

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur  
Et de la recherche scientifique

*Université de Blida*

*Institut d'Aéronautique*

*Département de structure*

*Pour l'obtention du diplôme  
D'ingénieur d'état*

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

*La détermination des profils d'aile  
par la méthode des transformation  
conformes VON-MISES et l'étude  
d'écoulement Autour de ces profils  
dans le domaine subsonique*

*Présentée par :*

*Sari Kafina*

*Promoteur :*

*Mr. Zebiche Soufik*

*Promotion 2002*

# REMERCIEMENTS

*Mes remerciements sincères sont à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à la mise au point de ce travail.*

*Nous voudrions citer notamment :*

- *Mr Soufik Lebiche mon promoteur.*
- *Mr Kamel Benachhou.*
- *Mr Abbaoui Abdelkarim.*
- *Mr Louacui Lumri.*
- *Mr Djelal du centre de calcul.*
- *tout les enseignants de l'institut d'aéronautique et de l'université de Blida.*

*Je dédie ce travail :*

*À Ma Mère dont ces sacrifices m'ont fourni  
l'opportunité d'apprendre et son courage m'a donné l'esprit de  
continuité.*

*À Mon fiancé Kamel Benuehhou qui m'a porté  
secouru pendant les moments difficiles.*

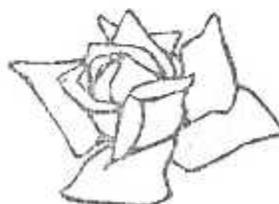
*À Mes deux frères Wassim et Amir.*

*À Ma grand-mère, mon grand-père.*

*À toute la famille grand et petit.*

*À Mes amis Amina, Hakima, Leila, Samah, Assma,  
Nassima, Amel, Sonia, Fatima, .....*

*À tous mes amis, surtout ceux de la promotion 2001/2002  
Ingénieur en construction et tous ce qui m'ont donné de l'aide durant  
tout ce long projet de fin d'étude.*



## Résumé

Notre travail comprend la génération des profils d'ailes de type mises en utilisant une méthode de transformation conforme «la méthode de Von – Mises» qui utilise un nombre des points critiques supérieur à deux avec un angle de bord de fuite égal à zéro, et l'étude de l'écoulement en déterminant les caractéristiques aérodynamiques au tour de ces profils dans le domaine subsonique.

## Sammary

In this momery , we stady the génération of wings section type mises with using the conform transformation «the Von-Mises transformation» witch is besed for many critical points great then two with an angle égal to zéro then we stady the flow and theirs acrodynamics characteristics in subsonic rigime.

## تلخيص

تطرقنا في هذا البحث إلى كيفية إيجاد مقاطع عرضية لنجاح الطائرة من نوع ميزس و هذا بإستعمال تحويل تطابقي " طريقة فون ميزس " الذي يعتمد على عدد كبير من النقاط الحدية أكبر من إثنان وزاوية الواجهة الخلفية تساوي الصفر. و بعدها تطرقنا إلى دراسة المميزات الديناموهوائية للإنسياب في المجال " تحت الصوتي".

## SOMMAIRE :

### INTRODUCTION GENERALE

### CHAPITRE 1 : GENERALITES

I-1 Introduction	06
II-2 Caractéristiques des profils	06
2-a Définition	06
2-b Caractéristiques géométriques	
2-c Orientation des profils	07
1- Angle de calage ( $\gamma$ )	12
2- Angle d'incidence( $\alpha$ )	12
3- Angle de portance nulle( $\alpha_0$ )	12
2-d Caractéristiques de forme des profils	12
1-Profils biconvexes symétriques	12
2- Profils biconvexes dissymétriques	12
3- Profils creux	13
4- Profils plans convexes	13
5- Profils à double courbure	13
6- Profils laminaires	13
2-e Désignation des profils d'ailes	13
I-3- La théorie potentielle des écoulements incompressibles	14
3-1 Les écoulements potentiels	14
1-a- La circulation et la fonction équipotentielle	14
1-b- La fonction courant	15
1-c- Propriétés des fonctions courant et Equipotentielle	15
3-2- Les écoulements potentiels élémentaires	17
a- écoulement homogène et parallèle	17
b- Source ou puits bidimensionnel	18
c- Fil tourbillonnaire rectiligne	20

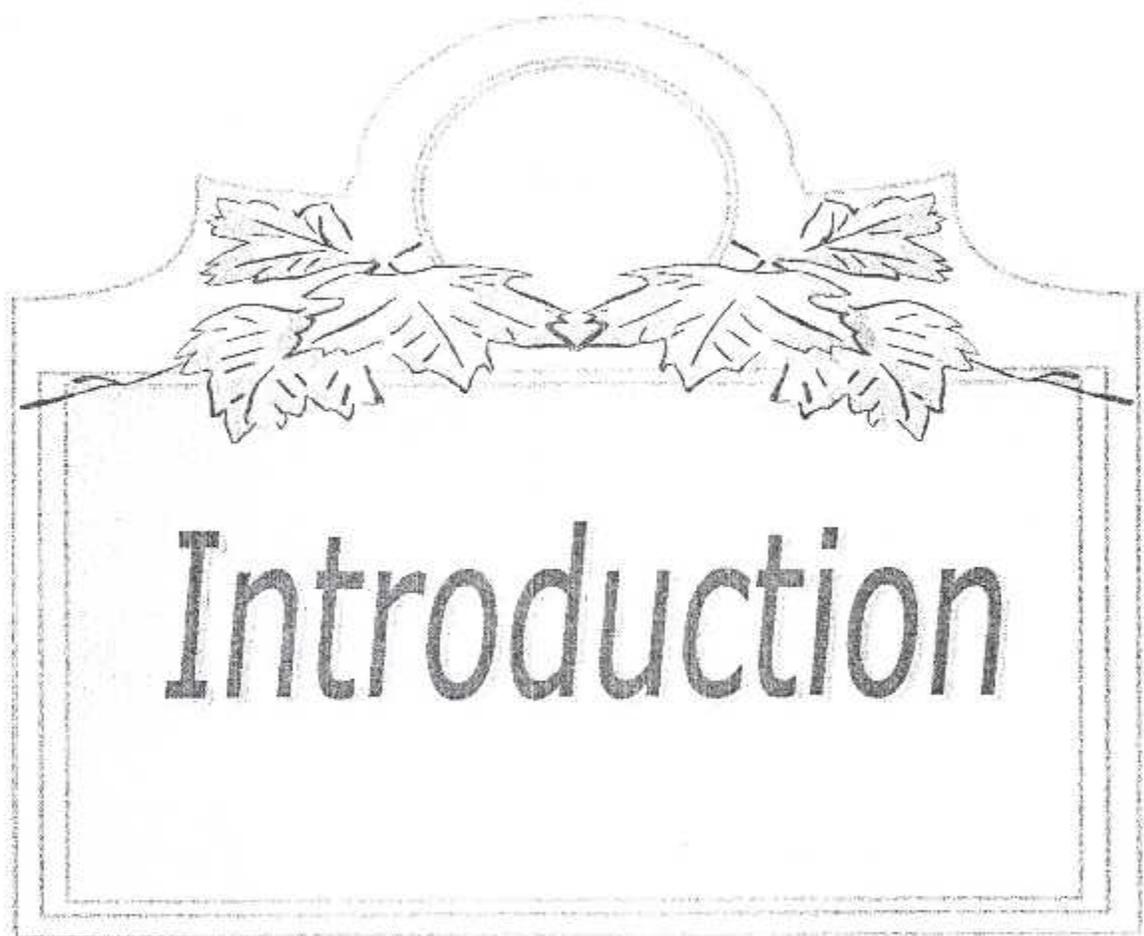
d- Dipôle	21
I-4\ Ecoulement autour d'un cylindre par la méthode de superposition	24
4-1- Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire	24
I-5 Détermination des caractéristiques de l'écoulement autour des profils d'ailes dans le domaine subsonique	35
a- Le coefficient de portance	36
b- Le coefficient de pression	36
c- Le coefficient de moment	36
CHAPITRE II :                   ANALYSE COMPLEXE	
II-1 Introduction	38
II-2 Etude mathématique	38
2-a Le disque ouvert et le disque épointé	38
2-b La fonction holomorphe (analytique)	38
2-c Les points réguliers et les points singuliers	38
2-d Développement en série de Laurent	39
2-e Théorème de Cauchy	39
2-f Théorème des résidus	40
2-g Les transformations courantes	40
5- La transformation conforme	41
II-3\ La théorie potentielle complexe	41
3-a Equation de Cauchy-Riemann	41
3-b La vitesse complexe	42
3-c La circulation complexe $\Gamma$	45
3-d Les Ecoulements potentiels bidimensionnels élémentaires	46
3-e Les relations de Blasius	47
1- L'expression des forces	47
2- L'expression de moment	49
f- Exemple : Ecoulement autour d'un cylindre de section arbitraire	49

II-4 Les transformations conformes	51
a- Définition et forme générale	51
b- La transformation de Joukowski	54
c- La transformation de Von-Karman Trefftz	56
d- La transformation de Von-Mises	57
<b>CHAPITRE III :</b>	<b>TRANSFORMATION DE VON-MISES</b>
III-1 Introduction	59
III-2 Développement de la méthode de Von-Mises	59
a- hypothèse	60
b- Procédure de la transformation	60
• Pour deux points critiques	61
a- détermination de la transformation	61
b- détermination des constantes	62
• Pour trois points critiques	62
a- détermination de la transformation	62
b- détermination des constantes	63
c- détermination de la transformation	63
d- détermination des constantes	64
III-3 Algorithme qui détermine la transformation par la Méthode de Horner et l'image de cercle à transformer	66
• Pour trois points critiques	67
• Pour quatre points critiques	67
III-4 Algorithme qui fait la résolution d'un système d'équation linéaire par la méthode de Khaledsky	68
III-5 Représentation de l'organigramme qui détermine les profils de mises par la méthode directe pour le cas de trois points critiques	70
III-6 Représentation de l'organigramme principale	71
III-7\ Représentation de l'organigramme qui détermine les caractéristiques de l'écoulement autour du profil obtenu par trois points critiques	72

<b>CHAPITRE IV :</b>	<b>INTERPRETATION DES RESULTATS</b>	
<b>VI-1</b>	<b>Introduction</b>	76
<b>VI-2</b>	<b>Interprétation des résultats</b>	76
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		101
<b>ANNEXE</b>		
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		

- $D(a,r)$  : disque ouvert.  
 $\bar{D}(a,r)$  : disque épointé.  
 $g(z),f(z)$  : la fonction analytique.  
 $\Omega$  : le domaine complexe.  
 $(z)$  : un plan complexe.  
 $(\zeta)$  : un plan complexe.  
 $\xi$  : la partie réelle de la variable complexe  $\zeta$ .  
 $\eta$  : la partie imaginaire de la variable complexe  $\zeta$ .  
 $\zeta$  : la variable complexe.  
 $Q$  : l'intensité totale des sources.  
 $X_1, X_2, X_3, \dots$  : les points critique.  
 $\bar{f}(z_0)$  : la dérivée de la fonction analytique au point  $z_0$ .  
 $\Gamma$  : la circulation complexe de l'écoulement, l'intensité des tourbillons.  
 $w(z)$  : la vitesse complexe.  
 $F(z)$  : la fonction potentiel complexe.  
 $\Psi$  : la fonction courant.  
 $\phi$  : la fonction potentiel.  
 $H(\Omega)$  : la classe de toutes les fonctions holomorphes sur  $(\Omega)$ .  
 $\text{Res}(a,c)$  : les résidus.  
 $C_1, C_2, \dots, C_3$  : les constants de la transformation.  
 $u_\infty$  : la vitesse à l'infini amont.  
 $Z(\zeta)$  : la transformée de mises.  
 $\mu_x$  : l'intensité de dipôle selon 'x'.  
 $\mu_y$  : l'intensité de dipôle selon 'y'.  
 $C_x$  : le coefficient de traînée.  
 $C_z$  : le coefficient de portance.  
 $C_m$  : le coefficient de moment.  
 $C_p$  : le coefficient de pression.  
 $F_x$  : la force de traînée.  
 $F_y$  : la force de portance.  
 $M$  : le moment.  
 $R, R_{cer}$  : rayon du cercle à transformer.  
 $r$  : rayon du cercle sur osculateur au bord d'attaque, rayon du disque.  
 $\xi_{cer}$  : la partie réelle du centre du cercle.  
 $\eta_{cer}$  : la partie imaginaire du centre du cercle.  
 $C_{cer}$  : le centre du cercle.  
 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$  : les coefficients de la transformation.  
 $Z_j$  : les nombres complexes différents des points singuliers.  
 $N_p$  : nombre des points sur le cercle à transformer.  
 $X$  : la partie réelle du nombre complexe  $Z$ .  
 $Y$  : la partie imaginaire du nombre complexe  $Z$ .  
 $\rho_\infty$  : la masse volumique à l'infini amont.  
 $\Lambda[Z]$  : le point du cercle unité

$V_x$  : la partie réelle de la vitesse complexe ( la composante de vitesse selon x)  
 $V_y$  : la partie imaginaire de la vitesse complexe ( la composante de vitesse selon y)  
 $V_t$  : la vitesse tangentielle  
 $V_r$  : la vitesse radiale  
 $C_z$  : la courbe dans le plan (Z)  
 $C_s$  : l'image de la courbe  $C_z$  dans le plan ( $\zeta$ )  
 $\nu$  : la viscosité dynamique .  
 $\tau$  : angle des tangentes au bord de fuite .  
 $l$  : la corde du profil .  
 $u$  : la composante de la vitesse selon x  
 $v$  : la composante de la vitesse selon y  
 $w$  : la composante de la vitesse selon z  
 BA : le bord d'attaque  
 BF : le bord de fuite  
 $e_{max}$  : l'épaisseur maximale du profil  
 $f_{max}$  : la fleche maximale du profil  
 $\gamma$  : l'angle de calage  
 $\alpha$  : l'angle d' incidence  
 $\alpha_0$  : l'angle de portance nulle  
 AB : trajectoire rectiligne  
 Q : le débit( l'intensité de puit ou la source)



# Introduction

## INTRODUCTION GENERALE :

L'aéronautique ou l'aviation civile est un domaine qui est consacré depuis toujours à toutes les phases de vie d'un avion. En matière de sécurité aéronautique, l'organisation de l'aviation civile internationale (O.A.C.I) depuis sa création a œuvré dans le sens de réglementer des phases et veiller à ce que tous les États membres appliquent cette réglementation qui représente le minimum requis en la matière. Universellement, ces phases de vie commencent par la conception, suivie de la production et une fois l'avion de série est remis en service, on parle d'exploitation et d'entretien pour répondre toujours aux objectifs fixés.

L'aérodynamique est un domaine qui traite le comportement des écoulements autour des profils. A partir de cette idée, les chercheurs ont essayé de développer des méthodes pour estimer analytiquement les performances aérodynamiques des profils et par la suite de passer au stade d'expérimentation. Mais avec l'évènement des machines de calcul puissantes et le développement de l'informatique ainsi que les mathématiques, la simulation numérique des problèmes aérodynamiques est devenue réalisable.

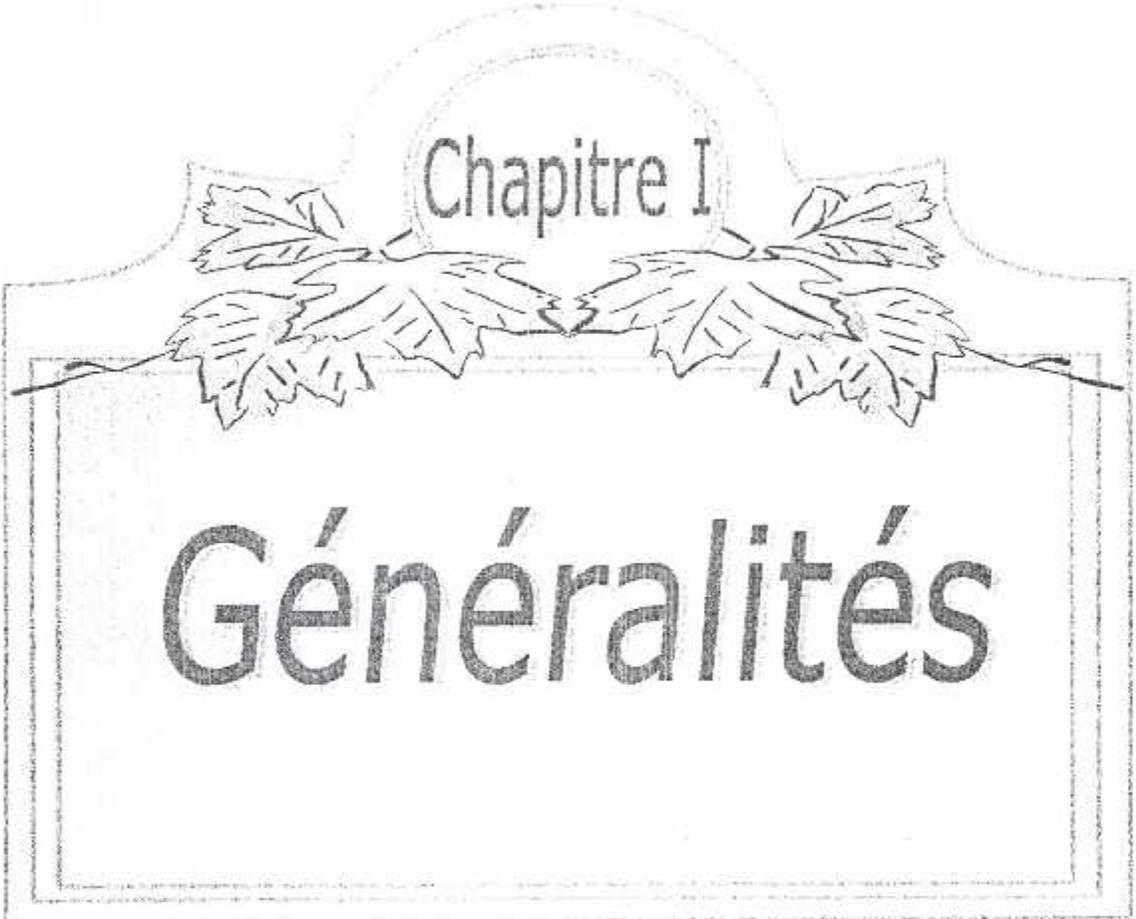
Trois grandes méthodes numériques les plus répandues à savoir la méthode des champs, de singularité et transformation conforme. Leurs applications interviennent lorsque la solution analytique n'est pas générale. Cela est dû à la non linéarité des équations de NAVIER –STOCKS et EULER.

L'objet principal de notre travail est de générer des profils d'aile en fonction des points critiques et l'étude de l'écoulement autour de ces profils, en utilisant la transformation de VON-MISES.

## 2- ORGANISATION DE LA THESE :

Notre travail se résume selon la structure des étapes suivantes :

- Le premier chapitre comprend des généralités sur les profils d'ailes et la théorie potentielle des écoulements incompressibles .
- Le deuxième chapitre comprend une étude d'analyse complexe et les transformations conformes .
- Le troisième chapitre comprend le développement de la méthode de Von-Mises.
- Le quatrième chapitre est consacré aux résultats numériques et leurs interprétations.
- Conclusion.

A decorative frame with a semi-circular top and a rectangular bottom. Inside the top semi-circle is the text "Chapitre I". Below the semi-circle is a horizontal branch with several leaves. The main body of the frame is a rectangle containing the text "Généralités".

Chapitre I

# Généralités

### I-1\ INTRODUCTION :

Pour mieux analyser et comprendre l'aérodynamique de l'avion, il est apparu souhaitable d'étudier séparément l'aérodynamique des principaux éléments qui le constituent et, plus particulièrement, **les profils**.

Et pour faire l'étude des écoulements potentiels autour de ses profils, on est entamé de citer plusieurs hypothèses qui sont les suivantes :

- On suppose que le fluide est parfait non visqueux sa viscosité  $\nu = 0$
- Le fluide est incompressible de densité  $\rho = \text{cte}$  vérifiant l'équation :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

- L'écoulement est stationnaire ( $d/dt = 0$ ) présente des nombre de Mach petits.
- L'écoulement est plan ( $d/dz = 0$ ).
- L'écoulement est irrotationnel, cela veut dire que le vecteur tourbillon est nul :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} * \text{rot}(\vec{v}) = 0$$

où d'une autre manière :  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$

Ces hypothèses facilitent l'étude, car on avait plusieurs théorèmes Travaillant avec eux, telle que le théorème de **BERNOULLI** Qui travaille avec l'incompressibilité et qui donne correctement la variation de pression avec une précision de  $O(M^4)$ .

### II-2\ CARACTERISTIQUES DES PROFILS :

#### 2-a\ DEFINITION :

Un profil est une section de l'aile par un plan parallèle au plan de symétrie. Pour étudier un profil, on assimile une aile cylindrique infiniment longue dont tous les profils sont identiques au profil. De ce faite, l'aile peut être considérée comme l'enveloppe d'une succession de profils évoluant suivant l'envergure.

Un profil est constitué généralement d'un :

- 1- **EXTRADOS** : dessus du profil.
- 2- **INTRADOS** : dessous de profil.
- 3- **BORD DE FUITE** : c'est le lieu de point extrême arrière de profil (généralement point anguleux) ; il est noté par BF.

4- **BORD D'ATTAQUE** : lieu du point extrêmement avant , ou encore : lieu des points de tangence de cercle centré au bord de fuite et de rayon max ; il est noté par BA .

5- **LA CORDE** : c'est le segment de droite joignant le bord d'attaque au bord de fuite ; il est noté par  $l$  (FIG I-1) :

- Un profil est dit symétrique quand il présente une symétrie axiale suivant la corde (FIG I-2) .
- Dans le cas contraire , un profil est dit cambré , il peut être à simple ou double courbure (FIG I-3 ) .

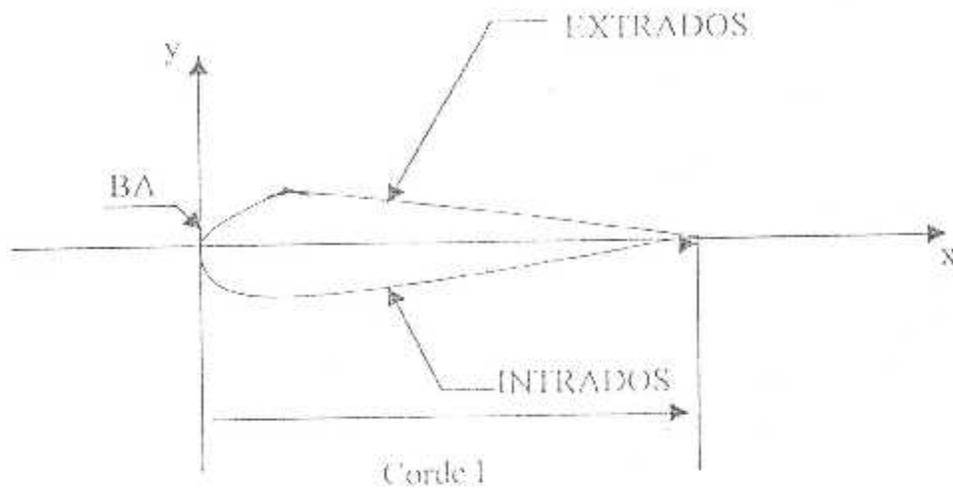
6- **LA SQUELETTE ou LIGNE MOIYENNE** : c'est la courbe définie Soit comme le lieu des centres des cercles inscrits dans le profil (FIG .4) , soit comme le lieu des milieux des segments de droite normaux à la Corde et limités par l'extrados et l'intrados du profil (FIG I-5) .

## 2-b \ CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES :

Les définitions précédentes sont complétées par les paramètres géométriques principaux suivants :

- L'épaisseur maximale : c'est le plus grand segment perpendiculaire à la corde et qui est noté par  $e_{max}$  .
- L'épaisseur relative en % : c'est la distance maximale entre l'extrados et l'intrados du profil suivant une normale à la corde ; elle est notée par  $e_{max} / l$  .
- La position de l'épaisseur maximale en % par rapport au bord d'attaque ; elle est notée par  $x_e / l$  (FIG I-6) .
- La flèche maximale du squelette : c'est la plus grande distance entre la ligne de courbure moyenne et la corde du profil ; elle est notée par  $f$  .
- La flèche relative ( la courbure relative ) en %: c'est le rapport de la flèche maximale et la corde du profil ; elle set notée par  $f_{max} / l$  .
- La position du point de flèche maximale en % par rapport au bord d'attaque ; elle est notée par  $x_f / l$  (FIG I-7) .

- Rayon du cercle osculateur au bord d'attaque rapporté à la corde et la position de son centre : il est noté par  $r/c$ .
- Angle des tangentes au bord de fuite : il est noté par  $\tau$  (FIG 1-8) ; Certains profils sont tronqués au bord de fuite.



