	143.9530	3.4028	83.5705
3.70	3.8452	15.8803	176.1547	81.8764	79.8270	-0.9977	0.0670	78.8293	22.0616	22.1287	172.8105	3.5493	86.1547
3.80	1.3297	15.2575	178.6702	98.5480	96.0742	-0.9997	0.0232	95.0745	25.9104	25.9337	207.4057	3.6918	88.6702
3.90	-1.1185	14.8571	181.1185	118.5555	115.5918	-0.9998	0.0115	114.5920	30.4183	30.3988	248.8420	3.8302	91.1185
4.00	-3.5014	14.4775	183.5014	142.5389	139.0109	-0.9981	0.0012	138.0127	35.6958	35.8347	298.4230	3.9644	93.5014

Tableau (III.4)

Résultats numériques du dimensionnement pour  $\gamma=1.17$  d'une tuyère à corps central plane type à boucon ' PLUG NOZZLE '.

$M_s$	$\psi$ (deg)	$\varphi_s$ (deg)	$\varphi_E$ (deg)	$\frac{\lambda_s}{\lambda_E}$	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{X_E}{\lambda_E}$	$\frac{Y}{\lambda_E}$	$\frac{X_{PLUG}}{\lambda_E}$	$\frac{R_E}{\lambda_E}$	$\frac{R_s}{\lambda_E}$	Masse $\frac{p\lambda_E}{p_0\lambda_E}$	$\frac{F_p}{p_0\lambda_E}$	$\theta^*$ (deg)
1.00	90.0000	90.0000	90.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	88.6637	65.3800	91.3362	1.1087	0.4852	-0.0233	0.9997	0.4618	0.0081	1.0079	0.9705	0.0084	1.3362
1.20	86.4417	56.4426	93.5582	1.2365	0.7455	-0.0622	0.9980	0.6835	0.0323	1.0304	1.4928	0.0323	3.5582
1.30	83.8297	50.2848	96.1702	1.3861	0.9932	-0.1074	0.9942	0.8857	0.0720	1.0663	1.9927	0.0697	6.1702
1.40	81.0129	45.5846	98.9870	1.5608	1.2486	-0.1562	0.9877	1.0923	0.1272	1.1149	2.5132	0.1188	8.9870
1.50	78.0947	41.8103	101.9052	1.7642	1.5212	-0.2062	0.9784	1.3149	0.1976	1.1761	3.0750	0.1780	11.9052
1.60	75.1396	38.6621	104.8603	2.0003	1.8180	-0.2564	0.9665	1.5615	0.2836	1.2502	3.6931	0.2457	14.8603
1.70	72.1900	36.0318	107.8099	2.2739	2.1447	-0.3058	0.9520	1.8389	0.3855	1.3376	4.3810	0.3206	17.8099
1.80	69.2749	33.7489	110.7250	2.5901	2.5075	-0.3538	0.9352	2.1536	0.5036	1.4389	5.1516	0.4012	20.7250
1.90	66.4138	31.7568	113.5861	2.9549	2.9127	-0.4001	0.9164	2.5125	0.6387	1.5552	6.0188	0.4864	23.5861
2.00	63.6202	30.0000	116.3797	3.3750	3.3671	-0.4443	0.8958	2.9228	0.7916	1.6875	6.9973	0.5751	26.3797
2.10	60.9029	28.4368	119.0970	3.8575	3.8784	-0.4862	0.8737	3.3921	0.9631	1.8369	8.1028	0.6664	29.0970
2.20	58.2675	27.0356	121.7324	4.4109	4.4548	-0.5259	0.8505	3.9289	1.1544	2.0049	9.3530	0.7594	31.7324
2.30	55.7172	25.7714	124.2827	5.0442	5.1057	-0.5632	0.8262	4.5424	1.3668	2.1931	10.7667	0.8534	34.2827
2.40	53.2534	24.6243	126.7465	5.7674	5.8412	-0.5982	0.8012	5.2429	1.6018	2.4031	12.3651	0.9478	36.7465
2.50	50.8764	23.5781	129.1235	6.5918	6.6724	-0.6309	0.7757	6.0414	1.8609	2.6367	14.1710	1.0420	39.1235
2.60	48.5852	22.6198	131.4147	7.5295	7.6118	-0.6615	0.7499	6.9503	2.1460	2.8959	16.2097	1.1356	41.4147
2.70	46.3785	21.7384	133.6214	8.5941	8.6728	-0.6898	0.7239	7.9829	2.4591	3.1830	18.5088	1.2282	43.6214
2.80	44.2541	20.9248	135.7458	9.8003	9.8702	-0.7162	0.6978	9.1540	2.8022	3.5001	21.0985	1.3196	45.7458
2.90	42.2096	20.1712	137.7903	11.1643	11.2202	-0.7406	0.6718	10.4795	3.1779	3.8497	24.0116	1.4094	47.7903
3.00	40.2426	19.4712	139.7573	12.7037	12.7404	-0.7633	0.6460	11.9771	3.5885	4.2345	27.2840	1.4974	49.7573
3.10	38.3502	18.8190	141.6497	14.4376	14.4501	-0.7842	0.6204	13.6658	4.0368	4.6573	30.9548	1.5836	51.6497
3.20	36.5296	18.2099	143.4703	16.3870	16.3699	-0.8035	0.5952	15.5663	4.5257	5.1209	35.0662	1.6677	53.4703
3.30	34.7780	17.6397	145.2219	18.5745	18.5225	-0.8213	0.5703	17.7012	5.0582	5.6286	39.6642	1.7498	55.2219
3.40	33.0924	17.1046	146.9075	21.0246	20.9324	-0.8377	0.5459	20.0946	5.8377	6.1867	44.7983	1.8297	56.9075
3.50	31.4702	16.6015	148.5297	23.7637	23.6260	-0.8529	0.5220	22.7731	6.2675	6.7896	50.5221	1.9075	58.5297
3.60	29.9085	16.1276	150.0914	26.8204	26.6317	-0.8668	0.4986	25.7649	6.9515	7.4501	56.8935	1.9831	60.0914
3.70	28.4047	15.6803	151.5952	30.2256	29.9803	-0.8796	0.4756	29.1007	7.6933	8.1690	63.9747	2.0565	61.5952
3.80	26.9561	15.2575	153.0438	34.0123	33.7048	-0.8913	0.4533	32.8134	8.4973	8.9506	71.8326	2.1277	63.0438
3.90	25.5604	14.8571	154.4395	38.2161	37.8405	-0.9021	0.4314	36.9384	9.3675	9.7990	80.5386	2.1967	64.4395
4.00	24.2151	14.4775	155.7848	42.8751	42.4256	-0.9120	0.4101	41.5136	10.3086	10.7187	90.1706	2.2637	65.7848

Tableau (III.5) Résultats numériques du dimensionnement pour  $\gamma=1.14$  d'une tuyère à corps central plane type à boucon 'PLUG NOZZLE'.

