

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE BLIDA
INSTITUT D'AERONAUTIQUE



MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique
Option : propulsion – structure

THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DES
ECOULEMENTS A RECIRCULATION
PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS**

Dirigé par:

M^r BOUNEDER Mohamed

Présenté par :

ADAMA MAIGA Mahamadou
LACHLAH Imed

Promotion 2002

Remerciements

Au terme de ce projet nous tenons à adresser nos sincères remerciements, à notre promoteur, Mr BOUNEDER MOHAMED pour notre encadrement dans ce travail avec enthousiasme et compétence, sa participation avec dynamisme à tous les stades d'élaboration de ce projet, sa disponibilité chaque fois que nous en avons eu recours et surtout ses conseils précieux qui nous ont été très bénéfiques.

Résumé

Ce travail présente les résultats numériques obtenus pour la convection naturelle laminaire dans une cavité bidirectionnelle. Modèle basé sur l'approximation de BOUSSINESQ et la méthode des volumes finis sur un maillage structuré.

Une technique implicite de stationnarisation et l'algorithme SIMPLE sont utilisés pour traiter le coulage entre les champs de pression et de vitesse.

Premièrement, les calculs sont entrepris par l'écoulement de la cavité entraînée puis pour celui de la convection naturelle laminaire. Les résultats numériques obtenus sont en bonne conformité avec ceux présentés dans les problèmes de validation.

Abstract

This work presents numerical results obtained for buoyant laminar natural convection in two dimensional enclosures. The Model is based on Boussineq's approximation and Finite volume method on structured meshes.

Implicit time stepping technique and the SIMPLE Algorithm are used to treat the linkage between the pressure and velocity fields.

Calculations are performed at first to the well-known lid cavity flow and then to laminar natural convection.

Several numerical results show good agreement with available recognized benchmarks.

Nomenclature

- A** : Coefficient de l'équation algébrique.
- C_p** : Chaleur massique à pression constante (g/Kg.°K)
- D** : Flux de diffusion à travers les interfaces du volume de contrôle
- L** : Largeur de la cavité
- H** : Longueur de la cavité
- Δx, Δy** : Dimensions du volume de contrôle
- dX_e, dX_w, dX_n et dX_s** : Sont respectivement les distances entre le nœud considéré P et les nœuds E,W,N,S
- E** : Energie interne
- F** : Flux de convection évalué à l'interface du volume de contrôle
- F₁** : Force de Volume (N)
- g** : Accélération de la pesanteur (m/s²)
- P** : pression (N/m²)
- S** : surface (m²)
- S_φ** : Terme source
- T** : Température (°K)
- T_c** : Température de la paroi froide (°K)
- T_h** : Température de la paroi chaude (°K)
- U** : Composante de la vitesse dimensionnelle suivant la direction x (m/s)
- V** : Composante de la vitesse dimensionnelle suivant la direction y (m/s)
- X** : coordonnée cartésienne
- Y** : coordonnée cartésienne
- Symbole Grecs :**
- ρ** : Masse volumique (Kg/m³)
- θ** : Température adimensionnelle
- Φ** : Fonction de dissipation
- φ** : Variable dépendante
- μ** : Viscosité dynamique (g/Kg.m)

ν : Viscosité cinématique (m^2/s)

β : Coefficient de dilatation thermique à pression constante ($^{\circ}K^{-1}$)

α : Coefficient de diffusion thermique (m^2/s)

Γ : Grandeur caractérisant le flux de convection à travers les interfaces du volume de contrôle

Ψ : Fonction de courant

ω : Fonction de tourbillon

indices :

e : La face Est du volume de contrôle

w : La face West du volume de contrôle

n : La face Nord du volume de contrôle

s : La face Sud du volume de contrôle

E : Nœud considéré du côté Est de P

W : Nœud considéré du côté West de P

N : Nœud considéré du côté Nord de P

S : Nœud considéré du côté Nord de P

P : Nœud considéré du maillage

Opérateur mathématiques :

Δ : Laplacien

d : Dérivée totale

δ : Dérivée partielle

div : Divergence

grad : gradient

Nombre sans dimensions :

Pe : Nombre de Peclet

Gr : Nombre de Grashoff

Pr : Nombre de Prandlt

Ra : Nombre de Rayleigh

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	01
-----------------------------	----

CHAPITRE I : FORMULATION DU PROBLEME

1.1 Introduction	04
1.2 Géométrie du problème	04
a-Cavité entraînée	04
b-Convection naturelle	05
b-1 dans une cavité carrée	05
b-2 dans une cavité rectangulaire	05
1.3 Equation régissant l'écoulement du fluide	06
1-3-1 Equation de continuité	07
1-3-2 Equation des quantité de mouvement	07
1-3-3 Equation de l'énergie	07
1.4 Equation simplifiées	08
1.4.1 Equation de continuité	08
1.4.2 Equation des quantité de mouvement	08
1.4.3 Equation de l'énergie	08
1.5 Conditions aux limites	09
1.6 Adimensionnalisatio	10
1-6-1 Problème de la cavité entraînée	10
1-6-2 Problème de la convection naturelle	11
1-6-3 Conditions aux limites adimensionnelles	12