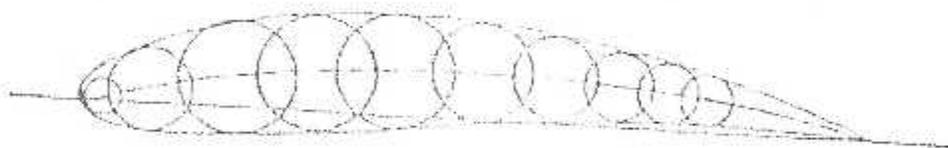
Figure(I-1) : description d'un profil



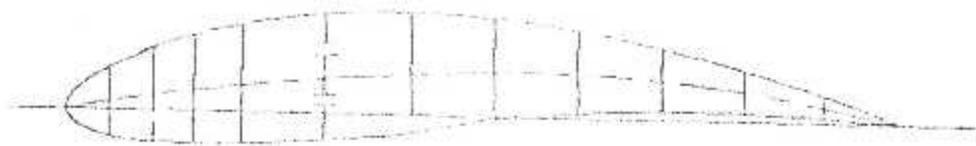
Figure(I-2) : Profil symétrique NACA 0012



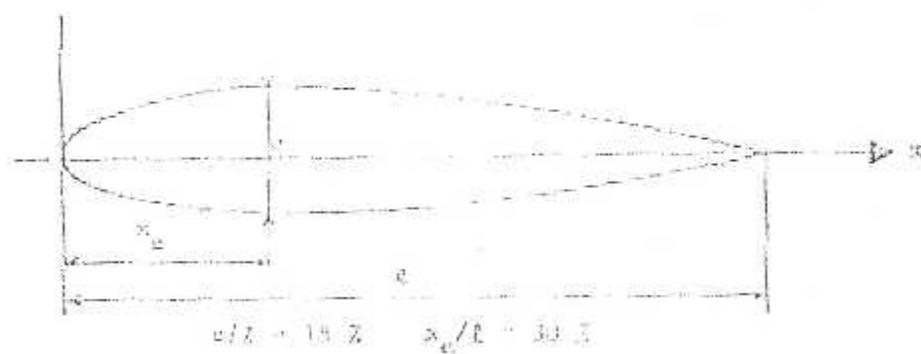
Figure(1-3) : Profil cambré



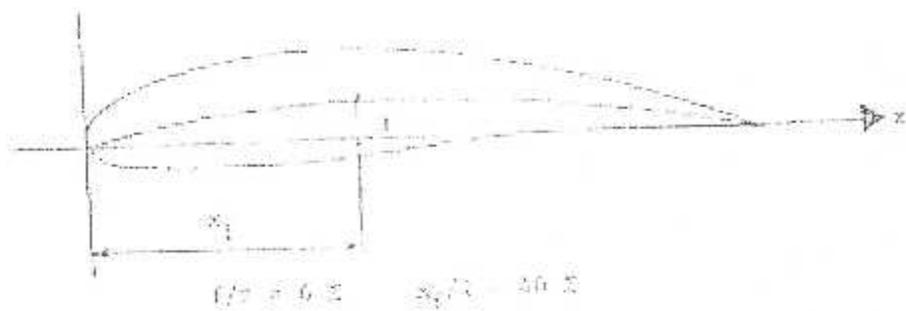
Figure(1-4) : La ligne moyenne



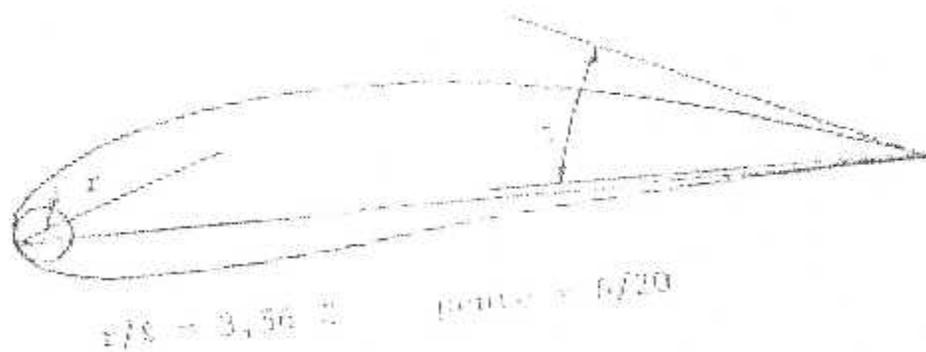
Figure(I-5) : La ligne moyenne



Figure(I-6) : L'épaisseur d'un profil NACA23018



Figure(I-7) : La flèche d'un profil NACA6415



Figure(I-8) : Profil NACA 6415

**REMARQUE :**

L'épaisseur relative permet de classer les profils :

- 1- Profil minces :  $e < 6\%$  .
- 2- Profil semi-épais :  $6\% < e < 12\%$  .
- 3- Profil épais :  $e > 12\%$  .

**2-C\ ORIENTATION DES PROFILS :****1- Angle de calage ( $\gamma$ ) :**

C'est l'angle formé par la corde de profil et l'axe longitudinal de l'avion, il est généralement de l'ordre de  $-2^\circ$  à  $-3^\circ$  .

**2- Angle d'incidence( $\alpha$ ) :**

C'est l'angle formé par la corde de profil et de vecteur vitesse, il est positif vers le bas en partant de la corde.

**3- Angle de portance nulle( $\alpha_0$ ) :**

C'est l'incidence pour laquelle la portance de profil est nulle, cet angle est habituellement négatif pour les profils usuels.

**2-d\ CARACTERISTIQUES DE FORME DES PROFILS :**

Nous avons plusieurs profils dont on peut les classer dans les catégories suivantes :

**1-Profils biconvexes symétriques :**

Un profil est dit biconvexe symétrique quand l'extrados et l'intrados sont convexes et symétriques par rapport à la corde, dans ce cas, la ligne de courbure moyenne et la corde sont confondues, donc la flèche ainsi que la courbure relative sont nulles. Ce type des profils est utilisé généralement pour les empennages horizontaux et verticaux.

**2- Profils biconvexes dissymétriques :**

Pour ce type de profil la cambrure de l'extrados est plus accentuée que celle de l'intrados. Mentionnant aussi que l'angle de portance nulle est généralement de l'ordre  $-2^\circ$  à  $-3^\circ$  .Ce type des profils est employé pour les ailes d'avion.

**3- Profils creux :**

Pour ce type des profils l'extrados est convexe par contre l'intrados est concave; Ce type des profils est généralement utilisé pour les planeurs .

**4- Profils plans convexes :**

Dans ce cas l'extrados est convexe et l'intrados est plan .

**5- Profils à double courbure :**

Ces profils sont auto stables , contrairement aux autres types qui sont instables et nécessitant un empennage horizontale pour la stabilité longitudinale de l'avion .

**6- Profils laminaires :**

Ce sont des profils minces , biconvexes , symétrique et le bord de fuite à lame couteau; ce type des profil est utilisé à des grandes vitesses.

**2-c\ DESIGNATION DES PROFILS D'AILES :**

Les principaux pays constructeurs d'avions disposent de toute une gamme des profils par exemple :

<b>En Allemagne les profils</b>	<b>Gottingen (GOT)</b>
<b>En France les profils</b>	<b>Eiffel</b>
<b>En Grand Bretagne les profils</b>	<b>RAF</b>
<b>Aux U.S.A les profils</b>	<b>Clark et NACA</b>

Les profils d'ailes les plus utilisés sont : les profils NACA ( National Advisory Committee for Aeronautics ), et autrement dit :

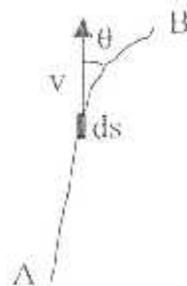
Organisme Américain de la Recherche Aéronautique, dont l'équivalent en France est l'ONERA.

### I-3\ LA THEORIE POTENTIELLES DES ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES :

#### 3-1\ LES ECOULEMENTS POTENTIELS :

##### 1-a\ LA CIRCULATION ET LA FONCTION EQUIPOTENTIELLE :

Soit une ligne reliant deux points A et B , et  $ds$  un élément infinitésimal de cette ligne ,



La circulation de la vitesse  $v$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{AB} &= \int_{A \rightarrow B} \vec{v} \cdot \vec{ds} \\ &= \int_{A \rightarrow B} v ds \cos \theta \end{aligned} \quad \dots (I-1)$$

Et on sait que les composantes de  $\vec{v}$  sont :  $v (u,v,w)$  et les composantes de  $ds$  sont :  $(dx, dy, dz)$

Donc je peut écrire  $\vec{\Gamma}$  de la forme suivante :

$$\Gamma_{AB} = \int_{A \rightarrow B} u dx + v dy + w dz \quad \dots (I-2)$$

Et puisque  $\Gamma$  dépend des points A et B et de la forme du trajet AB, on dit que le champ dérive d'un potentiel , dans ce cas là , on peut écrire d'après la loi des différences totale :

$$d\Gamma = d\Phi \quad \dots (I-3)$$

puisque :

$$d\Gamma = v \cdot ds = u dx + v dy + w dz \quad \dots (I-4)$$

et :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad \dots (I-5)$$

donc :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \dots (I-6)$$

d'une autre façon :

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi \quad \dots (I-7)$$

Et on dit que le champ des vitesses dérive d'un potentiel ; et  $\Phi$  s'appelle la fonction équipotentielle.

### 1-b\ LA FONCTION COURANT :

Considérons un écoulement incompressible , irrotationnel dans un plan;

donc :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad \dots (I-8)$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (I-9)$$

Il existe une fonction  $\Psi$  tel que :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} : \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \dots (I-10)$$

Cette fonction est appelée , la fonction courant .

### 1-c\ PROPRIETES DES FONCTIONS COURANT ET EQUIPOTENTIELLE :

nous pouvons résumer les Propriétés des fonctions courant et équipotentielle dans :

1- Puisque l'écoulement est incompressible , donc :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad \dots (I-11)$$

tel que :

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi \quad \text{d'où} : \quad \text{div}(\text{grad} \Phi) = 0 \quad \dots (I-12)$$

et d'une autre façon :  $\Delta \Phi = 0$  , alors la fonction équipotentielle  $\Phi$  vérifie l'équation de Laplace.

2- Puisque l'écoulement est irrotationnel , donc :

$$\text{rot} \vec{v} = 0 \quad \dots (I-13)$$

cela peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots (I-14)$$

et nous avons vu précédemment que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots (I-15)$$

Injectant  $u$  et  $v$  dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots (I-16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \dots (I-17)$$

et d'une autre façon :  $\Delta \Phi = 0$ , alors la fonction courant  $\Psi$  obéit à l'équation de Laplace.

3- On a :

$$d\Psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad \dots (I-18)$$

et on sait que :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \quad \dots (I-19)$$

donc :

$$d\Psi = -v dx + u dy = 0 \quad \dots (I-20)$$

ce qui implique:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Psi = cte} = \frac{v}{u} \quad \dots (I-21)$$

$$\text{et on a aussi : } d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0 \quad \dots (I-22)$$

$$\text{et on sait que : } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v \quad \dots (I-23)$$

donc :

$$d\Phi = u dx + v dy = 0 \quad \dots (I-24)$$

ce qui implique :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Phi = cte} = -\frac{u}{v} = -\frac{1}{\left( \frac{v}{u} \right)} \quad \dots (I-25)$$

puisque :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{cte}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{cte}} = -1 \quad \dots (I-26)$$

donc les lignes équipotentielles et les lignes courants sont orthogonaux .

### 3-2\ LES ECOULEMENTS POTENTIELS ELEMENTAIRES :

#### A- ECOULEMENT HOMOGENE ET PARALLELE :

Considérons un écoulement homogène et parallèle de vitesse  $U_\infty$  selon l'axe x. Pour déterminer la fonction courant  $\Psi$  et le potentiel des vitesses  $\Phi$  de cet écoulement par rapport aux variables xy ( écoulement bidimensionnel ), on peut écrire :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_x = U_\infty = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \dots (I-28)$$

et :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_y = 0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \dots (I-29)$$

D'où :

$$\Phi = U_\infty x \quad , \quad \Psi = U_\infty y \quad \dots (I-30)$$

En fonction des variables , xr ( écoulement axisymétrique ) on obtient :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_x = U_\infty = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad \dots (I-31)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = v_r = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \dots (I-32)$$

d'où:

$$\Phi = U_\infty x \quad , \quad \Psi = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \quad \dots (I-33)$$

De même , en fonction des variables r et  $\theta$  on a :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = v_r = U_\infty \cos\theta = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \dots (I-34)$$

et :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = v_\theta = -U_\infty \sin\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad \dots (I-35)$$

d'où :

$$\Phi = U r \cos \theta \quad , \quad \Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \quad \dots (I-36)$$

### B- SOURCE OU PUIT BIDIMENSIONNEL :

En un point du plan  $xy$ , un écoulement radial, soit sortant soit Entrant, correspond à un écoulement engendré soit par une source soit par un puits. En utilisant les coordonnées polaires  $r \theta$  centrées en un tel point, l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} v_{\theta} + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad \dots (I-37)$$

La nature radiale de l'écoulement implique que  $v_{\theta} = 0$  ; donc l'équation précédente se réduit à :

$$r v_r = \text{constante}$$

Ainsi la fonction de courant associée avec (I-37) vérifie :

$$v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad , \quad r v_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \text{constante} = C \quad \dots (I-38)$$

avec pour résultat

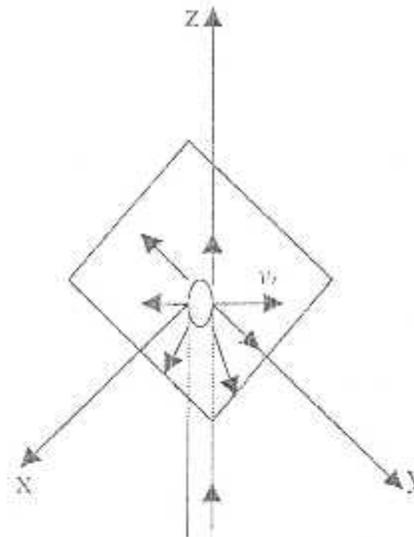
$$\Psi = C \theta \quad \dots (I-39)$$

La constante  $C$  exprimée en fonction du débit  $Q$  de la source devient :

$$Q = 2\pi r v_r = 2\pi C \quad \dots (I-40)$$

Où  $Q$  est donnée par unité de longueur dans la direction  $k$  ; ainsi  $Q$  s'exprime en  $m^2/s$  (FIG.9). Le potentiel de la source est obtenu à l'aide de  $v = \nabla \Phi$  d'où :

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{C}{r} \quad \dots (I-41)$$



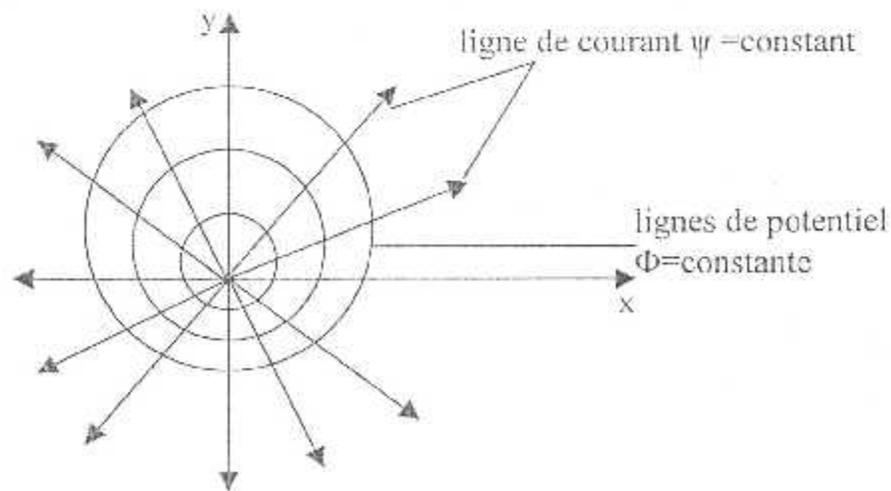
**Figure (I-9) :** Le débit de la source située à l'origine est  $\frac{Q}{\Delta z}$ , qui s'exprime en  $m^2/s$ . Il engendre un écoulement radial dans le plan  $xy$ , ( $Q=2\pi v_0 \Delta z$  exprimé en  $m^3/s$  représente le débit entre deux plaques séparés par la distance  $\Delta z$ )

En résumé nous obtenons :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad , \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad \dots \text{(I-42)}$$

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad , \quad v_\theta = 0 \quad \dots \text{(I-43)}$$

Les lignes de courant sont donc les rayons à  $\theta = \text{constante}$ , et les lignes équipotentielles les cercles  $r = \text{constante}$  (FIG.10).

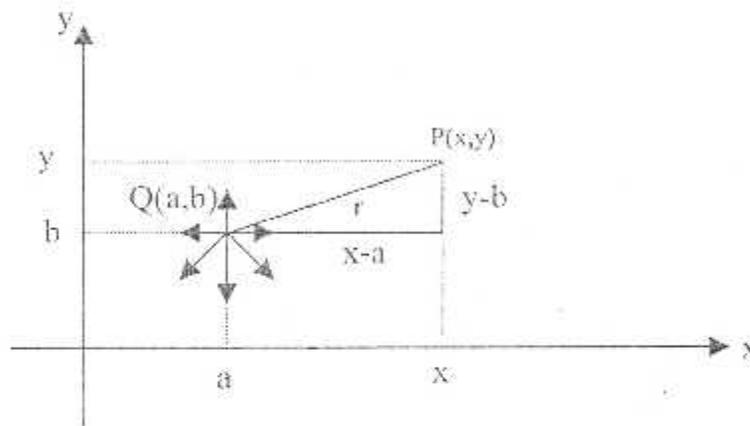


**Figure(I-10) :** source plane avec ses lignes de courant et de potentiel de courant

Si la source est située en un point  $Q(a,b)$  dans le plan  $xy$ ,  $r$  est alors la distance entre la source et un point  $P(x,y)$  quelconque considéré, et  $\theta$  l'angle défini sur la figure I-11. On obtient dans ce cas :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} \quad , \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} \quad \dots (I-44)$$

$$v_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad , \quad v_\theta = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \dots (I-45)$$



Figure(I-11) : Source située au point  $x=a$ ,  $y=b$ .

### C- FIL TOURBILLONNAIRE RECTILIGNE :

Un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe  $z$  engendre un écoulement irrotationnel dans le plan  $xy$ . En utilisant les coordonnées polaires  $r, \theta$  centrées du fil nous pouvons donc écrire :

$$(\nabla \times v)_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = 0 \quad \dots (I-46)$$

où  $v_r = 0$  et :  $r v_\theta = \Gamma / 2\pi$ .

La fonction potentielle et courant vérifient ainsi :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad \dots (I-47)$$

En résumé nous obtenons :

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad , \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad \dots (I-48)$$

$$v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \dots (I-49)$$

Observons que  $\Gamma$  peut être positive ou négative ; si  $\Gamma < 0$ ,  $v_\theta < 0$  et le tourbillon tourne autour de l'origine dans le sens d'une aiguilles d'une montre. Par contre, si  $\Gamma > 0$ ,  $v_\theta > 0$ , le tourbillon tourne en sens inverse (Figure I-12)

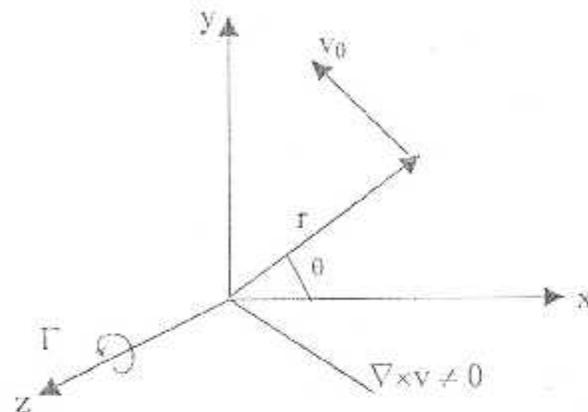


Figure (I-12) : Fil tourbillonnaire :  $\nabla \times v \neq 0$  uniquement pour  $x=y=0$ . A l'exception de ce point  $\nabla \times v = 0$

#### D- DIPÔLE :

Il s'agit ici d'une superposition d'une source d'intensité  $+Q$  située au point  $x, y$  et d'un puits d'intensité  $-Q$  situé au point  $(x' - \Delta x', y')$ , Figure(I-13)

Le potentiel  $\Phi$  par rapport au point  $P(x, y)$  devient selon (I-44)

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2} - \ln \left[ (x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2} \right\} \quad \dots (I-45)$$

Le dipôle se définit par un passage aux limites de (I-45) tel que :

$\Delta x' \rightarrow 0$  et  $Q \rightarrow \infty$  avec la condition  $Q\Delta x' \rightarrow \mu$ , ou  $\mu$  est l'intensité du dipôle elle s'exprime donc en  $m^2/s$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{Q\Delta x'}{2\pi} \frac{\ln \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2} - \ln \left[ (x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2}}{\Delta x'} \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \ln \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{1/2} = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \quad \dots (I-46) \end{aligned}$$

Les composantes du vecteur vitesse deviennent :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \dots (1-47)$$

Et la fonction  $\Psi$  :

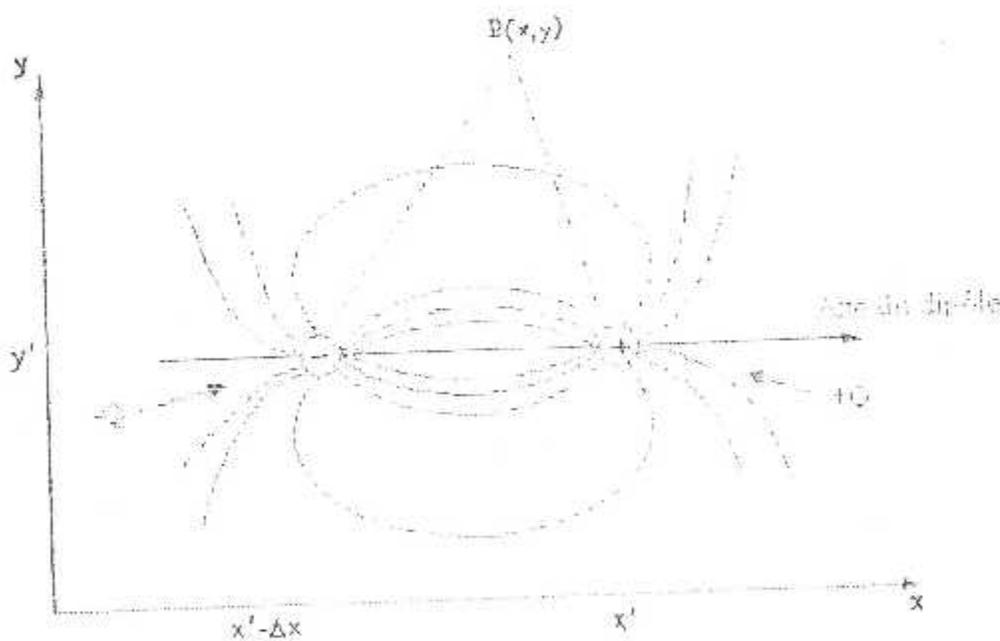
$$\Psi = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \quad \dots (1-48)$$

Un dipôle est donc caractérisé par sa direction et son orientation positive définie par les points consécutifs puits-source (FIG. 18). Par conséquent en utilisant la notation vectorielle, on écrit :

$$\mu = \mu e_{\text{axe}} \quad \dots (1-49)$$

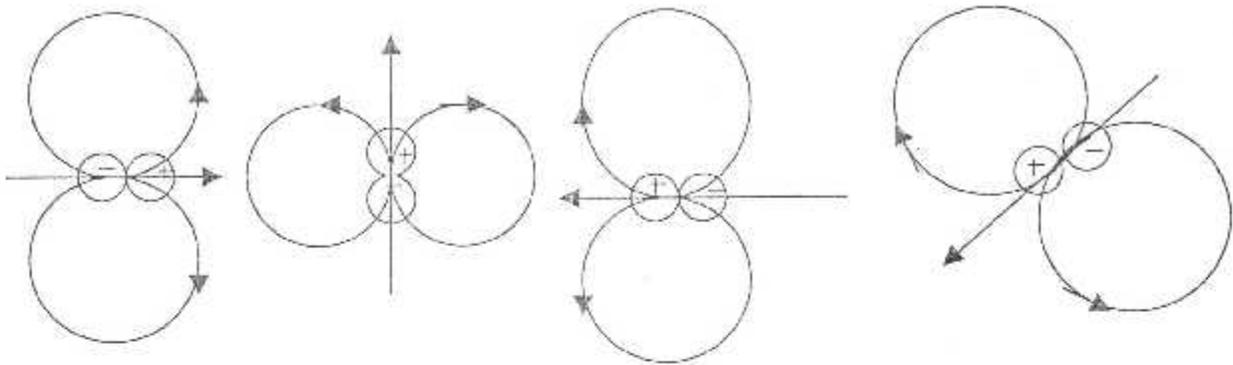
Où  $e_{\text{axe}}$  représente le vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe du dipôle. Il s'en suit que le potentiel d'un dipôle devient :

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu \cos \theta}{r^2} \quad \dots (1-50)$$



Figure(I-13) : construction d'un dipôle plan

En résumé , pour un dipôle dirigé dans la direction  $i$  selon la figure(I-4) :



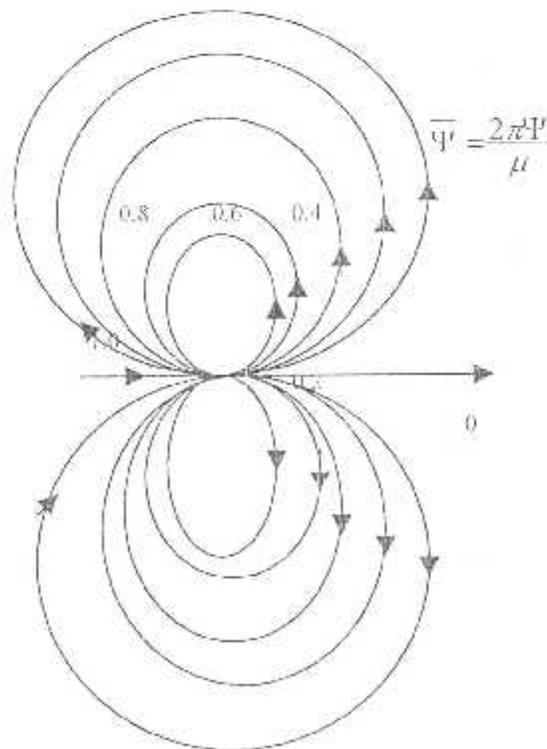
Figure(I-14) : Direction de l'axe d'un dipôle selon les positions relatives de la source et du puit

On obtient :

$$\Phi = \frac{\mu \cos\theta}{2\pi r} \quad , \quad \Psi = \frac{\mu \sin\theta}{2\pi r} \quad \dots (I-60)$$

$$v_r = \frac{\mu \cos\theta}{2\pi r^2} \quad , \quad \frac{\mu \sin\theta}{2\pi r^2} \quad \dots (I-61)$$

Les lignes de courant sont représentées sur la figure(I-15) :



Figure(I-15) : Ligne de courant d'un dipôle plan

**I-4\ Ecoulement autour d'un cylindre par la méthode de superposition :**

Par une superposition de certains solutions potentiels élémentaires

Il est possible de construire des cas d'écoulements simples .

**4-1\ Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire :**

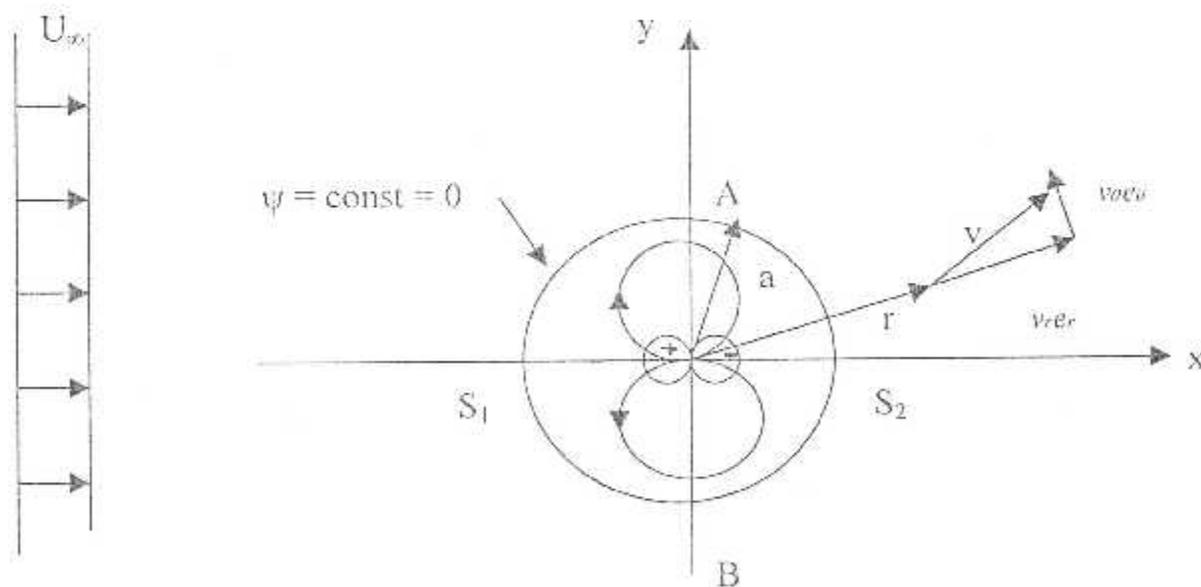
L'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire est obtenue par a superposions d'un dipôle plan , et d'un écoulement parallèle homogène .