$M_s$	$\psi$ (deg)	$\varphi_s$ (deg)	$\varphi_E$ (deg)	$\frac{\lambda_s}{\lambda_E}$	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{X_E}{\lambda_E}$	$\frac{Y}{\lambda_E}$	$\frac{X_{PLUG}}{\lambda_E}$	$\frac{R_E}{\lambda_E}$	$\frac{R_s}{\lambda_E}$	Masse $\frac{P \lambda_E}{P_0}$	$\frac{F_P}{P_0}$	$\theta^*$ (deg)
1.00	90.0000	90.0000	90.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	88.8060	65.3800	91.1939	1.1077	0.4823	-0.0208	0.9997	0.4614	0.0072	1.0070	0.9647	0.0069	1.1939
1.20	86.8505	56.4426	93.1494	1.2321	0.7360	-0.0549	0.9984	0.6811	0.0283	1.0268	1.4734	0.0260	3.1494
1.30	84.5888	50.2848	95.4111	1.3750	0.9728	-0.0943	0.9955	0.8785	0.0621	1.0576	1.9505	0.0553	5.4111
1.40	82.1889	45.5846	97.8110	1.5380	1.2123	-0.1359	0.9907	1.0764	0.1079	1.0986	2.4365	0.0928	7.8110
1.50	79.7416	41.8103	100.2583	1.7235	1.4627	-0.1780	0.9840	1.2846	0.1650	1.1490	2.9489	0.1370	10.2583
1.60	77.3012	38.6821	102.6987	1.9335	1.7291	-0.2198	0.9755	1.5093	0.2329	1.2084	3.4986	0.1863	12.6987
1.70	74.9015	36.0318	105.0984	2.1704	2.0156	-0.2604	0.9654	1.7551	0.3112	1.2767	4.0943	0.2396	15.0984
1.80	72.5634	33.7489	107.4365	2.4367	2.3257	-0.2996	0.9540	2.0261	0.3996	1.3537	4.7434	0.2959	17.4365
1.90	70.3000	31.7568	109.6999	2.7351	2.6627	-0.3370	0.9414	2.3256	0.4680	1.4395	5.4528	0.3542	19.6999
2.00	68.1187	30.0000	111.8812	3.0685	3.0301	-0.3726	0.9279	2.6574	0.5063	1.5342	6.2295	0.4138	21.8812
2.10	66.0232	28.4368	113.9767	3.4398	3.4311	-0.4063	0.9137	3.0248	0.7243	1.6380	7.0802	0.4740	23.9767
2.20	64.0148	27.0356	115.9851	3.8522	3.8694	-0.4381	0.8989	3.4312	0.8521	1.7510	8.0118	0.5345	25.9851
2.30	62.0928	25.7714	117.9071	4.3089	4.3484	-0.4680	0.8837	3.8803	0.9897	1.8734	9.0315	0.5946	27.9071
2.40	60.2557	24.6243	119.7442	4.8135	4.8719	-0.4961	0.8682	4.3757	1.1373	2.0056	10.1466	0.6542	29.7442
2.50	58.5008	23.5781	121.4991	5.3695	5.4437	-0.5224	0.8526	4.9212	1.2951	2.1478	11.3647	0.7130	31.4991
2.60	56.8252	22.6198	123.1747	5.9807	6.0679	-0.5471	0.8370	5.5207	1.4632	2.3002	12.6936	0.7707	33.1747
2.70	55.2257	21.7384	124.7742	6.6511	6.7484	-0.5703	0.8214	6.1781	1.6419	2.4633	14.1414	0.8271	34.7742
2.80	53.6986	20.9148	126.3013	7.3847	7.4897	-0.5920	0.8059	6.8977	1.8315	2.6374	15.7164	0.8823	36.3013
2.90	52.2407	20.1712	127.7592	8.1858	8.2961	-0.6123	0.7905	7.6838	2.0321	2.8227	17.4274	0.9361	37.7592
3.00	50.8484	19.4712	129.1515	9.0588	9.1721	-0.6313	0.7754	8.5407	2.2441	3.0196	19.2833	0.9884	39.1515
3.10	49.5182	18.8190	130.4817	10.0083	10.1225	-0.6492	0.7606	9.4733	2.4678	3.2284	21.2932	1.0393	40.4817
3.20	48.2470	18.2099	131.7529	11.0389	11.1520	-0.6659	0.7460	10.4861	2.7036	3.4496	23.4669	1.0886	41.7529
3.30	47.0315	17.6397	132.9684	12.1556	12.2657	-0.6815	0.7317	11.5841	2.9518	3.6835	25.8142	1.1364	42.9684
3.40	45.8688	17.1046	134.1311	13.3634	13.4687	-0.6963	0.7177	12.7723	3.2126	3.9304	28.3452	1.1828	44.1311
3.50	44.7559	16.6015	135.2440	14.6675	14.7662	-0.7101	0.7040	14.0561	3.4866	4.1907	31.0704	1.2277	45.2440
3.60	43.6901	16.1276	136.3098	16.0733	16.1639	-0.7230	0.6907	15.4408	3.7740	4.4648	34.0006	1.2712	46.3098
3.70	42.6689	15.6803	137.3310	17.5863	17.6671	-0.7352	0.6777	16.9318	4.0753	4.7530	37.1469	1.3132	47.3310
3.80	41.6898	15.2575	138.3101	19.2122	19.2817	-0.7467	0.6650	18.5350	4.3907	5.0558	40.5208	1.3539	48.3101
3.90	40.7506	14.8571	139.2493	20.9567	21.0136	-0.7575	0.6527	20.2561	4.7207	5.3735	44.1339	1.3933	49.2493
4.00	39.8490	14.4775	140.1509	22.8260	22.8689	-0.7677	0.6407	22.1012	5.0657	5.7055	47.9983	1.4313	50.1509

Tableau (III.6)

Résultats numériques du dimensionnement pour  $\gamma=1.66$  d'une tuyère à corps central plane type à boucon 'PLUG NOZZLE'

On peut remarquer encore, qu'on a fait l'intérêt à la présentation adimensionnelle des résultats par rapport au rayon polaire du col  $\lambda_E$ . Pour déterminer les valeurs réelles de la conception, il suffit de multiplier les résultats des tableaux par la valeur  $\lambda_E$  prise au col.

Concernant la masse de la tuyère présentée par la colonne 12 des tableaux ou la figure (III.10), elle est présentée par rapport à  $(\rho t \lambda_E)$  pour ne pas faire un choix du matériaux ainsi que l'épaisseur de son paroi.

Concernant la force de pression présentée par la colonne 13 des tableaux et la figure (III.15), on a préféré de l'adimensionnaliser par rapport à la pression de la chambre de combustion  $P_0$  et le rayon du col. Si on connaît la pression  $P_0$  de la chambre de combustion et le rayon  $\lambda_E$  on peut facilement déterminer la force de pression exercée sur le corps central.

Une chose intéressante c'est le coefficient de poussée  $C_F$ . On a pas aimé de présenter sa valeur puisqu'elle peut être déduite à partir des résultats de la force de pression  $F_p$  en ajoutant l'effet du col et la section de sortie suivant le régime de la tuyère.

Si possible que d'autres paramètres intéressants tels que, impulsion spécifiques, variation de  $F_p$  avec l'altitude, la quantité de gaz existante dans la tuyère en tous moment, la variation du nombre de Mach suivant chaque sections vertical de la tuyère, et autres ne sont pas considérés ici et sont proposés comme des travaux de futur. Notre but principal c'est de voir la variation de quatre paramètres qui sont la masse, la longueur de la tuyère, la forme de la tuyère et force de pression en fonction de  $M_s$  et  $\gamma$ .

On remarque d'après les résultats des tableaux (III.4), (III.5) et (III.6) et les figures (III.9), (III.10), (III.15) que le gaz chaud ( $\gamma$  grand) est recommandé pour les utilisation des moteurs fusées et missiles et que si la conception est faite pour un nombre de Mach  $M_s$  grand, demande une tuyère longue, apaise et volumineuse. Alors, durant la conception, il faut entrer d'autres paramètres à fin de faire un bon choix de nombre de Mach de sortie. Autrement dit, quelle est la différence entre la conception de deux tuyères, l'une possède un nombre de Mach  $M_s$  de sortie et l'autre possède un nombre de Mach  $M'_s = M_s - \Delta M$  de sortie. Cette question sera répondu convenablement si tous les paramètres de conception sont présentés, tels que, le rôle de la tuyères (soufflerie, missile), la porté du missile, le temps de la mission, la quantité du carburant et ici on entre d'une façon indirecte dans la conception des véhicules spéciaux.

### III.5.1 Variation du rapport $\frac{L}{\lambda_E}$ en fonction de $M_s$

La courbe suivante présente la variation de la longueur de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

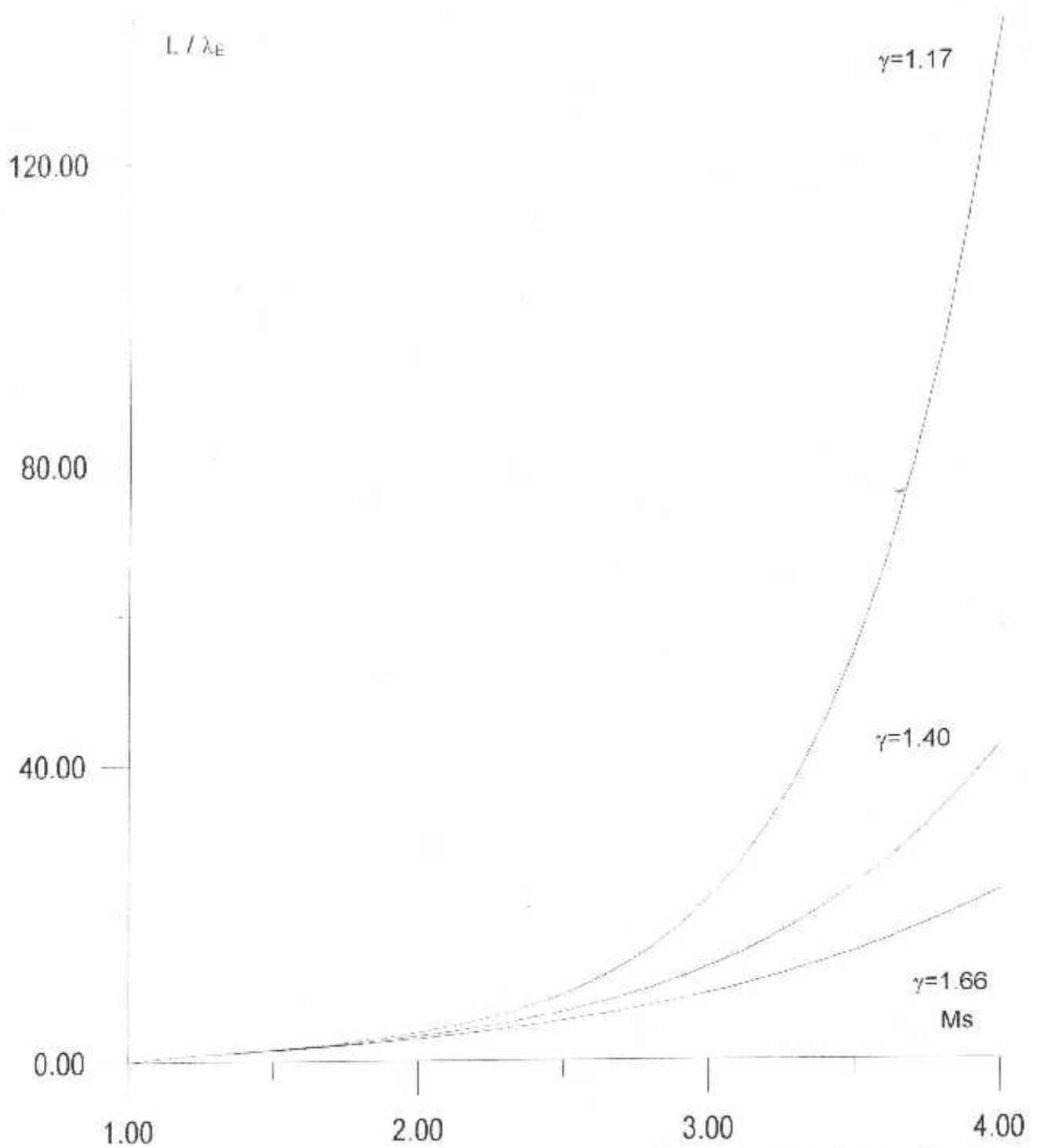


Figure (III.9) Courbes de variations de la longueur du corps central de la tuyère en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.2 Variation du rapport $\frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}$ en fonction de $M_s$

