

UNIVERSITE SAAD DAHLAB - BLIDA 1

INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES

DEPARTEMENT DE CONSTRUCTION

OPTION : PROPULSION AVION

**PROJET DE FIN D'ÉTUDES DE
MASTER**

La Méthode des ondelettes et ses applications

Présenté par :

CHIKH AHMED Brahim

CHEIKH Ahmed El Amine

Sous la responsabilité de:

Dr S.BOUKRAA.

Octobre 2014

ملخص

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الهدف من هذا العمل للمذكرة هو معرفة وفهم طريقة التحليل بواسطة الموجات عن طريق تطبيقاتها ومقارنتها تحويل فورييه وكذلك معرفة محاسن ومساوئ هذه الطريقة

من بين عائلات الموجات التي اخترناها في هذه المذكرة هي عائلة هار وعائلة دوبشي

التطبيقات المختارة في المذكرة

صناعة الموجات عن طريق عملية التكرار بخوارزمية معين

حل معادلة البرغر ذات بعد واحد بطريقة الموجات

Résumé

L'objectif de notre travail est d'abord l'apprentissage et la compréhension de la méthode des ondelettes par ses applications et la comparaison avec la transformée de Fourier, et ensuite de montrer les avantages et les inconvénients de ces méthodes.

Parmi les familles d'ondelettes que nous avons traité figurent les ondelettes de Haar et les ondelettes de Daubechies.

Parmi les applications que nous avons choisit:

- la construction des ondelettes de Haar et Daubechies par une méthode itérative par un algorithme de processus itératif.
- la résolution de l'équation mono dimensionnelle de Burgers avec un nombre de Reynolds élevé par l'utilisation des ondelettes, et la comparaison avec la solution exacte.

ABSTRACT

The objective of our work is learning and understanding the wavelet method for their applications and compare it with the Fourier transform, and to see the interest and disadvantages of methods.

Among families of wavelets we treat are Haar wavelets and Daubechies wavelets.

And for the applications that we have choose :

- Constructing Haar wavelet and Daubechies Raking by an algorithm of iterative process.

- The Resolution of one dimensional Burgers equation with a high Reynolds number by the use wavelets. And compared with the exact solution.

DEDICACES

A ceux qui se sont livrés chair et âme à la science et son Progrès.

Au martyrs de la nation avec leur courage et leur persévérance ont cassé les entraves de
L'impossible.

A la source d'une lumière incessante, d'une vision éclatante, de décisions tranchantes, à nos
parents dont toute récompense est insuffisante.

A tous nos amis de la promotion 2014.

A tous ceux qui nous connaissent de près et de loin.

Remerciements

Nous remercions le grand dieu de nous avoir si bien entourés et de nous avoir donné la force et la patience d'achever notre étude.

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur Salah BOUKRAA, Professeur à l'institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université Saad Dahlab de Blida. Qu'il nous soit permis de lui exprimer nos vifs sentiments de gratitude, pour avoir dirigé ce travail, pour l'aide, le suivi et l'attention constante qu'il a apporté à notre égard, lors de l'élaboration de ce travail.

Notre remerciements vont aussi à l'égard de toutes personnes ayant contribué de près ou loin ou qui nous ont encouragé à faire ce travail.

Egalement, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant toute la durée de nos études du primaire à l'université.

Nous remercions également nos parents et tous nos amis et camarades de la promotion. Nous leur souhaitons à tous la réussite.

Table de matière

Chapitre .1

• Historique	8
• Introduction général	9
• Plan de la mémoire	10

Chapitre .2

2.1 Introduction	11
2.2 La transformer de Fourier continue	11
2.2.1 Définition	11
2.2.2 Interprétation	12
2.3 Transformée de Fourier Discrète: TFD	12
• Définition de la TFD :	12
• Les inconvénients de la transformer de Fourier	15
• Transformée de Fourier fenêtrée TFF	16
2.5.1 Les étapes de l'algorithme de la TFF	18
2.5.2 Les inconvénients majeurs de cette transformation	
Conclusion	

Chapitre .3

3.1 introduction	20
3.2 Transformée en ondelettes continues	21
3.3 Conditions mathématiques de validité d'une ondelette	26
3.4 Propriété d'une ondelette mère	27
3.5 Transformée en ondelettes discrète	28

3.5.1 Implémentation des ondelettes discrètes par bancs des filtres	28
3. 5. 1. 1. Algorithme de Mallat	28
3. 5. 1. 2. Architecture pyramidale	29
3. 5. 1 Analyse multirésolution	30
3. 5. 3 Ondelette dyadique	31
3. 5. 4 Coefficients de la TOD	31
3.6 Familles d'ondelettes	32
3.7 Le choix de la meilleure ondelette	33

Chapitre .4

4.1 La fonction Mise à l'échelle de Haar	35
Définition 4.1	37
Définition 4.2	41
4.2 Les algorithmes de décomposition et reconstruction de Haar	44
4.2.1 Décomposition	44
4.2 Les algorithmes de décomposition et reconstruction de Haar	48
4.2.2 Reconstruction	53
4.2.3 Filtres et diagrammes	56
Conclusion	

Chapitre.5

Introduction	59
5.1 Constriction de Daubechie	59
5.2 classification, moments, ET douceur	64
5.3détiction des singularités .	68
6.4 Solution computationnel	70
6.5fonction scalaire dans les pointes dyadiques	72

Chapitre .6

Introduction	78
6.1 Construction de l'ondelette de Haar	79
<i>6.2 La constriction de l'ondelette de Daubechies (Db4)</i>	<i>82</i>
<i>6.3 La constriction de l'ondelette de Daubechies (Db6)</i>	<i>86</i>
6.4 Construction de coiflet 6	90
<i>conclusion</i>	

Chapitre.7

Résoudre le problème de l'équation de burgers par la méthode des ondelettes	97
Conclusion	100

Liste des Figures

Figure	Titre	Page
	Chap.2	
Figure 2.a.1	Le signal $s(t)$ dans le domaine temporel	13
Figure 2..b.1	Approximation de signal $s(t)$ par la transformer de Fourier	14
Figure 2.1	Le signal $s(t)$ dans le domaine temporel	14
Figure 2.2	Le signal $s(t)$ dans le domaine fréquentiel	14
Figure. 2.3	Le plan temps-fréquence	17
	Chap.3	
Figure. 3.1.	Plan temps-échelle.	21
Figure. 3.2.	Résolution temps-fréquence (a) et résolution temps-échelle (b).	22
Figure. 3.3.	Différents facteurs de dilatation d'une ondelette	23
Figure. 3.4.	La position d'une ondelette à une échelle donnée	24
Figure. 3.5	. Le signal sinus bruité et sa transformation d'ondelette continue	26
Figure.3.6.	Algorithme de Mallat unidimensionnel.	29
Figure.3.7.	Décomposition pyramidale	30
	Chap.4	
Figure 4.1	Graphique de la fonction d'échelle de Haar.	35
Figure 4.2	Tension d'un compteur défectueux	36
Figure 4.3	Rapprochement de signal de tension par des	36

Figure 4.4	Graphique de l'élément typique dans V_0 .	37
Figure4.5	Graph de f dans l'exemple 4 2.	39
Figure4.6.	Graph de $\varphi(2x)$.	39
Figure 4.7	l'ondelette de Haar $\psi(x)$	40
Figure 4.8	Approximation par des fonctions d'étape.	43
Figure 4.9	Graphique de l'exemple 4.11.	46
Figure 4.10.	8 composants.	49
Figure 4.11	7 composants.	49
Figure 4.12	6 composants.	50
Figure 4.13.	4 composants.	50
Figure 4.14.	W_7 Composants.	51
Figure 4.15.	Graphique montrant la compression de 90%.	54
Figure 4.16	Schéma de décomposition de Haar.	55
Figure 4.17	.Schéma de reconstruction Haar .	65
Chap.5		
Figure 5.1.	Graph de $\phi_0 * \phi_0$	61
Figure 5.2.	Daubechies scaling function	64
Figure 5.3.	Dauhechies wavelet function.	64
Fig.6.1	vérification du 3 ^{em} condition	80
Fig.6.2	le graphe de ϕ_0	82
Fig.6.3	le graphe de ϕ_1	81
Fig.6.4	le graphe de ϕ_2	81

Fig.6.5	le graphe de ϕ_3	82
Fig.6.6	l'ondelette de Haar.	82
Fig.6.7	vérification de 3 ^{em} condition	83
Fig.6.8	le graphe de ϕ_0	83
Fig.6.9	le graphe de ϕ_1	84
Fig.6.10	le graphe de ϕ_2	84
Fig.6.11	le graphe de ϕ_3	85
Fig.6.12	le graphe de ϕ_4	85
Fig.6.13	le graphe de ϕ_5	86
Fig.6.14	l'ondelette de Db 4	86
Fig.6.15	vérification de la 3 ^{em} condition	87
Fig.6.16	le graphe de ϕ_0	87
Fig.6.17	le graphe de ϕ_1	88
Fig.6.18	le graphe de ϕ_2	88
Fig.6.19	le graphe de ϕ_3	89
Fig.6.20	le graphe de ϕ_4	89
Fig.6.21	le graphe de ϕ_5	90
Fig.6.22	l'ondelette de Db6	90
Fig.6.23	vérification de la 3 ^{em} condition	91
Fig.6.24	le graphe de ϕ_0	91
Fig.6.25	le graphe de ϕ_1	92
Fig.6.26	le graphe de ϕ_2	92
Fig.6.27	le graphe de ϕ_3	93
Fig.6.28	le graphe de ϕ_4	93

Fig.6.29	le graphe de ϕ_5	94
Fig.6.30	l'ondelette de coiflet 6	94

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Historique

L'objet principal du traitement de signal est la description des signaux liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission.

Parmi les anciennes et célèbres méthodes de traitement de signal on citera la transformation de Fourier (1822). Cette transformation permet d'explorer la composition fréquentielle du signal et par ses propriétés de lui appliquer facilement des opérateurs de filtrages. Cette transformation est basé sur la décomposition de signal sur un ensemble des signaux de base « cosinus et sinus ». Mais cette décomposition obtenue n'est pas toujours satisfaisante.[05]

La méthode d'ondelette est proposé par Haar en (1910). Les précurseurs conscients de cette technique ont été des mathématiciens (Caldron 1964), des physiciens (Aslaken et Klauder en 1968, Paul en 1985), et surtout des ingénieurs (ou des chercheurs en science pour l'ingénieur) comme Esteban et Galand (1977), Smith et Branwell (1986), Vetterli (1986), nous pourrions parler dans leur cas de « pré- ondelette ».

Le premier à avoir utilisé la méthode et le premier à avoir proposé le nom d'ondelettes fut Jean Morlet (1983). Le problème traité par Morlet était celui de l'analyse de donnée issues de sondages sismiques effectués pour des recherches géologiques.

Les recherches tant théoriques qu'appliquées se sont très largement développées ces dernières années au point que les ondelettes sont maintenant très à la mode et qu'on a parfois voulu en faire l'outil idéal adapté à tous les problèmes.

Les applications les plus prometteuses qui semblent se dégager se retrouvent dans les domaines de l'analyse vocale, de l'analyse des signaux radar, médecine et dans les domaines de la compression des images.

1.2 Introduction générale

Les ondelettes sont un outil récent de traitement de signal permettant l'analyse, à plusieurs échelles de temps des propriétés locales de signaux complexes pouvant présenter des zones d'instationnarités. Elles donnent lieu à de nombreuses applications dans des domaines variés, comme par exemple la géophysique l'astrophysique, les télécommunications, l'imagerie et le codage vidéo. Elles sont à la base de nouvelles techniques d'analyse et de synthèse du signal et trouvent de belles applications pour des problèmes généraux tels que la compression et le débruitage. [05]

La rapidité de la diffusion des ondelettes dans la communauté scientifique tant académique qu'un industriel est surprenante. Elle est liée, en premier lieu, à leur capacité à constituer un outil adapté à un très large spectre de question tant théorique que pratique. [05]

L'émergence des ondelettes pourrait s'avérer aussi décisive que celle de l'analyse de Fourier. Un deuxième élément est à noter : les ondelettes ont bénéficié d'une conjoncture sans doute inédite dans l'histoire des mathématiques appliquées. En effet, très tôt après les fondements de la théorie mathématique, au milieu des années 1980, l'algorithme rapide et la connexion avec le traitement de signal sont apparus en même temps que les ondelettes orthogonales de Daubechies. Cet ensemble de connaissance, diffusé au travers du réseau Internet et relayé par le dynamisme de la communauté des chercheurs, a permis un développement rapide dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées mais aussi dans de vastes champs d'applications.

1.3 Plan de mémoire

Ce mémoire est organisé selon les chapitres suivants :

Chapitre 1 : une introduction générale

Chapitre 2 : la transformée de Fourier

Chapitre 3 : les ondelettes et ses familles

Chapitre 4 : ondelettes de Haar

Chapitre 5 : ondelettes de Daubechies

Chapitre 6 : construction des ondelettes par une méthode itérative

Chapitre 7 : application

Conclusion

CHAPITRE 2

TRANSFORMEE DE FOURIER

2.1 Introduction

L'analyse de Fourier est sans conteste l'un des outils les plus puissants mis à la disposition des mathématiciens et physiciens d'aujourd'hui et aussi l'un des plus utilisés. Néanmoins, bien que bâtie sur la base du concept physique de fréquence (spatiale ou temporelle), elle se révèle imparfaitement adaptée à la description de fonctions ou signaux que l'on peut rencontrer couramment.[02]

2.2 La transformée de Fourier continue

2.2.1 Définition

La transformation de Fourier, notée F , est une opération qui transforme une fonction intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est la fonction $F(f) = \hat{f}$ donnée par la formule : [02]

Analyse

$$\hat{f}(\omega) \rightarrow (Ff)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\omega t} dt \quad \omega \in \mathbb{R} \quad 2.1$$

et la transformée inverse notée \bar{F} et définie par :

Synthèse

$$f(t) \rightarrow \bar{F}\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{+2i\pi\omega t} d\omega \quad t \in \mathbb{R} \quad 2.2$$

où, ω est la fréquence du terme sinusoïdal

2.2.2 Interprétation :

La relation donne, le spectre d'amplitude du signal $f(t)$. C'est une fonction complexe continue de la fréquence ω . La dimension de cette fonction est [V / Hz] si $f(t)$ est par exemple une tension en volt, [V]. Le spectre d'amplitude est donc en réalité une densité spectrale d'amplitude.

2.3 Transformée de Fourier Discrète: TFD

Lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie, on est amené à:

- discrétiser la fonction temporelle,
- tronquer la fonction temporelle,
- discrétiser la fonction fréquentielle

2.3.1 Définition de la TFD :

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de termes $X(k)$ définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné:

$X_n = x(nT_c)$, et les N termes $X(k)$ correspondent à une approximation (à un facteur multiplicatif T_c près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence

$f_k = k f_c / N$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est-à-dire f entre 0 et f_c .

Exemple 1 :

$$\begin{cases} -1 < x < 0 & x = -1 \\ 0 < x < 1 & x = 1 \\ \text{sinon} & x = 0 \end{cases}$$

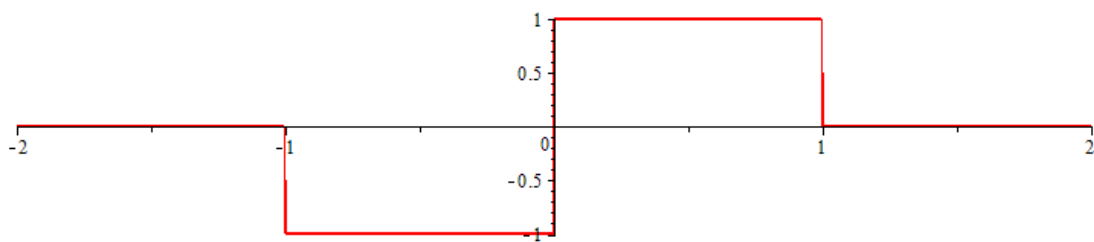


Figure.a.1 de l'exemple 1

L'approximation de la fonction par transformée de Fourier est comme suit :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Tel que:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

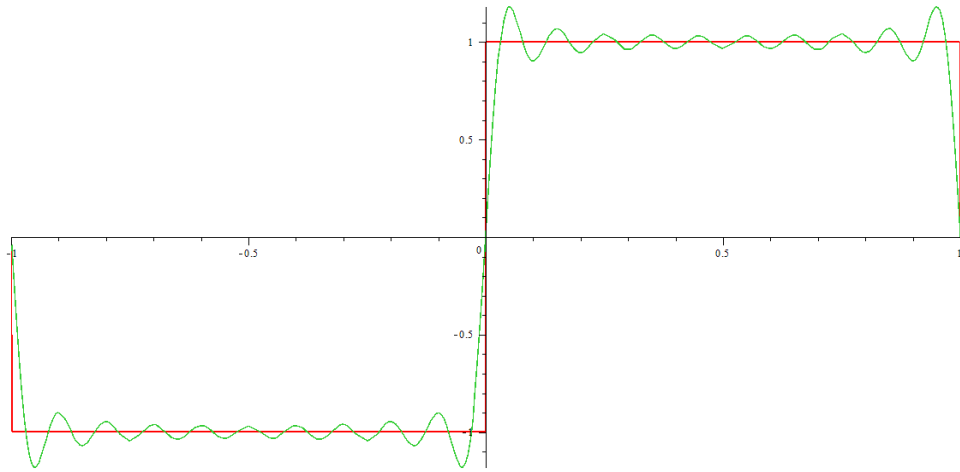


Figure. b.1 de l'exemple 1

Exemple 2 :

Soit un signal sous la forme suivant :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(10\pi x + .02)si & -1 < x < 0 \\ \sin(50\pi x + .4)si & 0 < x < 1 \end{cases}$$

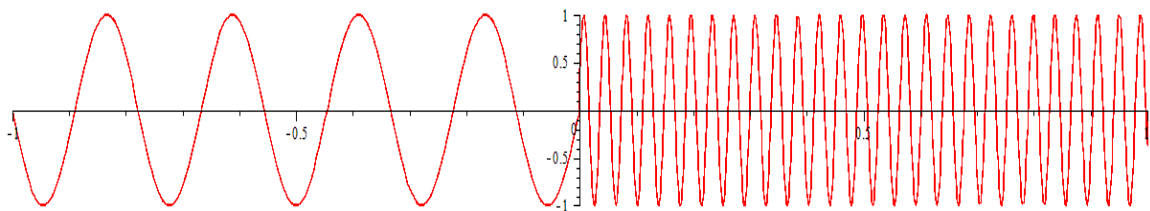


Figure 2.1 Le signal $s(t)$ dans le domaine temporel

Après La transformée de Fourier qui nous donne deux fréquences de 9 Hz et 53 Hz, on a la figure suivante :

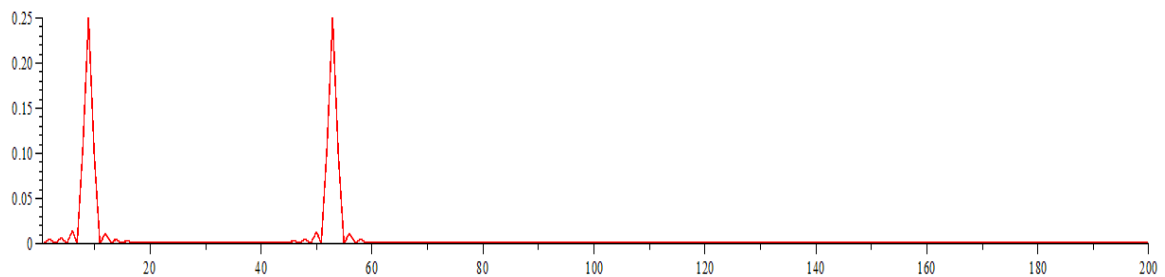


Figure 2.2 Le signal $s(t)$ dans le domaine fréquentiel

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de durée T_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N-1) T_e]$, on obtient:

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) e^{-j2\pi f n T_e} \quad 2.4$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences $f_k = \frac{k f_e}{N}$:

$$X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) e^{-j2\pi \frac{nk}{N} f_e T_e} \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad 2.5$$

Ce n'est pas une approximation sophistiquée de $X(f)$, mais elle est très utilisée en pratique sous le nom de TFD car il existe un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform) ou TFR (Transformée de Fourier rapide).

La TFD est par ailleurs utilisée, lorsque l'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique, pour définir une représentation de la suite sur une base de fonctions fréquentielles.

2.4 Les inconvénients de la transformée de Fourier

Malgré son immense succès, l'analyse de Fourier a plusieurs inconvénients, en particulier :

- Elle permet de connaître les différentes fréquences existantes dans un signal, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises,
- Elle ne permet pas l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps, (signaux non stationnaires)
- Elle donne une information globale et non locale,

- Si le signal contient N points, sa TF nécessitera un nombre d'opérations égal à $N*N$.

Pour localiser dans le temps des fréquences d'un signal $s(t)$, nous utilisons la « Transformée de Fourier fenêtrée » ou la transformée de Gabor. Elle permet de donner une représentation « Temps – Fréquence » du signal. [01]

2.5 Transformée de Fourier fenêtrée TFF

En 1940, D. Gabor a présenté la première forme de représentation « Temps-Fréquence » appelée Transformée de Fourier Fenêtrée (*TFF*). Sa technique consiste à découper le signal en différentes plages de longueur fixe.

Cette technique se base sur une analyse locale c'est-à-dire, chaque plage est étudiée séparément des autres par l'analyse traditionnelle de Fourier, juxtaposant les résultats sous la forme d'une représentation « temps – fréquence » ou « spectrogramme » [01].

C'est un outil de base pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Le signal est supposé stationnaire sur chaque fenêtre.

La *TFF* consiste en la décomposition du signal $s(t)$ suivant une famille de fonctions $g_{a,b}$ qui dérivent toutes d'une même « fonction fenêtre » $g(t)$ par :

- Translation en temps (paramètre b)
- Modulation en fréquence (paramètre a)

La fonction g est multipliée par une fonction sinusoïdale de fréquence a

$$g_{a,b}(t) = g(t-b) e^{2i\pi at}$$

Où le terme b localise une fenêtre d'analyse. Cette transformation s'écrit [01] :

$$C(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g_{a,b}(t)} dt$$

$C(a,b)$ est la transformée de Fourier fenêtrée du signal $f(t)$ sur une fenêtre de largeur b , selon une fréquence a .

La figure (Fig. III.3) montre le plan « temps – fréquence ». Les bandes verticales illustrent pour un temps b donné, « le fenêtrage du signal » calculé pour toutes les « fréquences ». Une autre interprétation, basée sur la notion de banc de filtres, est montrée par les bandes horizontales.

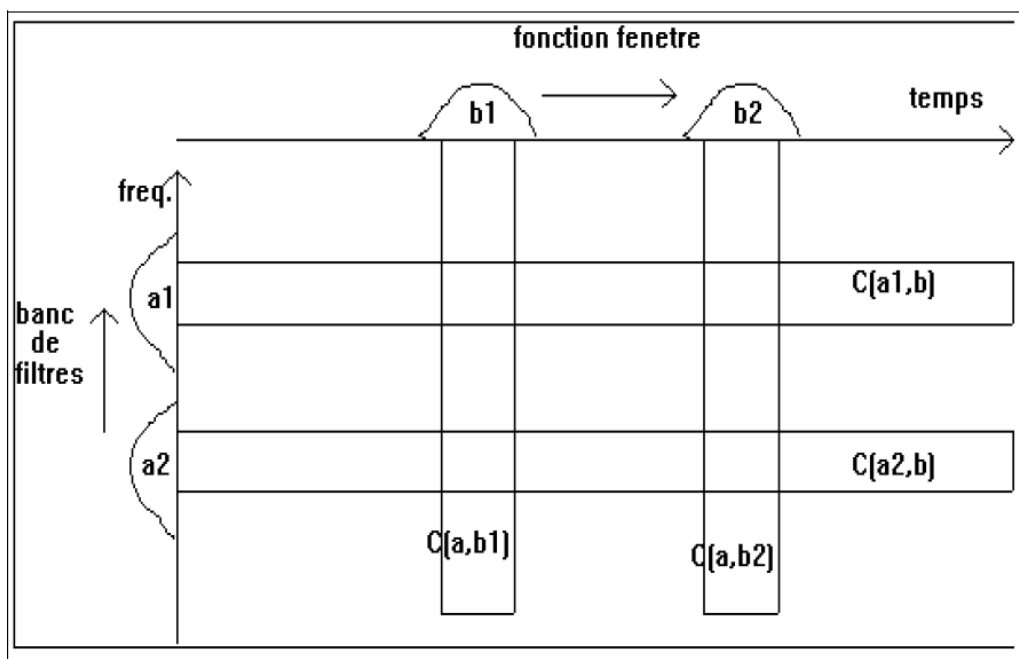


Figure. III.3. Le plan temps-fréquence [35 theseabid]

Cette transformation conserve les aspects temporels et fréquentiels du signal. Cependant le fait de décomposer un signal suivant des fonctions à la fois localisées en temps et en fréquence ne peut se faire que dans la limite imposée par « l'inégalité de Heisenberg » [01].

En effet :

Si $g(t)$ est une fonction fenêtre et $G(f)$ sa transformation de Fourier, la résolution en fréquence Δf est définie par [55] :

$$\Delta f^2 = \frac{\int f^2 |G(f)|^2 df}{\int |G(f)|^2 df}$$

De la même façon, la résolution en temps Δt est définie par :

$$\Delta t^2 = \frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt}$$

Heisenberg montre que :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

D'après ce principe, aucun signal ne peut être simultanément localisé en temps et en fréquence. L'amélioration de la résolution fréquentielle n'est possible qu'au détriment de la résolution temporelle, et vice versa.

Gabor a choisi g de manière optimale dans les limites imposées par cette inégalité. Il a choisi la fonction la plus concentrée, c'est-à-dire le signal gaussien.

2.5.1 Les étapes de l'algorithme de la TFF

1. Choisir une fonction fenêtre de longueur finie b .
2. Placer la fenêtre sur le début du signal au temps $t = 0$.
3. Tronquer le signal en utilisant cette fenêtre.
4. Calculer la TF du signal tronqué.
5. Décaler incrémentalement la fenêtre vers la droite.
6. Revenir au pas 3, jusqu'à ce que la fenêtre atteigne l'extrémité du signal

2.5.2 Les inconvénients majeurs de cette transformation

- On ne peut pas savoir quelle fréquence existe à un instant donné.
- Une fois que la fonction g est choisie, la résolution en temps et en fréquence, donnée par les variables a et b , est fixe.
- Si le signal est composé de phénomènes dont les échelles de temps sont différentes, elle ne permet pas de les analyser simultanément avec une bonne résolution en temps et en fréquence.[01]

Conclusion

Problème de l'analyse de Fourier "standard" :

- ✓ bien adaptée aux signaux stationnaires. . .
- ✓ mais ne permet pas d'obtenir d'information temporelle et locale.

La solution: transformée de Fourier à fenêtre.

Mais:

- ✓ Compromis précision temporelle / fréquentielle,
- ✓ fenêtre d'analyse fixée a priori.

"Mieux": les ondelettes permettent une décomposition multi-échelle.

CHAPITRE 3

TRANSFORMEE EN ONDELETTES

3.1 Introduction

Les ondelettes sont un outil récent de traitement du signal permettant l'analyse, à plusieurs échelles de temps, des propriétés locales de signaux complexes pouvant présenter des zones d'instationnarité. Elles donnent lieu à de nombreuses applications des domaines variés, comme par exemple :

- La *compression* et, en particulier, la compression d'image où les ondelettes constituent une méthode très compétitive. Elles permettent, grâce à des représentations généralement très creuses, de réduire considérablement le nombre d'information à coder.
- Le dé-bruitage : le dé-bruitage dans le domaine des ondelettes signifie la rejection du bruit par un seuillage adéquat.
- L'authentification, le tatouage numérique, la cryptographie et bien d'autres domaines

On distingue deux familles d'ondelettes :

- Les ondelettes continues.
- Les ondelettes discrètes.

3.2 Transformée en ondelettes continues

Pour pallier la limitation de résolution du *TFF*, J. Morlet a repris la démarche de Gabor en choisissant la fonction ψ différente de g [5]. Pour que Δt et Δf varient dans le plan temps-fréquence, la famille de ψ n'est pas construite par translation et modulation comme celle de g , mais par translation et dilatation ou contraction (changement d'échelle). On a une représentation « *temps – échelle* » (Fig3.1).

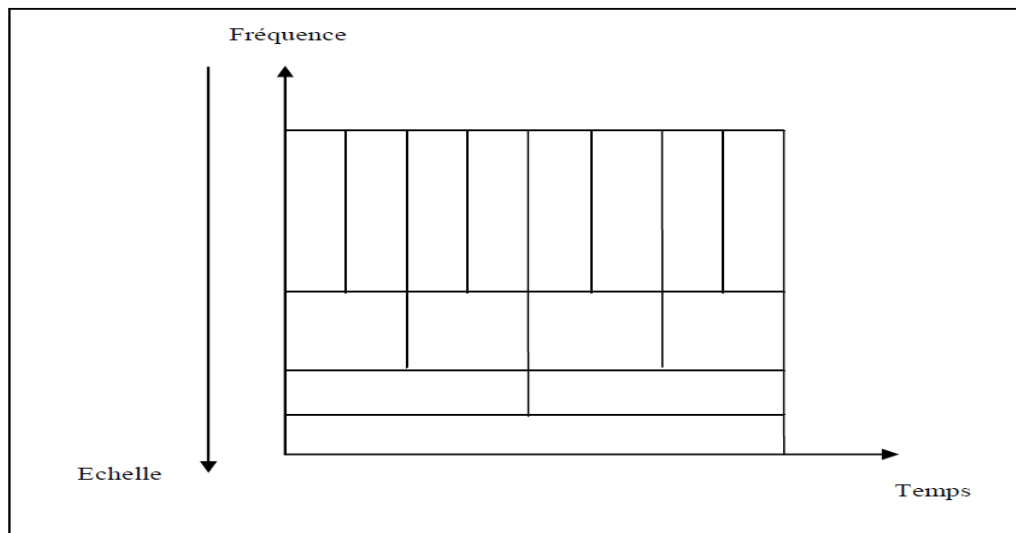


Figure. 3.1. Plan temps-échelle.