En utilisant un système de coordonnées polaires  $r \theta$  , nous obtenons :

$$\Psi = U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \quad \dots (I-62)$$

où le terme du dipôle a été exprimé avec un signe négatif puisque son orientation est contraire au sens de l'écoulement homogène .

Le rayon du cylindre est obtenu en posant en (I-62)  $\Psi=0$ , condition qui détermine la ligne de courant singulière . Cette dernière se divise au point  $S_1$  en deux branches qui se réunissent au point  $S_2$  Figure(I-16)



**Figure(I-16) :** Repère der coordonnées polaires pour l'écoulement Autour du cylindre circulaire

Il découle que :

$$\psi = 0 = \frac{U_{\infty} \sin \theta}{r} \left( r^2 - \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right) \quad \dots (I-63)$$

Le rayon  $a$  du cylindre devient donc :

$$a = \left( \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right)^{1/2} \quad \dots (I-64)$$

Par conséquent (I-62) prend la forme :

$$\Psi = U_{\infty} \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \quad \dots (I-65)$$

D'où :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \dots (I-66)$$

$$v_{\theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \dots (I-67)$$

et :

$$\Phi = U_{\infty} \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \quad \dots (I-68)$$

Selon (I-65)  $w=0$  pour  $r=a$ , et  $v_{\theta} = 0$  pour  $\theta=0$  et. Les deux points  $S_1, S_2$  sont des points d'arrêt. La vitesse maximale  $v_{\theta} = 2U_{\infty}$  se produit pour  $\theta=\pi/2, 3\pi/2$  aux points A et B. Les lignes de courant données par :

$\psi = \text{constante}$  sont tracées sur la figure (I-17)

La région hors du cylindre est doublement connexe. Cela signifie qu'une solution univoque ne peut être obtenue que si la circulation  $\Gamma$  autour du cylindre a été spécifiée. L'expression selon (I-62) équivaut à la spécification  $\Gamma=0$ . La solution générale est obtenue par la superposition supplémentaire de la solution élémentaire du fil tourbillonnaire selon (I-48) :

$$\psi = U_{\infty} \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \Phi = U_{\infty} \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \dots (I-69)$$

$$v_r = U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), v_\theta = -U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \dots (I-70)$$

où le signe de  $\Gamma$  est choisi négatif de manière à obtenir un mouvement de rotation du tourbillon dans le sens des aiguille d'une montre.

Observons que la condition aux limites  $v_r=0$  sur  $r=a$  est toujours vérifiée, mais que les deux points  $S_1, S_2$  sont déplacés :  $v_\theta=0$  sur  $r=a$  donne :

$$\sin \theta_{1,2} = -\frac{\Gamma}{4\pi a U_\infty} \quad \dots (I-71)$$

Ces deux points font partie de la ligne de courant singulière  $r=a$  sur laquelle la valeur de  $\Psi$  n'est fixée qu'à une constante près. Notons que, dans le terme logarithmique, il faut rendre  $r$  adimensionnel afin de tracer les lignes de courant à partir de (I-69). Le choix de la constante pour  $\Psi$  se ramène au choix d'une valeur de référence pour  $r$ , par exemple le rayon  $a$ . Nous écrivons donc pour  $\psi$  sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\psi}{aU_\infty} = \frac{r}{a} \sin \theta \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{\Gamma}{2\pi a U_\infty} \ln \left( \frac{r}{a} \right) \quad \dots (I-72)$$

et obtenons ainsi la valeur  $\Psi=0$  sur la ligne de courant singulière.

Les lignes de courant autour du cylindre sont tracées sur la figure (I-18) à partir de (I-72) pour  $\Gamma=2,4\pi a U_\infty$ .

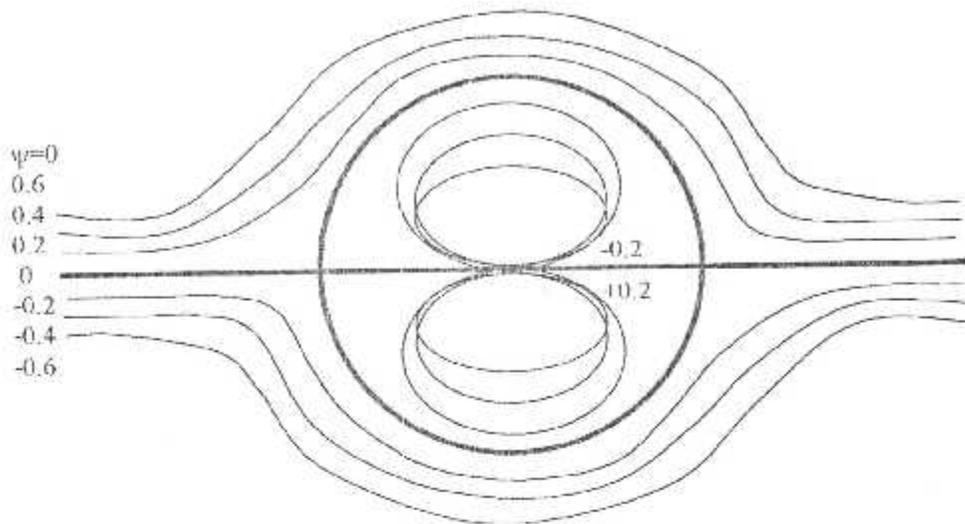
Pour une valeur de  $\Gamma$  appartenant au domaine  $0 < \Gamma < 4\pi a U_\infty$  les deux points  $S_1, S_2$  sont distincts et la vitesse tangentielle aux points A et B est respectivement (FIG.22).

$$v_{tA} = 2U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad , \quad v_{tB} = 2U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad \dots (I-73)$$

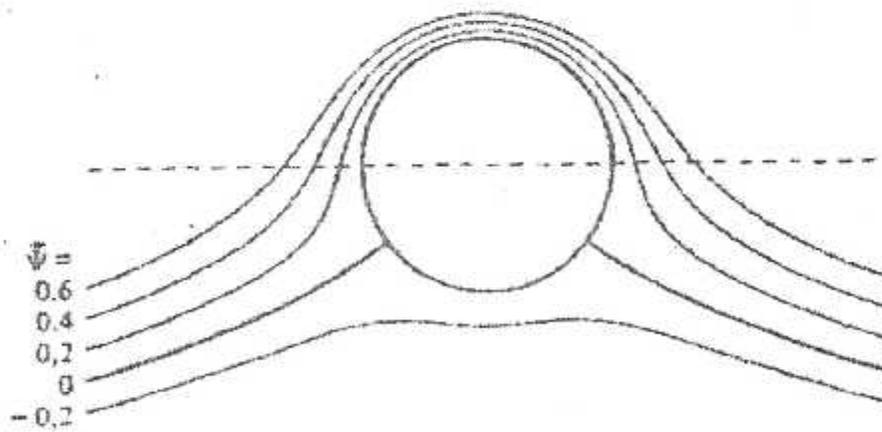
dans la direction  $i$ .

Dans le cas  $\Gamma=4\pi a U_\infty$  les deux points  $S_1, S_2$  coïncident (FIG.19), et pour  $\Gamma < 4\pi a U_\infty$  on trouve un seul point d'arrêt dans le champ d'écoulement à l'extérieur du cylindre (FIG.20). Ce point est donné par la condition de symétrie  $v_r = v_\theta = 0$  pour  $\theta = \pi/2$ ,

$$\text{d'où :} \quad v_\theta = 0 = U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \text{où :} \quad r^2 + a^2 = \frac{\Gamma}{2\pi U_\infty} r \quad \dots (I-74)$$



Figure(I-17) : Lignes de courant. Les valeurs de  $\Psi$  sont rendues adimensionnelles selon  $\psi = \psi / aU_\infty$  ;  $\Gamma = 0$



Figure(I-18) : Lignes de courant tracées pour  $\Gamma / aU_\infty = 2.4\pi$

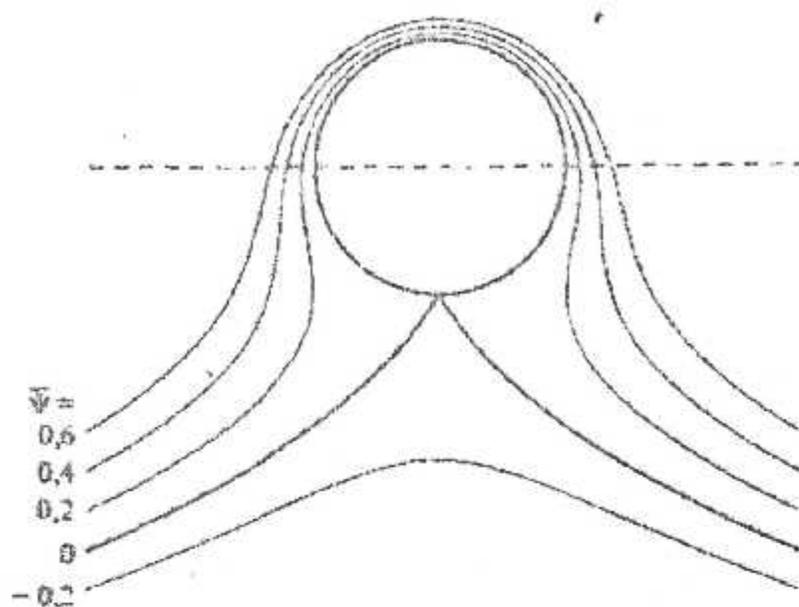
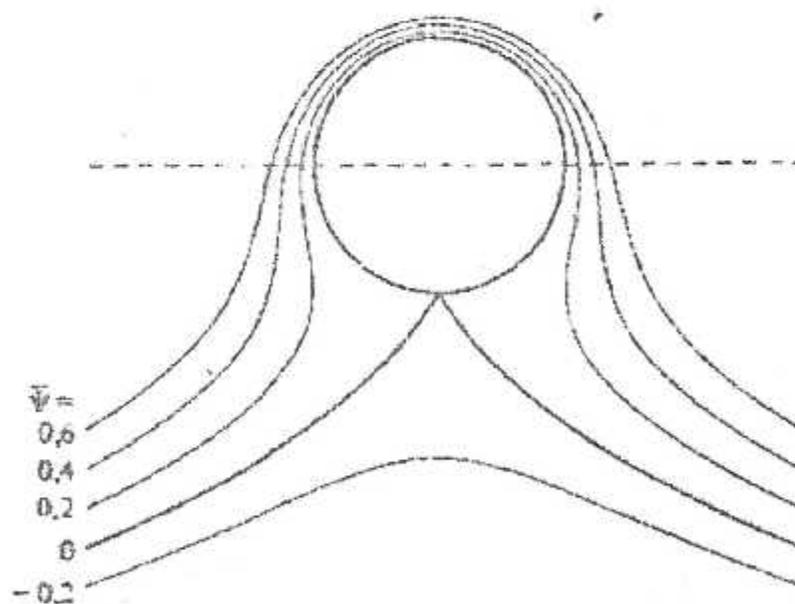


Figure.(I-19) : Lignes de courant tracées pour  $\Gamma/aU_\infty=4\pi$



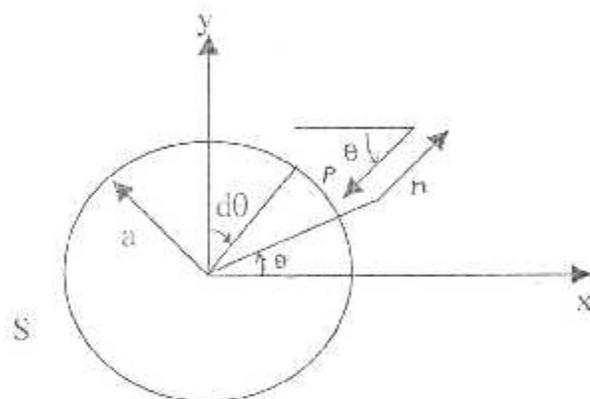
Figure(I-20): Lignes de courant tracées pour le cas  $\Gamma=k4\pi aU_\infty$  avec  $k=1.225$   $\Psi$  est rendue nulle sur la ligne de courant traversant le point r

En posant  $\Gamma = k4\pi a U_\infty$ ,  $k > 1$  la position  $r$  de ce point devient :

$$r = ka + a\sqrt{k^2 - 1} \quad \dots (I-75)$$

la pression à la surface du cylindre est calculée selon la formule de Bernoulli :

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U_\infty^2 - v_\theta^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[ 1 - \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi U_\infty a} \right)^2 \right] \quad \dots (I-76)$$



Figure(I.21) : Évolution de la force  $F$  sur le cylindre circulaire

Pour obtenir la force totale,  $F = iF_x + jF_y$  qui agit sur le cylindre, on obtient par intégration de la pression sur la surface  $S$  du cylindre (FIG.21) :

$$F_x = - \int_S p \cos(n, x) ds = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta \quad \dots (I-77)$$

$$F_y = - \int_S p \cos(n, y) ds = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta \quad \dots (I-78)$$

où  $F_x$  et  $F_y$  sont exprimées par unité de longueur du cylindre. L'intégrale  $F_x$  est identique égale à zéro, puisque le champ de vitesse est symétrique par rapport à l'axe  $y$ . Pour calculer l'intégrale  $F_y$  on observe que le seul terme en (I-76) qui puisse apporter une contribution est le terme linéaire en  $\sin \theta$  qui s'écrit :

$$-\rho U_{\infty} \Gamma \sin \theta / \pi a \quad \dots (I-79)$$

d'où :

$$F_y = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \rho U_{\infty} \Gamma \sin^2 \theta \, d\theta = \rho U_{\infty} \Gamma \quad \dots (I-80)$$

Physiquement ce résultat s'explique de la manière suivante :

Quand  $\Gamma=0$  le champ de vitesse est parfaitement symétrique par rapport à l'axe x et l'axe y. Par conséquent il n'y a pas de force sur le cylindre. Quand  $\Gamma \neq 0$  la vitesse tangentielle selon (I-73) est plus grande au point A qu'au point B (FIG.22). D'après Bernoulli, on obtient donc une pression  $p_B$  plus grande que  $p_A$ , puisque :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho \left( 2U_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 = p_0 = p_B + \frac{1}{2} \rho \left( 2U_{\infty} - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \quad \dots (I-81)$$

Soit :

$$p_B = p_A + 2\rho U_{\infty} \frac{\Gamma}{\pi a} \quad \dots (I-82)$$

Par conséquent il y a une force verticale qui s'applique au cylindre.

On tire donc la conclusion que pour un cylindre circulaire la traînée  $F_x$  est nulle tandis que la portance  $F_y$  est proportionnelle à la circulation  $\Gamma$ .

Dans un fluide de faible viscosité une circulation  $\Gamma$  peut être engendrée par une rotation du cylindre. Dans un fluide idéal il n'existe aucune méthode pour Déterminer  $\Gamma$ .

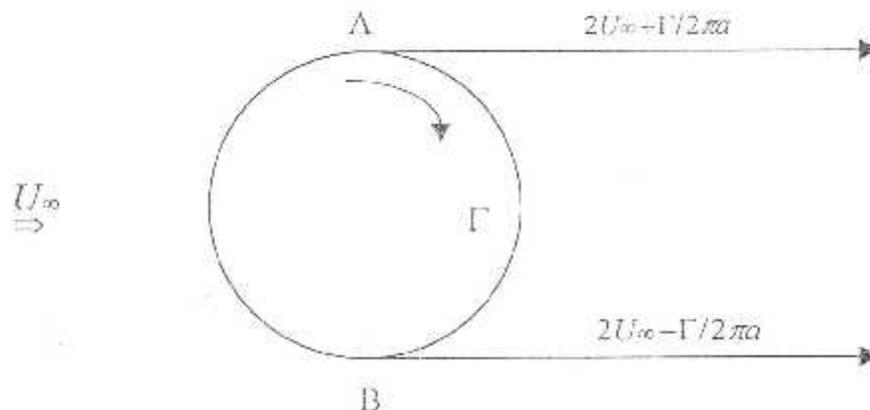


Figure (I-22) : Différence de vitesse tangentielle aux points A et B liée à la circulation  $\Gamma$ ,  $0 < \Gamma < 4\pi a U_{\infty}$

### I-5\ Forces agissant sur un corps fermé dans un écoulement stationnaire

(théorème de Kutta –Joukowsky et le paradoxe d'Alembert) :

Les forces agissant sur un corps peuvent être déduites de l'étude de l'équation intégrale de la quantité de mouvement. Par exemple pour un corps tridimensionnel le volume de contrôle est limité d'une part à l'extérieur par une surface  $S_e$  constituée d'une grande sphère de rayon  $R$  centrée sur le corps, et d'autre part à l'intérieur par une surface  $S_i$  enveloppant le corps lui-même (FIG.23). Ayant ainsi exclu le corps du volume de contrôle, il faut introduire une force  $-F$  qui représente la force exercée par le corps sur le volume de contrôle. On obtient dans la direction  $j$  :

Sur la surface  $S$  les variables :

$$v_x \cdot v \cdot n = v_r \quad \text{et} : \quad p \cos(n,x) = p \cos\theta$$

s'expriment par les relations :

$$v_x = U_\infty + O(R^{-3}), \quad v_r = U_\infty \cos\theta + O(R^{-3}) \quad \dots (I-83)$$

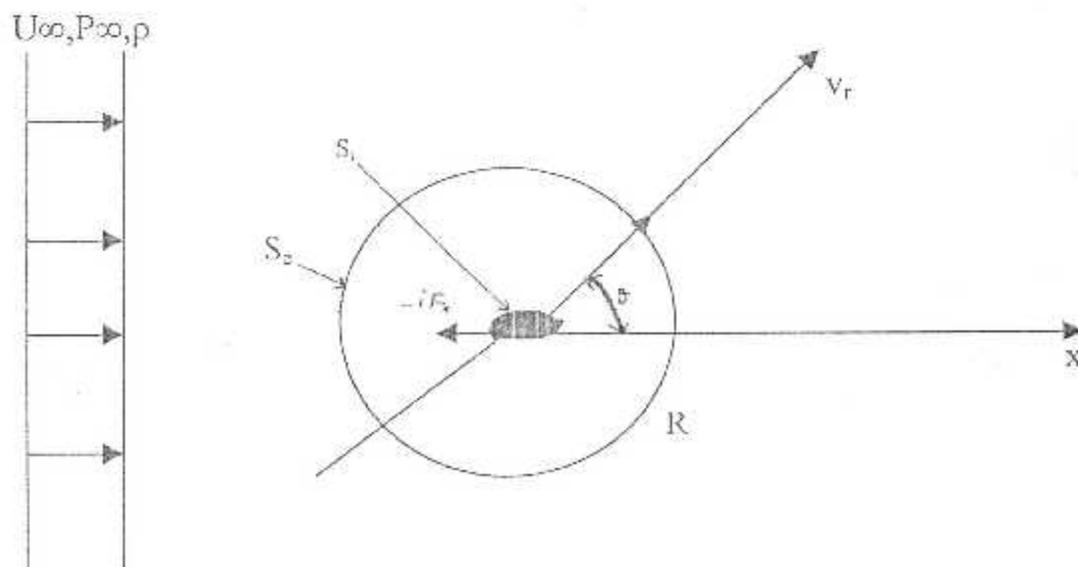
et :

$$p = p_\infty + O(R^{-3}) \quad \dots (I-84)$$

tandis que :

$$ds = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\omega \quad \dots (I-85)$$

Les intégrales contenant  $U_\infty$ ,  $p_\infty$  s'annulent sur la surface  $S_e$ , et celles contenant les termes  $O(R^{-3})$  tendent vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini.



Figure(I-23) : Evolution de la force de traînée sur un corps tridimensionnel

Par conséquent la force s'exerçant sur un corps arbitraire qui se Meut dans un fluide incompressible et idéal à vitesse constante selon une trajectoire rectiligne est égale à zéro, pourvu que  $\Gamma = 0$ .

Cette conclusion constitue le paradoxe d'Alembert.

L'explication physique de ce résultat est la suivante :

La puissance mécanique  $U \propto F_x$  fournie pour une force de résistance doit être transformée au sein de fluide soit en chaleur, soit en énergie Cinétique. Cela représenterait un débit continu d'énergie vers l'infini ; Dans le premier cas, par un transport en aval de l'anergie interne croissante Du fluide ; dans le deuxième cas par un transport d'énergie cinétique sous forme de mouvement ondulatoire.

Cependant, nous avons présupposé que dans un écoulement idéal aucun mécanisme de dissipation d'énergie ne puisse exister ; il en est de même en ce qui concerne les phénomènes ondulatoires dans un fluide incompressible détendue infinie. De ce faite la force  $iF_x$  ne peut pas exister .

Par contre , le paradoxe d'Alembert ne s'applique pas en présence d'un mécanisme de transport d'énergie ou de quantité de mouvement .

Par exemple , des ondes de surface peuvent être engendrés à la surface libre d'un fluide incompressible idéal. Celles-ci sont susceptibles de transporter de l'énergie et de la quantité de mouvement vers l'infini .Par conséquent, les ondes de surface sont liées à une force de traînée .

Il s'avère des considérations précédentes , que la force totale Résultante s'exerçant sur deux corps , situés ensemble dans un Ecoulement idéal , est nulle à condition que le paradoxe d'Alembert Soit applicable pour chacun des corps pris isolément dans ce même Ecoulement .Ceci n'exclut pas toutefois l'existence de forces non Nulles s'appliquant individuellement sur chacun des éléments placés ensemble dans l'écoulement .

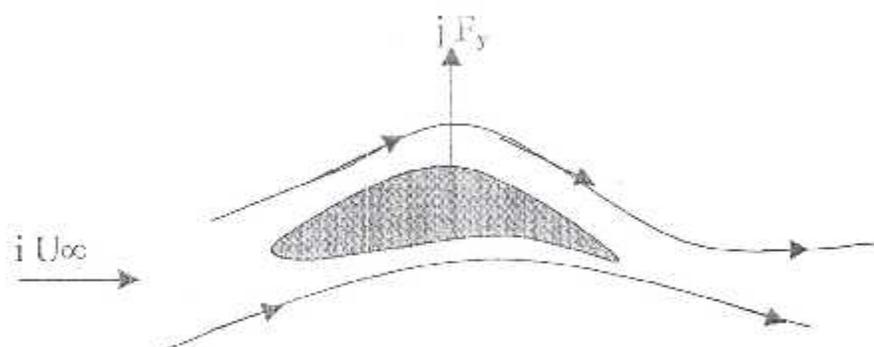
Dans le cas des corps cylindriques le paradoxe d'Alembert N'est valable que si la circulation  $\Gamma$  autour du cylindre est égale à Zéro .Dans le cas contraire , c'est -à-dire quand  $\Gamma \neq 0$ , le terme le plus Grand dans le développement asymptotique de la

vitesse perturbée selon (I-37) devient  $\Gamma/2\pi r$ . La contribution de ce terme est telle que :

la force résultante sur une section arbitraire du cylindre vaut par unité de longueur

$$R = j F_y = j \rho U_\infty \Gamma \quad \dots (I-86)$$

La force  $jF_y$  de direction perpendiculaire à  $iU_\infty$  (FIG.24) ne contribue pas à la production d'énergie dans l'écoulement. Le résultat selon (I-86) forme la théorie de Kutta-Joukowski qui fournit la base de la théorie de l'aile portante dans un écoulement incompressible idéal.



Figure(I-24): Portance  $F_y$  selon Kutta -Joukowski

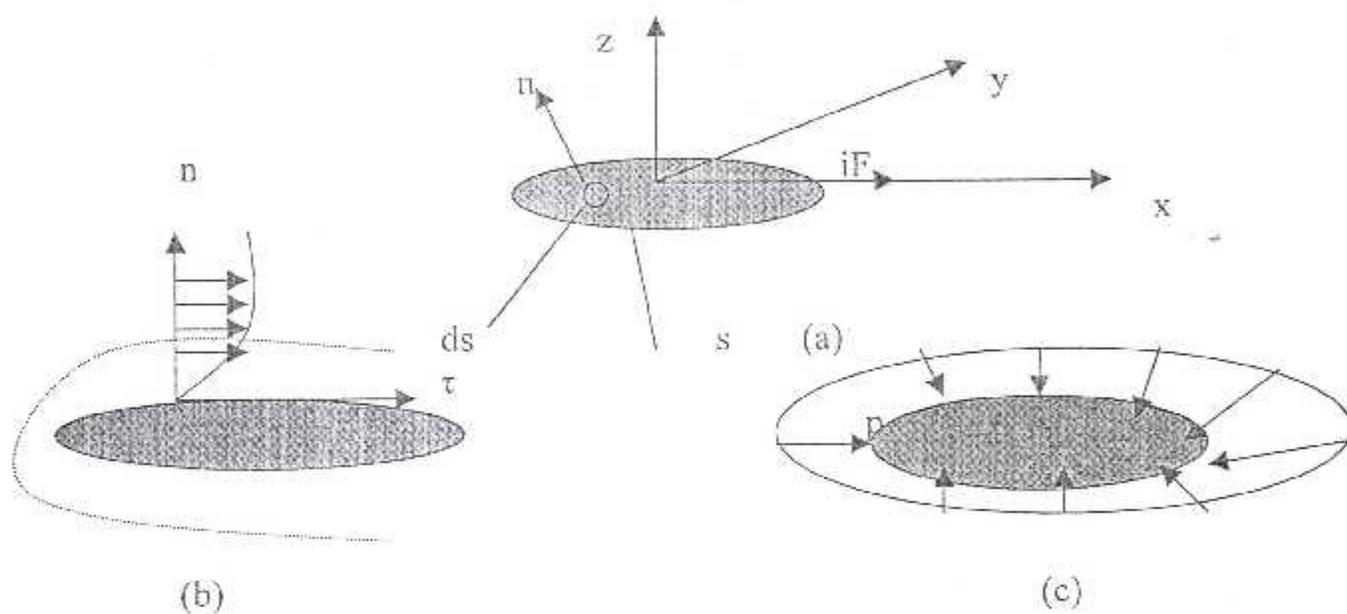
Le paradoxe d'Alembert n'est valable que pour les écoulements stationnaires d'un fluide incompressible. Dans le cas de mouvements accélérés, des forces positives ou négatives peuvent se traduire même dans un fluide idéal.

Le paradoxe d'Alembert ne s'applique plus pour un fluide visqueux.

Des forces tangentielles se produisent sur toute surface solide et créent une traînée de frottement. Il faut également tenir compte de forces résultant d'une distribution de pression asymétrique autour du corps considéré. Pour un écoulement incompressible, l'asymétrie provient par exemple d'un écoulement localisé sur la paroi du corps. Ce dernier type de force est dénommé traînée de pression. La force de traînée  $i F_x$  totale peut ainsi être schématiquement divisée en deux parties (FIG.25-a) qui sont :

1- la traînée de frottement causé par la contrainte de cisaillement agissant tangentiellement sur la surface du corps (FIG.25-b).