La courbe suivante présente la variation de la masse de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

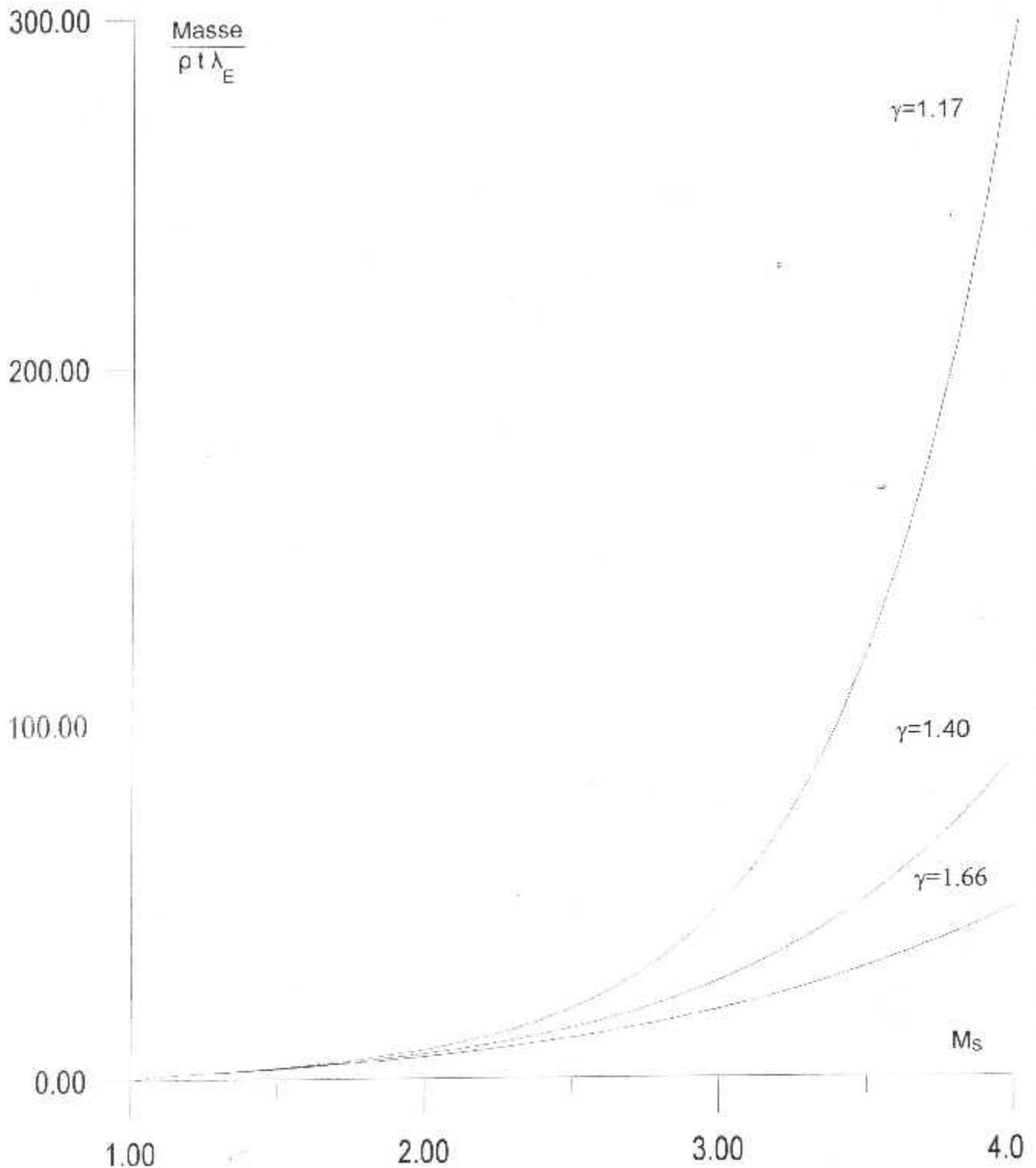


Figure (III.10) Courbes de variations de la masse du corps central de la tuyère en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.3 Variation de l'angle $\Psi$ en fonction de $M_s$

La courbe suivante présente la variation de l'angle de déviation du 'Lip' par rapport à la vertical en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

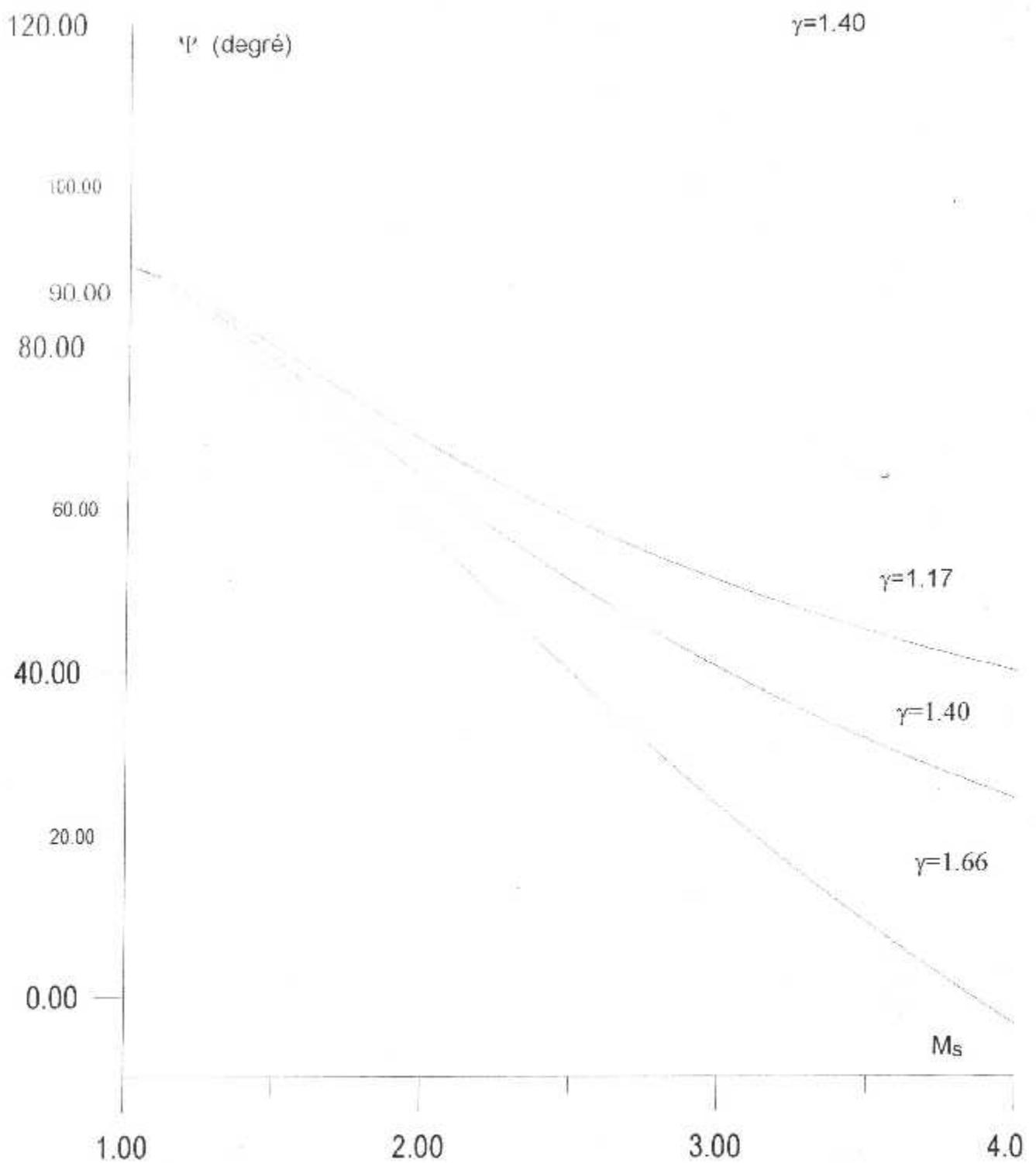


Figure (III.11) Courbes de variations de l'inclinaison du 'LIP' par rapport à la vertical en fonction de nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