L'analyse d'ondelette est faite d'une manière semblable à l'analyse de la *TFF*. Le signal est multiplié par une fonction, *ondelette*, semblable à la fonction de fenêtre dans la *TFF*, et la transformation est calculée séparément pour différents segments du signal dans le domaine temporel.

La différence principale entre la *TFF* et la transformée en ondelettes continues (*TOC*) est que dans le cas de *TOC*, la largeur de la fenêtre sera changée pendant la transformation et sera calculée pour chaque fréquence.

La figure (Fig3.2) montre la résolution « temps – fréquence » de la *TFF* et la résolution « temps – échelle » de la *TO*.

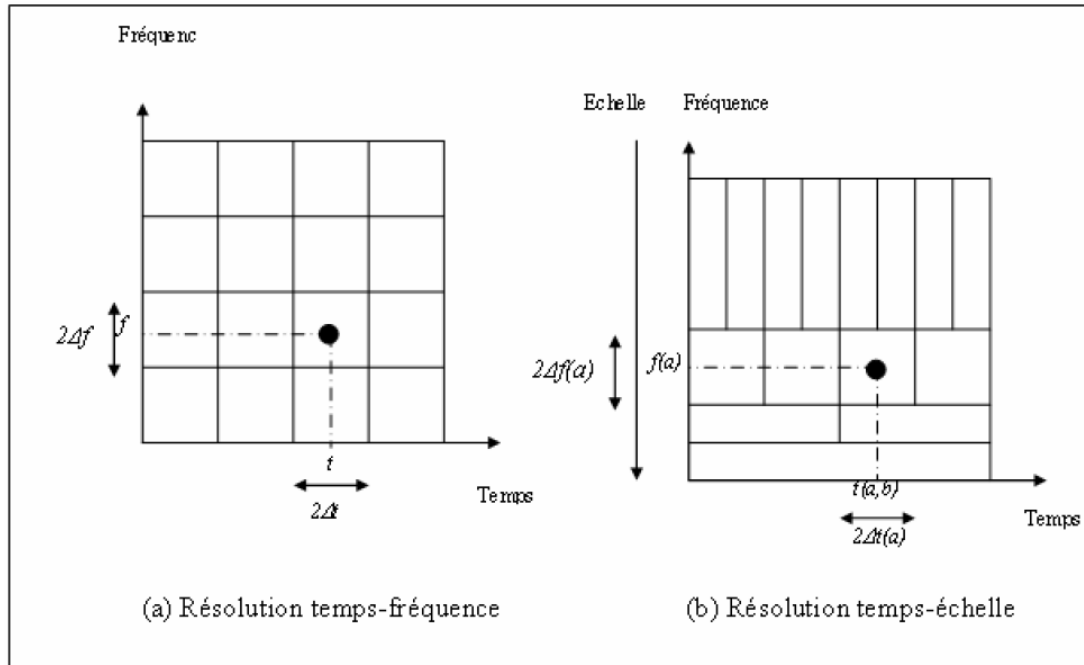


Figure. 3.2. Résolution temps-fréquence (a) et résolution temps-échelle (b).

La position sur l'axe horizontal d'un pavé (rectangle) élémentaire de la représentation temps échelle dépend, bien sûr, du décalage b , mais aussi du facteur d'échelle a . Sa position sur l'axe vertical dépend, elle aussi, du facteur d'échelle a . De même, les dimensions du pavé (résolution de l'ondelette $\psi_{a,b}$) dépendent du facteur d'échelle a .

La fonction $\psi(t)$, de la variable réel t , s'appelle « ondelette mère ». Le nom d'ondelette vient du fait que c'est une fonction oscillante (comme une onde), mais localisée. Ces conditions suggèrent que $\psi(t)$ vibre comme une onde et décroît rapidement quand $|t|$ augmente [01]. La famille d'ondelette $\psi_{a,b}(t)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, s'écrit :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad 3.1$$

a: Facteur d'échelle qui est l'inverse de la fréquence ($a > 0$)

b: Facteur de décalage, relié à la notion de position temporelle. ($b \in \mathbb{R}$)

Les fonctions d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ sont obtenues à partir de la dilatation (ou contraction) et de la translation (ou décalage) de la fonction

« mère » ou « analysante » $\psi(t)$. Elles sont par conséquent parfois appelées les ondelettes « filles ».

Les échelles telles que $a > 1$ dilatent les signaux (basses fréquences), tandis que les échelles tel que $a < 1$, compriment les signaux (hautes fréquences).

La notion de *fréquence* est ainsi remplacée par la notion *d'échelle*, pour tenir compte des hautes et des basses fréquences. Cette représentation s'appelle représentation « temps – échelle ».

L'exemple ci-dessous (Fig. 3.3) montre l'une des ondelettes de la bibliothèque de MUSTIG [01], avec différents facteurs de dilatation :

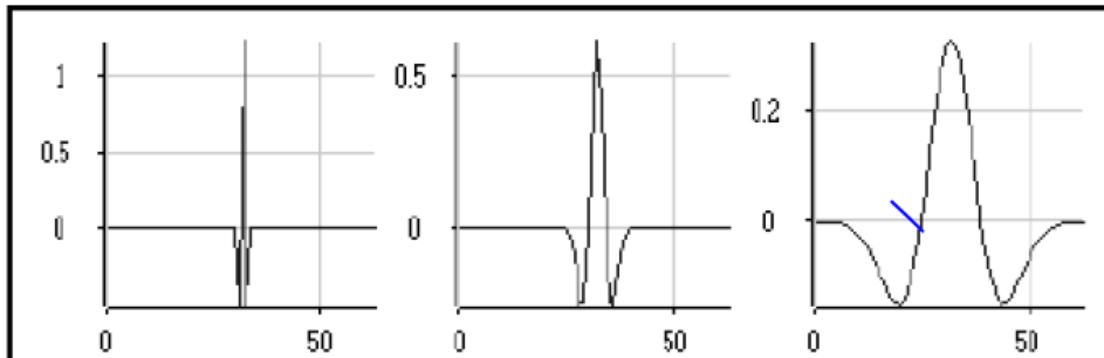


Figure. 3.3. Différents facteurs de dilatation d'une ondelette

La position de l'ondelette à une échelle donnée peut facilement être modifiée en décalant simplement l'ondelette (Fig.3.4.) :

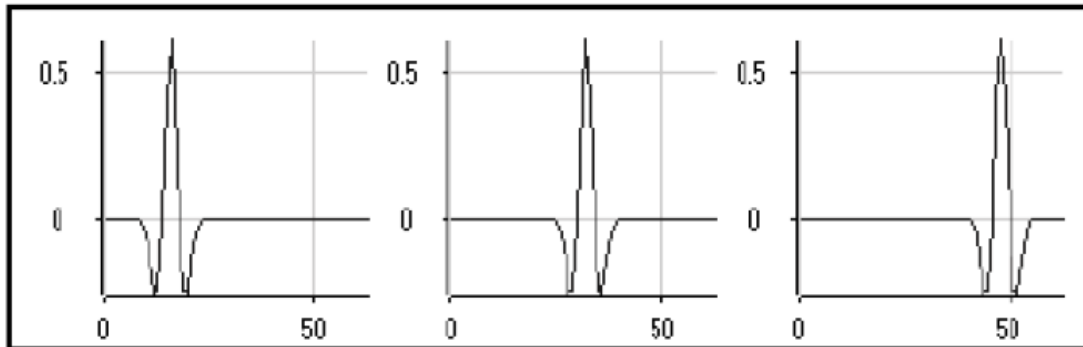


Figure. 3.4. La position d'une ondelette à une échelle donnée

Soit $s(t)$ le signal à analyser. La transformée continue par ondelette est définie donc par le calcul des coefficients :

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad 3.2$$

Les étapes de l'algorithme de la *TOC* sont les suivantes :

1. Choisir l'ondelette mère $\psi(t)$;
2. Initialisation de a et b ;
3. L'ondelette mère est placée au début du signal au point qui correspond au temps $t=0$
4. Calculer la valeur de $C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, t = -\infty \dots \infty$
5. Translater (ou décaler) l'ondelette mère vers la droite par une valeur b à l'emplacement $t = b$;
6. Revenir à l'étape 4, jusqu'à ce que l'ondelette atteigne l'extrémité du signal, (une rangée des points sur le plan temps-échelle pour une valeur de a est maintenant accomplie) ;
7. Incrémentation de a ;

8. Revenir à l'étape 3, jusqu'à une valeur désirée de a .

Remarque

Notons qu'il s'agit d'une transformation continue, et donc, a et b doivent être incrémentés continuellement. Cependant, si cette transformée a besoin d'être calculée par un ordinateur, alors les deux paramètres sont augmentés par un pas suffisamment petit.

L'algorithme précédent est répété pour chaque valeur de a . Chaque calcul pour une valeur donnée de a remplit une rangée simple correspondante du plan temps-échelle. Quand le processus est complété pour toutes les valeurs désirées de a , la *TOC* du signal a été calculé.

L'algorithme précédent est répété pour chaque valeur de a . Chaque calcul pour une valeur donnée de a remplit une rangée simple correspondante du plan temps-échelle. Quand le processus est complété pour toutes les valeurs désirées de a , la *TOC* du signal a été calculé.

La figure (Fig.3.5) représente l'exemple d'un signal sinus bruité $s(t)$ (Fig.3.5.), avec un facteur de décalage b égal à 1 et un facteur d'échelle a varié entre 1 et 10 avec un pas égal à 1.

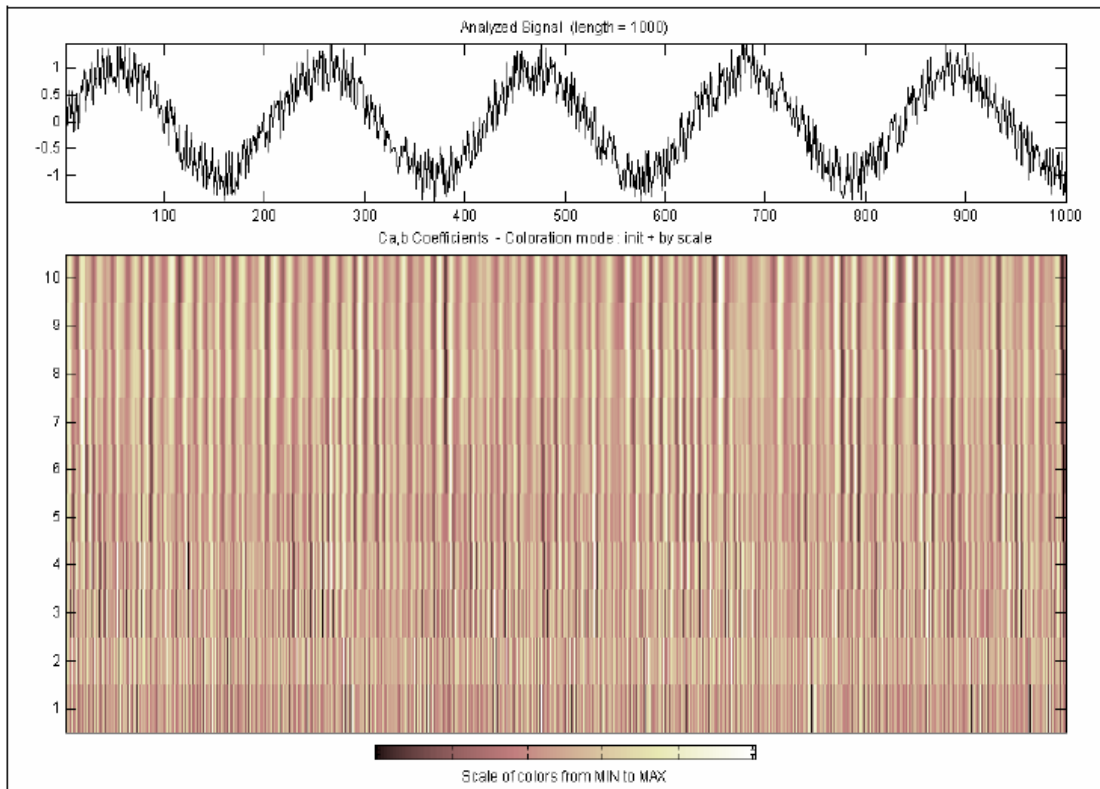


Figure. 3.5. Le signal sinus bruité et sa transformation d'ondelette continue

3.2 La transformée inverse continue en ondelettes

La transformée inverse continue en ondelettes (*TICO*), permet la reconstruction du signal à partir des coefficients $C_{a,b}$ de la décomposition. La *TICO* d'un signal $f(t)$ est donnée par la formule suivante [01] :

$$f(t) = \int_a \int_b c_{a,b} \psi_{a,b}(t) da. dt \quad 3.3$$

3.3 Conditions mathématiques de validité d'une ondelette

L'existence de la transformation inverse dépend de la convergence du coefficient C_ψ [01].

$$C \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < +\infty \quad 3.4$$

où $\psi(f)$ est la transformée de Fourier de $\psi(t)$.

La moyenne ou composante continue de la fonction d'ondelette $\psi(t)$ doit être nulle, c'est-à-dire elle doit respecter la relation suivante [01].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \psi(f)|_{f=0} = 0 \quad 3.5$$

La fonction $\psi(t)$ doit être continue, absolument intégrable et de carré intégrable [01].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t))^2 dt < \infty \quad 3.6$$

3.5 Propriété d'une ondelette mère

- **Moments nuls** : C'est la propriété la plus importante pour une ondelette. Une ondelette $\Psi(t)$ a N moments nuls si :

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad 0 \leq k \leq N \quad 3.7$$

D'après la dernière équation de M_k , toute ondelette se doit d'avoir au moins un moment nul (Le cas où $k=0$, équation (3.7)).

- **Support compact** : Autant l'ondelette à moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

- **Régularité** : La régularité d'une ondelette est la propriété permettant de localiser les singularités dans un signal. On peut noter qu'il existe un lien entre la régularité et les moments nuls. Autant on a des moments nuls autant le signal est régulier.

- **Symétrie** : comme le nombre de moments nuls, la symétrie de l'ondelette conditionne la régularité de celle-ci sur un intervalle.

- **Orthogonalité** : L'orthogonalité d'une ondelette est la propriété permettant d'éliminer la redondance d'informations.

3.6 Transformée en ondelettes discrète

Nous la notons (TOD). Son but est d'augmenter l'efficacité de la décomposition obtenue par la (TCO), en limitant le nombre de facteurs d'échelle tout en conservant la même précision. La discrétisation de l'analyse en ondelettes est utile pour le traitement numérique des données [01]

3.6.1 Implémentation des ondelettes discrètes par bancs des filtres

3. 6. 1. 1. Algorithme de Mallat

Le signal $s(n)$ est décomposé par deux filtres DPB (Décomposition Passe-Bas) et DPH (Décomposition Passe-Haut), pour donner deux vecteurs respectivement A «Approximation» et D « Détails » (Fig..1a.). Cette opération s'appelle aussi filtrage par une paire de filtres complémentaires. Le vecteur A représenté les basses fréquences (transitions lentes) et le vecteur D représente les hautes fréquences (transitions rapides).

Si le signal à traiter $s(n)$ possède N points, le signal d'approximation et le signal de détails feront aussi N points chacun, soit $2N$ en tout. Pour y remédier, le filtre passe-bas est choisi de telle sorte que le sous-échantillonnage soit d'un facteur 2 (on ne prend qu'un point du signal sur deux) pour chaque signal d'approximation et de détail. On se ramène à deux signaux de longueur $N/2$, soit N points en tout (Fig.3.6.), il n'y a alors pas de changement dans la quantité d'information [01].

La reconstruction parfaite est théoriquement possible. En faisant passer respectivement les deux vecteurs A et D par deux filtres RPB (Reconstruction Passe-Bas) et RPH (Reconstruction Passe-Haut), la sortie est le vecteur d'origine $s(n)$ (Fig.3.6.).

L'opération de décomposition et reconstruction sont schématisés par la figure suivante :

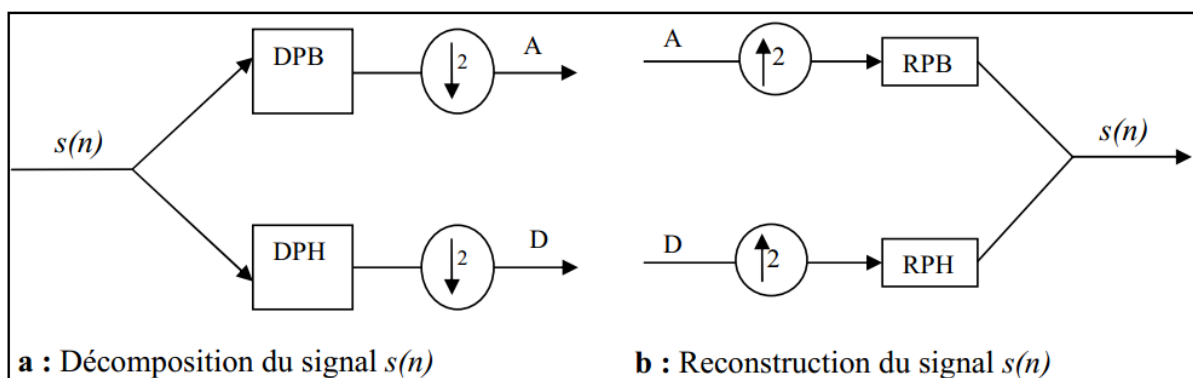


Figure.3.6. Algorithme de Mallat unidimensionnel.

Ces opérations sont communément appelées «décomposition/reconstruction en banc de filtres ». Elles sont caractéristiques des signaux unidimensionnels. Le quadruple (DPB, DPH, RPB, RPH) forme un banc de filtres miroirs en quadrature [01].

3. 6. 1. 2. Architecture pyramidale

L'architecture pyramidale se base sur la décomposition du signal en deux signaux : approximations (A_k) et détails (D_k). Le signal approximation A_k est à son tour décomposé en

approximation A_{k+1} et détails D_{k+1} et ainsi de suite. La figure (Fig2.7.) illustre cette stratégie [01]

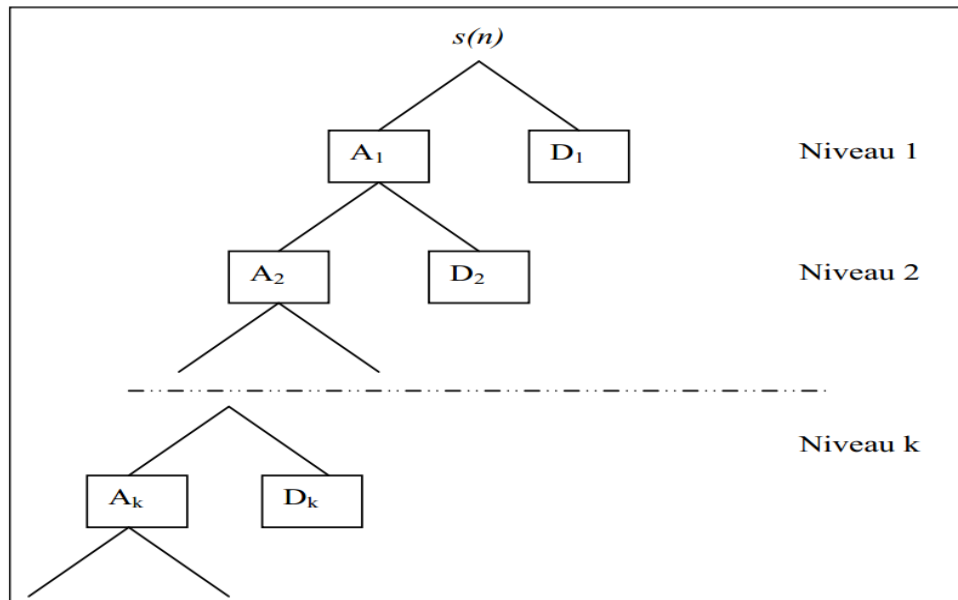


Figure.3.7. Décomposition pyramidale

3. 7. 1 Analyse multirésolution

Le filtrage par une paire de filtres complémentaires précédemment décrit se traduit par « un passage à une résolution inférieure » à chaque étape. La TOD est aussi appelée « analyse multi résolution », introduite par Meyer [01], puis développée par Mallat [01] et devenue « Algorithme pyramidal de Mallat ». Elle produit par filtrages successifs une série de signaux correspondant à une résolution de plus en plus faible.

Après la k-ième itération, la longueur du signal d'approximation et du signal de détail est de $N/2^k$ [01].

3. 7.2 Ondelette dyadique

Très souvent on choisit une résolution dyadique pour simplifier les calculs. La définition des ondelettes dyadiques est basée sur celle des approximations multi-résolution. Cette propriété permet d'implémenter les transformées par des bancs de filtres.

Elle est caractérisée par : $a=a_0^m$ et $b=b_0^n$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$. On obtient alors une transformée en ondelettes discrètes.

Si on choisit $a_0=2$ et $b_0=1$, c'est l'équivalent de $a=2^j$ et $b=k*2^j$; on parle alors de transformée en ondelette dyadique, où j est le niveau de décomposition [01].

Les nouveaux paramètres sont : k et j , et on définit ainsi une base orthogonale.

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad 3.1$$

Pour séparer les deux signaux approximation et détail, La TOD utilise deux fonctions appelées respectivement « fonction échelle » et « fonction ondelette » qui sont respectivement associées à un filtre passe-bas et un filtre passe-haut.

3. 7. 3 Coefficients de la TOD

Une étape élémentaire de la TOD, donne un signal d'approximation et un signal de détail. Les échantillons des signaux de détail sont appelés « coefficients de fonction d'ondelettes ». En principe, seuls les échantillons des signaux de détail sont appelés ainsi. Les échantillons des signaux d'approximation devraient être appelés « coefficients de fonction d'échelle ». Par abus de langage, nous appelons souvent coefficients d'ondelettes l'intégralité des échantillons obtenus (approximations et détails) [01]

3.8 Familles d'ondelettes

Avant de détailler quelques familles d'ondelettes usuelles, nous dressons dans le tableau suivant (Tab. 1) la liste de quelques-unes de ces familles, avec les abréviations associés.

Nom des familles d'ondelettes	Abréviations
Ondelette de Haar	Haar
Ondelettes de Daubechies	Db
Ondelettes Symlets	Sym
Ondelettes Coiflets	Coif
Ondelettes biorthogonales	Bior
Ondelette de Meyer	Meyr
Ondelettes gaussiennes	Gaus
Ondelettes gaussiennes complexes	Cgau
Chapeau mexicain	Mexh
Ondelette de Morlet	Morl
Ondelette de Morlet complexe	Cmor
Ondelettes de Shannon complexes	Shan

Tab.1. Familles d'ondelettes

Les familles d'ondelettes peuvent être caractérisées par quatre propriétés principales :

existence de filtres associés, orthogonalité ou bi-orthogonalité, support compact ou non, ondelettes réelles ou complexes. Le tableau (Tab. 2) résume ces diverses propriétés.

Ondelettes à filtres			Ondelettes sans filtres	
A support compact		A support non compact	Réelles	Complexes
Orthogonales	Biorthogonales	Orthogonales	gaus, mexh, morl	cgau, shan, cmor
Db, haar, sym, coif	Bior	Meyr		

Tab. 2. Les propriétés principales des ondelettes

Les ondelettes à filtre sont associées à des analyses multirésolution orthogonales ou bi-orthogonales ; la transformée discrète et les calculs rapides en utilisant l'algorithme de Mallat [01] sont alors possibles. Les ondelettes sans filtre, en revanche, sont utiles pour la transformée en ondelettes continues.

En général, les ondelettes à support compact n'ont pas de forme analytique (c'est-à-dire : on sait comment calculer la fonction, mais on ne peut pas l'exprimer avec une formule mathématique).

3.9 Le choix de la meilleure ondelette

Dans la littérature il existe plusieurs types d'ondelette. Le critère de choix de la meilleure ondelette reste un problème à déterminer. Malheureusement, il n'y a pas d'ondelette qui soit meilleure que les autres, tout dépend de l'application. Dans certains cas, l'ondelette la plus simple (Haar) sera optimale. Pour d'autres applications, ce sera le pire des choix possibles.

Les fonctions gaussiennes sont souvent utilisées comme ondelettes pour la transformée continue en raison de leur bonne résolution [01] cependant elles sont difficiles à implémenter.

A titre d'exemple, les ondelettes suivantes ont été utilisées : db2 [01], db4 [01], db8 [01], coif3 [01.], bior4.4 [01.], [01].

En pratique le choix de la meilleure ondelette se base sur :

- ✓ La forme de l'ondelette analysante : plus la fonction ressemble à l'événement à traiter, plus l'analyse sera efficace
- ✓ Les propriétés mathématiques (moments nuls, régularité,...).
- ✓ ad hoc : une ondelette qui permet un traitement de signal efficace est acceptable, même si elle n'est pas la meilleure possible.

En théorie, plus la fonction ressemble à l'événement à traiter, plus l'analyse sera efficace. De toute façon, une ondelette optimale pour les signaux mesurés lors d'une certaine expérimentation dans un domaine donné ne le serait pas nécessairement lors d'une autre prise de mesures pour un autre domaine.

Remarque : En bref, si la fonction à analyser était analytique, il serait idéal d'avoir un très grand nombre de moments nuls [01].

CHAPITRE 4

ONDELETTES DE HAAR

4.1 La fonction d'échelle de Haar

Il y a deux fonctions qui jouent un rôle primordial dans l'analyse par ondelettes: la fonction d'échelle ϕ et l'ondelette ψ . Ces deux fonctions génèrent une famille des fonctions qui peut être utilisée pour briser ou de reconstruire un signal. Souligner le «mariage» impliqués dans la construction de cette «famille» ϕ est parfois appelé "ondelette père" et ψ est parfois nommé "ondelette mère."

L'analyse par ondelettes est plus simple et basée sur la fonction de Haar de mise à l'échelle, dont graphique est donné à la figure 4.2. Les blocs de construction sont des translations et des dilatations (à la fois en hauteur et largeur) de ce graphe de base. [06]

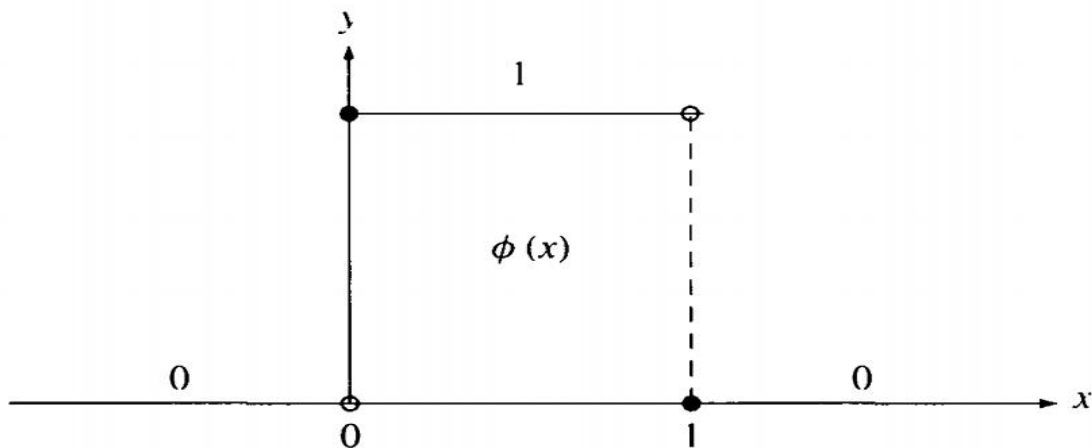


Figure 4.1. Graphique de la fonction d'échelle de Haar.

Nous voulons illustrer les idées de base impliqués dans une telle analyse. Considérons le signal représenté à la figure 4.3. Nous pouvons considérer cela comme une mesure d'une certaine quantité, peut-être la tension de la ligne physique sur un seul cycle en fonction de temps. Les deux tranchants pics dans le graphique pourraient représenter le bruit provenant d'une connexion lâche dans le voltmètre, et nous voulons filtrer ce bruit indésirable.

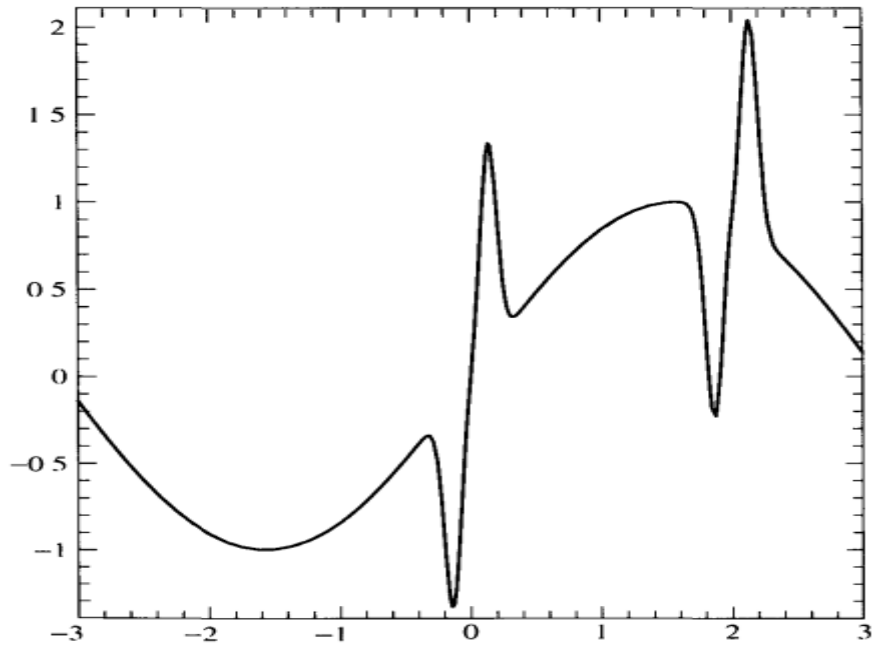


Figure 4.2. Tension d'un compteur défectueux.