2- la traînée de pression qui est engendrée par les forces de pression agissant perpendiculairement à la surface de corps ( FIG.25 -c).



**Figure (I-25) :** force de traînée  $iF_x$  totale (a) qui se divise en deux parties, La traînée de frottement (b) et la traînée de pression (c)

## I-6\ DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES PROFILS D'AILES DANS LE DOMAINE SUBSONIQUE :

Nous traitons l'écoulement subsonique dans son ensemble .Et dans ce cadre d'étude , la définition exacte de l'écoulement subsonique suivant : Ecoulement ou en tout point de celui-ci le nombre de Mack reste inférieur à 1 ; est trop restrictive.

Elle doit être étendue aux écoulements ou le nombre de Mack devient localement supérieur à 1 , avec ou sans apparition des phénomènes irréversibles (onde de choc).

Il reste bien entendu que le nombre de Mack à l'infini amont  $M_0$  doit rester inférieur à 1 et que les zones soniques et supersoniques doivent rester toujours localisées .Cet écoulement présente de grande analogie –fluide incompressible-

qui est étudié pour des raisons simplificatrices. Nous prenons aussi les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait .
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est bidimensionnel.

Pour faire l'étude d'écoulement subsonique autour d'un profil d'aile, on est amené à déterminer les coefficients aérodynamiques suivants : Le coefficient de portante, coefficient de traînée , coefficient de moment, coefficient de pression.

### a- Le coefficient de traînée :

Comme nous avons vu précédemment ,  $F_x = 0$  selon le paradoxe d'Alembert , donc

$$C_x = \frac{F_x}{0.5 * \rho * u_\infty^2} = \frac{0}{0.5 \rho * u_\infty^2} = 0 \quad \dots (I-87)$$

**b- Le coefficient de portance :**

La composante :  $F_y = \rho u_\infty \Gamma$  selon la loi de Kutta-Joukowski représente la force de portance, donc :

$$\begin{aligned} C_z &= \frac{F_y}{0.5 \rho u_\infty^2} = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{0.5 \rho u_\infty^2} \\ &= \frac{\Gamma}{0.5 u_\infty} = \frac{2\Gamma}{u_\infty} \quad \dots (I-88) \end{aligned}$$

$\Gamma$  : L'intensité de tourbillon .

**c- Le coefficient de pression :**

Pour déterminer les forces qui s'appliquent à un profil, il faut connaître la distribution de pression autour du profil. Le coefficient de pression s'écrit en général sous la forme suivante :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5 \rho_\infty u_\infty^2} \quad \dots (I-89)$$

Appliquons le théorème de Bernoulli puisque l'écoulement est incompressible :

$$p - p_\infty = \frac{0.5 \rho v^2 - 0.5 \rho u_\infty^2}{0.5 \rho u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v}{u_\infty}\right)^2 \quad \dots (I-90)$$

$v$  : la vitesse de l'avion

$u_\infty$  : la vitesse à l'infini amont

**d- LE COEFFICIENT DE MOMENT :**

Nous savons que:

$$M = \rho u_\infty \mu_y \quad \dots (I-91)$$

Alors :

$$CM = \frac{M}{0.5 \rho u_\infty^2 L^2} = \frac{\rho u_\infty \mu_y}{0.5 \rho u_\infty^2 L^2} = \frac{2 \mu_y}{u_\infty L^2} \quad \dots (I-92)$$

$L$ : la longueur caractéristique.

$\mu_y$ : l'intensité de dipôle selon  $y$ .

A decorative frame with a semi-circular top and a double-line border. Inside the frame, there are several stylized leaves. The text "Chapitre II" is centered within the semi-circular top part of the frame.

Chapitre II

# Analyse Complexe

**II-1\ INTRODUCTION :**

Ce chapitre est consacré pour étudier les transformations conformes et la théorie potentielle complexe en se basant sur l'analyse potentielle complexe .

**II-2\ ETUDE MATHEMATIQUE :**

Nous allons maintenant étudier des fonctions à valeurs complexes, définies sur le plan complexe. Il sera utile d'adopter certaines notations communes que nous maintiendrons tout au long de ce projet de fin d'étude.

**2-a\ LE DISQUE OUVERT ET LE DISQUE EPOINTE :**

Si  $r > 0$ , et si  $a$  est un nombre complexe,

$D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$  est le disque ouvert de centre " $a$ " et de rayon  $r$ .  $\bar{D}(a,r)$  en est la fermeture, et  $\dot{D}(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$  est le disque épointé de centre " $a$ " et de rayon  $r$ .

**2-b\ LA FONCTION HOLOMORPHE (ANALYTIQUE) :**

Soit " $f$ " une fonction complexe définie sur " $\Omega$ " si " $z_0$ "  $\in \Omega$  et si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe nous la noterons  $\tilde{f}(z_0)$  et l'appellerons la dérivée de " $f$ " en  $z_0$ . Si  $\tilde{f}(z_0)$  existe pour tout  $z_0$ , nous disons que " $f$ " est holomorphe (ou analytique) Sur  $\Omega$ . La classe de toutes les fonctions holomorphes sur  $\Omega$  sera notée.

**2-c\ LES POINTS REGULIERS ET LES POINTS SINGULIERS :**

Soient :  $D$  un disque ouvert, et  $B$  un point frontière de  $D$ . Le point  $B$  est dit point régulier de " $f$ " s'il existe un disque ( $D_1$ ) de centre  $B$  et une fonction  $g \in H(D_1)$  telle que :  $g(z) = f(z)$  pour tout  $Z \in D \cap D_1$ . Tout point Frontière de  $D$  qui n'est pas régulier est dit point singulier de " $f$ ".

Et, on peut dire aussi que si "f" n'est pas dérivable en un point on dit que ce point est un point singulier.

### 2-d) DEVELOPPEMENT EN SERIE DE LAURENT :

Une fonction "f" définie dans  $\Omega$  est développable en série entière dans  $\Omega$  si à tout disque  $D(a,r) \subset \Omega$  correspond une série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

qui, pour tout  $z \in D(a,r)$  converge vers  $f(z)$ .

### THEOREME :

Si "f" est représentable en série entière dans  $\Omega$ , alors  $f \in H(\Omega)$  et  $\tilde{f}$  est également représentable en série entière dans  $\Omega$ . En fait, si l'on a pour  $z \in D(a,r)$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n \quad \text{Pour } z \in D(a,r),$$

on a aussi :

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n * C_n(z-a)^{n-1}$$

### 2-c) THEOREME DE CAUCHY :

Considérons une région simplement connexe, où  $f(z)$  est holomorphe considérons aussi :  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  dont  $z_0$  est un point arbitraire, une fonction analytique sauf en ( $z=z_0$ ).

\* Pour une courbe fermée  $C_0$  ne contenant pas  $z_0$ :

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$$

\* Pour une autre courbe fermée  $C_1$  contenant  $z_0$ :

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i * f(z_0)$$

On démontre que :  $\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i * f(z_0)$

Ce qui implique :  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

Donc pour une section simplement connexe et si  $f(z)$  est holomorphe :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

### 2-f\ THEOREME DES RESIDUS :

Considérons une fonction analytique développable en série entière comme

suit :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Cette Expression conduit à :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} f(z) dz = C_1 = \text{Res}(f, a)$$

La quantité " $C_1$ " est appelée résidus de  $f$  en  $a$ .

### THEOREME :

Ce théorème est donné par :

L'intégrale d'une fonction analytique  $f(z)$  autour d'une courbe " $C$ " arbitraire fermée est égale à la somme des résidus de la fonction  $f(z)$  aux points singuliers :

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a)$$

### 2-g\ LES TRANSFORMATIONS COURANTES :

Soit  $a, b$  des nombres complexes, par définition, les transformations courantes sont :

- 1- translation :  $Z \longrightarrow Z + b$
- 2- Rotation :  $Z \longrightarrow a * Z, |a|=1$
- 3- Homothéties :  $Z \longrightarrow r * Z, r > 0$
- 4- Inversion :  $Z \longrightarrow 1/Z$

Les trois premières transformations, transforment évidemment les droites en droites et les cercles en cercles. Ceci est fait pour le type (d). Mais si nous appelons  $F$  la famille des droites et des cercles, cette famille  $F$  est alors inversée par (d).

### 5- LA TRANSFORMATION CONFORME :

Tout nombre complexe  $Z \neq 0$  détermine une direction à partir de l'origine, elle est définie par le point du cercle unité

$$A[Z] = \frac{Z}{|Z|}$$

Soit " $f$ " une application définie sur un domaine  $\Omega$  et à valeurs dans le plan, et supposons que  $Z_0$  ait un voisinage pointé  $D'(Z_0; r) \subset \Omega$  sur lequel

$$f(z) \neq f(z_0).$$

On dit que  $f$  conserve les angles en  $Z_0$  si :

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-i\theta} * A * [f(Z_0 + r e^{i\theta}) - f(Z_0)] \quad r > 0$$

existe et indépendante de.

Dans un langage moins précis, la condition signifie que pour deux rayons quelconques  $L'$  et  $L''$ , issus de  $z_0$ , l'angle que leurs images  $f(L')$  et  $f(L'')$  font en  $f(Z_0)$  est le même que celui fait par  $L'$  et  $L''$  (du point de vue de la taille et de l'orientation).

La propriété de conserver les angles en tout point d'un domaine est caractéristique des fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas dans ce domaine. On appelle ça : *Une transformation conforme* et on va détailler cette transformation dans le sous chapitre qui suit et que notre modeste travail est basé sur ça.

## II-3\ LA THEORIE POTENTIELLE COMPLEXE :

### 3-A\ EQUATION DE CAUCHY-RIEMANN :

Pour l'écoulement irrotationnel et incompressible dans le plan XY, on peut introduire le potentiel  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$  tels que :

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad U_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \dots (1)$$

L'écoulement plan peut aussi s'étudier avec la variable complexe  $Z = x + iy$  dans le plan complexe on définit alors un potentiel complexe  $F(X, Y)$  par :

$$F(x, y) = \Phi(x, y) + i * \Psi(x, y) \quad \dots (2)$$

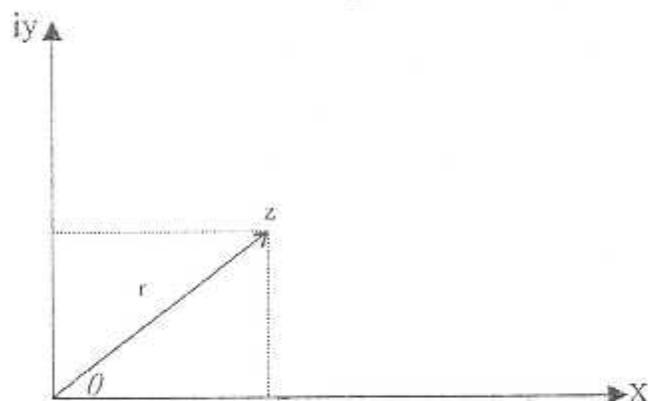
et on pose la question s'il est possible d'écrire  $F(x, y)$  sous la forme :

$$F(x + iy) = F(z) \quad \dots\dots (3)$$

La variable complexe  $z$  s'exprime par les relations :

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r * (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Où " $r$ " et " $\theta$ " représentent le module de l'argument du vecteur " $z$ " tel que :



Figure(II-1) : représentation d'un nombre complexe  $z$ .

Représentation d'un nombre complexe par la variable.

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |Z| \quad \text{et} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} = \arg Z \quad \dots\dots (5)$$

La variable  $z$  représente une combinaison du couple de coordonnées " $x$ " et, Ainsi la dérivée de la fonction par rapport à " $x$ " et " $iy$ " respectivement doivent être égales pour que (3) soit possible :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial(iy)} \quad \dots\dots (7)$$

c'est à dire que selon ( 2) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i} * \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \dots\dots (8)$$

Il s'en suit que " $F$ " est une fonction de " $z$ " pourvu que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \dots\dots (9)$$

En comparant avec (1) cette condition est vérifiée. Les relations (9) et la condition supplémentaire que les dérivées partielles existent et soient continues constituent la condition de Cauchy-Riemann pour qu'une fonction complexe  $F = \Phi + i * \Psi$  soit analytique.

Les équations (9) sont aussi appelées équation de *Cauchy-Riemann*.

Ce résultat est très important car il montre que chaque fonction analytique, telle qu'elle soit, représente un écoulement plan tel que la partie réelle de  $F(z)$  correspond au potentiel " $\Phi$ " et la partie imaginaire correspond à la fonction de courant " $\Psi$ " de cet écoulement.

### 3-B \ LA VITESSE COMPLEXE :

Le vecteur vitesse dans le plan complexe s'écrit. Néanmoins la vitesse complexe conjuguée  $v_x - i * v_y$  est dénommée la vitesse complexe  $w(z)$ , celle-ci est évaluée à partir de la dérivée :

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = F'(z) = v_x - i * v_y \quad \dots (10)$$

Où  $F'(z)$ , par analogie à celle d'une fonction réelle, est définie par :

$$F'(z) = \frac{dF}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \quad \dots (11)$$

Il y a toutefois une grande différence entre une fonction d'une variable complexe et une fonction d'une variable réelle. Dans le plan complexe il est possible de s'approcher d'un point  $z$  à tous les côtés.

Pour que  $\frac{dF}{dz}$  reste une fonction univoque, il faut que la limite de (11) soit indépendante de la direction de  $(\Delta z)$ . La définition d'une fonction analytique  $F(z)$ , qui vérifie les équations (9), équivaut à la condition de  $\frac{dF}{dz}$  existe et soit univoque dans tout le plan complexe.

La dérivée selon (10) est donc indépendante de la direction selon  $(dz = dx + i * dy)$ .

On peut ainsi utiliser la dérivée  $\delta F/\delta x$  ou  $\delta F/\delta y$  conjointement avec (2) et (1) pour calculer  $\frac{df'}{dz}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{dF}{dz} * \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \\ &= v_x - i * v_y \\ &= \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -i \frac{\partial f'}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial (iy)} \quad \dots\dots (12) \end{aligned}$$

La vitesse complexe  $w(z)$  peut aussi se représenter en fonction de  $v_r$  et  $v_\theta$ , par une différentiation radiale de  $F(z)$  avec  $\theta = \text{Constant}$  et  $dz = \exp(i\theta)dr$  on obtient :

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} + i \frac{\partial V}{\partial r} \right) * e^{-i\theta} = (v_r - iv_\theta) * e^{-i\theta} \quad \dots\dots (13)$$

La multiplication du vecteur  $v_x - iv_y$  par  $e^{+i\theta}$  correspond à une rotation de l'angle  $\theta$  de ce même vecteur contre le sens des aiguilles d'une montre dans le plan complexe.

L'équivalence des deux expressions (12) et (13) est donc évidente ( FIG 2 )

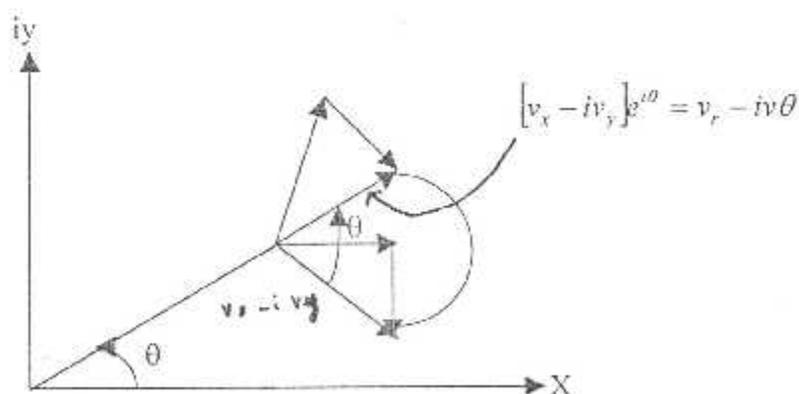


Figure 2 : rotation de la vitesse complexe  $w(z)$  d'un angle  $\theta$

### 3-C\ LA CIRCULATION COMPLEXE $\Gamma$ :

La circulation complexe est définie par :

$$\Gamma = \int_C w(z) dz$$

où C est une courbe arbitraire mais fermée. Par un développement de l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned} \int_C w(z) dz &= \int_C (v_x - i v_y) (dx + i dy) \\ &= \int_C (v_x dx + v_y dy) + i \int_C (v_x dy - v_y dx) \\ &= \int_C v dr - i \int_C \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) \\ &= \Gamma + i \int_C d\Psi = \Gamma + i \varphi \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

où

$\varphi$  : représente l'intensité totale des sources.

$\Gamma$  : la circulation totale des tourbillons à l'intérieur de la courbe. Si la valeur de " $\Gamma$ " est non nulle on déduit que la fonction  $F(z)$  est non univoque.

### 3-D\ LES ECOULEMENTS POTENTIELS BIDIMENSIONNELS

#### ELEMENTAIRES :

L'utilisation des variables complexes est une technique très pratique dans l'étude des écoulements potentiels bidimensionnels, le tableau ci dessous donne le potentiel complexe  $f(z)$  et la vitesse complexe  $w(z)$  des écoulements élémentaires avec des singularités passées à l'origine :

Les écoulements	$f(z)$	$w(z)$
Ecoulement uniforme dans une direction arbitraire	$\Lambda * z$	$\Lambda$
Ecoulement autour d'un angle $\alpha$	$\Lambda * z^n$ $\Lambda$ réel, $n > 1$	$\Lambda * n z^{n-1}$
Source placée à l'origine de débit : $q = 2 * \pi * A$	$\Lambda * \log(z)$ $\Lambda$ réel	$A / z$
Tourbillon placé à l'origine de circulation : $\Gamma = 2 * \pi * B$	$B * \log(z)$ $B$ réel $> 0$	$B / z$
Doublet placé à l'origine de la direction des abscisses	$\Lambda / z$ $\Lambda$ réel $> 0$	$\Lambda / z^2$

Tableau 1 : écoulements élémentaires

### E\ LES RELATIONS DE BLASIUS :

Sous la base de la conservation de quantité de mouvement que Blasius a obtenu la force et le moment sur une section arbitraire, sont :

#### 1- L'EXPRESSION DES FORCES :

Considérons un écoulement stationnaire au tour d'un cylindre de section "C" au contour fermé mais arbitraire. Nous voulons déterminer les forces  $iF_x$  et  $jF_y$  qui s'appliquent au cylindre, ainsi que le moment  $M$  au tour de l'origine en utilisant la théorie des variables complexes; Nous obtenons la Figure :

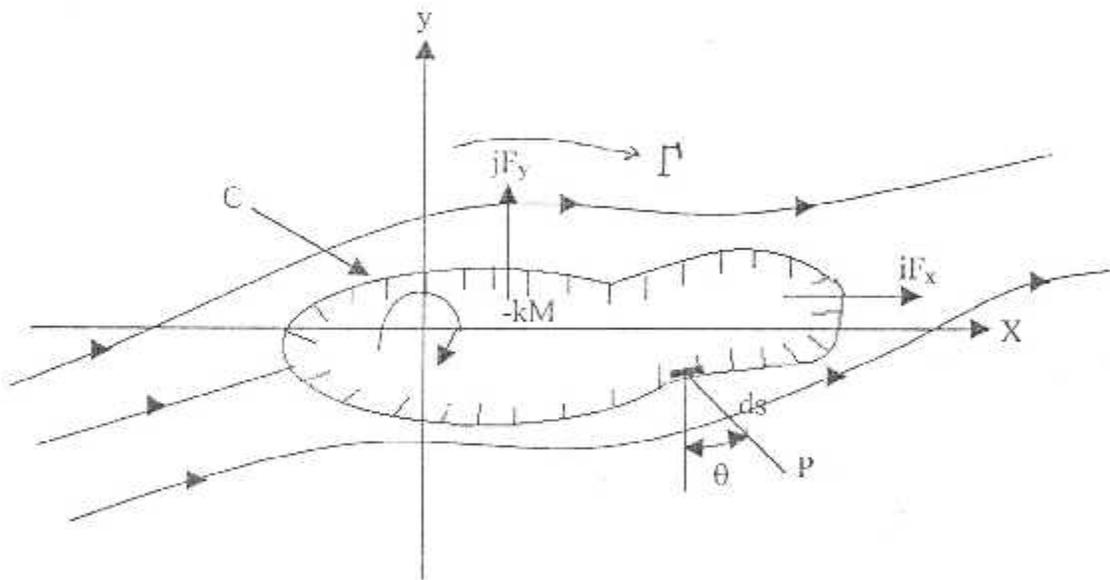


Figure 3 : Ecoulement autour d'un cylindre de section C arbitraire

On a :

$$F_x = - \int_c p \cos(n, x) ds = - \int_c p ds \sin \theta = - \int p dy$$

$$F_y = - \int_c p \cos(n, y) ds = \int_c p ds \cos \theta = \int p dx$$

d'où :

$$F_x - i F_y = -i \int_c \rho (dx - i dy) = -i \int_c p \bar{dz}$$

Selon Bernoulli, la pression sur la surface du cylindre est donnée par :

$$p = p_0 - 0.5 \rho (v_x^2 + v_y^2) C$$

où :

$$(v_x^2 + v_y^2)_c = [(v_x - i v_y)(v_x + i v_y)]_c = (w \bar{w})_c$$

Etant donné que  $P_0$  ne contribue pas aux intégrales, nous obtenons :

$$F_x - i F_y = i \cdot 0.5 \rho \int_c w \bar{w} dz$$

Dans cette formule:

$$\begin{aligned} \bar{w} dz &= (v_x + i v_y)(dx - i dy) = v_x dx + v_y dy - i(v_x dy - v_y dx) \\ &= d\Phi - i d\Psi \end{aligned}$$

En comparant avec  $w dz = d\Phi + i d\Psi$  et sachant que la courbe "c" est une ligne de courant sur laquelle, on peut écrire :

$$(\bar{w} dz)_c = (w dz)_c$$

Nous obtenons finalement

$$F_x - i F_y = i \cdot 0.5 \rho \int_c w^2 dz$$

## 2- L'EXPRESSION DE MOMENT :

De la même manière précédente, on calcule le moment -KM selon la figure (2) :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_c \rho ds (-x \cos \theta - y \sin \theta) = - \int_c \rho (x dx + y dy) \\
 &= 0.5 * \rho * \int_c (v_x^2 + v_y^2) * (x dx + y dy) \\
 &= 0.5 * \rho * \operatorname{Re} \left( \int_c w \bar{w} z dz \right) \\
 &= 0.5 * \rho * \operatorname{Re} \left( \int_c w^2 z dz \right)
 \end{aligned}$$

Re : indique la partie réelle de l'intégrale.

Les intégrales complexe dans ces formules peuvent être évaluées le long de n'importe quelle courbe "c" qui entoure le cylindre, pourvu qu'il n'y ait pas d'autres singularités présentes entre la courbe "c" et le cylindre les formules ainsi établies sont dénommées les formules de **BLASIUS**.

## F - EXEMPLE : Écoulement autour d'un cylindre de section arbitraire :

Comme application nous calculons les forces et le moment sur un cylindre de section arbitraire mais se un tour fermé dans un écoulement plan, parallèle et homogène. Dans ce cas le potentiel complexe  $F(z)$  peut être exprimé sous forme d'un développement selon Laurent au tour de l'origine :

$$F(z) = u_\infty z + A * \ln z + B * z^{-1} + c * z^{-2}$$

D'où :

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = u_\infty + \frac{A}{z} - \frac{B}{z^2} - \frac{2c}{z^3} + \dots$$

Les coefficients A, B, C, etc, sont en générale complexe selon la dernière équation, l'écoulement devient homogène et parallèle par  $z \rightarrow \infty$ . Les coefficients A et B sont exprimés par les relations :

$$A = i \frac{\Gamma}{2 * \pi} \quad , \quad B = - \frac{l}{2 * \pi} (\mu_x + i \mu_y)$$

Etant donnée que l'intensité totale des sources est nulle pour un corps fermé, la constante 'A' est exprimée uniquement en fonction de 'Γ' représentant la somme des intensités des tourbillons. De même 'B' représente l'intensité et la direction des dipôles à l'intérieure du cylindre. Le signe de 'Γ' est choisi à fin d'obtenir une circulation dans le sens des aiguilles d'une montre. On obtient :

$$\begin{aligned} Fx - iFy &= i * 0.5 * \rho * \int_C (u_{\infty} + i \frac{\Gamma}{2\pi z} + \dots)^2 dz \\ &= i * 0.5 * \rho * \int_C 2 * u_{\infty} * i * \frac{\Gamma}{2\pi z} dz \\ &= i * 0.5 * \rho * u_{\infty} * i * \frac{\Gamma}{2\pi} * 2\pi i = i \rho u_{\infty} \Gamma \end{aligned}$$

d'où :

$$Fx = 0 \text{ et } Fy = \rho * u_{\infty} * \Gamma$$

La composante 'Fy' exprime, comme prévu, la loi selon Kutta-Joukowski, et la composante 'Fx' exprime le paradoxe D'Alembert.

Pour le moment, on obtient le résultat :

$$\begin{aligned} M &= 0.5 * \rho * \operatorname{Re} \int_C (u_{\infty} + i \frac{\Gamma}{2\pi z} - \frac{B}{z^2} - \dots) z dz \\ &= 0.5 * \rho * \int_C \frac{2u_{\infty} * i * \mu_y}{2\pi B} dz = -\rho u_{\infty} \mu_y \end{aligned}$$

Nous voyons que le dipôle ne donne une contribution au moment, que si sa direction est différente de i. Pour calculer les forces et le moment, on a donc besoin de connaître seulement les coefficients 'A' et 'B' dans le développement selon Laurent.

## II-4\ LES TRANSFORMATIONS CONFORMES :

### a- DEFINITION ET FORME GENERALE :

Soient deux plans ( $Z$ ) et ( $\zeta$ ) et une transformation univoque de  $Z \rightarrow \zeta(z)$  qui est à chaque point du plan ( $z$ ) correspond un point du plan  $S$  dont la fonction  $\zeta = \zeta(z)$  est analytique de manière que ' $\zeta'$ ' est en fonction de ' $\xi'$ ' et ' $\eta'$ '. Soit ( $Cz$ ) l'image de la courbe ( $Cz$ ) dans le plan ( $S$ ), et ( $Cs'$ ) l'image de la courbe ( $Cz'$ ) dans plan ( $\zeta$ ) passant par le point  $z$  et coupant par l'angle ' $\alpha'$ '.