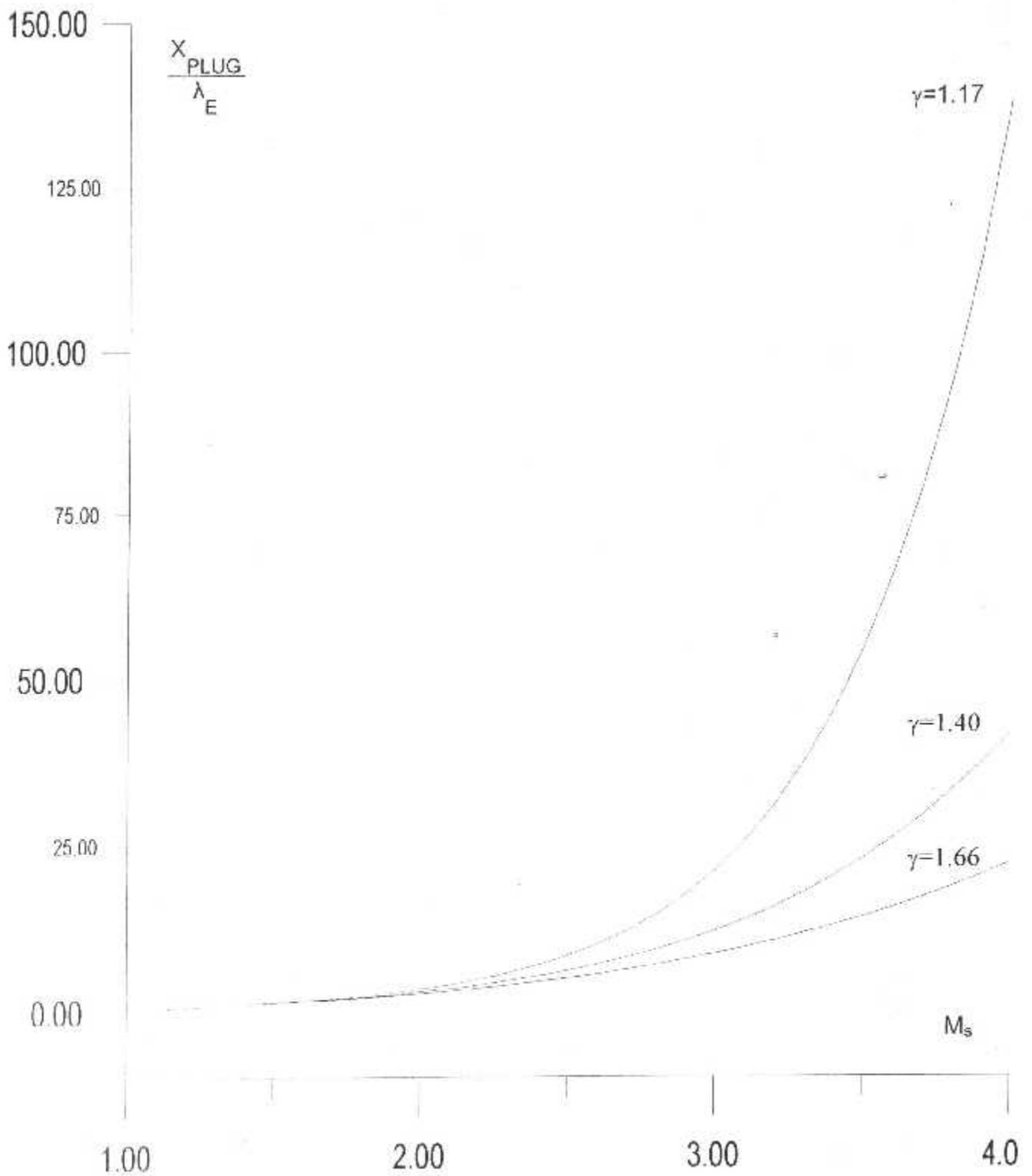


Figure (III. 12) Courbes de variations de la position de la section de sortie par rapport au 'Lip' en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.5 Variation de l'angle $\varphi_E$ en fonction de $M_S$

La figure suivante présente la variation de l'angle polaire du lip par rapport à l'horizontal en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$ .

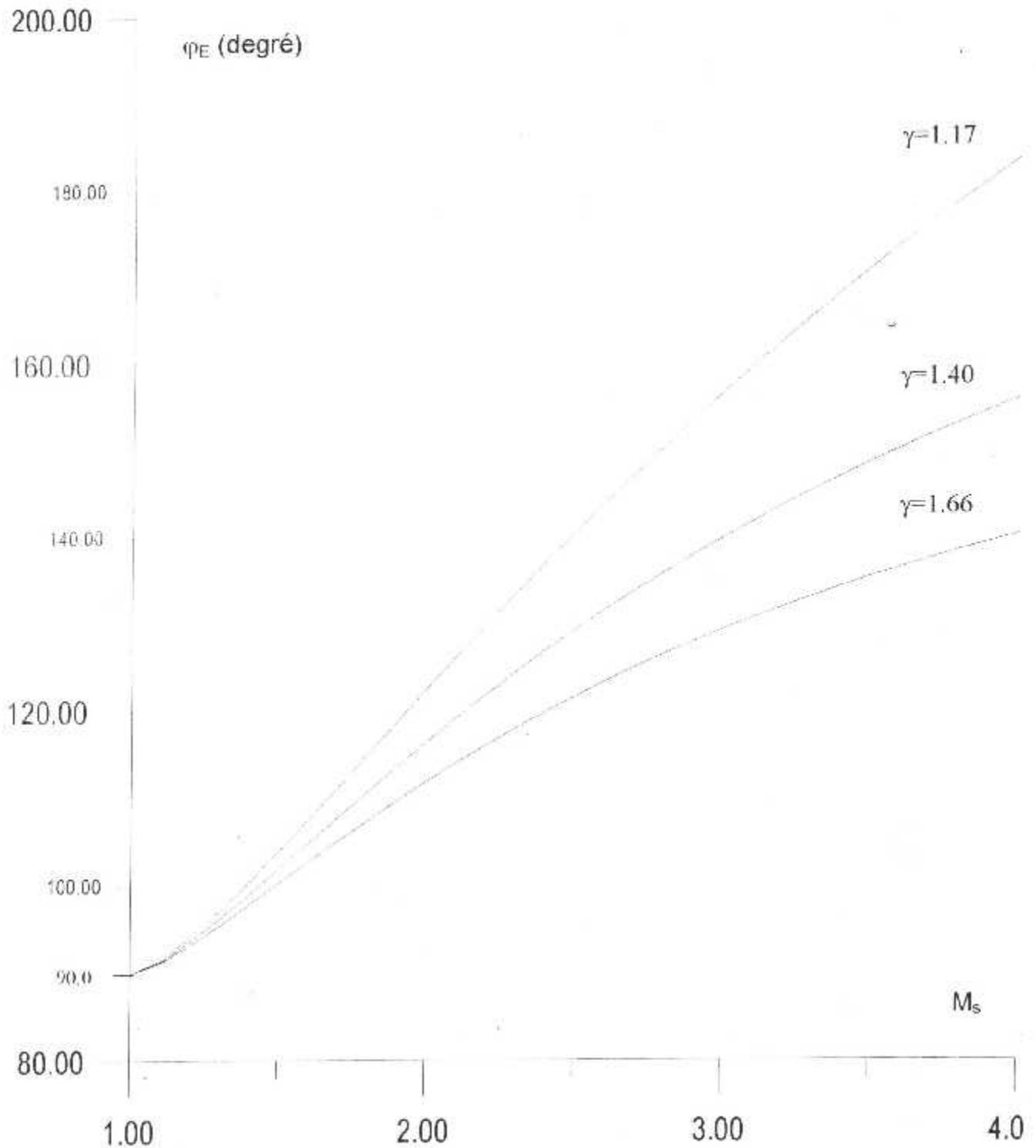


Figure (III.13) Courbes de variations de l'angle polaire  $\varphi_E$  du LIP en fonction de nombre de Mach  $M_S$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.6 Variation de l'angle $\theta^*$ en fonction de $M_s$

La figure suivante présente la variation de l'angle de déviation de la paroi ar rapport à l'horizontal en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$ .