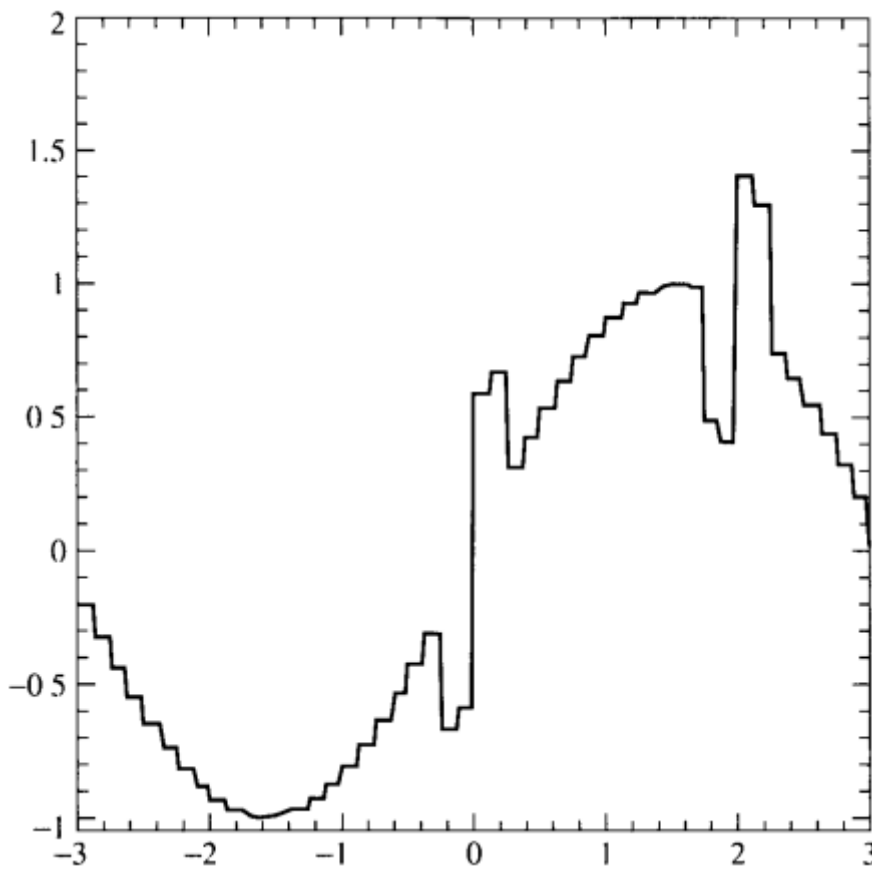


Figure 4.3. Rapprochement de signal de tension par des fonctions de Haar

Le graphique de la figure 4.4 présente un rapprochement possible avec le signal à l'aide Haar blocs de construction. Le bruit à haute fréquence montre des blocs minces de

grande taille. Un algorithme qui supprime les blocs minces permettra d'éliminer le bruit et ne pas perdre le reste du signal.

Les éléments de base générés par la fonction de mise à l'échelle de Haar sont particulièrement simples et ils illustrent les idées générales qui sous-tendent une analyse multi-résolution. Dont nous discuterons en détail. L'inconvénient des ondelettes de Haar est qu'ils sont discontinus et donc ne pas rapprocher des signaux continus très bien (Figure 4.4 n'est pas vraiment figure d'environ 4.3 trop bien). Dans les sections suivantes nous introduirons d'autres ondelettes, en raison de Daubechies, qui sont continues tout en conservant le comportement localisé présentée par les ondelettes de Haar.

Définition 4.1 La fonction d'échelle de Haar est définie comme

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le graphique de la fonction d'échelle de Haar est donné à la figure 4.2.

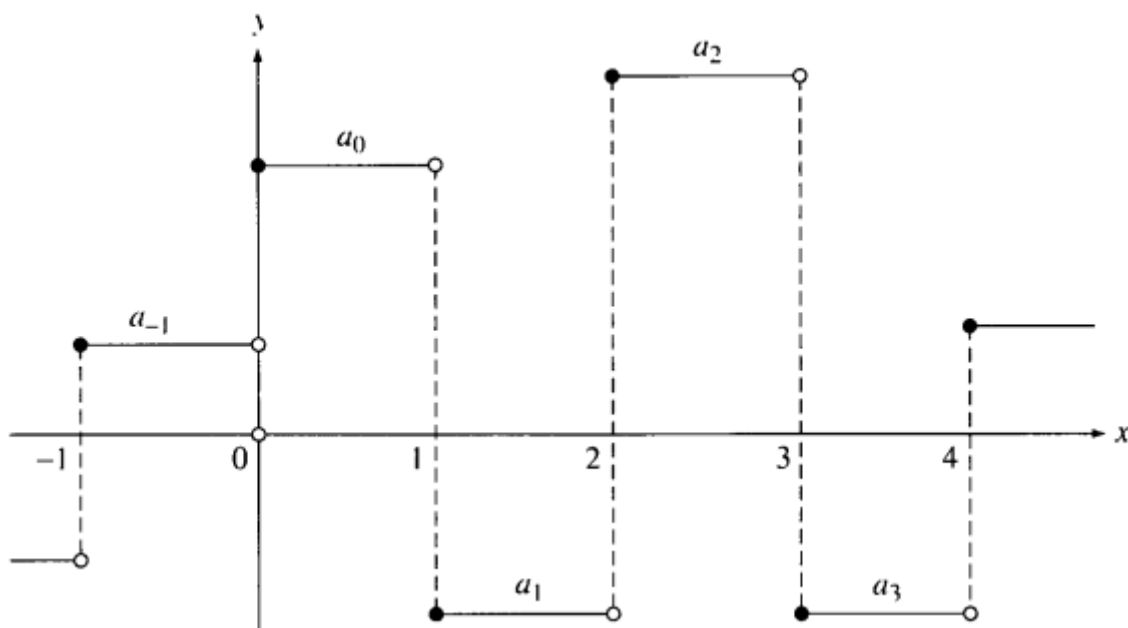


Figure 4.4. Graphique de l'élément typique dans V_0 .

La fonction $\varphi(x - k)$ a le même graphique que $\varphi(x)$ translaté vers la droite par k unités (en supposant que k est positive). Soit V_0 l'espace de toutes les fonctions de la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x - k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

Où k peut varier sur un ensemble fini de nombres entiers positifs ou négatifs.

Puisque $\varphi(x - k)$ est discontinue en $x = k$ et $x = k + 1$, une autre description de V_0 ce qu'il est constitué de l'ensemble des fonctions constantes par morceaux dont les discontinuités sont contenues dans l'ensemble des entiers. Puisque k est compris sur un ensemble fini, chaque élément de V_0 est nulle en dehors d'un ensemble borné. Une telle fonction est dite avoir fini ou compact support. Le graphique d'un élément typique de V_0 est donné à la figure 4.5. Noter que une fonction de V_0 peut pas présenter des discontinuités, à tous les nombres entiers (par exemple, si $a_1 = a_2$, alors la somme précédente est continue en $x = 2$).[06]

Exemple 4.2 le graphe de fonction

$$f(x) = 2\varphi(x) + 3\varphi(x - 1) + 3\varphi(x - 2)\varphi(x - 3) \in V_0$$

Est donné à la figure 4.6. Cette fonction présente des discontinuités à $x = 0, 1, 3,$ et 4 nous avons besoin de blocs qui sont plus minces à analyser les signaux de haute fréquence. Le bloc de construction dont la largeur est la moitié de celle de la courbe de φ est donné par le graphique de $\varphi(2x)$ montre à la figure 4.7.

$$f(x) = 2\varphi(x) + 3\varphi(x - 1) + 3\varphi(x - 2)\varphi(x - 3) \in V_0$$

La fonction $\varphi(2x - k) = \varphi(2(x - \frac{k}{2}))$ est le même que le diagramme de la fonction de $\varphi(2x)$, mais décalée vers la droite par $k/2$ unités. Soit V_1 l'espace de fonctions de la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2x - k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

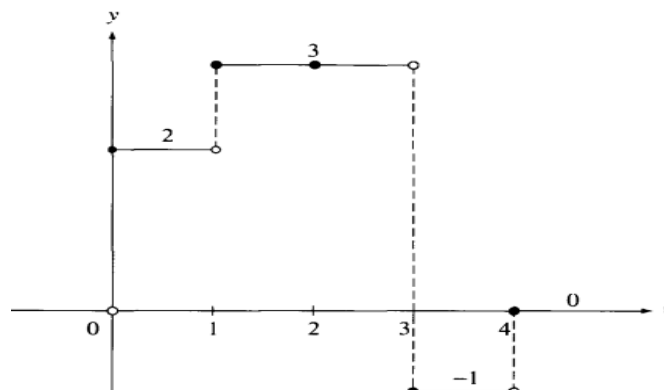


Figure 4.5. Graph de f dans l'exemple 4 2.

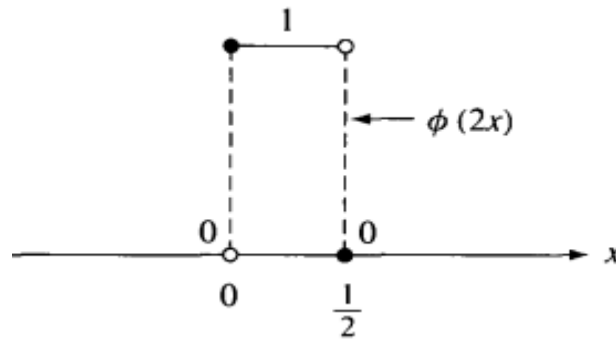


Figure4.6. Graph de $\varphi(2x)$.

Géométriquement, V_1 est l'espace des fonctions constantes par morceaux de support fini avec discontinuités possibles aux entiers demi $\{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots\}$.

Avoir une base orthonormée de V_j est seulement la moitié de l'image. Afin de résoudre notre problème de filtrage du bruit, nous avons besoin d'avoir un moyen d'isoler les «pointes» qui appartiennent à V_j , mais qui ne sont pas membres de V_{j-1} . C'est là que l'ondelette ψ entre dans l'image.

L'idée est de décomposer V_j comme une somme orthogonale de V_{j-1} et son complément.

Encore une fois, nous allons commencer avec $j = 1$ et identifier le complément orthogonal de V_0 en V_1 . Puisque V_0 est généré par φ tan dits qui traduit, il est raisonnable de s'attendre à ce que le complément orthogonal de V_0 est générée par les translatés d'une fonction ψ . Deux faits importants sont nécessaires pour construire ψ .

1- ψ est un membre de V_1 et si ψ peut être exprimé comme

$$\psi(x) = \sum_l a_l \varphi(2x - l)$$

pour certains choix de $a_l \in R$ (et seulement un nombre fini de a_l sont non nuls).

2- ψ est orthogonal à V_0 . Ceci est équivalent à pour toute entiers k .

$$\int \psi(x) \varphi(x - k) = 0$$

La première condition signifie que ψ est construit à partir de blocs de largeur $1/2$ c'est-à-dire multiples scalaires de la figure 4.7 et ses translatés. La deuxième exigence de $k=0$ implique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x) dx = 0$$

Le plus simple V_1 qui satisfait ces deux exigences est la fonction dont le graphe apparaît à la figure 4.10. Ce graphique se compose de deux blocs d'une demi-largeur et qui peut être écrite comme

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(2x) - \varphi\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\ \psi(x) &= \varphi(2x) - \varphi(2x - 1) \end{aligned} \quad 4.1$$

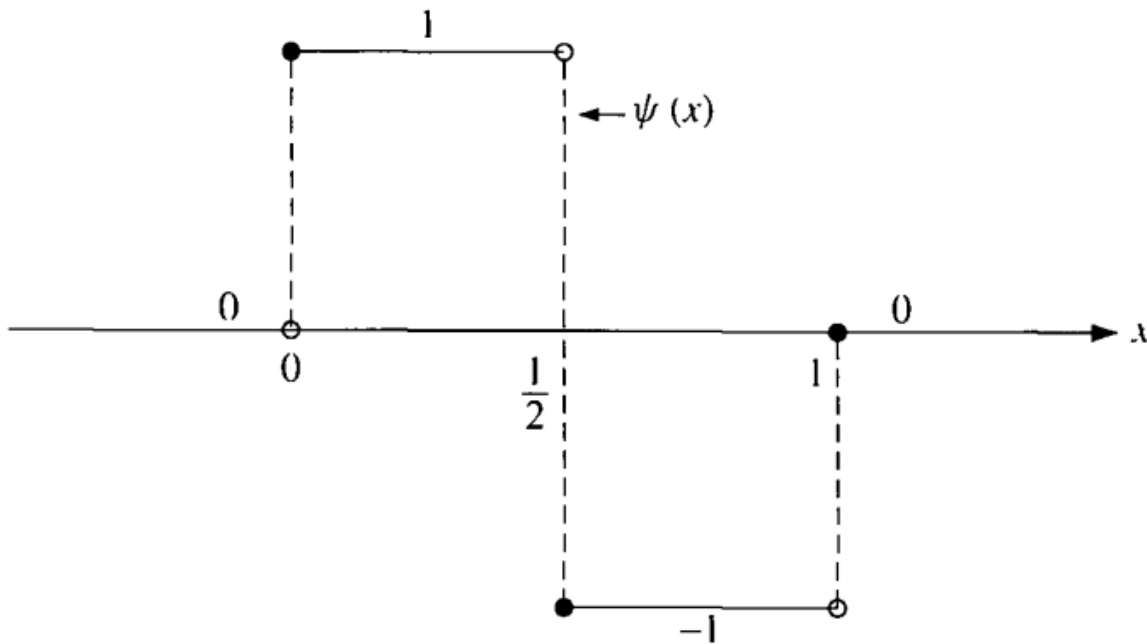


Figure 4.7 : l'ondelette de Haar $\psi(x)$

Répondant ainsi à la première exigence. En outre, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x) dx &= \int_0^{1/2} 1 dx - \int_{1/2}^1 1 dx \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, ψ est orthogonal à φ . Si $k \neq 0$ donc le support de $\psi(x)$ et le support de $\varphi(x)$ ne se chevauchent pas et si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x - k) dx$$

. Par conséquent, ψ appartient à V_1 et est orthogonale à V_0 : ψ il est appelé l'ondelette de Haar.

Définition 4.2 L'ondelette de Haar est la fonction

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$$

Son graphe est donné à la figure 4.10.

$$f_1 = \sum_k a_k \varphi(2x - k) \in V$$

Est orthogonale à V_0 (i.e. orthogonale par chaque $\varphi(x - l)$; $l \in Z$ si et seulement si

$$a_1 = -a_0, a_3 = -a_2$$

Dans ce cas

$$f_1 = \sum_k a_{2k} (\varphi(2x - 2k) - \varphi(2x - 2k - 1)) = \sum_k a_{2k} \psi(x - k)$$

En d'autres termes, une fonction de V_1 est orthogonale à V_0 si et seulement si il est de la forme

$\sum_k a_k \psi(x - k)$ (modification de l'identification a_{2k} par a_k). [06]

Soit W_0 l'espace de toutes les fonctions de la forme

$$\sum_k a_k \psi(x - k) \quad a_k \in R \quad 4.2$$

Où, encore une fois, nous supposons que seul un nombre fini de la a_k sont non nulle. Quoi nous venons de montrer, c'est que W_0 est le complément orthogonal de V_0 à V_1 ; en d'autres termes, $V_1 = V_0 \oplus W_0$ (\oplus cela signifie que V_0 et W_0 sont orthogonales les unes aux autres)

Dans la même façon, le texte suivant, le résultat plus général peut être établi.

Théorème 4.1[06] Soit W_j l'espace des fonctions de la forme

$$\sum_{k \in Z} a_k \psi(2^j x - k)$$

Où nous supposons que seul un nombre fini a_k sont non nulle. W_j est l'orthogonal en complément de V_j en V_{j+1}

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Théorème 4.2 [06] L'espace $L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposé comme un repère orthogonal infini somme directe

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$$

En particulier. Chaque $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j$$

Où f_0 appartient à V_0 et V_1 appartient à W_1 .

La somme infinie doit être considérée comme une limite de sommes finies. Dans d'autres mots

$$f = f_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \omega_j \quad 4.3$$

Où la limite est prise dans le sens de L^2 . Bien que la preuve de ce résultat soit au-delà de la portée de ce texte, l'intuition ne peut être donnée. Il y a deux clés idées.

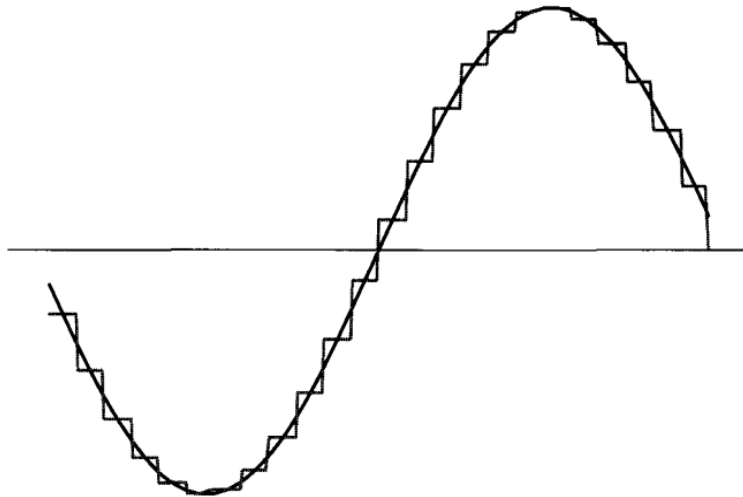


Figure 4.8. Approximation par des fonctions d'étape.

La première est que toute fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ peut être approximée par fonctions continue. La seconde qui est une fonction continue peut être approchée le plus près que souhaité par une fonction de l'étape dont les discontinuités sont des multiples de suffisamment grand pour 2^j (voir Figure 4.11). Une telle fonction de l'étape, par définition, fait partie du théorème alors établie en mettant les deux idées.

4.2 Les algorithmes de décomposition et reconstruction de Haar

4.2.1 Décomposition

Maintenant que V_1 a été décomposé en une somme directe de V_0 et W_l pour $0 \leq l < j$ la solution de notre problème de filtrage du bruit est théoriquement facile. Tout d'abord, nous approchons f par une fonction en escalier $f_j \in V_j$ pour j suffisamment grand) en utilisant le théorème 4.9 Puis nous décomposons f_j en ses composants

$$f_j = f_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{j-1} \omega_l \in V_j$$

Le composant, W_l , représente une "pointe" de largeur $\frac{1}{2^{l+1}}$. Pour l suffisamment grand, ces pics sont suffisamment minces pour représenter le bruit. Par exemple, supposons que les pointes de largeur inférieure à 0,01 représentent bruit. Depuis $2^{-6} > 0,01 > 2^{-7}$ n'importe quel ω_j avec $j \geq 6$ représente le bruit. Pour filtrer ce bruit, ces composants peuvent être mis égal à zéro. Le reste de la somme représente un signal qui est encore relativement proche de f et qui est sans bruit.[06]

Pour mettre en œuvre ce théorique algorithme, un moyen efficace de performant la décomposition donnée dans le théorème 4.9 est nécessaire. La première étape consiste à approximer le signal d'origine par f une fonction en escalier de la forme

$$f_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi(2^j x - l)$$

La procédure consiste à échantillonner le signal à $x = \dots - \frac{1}{2^j}, 0, \frac{1}{2^j}, \dots$ qui entraîne $a_l = f(\frac{l}{2^j})$ pour $l \in \mathbb{Z}$. Une illustration de cette procédure est donnée à la figure 4.11, où f est le signal continu et f_j est la fonction étape Ici. j est choisi de sorte que la taille de maille 2^{-j} est suffisamment petite de sorte que $f_j(x)$ capture l'essentiel des caractéristiques du signal de la gamme l dépend du domaine du signal. Si le signal est défini sur $0 \leq x \leq 1$, alors la gamme

souvent de l est $0 \leq l \leq 2^j$ En général, nous ne serons pas spécifier la gamme de l moins un exemple précis est discutée.

Maintenant, la tâche est de décomposer $\varphi(2^j x - 1)$ par W_l ses composantes pour $l < j$.

Les relations suivantes entre φ et ψ sont nécessaires.

$$\varphi(2x) = \frac{\psi(x) + \varphi(x)}{2} \quad (4.4)$$

$$\varphi(2x - 1) = \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{2} \quad (4.5)$$

Qui suivent facilement en regardant leurs graphiques (les figures 4.2 et 4.10). Plus généralement, nous avons le lemme suivant.

Lemme Les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(2^j x) = \frac{\psi(2^{j-1}x) + \varphi(2^{j-1}x)}{2} \quad (4.6)$$

$$\varphi(2^j x - 1) = \frac{\varphi(2^{j-1}x) - \psi(2^{j-1}x)}{2} \quad (4.7)$$

Ce lemme suit en remplaçant x par 2^{j-1} dans les équations (4.4) et (4.5). Ce lemme peut être utilisé pour décomposer $\varphi(2^j x - l)$ en ses composantes W_l pour $l < j$, Prenons un exemple pour illustrer le processus.

Exemple 4.2[06] Soit f donnée par le graphique de la figure 4.12. Notez que le maillage taille nécessaire pour capturer toutes les fonctionnalités de f est 2^2 . Une description de f en termes de $\varphi(2^2 x - l)$ est donnée par

$$f(x) = 2\varphi(4x) + 2\varphi(4x - 1) + \varphi(4x - 2) - \varphi(4x - 3) \quad (4.8)$$

Nous tenons à décomposer f en ses W_1, W_0 , et V_0 composantes. Ce qui suit des équations (4.6) et (4.7) avec $j=2$.

$$\varphi(4x) = \frac{(\psi(2x) + \varphi(2x))}{2}$$

$$\varphi(4x - 1) = \frac{(\varphi(2x) - \psi(2x))}{2}$$

$$\varphi(4x - 2) = \frac{\psi(2x) + \varphi(2x)}{2} = \varphi\left(4\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\psi\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \varphi\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}{2}$$

$$\varphi(4x - 3) = \frac{(\psi(2x) + \varphi(2x))}{2} = \varphi\left(4\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1\right) = \frac{\varphi\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \psi\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}{2}$$

En utilisant ces équations avec Eq. (4,8) et en recueillant des termes de rendement

$$f(x) = [\psi(2x) + \varphi(2x)] + [\varphi(2x) - \psi(2x)] + \frac{\psi(2x - 1) + \varphi(2x - 1)}{2} - \frac{\varphi(2x) - \psi(2x)}{2}$$

$$= \psi(2x - 1) + 2\varphi(2x)$$

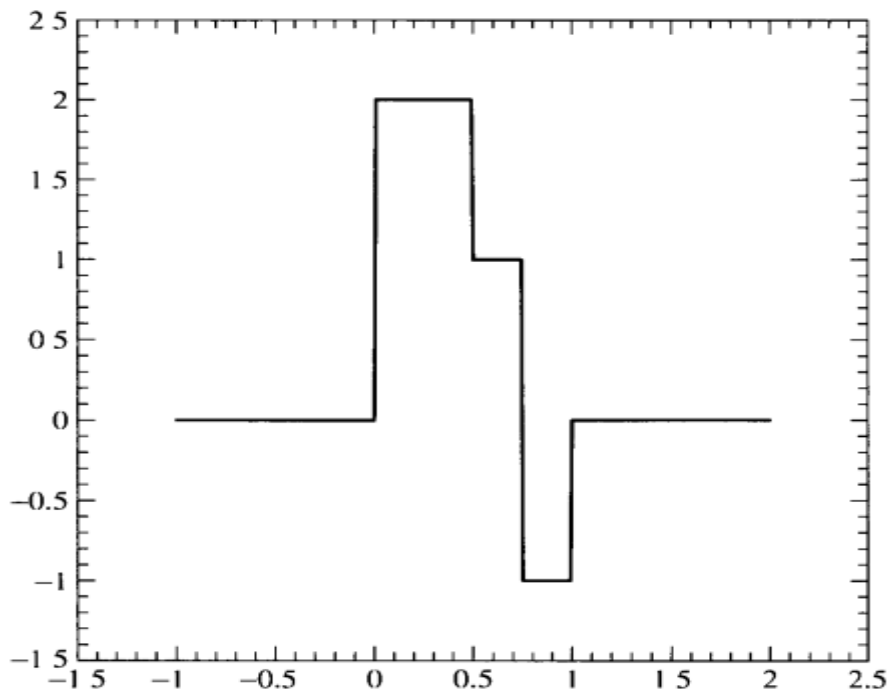


Figure 4.9. Graphique de l'exemple 4.11.

Le W_1 component de $f(x)$ est si $\psi(2x - 1)$, puisque W_1 est la durée linéaire de $\{\psi(2x - k); k \in \mathbb{Z}\}$. Le composante V_1 de $f(x)$ est donnée par $2\varphi(2x)$. Ce composant peut encore être décomposé en une composante de V_0 et W_0 en utilisant l'équation

$$\varphi(2x) = \frac{\psi(x) + \varphi(x)}{2}$$

. Le résultat est

$$f(x) = \psi(2x - 1) + \psi(x) + \varphi(x)$$

Cette équation peut aussi être vérifiée en examinant géométriquement les graphes des fonctions impliquées. Les termes de l'expression à droite l'arc les composants de f dans W_1 , W_0 , et V_0 respectivement.

En utilisant cet exemple comme un guide. nous pouvons procéder à la décomposition générale de système comme suit. Abord diviser la somme

$$f_j(x) = \sum_k a_k \varphi(2^j x - k)$$

Par

$$f_j(x) = \sum_k a_{2k} \varphi(2^j x - 2k) + f_j(x) = \sum_k a_{2k+1} \varphi(2^j x - 2k - 1) \quad (4.9)$$

Ensuite, nous utilisons les équations. (4.6) et (4.7) avec x remplacé par « $x - k2^{1-j}$ »

$$\varphi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \varphi(2^{j-1} x - k)}{2} \quad (4.10)$$

$$\varphi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\varphi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2} \quad (4.11)$$

En substituant ces expressions dans l'équation. (4 9) les rendements

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_k a_{2k} \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \varphi(2^{j-1} x - k)}{2} + \sum_k a_{2k+1} \frac{\varphi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2} \\ &= \sum_k \left(\frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \right) \psi(2^{j-1} x - k) + \left(\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \right) \varphi(2^{j-1} x - k) \\ &= \omega_{j-1} + f_{j-1} \end{aligned}$$

Le premier terme de droite, ω_{j-1} , représente la W_{j-1} composante de f_j depuis W_{j-1} est, par définition, la durée linéaire de $\psi(2^{j-1} x - k)$. De même, le second terme de droite, f_{j-1} ,

représente la V_{j-1} de composant f_j . Nous résumer la décomposition et algorithme précédent dans le théorème suivant

Théorème 4.3 [06](Décomposition de Haar) Suppose

$$f_j(x) = \sum_k a_k^j \varphi(2^j x - k) \in V_j$$

Et f_j peut se décompose comme

$$f_j = \omega_{j-1} + f_{j-1}$$

Où

$$\omega_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k) \in W_{j-1}$$

$$f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \varphi(2^{j-1} x - k) \in V_{j-1}$$

Avec

$$b_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j - a_{2k+1}^j}{2}, \quad a_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j + a_{2k+1}^j}{2}.$$

Le processus précédent peut maintenant être répété avec j remplacé par $j - 1$ à décomposer f_j comme $\omega_{j-2} + f_{j-2}$. Continue de cette façon. Nous obtenons la décomposition

$$f_j = \omega_{j-1} + \omega_{j-2} + \dots + \omega_0 + f_0.$$

Pour résumer le processus de décomposition, un signal est discrétisé première pour produire un signal approximatif $f_j \in V_j$ comme dans le théorème 4.9. Ensuite, l'algorithme décomposition dans le théorème 4.12 produit une décomposition de f_j dans ses différents composante de fréquence

$$f_j = \omega_{j-1} + \omega_{j-2} + \dots + \omega_0 + f_0.$$

4.2.2 Reconstruction

Après avoir décomposé f en V_0 et $W_{j'}$ composants pour $0 < j' < j$, puis quoi? La réponse dépend de l'objectif. Le but est de filtrer le bruit, puis $W_{j'}$ composants de f correspondant à des fréquences indésirables peut être jeté dehors, et le signal résultant aura beaucoup moins de bruit data compression. Si l'objectif est la compression des données, le $W_{j'}$ composants qui sont de petite taille peut être jeté dehors, sans changement appréciable du

signal Seul le significatif W_j , composants (la plus grande $b_k^{j'}$) doivent être stockées ou transmises et la compression des données importantes peut être obtenue. Bien sûr, ce qui constitue "petit" dépend de la tolérance à l'erreur pour une application particulière.[06]

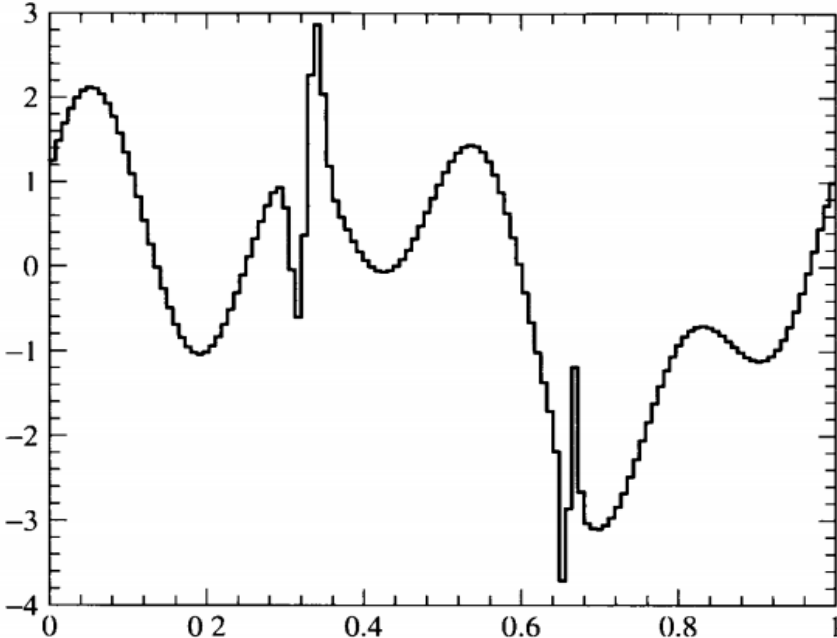


Figure 4.10. 8 composants.