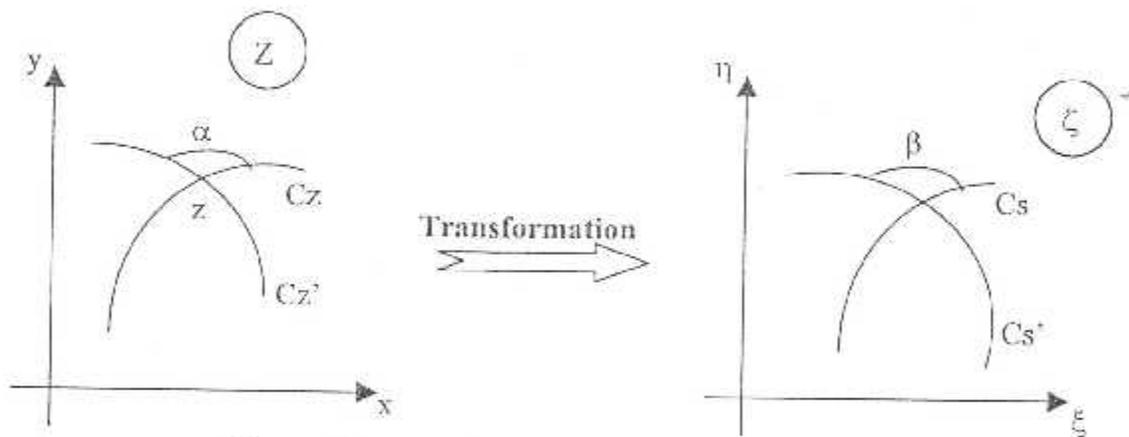


Figure 04 : transformation conforme

Si, l'angle entre les deux courbes passant par le point  $z$  pour lequel  $d\zeta/dz \neq 0$  est préservé en générale en gardant le même sens, la transformation est dite :

**transformation conforme**, cette transformation doit vérifier les conditions de Cauchy-Reimann quand a déjà parler précédemment, et le point on a  $d\zeta/dz = 0$  c'est un point critique de la transformation.

Le principe étant de rechercher la transformation qui transforme le contour de l'obstacle en un contour plus simple pour lequel on sait calculer le potentiel complexe ou l'écoulement.

Supposons qu'un écoulement est donné le plan, défini par un potentiel complexe  $F(z)$  par la transformation,  $z$  est défini comme une fonction inverse de  $S$ , et nous pouvons écrire :

$$F(z) = F(z(\zeta)) \equiv G(\zeta)$$

La fonction analytique  $G(\zeta)$  définit ainsi un écoulement dans le plan. Les lignes équipotentielles et les lignes de courant de l'écoulement original dans le plan  $z$  sont transformées et prennent des formes différentes dans le plan. Cela découle directement de l'équation précédente et de la définition du potentiel  $F(z)$  :

$$F(z) = \Phi(x, y) + i * \Psi(x, y) = G(\zeta) \\ = \Phi(\xi, \eta) + i * \Psi(\xi, \eta) *$$

Cela peut se démontrer pour le développement de  $\xi(z)$  en une série de Taylor autour du point  $z = z_0$  :

$$\xi - \xi_0 = (z - z_0) \left. \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=z_0} + \zeta''(z_0) \dots\dots\dots (*)$$

Par l'utilisation des coordonnées polaires  $r\theta$  et  $s\theta$  aux points ' $z_0$ ' et ' $\xi_0$ ' dans les plans  $Z$  et  $\zeta$  respectivement l'équation précédente prend la forme suivante :

$$S * e^{i\theta} = r * e^{i\theta} * \zeta''(z_0)$$

La dérivée  $\xi'(z_0)$  représente le nombre complexe fixe et l'application de la dernière formule aux éléments  $\Delta r_1, \Delta r_2$  et  $\Delta s_1, \Delta s_2$  selon la figure donnée :

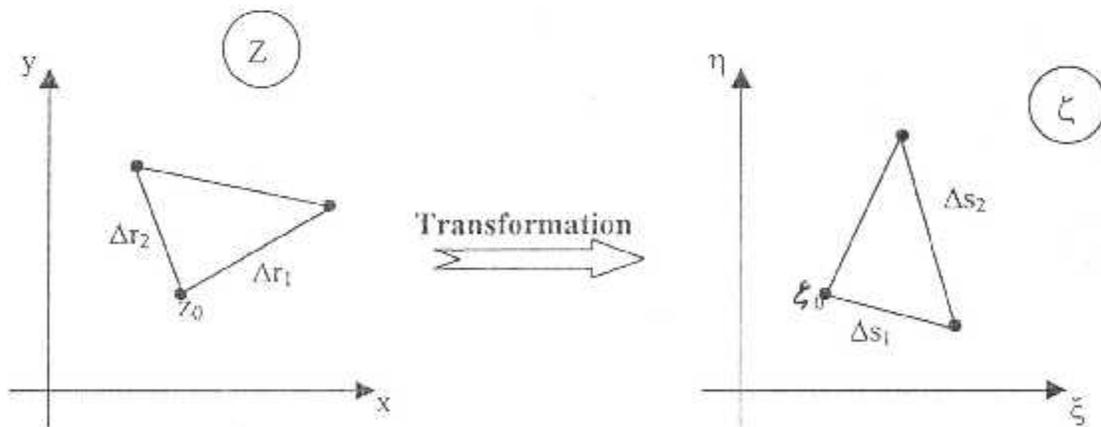


Figure 5 : triangles semblables dans les plans  $Z$  et  $\zeta$  respectivement

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} e^{j(v_1 - v_2)} = \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

C'est à dire que :

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} \quad \text{et} : \quad v_1 - v_2 = \theta_1 - \theta_2$$

et les triangles sont semblable aux limites quand  $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta s_1, \Delta s_2 \longrightarrow 0$

Dans le cas ou  $\zeta(z_0)$  est nulle ou infinie la démonstration n'est pas valable. En ces points, la transformation est singulière. Si par exemple  $\tilde{\zeta}(z)$  a la forme :

$$\tilde{\zeta}(z) = (z - z_0)^n c$$

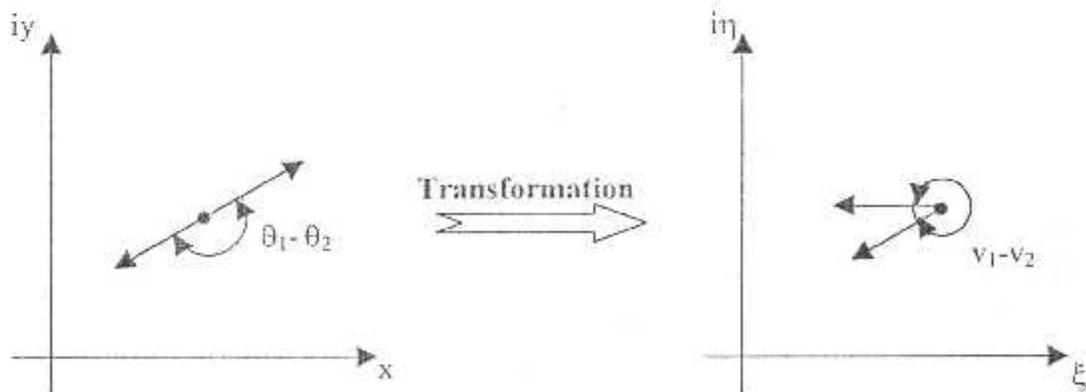
Autour du point  $z_0$ , c'est à dire au point zéro d'ordre  $n$ , l'équation (\*) peut être remplacées par :

$$\xi - \xi_0 = (z - z_0)^{n+1} c$$

Où 'c' représente un nombre complexe fixe, on obtient ainsi :

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \left[ \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} \right]^{n+1} \quad \text{et} \quad v_1 - v_2 = (n+1) * (\theta_1 - \theta_2)$$

Pour  $n=1$  l'angle  $(\theta_1 - \theta_2)$  sera doublé dans le plan ' $\xi$ '. En générale une courbe qui passe par  $z_0$  dans le palan  $Z$  est transformée en un dièdre dans le plan  $\xi$  :



**Figure 6:** Courbe continue passant par un point zéro dans le plan  $z$  et son image dans le plan  $\xi$ .

Dans la littérature, on trouve plusieurs transformations à savoir, la transformation la plus connue et la plus simple est celle de Joukowski.

### b- LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKY :

La transformation de Joukowski est donnée par :

$$Z(\zeta) = \zeta + C^2 / \zeta.$$

Elle nous permet de générer les profils d'ailes dits de Joukowski et joue aussi un rôle important dans plusieurs théories d'approximation du profil d'aile.

Les propriétés de la transformation de Joukowski sont :

- ✓ Les points ( $\zeta = \pm C$ ) se transforment en deux points  $z = \pm 2C$ .
- ✓ Le cercle  $\zeta = Ce^{i\theta}$  se transforme en un segment de l'axe réel tel que :  $-2C \leq \zeta \leq +2C$
- ✓ Pour un cercle  $\zeta = re^{i\theta}$  la transformation de Joukowski donne :

$$x = \left(r + \frac{C^2}{r}\right) * \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \left(r - \frac{C^2}{r}\right) * \sin \theta$$

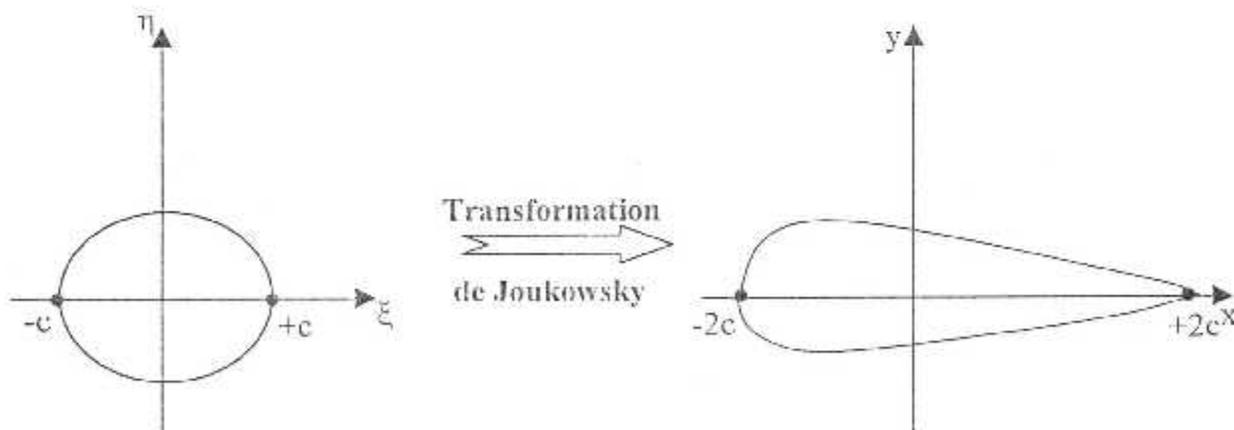


Figure 7 : Transformation de Joukowski

Si le cercle est de rayon  $r = r_0$  et  $\theta$  arbitraire, on trouve :

$$\frac{x^2}{\left(r_0 + \frac{c^2}{r_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r_0 - \frac{c^2}{r_0}\right)^2} = 1$$

c'est l'équation d'une ellipse avec  $x = \pm 2C$

Si  $\theta = \theta_0$  en éliminant  $r$  dans les équations précédentes :

$$\frac{x^2}{(2 * C * \cos \theta_0)^2} + \frac{y^2}{(2 * C * \sin \theta_0)^2} = 1$$

C'est l'équation d'une hyperbole avec les foyers  $x = \pm 2C$

### C- LA TRANSFORMATION DE VON-KARMAN TREFFITZ:

La génération de Joukowski pour les profils de Joukowski se trouve au problème de bord de fluide qui est considéré comme nul, alors que dans la pratique l'angle  $\tau$  de bord de fuite est différent de zéro ( $\tau \neq 0$ ) par conséquent, cette nouvelle transformation donnée par Von Karman - Trefftz est :

$$\frac{Z - nC}{Z + nC} = \frac{(S - C)^n}{(S + C)^n} \quad (*)$$

$n$  : L'ordre de la dérivée non nulle de bord de fuite.

$$\text{D'après les résultats : } \tau = \pi(2-n) \Rightarrow n = \frac{2\pi - \tau}{\pi}$$

En remplaçant dans (\*) on aura :

$$\frac{z - \frac{2\pi - \tau}{\pi} \cdot c}{z + \frac{2\pi - \tau}{\pi} \cdot c} = \frac{(\zeta - c)^{\frac{2\pi - \tau}{\pi}}}{(\zeta + c)^{\frac{2\pi - \tau}{\pi}}}$$

Pour  $n=2$ ,  $\tau = \pi(2-n) = 0$ , la transformation de Karman - Trefftz devient celle de Joukowski :

$$\frac{z - 2c}{z + 2c} = \frac{(\zeta - c)^2}{(\zeta + c)^2}$$

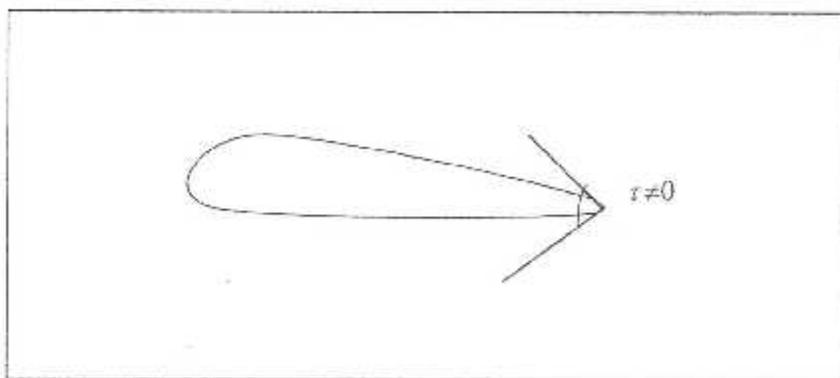


Figure 8 : Profil de Karman-Trefftz

#### D- LA TRANSFORMATION DE VON-MISES :

Les profils de Joukowski ne permettent pas de faire varier beaucoup la courbure. On peut surmonter les problèmes, en ajoutant les zéros à la dérivée de la transformation.

la transformation de Mises est définie par :

$$S = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}$$

Joukowski et Von-Karman Trefftz ont basé sur deux points singulier, où  $n$  est considéré  $> 2$ .

Cette transformation va être détaillée dans le chapitre suivant.



Chapitre III

Transformation de Von - Mises

**III-1\ INTRODUCTION :**

Les profils de Joukowski ne permettent pas de faire varier beaucoup la cambrure à partir de l'arc de cercle, en plus Joukowski a basé sur deux points singuliers celle du bord d'attaque et de bord de fuite, où Mises à considérer plus que deux, donc la transformation de Mises est une généralisation que celle de Joukowski qui présente l'inconvénient de posséder deux points singuliers. Cette transformation est donnée par :

$$Z=Z(\zeta)=\zeta+\frac{C_1}{\zeta_1}+\frac{C_2}{\zeta_2}+\dots+\frac{C_{n-1}}{\zeta_{n-1}}$$

qui va être détaillée dans ce chapitre , et qui est notre but dans ce mémoire .

**III-2\ DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DE VON-MISES :**

La transformation de Von-Mises est exprimée sous forme d'un développement selon Laurant :

$$Z=Z(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\zeta^n} \quad \dots \text{ (III-1)}$$

Cette transformation satisfait la condition à l'infini car un point à l'infini dans le plan ( $\zeta$ ) se transforme en un point à l'infini dans le plan ( $Z$ ) et la vitesse complexe  $W(Z)$  est conservée au cours de cette transformation.

Si on dérive l'équation (1) par rapport à la variable  $\zeta$  on obtient :

$$\frac{dZ}{d\zeta}=1-\frac{C_1}{\zeta^2}-\frac{2C_2}{\zeta^3}-\frac{C_3}{\zeta^4}\dots \quad \dots \text{ (III-2)}$$

**A- HYPOTHÈSE :**

Supposons que :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad \dots \text{ (III-3)}$$

$\zeta = \zeta_1, \zeta = \zeta_2, \dots, \zeta = \zeta_k$  les points  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  sont solutions de l'équation :

$$\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\zeta_k}{\zeta}\right) = \frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad \dots \text{(III-4)}$$

tel que :

$$\sum_{i=1}^k \zeta_i = 0 \quad \dots \text{(III-5)}$$

C'est la condition que les racines  $\zeta_i$  doivent satisfaire.

### B- PROCEDURE DE LA TRANSFORMATION :

1-choisir K points dans le plan ( $\zeta$ ) comme des zéro de la dérivée :

$$\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right) = 0 \quad \dots \text{(III-6)}$$

2- La transformation peut être obtenue par intégration de l'équation :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\zeta_k}{\zeta}\right) \quad \dots \text{(III-7)}$$

On obtient alors :

$$Z = Z(\zeta) = \zeta - \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{C_{k-1}}{\zeta^{k-1}} \quad \dots \text{(III-8)}$$

Les coefficients  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des complexes et sont déterminés par :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 0, \text{ pour } \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k. \quad \dots \text{(III-9)}$$

3- On doit avoir :  $\sum_{i=1}^k \zeta_i$

4- Choisir l'un des zéros comme bord de fuite  $\zeta_f$ .

5- Dessiner un cercle de centre quelconque englobant tous les zéros et passant par  $\zeta_f$ , avec un rayon  $R = |\zeta_f - C_{cer}|$ .

avec :  $C_{cer}$  est le centre du cercle.

6- En choisissant des groupes des zéros de  $\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)$  et des différents cercles on obtient une infinité de forme des profils d'aile.

Pour arriver à ces profils, on a développé une méthode de calcul pour déterminer les constantes de la transformation et par la suite la détermination des profils, passant par le chemin suivant :

• POUR DEUX POINTS CRITIQUES :

A- DETERMINATION DE LA TRANSFORMATION:

Afin de déterminer la transformation pour deux points critiques, on doit passer par les étapes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{d\zeta} &= \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \\ &= 1 - \frac{\zeta_2}{\zeta} - \frac{\zeta_1}{\zeta} + \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta^2} \\ &= 1 - \frac{(\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta} + \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta^2} \\ &= 1 - \frac{C_0}{\zeta} + \frac{C_1}{\zeta^2} \quad \dots \text{(III-10)}\end{aligned}$$

et puisque :

$$\sum_{i=1}^2 \zeta_i = 0 \quad \dots \text{(III-11)}$$

donc :

$$C_0 = 0 \quad \dots \text{(III-12)}$$

Alors :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 1 + \frac{C_1}{\zeta^2} \quad \dots \text{(III-13)}$$

d'où :

$$Z(\zeta) = \int \left(1 + \frac{C_1}{\zeta^2}\right) d\zeta \quad \dots \text{(III-14)}$$

Par conséquent la transformation prend la forme suivante :

$$Z(\zeta) = \zeta - \frac{C_1}{\zeta} \quad \dots \text{(III-15)}$$

### B- DETERMINATION DES CONSTANTES :

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux points singuliers :

$$\begin{aligned} (X_1 - X_2)(X_1 + X_2) &= X^2 - (X_1 + X_2)X + X_1 X_2 \\ &= X^2 + C_0 X + C_1 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-16)}$$

Tel que :

$$C_0 = -(X_1 + X_2) \quad \dots \text{(III-17)}$$

et :

$$C_1 = X_1 X_2 \quad \dots \text{(III-18)}$$

### • POUR TROIS POINTS CRITIQUES :

Afin de déterminer la transformation pour trois points critiques, on doit passer par les étapes suivantes :

#### A- DETERMINATION DE LA TRANSFORMATION :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\zeta} &= \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_3}{\zeta}\right) \\ &= 1 - \frac{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)}{\zeta} + \frac{\zeta_3(\zeta_2 + \zeta_1) + \zeta_1\zeta_2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_1\zeta_2\zeta_3}{\zeta^3} \\ &= 1 - \frac{C_0}{\zeta} + \frac{C_1}{\zeta^2} - \frac{C_2}{\zeta^3} \end{aligned} \quad \dots \text{(III-19)}$$

et Puisque  $C_0=0$ , alors :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \zeta + \frac{C_1}{\zeta^2} - \frac{C_2}{\zeta^3} \quad \dots \text{(III-20)}$$

done :

$$Z(\zeta) = \int \left( \zeta - \frac{C_1}{\zeta^2} - \frac{C_2}{\zeta^3} \right) d\zeta \quad \dots \text{(III-21)}$$

d'où :

$$Z(\zeta) = \zeta - \frac{C_1}{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{\zeta^2} \quad \dots \text{(III-22)}$$

**B- DETERMINATION DES CONSTANTES :**

$$\begin{aligned}
(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3) &= [X^2 - (X_1+X_2)X + X_1X_2](X-X_3) \\
&= X^3 - X_3X^2 - (X_1+X_2)X^2 + X_3(X_1+X_2)X \\
&\quad + X_1X_2X - X_1X_2X_3 \\
&= -(X_1+X_2+X_3)X^2 + [X_1(X_2+X_3) + X_2X_3]X \\
&\quad - X_1X_2X_3 \\
&= X^3 + C_0X^2 + C_1X + C_2
\end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
C_0 &= -(X_1+X_2+X_3) \\
C_1 &= X_1(X_2+X_3) + X_2X_3 \\
C_2 &= -X_1X_2X_3
\end{aligned} \quad \dots \text{(III-23)}$$

Maintenant on va généraliser le cas pour  $k$  points critiques :

**A- DETERMINATION DE LA TRANSFORMATION :**

$$Z(\zeta) = \zeta - \frac{C_1}{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{\zeta^2} - \frac{1}{3} \frac{C_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{1}{(k-1)} \frac{C_{k-1}}{\zeta^{k-1}} \quad \dots \text{(III-24)}$$

Et je peut aussi l'écrire par la manière suivante :

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{P_1}{\zeta} + \frac{P_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{P_{k-1}}{\zeta^{k-1}} \quad \dots \text{(III-25)}$$

Donc :

$$P_i = (-1)^i C_i$$

telle que :

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, k-1$$

**B- DETERMINATION DES CONSTANTES :**

Pour déterminer les constantes , on va suivre la méthode suivante :  
soit le polynôme suivant :

$$(X-X_1)(X-X_2)\dots(X-X_k) = X^k + C_0 X^{k-1} + C_1 X^{k-2} + C_2 X^{k-3} + \dots \\ + C_p X^{k-p-3} + \dots + C_{k-2} X + C_{k-1}$$

Il faut choisir  $X_i$  tel que :

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = 0$$

Et :

$$i=1,2,3,\dots,k$$

Alors , on va choisir  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{k-2}$  d'une façon arbitraire mais :

$X_k$  : c'est le point critique qui se situe au bord de fuite .

$$X_{k-1} = -(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{k-2})$$

Et puisque :  $C_0 = 0$  , le polynôme devient :

$$X^k + C_1 X^{k-2} + C_2 X^{k-3} + \dots + C_p X^{k-p-1} + \dots + C_{k-2} X + C_{k-1} \\ = (X - X_1)(X - X_2)\dots(X - X_k)$$

- Pour  $X=Z_1$  :

Il faut que :

$$Z_1 \neq (X_1, X_2, \dots, X_k)$$

On pose que :

$$d_1 = (Z_1 - X_1)(Z_1 - X_2) \dots (Z_1 - X_k) \neq 0$$

Donc :

$$Z_1^k + Z_1^{k-2} C_1 + Z_1^{k-3} C_2 + Z_1^{k-4} C_3 + \dots + Z_1^1 C_{k-2} + Z_1^0 C_{k-1} = d_1$$

- Pour  $X=Z_2$  :

Il faut que  $Z_2 \neq (X_1, X_2, \dots, X_k)$

On pose :

$$d_2 = (Z_2 - X_1)(Z_2 - X_2) \dots (Z_2 - X_k) \neq 0$$

Donc :

$$Z_2^k + Z_2^{k-2} C_1 + Z_2^{k-3} C_2 + Z_2^{k-4} C_3 + \dots + Z_2^1 C_{k-2} + Z_2^0 C_{k-1} = d_2$$

- Pour :  $X=Z_j ; j=1,2,3,\dots,k-1 :$

Il faut que  $Z_j \neq (X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$

On pose :

$$d_j = (Z_j - X_1)(Z_j - X_2)(Z_j - X_3) \dots (Z_j - X_k) \neq 0$$

Donc :

$$Z_j^k + Z_j^{k-2}C_1 + Z_j^{k-3}C_2 + \dots + Z_j^1C_{k-2} + Z_j^0C_{k-1} = d_j$$

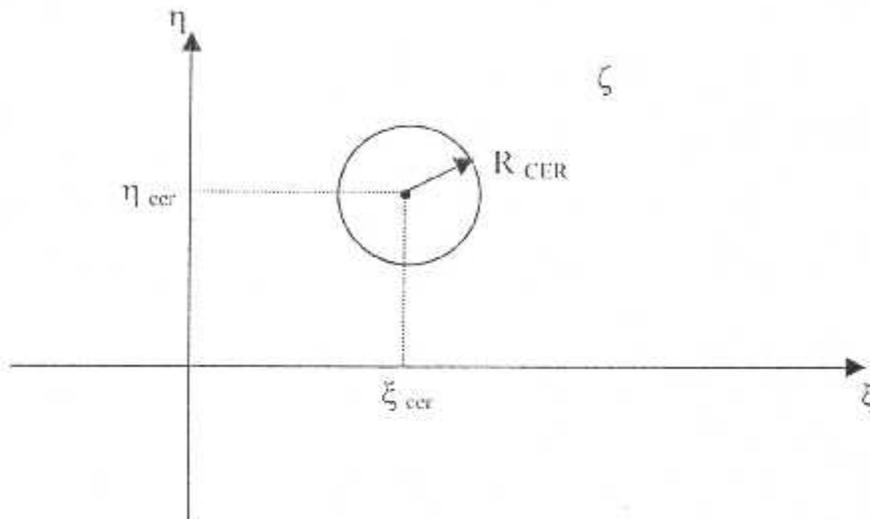
Tel que :  $j=1,2,3,\dots,k-1$

C'est la formule de récurrence, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} Z_1^{k-2} & Z_1^{k-3} & Z_1^{k-4} & \dots & Z_1^2 & Z_1^1 & Z_1^0 \\ Z_2^{k-2} & Z_2^{k-3} & Z_2^{k-4} & \dots & Z_2^2 & Z_2^1 & Z_2^0 \\ Z_3^{k-2} & Z_3^{k-3} & Z_3^{k-4} & \dots & Z_3^2 & Z_3^1 & Z_3^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_j^{k-2} & Z_j^{k-3} & Z_j^{k-4} & \dots & Z_j^2 & Z_j^1 & Z_j^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{k-1}^{k-2} & Z_{k-1}^{k-3} & Z_{k-1}^{k-4} & \dots & Z_{k-1}^2 & Z_{k-1}^1 & Z_{k-1}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ C_{k-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 - Z_1^k \\ d_2 - Z_2^k \\ d_3 - Z_3^k \\ \vdots \\ d_j - Z_j^k \\ \vdots \\ d_{k-1} - Z_{k-1}^k \end{Bmatrix}$$

### 3- ALGORITHME QUI DETERMINE LA TRANSFORMATION PAR LA METHODE DE HORNER ET L'IMAGE DE CERCLE A TRANSFORMER:

Nous avons le cercle suivant :



Figure(IV-1) : Le cercle à transformé

$\eta_{cer}$  : la partie imaginaire du centre du cercle .

$\xi_{cer}$  : la partie réelle du centre du cercle .

$R_{cer}$  : le rayon du cercle .