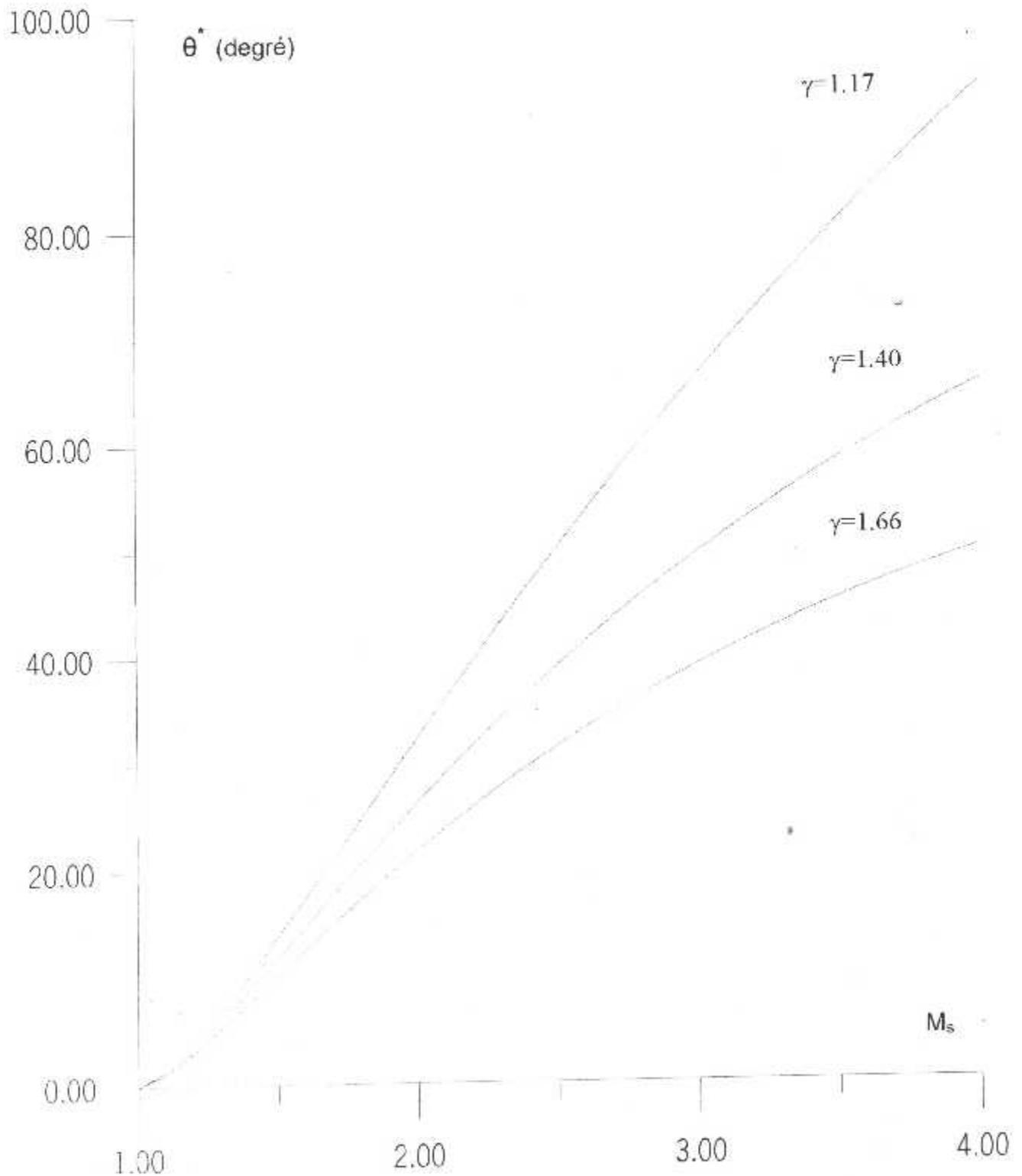


Figure (III.14) Courbes de variations de la déviation de la paroi du corps central au col en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.7 Variation du rapport $\frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$ en fonction de $M_s$

La figure suivante présente la variation du rapport de la force de pression en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$ .

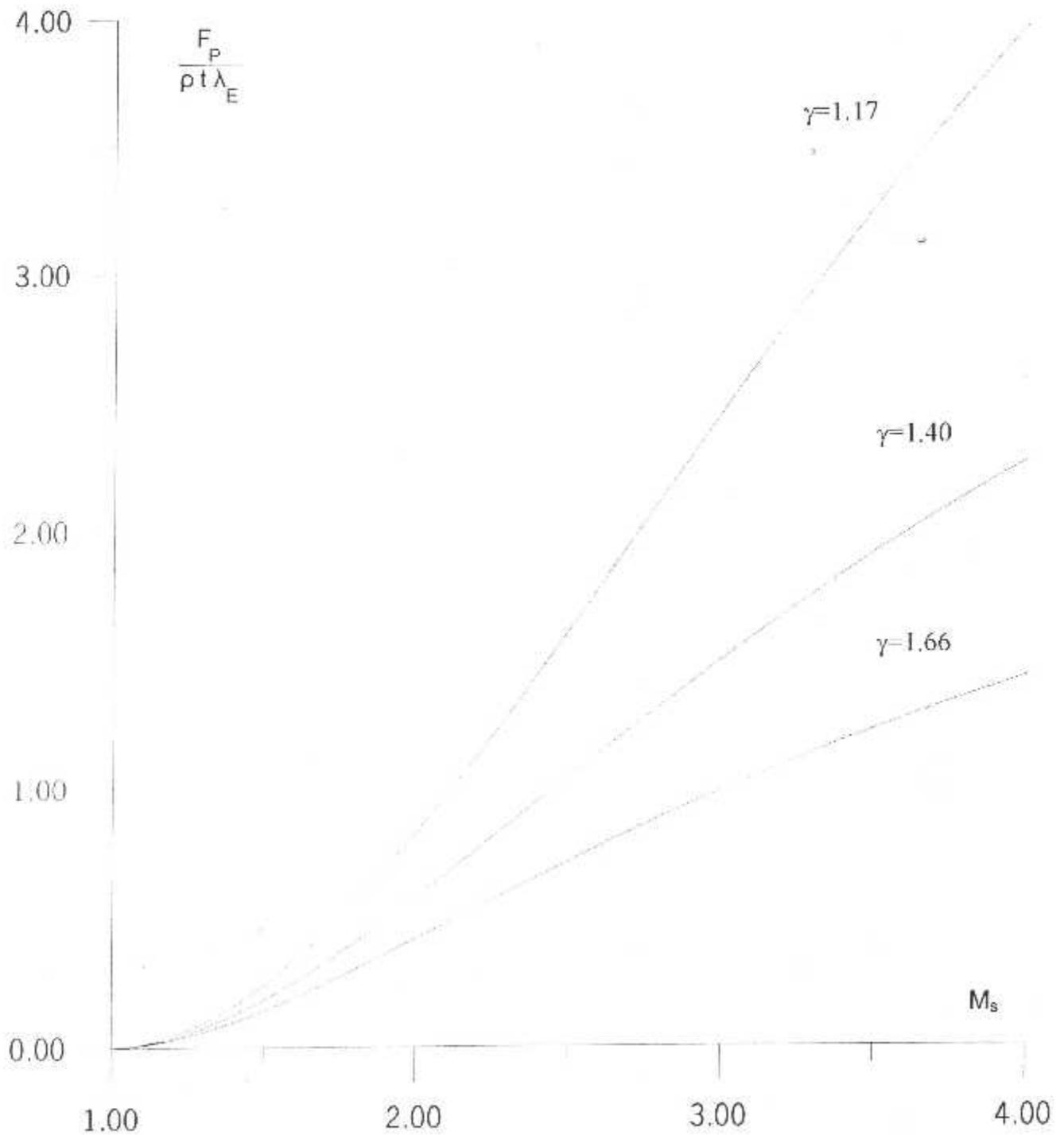


Figure (III.15) Courbes de variations de la force de poussée de corps central en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.5.8 Variation du rapport $\frac{R_s}{\lambda_E}$ en fonction de $M_s$

La figure suivante présente la variation de la section de sortie en fonction du nombre de Mach de sortie pour différentes valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$ .