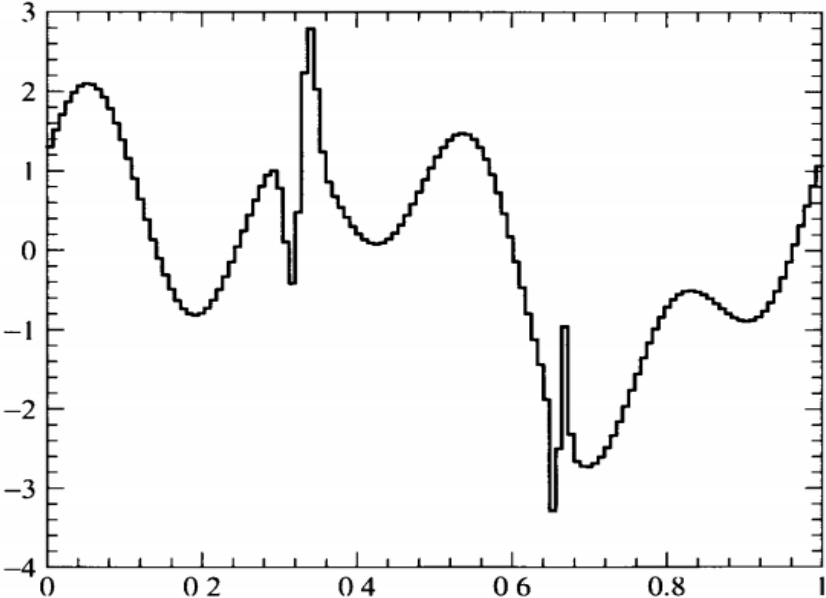


Figure 4.11. 7 composants.

Dans les deux cas, puisque $b_k^{j'}$ ont été modifiés nous avons besoin d'une reconstruction algorithmique (de l'extrémité de réception du signal peut-être) de sorte que le comprimé ou signal filtré peut être reconstruit en fonction des éléments de base $\varphi(2^j x - l)$ de V_j , c'est

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^j \varphi(2^j x - l)$$

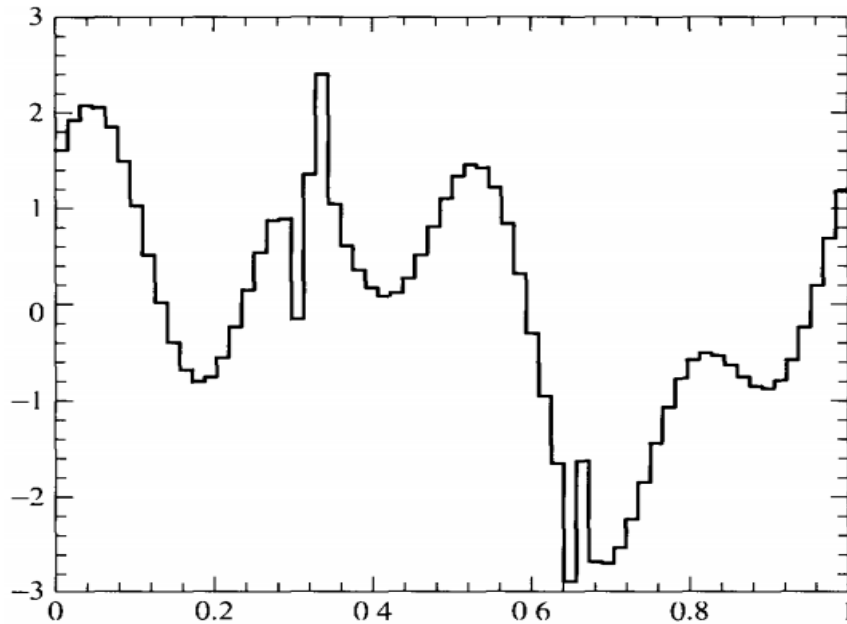


Figure 4.12. 6 composants.

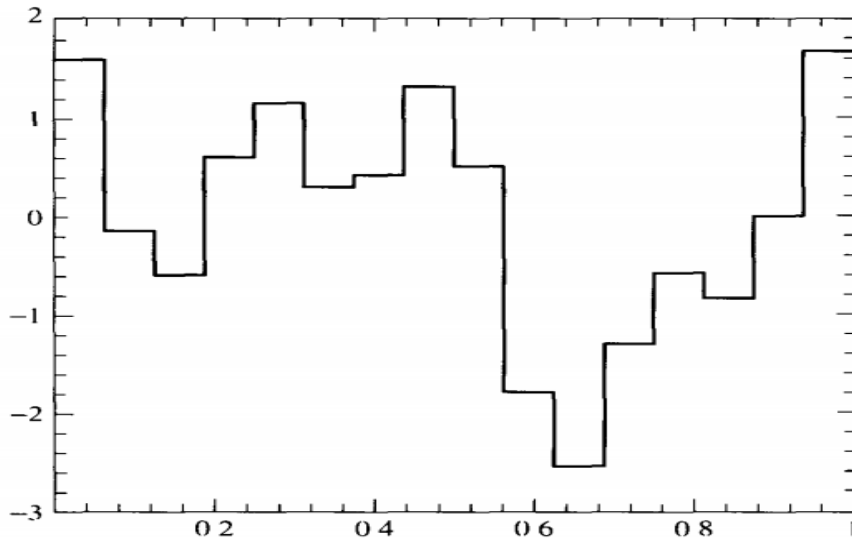


Figure 4.13. 4 composants.

Une fois cela fait, le graphique du signal f est une fonction de l'étape de taille a_l^j sur l'intervalle $\frac{l}{2^j} \leq x \leq \frac{l+1}{2^j}$

Nous commençons par un signal de la forme

$$f(x) = f_0(x) + \omega_0(x) + \dots + \omega_{j-1}(x) \omega_l \in W_l$$

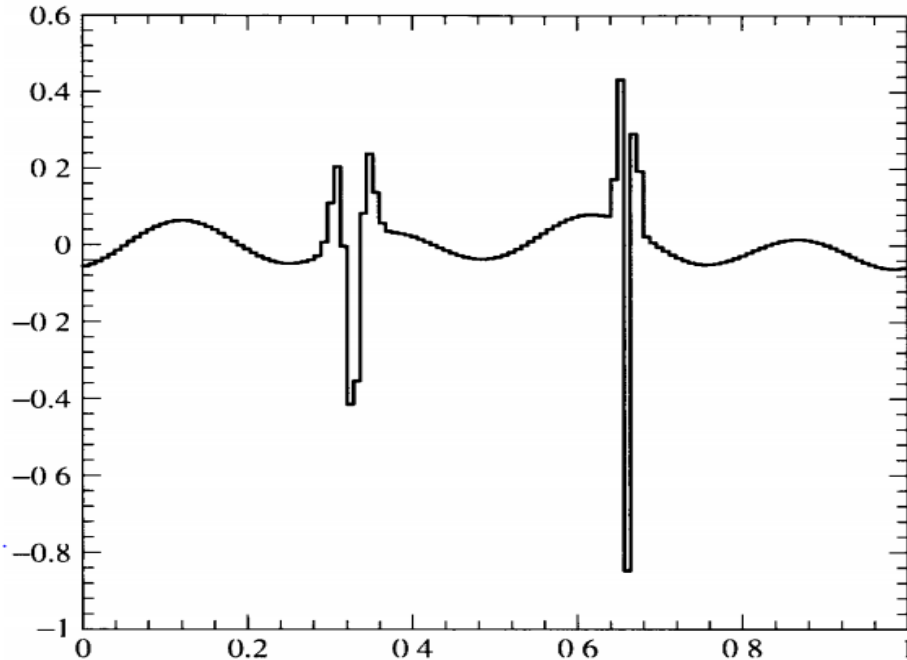


Figure 4.14. W_7 Composants.

Où

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k) \in V_0 \text{ et } \omega_l = \sum_k b_k^l \psi(2^l x - k) \in W_l$$

Pour $0 \leq l \leq j - 1$. Notre objectif est de réécrire f comme

$$f(x) = \sum_j a_l^j \varphi(2^j x - l) \in W_l$$

Et trouver un algorithme pour le calcul des constantes a_l^j . En utilisant les équations

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) \quad (4.12)$$

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1) \quad (4.13)$$

Qui suivent des définitions de φ et ψ remplacer x par $2^{j-1}x$ obtient

$$\varphi(2^{j-1}x) = \varphi(2^jx) + \varphi(2^jx - 1) \quad (4.14)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = \varphi(2^jx) - \varphi(2^jx - 1) \quad (4.15)$$

Utilisant l'équation (4.12) et remplacer x par $x - k$ nous avons

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k) \quad \text{la defintion de } f_0 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(2x - 2k) + a_k^0 \varphi(2x - 2k - 1) \quad , \text{ de (4.12)} \end{aligned}$$

Donc

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}_l^1 \varphi(x - k) \quad (4.16)$$

Où

$$\hat{a}_l^1 = \begin{cases} a_k^0 & \text{si } l = 2k \\ a_k^0 & \text{si } l = 2k + 1 \end{cases}$$

De même,

$$\omega_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^0 \psi(x - k)$$

On peut écrire (utilisant Eq (4.13) pour $\psi(x - k)$) comme

$$\omega_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{b}_l^1 \varphi(x - k) \quad (4.17)$$

Où

$$\hat{b}_l^1 = \begin{cases} b_k^0 & \text{si } l = 2k \text{ est pair} \\ -b_k^0 & \text{si } l = 2k + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Combinaison Eq (4.16) et (4.17) obtient

$$f_0(x) + \omega_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_l^1 \varphi(x - k)$$

$$\text{Où } a_l^1 = \hat{a}_l^1 + \hat{b}_l^1 = \begin{cases} a_k^0 + b_k^0 & \text{si } l = 2k \\ a_k^0 - b_k^0 & \text{si } l = 2k + 1 \end{cases}$$

Après, $\omega_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_l^1(x - k)$ est ajouter à cette somme de la même manière l'aide Équations.

(4.12) et (4.13) avec x remplacés par $2x - k$:

$$f_0(x) + \omega_0(x) + \omega_1(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2 \varphi(2^2 x - l)$$

$$\text{Où } a_l^2 == \begin{cases} a_k^1 + b_k^1 & \text{si } l = 2k \\ a_k^1 - b_k^1 & \text{si } l = 2k + 1 \end{cases}$$

On notera que les coefficients a_l^0 et b_l^0 sont déterminés les coefficients de a_l^1 ensuite, les coefficients a_l^1 et b_l^1 sont déterminés le coefficient a_l^2 , et ainsi de suite, dans une manière récursive.

L'algorithme de reconstruction précédent est résumé ci-après théorème.

Théorème 4.4[06] (Haar reconstruction)

Si $f = f_0 + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j-1}$ avec

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k) \in V_0 \text{ et } \omega_{j'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j'} \psi(2^{j'} x - k) \in W_{j'}$$

Pour

$0 \leq j' \leq j$ alors

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^j \varphi(2^j x - l) \in V_j$$

Où l' $a_l^{j'}$ sont déterminées de manière récursive $j' = 1, j' = 2 \dots$ jusqu'à ce que $j' = j$ Par l'algorithme

$$a_l^{j'} == \begin{cases} a_k^{j'-1} + b_k^{j'-1} & \text{si } l = 2k \\ a_k^{j'-1} - b_k^{j'-1} & \text{si } l = 2k + 1 \end{cases}$$

4.2.3 Filtres et diagrammes

Les algorithmes de décomposition et de reconstruction peuvent être mis dans la langue des filtres discrets et les opérateurs simples qui agissent sur une séquence de coefficients. L'algorithme peut ensuite être visualisé en termes de diagrammes.

Nous ferons d'abord l'algorithme de décomposition. Définissez deux filtres discrets (opérateurs de convolution) de H et L par leurs réponses impulsionnelles, qui sont les séquences h et ℓ [06]

$$h = (0 \dots \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}_{k=-1 \ 0} \dots 0), \quad \ell = (0 \dots \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}_{k=-1 \ 0} \dots 0)$$

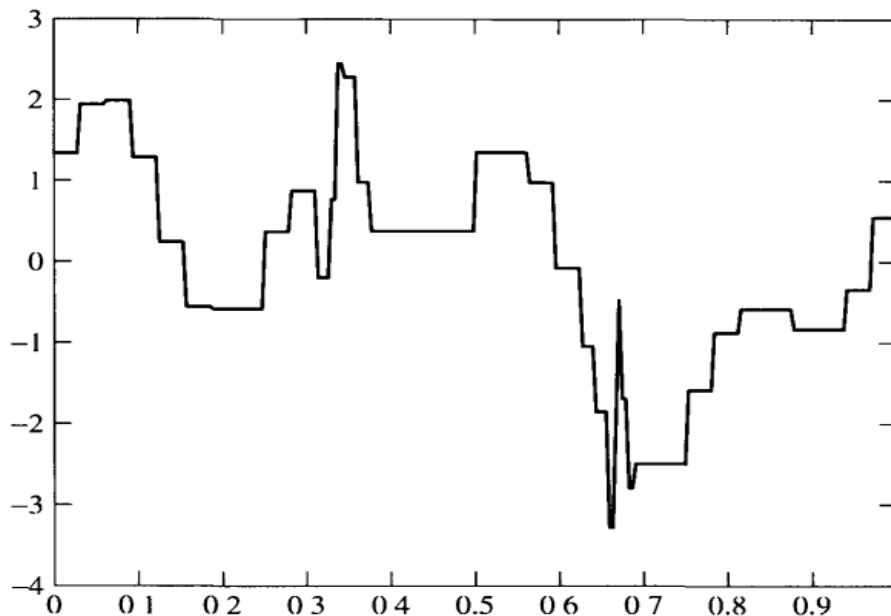


Figure 4.15. Graphique montrant la compression de 90%.

Si $\{x_k\} \in \ell^2$, alors $H(x) = h * x$ et $L(x) = \ell * x$. Les séquences obtenues sont

$$H(x)_k = (h * x)_k = \frac{1}{2}x_k - \frac{1}{2}x_{k+1}, \quad L(x)_k = (\ell * x)_k = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_{k+1}.$$

Si nous ne gardons que même les indices, puis $H(x)_{2k} = (h * x)_{2k} = \frac{1}{2}x_{2k} - \frac{1}{2}x_{2k+1}$

et $L(x)_{2k} = (\ell * x)_{2k} = \frac{1}{2}x_{2k} + \frac{1}{2}x_{2k+1}$

Cette opération de jeter les coefficients impairs dans une séquence est appelée échantillonnage en bas; nous noterons le correspondant par l'opérateur D.

Nous appliquons maintenant ces idées pour aller au niveau j de coefficients d'échelle de a_k^j pour obtenir le niveau $j - 1$. Mise à l'échelle et les coefficients d'ondelettes. En utilisant le théorème 4,12 et remplaçant x par a_k^j

$$b_k^{j-1} = DH(a^j)_k \text{ et } a_k^{j-1} = DL(a^j)_k.$$

La figure 4.22 illustre l'algorithme de décomposition. L'opérateur de sous-échantillonnage D est remplacé par le symbole " $2 \downarrow$ " plus suggestif.

L'algorithme de reconstruction exige aussi de définir deux filtres discrets \tilde{H} et \tilde{L} par leurs réponses impulsionnelles correspondantes,

$$\tilde{h} = \left(\dots 0 \dots \underbrace{1 \ -1}_{k=0.1} \dots 0 \dots \right) \tilde{\ell} = \left(\dots 0 \dots \underbrace{1 \ -1}_{k=0.1} \dots 0 \dots \right)$$

pour une séquence $\{x_k\}$, nous avons

$(\tilde{h} * x)_k = x_k - x_{k-1}$ et $(\tilde{\ell} * x)_k = x_k + x_{k-1}$ ici une observation important ; Si x et y sont des séquences dans lesquelles les entrées impaires sont tous à 0, alors

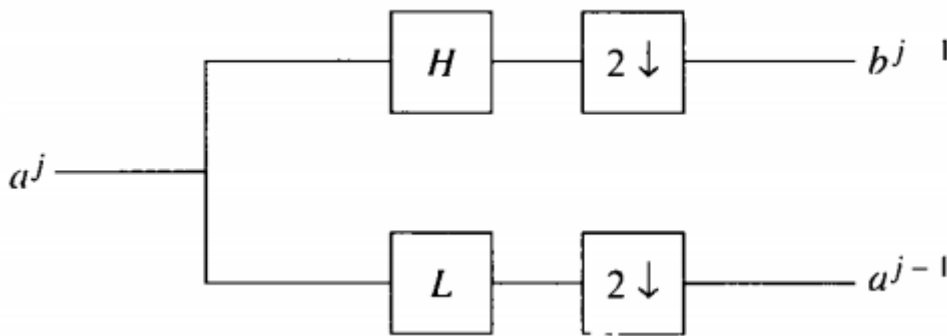


Figure 4.16 Schéma de décomposition de Haar.

$$(\tilde{h} * x)_l = \begin{cases} x_{2k}, l = 2k \\ -x_{2k}, l = 2k + 1 \end{cases} \text{ et } (\tilde{\ell} * x)_l = \begin{cases} y_{2k}, l = 2k \\ -y_{2k}, l = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ajout de deux séquences } (\tilde{h} * x)_l + (\tilde{\ell} * x)_l = \begin{cases} x_{2k} + y_{2k}, l = 2k \\ -x_{2k} - y_{2k}, l = 2k + 1 \end{cases}$$

C'est presque le modèle de la formule de reconstruction donnée dans le théorème 4.14. Bien que l' x_{2k+1} et y_{2k+1} sont 0, x_{2k} et y_{2k} sont à nous de choisir, nous avons donc mis $x_{2k} = b_k^{j-1}$ et $y_{2k} = a_k^{j-1}$ c'est

$x = (\dots 0 \ b_{-1}^{j-1} \ 0 \ b_0^{j-1} \ 0 \ b_1^{j-1} \ 0 \ b_2^{j-1} \ 0 \dots)$ (toutes les entrées impaires sont nuls) et de même pour y . Les séquences x et y sont appelées des échantillons de séquences b^{j-1} et a^{j-1} Nous utilisons le U pour désigner le sur-échantillonnage l'opérateur, de sorte que $x = Ub^{j-1}$ et $y = Ua^{j-1}$ La formule de reconstruction prend alors la forme compacte

$$a^j = \tilde{L}Ua^{j-1} + \tilde{H}Ub^{j-1}$$

Nous illustrons l'étape de reconstruction dans la figure 4.23. L'opérateur de sur-échantillonnage est remplacé par le symbole $2\uparrow$.

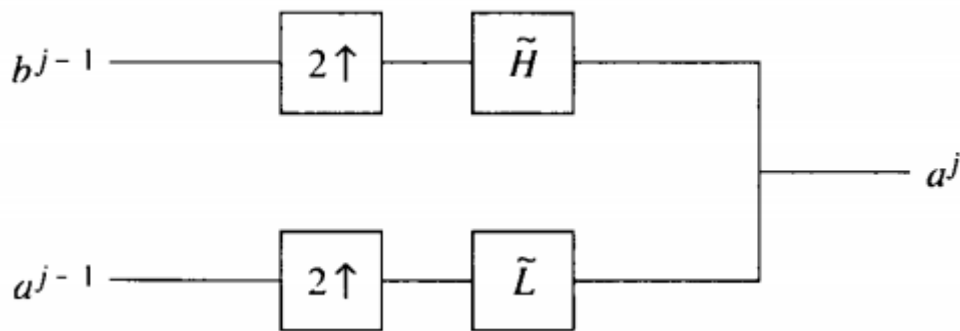


Figure 4.17. Schéma de reconstruction Haar .

Conclusion

Dans cette section, nous présentons un résumé des idées de ce chapitre. Le format est une procédure étape par étape utilisée pour le procédé (compresser ou débruitage) un signal donné $= f(t)$.

Nous ferons ψ et φ la fonction de Haar ondelettes et d'échelle.

- **Étape 1** échantillon. si le signal est continu (analogique) $V = f(t)$ où t représente le temps, choisissez le niveau supérieur $j = J$ afin que 2^j est plus grand que la Fréquence du signal.

Soit $a_k^j = f\left(\frac{k}{2^j}\right)$. Dans la pratique, le choix de k est un intervalle fini déterminé par la durée du signal. Par exemple, si la durée du signal est $0 \leq t \leq 1$. alors la plage de k est $0 \leq k \leq 2^j - 1$ (ou peut-être $1 \leq l \leq 2^j$). Si le signal est discret pour commencer (c'est à dire, une séquence de nombres), alors cette étape n'est pas nécessaire. Le niveau supérieur a_k^j est mise à la K nième terme de le signal échantillonné, et 2^j est pris égale à la fréquence d'échantillonnage. Dans tous les cas, nous ont le rapprochement de plus haut niveau à f donnée par

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \varphi(2^j x - k).$$

- **Etape 2.** Décomposition. L'algorithme de décomposition ; décompose f_j en

$$f_j = \omega_{j-1} + \dots + \omega_{j-1} + f_{j-1}$$

Où

$$\omega_{j-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l^{j-1} \psi(2^{j-1}x - l)$$

$$f_{j-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^{j-1} \varphi(2^{j-1}x - l)$$

le Coefficient b_l^{j-1} et a_l^{j-1} déterminé à partir de a^j récursive par l'algorithme

$$a_l^{j-1} = DL(a^j)_k$$

$$b_l^{j-1} = DH(b^j)_k$$

Où H et L sont les haut et passe-bas de la section 4.3.3 où $j = J$, a_l^{j-1} et b_l^{j-1} sont déterminées par a_k^j qui sont les valeurs de signaux échantillonnés de l'étape 1 Puis j devient $J - 1$ et a_k^{j-2} et b_k^{j-2} sont déterminées à partir de a_k^{j-1} Ensuite, j devient $J - 2$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que le niveau atteint est satisfaisant pour une raison ou il ya trop peu de coefficients pour continuer. Sauf indication contraire, la décomposition algorithme continuera jusqu'à ce que la le niveau $j = 0$ est atteint, c'est :

$$f_j = \omega_{j-1} + \dots + \omega_0 + f_0.$$

➤ **Étape 3** traitement. Après la décomposition, le signal est maintenant sous la forme

$$f_j(x) = \sum_{j=0}^{J-1} \omega_j + f_0 \quad (4.20)$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l^j \psi(2^j x - k) \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi(x - k) \quad (4.21)$$

Le signal peut alors être filtré par modification des coefficients d'ondelettes b_k^j Comment cela doit être fait dépend du problème à portée de main. Pour filtrer tous hautes fréquences, d'autant b_k^j serait fixé à zéro pour j au-dessus d'un certain valeur. Peut-être seulement une certaine partie du signal correspondant à Les valeurs particulières de k doit être filtré. Si la compression des données est l'objectif, alors le b_k^j qui sont en dessous d'un certain seuil (en valeur absolue) serait il remis à zéro. Quel que soit l'objectif, le processus modifie la b_k^j

- **Étape 4** reconstruction. Maintenant, l'objectif est de prendre le signal modifié. f_j , dans la forme (4.21) (avec la modification b_k^j) et reconstruire comme

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \varphi(2^j x - k).$$

Ceci est réalisé par l'algorithme de reconstruction discuté dans Section 4.3.3:

$$a^j = \tilde{L}Ua^{j-1} + \tilde{H}Ub^{j-1} \quad (4.22)$$

Pour $j = 1 \dots J$ quand $j = 1$; a_k^l sont calculées à partir de la_k^0 et b_k^0 . quand $j = 2$ a_k^l sont calculées à partir de la_k^1 et b_k^1 et ainsi de suite. Le plage de k est déterminée par la durée temporelle du signal. quand $j = J$ (le hautniveau) a_k^l représente la valeur approximative du traitement de signal au temps $x = \frac{k}{2^j}$, Bien entendu, ceux-ci a_k^l sont différents de l' a_k^l d'origine en raison de la modification des coefficients à l'étape 3.

CHAPITRE 5

ONDELETTE DE DAUBECHIES

Introduction

L'ondelette que nous avons examinée jusqu'à présent est l'ondelette de Haar qui a des inconvénients majeurs. Les ondelettes de Haar ont un support compact, mais sont discontinues. Ces ondelettes, avec quelques autres ayant des propriétés similaires, étaient les seuls disponibles avant Ingrid Daubechies qui a découvert la hiérarchie des ondelettes qui sont nommés après. Le plus simple d'entre eux est tout simplement l'ondelette de Haar, qui est le seul discontinue. Les autres types d'ondelettes de la hiérarchie sont tous les deux supportés de façon compacte et continue. Mieux encore, en remontant la hiérarchie, ils deviennent de plus en plus lisse; autrement dit, elles peuvent avoir un nombre prescrit de dérivées continues. La douceur des ondelettes peut être choisie pour satisfaire aux conditions pour une application particulière. Nous passons maintenant à la construction de la première ondelette et passer de Haar à de Daubechies. [06]

5.1 Construction de Daubechies

Théorème 5.23 [01] énumère les trois conditions suffisantes sur le polynôme P qui assure que l'itération donnée à la section 5.3.4 [01] produit une fonction de mise à l'échelle.

Pour un polynôme $P(z)$, laisser

$$p(\xi) = p(e^{-i\xi})$$

En termes de de la fonction p . les trois conditions dans l'hypothèse de Théorème 5.23[01] peut être déclaré comme

$$P(0) = 1$$

5.1

$$|p(\xi)|^2 + |p(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad 5.2$$

$$|p(\xi)| > 0 \quad \text{pour } -\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2 \quad 5.3$$

Dans cette section, nous décrivons un polynôme, en raison de Daubechies, qui satisfait (6.1)-(6.3).

Le polynôme associé à la fonction d'échelle de Haar est :

$$\begin{aligned} p_0(\xi) = P(e^{-i\xi}) &= \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-\frac{i\xi}{2}} \end{aligned}$$

Ce choix de P_0 satisfait les équations. (6.1) - (6.3). Cependant, la fonction d'échelle de Haar est discontinue. Une façon de générer une fonction continue de la mise à l'échelle est de prendre pouvoirs de convolution. En fait, le produit de convolution de la fonction d'échelle de Haar elle peut être affichée pour égaler la fonction continue qui suit :

$$\Phi_0 * \Phi_0(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{pour } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(voir Figure 6.1) Maintenant, la transformée de Fourier d'une convolution est égale au produit des transformées de Fourier. En particulier, la transformée de Fourier de $\phi * \phi * \dots * \phi$ (n temps) est $(2\pi)^{n/2} (\hat{\phi})^n$. Pour la transformée de Fourier de l'function d'échelle, nous pouvons être amenés premiers à essayer $p(\xi) = p_0(\xi)^n = e^{-in\xi/2} \cos(\xi/2)^n$ pour une puissance convenable de n, comme la fonction qui génère une échelle continue fonction. Toutefois, la propriété (5.2) ne tient plus (sauf si n = 1, le cas Haar) et si cette première tentative échoue.

Au lieu de se contenter de relever P_0 à la puissance n , nous élevons des deux côtés de l'identité $|p_0(\xi)|^2 + |p_0(\xi + \pi)|^2 = \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = 1$ à la puissance n .

Avec $n = 3$, on obtient

$$1 = \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^3 \quad 5.4$$

Ou

$$1 = \cos^6\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin^6\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

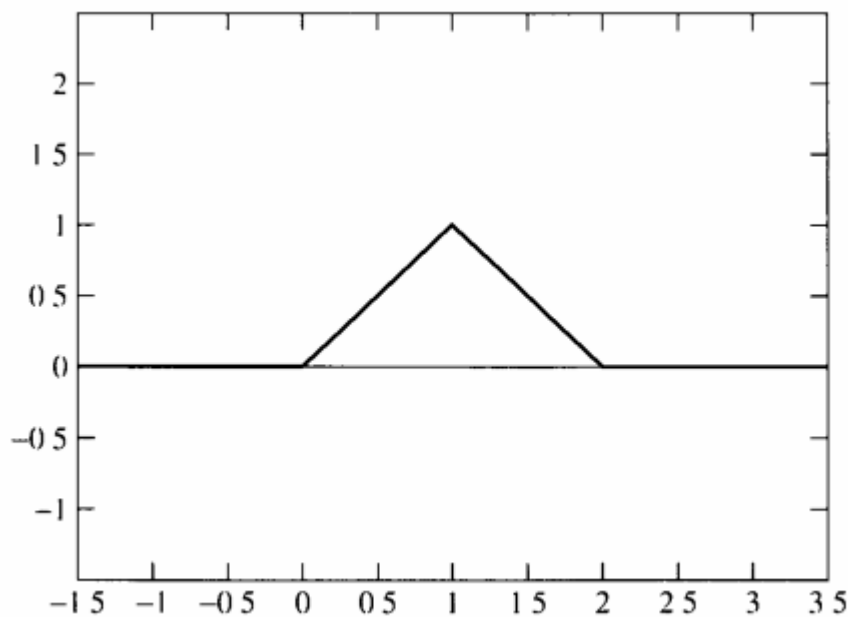


Figure 5.1. Graph de $\phi_0 * \phi_0$

Utilisation de l'identité $\cos(u) = \cos(u + \pi/2)$ et $\sin(u) = -\sin(u + \pi/2)$ pour les deux derniers termes sur la droite, nous avons

$$1 = \cos^6\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\sin^2\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right)\cos^4\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right) + \cos^6\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right).$$

Si nous laissons

$$|p(\xi)|^2 = \cos^6\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

alors l'équation précédente devient

$$1 = |p(\xi)|^2 + |p(\xi + \pi)|^2$$

et de la propriété (6.2) est satisfaite. Propriété (6.3) est également satisfaite car $\cos(\xi/2) \geq 1/\sqrt{2}$ pour $|\xi| \leq \pi/2$. A noter également que $|p(0)| = 1$. Donc, tout ce qui reste est d'identifier p lui-même (nous n'avons défini $|p|$). Tout d'abord, nous réécrivons l'équation définissant pour $|p|$ comme

$$\begin{aligned} |p(\xi)|^2 &= \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right) \\ &= \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \left| \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sqrt{3}i \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée de cette équation, nous laissons

$$p(\xi) = \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sqrt{3}i \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right) \alpha(\xi).$$

Où $\alpha(\xi)$ est une expression à valeur complexe avec $|\alpha(\xi)| = 1$ qui sera choisi plus tard.