On divise notre cercle en NP points équidistants , tel que :

$$\Delta \theta = 2\pi / NP$$

Alors:

$$\xi_j = \xi_{cer} + R_{cer} \cdot \cos \theta_j$$

$$\eta_j = \eta_{cer} + R_{cer} \cdot \sin \theta_j$$

Tel que :

$$j=1,2,3,\dots, NP$$

et :

$$\theta_j = \Delta \theta \cdot (j-1)$$

Pour déterminer les images de ce cercle, on doit passer par la transformation suivante :

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{P_1}{\zeta} + \frac{P_2}{\zeta^2} + \frac{P_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{P_{k-1}}{\zeta^{k-1}}$$

Et pour faciliter la tâche, on va utiliser le schéma de Horner, tel que :

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta} \left( P_1 + \frac{1}{\zeta} \left( P_2 + \frac{1}{\zeta} \left( P_3 + \frac{1}{\zeta} \left( P_4 + \dots + \frac{1}{\zeta} P_{k-1} \right) \right) \right) \right) \dots$$

• **POUR TROIS POINTS CRITIQUES :**

$$K=3$$

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \zeta + \frac{P_1}{\zeta} + \frac{P_2}{\zeta^2} \\ &= \zeta + \frac{1}{\zeta} \left( P_1 + \frac{1}{\zeta} (P_2) \right) \end{aligned}$$

Donc on peut écrire l'algorithme suivant :

$$U = 0.0 + i(0.0)$$

$$U = P_2 + \frac{U}{\zeta}$$

$$U = P_1 + \frac{U}{\zeta}$$

$$Z = \zeta + \frac{U}{\zeta}$$

• **POUR QUATRE POINTS CRITIQUES :**

$$K=4$$

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \zeta + \frac{P_1}{\zeta} + \frac{P_2}{\zeta^2} + \frac{P_3}{\zeta^3} \\ &= \zeta + \frac{1}{\zeta} \left( P_1 + \frac{1}{\zeta} \left( P_2 + \frac{1}{\zeta} (P_3) \right) \right) \end{aligned}$$

Donc on va écrire l'algorithme suivant :

$$U=0,0+i(0,0)$$

$$U=P_1+\frac{U}{\zeta}$$

$$U=P_2+\frac{U}{\zeta}$$

$$U=P_1+\frac{U}{\zeta}$$

$$Z=\zeta+\frac{U}{\zeta}$$

Après on sélectionne les  $Z_j$ , tel que  $j=1,2,3,\dots,k-1$  au voisinage de  $(1+1i)$   
 Pour ne pas avoir un problème de divergence. Donc notre problème est ramené  
 A la résolution d'un système linéaire d'ordre  $(k-1)$ , et on a choisi la méthode de  
 Khaledsky pour faire cette résolution.

#### 4- ALGORITHME QUI FAIT LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATION LINEAIRE PAR LA METHODE DE KHALEDSKY :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$[A].\{C\} = \{B\}$$

tel que:

[A]: une matrice pleine symétrique.

{C} : le vecteur à déterminer.

{B} : c'est un vecteur uni-colonne.

On pose :

$$[A]=[L][H]$$

avec:

[L] :matrice triangulaire supérieure.

[H] : matrice triangulaire inférieure à diagonale unité.

Le système devient :

$$[L][H]\{C\}=\{B\}$$

On met :

$$[H]\{C\}=\{Y\}$$

et :

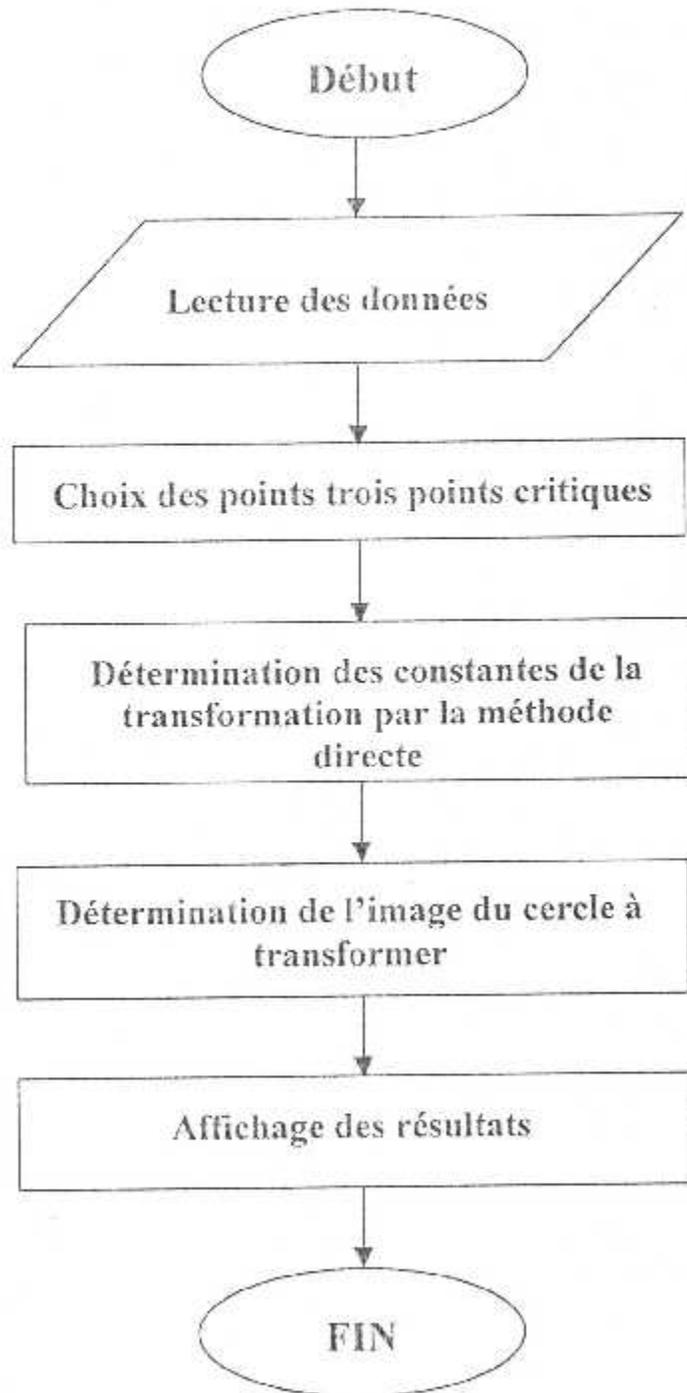
$$[L]\{Y\}=\{B\}$$

Donc la résolution de ce système se fait par l'algorithme suivant :

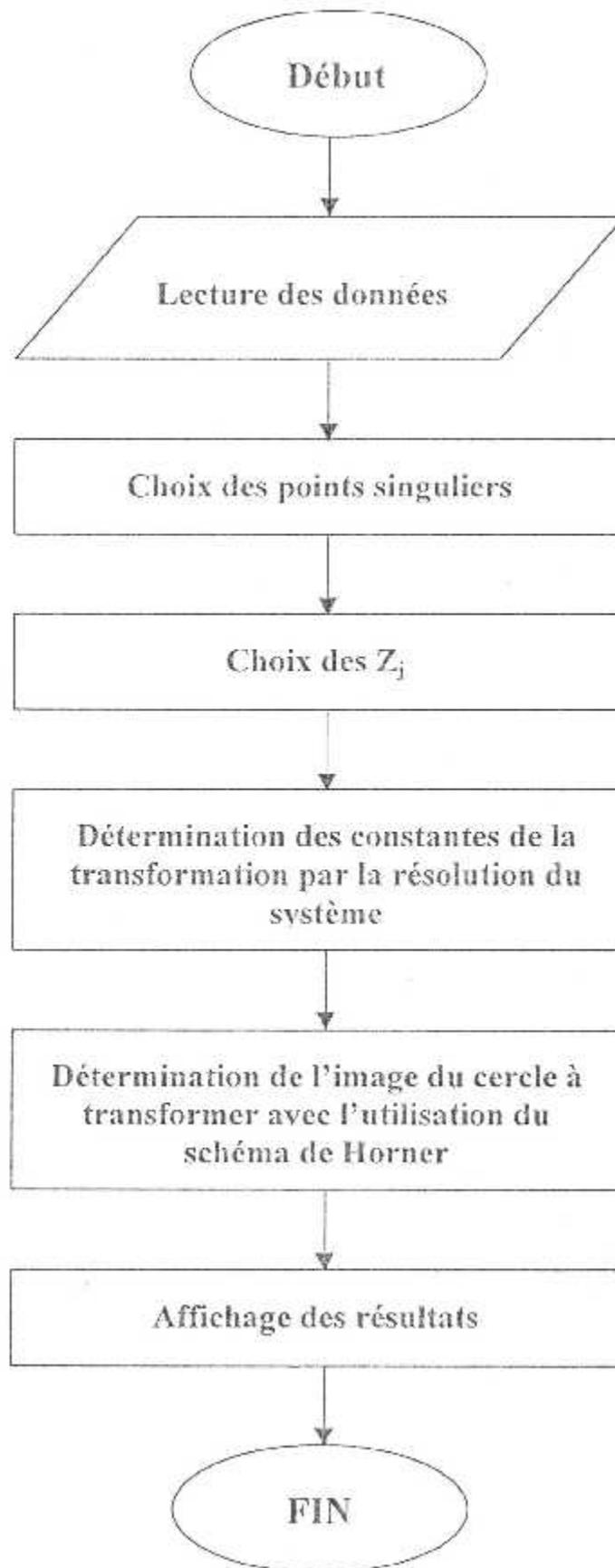
$$\begin{aligned}
 & i=1 \\
 10 \quad & L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik} - H_{kj}, j = 1, 2, \dots, i \\
 & H_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} [a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} (L_{ik} - H_{kj})], j = i+1, i+2, \dots, n \\
 & H_{ii} = 1 \\
 & i = i + 1 \\
 & \text{si } i \leq n \text{ allez à 10} \\
 & y_i = \frac{1}{L_{ii}} [b_i - \sum_{k=1}^{k=i-1} L_{ik} * y_k], i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 & x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{k=n} H_{ik} * x_k, i = n, n-1, \dots, 3, 2, 1
 \end{aligned}$$

### III-5\ REPRESENTATION DE L'ORGANIGRAMME QUI DETERMINE LES PROFILS DE MISES PAR LA METHODE DIRECTE POUR LE CAS DE TROIS POINTS CRITIQUES :

On a étudié le programme présenté par cet organigramme afin de vérifier que le programme principal assure un bon déroulement l'or du calcul de la transformation.



## III-6\ REPRESENTATION DE L'ORGANIGRAMME PRINCIPALE :



Pour déterminer des profil de Mises pour n'importe quel nombre des points critiques, on doit passer par les étapes proposées par l'organigramme précédents.

#### 1- CHOIX DES POINTS CRITIQUES :

Comme nous avons dit précédemment, la transformation de Mises, est basée sur trois points critiques et plus.

Donc :

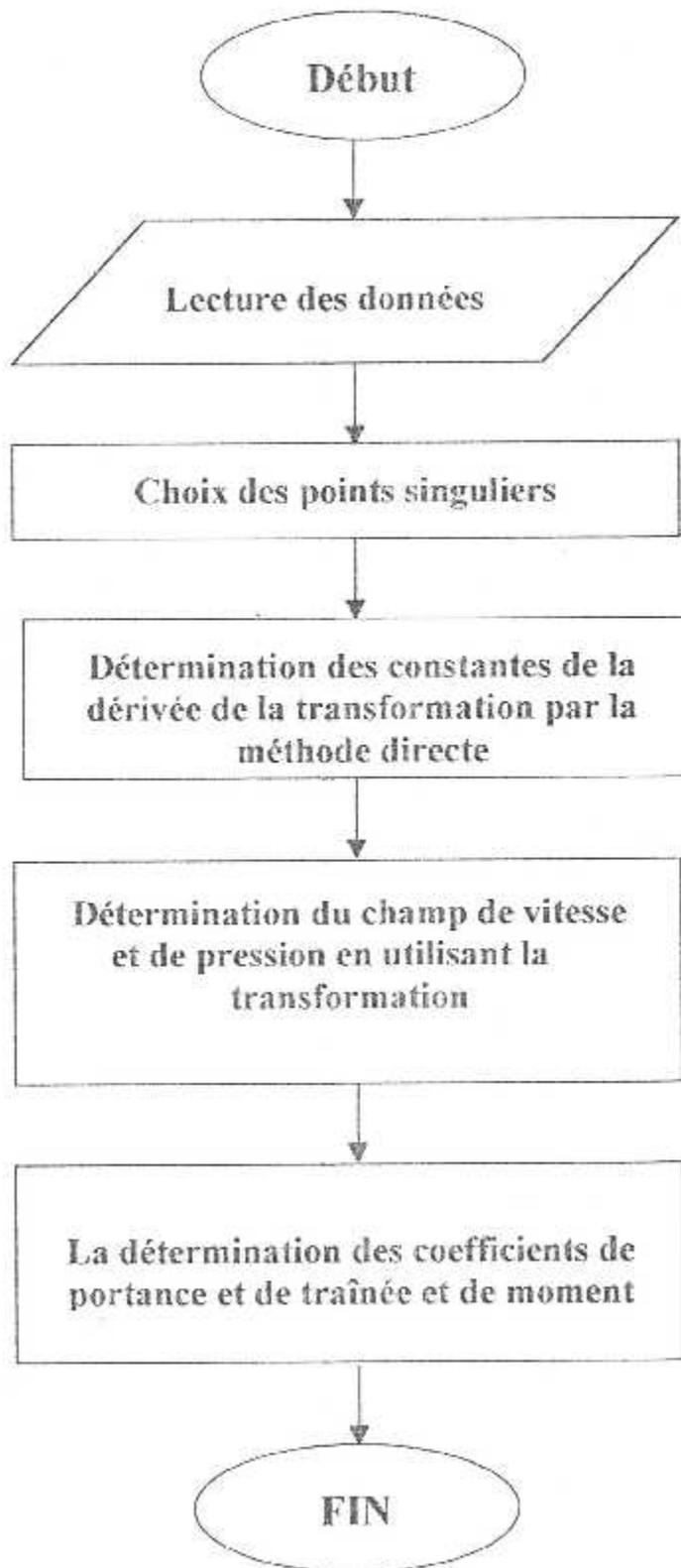
On a choisi : le bord de fuite, les autres points sont arbitraires et le dernier point choisi de telle manière que la somme de tous les points critiques est nulle.

2- La détermination des constantes de la transformation, en résolvant le système matriciel mentionné dans le chapitre précédent.

3-Détermination de l'image de ecrele à transformer par la transformation déterminée dans l'étape (2), en utilisant le schéma de Horner.

4- Affichage des résultats.

III-7\ REPRESENTATION DE L'ORGANIGRAMME QUI DETERMINE LES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT AUTOUR DU PROFIL OBTENU PAR TROIS POINTS CRITIQUES :



Après la génération des profils d'ailes de type Mises, on a englobé ce travail par une étude d'écoulement subsonique autour de ces profils passant par la transformation de Mises, afin de déterminer le champ de vitesse, de pression et les coefficients aérodynamiques ( le coefficient de portance, de traînée et de moment).

A decorative frame with a semi-circular top and a rectangular bottom. Inside the top semi-circle, the text "Chapitre IV" is written. Below the semi-circle, there are several stylized leaves or branches. The main text "Interprétation des résultats" is centered within the rectangular part of the frame.

Chapitre IV

Interprétation des résultats

### VI-1\ INTRODUCTION :

La méthode décrite dans ce travail, a été utilisée pour déterminer des profils de type Mises en fonction des points critiques dont on a étudié le cas des trois points critiques séparément, après on a généralisé le cas pour plusieurs points critiques, ensuite on a étudié l'écoulement autour de ces profils en déterminant les caractéristiques aérodynamiques ; et cela par un développement de plusieurs programmes informatiques écrits en FORTRAN (F90) suivant les organigrammes présentés précédemment, et les graphes sont obtenus à l'aide du logiciel GRAPHWIN.

### VI-2\ INTERPRETATION DES RESULTATS :

Dans ce mémoire, on a implémenté plusieurs programmes, le premier détermine les profils de Mises pour n'importe quel nombre des points critiques, et le deuxième pour vérifier la bonne démarche du programme principal qui détermine les profils de Mises pour trois points critiques seulement par une méthode simple.

La première application de notre programme c'est le choix des points critiques :

Alors, on a choisi tout d'abord le bord de fuite, après on a choisi les autres points critiques d'une façon arbitraire à condition qu'ils se trouvent à l'intérieur du cercle choisi, et enfin c'est le choix du dernier point critique qui est déterminé de telle manière que la somme de tous les points critiques soit nulle.

Après plusieurs choix, on a déduit que malgré que la somme de tous les points critiques soit nulle, et malgré que tous les points choisis d'une façon arbitraire se trouvent à l'intérieur du cercle, malheureusement le dernier point critique peut se trouver à l'extérieur du cercle, donc il faut savoir choisir les points critiques de telle manière qu'ils répandent aux étapes de la méthode. Donc on a développé un programme qui fait le balayage des points critiques et on a déduit d'après plusieurs

essais que les points critiques choisis d'une façon arbitraire faut qu'ils se trouvent dans la zone d'intersection du cercle à transformer et les autres cercles.

La deuxième application c'est la détermination des constantes de la transformation par la résolution de système numérique par la méthode de KHLEDSKI avec les nombres complexes qui donne des résultats acceptables si on les compare avec les résultats trouvés par la méthode simple des trois points critiques.

La troisième application de notre programme c'est la détermination de l'image du cercle en utilisant la transformation de VON -MISES avec l'utilisation du schéma de HORNER . Le résultat obtenu est une infinité des formes des profils avec des sections arbitraires dépendent de positionnement du cercle, du rayon du cercle et le choix des points critiques qui est le paramètre le plus intéressant qui exige beaucoup de réflexion et du flair de l'ingénieur; ces profils là ont une signification mathématique (figure : 2,3,4,5,6,7)mais le profil souhaité pour l'aéronautique est celui illustré par les figures (8,9) avec un angle de bord de fuite égal à zéro.

La dernière application de notre programme c'est l'étude d'écoulement autour des profils, et on a pris comme exemple d'application le profil de Mises présenté par la figure(9) obtenu pour trois points critiques dont on détermine le champ de pression, de vitesse, les coefficients de portance de traînée et de moment sur le cercle et après sur notre profil en passant par la transformation de VON -MISES ; les résultats sont écrits en annexe et cela pour Les données suivantes :

$$\Gamma = 0.2m^2 / s$$

$$\mu = 0.4m^2 / s$$

$$V_{inf} = 27 \text{ m/s}$$

$$\rho_{inf} = 7800 \text{ kg/m}^3$$

La longueur caractéristique  $L = 40m$

Les résultats sont représentés par la séries des figures suivantes :

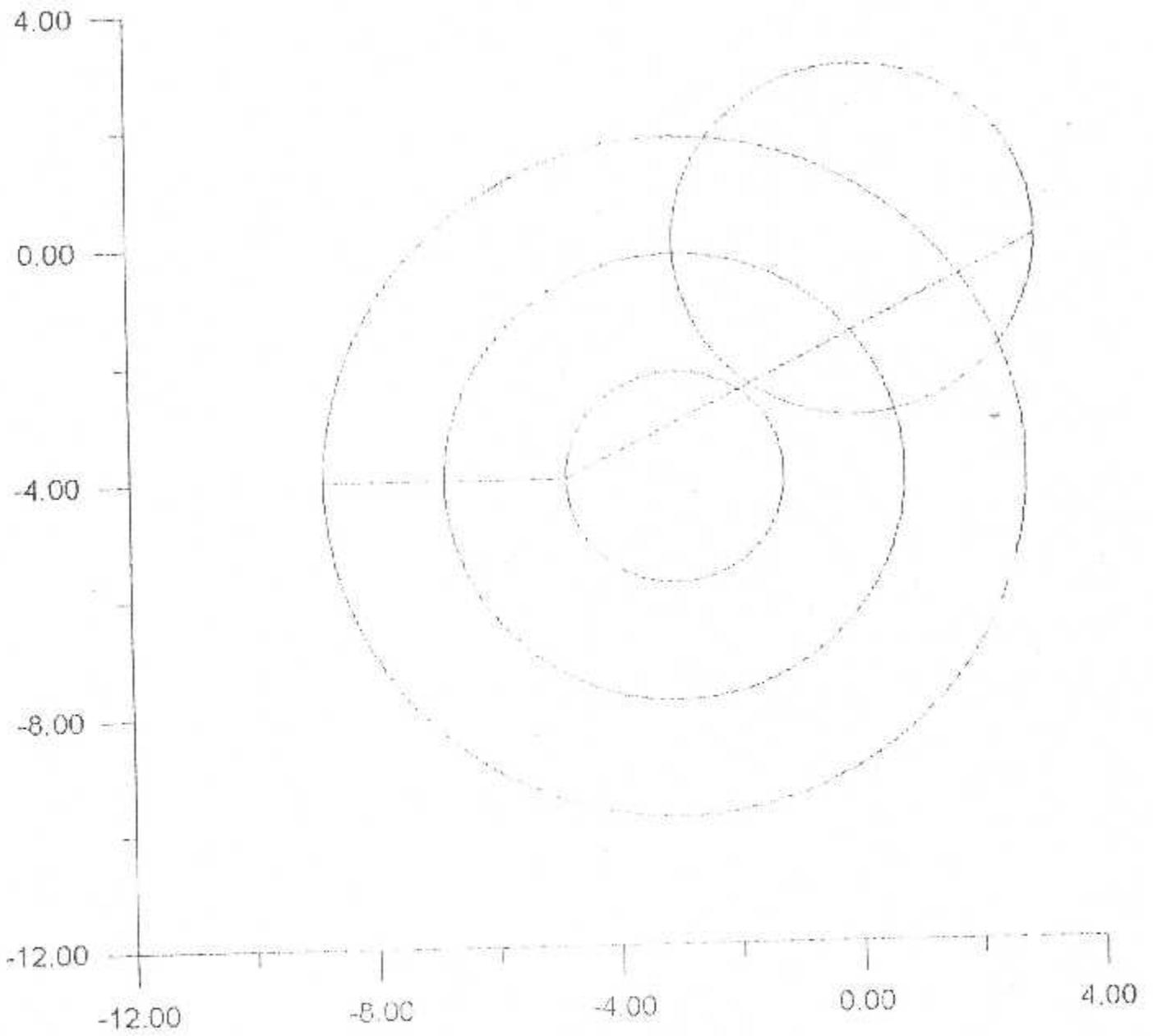
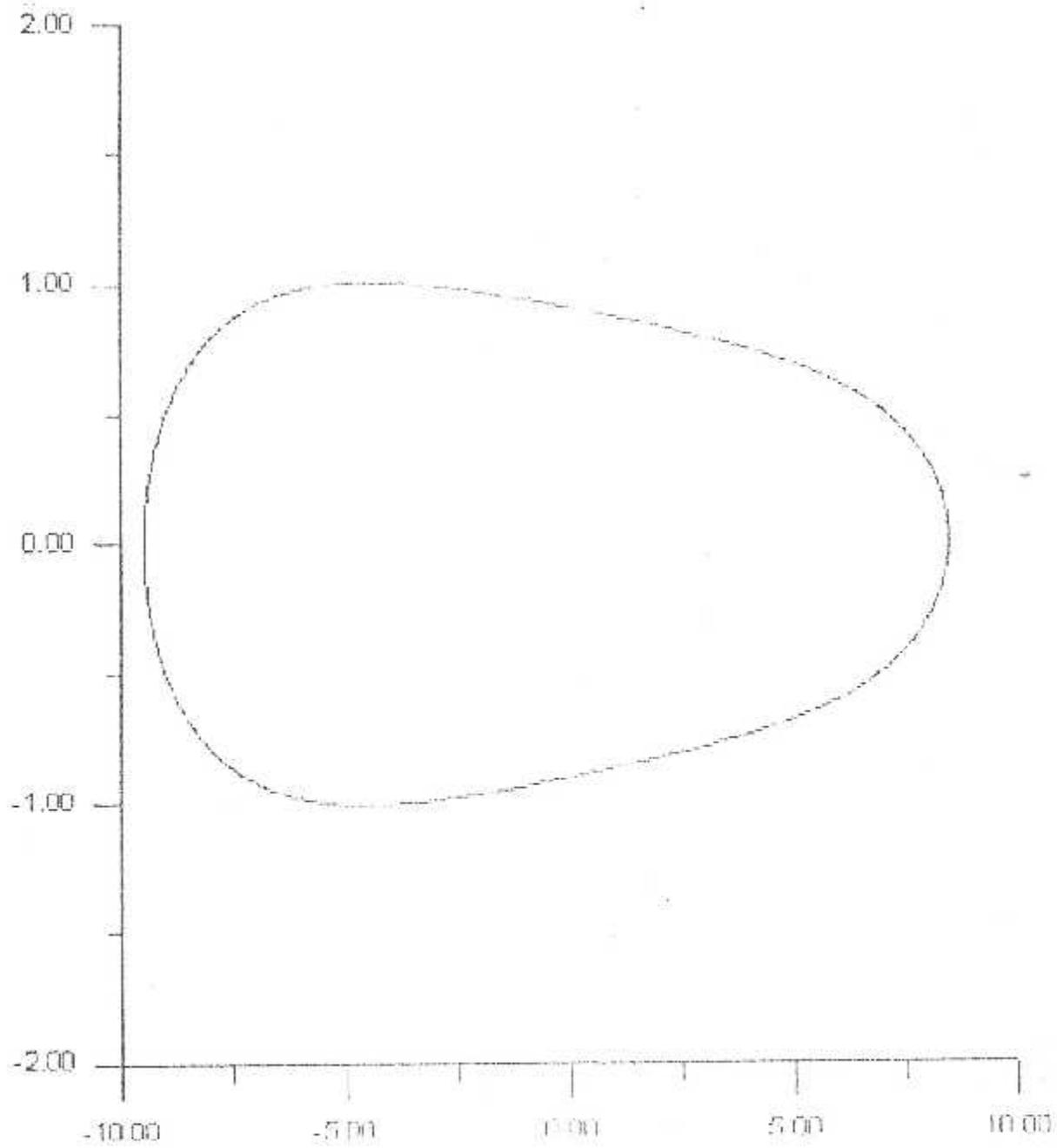


Figure (IV-1) : Balayage des points critiques



**Figure (IV-2) :**

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques,
- un cercle de rayon  $R=5$ ,
- position :  $(0,0)$ ,
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 1,76,
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $180^\circ$ .