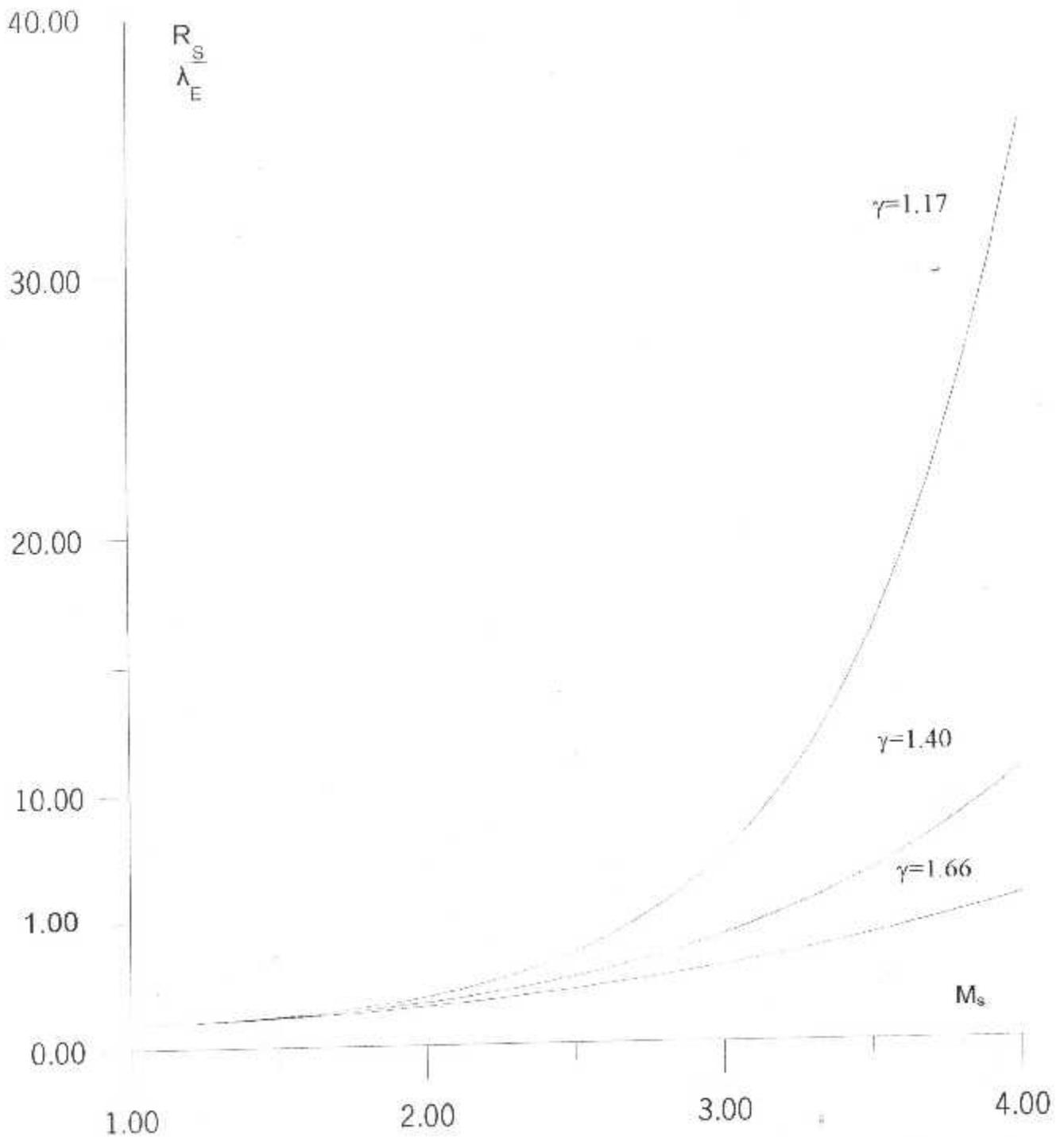


Figure (III.16) Courbes de variations du rayon de sortie  $R_s$  en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de sortie pour différentes valeurs de  $\gamma$

### III.6 Idée de troncation de la tuyère

Si on regarde bien la figure (III.7) représentant l'inclinaison de la paroi du corps rapport à l'horizontal, on remarque qu'il existe toute une partie du profil de la tuyère où la paroi est presque horizontale. Cette remarque peut être vue clairement si on regarde les figures (III.2) et (III.8)

Théoriquement, il y a un seul point sur la paroi qui possède une direction horizontale de l'écoulement, c'est la sortie de la tuyère. Mais du point de vue construction, on peut accepter une inclinaison  $\theta=1.00^\circ$  ou  $2.00^\circ$  de l'écoulement à la section de sortie du fait que l'erreur commise est négligeable.

Le nombre de Mach à la section de sortie diminue légèrement par rapport à  $M_s$  et devient non uniforme au voisinage de la paroi. Si on suppose qu'au delà de  $\theta=1.00^\circ$ , la paroi est horizontale on peut la retrancher à partir de la longueur calculée pour  $\theta=0^\circ$  et on voit le gain en longueur et on masse réalisé. La force de pression du corps central diminue légèrement.

Pour une tuyère donnant à la sortie  $M_s = 2.50$  avec  $\gamma = 1.40$ , la section au voisinage de la sortie de la tuyère possédant respectivement une inclinaison de  $0.5^\circ$ ,  $1.0^\circ$ ,  $1.50^\circ$  et  $2.00^\circ$  de la paroi se trouve à une distance  $\frac{X}{\lambda_E}$  à partir du 'Lip' sont résumés dans le tableau suivant :

$\theta$ (degré)	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00
$\frac{X}{\lambda_E}$	6.0414	5.8394	5.6441	5.4552	5.2725

Tableau (III.7) Position de la section de la paroi du corps central possédant une inclinaison donnée

La longueur, la masse et la force de poussée du corps central de la tuyère au col jusqu'à la section possédant l'inclinaison  $\theta$  donnée 0.0, 0.50, 1.00 et 2.00 sont présentées dans les tableaux (III.8).

On remarque bien, à partir des résultats de la partie gagnée de ce tableau que plus on tronque la tuyère à une section possédant une inclinaison assez grande, plus on gagne beaucoup, de masse de la tuyère mais en parallèle on perd un peu des performances sur la force de pression du corps central. Par exemple, si on tronque la tuyère à un angle  $\theta = 2.00$  degré à la sortie, on peut gagner 11.52% de longueur et de 10.85% de masse mais on perd en parallèle 0.1560% de la force de pression qui est une valeur très faible par rapport ce qu'on gagne en masse.

On peut faire l'extension de troncation de la tuyère à un angle  $\theta=5.00$  degré puisque à  $\theta=2.00$  degré on perd rien en force de pression. Le bénéfice en masse augmente si la troncation est faite à un angle élevée. On remarque d'après la dernière colonne du tableau (III.6) que le nombre de Mach sur la paroi à la section de sortie de la tuyère tronquée diminue légèrement.

Paramètres	$\frac{X}{\lambda_E}$	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho t \lambda_E}$	$\frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$	Le nombre de Mach sur la paroi à la sortie de la tuyère
$\theta = 0.0$ degré	6.0414	6.6724	14.1710	1.0420	2.5000
$\theta = 0.50$ (degré)	5.8394	6.4704	13.7670	1.0419	2.4786
Partie gagnée %	3.34	3.02	2.85	- 0.0096	/
$\theta = 1.00$ (degré)	5.6441	6.2751	13.3763	1.0416	2.4574
Partie gagnée %	6.57	5.95	5.60	- 0.0411	/
$\theta = 1.50$ (degré)	5.4552	6.0862	12.9984	1.0411	2.4364
Partie gagnée %	9.70	8.78	8.27	- 0.0914	/
$\theta = 2.00$ (degré)	5.2725	5.9035	12.6329	1.0403	2.4156
Partie gagnée %	12.72	11.52	10.85	- 0.1560	/

Tableau (III.8) Résultats approchés du dimensionnement d'une tuyère à corps central plane donnant à la sortie  $M_S = 2.50$  avec  $\gamma = 1.40$  avec une inclinaison non nulle de paroi à la section de sortie

### III.7 Comparaison avec d'autre type de tuyère

Le but de ce paragraphe c'est de voir la différence entre les résultats de la conception des diverses formes de tuyères connues en propulsion, telles que les tuyères à zone d'expansion et à détente centrée et de voir et conclure que la forme à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' étudiée dans ce modeste travail présente un grand intérêt pratique vue les résultats de conception qui sont meilleurs sans aucune discussion par rapport aux autres types. Les résultats présentés dans le tableau suivant concernant les tuyères sauf à corps central sont étudiées et trouvés dans [6]. On remarque clairement, le gain en longueur et masse de la tuyère. L'exemple qu'on a pris ici est pour  $M_S = 2.50$  et  $\gamma = 1.40$ . Les résultats sont présentés dans le tableau (III.9). Le  $R_{\text{CERCLE}}$  figuré dans le tableau présente le rayon du cercle de la zone d'expansion qui généralement prise pour la conception de ce dernier type. Dans les exemples, on a pris  $R_{\text{CERCLE}}$  égale à 8.00, 5.00 et 3.00 et pour  $R_{\text{CERCLE}} = 0.0$  veut dire que la zone d'expansion est contractée à un point. Ce type de tuyère est appelé tuyère à détente centrée.

On remarque encore que toutes les formes délivre une poussée identique présentée par une force à dimensionnelle égale à 1.0420, mais de forme et dimensions différentes. Alors ici et dans les applications aéronautiques, il est préférable et

recommandée d'utiliser les tuyères à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' surtout pour les applications sur les moteurs fusées et d'avions aux lieu des autres formes.

La valeur de  $\theta^*$  représente la déviation maximale de la tuyère. Pour une tuyère à détente centrée ou à corps central, cette valeur est au col, mais pour une tuyère à zone d'expansion, elle est au point d'attache entre la zone d'expansion et la zone de redressement.[6]

Si on fait par exemple une comparaison entre une tuyère à détente centrée et celle à corps central, on trouve qu'on peut gagner environ de 21.89 % en masse et de 27.28% en longueur avec une meme poussée de la tuyère supersonique. Ce gain augmente si on change la tuyère pour un nombre de Mach  $M_s$  élevé.