Pour identifier le polynôme P (avec $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$), nous utilisons les identités

$$\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\xi}{2}} + e^{-i\frac{\xi}{2}}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\xi}{2}} - e^{-i\frac{\xi}{2}}}{2i}.$$

On obtient

$$p(\xi) = \frac{1}{8} (e^{i\xi} + 2 + e^{-i\xi}) (e^{i\frac{\xi}{2}} + e^{-i\frac{\xi}{2}} + \sqrt{3}e^{i\frac{\xi}{2}} - \sqrt{3}e^{-i\frac{\xi}{2}}) \alpha(\xi).$$

Nous choisissons $\alpha(\xi) = e^{-3\xi/2}$ pour effacer toutes les forces positives et fractionnaires dans l'exposant. L'expansion sur la collecte et conditions, nous obtenons

$$p(\xi) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8}\right) + e^{-i\xi} \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{8}\right) + e^{-2i\xi} \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{8}\right) + e^{-3i\xi} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{8}\right)$$

L'équation $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$ est donc satisfait par le polynôme

$$p(z) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{8}\right)z + \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{8}\right)z^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{8}\right)z^3$$

Depuis satisfait p (6.1) à (6.3), P satisfait l'hypothèse du théorème 5.23. [Rappelons que $P(z) = (1/2) \sum_k p_k z^k$ Par conséquent, pour l'exemple de Daubechies, nous avons

$$p_0 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right), p_1 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right), p_2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{8}\right), p_3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{8}\right) \quad 5.5 \quad \text{Les}$$

Daubechies fonction d'échelle, ϕ , (trouvée par l'application de la procédure itérative décrite dans le théorème 5.23. Les figures 5.18 par 5.21 dans les chapitres illustrent les premières itérations de cette procédure). La figure 5.2 montre l'(approximative) de ϕ graphique qui résulte de l'itération de cette procédure plusieurs fois.

Et le ψ ondelettes qui est associé à la mise à l'échelle de Daubechies

fonction ϕ ? Comme le montre le théorème 5.10[06], une fois que les coefficients p_k ont été identifiés et ϕ a été construit, puis l'ondelette associée est donnée par

formule

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{p}_{k-1} \phi(2x - k).$$

Figure 5.3 montre le (approximative) graphe de la fonction d'ondelettes associé.

Contrairement à l'échelle et ondelettes fonctions de Haar, Daubechies et la mise à l'échelle fonctions d'ondelettes sont continues. Cependant, ils ne sont pas différentiables.

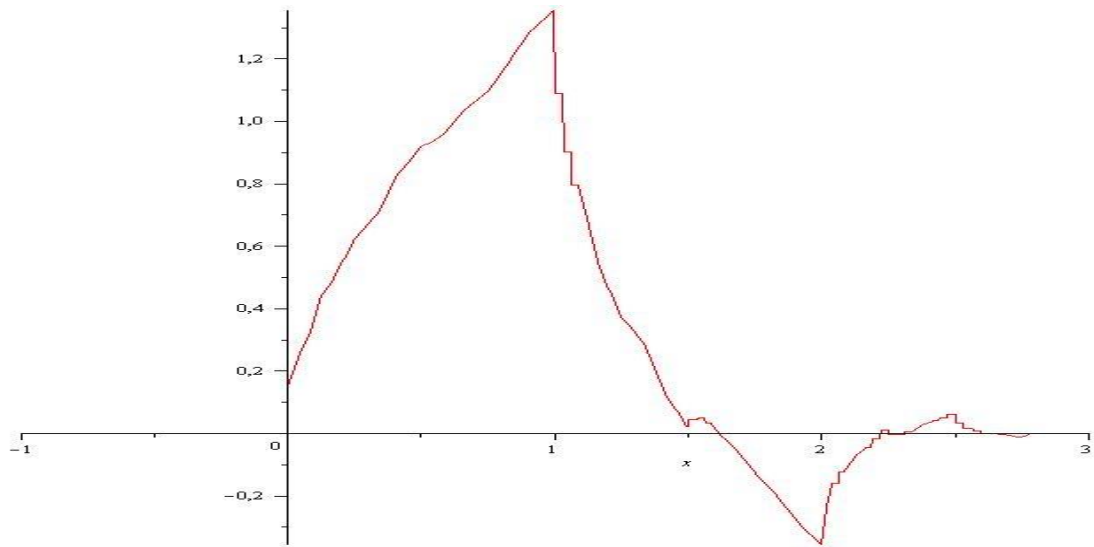


Figure 5.2. Daubechies scaling function

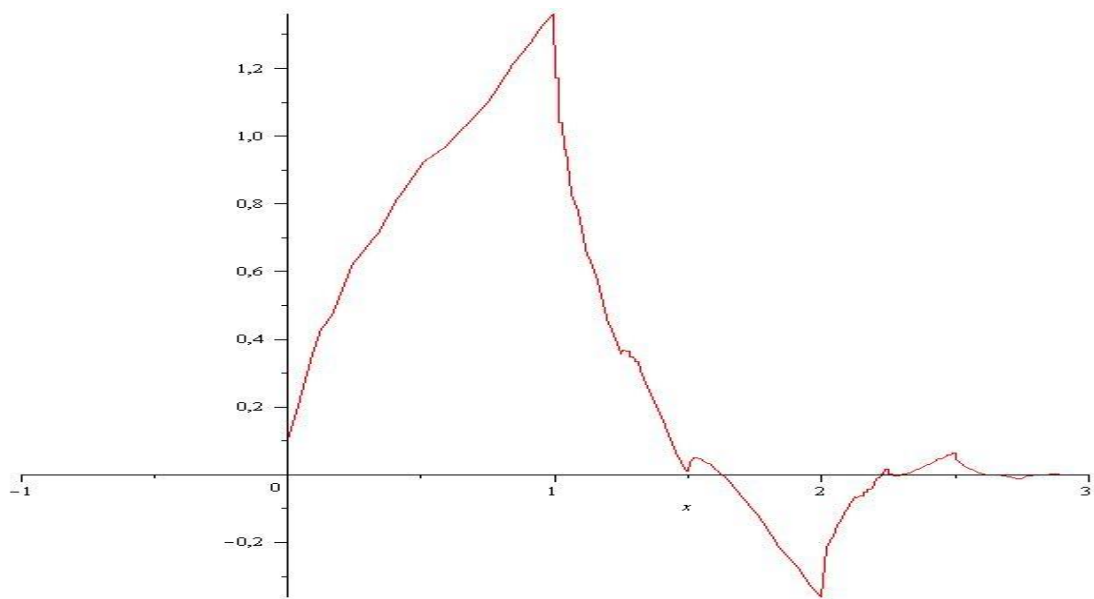


Figure 5.3. Daubechies wavelet function.

5.2 CLASSIFICATION, MOMENTS, ET DOUCEUR

D'autres fonctions, et les ondelettes d'échelle douce peut être obtenu en choisissant une puissance plus élevée que $n = 3$ dans l'équation. (5,4). Tout puissance impair, $n = 2N - 1$. il peut être utilisé. En fait. Daubechies ont montré que pour chaque N il y aura

$2N$ non nulle, les coefficients réels d'échelle P_0, \dots, P_{2N-1} . Résultant en une fonction de mise à l'échelle et d'ondelette qui sont pris en charge sur l'intervalle $0 \leq t \leq N - 1$ Ils sont choisis de telle sorte que le degré correspondant de $2N - 1$ polynôme $P_N(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} p_k z^k$ a la factorisation,

$$P_N(z) = (z + 1)^N \tilde{P}_N(z) \quad 5.6$$

Où le degré de \tilde{P}_N est $N-1$ et $\tilde{P}_N(-1) \neq 0$ Ce système garantit que les ondelettes associés auront précisément N "moments nuls". Nous allons discuter de ce que cela signifie et pourquoi il est important plus tard.

Mis à part une inversion des coefficients P_N ces coefficients sont uniques. Dans les deux cas que nous avons traités, $N = 1$ (Haar) et $N = 2$ (Daubechies) les polynômes sont $P_1(z) = \frac{1}{2}(1 - z)$ et $P_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{z}}{8} + \frac{1-\sqrt{z}}{8} z \right) (1 + z)^2$ Deux polynômes ont la factorisation de l'équation. (5,6), avec $\hat{P}_1(x) = \frac{1}{2}$ et $\hat{P}_2(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{8} + \frac{1-\sqrt{x}}{8} z$.

La fonction de mise à l'échelle ϕ_N et ondelettes ψ_N générés par les transformées de Fourier ont donné en termes de produits infinis. Parce que les coefficients de P_N sont réelles $\overline{P_N(-z)} = P_N(-\bar{z})$ donc des équations. [(5.29) et (5.30) voire [01]], que nous avons

$$\hat{\Phi}_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} P_N \left(e^{-\frac{\xi}{2^j}} \right), \quad 5.7$$

$$\hat{\Psi}_N(\xi) = -e^{-i\frac{\xi}{2}} P_N \left(-e^{i\frac{\xi}{2}} \right) \hat{\Phi}_N \left(\frac{\xi}{2} \right) \quad 5.8$$

noter que $\hat{\Psi}_N(0) = 0$, à cause de $P_N(-1) = 0$ si $N > 1$, nous avons aussi $\hat{\Psi}'_N(0) = 0$, à cause de $P'_N(-1) = 0$ En général, nous avons que

$$\hat{\psi}_N^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, N-1 \\ -\frac{N! \left(-\frac{i}{2}\right)^N \hat{P}_N(-1)}{\sqrt{2\pi}} \neq 0, & k = N \end{cases} \quad 5.9$$

Cela donne le résultat suivant.

Proposition 5.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_N(x) dx = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, N-1 \\ -\left(\frac{2^{-N} N!}{\sqrt{2\pi}}\right) \hat{P}_N(-1) & k = N \end{cases} \quad 5.10$$

Preuve. La proposition découle de l'équation (6.9) et la propriété de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathcal{F}[f(t)](\lambda).$$

Il suffit de régler $f = \psi_N$, $n = k$ et $\lambda = 0$

Just set $f = \psi_N$, $n = k$, et $\lambda = 0$.

En mécanique, intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$ sont appelés les moments d'une distribution de masse ρ . Le terme «moment» porte sur une partie intégrante de toute fonction contre x^k . Nous pouvons donc reformuler la proposition en disant que ψ_N a ses N premiers moments disparaître. Cela est généralement raccourci à dire que ψ_N a N moments nuls: ils sont les premiers N est entendu.

Ondelettes de Daubechies sont classés selon le nombre de moments nuls qu'ils ont. La douceur de l'augmentation de la fonction de mise à l'échelle et ondelettes avec le nombre de moments nuls Le $N = 1$ cas est le même que le cas de Haar; la fois la fonction de mise à l'échelle et ondelettes sont discontinues. Les $N = 2$ Daubechies fonction et ondelettes d'échelle sont continues, mais ne certainement pas dérivés lisses. Dans le cas $N = 3$, les deux sont continûment différentiables. Lorsque N est grand, le nombre de dérivées continues que ϕ_N et ψ_N ont est à peu près $N / 5$. Donc,

pour obtenir 10 dérivés, nous devons prendre $N \approx 50$ Dans le tableau suivant, nous la liste des coefficients de mise à l'échelle approximatives pour les ondelettes de Daubechies, avec N allant de 1 à 4 Bien sûr, les coefficients d'échelle donnés pour N = 2 sont seulement les approximations décimales pour les fonds dans l'équation. (5,5).

Coefficient d'échelle	Nombre de moment indeterminer			
	N=1	N=2	N=3	N=4
p_k				
p_0	1	0.683013	0.470467	0.325803
p_1	1	1.183013	1.141117	1.010946
p_2	0	0.316987	0.650365	0.892200
p_3	0	-0.183013	-0.190934	-0.039575
p_4	0	0	-0.120832	-0.264507
p_5	0	0	0.049817	0.043616
p_6	0	0	0	0.023252
p_7	0	0	0	-0.014987

Pourquoi est-il utile d'avoir des moments de fuite?La réponse courte est que les moments de fuite sont un facteur clé dans de nombreuses applications d'ondelettes: compression, suppression du bruit, et la détection de singularité, par exemple.

Pour mieux comprendre cela, regardons de près le cas N = 2.Selon l'équation. (5,10) avec N = 2, les deux premiers instants (k = 0, 1) s'annule.Le moment où k=2 est $-(2^{-1}/\sqrt{2\pi})\hat{P}_2(-1)$.De notre discussion précédente, nous voyons que $\hat{P}_2(-1) = \frac{1+\sqrt{3}}{8} + \frac{1-\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, pour la troisième (k = 2) Actuellement, nous avons avec $\psi = \psi_{N=2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi(x) dx = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \tag{5.11}$$

Nous voulons utiliser ces moments de rapprocher les coefficients d'ondelettes des signaux lisses. et nous voulons montrer que ces coefficients t-il petit lorsque le

niveau j est élevé. si f est un signal lisse, deux fois continûment différentiable, alors son coefficient f, k -ondelettes est

$$b_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^j \psi(2^j x - k) dx$$

$$= \int_{-2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x + 2^j k) 2^j \psi(2^j x) dx.$$

si j est assez grand, l'intervalle de temps où nous intégrons sera faible, et l'on peut alors remplacer $f(x + 2^{-j}k)$ par son quadratique polynôme de Taylor en $x, f(x + 2^{-j}k) \approx f(2^{-j}k) + x f'(2^{-j}k) + \frac{1}{2} x^2 f''(2^{-j}k)$. Ce faisant, nous obtenons l'approximation suivante pour b_k^j :

$$b_k^j \approx \int_{-2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \left(f(2^{-j}k) + x f'(2^{-j}k) + \frac{1}{2} x^2 f''(2^{-j}k) \right) 2^j \psi(2^j x) dx. \quad 5.12$$

L'intégrale sur le droit peut être réduit à faire des intégrales pour les trois premiers moments de ψ . Depuis les deux premiers moments disparaissent, et la troisième est donnée dans (5.11), nous pouvons évaluer l'intégrale. Notre résultat final est que les f, k coefficients des ondelettes est d'environ

$$b_k^j \approx -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} 2^{-2j} f''(2^{-j}k) \quad 5.13$$

5.3 Detection de Singularités.

Comme application de la formule dans (5.13), nous trouvons un point où une fonction par ailleurs lisse présente une discontinuité dans son dérivé. C'est ce qu'on appelle la détection de singularités, et ce procédé peut être utilisé, entre autres, de détecter les fissures dans un matériau.

A titre d'exemple, nous allons déterminer où la fonction linéaire par morceaux le montre la figure 5.4 change la pente. Gardez à l'esprit que la formule (5.13) est exacte dans n'importe quelle région où un signal f est constante, linéaire ou quadratique en x . parce que le quadratique polynôme de Taylor de f et f dans ce cas. Comme $f' = 0$ où f est linéaire, la formule (5.13) implique que les seuls coefficients nuls non d'ondelettes proviendront d'une petite région proche du point de coin où les changements de pente. Le signal se présente sous la forme

$$f(x) := \begin{cases} 0.37x + 1.37, & -1 \leq x \leq 2.8 \\ 1.58x - 2.03, & 2.8 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Après le prélèvement, il à 256 points équidistants, nous décomposons l'aide de la $N = 2$ Daubechies ondelettes. Ainsi, notre niveau de départ a été $f = 8$; le niveau bas de cette $f = 7$. Le seul coefficient d'ondelettes appréciable était $b_{97}^7 \approx -0.01$. Le reste était de l'ordre de 10^{-14} . L'indice $k = 97$ correspond à un appui sur le ondelette x intervalle $[2,79, 2,83]$; par conséquent, la singularité est situé dans cet intervalle

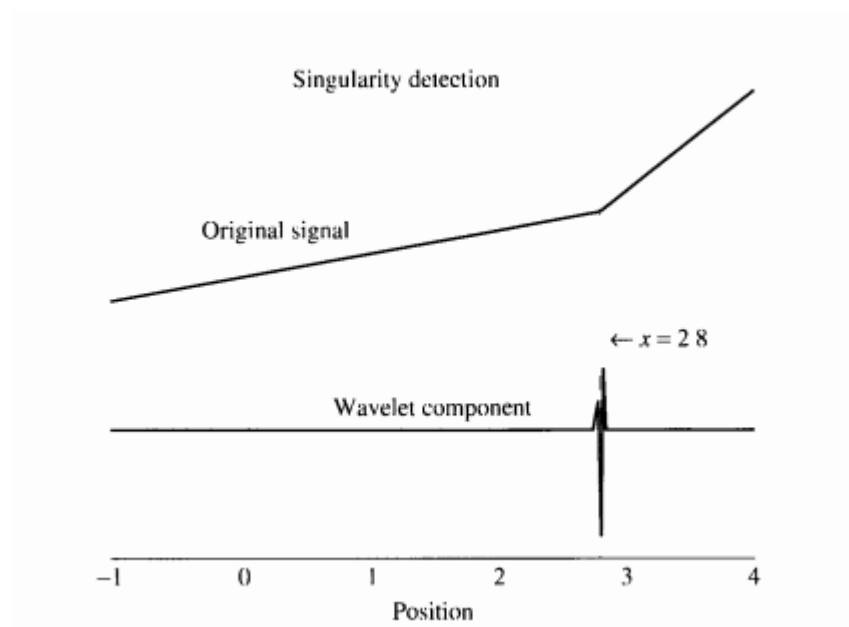


Figure 6.4. The signal original est linéaire par morceaux sur l'intervalle $[-1, 4]$, avec une pause à $x = 2,8$. La partie en ondelettes est issu d'une décomposition du premier ordre en utilisant les ondelettes $N = 2$: il est essentiellement 0, à l'exception de l'intervalle à proximité $x = 2,8$.

6.4 COMPUTATIONAL ISSUES

Considérons le problème suivant. Nous voulons utiliser $N = 2$ les ondelettes de Daubechies à décomposer un signal que nous avons n échantillons pour, s_0, \dots, s_{n-1} . Ces échantillons seront considérés comme faisant partie de notre séquence de coefficients d'approximation haut niveau, a^j . Nous allons filtrer ces nombres en utilisant les filtres passe haut et passe-bas pour les ondelettes de Daubechies. Ceux-ci sont H et L , et ils ont des réponses impulsionnelles fournies par les séquences h et l , où

$$l = \frac{1}{2} \left(0 \quad \underbrace{p_3 \quad p_2 p_1 p_0}_{k=0 \dots 3} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right) l_k = \frac{1}{2} \bar{p}_{-k},$$

$$h = \left(\dots 0 \quad 0 \quad 0 \quad \underbrace{-p_0 p_1 p_2 p_3}_{k=-1 \dots 2} \quad \dots \right) h_k = \frac{1}{2} (-1)^k p_{k+1}$$

Nous Convolve l et h avec l'échantillon a^j et vers le bas. Ainsi, pour tout a^j pas seulement notre signal par huit échantillons que nous avons

$$a_k^{j-1} = D(l * a^j)_k = \frac{1}{2} (\bar{p}_0 a_{2k}^j + \bar{p}_1 a_{2k+1}^j + \bar{p}_2 a_{2k+2}^j + \bar{p}_3 a_{2k+3}^j). \quad (5.14)$$

$$b_{k+1}^{j-1} = D(h * a^j)_{k+1} = \frac{1}{2} (p_3 a_{2k}^j - p_2 a_{2k+1}^j + p_1 a_{2k+2}^j - p_0 a_{2k+3}^j). \quad (5.15)$$

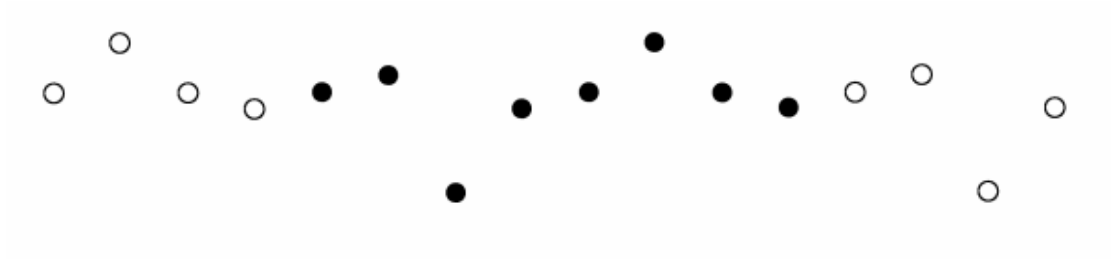
(Nous utilisons $k + 1$ dans (6.15) plutôt que k afin de traiter avec les mêmes a^j sur le côté droit dans les deux formules.)

Pour calculer chaque coefficient $J - 1$, nous avons besoin de quatre échantillons consécutifs, en partant toujours un nombre pair. Par exemple, si on a $N = 8$ échantillons, puis à calculer le coefficient a_2^2 nous avons besoin de S_4 à S_7 . Pour calculer a_3^2 nous devons S_6 à S_9 . Mais nous n'avons pas s_9 ! Il n'est pas surprenant qu'à un moment donné, nous allons manquer de coefficients à filtrer. La surprise est que nous sommes seulement en mesure de calculer $k = 0, 1, 2$. Cela signifie de huit échantillons, nous obtenons seulement trois coefficients de la décomposition, pas les quatre que nous pourrions nous attendre. C'est le problème de débordement. La filtres H et L d'entraînement sur les échantillons que nous n'avons pas. Ce qu'il faut faire? Tout d'abord, le problème de débordement vient du fait que nous ne savons pas ce que le signal était avant ou après notre série d'échantillons. Ainsi, nous devons étendre le signal d'une certaine façon au-delà de notre première série d'échantillons. Voici quelques-uns des choix standard. Dans les illustrations qui l'accompagnent, les cercles pleins représentent le signal d'origine, et les milieux ouverts sont des points dans l'extension du signal.

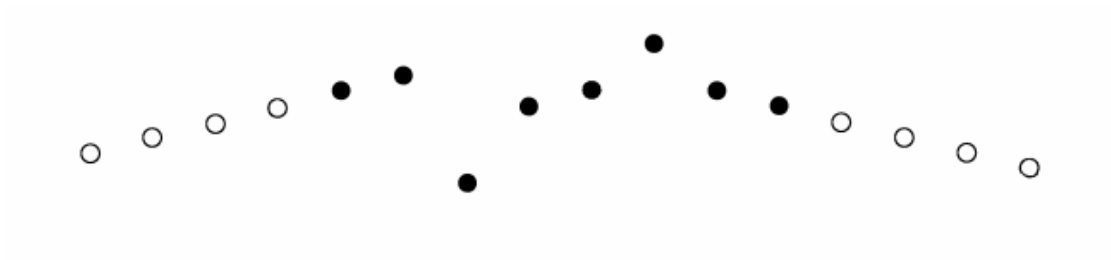
Zero-padding .Etendre le signal en ajoutant des zéros aux deux extrémités. Ceci est approprié si le signal est très longue, et les extrémités du signal n'ont pas d'importance, ou si le signal est vraiment brusquement démarré et arrêté. Cela revient à fixer $s_k = 0$ si $k < 0$ ou $k > n-1$.



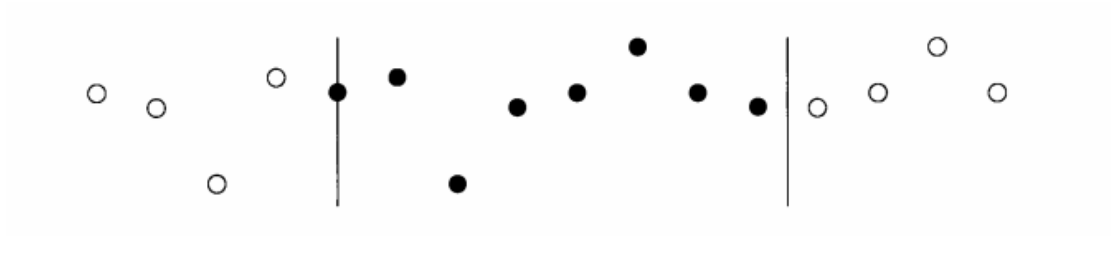
Extension périodique. Une autre approche consiste à réutiliser les données échantillonnées en faisant le signal un moment périodique, de sorte que $s_{k+n} = s_k$. Par exemple, avec huit échantillons, $s_0 \dots S_7$, nous laisseraient $s_8 = S_0$, $S_9 = S_1$, et ainsi de suite.



Rembourrage en douceur. Etendre le signal par extrapolation linéaire des données près des deux extrémités. Ceci est approprié si le signal n'est pas trop bruyant, au moins près des extrémités.



Extensions symétriques. Le signal est uniformément étendu aux extrémités par réflexion. Il ya deux façons de le faire, on peut réfléchir sur une ligne passant par un point de terminaison, soit environ un à mi-chemin de la ligne entre un point final et le point suivant sur la grille. Le premier type est illustré à l'extrémité gauche, et le second type est représenté à l'extrémité droite.



6.5 THE SCALING FUNCTION AT DYADIC POINTS

Bien que les valeurs de la fonction mise à l'échelle ϕ pas entrer dans les algorithmes de décomposition et de reconstruction, il est utile de pouvoir calculer des valeurs approximatives de ϕ afin de vérifier certaines de ses propriétés (comme la continuité). (Une méthode itérative pour le calcul ϕ est donnée dans le théorème 5.23. [voire (06)]) Cependant, cet algorithme est un peu lourd d'un point de vue

informatique. Une méthode plus efficace de calcul pour le calcul de la fonction de mise à l'échelle est de ϕ à utiliser l'équation de mise à l'échelle pour calculer la valeur de ϕ pour toutes les valeurs dyadiques, $x = l/2^n$ où l et n sont des nombres entiers. Nous illustrons ce processus dans les étapes suivantes. Pour simplifier l'exposé, nous nous concentrerons sur la Daubechies $N = 2$ cas avec quatre coefficients de p non nuls comme construit dans la section précédente, mais la procédure facilement généralisée.

Etape 1 Calculer ϕ à toutes les valeurs entières. Laissez $\phi_l = \phi(l)$ pour $l \in \mathbb{Z}$. Les Daubechies ($N = 2$) fonction d'échelle est différente de zéro uniquement sur l'intervalle $0 < x < 3$ avec $\phi_0 = \phi_3 = 0$ (voir la fig 5.2). En particulier, ϕ_1 et ϕ_2 sont les seules valeurs non nulles inconnues de ϕ aux points entiers. Afin d'organiser la normalisation $\int \phi = 1$, nous avons besoin $\sum_l \phi = 1$ ou dans notre cas précis:

$$\phi_1 + \phi_2 = 1 \quad 5.16$$

Maintenant, nous utilisons l'équation d'échelle $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$. Pour $x=1$ cette équation devient

$$\phi_1 = \sum_{k=0}^3 p_k \phi(2 - k) = p_0 \phi_2 + p_1 \phi_1 \quad (\text{à cause de } \phi_0 = \phi_3 = 0).$$

A $x = 2$ l'équation d'échelle devient

$$\phi_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(4 - k) = p_2 \phi_2 + p_3 \phi_1$$

Ces deux équations peuvent être écrites sous forme de matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Ici, les valeurs de p sont connus [voir Eq. (5.5)] et nous réglons les inconnues ϕ_1 et ϕ_2 . Pour que cette équation de matrice à une solution non nulle, la matrice doit avoir une valeur propre égale à 1. Alors (ϕ_1, ϕ_2) serait le vecteur propre

correspondant $\phi_1 + \phi_2 = 1$ Pour trouver ce vecteur propre, nous réécrivons l'équation de la matrice

$$\begin{pmatrix} p_1 - 1 & p_0 \\ p_3 & p_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une solution non nulle de cette équation matricielle existe si la première ligne est un multiple de la seconde. From Theorem 5.9, $[\sum p_{\text{impair}} = \sum p_{\text{pair}} = 1]$. Par conséquent, la première rangée est le négatif de la seconde. L'équation qui correspond à la première rangée est

$$(p_1 - 1)\phi_1 + p_0\phi_2 = 0.$$

Nous réaffirmons l'équation de normalisation (5.16):

$$\phi_1 + \phi_2 = 1.$$

Ces deux équations peuvent être résolues simultanément. dans le cas de Daubechies, la solution est

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1.366, \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx -0.366.$$

Les valeurs à ϕ tous les autres points entiers sont nuls. Par conséquent, tout les $\phi_l = \phi(l), l \in \mathbb{Z}$. ont été déterminées.

Etape 2. Les valeurs de ϕ au mi -Intègres Pour calculer $\phi(1/2)$, nous utilisons l'équation d'échelle

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \tag{5.17}$$

en $x=1/2$ on obtien

$$\phi\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{k=0}^3 p_k \phi(l - k). \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\phi(1/2) &= p_0\phi_1 = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{8} \approx 0.933 & (l = 1), \\ \phi(3/2) &= p_1\phi_2 + p_2\phi_1 = 0 & (l = 3), \\ \phi(5/2) &= p_3\phi_2 = \frac{(-1 + \sqrt{3})^2}{8} \approx 0.067 & (l = 5),\end{aligned}$$

la condition $\sum_l \phi(l) = 1$ (à partir de l'étape 1) implique $\sum_l \phi(l/2) = 2$. En effet, l'équation (5,17) donne

$$\begin{aligned}\sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^3 p_k \phi(l - k) \\ &= \sum_{k=0}^3 p_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l - k)\end{aligned}$$

Par le changement de variable, la somme interne est $\sum_l \phi(l - k) = \sum_l \phi(l)$. Cette somme est égale à 1 de l'étape 1. D'après le théorème 5.9[06], $\sum_k p_k = 2$ donc

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2) = 2.$$

selon.