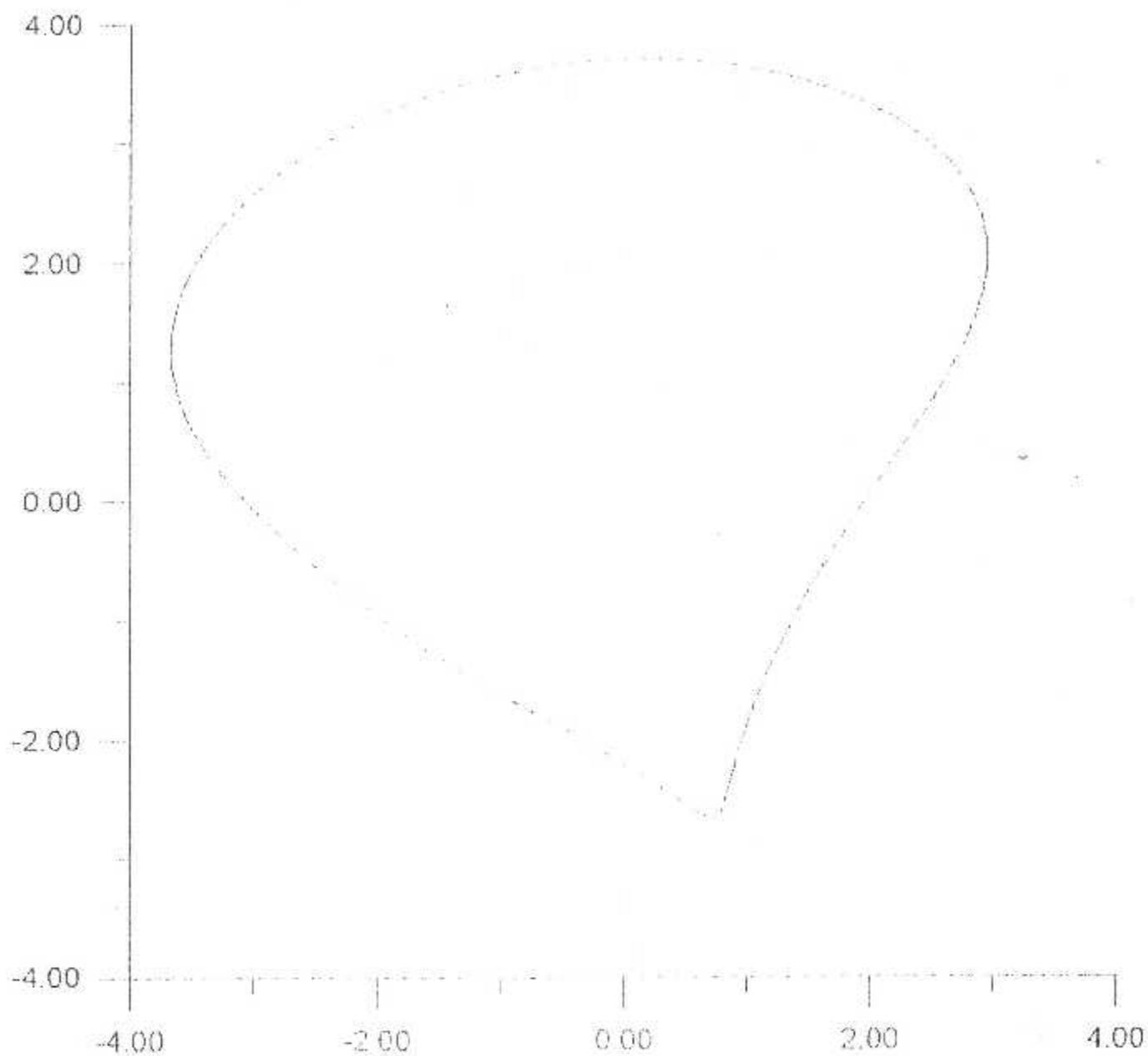
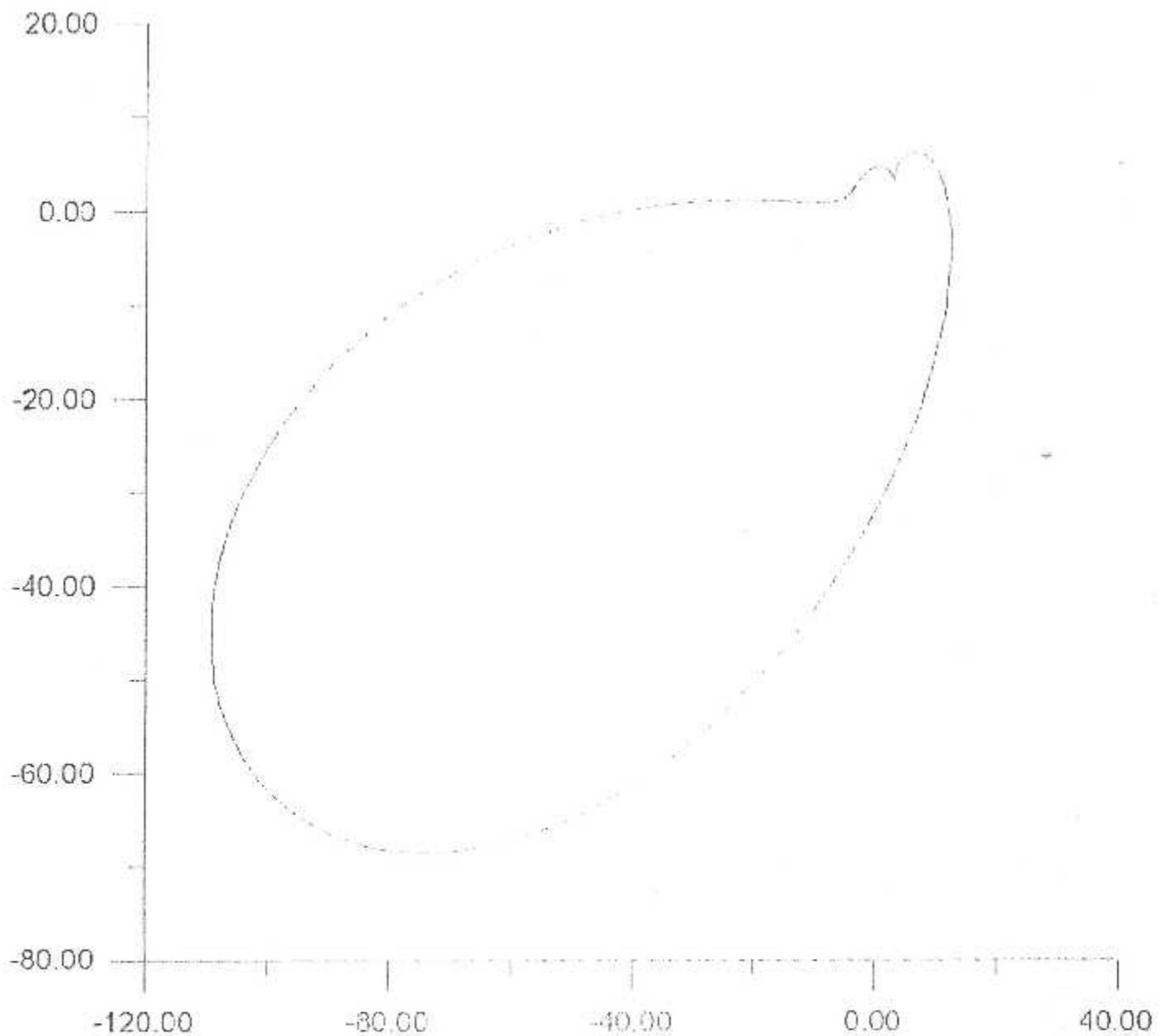


Figure (IV-3) :

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques,
- un cercle de rayon  $R=3$ ,
- position :  $(1,0)$ ,
- Module du 2ème point critique: 2,70,
- Argument du 2ème point critique:  $90^\circ$ .



**Figure (IV-4) :**

Profil de Mises obtenu pour :

- quatre points critiques,
- un cercle de rayon  $R=3$ ,
- position :  $(1,0)$ ,
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 2.70,
- Module du 3<sup>ème</sup> point critique: 1.67,
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $90^\circ$ ,
- Argument du 3<sup>ème</sup> point critique:  $200^\circ$ .

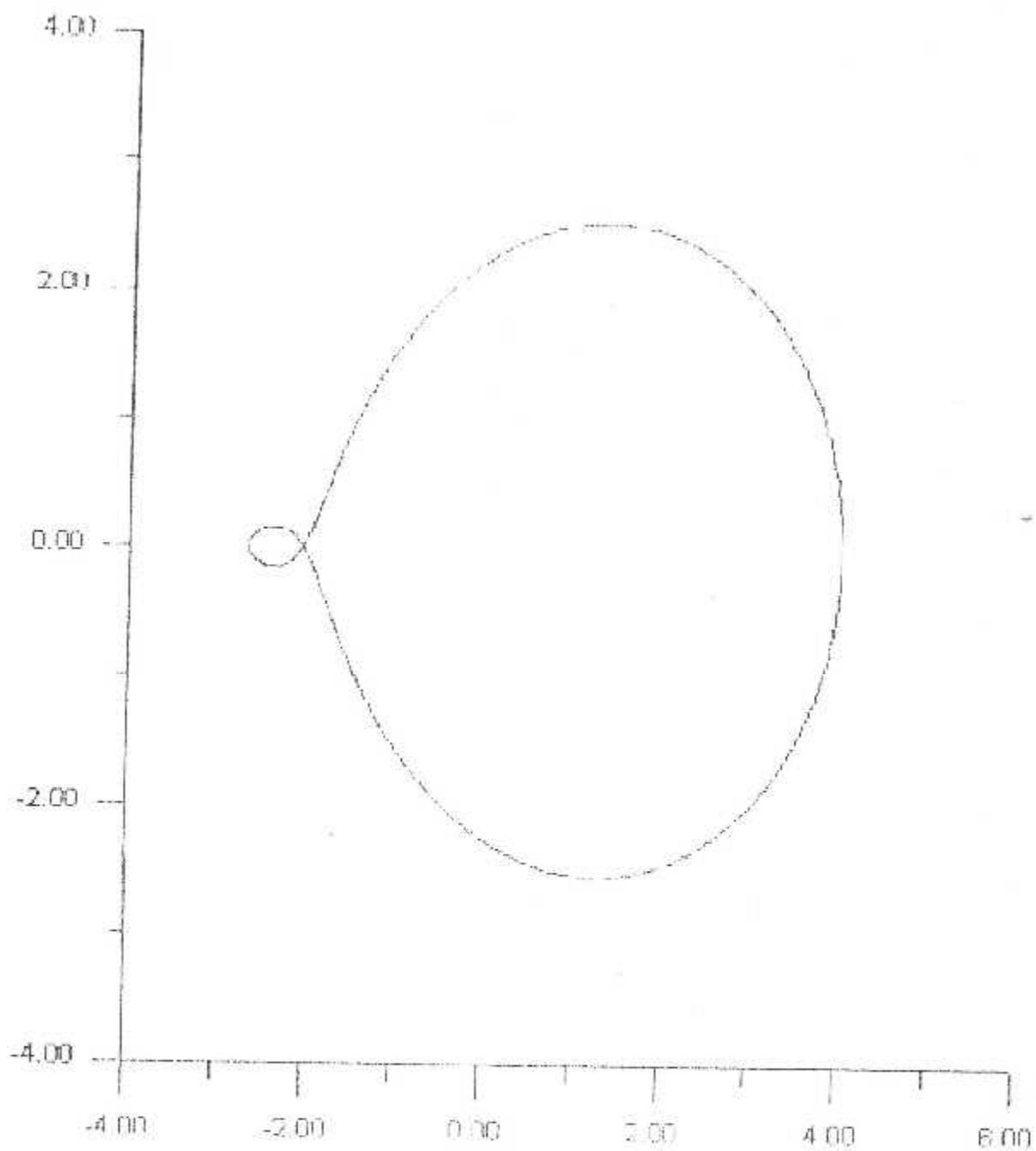
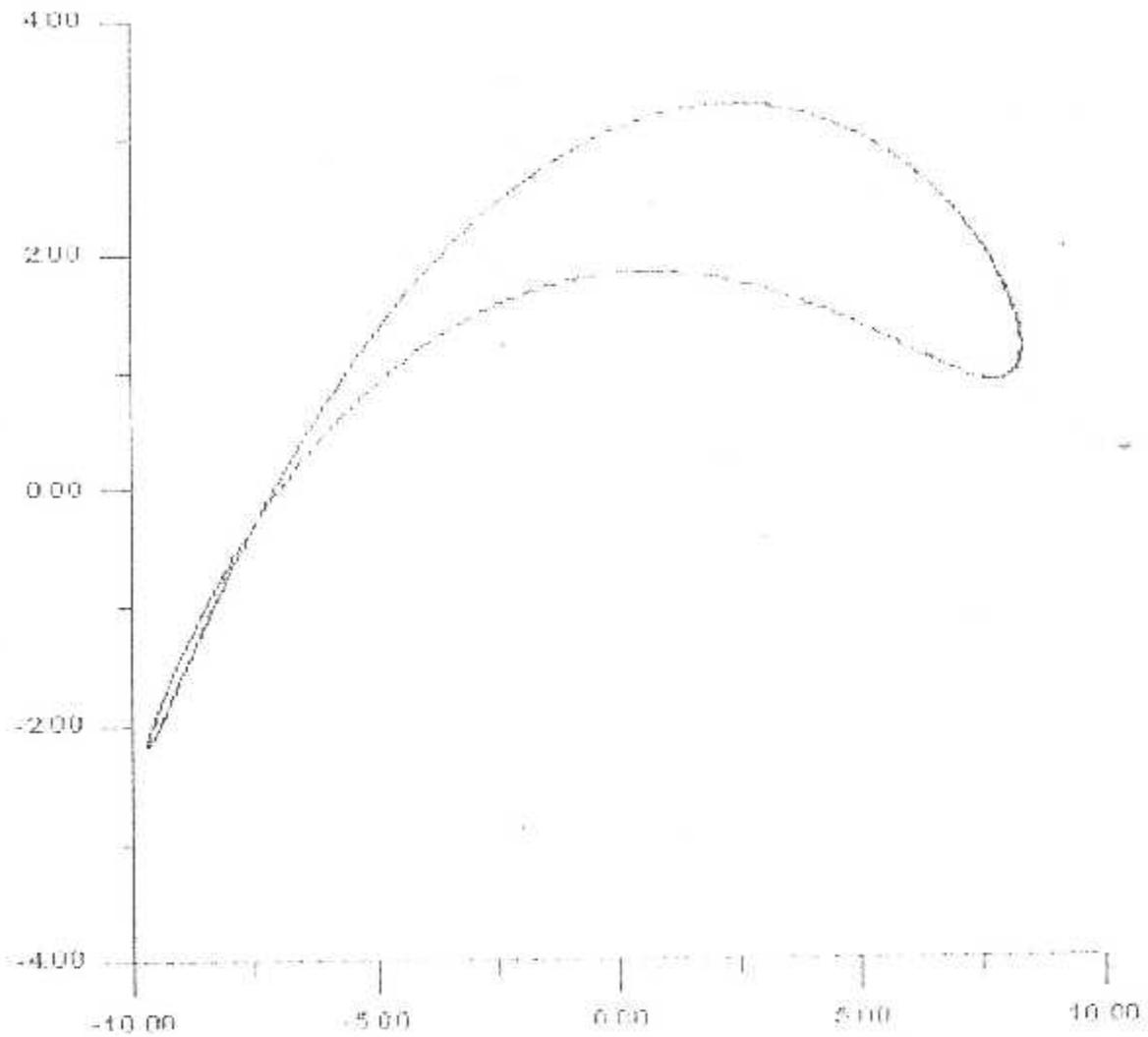


Figure (IV-5) :

Profil de Mises obtenu pour :

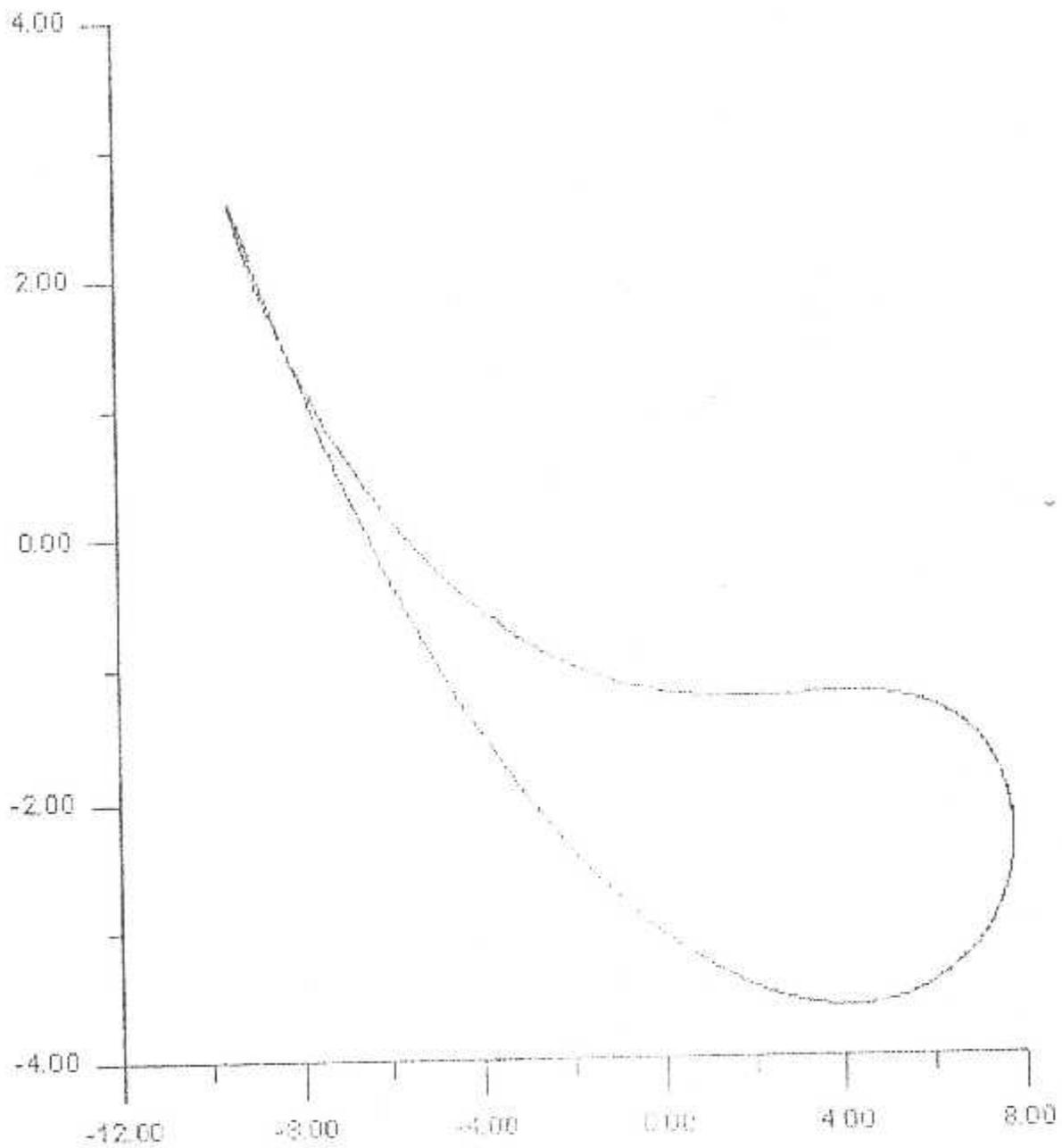
- trois points critiques.
- un cercle de rayon  $R=5$ .
- position :  $(0,0)$ .
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 1.46.
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $180^\circ$ .



**Figure (IV-6) :**

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques,
- un cercle de rayon  $R=2.05$ ,
- position :  $(0,1)$ ,
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 1.5,
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $200^\circ$ .

**Figure (IV-7) :**

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques;
- un cercle de rayon  $R=5$  ,
- position :  $(0,-1)$ .
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 1.76.
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $180^\circ$ .

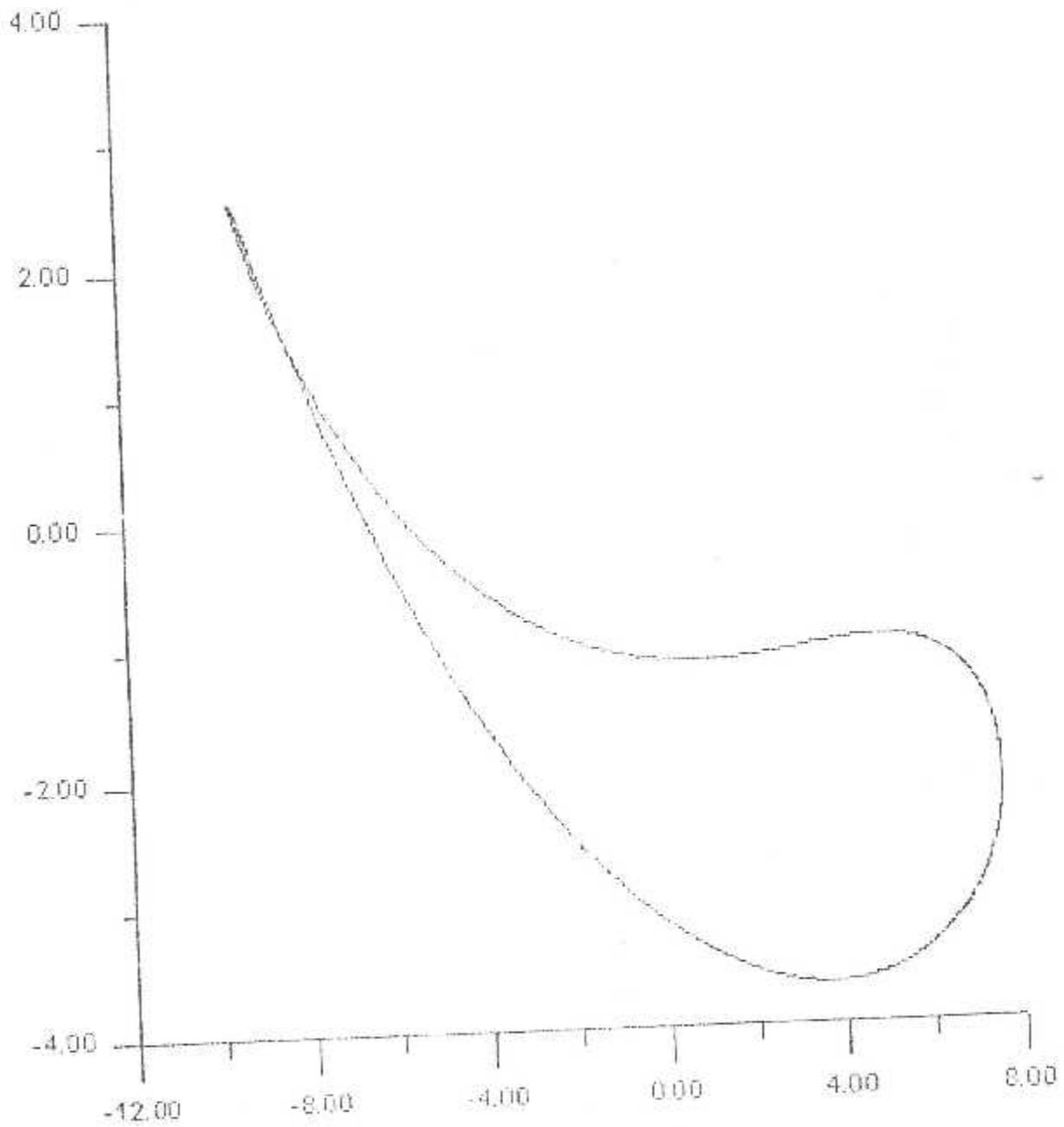


Figure (IV-8) :

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques.
- un cercle de rayon  $R=5$ .
- position :  $(0,-1)$ .
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 2.00.
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $180^\circ$ .

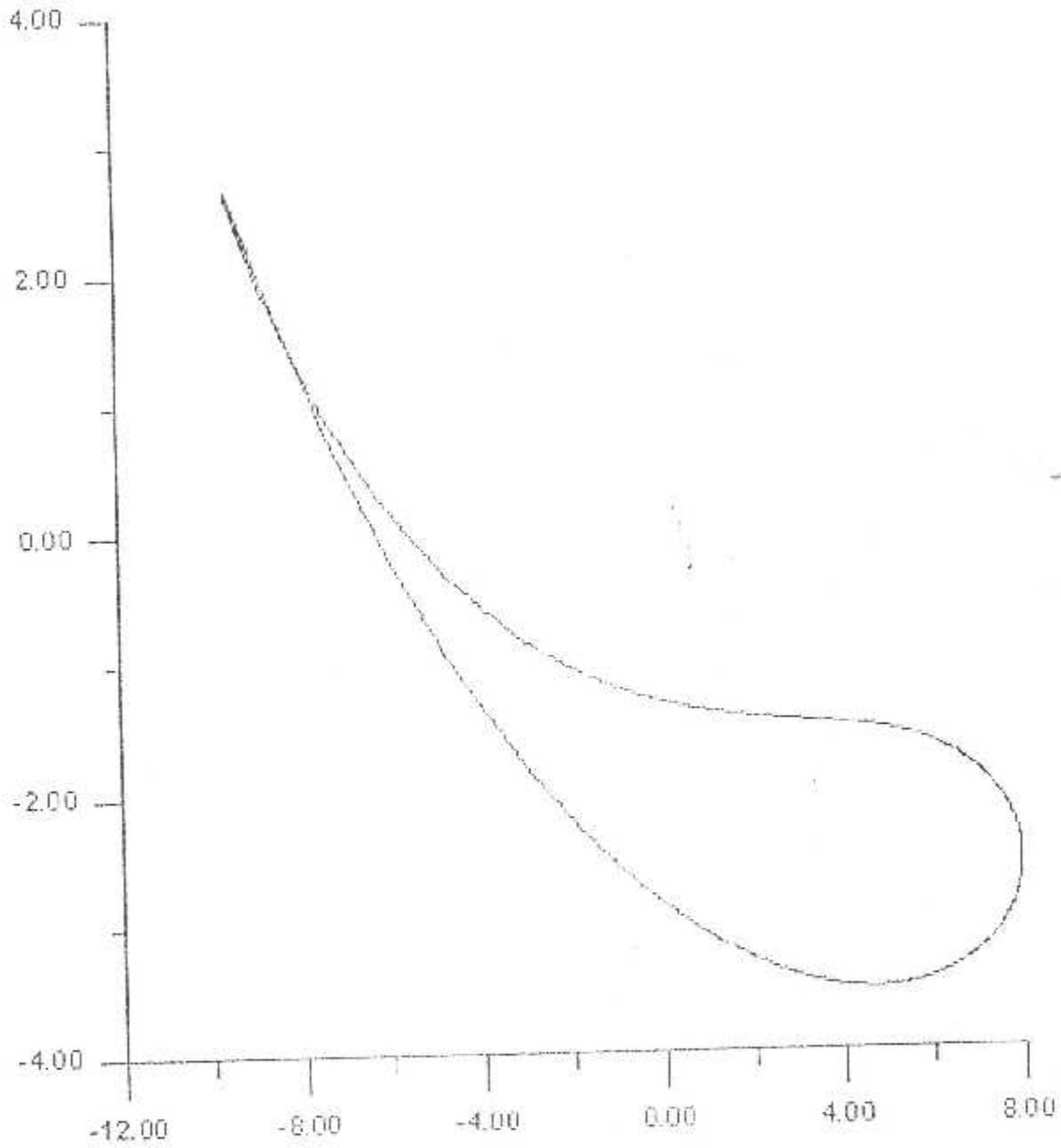


Figure (IV-9) :

Profil de Mises obtenu pour :

- trois points critiques.
- un cercle de rayon  $R=5$ .
- position :  $(0,-1)$ .
- Module du 2<sup>ème</sup> point critique: 1.46.
- Argument du 2<sup>ème</sup> point critique:  $180^\circ$ .