Type de tuyère	$\frac{L}{\lambda_E}$	Masse $\rho t \lambda_E$	$\frac{F_P}{P_0 \lambda_E}$	$\theta^*$ (degré)
Zone d'expansion $\left[ \frac{R_{\text{CERCLE}}}{\lambda_E} = 8.00 \right]$	12.1674	24.6650	$\approx 1.0420$	16.6931
Zone d'expansion $\left[ \frac{R_{\text{CERCLE}}}{\lambda_E} = 5.00 \right]$	11.2848	22.9353	$\approx 1.0420$	18.0125
Zone d'expansion $\left[ \frac{R_{\text{CERCLE}}}{\lambda_E} = 3.00 \right]$	10.4587	20.6143	$\approx 1.0420$	19.0882
Détente centrée $\left[ \frac{R_{\text{CERCLE}}}{\lambda_E} = 0.00 \right]$	09.1760	18.1437	$\approx 1.0420$	19.5622
Corps central (Plug Nozzle)	06.6724	14.1710	$\approx 1.0420$	39.1235

Tableau (III.9) Résultats de conception entre diverses formes des tuyères de propulsion

On peut dire à partir des résultats de tableau(III.9) et les figures (III.17), (III.18) et (III.19) qu'ils ya une infinité de tuyère délivre une meme poussée de propulsion, mais de géométrie différentes et que parmi elles, il y'on a une forme appelée tuyère à corps central type à boucon 'PLUG NOZZLE' possède une géométrie économique. La taille des tuyères à corps central nous permis de les incorporées dans les structure non volumineuses. Autrement dit, pour les applications des moteurs fusées ou missiles, une chambre propulsive (chambre de propulsion & tuyère) qui présente un étage d'un moteur, peut etre de longueur assez petite si on utilise une tuyère à corps central au lieu une tuyère à zone d'expansion ou à détente centré qui occupent un grand volume.

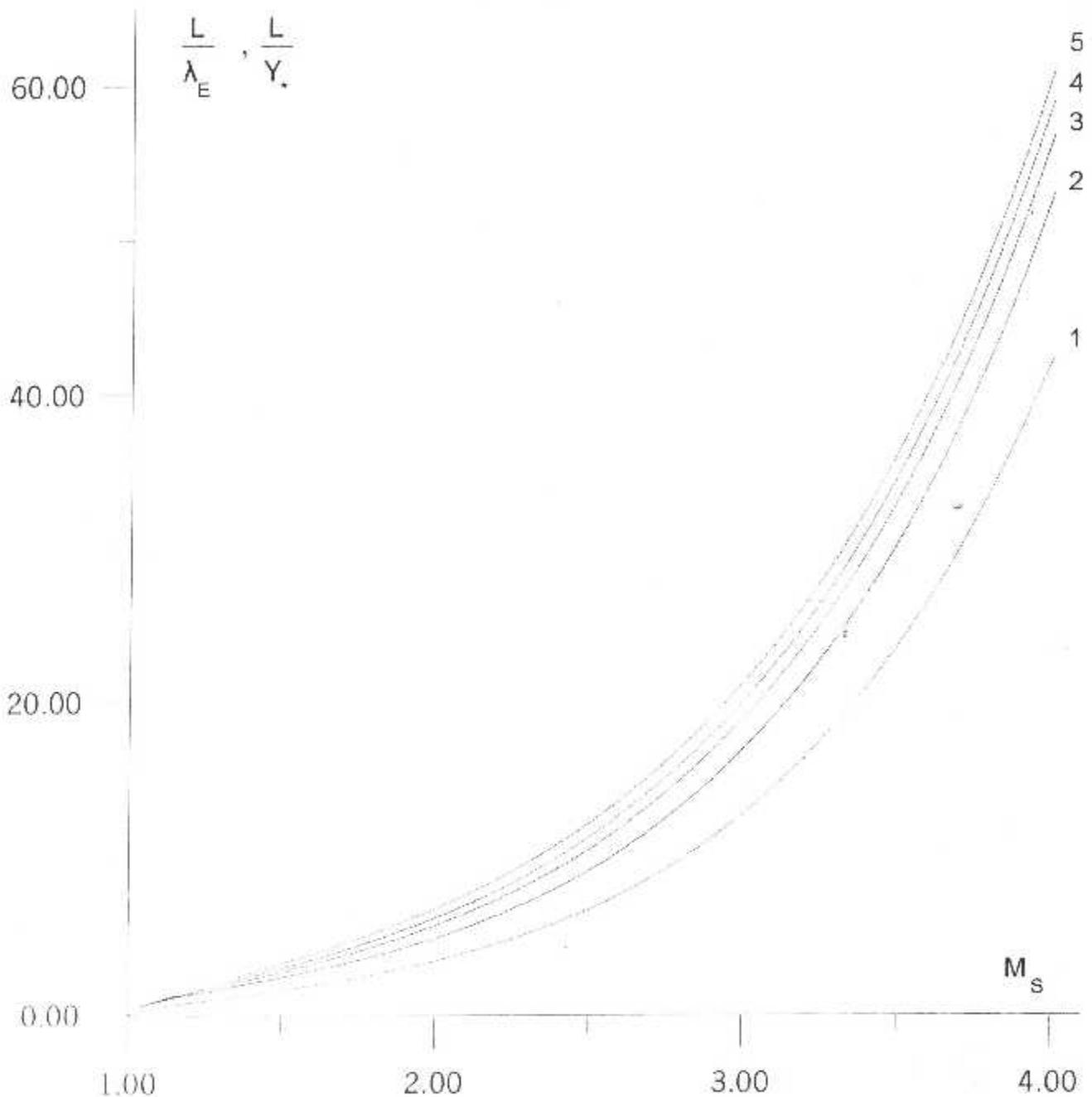
Pour le meme exemple, on a essayer de tracer sur la figure (III.19) les deux formes de tuyères supersoniques connues en propulsion avec celle étudiée dans ce modeste travail pour  $\gamma=1.40$  pour voir calirement l'allure exacte de la forme des tuyères

afin de faire une comparaison directe. Toutes les formes présentées donnent un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. On remarque encore qu'elles possèdent le même rayon de sortie  $R_S$ . On a présenté sur la figure le 'Lip' hachuré pour voir exactement le col de la tuyère étudiée puisque le col est incliné d'un angle  $\psi$ .

Sur les axes de coordonnées sur la même figure (III.19) on peut remarquer qu'on a présenté les rapports  $\frac{Y}{Y_*}$  et  $\frac{Y}{\lambda_E}$  parce que, les tuyères à zone d'expansion et à détente centrée le col est vertical et dans ce cas on utilise le rapport  $Y_*$  tandis que pour la tuyère à corps central le col est incliné et on utilise  $\lambda_E$ . Même chose pour l'axe des abscisses.

On a présenté encore sur les figures (III.17) et (III.18) les variations de la longueur et de la masse de la tuyère respectivement en fonction de nombre de Mach  $M_S$  pour les cinq formes dont l'une est à corps central pour voir exactement que la forme étudiée est meilleure par rapport aux autres pour n'importe quel nombre de Mach de sortie et qu'il y a une grande différence entre la tuyère étudiée et celle à détente centrée.

Si par exemple, on a un moteur fusée utilise une tuyère à détente centrée comme une tuyère de propulsion et on veut changer cette tuyère par une de type à corps central délivrant la même poussée, on peut gagner en plus du temps et la portée de la mission environ de 20%, ou pour même quantité de carburant, la tuyère à corps central porte le missile à une distance très grande par rapport à un missile avec une tuyère à détente centrée par une différence de 20% environ.



- 1 Tuyère à corps central à bouchon type ' PLUG NOZZLE '
- 2 Tuyère à détente centrée
- 3 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{CERCLE}}{Y_c} = 3.00$
- 4 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{CERCLE}}{Y_c} = 5.00$
- 5 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{CERCLE}}{Y_c} = 8.00$

Figure (III.17) Variation de la longueur de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_s$  avec  $\gamma = 1.40$  pour différentes formes de tuyères connues en propulsion.