Etape 3. Répétition. Les valeurs des nombres entiers égaux à ϕ en quart, $l/4$, peuvent être calculées à partir des valeurs de ϕ à demi-entiers en laissant $x = l/4$ dans l'équation de mise à l'échelle $\sum_k p_k \phi(2x - k)$. En général, une fois que ϕ a été calculée pour les valeurs $x = l/2^{n-1}$ alors on peut calculer la valeur de ϕ à la valeur $x = l/2^n$ en insérant $x = l/2^n$ dans l'équation de mise à l'échelle (5.17):

$$\begin{aligned}\phi(l/2^n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(l/2^{n-1} - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi\left(\frac{l - 2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right).\end{aligned}$$

Le côté droit implique des valeurs de ϕ a $x = l'/2^n$ qui ont été calculés à partir de l'étape précédente.

nous prétendons

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2^n) = 2^n. \quad 5.19$$

Nous avons déjà montré que cette équation pour $n = 0$ (étape 1) et $n = 1$ (Etape 2). Supposons par induction que nous assumons cette équation est vraie pour $n - 1$. Nous montrons maintenant que c'est vrai pour n . nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2^n) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(l/2^{n-1} - k) && \text{apartire de 5.17} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2^{n-1} - k) && (\text{switch order of } \sum) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{l - 2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \phi(l'/2^{n-1}) \text{ (avec } l' = l - 2^{n-1}k).\end{aligned}$$

Par l'hypothèse d'induction, la somme intérieure est 2^{n-1} [Eq. (6,19) avec n remplacé par $n-1$]. donc

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k 2^{n-1}.$$

Depuis $\sum_k p_k = 2$ (Theorem 5.9)[] le côté droit est égal à 2^n , comme on le souhaite. Comme n est grande, plus l'ensemble des points dyadiques $\{l/2^n, l \in \mathbb{Z}\}$ est plus dense. Depuis n'importe quel nombre réel est un nombre limite de points dyadiques et depuis les Daubechies fonction d'échelle est continue, la valeur de ϕ à toute valeur x peut-il obtenir une limite de ϕ valeurs aux points dyadiques. La fonction de mise à l'échelle, ϕ qui est construit de cette manière, répond à la condition de normalisation $\int \phi = 1$. Pour le voir, nous considérons $\int \phi dx$ comme une limite $n \rightarrow \infty$ d'une somme de Riemann sur une partition donnée par

$\{x_l = l/2^n; l = \dots - 1, 0, 1, 2, \dots\}$. La largeur de cette partition est $\Delta x = 1/2^n$. Donc, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(x) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(l/2^n) (1/2^n).$$

Depuis $\sum_l \phi(l/2^n) = 2^n$. le côté droit est 1, selon.

CHAPITRE 6

CONSTRUCTION DE L'ONDELETTE PAR LA METHODE ITERATIVE

Introduction

Il y a une seule stratégie pour la construction d'une fonction de mise à l'échelle ϕ est de construire un polynôme P qui satisfait l'équation

$$|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 = 1 \text{ pour } |z| = 1$$

Et ensuite construire une fonction ϕ de sorte qu'il réponde à l'équation de mise à l'échelle

$$\phi(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi(2x - k)$$

$$\phi_1(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi_0(2x - k)$$

La stratégie pour la construction de la fonction de mise à l'échelle ϕ associée à P est donnée par la suite processus itératif. Que la fonction d'échelle Haar être représenté par. [6]

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction Haar d'échelle répond déjà à la propriété orthonormalité. Puis définir

$$\phi_1(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi_0(2x - k)$$

En règle générale, définir ϕ_n en termes de ϕ_{n-1} par

$$\phi_n(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi_{n-1}(2x - k)$$

Dans le théorème suivant, nous allons montrer que ϕ_n converge, comme, $n \rightarrow \infty$ pour une fonction notée ϕ . En prenant les limites de l'équation ci-dessus $n \rightarrow \infty$ on obtient

$$\phi(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi(2x - k)$$

Et donc ϕ satisfait la condition mise à l'échelle désirée. Depuis ϕ_0 satisfait à la condition d'orthonormalité, il ya peu d'espoir que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots$ et finalement ϕ sera satisfaire aussi la condition de orthonormalité. Cette procédure s'avère au travail, sous certaines hypothèses supplémentaires sur P .

Théorème 6

Supposons $p(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k$ est un polynôme qui satisfait aux conditions

suivantes:

- $p(1) = 1$
- $|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 = 1$ pour $|z| = 1$
- $|p(e^{it})| > 0$ pour $|t| \leq \pi/2$

ϕ_0 Être la fonction d'échelle de Haar et $\phi_n(x) = \sum_{p \in k} p_k \phi_{n-1}(2x - k)$ pour $n \geq 1$ Ensuite, la séquence ϕ_n converge simplement et en L^2 pour une fonction ϕ qui satisfait à la condition de normalisation $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ la condition d'orthonormalité.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - n) \phi(x - m) dx = \delta_{n,m}$$

Et l'équation de mise à l'échelle $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$

6.1 Construction de l'ondelette de Haar

On prendre $p_0 = 1$ et $p_1 = 1$

Et $p(z) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2} p_1 z$ avec $z = e^{it}$

Vérification de théorème de () :

$$p(1) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2} p_1(1) = 1 \quad (\text{vérifié})$$

$$|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 =$$

$$\left(\frac{p_0}{2} + \frac{1}{2} p_1 e^{it}\right) * \left(\frac{p_0}{2} + \frac{1}{2} p_1 e^{-it}\right) + \left(\frac{p_0}{2} - \frac{1}{2} p_1 e^{it}\right) * \left(\frac{p_0}{2} - \frac{1}{2} p_1 e^{-it}\right) = 1 (\text{vérifié})$$

$$|p(e^{it})| > 0 \text{ pour } |t| \leq \pi/2 \text{ Voir la fig.(6.1) (vérifié)}$$

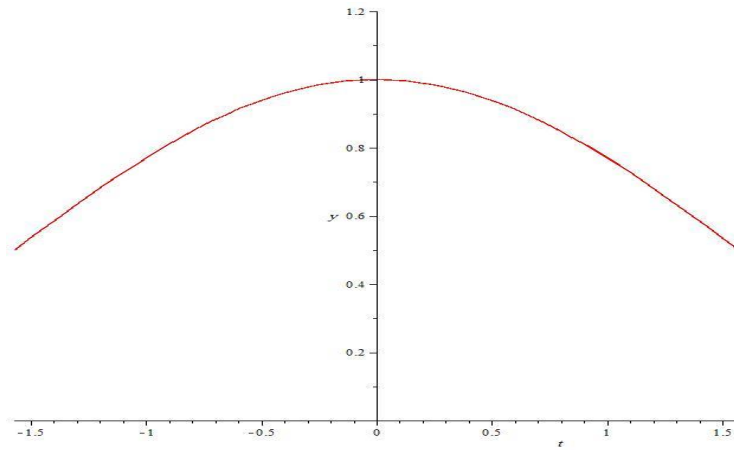


Fig.6.1 vérification du 3^{em} condition

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

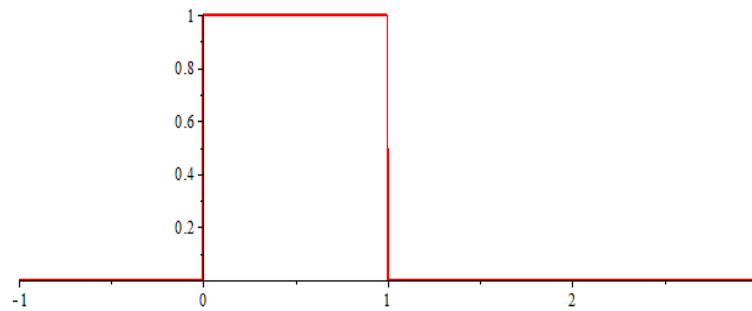


Fig.6.2 le graphe de ϕ_0

$$\phi_1(1) = p_0\phi_0(2x) + p_1\phi_0(2x - 1)$$

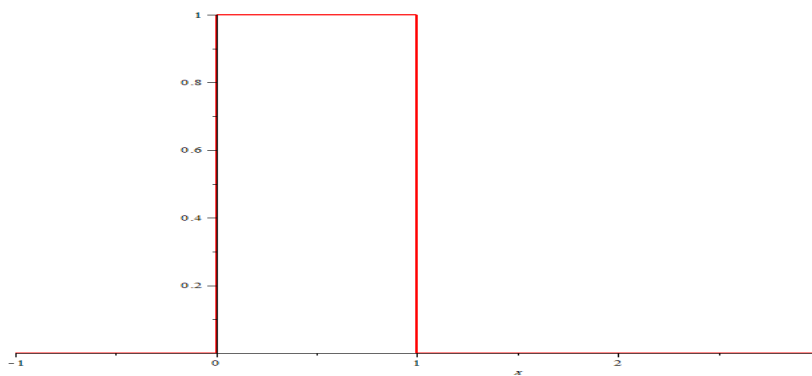


Fig.6.3 le graphe de ϕ_1

$$\phi_2(1) = \sum_{p \in k} p_k \phi_1(2x - k) = p_0 \phi_1(2x) + p_1 \phi_1(2x - 1)$$

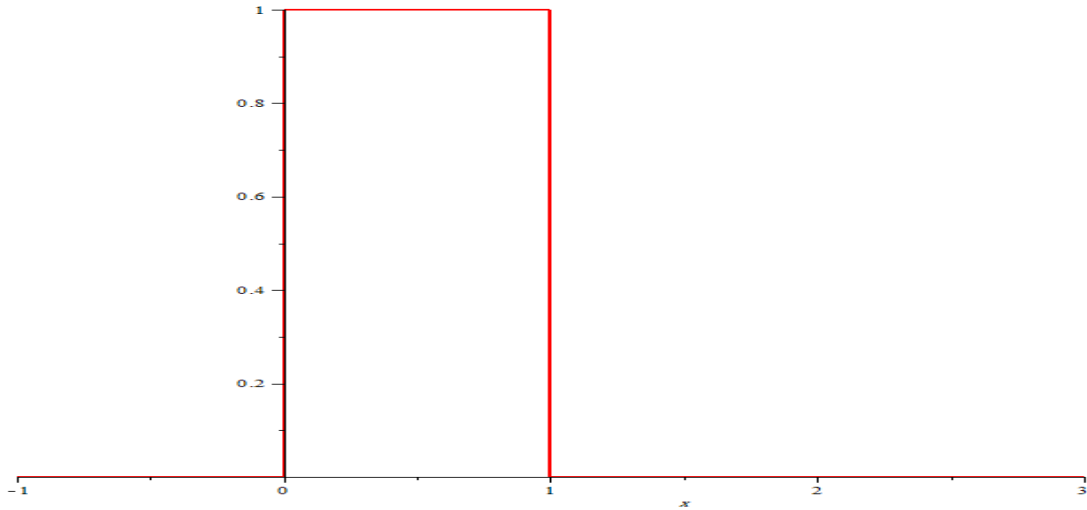


Fig.6.4 le graphe de ϕ_2

$$\phi_3(1) = \sum_{p \in k} p_k \phi_2(2x - k) = p_0 \phi_2(2x) + p_1 \phi_2(2x - 1)$$

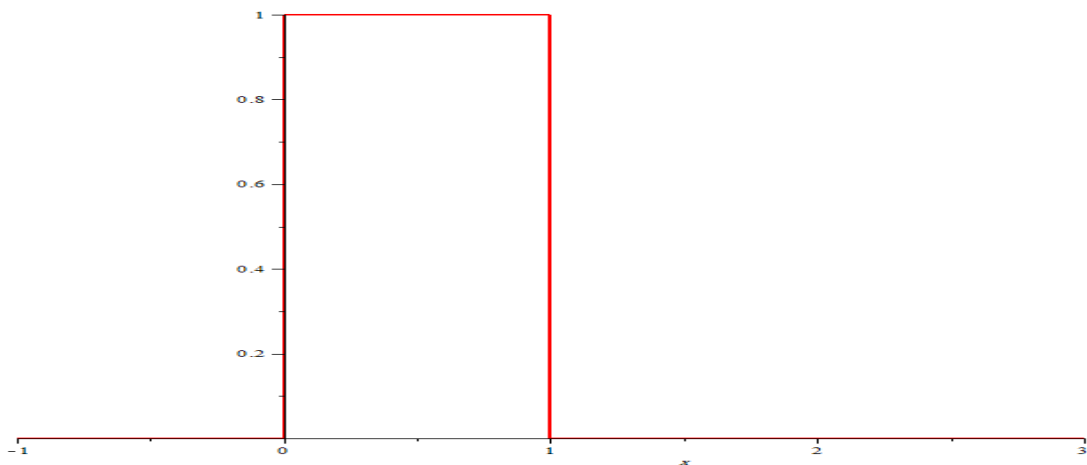


Fig.6.5 le graphe de ϕ_3

On remarque que $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ donc la fonction de Haar est écrit par l'expression suivante :

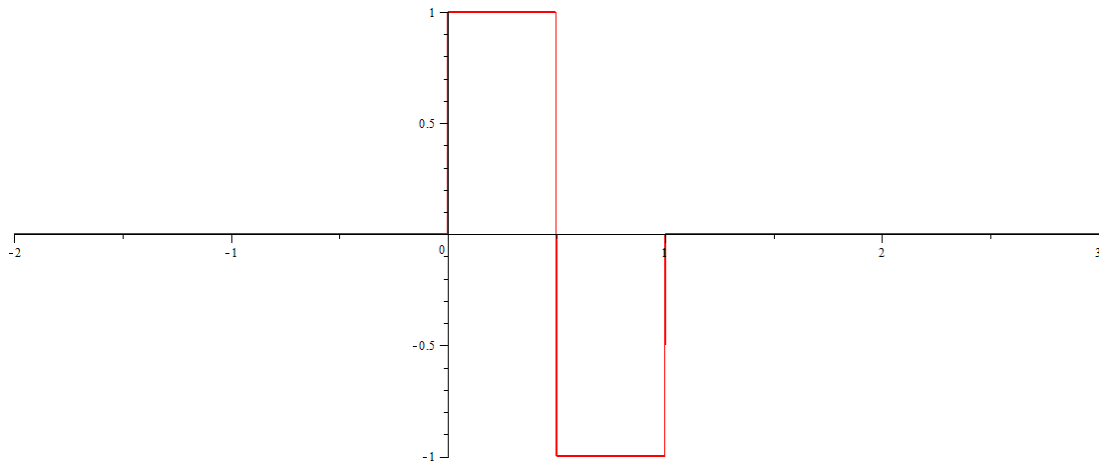


Fig.6.6 l'ondelette de Haar.

6.2 La constrictio de l'ondelette de Daubechies (Db4)

$$p_0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} ; p_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} ; p_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} ; p_3 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Donc $p(z)$ est écrit par la formule suivante :

$$p(z) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1z + \frac{1}{2}p_2z^2 + \frac{1}{2}p_3z^3$$

Vérification de théorème de (5.23) :

$$p(1) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1(1) + \frac{1}{2}p_2(1)^2 + \frac{1}{2}p_3(1)^3$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 \quad (\text{vérifier})$$

$$|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 = 1 \quad (\text{vérifier})$$

$$|p(e^{it})| > 0 \text{ pour } |t| \leq \pi/2 \text{ Voir la fig.(6.7)(vérifié)}$$

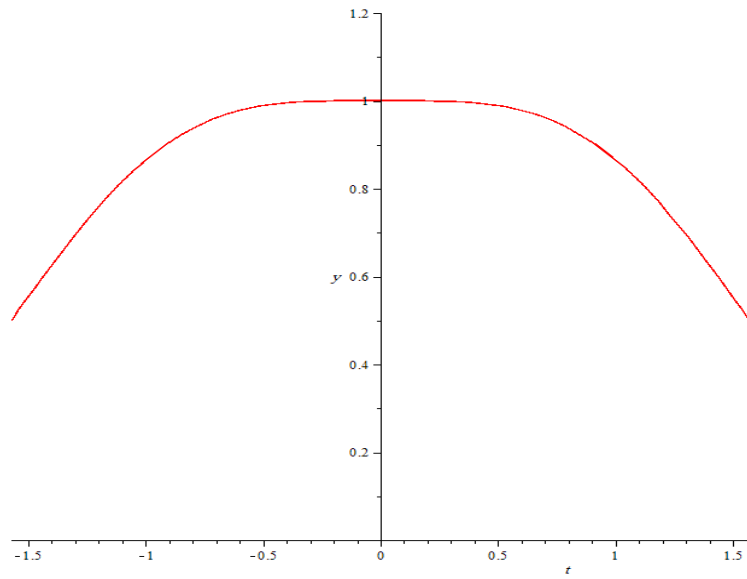


Fig.6.7 vérification de 3^{em} condition

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

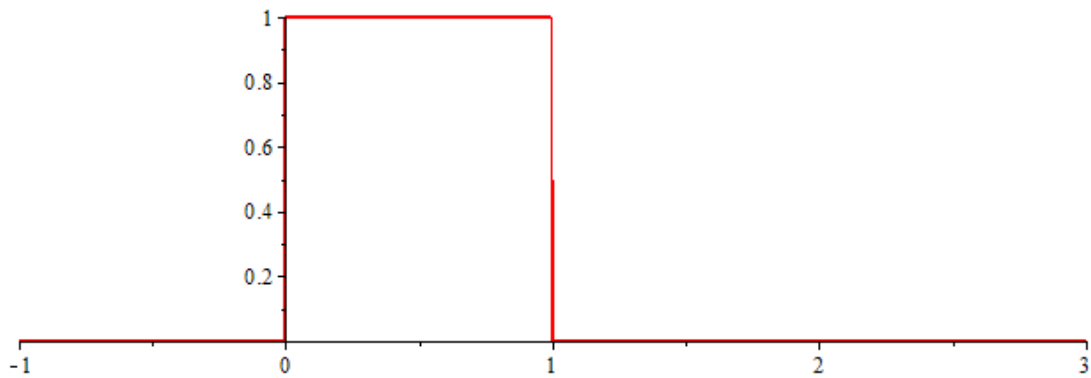


Fig.6.8 le graphe de ϕ_0

$$\phi_1 = p_0\phi_0(2x) + p_1\phi_0(2x - 1) + p_2\phi_0(2x - 2) + p_3\phi_0(2x - 3)$$

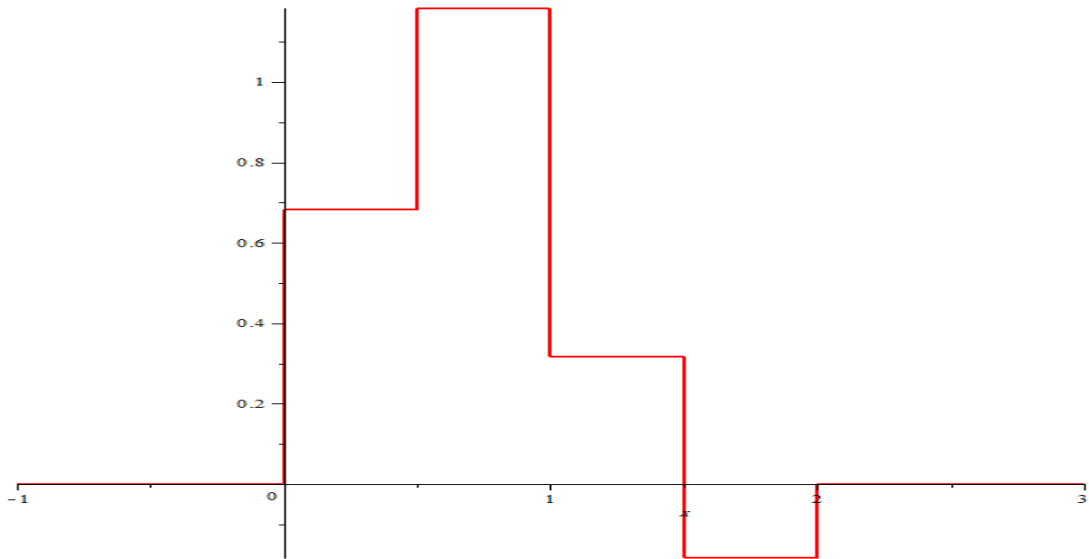


Fig.6.9 le graphe de ϕ_1

$$\phi_2 = p_0\phi_1(2x) + p_1\phi_1(2x - 1) + p_2\phi_1(2x - 2) + p_3\phi_1(2x - 3)$$

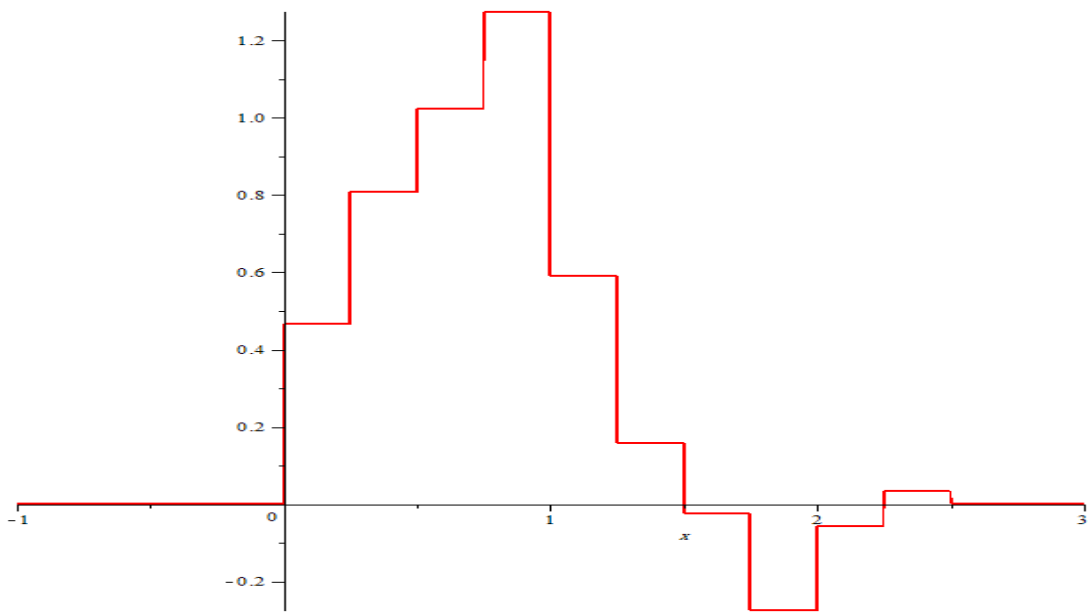


Fig.6.10 le graphe de ϕ_2

$$\phi_3 = p_0\phi_2(2x) + p_1\phi_2(2x - 1) + p_2\phi_2(2x - 2) + p_3\phi_2(2x - 3)$$

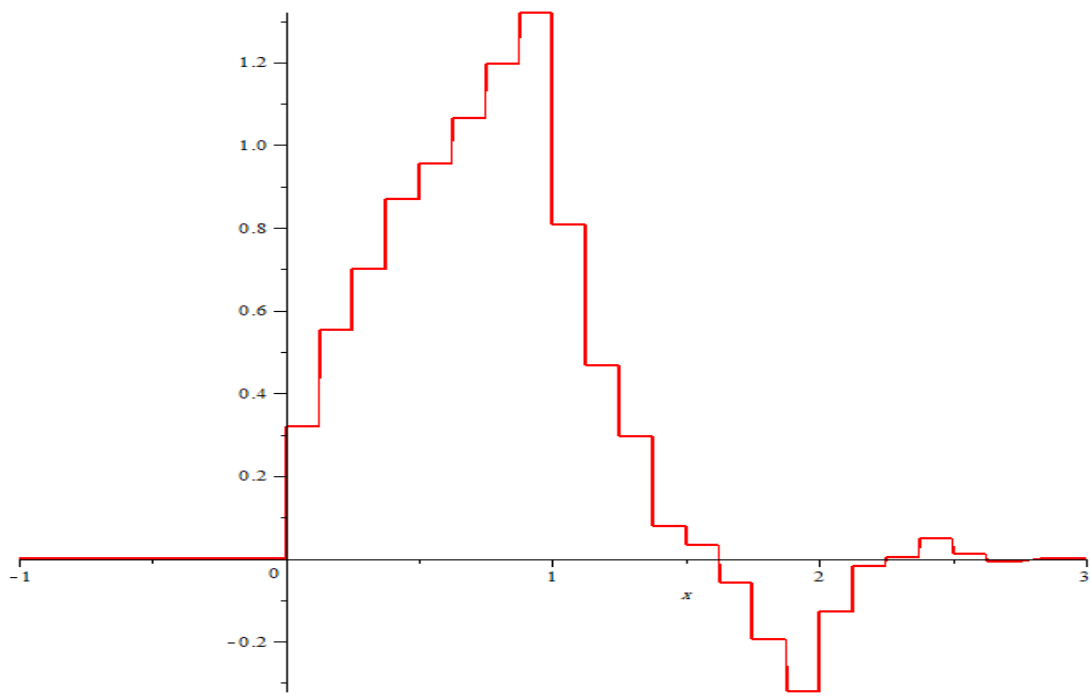


Fig.6.11 le graphe de ϕ_3

$$\phi_4 = p_0\phi_3(2x) + p_1\phi_3(2x - 1) + p_2\phi_3(2x - 2) + p_3\phi_3(2x - 3)$$

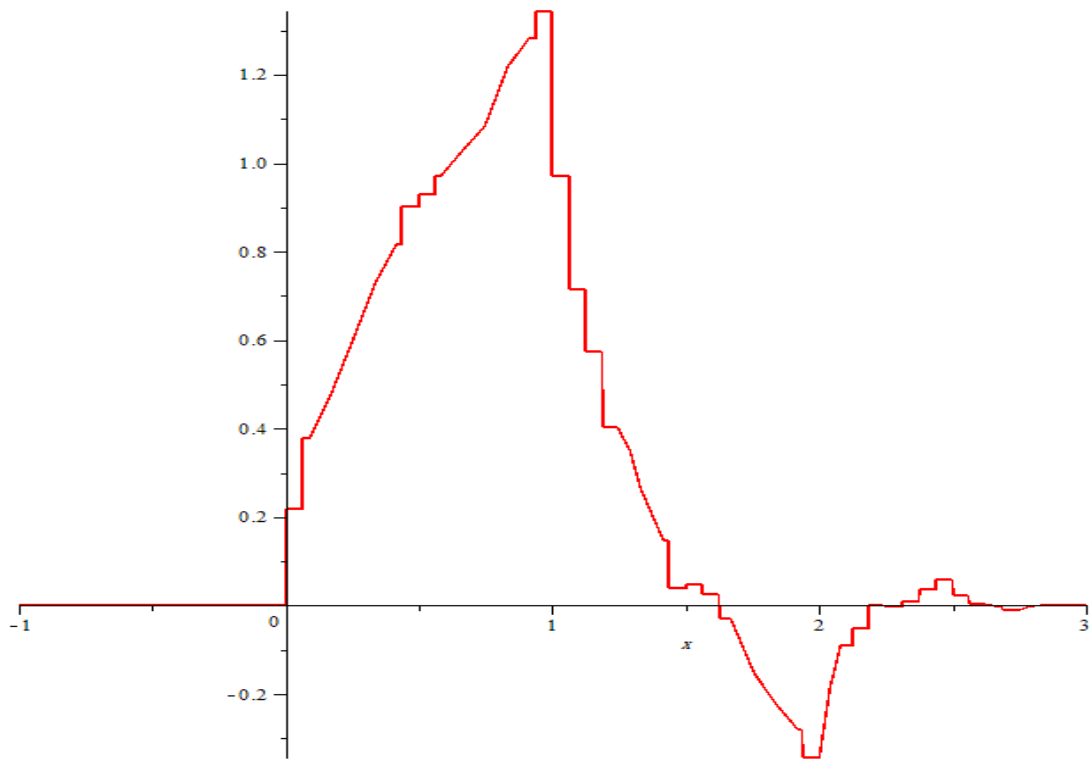


Fig.6.12 le graphe de ϕ_4

$$\phi_5 = p_0\phi_4(2x) + p_1\phi_4(2x - 1) + p_2\phi_4(2x - 2) + p_3\phi_4(2x - 3)$$

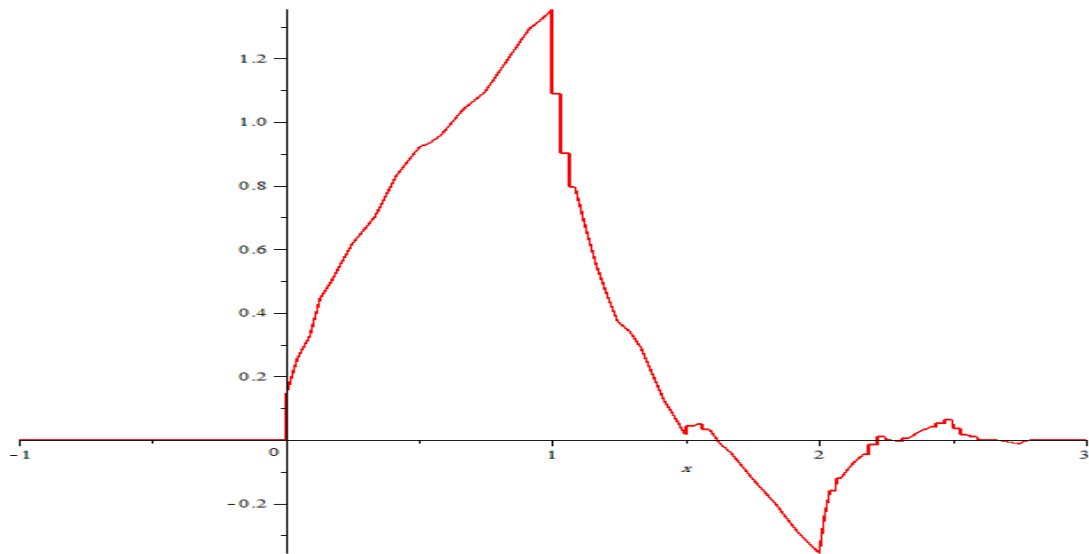


Fig.6.13 le graphe de ϕ_5

La fonction d'ondelettes est

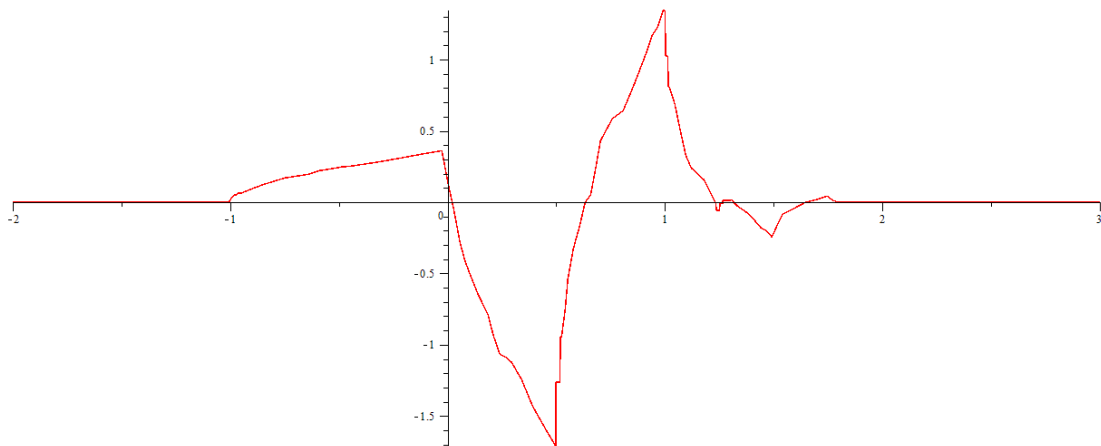


Fig.6.14 l'ondelette de Db 4

6.3 La construction de l'ondelette de Daubechies (Db6)

Vérification de théorème de (5.23) :

$$p(z) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1z + \frac{1}{2}p_2z^2 + \frac{1}{2}p_3z^3$$

$$p(1) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1(1) + \frac{1}{2}p_2(1)^2 + \frac{1}{2}p_3(1)^3 \text{ (Vérifier)}$$

$$|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 = 1 \quad \text{(vérifier)}$$

$$|p(e^{it})| > 0 \text{ pour } |t| \leq \pi/2 \text{ Voir la fig.(6.14) (Vérifié)}$$