# Conclusion Générale

## CONCLUSION GENERALE :

Notre travail consiste à enrichir le domaine d'aérodynamique qui est un domaine très récent en développant une méthode de calcul pour déterminer des profils de **Mises** en fonction des points critiques en se basant sur l'analyse complexe.

La méthode présentée dans ce modeste travail suit le cheminement suivant :

On débute avec le choix des points critiques qu'il doit être bien précis pour donner des résultats efficaces, ensuite on détermine les constantes de la transformation, puis on fait l'image du cercle pour donner le profil de **Mises** dont on a pris comme exemple d'application le cas de trois points critiques en étudiant l'écoulement autour de ce profil d'aile, après on a généralisé ce cas pour un nombre très élevé des points critiques.

Ce travail mérite d'être accompli par :

- L'étude des caractéristiques géométriques des profils obtenus en faisant un maillage interne.
- Une extension entre la méthode de Von Karman-Trefftz et la méthode de Von-Mises pour obtenir une autre méthode des transformations conformes qui se base sur plusieurs points critiques avec un angle du bord de fuite différent de zéro.



**Annexe**

ANNEXE :I\ PROGRAMME 1 :

```

*****
*   PROGRAMME QUI DETERMINE LES PROFILS DE           *
*   MISES EN UTILISANT TROIS POINTS CRITIQUES      *
*   EN UTILISANT LA METHODE DIRECTE                *
*****
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION P_R(20),P_I(20)
  DOUBLE PRECISION C_R(20), C_I(20)
  DOUBLE PRECISION PCR_R(20),PCR_I(20),RAY_P(20),TH_P(20)
  OPEN(UNIT= 1, FILE ='SARIDAT',STATUS='OLD')
  OPEN ( UNIT =2 , FILE ='KAHINA.DAT', STATUS ='UNKNOWN')
  OPEN(UNIT=3,FILE='JKHLACE.DAT',STATUS='OLD')
C
C CHOIX DES POINTS CRITIQUES
C
  READ(1,*)
  READ(1,*) NPC,AKSICER,ETACER ,RCER ,NP
C
C CHOIX DE BORD D'ATTAQUE
C
  PCR_R(1)=AKSICER +RCER
  PCR_I(1)= ETACER
  RAY_P(1)= RCER
  TH_P(1)= 0.00
C
C CHOIX DU DEUXIEME POINT CRITIQUE
C
  READ(1,*)
  READ (1,*) RAY_P(2), TH_P(2)
  PCR_R (2)=AKSICER+RAY_P(2)*DCOSD(TH_P(2))
  PCR_I(2) = ETACER + RAY_P(2)*DSIND(TH_P(2))
C
  WRITE(*,*) PCR_R(2) , PCR_I(2)
C
C DETERMINATION DU DERNIER POINT CRITIQUE
C
  PCR_R(3) = -(PCR_R(1)+ PCR_R(2))
  PCR_I(3) = -(PCR_I(1)+ PCR_I(2))
C
C LA DETERMINATION DU RAYON DU DERNIER POINT CRITIQUE
C
  XX= PCR_R(3)-AKSICER

```

```

YY = PCR_I(3) - ETACER
RAYON = DSQRT(XX*XX - YY*YY)
C
WRITE(*,*) PCR_R(3), PCR_I(3)
WRITE(*,*) 'RAYON =', RAYON
IF(RAYON.GE.RCER) STOP
C
c la détermination des constantes de transformation
c
C_R(1) = PCR_R(1)*(PCR_R(2) + PCR_R(3)) -
+ PCR_I(1)*(PCR_I(2) + PCR_I(3)) -
+ PCR_R(2)*PCR_R(3) - PCR_I(2)*PCR_I(3)

C_I(1) = PCR_I(1)*(PCR_R(2) + PCR_R(3)) +
+ PCR_R(1)*(PCR_I(2) + PCR_I(3)) +
+ PCR_I(2)*PCR_R(3) + PCR_R(2)*PCR_I(3)
c
C_R(2) = PCR_R(1)*((PCR_R(2)*PCR_R(3)) - (PCR_I(2)*PCR_I(3))) -
+ PCR_I(1)*((PCR_I(2)*PCR_R(3)) + (PCR_R(2)*PCR_I(3)))

C_I(2) = PCR_I(1)*((PCR_R(2)*PCR_R(3)) - (PCR_I(2)*PCR_I(3))) -
+ PCR_R(1)*((PCR_I(2)*PCR_R(3)) + (PCR_R(2)*PCR_I(3)))
c
P_R(1) = - C_R(1)
P_I(1) = - C_I(1)
P_R(2) = -0.5*C_R(2)
P_I(2) = -0.5*C_I(2)
c
WRITE(2,*) P_R(1), P_I(1), P_R(2), P_I(2)
C
C DETERMINATION DU POINT (AKSI,ETA) DANS LE PLAN Z
C
DTH = 360.00/NP
DO 33 J=1,NP
write(*,*) J',J
C
THI = (J-1)*DTH
AKSI = AKSICER + RCER*DCOSD(THI)
ETA = ETACER + RCER*DSIND(THI)
U_R = 0.0
U_I = 0.0
DENO = AKSI*AKSI + ETA*ETA
C
DO 391 k = NPC-1, 1, -1
U_R = P_R(k) + (U_R*AKSI + U_I*ETA)/DENO
U_I = P_I(k) + (U_I*AKSI - U_R*ETA)/DENO
391 CONTINUE
C

```

```
Z_R= AKSI+ (U_R* AKSI+ U_I* ETA)/DENO  
Z_I= ETA+( U_I*AKSI- U_R *ETA)/DENO
```

C

```
IF(J.EQ.1) THEN  
  AKSI=AKSI  
  ETA1=ETA  
  ZR1=Z_R  
  ZI1=Z_I  
ENDIF
```

C

```
WRITE(3,112) Z_R,Z_I,AKSI,ETA
```

C

```
112  FORMAT(5X,4(2X,F15.8))
```

```
33  CONTINUE
```

```
WRITE(3,112) AKSI1,ETA1,ZR1,ZI1
```

```
STOP
```

```
END
```

II/ PROGRAMME 2 (PRINCIPALE) :

```

*****
* PROGRAMME QUI FAIT LA GENERATION DES PROFILS D'AILES DE TYPE
* MISES AVEC M'IMPORTE QUEL NOMBRE DES POINTS CRITIQUES
* LES PARAMETRES CLÉS PLUS INTERESSANTS SONT :
* NPC ... Nombre de Points Critiques (Singuliers)
* NP .... Nombre de Points à transformer
* P_R(),P_I() ... POUR LES STOCKAGE LES VALEURS RELLELS
* ET IMAGINAIRES DES COEFFICIENTS DE LA TRANSFORMATION
*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION A_R(20,20),A_I(20,20),B_R(20),B_I(20),X_R(20),
+X_I(20)
DOUBLE PRECISION ZA_R(20),ZA_I(20)
DOUBLE PRECISION PCRI_R(20),PCRI_I(20),RAY_P(20),TH_P(20)
DOUBLE PRECISION P_R(20),P_I(20)
C
OPEN(UNIT=1,FILE='D_MISES.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=2,FILE='R_MISES.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=3,FILE='PP.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
PI=3.1415926535897932384626433832D-00
C
READ(1,*) NPC,AKSICER,ETACER,RCER,NP
READ(1,*)
C
C LECTURE DES POINTS CRITIQUES DANS LE PLAN LOCAL PLACE AU CENTRE
DE CERCLE
C
C 1 - LE BORD DE FUITE
C
PCRI_R(NPC)=AKSICER+RCER
PCRI_I(NPC)=ETACER
C
RAY_P(NPC)=RCER
TH_P(NPC)=0.00
C
DO 18 J=1,NPC-2
READ(1,*) RAY_P(J),TH_P(J)
PCRI_R(J)=AKSICER+RAY_P(J)*DCOSD(TH_P(J))
PCRI_I(J)=ETACER+RAY_P(J)*DSIND(TH_P(J))
18 CONTINUE
C
C DETERMINATION LE DERNIER POINT CRITIQUE
C
S_R=0.00
S_I=0.00
DO 19 J=1,NPC-2

```

```

      S_R=S_R+PCRI_R(J)
      S_I=S_I+PCRI_I(J)
19  CONTINUE
      S_R=S_R+PCRI_R(NPC)
      S_I=S_I+PCRI_I(NPC)
      PCRI_R(NPC-1)=-S_R
      PCRI_I(NPC-1)=-S_I
C
      XX=PCRI_R(NPC-1)-AKSICER
      YY=PCRI_I(NPC-1)-EFACER
C
      RAYON=DSQRT(XX*XX+YY*YY)
C
      do 1 j=1,npc
        write(*,*) pcri_r(j),pcri_i(j)
1    continue
      write(*,*) 'RAYON=',RAYON
      PAUSE
C
C AFFECTATION DES ZA() ET LE REMPLISSAGE DE LA MATRICE [A] ET LE
VECTEUR {B}
C
      N1=NPC-1
      DO 7 I=1,N1
        ZA_R(I)=PCRI_R(I)
        ZA_I(I)=PCRI_I(I)
7    CONTINUE
C
      DO 10 I=1,N1
        A_R(I,N1)=1.00
        A_I(I,N1)=0.00
      DO 20 J=N1-1,1,-1
        A_R(I,J)=A_R(I,J+1)*ZA_R(I)-A_I(I,J+1)*ZA_I(I)
        A_I(I,J)=A_I(I,J+1)*ZA_R(I)+A_R(I,J+1)*ZA_I(I)
20  CONTINUE
C
      B_R(I)= -(A_R(I,1)*(ZA_R(I)*ZA_R(I)-ZA_I(I)*ZA_I(I))-A_I(I,1)*(2*
- ZA_R(I)*ZA_I(I)))
C
      B_I(I)= -(A_I(I,1)*(ZA_R(I)*ZA_R(I)-ZA_I(I)*ZA_I(I))-A_R(I,1)*(2*
+ ZA_R(I)*ZA_I(I)))
10  CONTINUE
C
      CALL SYSTEME(N1,A_R,A_I,B_R,B_I,X_R,X_I)
      do 989 l=1,n1
        write(*,*) X_R(l),X_I(l)
989  continue
C
C DETERMINATION LES COEFFICIENTS P DE LA TRANSFORMATION CONFORME
DE VON-MISES

```

```

C
  DO 25 J=1,N1
    P_R(J+1)=(-1)**J*1/J*X_R(J)
    P_I(J+1)=(-1)**J*1/J*X_I(J)
  WRITE(*,*) P_R(J),P_I(J)
  WRITE(2,*) P_R(J),P_I(J)
25  CONTINUE
C
C DETERMINATION DE L'IMAGE DE CERCLE
C
  DTH=360.0/NP
  DO 33 J=1,NP
    TH=(J-1)*DTH
    AKSI=AKSICER+RCER*DCOSD(TH)
    ETA=ETACER+RCER*DSIND(TH)
C
  U_R=0.00
  U_I=0.00
  DENO=AKSI*AKSI+ETA*ETA
  DO 391 J1=N1,1,-1
    U_R=P_R(J1)+(U_R*AKSI+U_I*ETA)/DENO
    U_I=P_I(J1)+(U_I*AKSI-U_R*ETA)/DENO
391  CONTINUE
C
  Z_R=AKSI+(U_R*AKSI+U_I*ETA)/DENO
  Z_I=ETA+(U_I*AKSI-U_R*ETA)/DENO
C
  WRITE(3,112) AKSI,ETA,Z_R,Z_I
112  FORMAT(5X,4(2X,F15.8))
33  CONTINUE
C
  STOP
  END
C
C SUBROUTINE DE RESOLUTION DU SYSTEME D'EAUATIONS A {X}={B}
C TELLES QUE LES ELEMEMENTS DE A,B,C SONT DES NOMBRES COMPLEXES
C
  SUBROUTINE SYSTEME(N,A_R,A_I,B_R,B_I,X_R,X_I)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    DOUBLE PRECISION A_R(20,20),A_I(20,20),B_R(20),B_I(20),X_R(20),
+X_I(20)
    DOUBLE PRECISION I_R(20,20),I_I(20,20),H_R(20,20),H_I(20,20),
+Y_R(20),Y_I(20)
C
  DO 30 I=1,N
C
    DO 40 J=1,I
      S_R=0.00
      S_I=0.00
      DO 50 K=1,J-1

```

```

      S_R=S_R+L_R(I,K)*H_R(K,J)-L_I(I,K)*H_I(K,J)
      S_I=S_I+L_I(I,K)*H_R(K,J)+L_R(I,K)*H_I(K,J)
50  CONTINUE
      L_R(I,J)=A_R(I,J)-S_R
      L_I(I,J)=A_I(I,J)-S_I
40  CONTINUE
C
      H_R(I,I)=1.00
      H_I(I,I)=0.00
C
      DO 45 J=I+1,N
        S_R=0.0
        S_I=0.0
        DO 55 K=1,J-1
          S_R=S_R+L_R(I,K)*H_R(K,J)-L_I(I,K)*H_I(K,J)
          S_I=S_I+L_I(I,K)*H_R(K,J)+L_R(I,K)*H_I(K,J)
55  CONTINUE
          S_R=A_R(I,J)-S_R
          S_I=A_I(I,J)-S_I
          DENO=L_R(I,I)*L_R(I,I)+L_I(I,I)*L_I(I,I)
          H_R(I,J)=(S_R*L_R(I,I)+S_I*L_I(I,I))/DENO
          H_I(I,J)=(S_I*L_R(I,I)-S_R*L_I(I,I))/DENO
45  CONTINUE
30  CONTINUE
      DO 48 I=1,N
        S_R=0.0
        S_I=0.0
        DO 58 K=1,I-1
          S_R=S_R+L_R(I,K)*Y_R(K)-L_I(I,K)*Y_I(K)
          S_I=S_I+L_I(I,K)*Y_R(K)+L_R(I,K)*Y_I(K)
58  CONTINUE
          S_R=B_R(I)-S_R
          S_I=B_I(I)-S_I
          DENO=L_R(I,I)*L_R(I,I)+L_I(I,I)*L_I(I,I)
          Y_R(I)=(S_R*L_R(I,I)-S_I*L_I(I,I))/DENO
          Y_I(I)=(S_I*L_R(I,I)-S_R*L_I(I,I))/DENO
48  CONTINUE
C
      DO 49 I=N,1,-1
        S_R=0.0
        S_I=0.0
        DO 59 K=I+1,N
          S_R=S_R+H_R(I,K)*X_R(K)-H_I(I,K)*X_I(K)
          S_I=S_I+H_I(I,K)*X_R(K)+H_R(I,K)*X_I(K)
59  CONTINUE
          X_R(I)=Y_R(I)-S_R
          X_I(I)=Y_I(I)-S_I
49  CONTINUE
      RETURN
      END

```

## II/ PROGRAMME 3 :

ETUDE D'ECOULEMENT SUR LE PROFIL ILLUSTRE PAR LA FIGURE 9 :

```

*****
*   PROGRAMME QUI FAIT L'ETUDE DE L'ECOULEMENT
*   DANS LE DOMAINE SUBSONIQUE AUTOUR DES PROFILS
*   DE MISES QUI SONT DETERMINES PAR TROIS POINTS
*   CRITIQUES
*****
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION C_R(20), C_I(20)
  DOUBLE PRECISION PCR_R(20), PCR_I(20)
  DOUBLE PRECISION TH_P(20), RAY_P(20)
  DOUBLE PRECISION V(200), Vp_R(200), Vp_I(200), Cp(200),
- CPp_R(200), CPp_I(200)
  REAL NU
  OPEN(UNIT=1, FILE='SA.DAT', STATUS='OLD')
  OPEN(UNIT=4, FILE='ikh.dat', STATUS='UNKNOWN')
  OPEN(UNIT=3, FILE='sin.dat', STATUS='UNKNOWN')
  OPEN(UNIT=5, FILE='COSI.dat', STATUS='UNKNOWN')
  OPEN(UNIT=6, FILE='kam1.dat', STATUS='UNKNOWN')
  OPEN(UNIT=7, FILE='KAM2.DAT', STATUS='UNKNOWN')
C
C LECTURE DES DONNEES
C
  READ(1,*)
  READ(1,*) NPC, AKSICER, ETACER, RCER, NP
  READ(1,*)
  READ(1,*) ROinf, Vinf, GAMA, NU, DIS
C
C CHOIX DE BORD D'ATTAQUE
C
  PCR_R(1)=AKSICER+RCER
  PCR_I(1)= ETACER
  RAY_P(1)= RCER
  TH_P(1)= 0.00
C
C CHOIX DU DEUXIEME POINT CRITIQUE
C
  READ(1,*)
  READ(1,*) RAY_P(2), TH_P(2)
  PCR_R(2)= AKSICER+ RAY_P(2) *DCOSD(TH_P(2))
  PCR_I(2) = ETACER + RAY_P(2) *DSIND(TH_P(2))
C
  WRITE(*,*) PCR_R(2), PCR_I(2)
C

```

## C DETERMINATION DU DERNIER POINT CRITIQUE

C

```

PCR_R(3) = -(PCR_R(1)+ PCR_R(2))
PCR_I(3) = -(PCR_I(1)+ PCR_I(2))

```

C

## C LA DETERMINATION DU RAYON DU DERNIER POINT CRITIQUE

C

```

XX= PCR_R(3)-AKSICER
YY =PCR_I(3)-ETACER
RAYON =DSQRT(XX*XX+YY*YY)

```

C

```

WRITE(*,*) PCR_R(3), PCR_I(3)
WRITE(*,*)'RAYON =', RAYON
IF(RAYON.GE.RCER) STOP

```

C

## c LA DETERMINATION DES CONSTANTES DE LA TRANSFORMATION

c

```

C_R(1)=PCR_R(1)*(PCR_R(2)+PCR_R(3))-
+ PCR_I(1)*(PCR_I(2)+PCR_I(3))+
+ PCR_R(2)*PCR_R(3)-PCR_I(2)*PCR_I(3)

```

C

```

C_I(1)= PCR_I(1)*(PCR_R(2)+ PCR_R(3))+
+ PCR_R(1)*(PCR_I(2)+ PCR_I(3))+
+ PCR_I(2)*PCR_R(3)+PCR_R(2)*PCR_I(3)

```

c

```

C_R(2)= -(PCR_R(1)*((PCR_R(2)*PCR_R(3))-(PCR_I(2)*PCR_I(3)))-
+ PCR_I(1)*((PCR_I(2)*PCR_R(3))+(PCR_R(2)*PCR_I(3))))

```

```

C_I(2)= -(PCR_I(1)*((PCR_R(2)*PCR_R(3))-(PCR_I(2)*PCR_I(3)))+
+ PCR_R(1)*((PCR_I(2)*PCR_R(3))+(PCR_R(2)*PCR_I(3))))

```

C

C

C

```

DTH= dfloat(360/NP)
DO 33 J=1,NP
write(*,*) 'J-',J

```

C

```

THT =(J-1)*DTH
AKSI= AKSICER+RCER*DCOSD(THT)
ETA = ETACER+RCER*DSIND(THT)
DENO= AKSI*AKSI+ETA*ETA

```

C

C

## C LE CALCUL DU CHAMP DE VITESSE SUR LE CERCLE

C

```

PI=dcos(-1.d0)
a= DSQRT(NU/2.d0*PI*Vinf)
V(j) = Vinf*(2.d0*DSIND(THT) + GAMA/(2*PI*Vinf*a))

```

C

## C LE CALCUL DU CHAMP DE VITESSE SUR LE PROFIL DE MISES

```

C
  Up_R = 0.d0
  Up_I = 0.d0
  DO 392 K= NPC, I, -1
    Up_R = C_R(k) + (Up_R*AKSI + Up_I*ETA)/DENO
    Up_I = C_I(k) - (Up_I*AKSI - Up_R*ETA)/DENO
392 CONTINUE
C
  Zp_R = AKSI + (Up_R*AKSI + Up_I*ETA)/DENO
  Zp_I = ETA - (Up_I*AKSI + Up_R*ETA)/DENO
C
  Write(3,*) AKSI, ETA
  WRITE(5,*) Zp_R, Zp_I
C
  DENO1 = Zp_R*Zp_R + Zp_I*Zp_I
  Vp_R(j) = V(j)*Zp_R / DENO1
  Vp_I(j) = V(j)*Zp_I / DENO1
C
  &
  WRITE(7,*) Vp_R(j), Vp_I(j)
C
C LE CALCUL DU CHAMP DE PRESSION SUR LE CERCLE
C EN UTILISANT LE THEOREME DE BERNOULLI
C
  Cp(j) = 1.d0 - (v(j)/Vinf)**2
C
C LE CALCUL DU CHAMP DE PRESSION SUR LE PROFIL DE MISES
C
  Cpp_R(j) = 1 - ((Vp_R(j)*Vp_R(j) - Vp_I(j)*Vp_I(j))/Vinf**2)
  Cpp_I(j) = 1.d0 - ((2*Vp_I(j)*Vp_R(j))/Vinf**2)
C
  WRITE(6,*) Cpp_R(j), Cpp_I(j)

33 Continue
C
C LE CALCUL DES FORCES SUR LE PROFIL AVEC UNE UNITE DE SURFACE
C
C LE CALCUL DE FORCE DE TRAINEE EN UTILISANT LE PARADOX D'ALEMBERT
C
  Fx = 0
C
C LE CALCUL DE COEFFICIENT DE TRAINEE
C
  Cx = 0
C
C LE CALCUL DE COEFFICIENT DE PORTANCE EN UTILISANT LE THEOREME
DE
C KUTTA-JOUKOWSKI

```

```
C
  Fz = ROinf* Vinf*GAMA
C
C LE CALCUL DE COEFFICIENT DE PORTANCE
C
  Cz = 2*GAMA/Vinf
C
C LE CALCUL DE MOMENT
C
  M = ROinf*Vinf*NU
C
C LE CALCUL DE COEFFICIENT DE MOMENT
C
  Cm = 2*NU/Vinf*dis**2
C
WRITE(4,*) ' LES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES SONT :
  WRITE(4,*)
  WRITE(4,*) 'la force de traînée =', FX
  WRITE(4,*) ' la force de portance =', FZ
  WRITE(4,*) 'le moment =', M
  WRITE(4,*) ' le coefficient de traînée =', Cx
  WRITE(4,*) ' le coefficient de portance =', CZ
  WRITE(4,*) ' le coefficient de moment =', Cm
C
STOP
END
```

**IV\ RESULTATS DU PROGRAMME D'ECOULEMENT:**

LES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES SONT :

la force de traînée = 0.000000000000000E+000

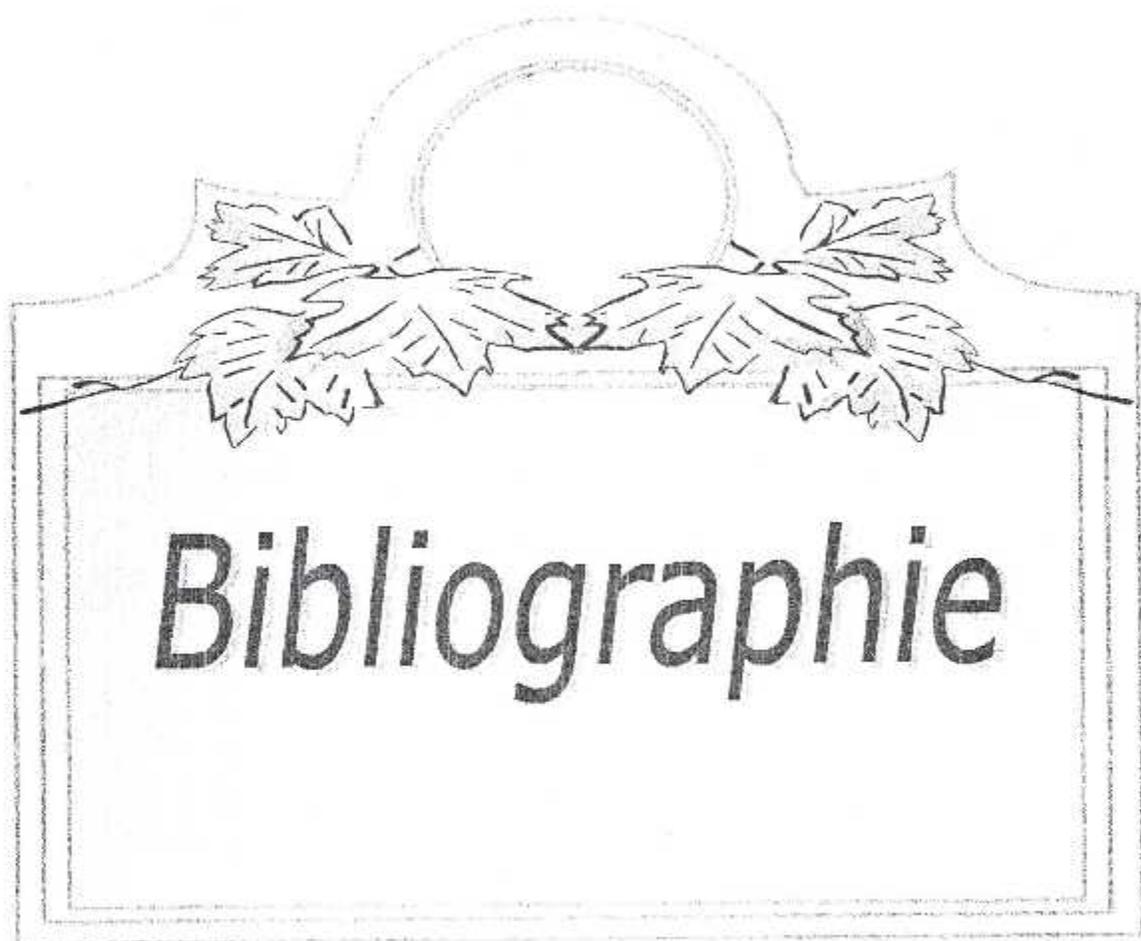
la force de portance = 105300.000000000000000

le moment = 42120

le coefficient de traînée = 0.000000000000000E+000

le coefficient de portance = 3.703703703703704E-002

le coefficient de moment = 3.333333383003871



# *Bibliographie*

**Bibliographie**

1.  Walter Rudin  
Analyse réelle et complexe  
Dépôt légal : Septembre 1998, édition Dunod.
2.  Ahmed Chegrani «cours d'aérodynamique »  
4<sup>ème</sup> année ingénieur,  
Institut d'aéronautique, université de Bilda
3.  RAMI Abou-ghalyon, « génération de maillage autour des configurations Multi-profiles par la méthode de transformation conforme Von-KarmanTrfftez  
Thème d'ingénieur, université de Blida (2000)
4.  INGEL. RYIIMING  
Dynamique des fluides  
Deuxième édition revue et augmentée
5.  Ahmed Chegrani, « étude des caractéristiques aérodynamiques de la combinaison aile-fuselage en régime subsonique par la méthode des singularités.  
Thème de magister, université de Blida -1995-
6.  L.TAUREL : Ingenieur en chef de l'armement  
aérodynamique expérimental Tome 1 et 2.  
Aérodynamique des profils et des ailes Toulouse -1981-
7.  M<sup>elle</sup> Tahlaïti Fouzia  
"Détermination des caractéristiques aérodynamiques des ailes Delta "  
Thèse de Magistère ; université de Bilda -20001-