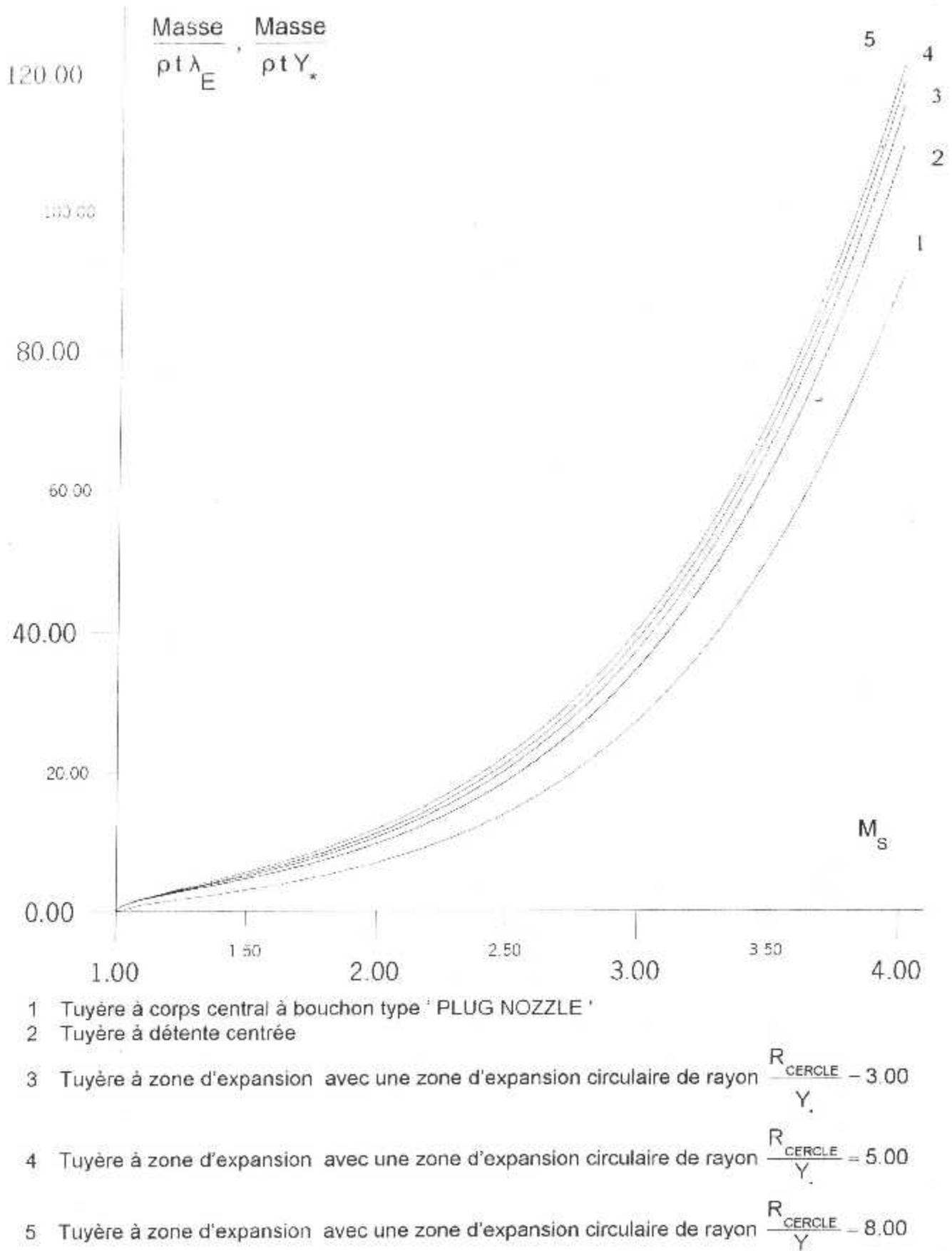
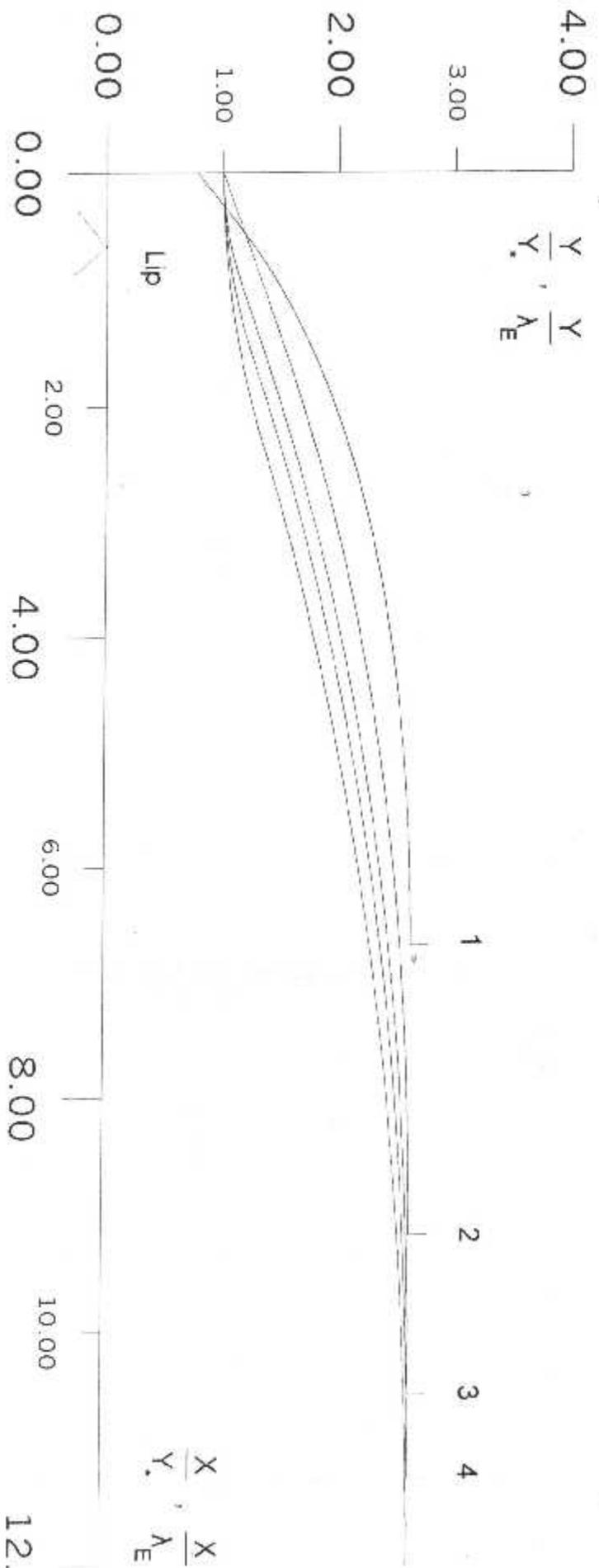


Figure (III.18) Variation de la masse de la structure de la tuyère en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_s$  avec  $\gamma=1.40$  pour différentes formes de tuyères connues en propulsion.



- 1 Tuyère à corps central à bouchon type ' PLUG NOZZLE '
- 2 Tuyère à détente centrée
- 3 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{\text{CERCLE}}}{Y} = 3.00$
- 4 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{\text{CERCLE}}}{Y} = 5.00$
- 5 Tuyère à zone d'expansion avec une zone d'expansion circulaire de rayon  $\frac{R_{\text{CERCLE}}}{Y} = 8.00$

Figure (III. 19) Différentes formes des tuyères supersoniques planes donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle pour  $M_s = 2.50$  et  $\gamma = 1.40$ .

## Conclusion

Dans ce modeste travail, on a établi un programme qui permet de déterminer par une méthode développée en collaboration, les formes des profils des tuyères supersoniques planes de type à corps central 'Plug nozzle' donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle sur l'hypothèse d'un gaz parfait et dans le cadre d'un gaz thermiquement et caloriquement parfait.

On a obtenu et démontré par le programme les résultats suivants :

1. L'existence d'une infinité de profils possédant le même nombre de Mach de sortie, dont l'un est de type à détente centrée et l'un de type à corps central et les autres sont tous de type à zone d'expansion.
2. La plus petite longueur de tuyères est obtenue dans le cas d'une tuyère à corps central.
3. Les tuyères donnant à la sortie le même nombre de Mach utilisant le même gaz de propulsion délivrent la même force de pression indépendamment de la forme et de la géométrie.
4. Le gaz utilisé dans la propulsion influe considérablement sur la forme de la tuyère de propulsion dimensionnée. Si le gaz possède un rapport des chaleurs spécifique  $\gamma$  grand donne une longueur et masse de tuyère petite par rapport à une autre tuyère utilise un gaz possédant une valeur de  $\gamma$  petite par rapport à la première tuyère.
5. Pour les applications des moteurs fusée, missiles et moteurs des avions supersoniques ainsi que pour les navettes spatiales, on recommande d'utiliser des gaz de propulsion connus par le nom 'gaz chaud' afin d'obtenir des masses de la structure faible.
6. Pour les fabrications des souffleries, on recommande d'utiliser des gaz de propulsion connus par le nom 'gaz froid' afin de voir des températures faible des gaz d'échappement surtout si le circuit du gaz est ouvert.
7. On recommande les autorités militaires de perfectionner les anciens missiles qui ont fabriqués sur la base de tuyères à détente centrée par la nouvelle forme étudiée dans ce modeste travail connu par la tuyère à corps central afin améliorer les performances soit en augmentant la portée du missile ou augmenter le temps de mission de vol. On estime qu'on peut gagner environ 20% de performance.

Il est très utile, pour rendre l'étude assez détaillée sur ce domaine, de s'attaquer à des problèmes constituant des sujets d'études très intéressants. Nous citons ici quelques thèmes qu'on proposera comme des travaux de futur.

## Références

- [1] John D. Anderson, Jr., ' Fundamentals of Aerodynamics,' McGraw-Hill Book company, New York, 1988.
- [2] John D. Anderson, Jr., ' Modern Compressible Flow : With Historical Perspective.' McGraw-Hill Book company, New York, 1982.
- [3] Inge L. Ryhming, 'Dynamique des fluides,' Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [4] Hill P. G. Peterson C. R., 'Mechanics and Thermodynamics of Propulsion,' Addition-Wesley Publishing Company Inc., 1965.
- [5] Shapiro, A. H., 'The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow,' Vol. I The Ronald Press Company, New York, 1953.
- [6] Zebbiche T., ' Détermination des profils des tuyères supersoniques par la méthode des caractéristiques, ' Thèse de Magister, Institut d'Aéronautique, Université de Blida, Septembre 1995.
- [7] H. Greer, ' Rapid Method for Plug Nozzle Design,' ARS Journal, PP. 560-561, 1961.
- [8] R. Comolet, ' Mécanique expérimentale des fluides' Tom I " Statique et dynamique des fluides non visqueux" Edition Masson, 1979