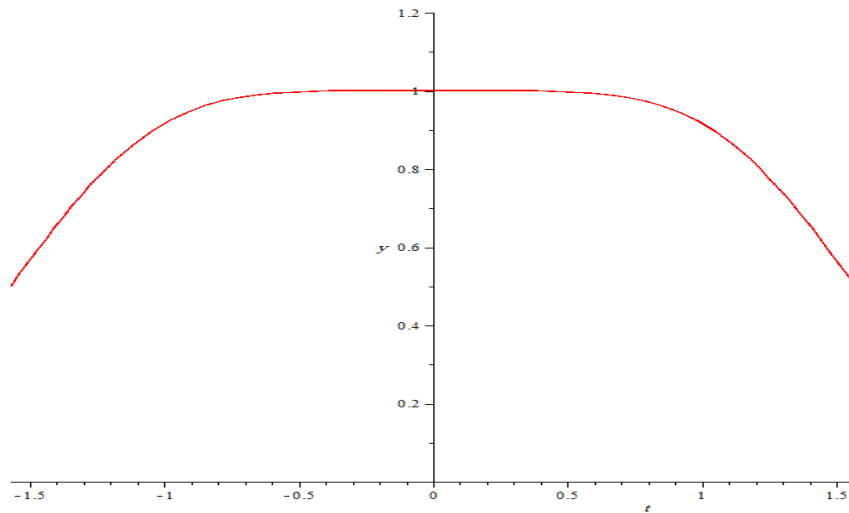


Fig.6.15 vérification de la 3^{em} condition

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

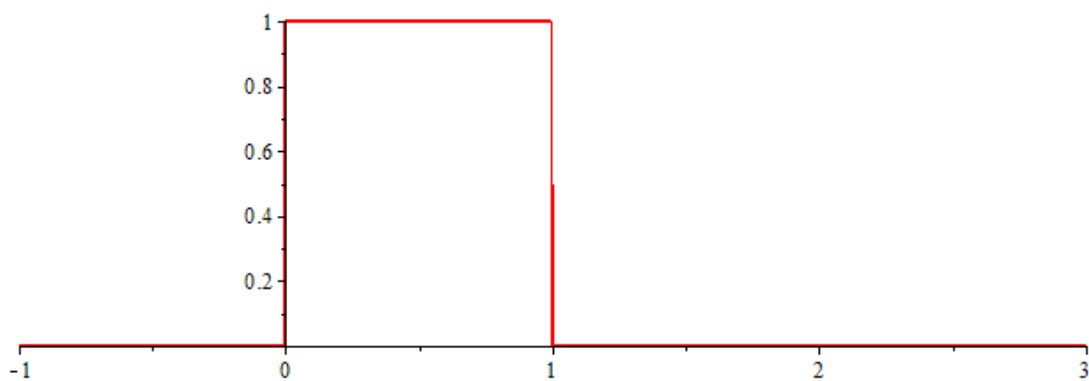


Fig.6.16 le graphe de ϕ_0

$$\phi_1 = p_0\phi_0(2x) + p_1\phi_0(2x - 1) + p_2\phi_0(2x - 2) + p_3\phi_0(2x - 3)$$

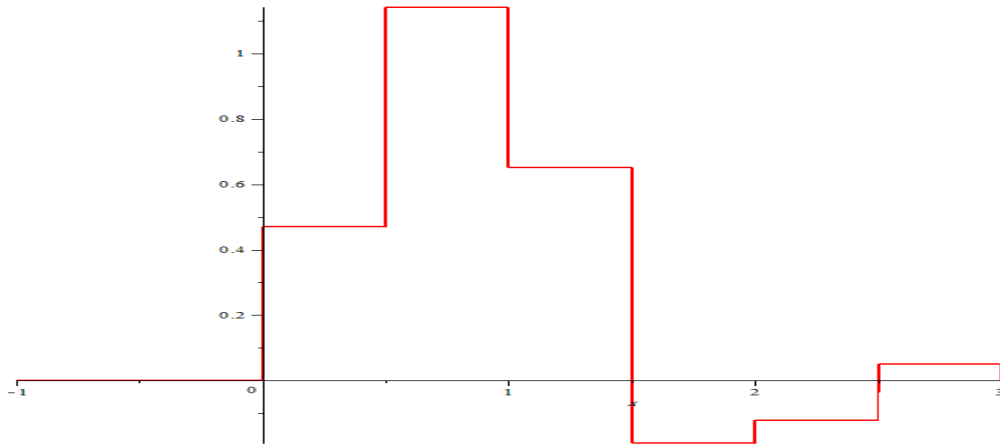


Fig.6.17 le graphe de ϕ_1

$$\phi_2 = p_0\phi_1(2x) + p_1\phi_1(2x - 1) + p_2\phi_1(2x - 2) + p_3\phi_1(2x - 3)$$

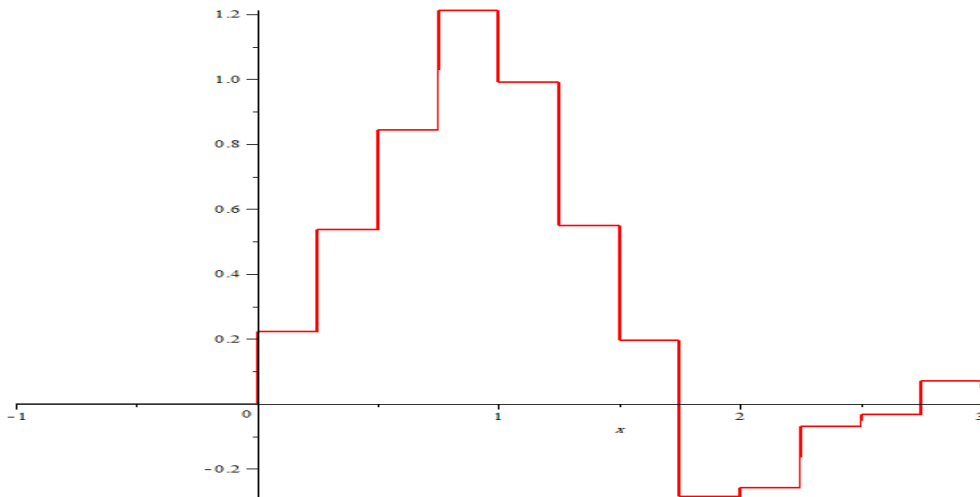


Fig.6.18 le graphe de ϕ_2

$$\phi_3 = p_0\phi_2(2x) + p_1\phi_2(2x - 1) + p_2\phi_2(2x - 2) + p_3\phi_2(2x - 3)$$

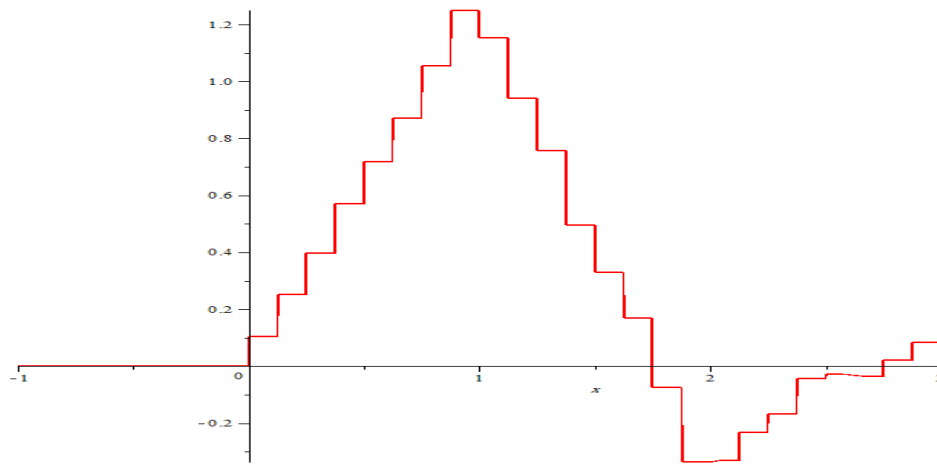


Fig.6.19 le graphe de ϕ_3

$$\phi_4 = p_0\phi_3(2x) + p_1\phi_3(2x - 1) + p_2\phi_3(2x - 2) + p_3\phi_3(2x - 3)$$

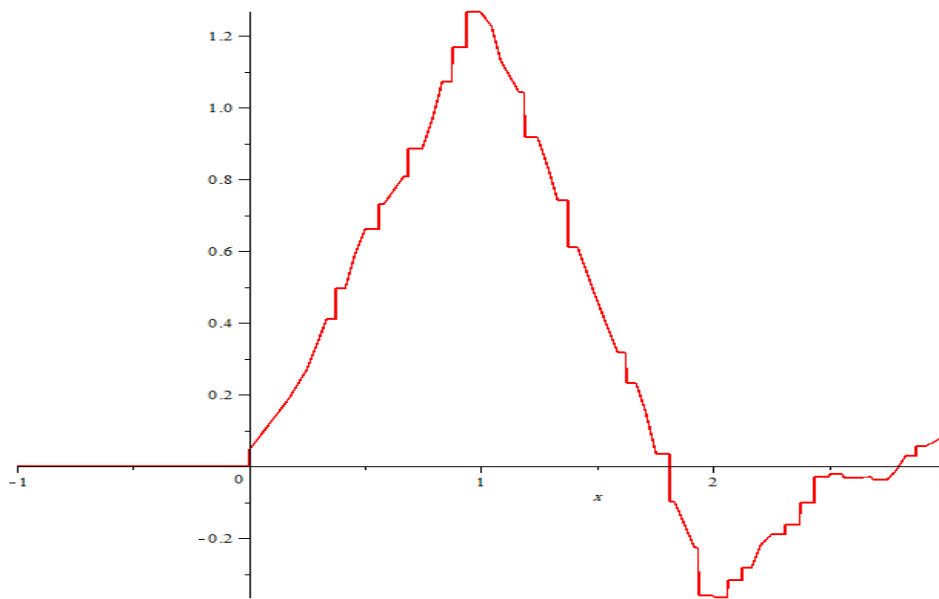


Fig.6.20 le graphe de ϕ_4

$$\phi_5 = p_0\phi_4(2x) + p_1\phi_4(2x - 1) + p_2\phi_4(2x - 2) + p_3\phi_4(2x - 3)$$

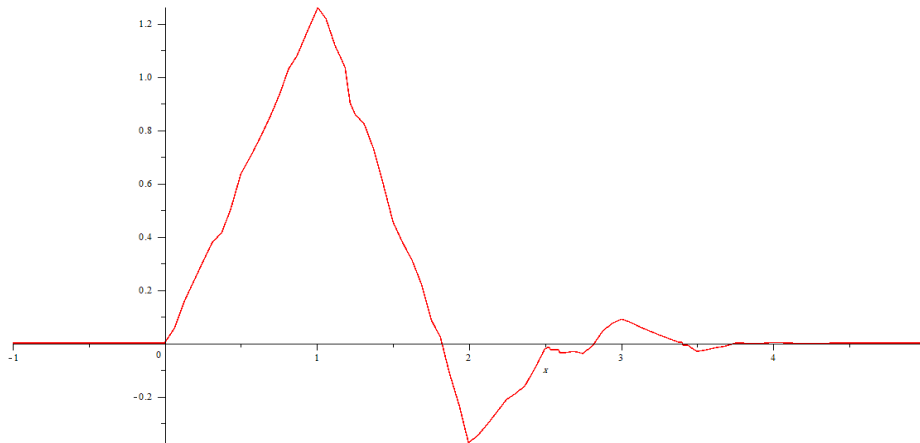


Fig.6.21 le graphe de ϕ_5

La fonction d'ondelettes est

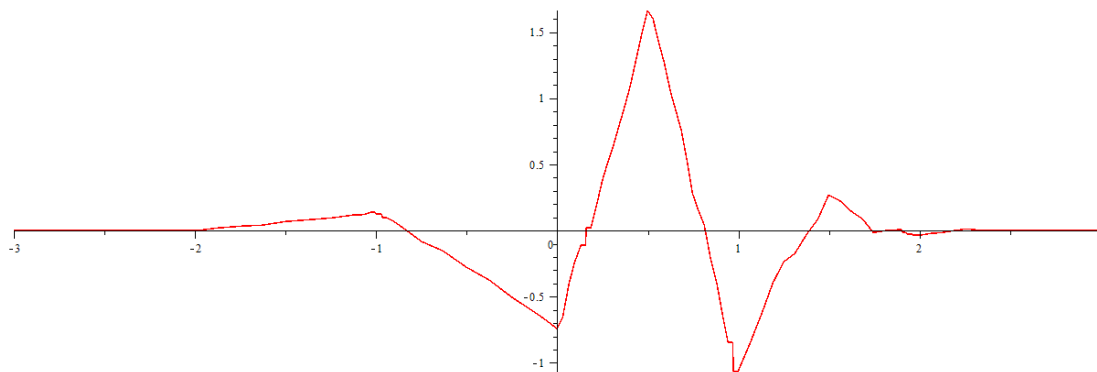


Fig.6.22. l'ondelette de Db6

6.4 Construction de coiflet 6

$$p(z) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1z + \frac{1}{2}p_2z^2 + \frac{1}{2}p_3z^3$$

Vérification de théorème de (5.23) :

$$p(z) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1z + \frac{1}{2}p_2z^2 + \frac{1}{2}p_3z^3$$

$$p(1) = \frac{p_0}{2} + \frac{1}{2}p_1(1) + \frac{1}{2}p_2(1)^2 + \frac{1}{2}p_3(1)^3 \text{ (Vérifier)}$$

$$|p(z)|^2 + |p(-z)|^2 = 1 \quad (\text{vérifier})$$

$$|p(e^{it})| > 0 \text{ pour } |t| \leq \pi/2 \text{ La fig. (6.22) (Vérifié)}$$

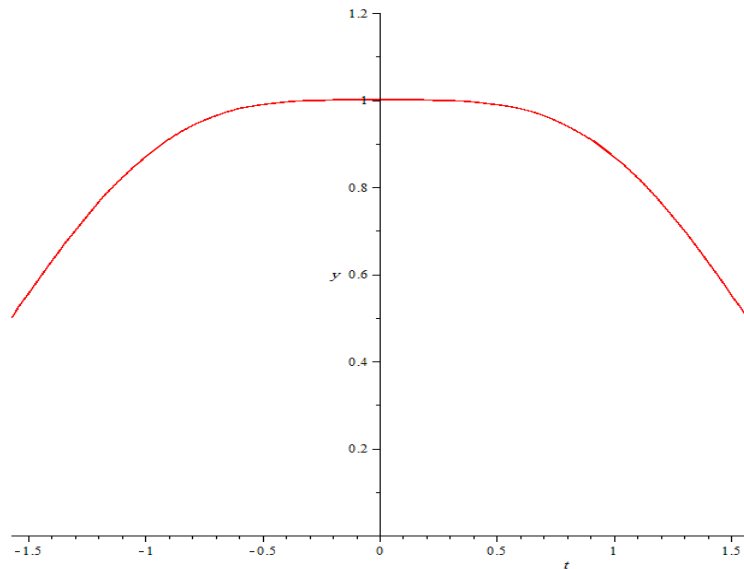


Fig.6.23 vérification de la 3^{em} condition

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

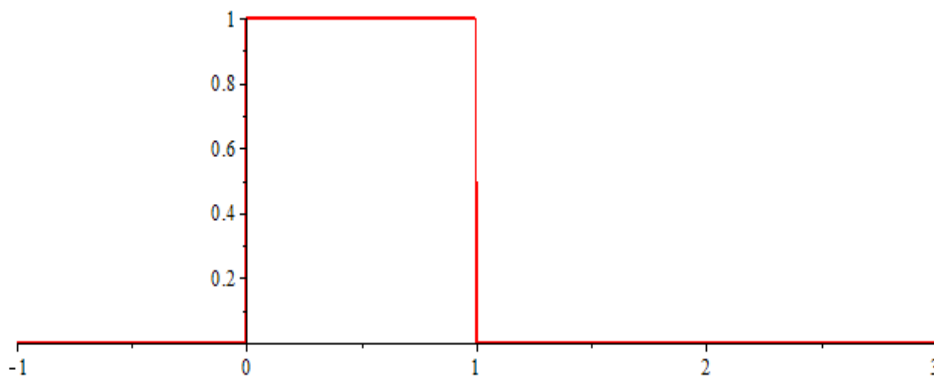


Fig.6.24 le graphe de ϕ_0

$$\phi_1 = p_0\phi_0(2x) + p_1\phi_0(2x - 1) + p_2\phi_0(2x - 2) + p_3\phi_0(2x - 3)$$

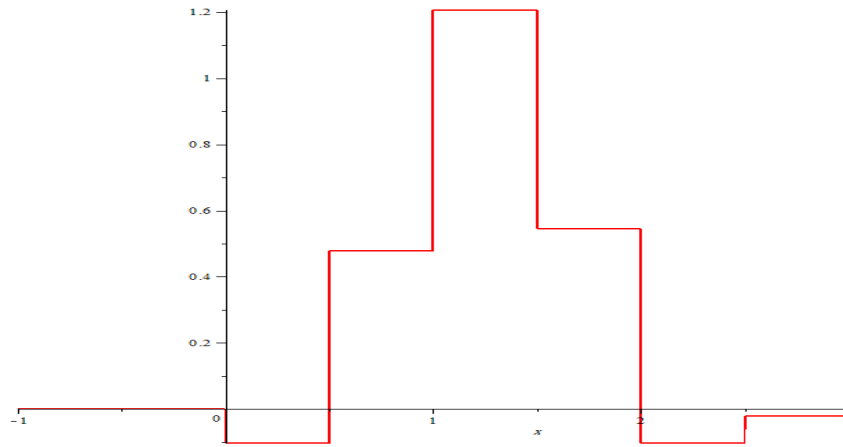


Fig.6.25 le graphe de ϕ_1

$$\phi_2 = p_0\phi_1(2x) + p_1\phi_1(2x - 1) + p_2\phi_1(2x - 2) + p_3\phi_1(2x - 3)$$

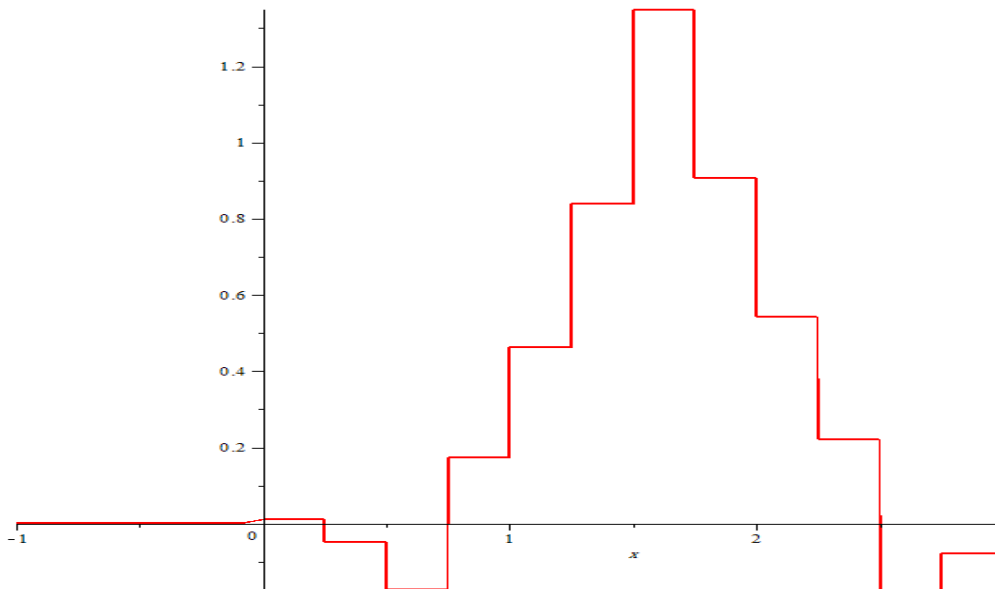


Fig.6.26 le graphe de ϕ_2

$$\phi_3 = p_0\phi_2(2x) + p_1\phi_2(2x - 1) + p_2\phi_2(2x - 2) + p_3\phi_2(2x - 3)$$

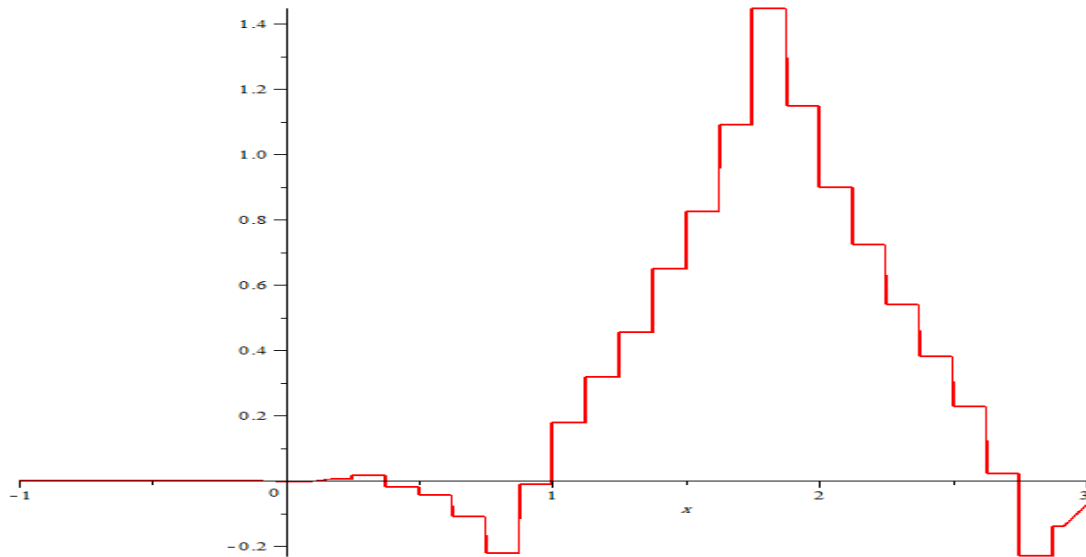


Fig.6.27 le graphe de ϕ_3

$$\phi_4 = p_0\phi_3(2x) + p_1\phi_3(2x - 1) + p_2\phi_3(2x - 2) + p_3\phi_3(2x - 3)$$

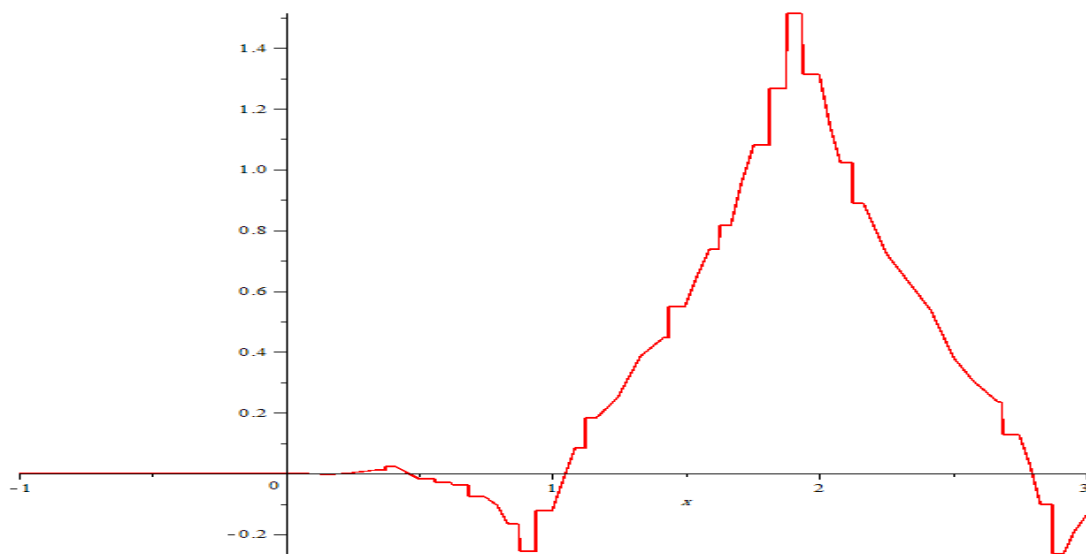


Fig.6.28 le graphe de ϕ_4

$$\phi_5 = p_0\phi_4(2x) + p_1\phi_4(2x - 1) + p_2\phi_4(2x - 2) + p_3\phi_4(2x - 3)$$

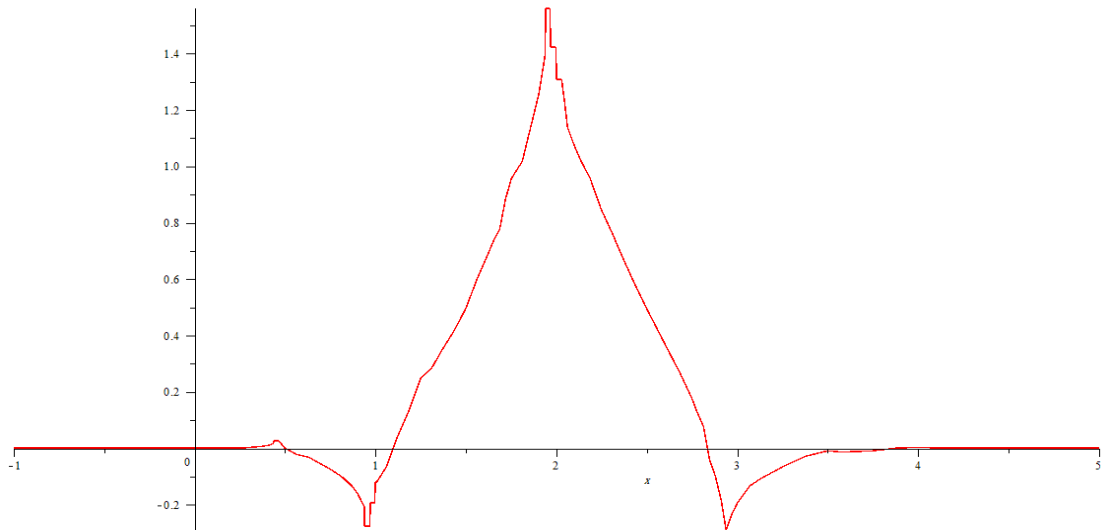


Fig.6.29 le graphe de ϕ_5

La fonction d'ondelettes est

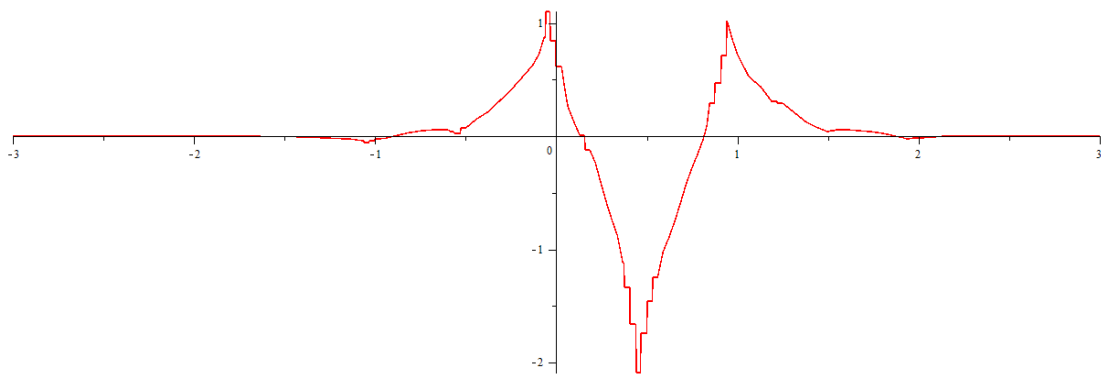


Fig.6.30. l'ondelette de coiflet 6

Conclusion

La conception des ondelettes à partir de la méthode itérative est très simple parce que ϕ_n se convergera rapidement. Il faut seulement vérifier les trois conditions du théorème 5.23 de [06] et suivre les étapes de l'algorithme qui mentionner au-dessus

CHAPITRE 7

RESOUDRE LE PROBLEME DE L'EQUATION DE BURGERS PAR LA METHODE DES ONDELETTES

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles fondamentale issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz ou du trafic routier. Elle doit son nom à Johannes Martinus Burgers (1895-1981).

L'équation de Burgers monodimensionnel est écrite par la formule suivante :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ t > 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{condition initial} \\ u(0,t) = g_0(t) & \text{condition de boundary} \\ u(1,t) = g_1(t) & \text{condition de boundary} \end{cases}$$

On fixe j

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k + M_1}{2^j}\right) \varphi_{j,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f\left(\frac{k + M_1}{2^j}\right) \varphi(2^j x - k)}{\sqrt{2^j}}$$

Avec

$$M_1 = \int x \phi(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{p_k k^j}{2}$$

$$u^\alpha(x,t) \approx \sum_{k=0}^{2^j} u^\alpha\left(\frac{k}{2^j}, t\right) \phi_{j,x}(x) \quad ; \quad \alpha = 1,2 \quad (7,2)$$

On remplace (7.2) dans (7.1) on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{du_{j,k}(t)}{dt} \varphi_{j,k}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^j-1} u_{j,k}^2(t) \frac{d\varphi_{j,x}(x)}{dx} - \frac{1}{Re} \sum_{k=1}^{2^j-1} u_{j,k}(t) \frac{d\varphi_{j,x}^2(x)}{dx^2} \\
& + \frac{dg_0(t)}{dt} \varphi_{j,0}(x) + \frac{dg_1(t)}{dt} \varphi_{j,2^j} + \frac{g_0^2(t)}{2} \frac{d\varphi_{j,0}(x)}{dx} + \frac{g_1^2(t)}{2} \frac{d\varphi_{j,2^j}(x)}{dx} \\
& - \frac{1}{Re} (g_0(t) \frac{d^2\varphi_{j,0}(x)}{dx^2} + g_1(t) \frac{d^2\varphi_{j,2^j}(x)}{dx^2}) \approx 0, \quad (7.3)
\end{aligned}$$

En expliquant le premier terme de l'équation (7.3) comme exemple

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{dg_0(t)}{dt} \varphi_{j,0}(x)}_{k=0} + \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{du_{j,k}(t)}{dt} \varphi_{j,k}(x) + \underbrace{\frac{dg_1(t)}{dt} \varphi_{j,2^j}}_{k=2^j} \quad (7.4)$$

Où $u_{j,k}(t) = u(\frac{k}{2^j}, t)$

Par la multiplication les deux côtés de l'équation (7.3) par $\varphi_{j,l}(x)$, $l = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ respectivement après on fait l'intégral entre $[0,1]$ pour obtient la formule qui utilise en base d'orthogonalité comme suivant

$$\int \varphi_{j,p}(x) \varphi_{j,k}(x) dx = \delta_{l,k}$$

On prend les termes suivants comme exemple

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dg_0(t)}{dt} \varphi_{j,0}(x) \varphi_{j,l}(x) dx = \frac{dg_0(t)}{dt} \delta_{l,0} \\
& \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{du_{j,k}(t)}{dt} \int \varphi_{j,p}(x) \varphi_{j,k}(x) dx = \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{du_{j,k}(t)}{dt} \delta_{l,k} = \frac{du_{j,p}(t)}{dt} \\
& \int \frac{dg_1(t)}{dt} \varphi_{j,2^j}(x) \varphi_{j,p}(x) dx = \frac{dg_1(t)}{dt} \delta_{l,2^j}
\end{aligned}$$

Et ainsi de suite .

$$\Gamma_{l,0}^{0,0} = \int \varphi_{j,0}(x) \varphi_{j,l}(x) dx$$

$$\frac{du_{j,p}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{2^j}, t \right) = u_l(t) , \quad l = 0, \dots, 2^j$$

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= F[t, U(t)] \\ &= \frac{1}{Re} A^{-1} B U(t) - C U^2 A^{-1} + A^{-1} D(t) \end{aligned}$$

Tel que $A = \Gamma_{l,k}^{0,0}$, $B = \Gamma_{l,k}^{0,2}$, $C = \Gamma_{l,k}^{0,1}$

Et le vecteur $U(t) = \left\{ u_k = u\left(\frac{k}{2^j}, t\right) \right\}$ et $U^2(t) = \left\{ u^2_k = u^2\left(\frac{k}{2^j}, t\right) \right\}$

$$D(t) = \left\{ d_l = \frac{[g_0(t)\Gamma_{l,0}^{0,2} + g_1(t)\Gamma_{l,2^j}^{0,2}]}{Re} - \Gamma_{l,0}^{0,0} \frac{dg_0(t)}{dt} - \Gamma_{l,2^j}^{0,0} \frac{dg_1(t)}{dt} - g_0^2(t)\Gamma_{l,0}^{0,1} - g_0^2(t)\Gamma_{l,2^j}^{0,1} \right\}$$

Les coefficients $\Gamma_{l,k}^{0,m}$ pour $k, l = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ sont défini par :

$$\Gamma_{l,k}^{0,m} = \int_0^1 \frac{d^m \varphi_{j,k}(x)}{dx^m} \varphi_{j,l}(x) dx$$

Le référence [08] calcule ces $\Gamma_{l,k}^{0,m}$

La méthode de Runge-kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} \mathbf{U}[(n+1)\Delta t] = \mathbf{U}(n\Delta t) + \Delta t(\mathbf{K}_{1,n} + 2\mathbf{K}_{2,n} + 2\mathbf{K}_{3,n} + \mathbf{K}_{4,n}) \\ \mathbf{K}_{1,n} = \mathbf{F}[n\Delta t, \mathbf{U}(n\Delta t)] \\ \mathbf{K}_{2,n} = \mathbf{F}[n\Delta t + \Delta t/2, \mathbf{U}(n\Delta t) + \Delta t \mathbf{K}_{1,n}[2]]; \\ \mathbf{K}_{3,n} = \mathbf{F}[n\Delta t + \Delta t/2, \mathbf{U}(n\Delta t) + \Delta t \mathbf{K}_{2,n}[2]]; \\ \mathbf{K}_{4,n} = \mathbf{F}[n\Delta t + \Delta t, \mathbf{U}(n\Delta t) + \Delta t \mathbf{K}_{3,n}]; \end{cases}$$

les graphes et les resultat obtenue dans cette partie sont calculer par [08]

La solution exacte :

Est écrit sous la forme

$$u(x, t) = \frac{2\pi}{Re} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-n^2 \pi^2 t / Re) n \sin(n\pi x)}{c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-n^2 \pi^2 t / Re) \cos(n\pi x)}$$

Avec

$$c_0 = \int_0^1 \exp(-Re \frac{1 - \cos(\pi x)}{2\pi}) dx$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \exp(-Re \frac{1 - \cos(\pi x)}{2\pi}) \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Conclusion

Après les résultats qui se trouvent dans [07] on conclut :

Il a été proposé un schéma en ondelettes pour la résolution numérique de l'équation de Burgers. La précision et l'efficacité de cette méthode d'ondelettes ont été démontrées par la résolution de l'exemple de test. Les résultats numériques ont montré que la méthode des ondelettes proposée a beaucoup plus la précision et l'efficacité que nombreuses autres méthodes numériques. Plus important encore, la méthode d'ondelettes proposée a été illustrée à être capable de résoudre l'équation de Burgers. Comme l'équation de Burgers représente un élément fondamental équation aux dérivées partielles de la mécanique des fluides, il y a de bonnes raisons de s'attendre à ce que la méthode

proposée par ondelettes peut avoir une application prometteuse dans la mécanique de fluide.

Conclusion

La méthodologie décrite dans ce mémoire concerne deux applications :

- 1- application de la méthode des ondelettes en mécanique des fluides, exactement pour résoudre le problème de l'équation de Burgers monodimensionnelle.
- 2- faire un programme pour construire les ondelettes de Haar et Daubechies.

Le premier chapitre est considéré comme une historique et introduction de la transformée de Fourier et des ondelettes.

Le deuxième chapitre a été consacré à la présentation de la transformation de Fourier et ses types « continue et discret » avec leurs définitions et on a fait une comparaison entre les deux et on a cité les limites de la transformée de Fourier ; après on a donné la définition de la transformée de Fourier de fenêtre qui a l'avantage de faire une analyse locale c'est-à-dire, chaque plage est étudiée séparément des autres par l'analyse traditionnelle de Fourier qui est utilisé pour l'analyse des signaux non-stationnaires.

Dans le troisième chapitre on a cité les deux types de la transformée en ondelette continue et discrète et montrer comment palier la limitation de FFT qui a la famille de ψ est construite par translation et modulation par contre la transformer en ondelette continue qui a la famille de ψ est construite par translation et dilatation ou contraction (changement d'échelle) .

Le quatrième chapitre est spécialisé pour l'ondelette de Haar et démontre comment décomposer et reconstruire un signal par des algorithmes qui s'appelles « les algorithmes de décomposition et reconstruction de Haar » qui ont pour objectif de filtrer le bruit de signal.

Dans le cinquième chapitre on traite de l'ondelette de Daubechies et on démontre comment construire une ondelette de Daubechies a partir d'un algorithme. On a aussi étudié les propriétés : les classifications, la douceur et la singularité de l'ondelette de Daubechies.

Dans le sixième chapitre, on utilise l'algorithme de processus itératif pour la construction de la fonction d'échelle ϕ .

Dans le septième chapitre, après l'utilisation de la méthode des ondelettes pour résoudre le problème de l'équation de Burgers et la comparer avec les autres méthodes numériques on remarque que la méthode des ondelettes proposée a beaucoup plus la précision et l'efficacité que nombreuses autres méthodes numériques.

Perspectives

Résoudre numériquement l'équation de Burgers par la méthode des ondelettes pour le modèle de 2D et 3D

Le programme qui fait en Maple pour construire les ondelettes de Daub4

```
> e1:=simplify(sum(' (pp||i/sqrt(2)) ',i=0..3));
```

$$e1 := \frac{pp0 \sqrt{2}}{2} + \frac{pp1 \sqrt{2}}{2} + \frac{pp2 \sqrt{2}}{2} + \frac{pp3 \sqrt{2}}{2}$$

```
> e2:=simplify(sum(' (pp||i/sqrt(2))^2 ',i=0..3));
```

$$e2 := \frac{pp0^2}{2} + \frac{pp1^2}{2} + \frac{pp2^2}{2} + \frac{pp3^2}{2}$$

```
> e3:=simplify(sum(' (-1)^i*(pp||i/sqrt(2)) ',i=0..3));
```

$$e3 := \frac{pp0 \sqrt{2}}{2} - \frac{pp1 \sqrt{2}}{2} + \frac{pp2 \sqrt{2}}{2} - \frac{pp3 \sqrt{2}}{2}$$

```
> e4:=simplify(sum(' i*(-1)^i*(pp||i/sqrt(2)) ',i=0..3));
```

$$e4 := -\frac{pp1 \sqrt{2}}{2} + pp2 \sqrt{2} - \frac{3pp3 \sqrt{2}}{2}$$

```
> solve({e1-sqrt(2),e2-1,e3,e4},{pp0,pp1,pp2,pp3});
```

$$\left\{ pp0 = -\frac{1}{2} \text{RootOf}(2_Z^2 - 2_Z - 1, \text{label} = _L2) + \frac{1}{2}, pp1 = \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \text{RootOf}(2_Z^2 - 2_Z - 1, \text{label} = _L2) + 1, pp2 = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \text{RootOf}(2_Z^2 - 2_Z - 1, \text{label} = _L2) + \frac{1}{2}, pp3 = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \text{RootOf}(2_Z^2 - 2_Z - 1, \text{label} = _L2) \right\}$$

```
> solve(2*_Z^2-2*_Z-1, _Z);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
> subs(RootOf(2*_Z^2-2*_Z-1,label = _L20)=1/2-1/2*3^(1/2),{pp0
= -1/2*RootOf(2*_Z^2-2*_Z-1,label = _L20)+1/2, pp1 = -
1/2*RootOf(2*_Z^2-2*_Z-1,label = _L20)+1, pp2 =
1/2*RootOf(2*_Z^2-2*_Z-1,label = _L20)+1/2, pp3 =
1/2*RootOf(2*_Z^2-2*_Z-1,label = _L20)});
```

$$\left\{ pp0 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}, pp1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}, pp2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}, pp3 = \frac{1}{4} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}$$

```
>
```

```
> #####
```

```
>
```

```
> p0:=(1+sqrt(3))/4; p1:=(3+sqrt(3))/4; p2:=(3-sqrt(3))/4;
p3:=(1-sqrt(3))/4;
```

$$p0 := \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$p1 := \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$p2 := \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$p3 := \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

```
>
>
> simplify(sum(' (p||i/sqrt(2)) ', i=0..3));
      sqrt(2)
> simplify(sum(' (p||i/sqrt(2))^2 ', i=0..3));
      1
> simplify(sum(' (-1)^i*(p||i/sqrt(2)) ', i=0..3));
      0
> simplify(sum(' i*(-1)^i*(p||i/sqrt(2)) ', i=0..3));
      0
```

```
>
>
>
> P:=z->(p0+p1*z+p2*z^2+p3*z^3)/2;
```

$$P := z \rightarrow \frac{p0}{2} + \frac{1}{2} p1 z + \frac{1}{2} p2 z^2 + \frac{1}{2} p3 z^3$$

```
>
> #####
> #### Conditions of theorem 5.23
> P(1);
```

1

```
> z:=exp(I*t); zc:=exp(-I*t);
```

$$z := e^{tI}$$

$$zc := e^{-1t}$$

```
> expr:=P(z)*P(zc) +P(-z)*P(-zc);
> simplify(%);
```

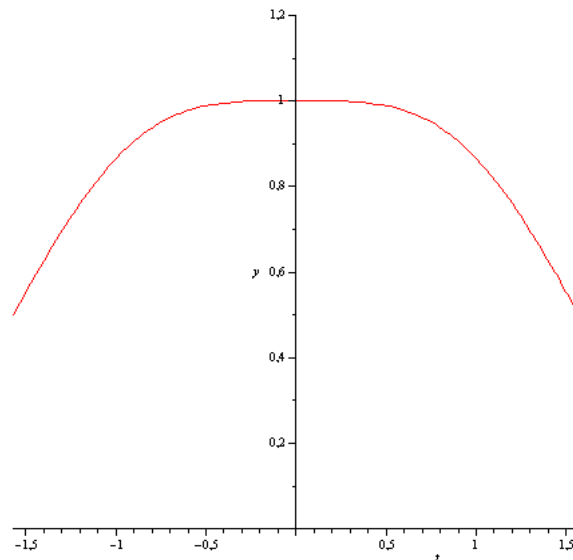
1

```
> f:=(Re(P(z)))^2+(Im(P(z)))^2; # must be greater than one
(see plot below)
```

$$f := \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2} \Re \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{tI} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (e^{tI})^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (e^{tI})^3 \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \Im \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{tI} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (e^{tI})^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (e^{tI})^3 \right)$$

2

```
> plot(f,t=-Pi/2..Pi/2,y=0.. 1.2);
```



```
> #####
```

```
> P(x);
```

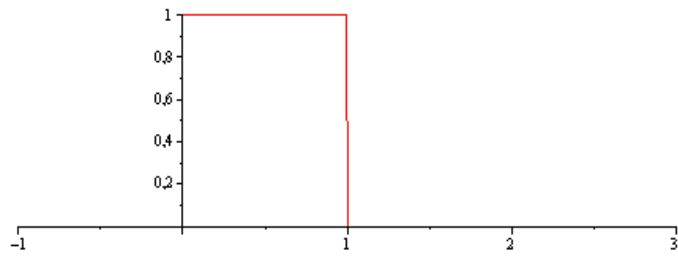
$$\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x}{2} + \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^3}{2}$$

```
> # The Haar sacling function
```

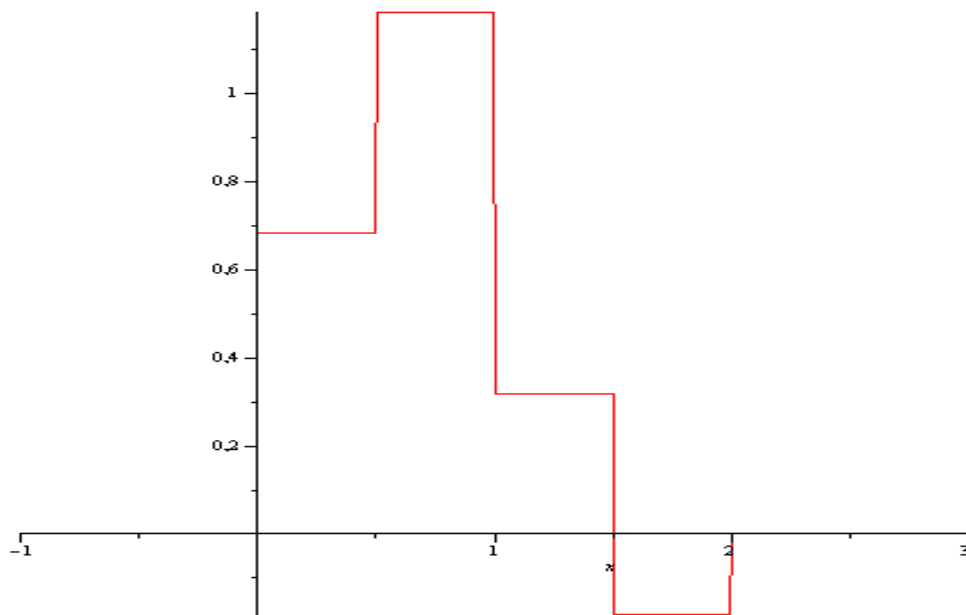
```
> phi0:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi_0 := x \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, 0, x < 1, 1, 0)$$

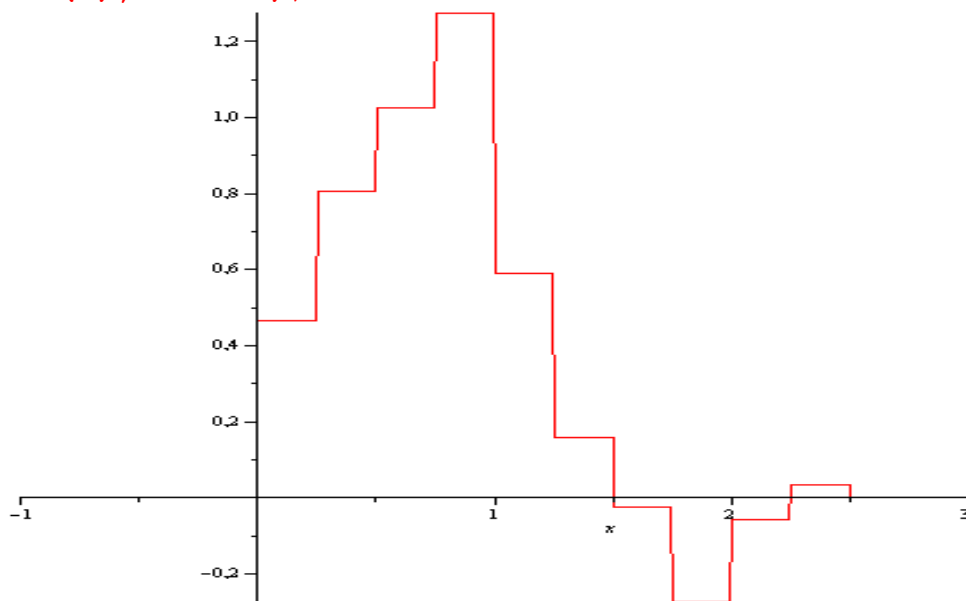
```
> plot(phi0,-1..3);
```



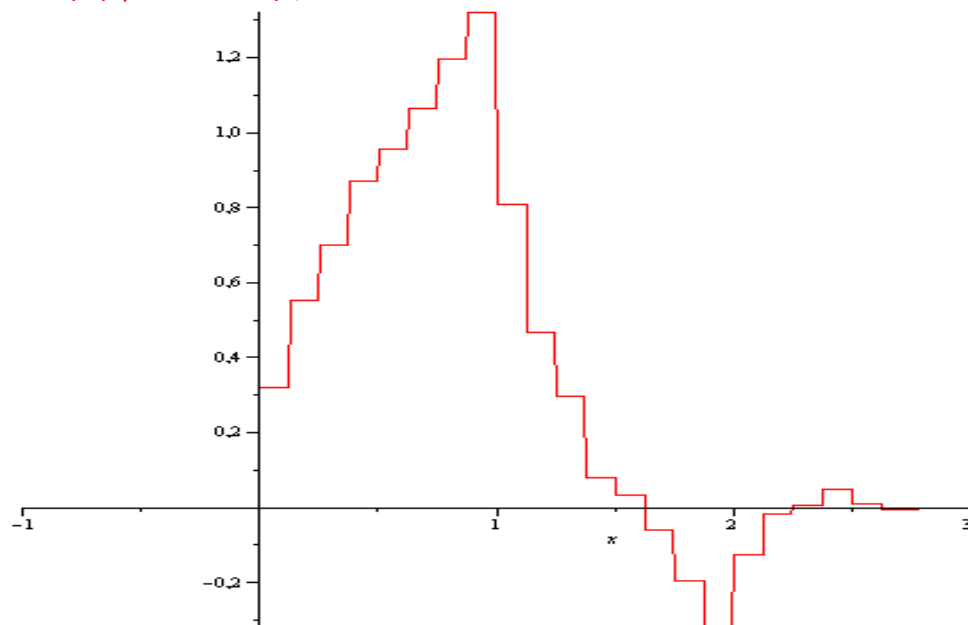
```
>
> phi1:=x-> p0*phi0(2*x)+p1*phi0(2*x-1)+p2*phi0(2*x-
2)+p3*phi0(2*x-3):
plot(phi1(x),x=-1..3);
```



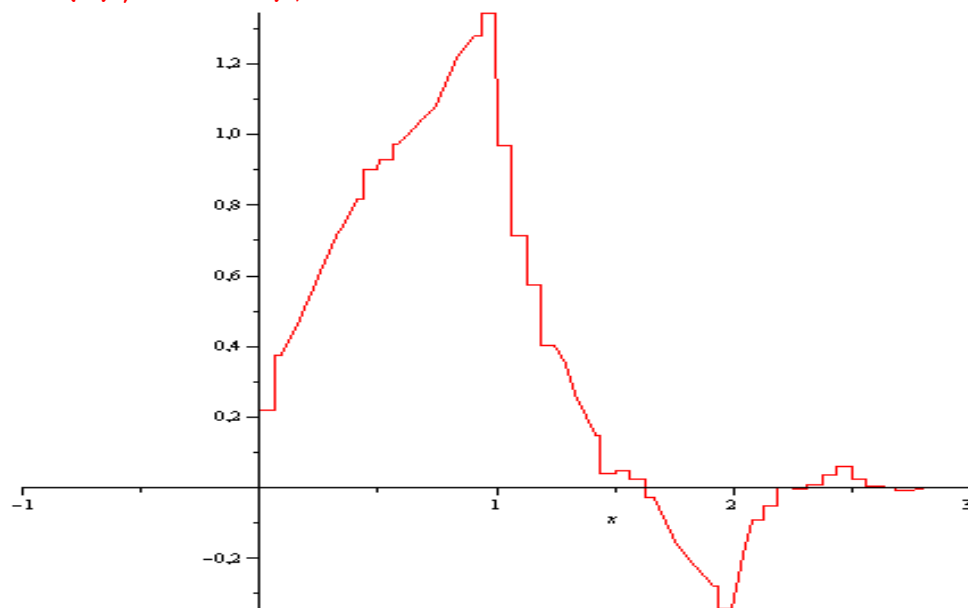
```
> phi2:=x->p0*phi1(2*x)+p1*phi1(2*x-1)+p2*phi1(2*x-
2)+p3*phi1(2*x-3):
plot(phi2(x),x=-1..3);
```



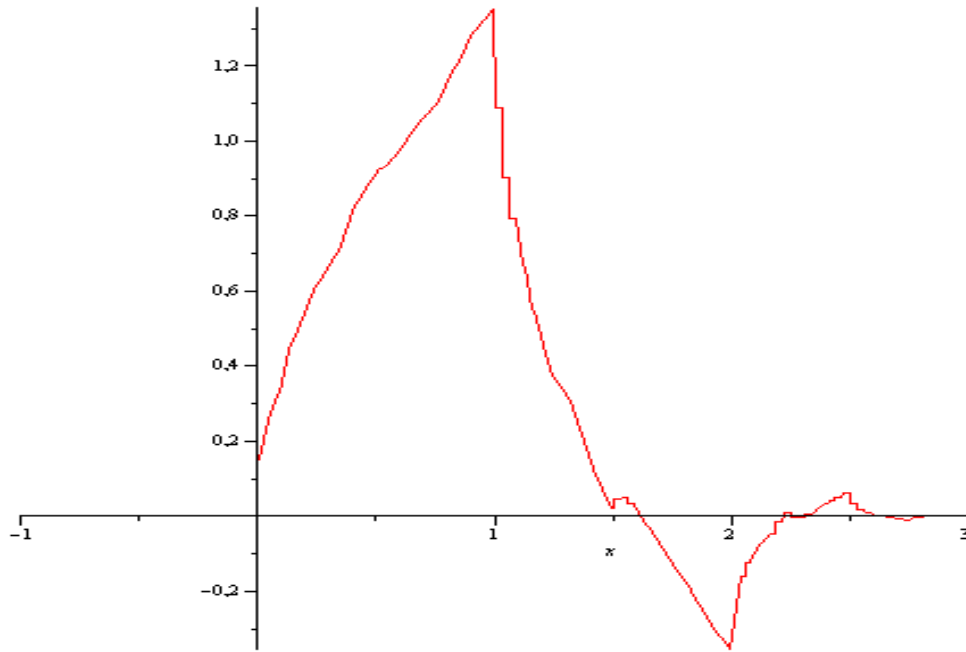
```
> phi3:=x->p0*phi2(2*x)+p1*phi2(2*x-1)+p2*phi2(2*x-2)+p3*phi2(2*x-3):
plot(phi3(x),x=-1..3);
```



```
> phi4:=x->p0*phi3(2*x)+p1*phi3(2*x-1)+p2*phi3(2*x-2)+p3*phi3(2*x-3):
plot(phi4(x),x=-1..3);
```

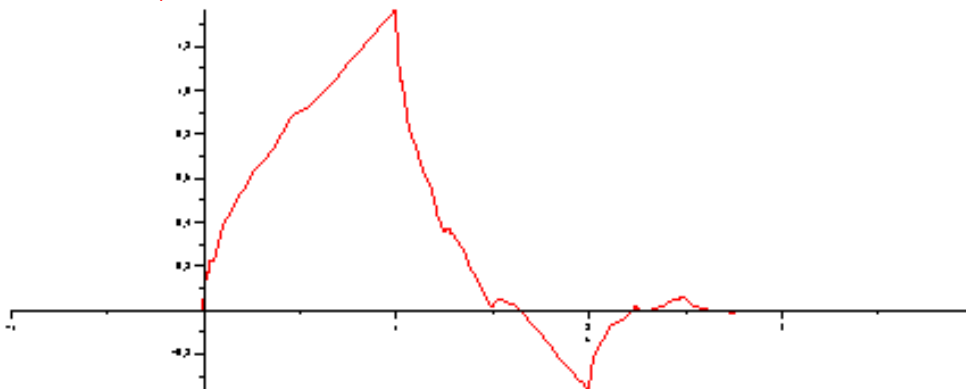


```
> phi5:=x->p0*phi4(2*x)+p1*phi4(2*x-1)+p2*phi4(2*x-2)+p3*phi4(2*x-3):
plot(phi5(x),x=-1..3);
```



> k:=6:

```
phi||k:=x->p0*phi||(k-1)(2*x)+p1*phi||(k-1)(2*x-1)+p2*phi||(k-1)(2*x-2)+p3*phi||(k-1)(2*x-3);
plot(phi||k(x),x=-1..4);
```



>

>

>

> #####

> # The wavelet function

>

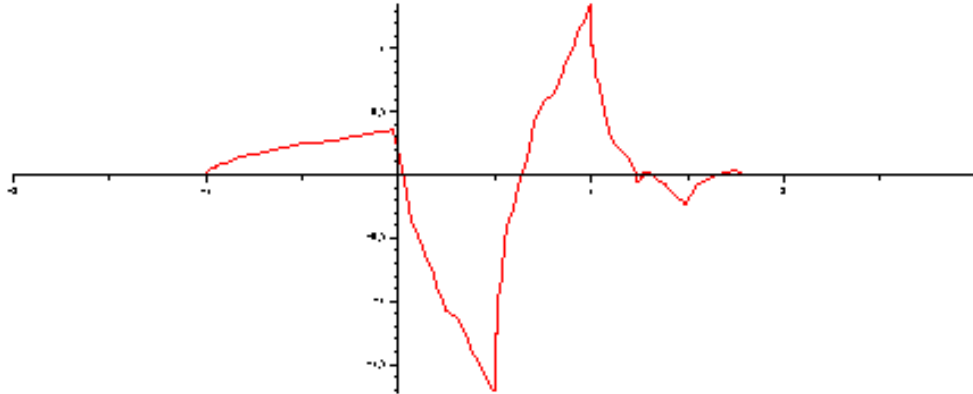
```
> sum(' - (-1)^kk*pp|| (1-kk) *ph(2*x-kk) ',kk=-2..1);
      -pp3 ph(2x+2) + pp2 ph(2x+1) - pp1 ph(2x) + pp0 ph(2x
      - 1)
```

> k:=5:

```
psi:=x-> evalf(p0*phi||k(2*x-1) -
p1*phi||k(2*x)+p2*phi||k(2*x+1) -p3*phi||k(2*x+2));
```

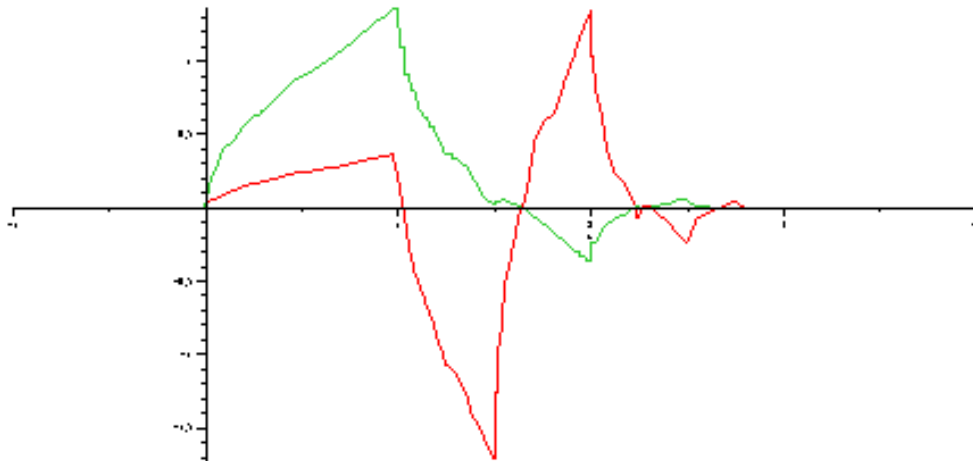
$$\psi := x \rightarrow \text{evalf}(p_0 \phi || k(2x - 1) - p_1 \phi || k(2x) + p_2 \phi || k(2x + 1) - p_3 \phi || k(2x + 2))$$


```
> plot(psi, -2..3);
```



```
>  
>  
>  
>
```

```
> plot([psi(x-1), phi5(x)], x=-1..4);
```



```
>  
>  
>  
>  
>
```

```
> ##### Orthogonalité #####
```

```
>
```

```
> Digits:=30;
```

```
> evalf(int(psi(x)*psi(x), x=-1..5));
```

```
1.000000000000000000000000000000
```