CHAPITRE II : MAILLAGE ET DISCRETISATION

2.1 Introduction	13
2.2 Forme générale de l'équation de l'énergie	13
2.3 Maillage	14
2.4 Discrétisation des équations régissant l'écoulement	15
2.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité adimensionnelle	15
2-4-2 Discrétisation de l'équation de transport	16
2-4-3 Discrétisation de l'équation de l'énergie	20
2-4-4 Discrétisation de la fonction de courant	25

2-4-5 Discrétisation de la fonction tourbillon	25
2-4-6 Discrétisation des conditions aux limites	26

CHAPITRE III : METHODE NUMERIQUE ET STRUCTURE DU PROGRAMME

3.1 Introduction	26
3.2 Présentation du code TEAM	26
3.3 Méthode itérative de solution (Algorithme TDMA)	27
3-4 Equation algébrique de pression	29
3-5 Schéma de calcul SIMPLE	31
3-6 Le terme transitoire	31
3-7 Critère de convergence	32
3-8 Programme de simulation	33
3-8-1 Organigramme	33
3-8-2 Structure du programme	35
3-8-3 Installation du programme	36

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Problème de la cavité entraînée	37
4-1-1 Courbe des fonctions de courant	37
4-1-2 Courbes de fonction tourbillon	37
4-1-3 Courbe de $U/U_p = f(y/H)$	38
4-1-4 Courbe de $V/U_p = f(y/H)$	38
4-1-5 Comparaison des résultats	39
4.2 Problème de la convection naturelle	40
4-2-1 Cavité différentiellement chauffée	40
4-2-1-1 L'effet du maillage	40
4-2-1-2 Champ d'écoulement	40
4-2-1-3 Champ thermique	41
4-2-1-4 L'effet de nombre de Prandtl	41
4-2-1-5 L'effet de nombre de Nusselt	41
4-2-2 Ecoulement de Rayleigh Benard	42

CONCLUSION	73
------------	----

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GENERALE

Le développement et la disponibilité des machines à calculer « ordinateurs » rendent leur utilisation presque inévitable et attrayante pour l'ingénieur qui peut ainsi les utiliser pour explorer de nouvelles situations.

Ainsi, il a la possibilité de prédire le phénomène physique ou étudier la réaction d'un système suite à des causes qui peuvent être vues comme des perturbations.

L'ordinateur permet l'étude de situations insoupçonnées mais malheureusement les résultats obtenus dépendent fortement du modèle mathématique que l'on a introduit, des hypothèses simplificatrices que l'on a posées et de l'algorithme numérique que l'on utilise pour le solutionner ; car la réalité physique est souvent très complexe à modéliser.

En effet de nos jours, l'ingénieur a souvent recours aux techniques de simulation numérique, car elles sont moins coûteuses que l'expérimentation directe. Elles permettent de réduire le délai des études de faisabilité, cependant ce travail reste parfois difficile à réaliser mais non pas impossible et ce grâce à l'ingéniosité du numéricien averti qui en a la charge.

Un modèle de simulation numérique est fondé sur une théorie, c'est-à-dire sur une description mathématique abstraite de certains aspects de la réalité hypothétique en termes de concepts ou de variables, de relations et de lois.

Les relations prennent le plus souvent la forme de fonctions mathématiques ou logiques ; elles décrivent la manière dont certaines variables (appelées causes, variables indépendantes, facteurs exogènes « input ») agissent sur d'autres « appelées effet, variable dépendantes, facteur endogènes, « output »).

A partir d'une théorie décrivant un phénomène quelconque, il est généralement possible soit de construire un mécanisme physique ou une maquette dont le fonctionnement présente des analogies avec le déroulement du phénomène tel que la théorie le décrit, soit d'élaborer un modèle abstrait programmable sur ordinateur, cette dernière construction est la plus aisée à mettre en œuvre, et la plus répandue dans tous les domaines dont nous citons quelques exemples : transfert thermique, aérodynamique, mécanique des fluides etc....

A ce titre, les équations de Navier-Stokes fournissent une modélisation précise de tous les écoulements des fluides, laminaires et turbulents, à l'exception de ceux pour lesquels les échanges moléculaires s'effectuent à une

échelle voisine du transport macroscopique. Vu l'énorme champ d'application des équations de Navier-Stokes, leur résolution numérique à pris, une place grandissante comme moyen d'investigation de ces écoulements fluides.

Des écoulements comme ceux qui font intervenir le changement de phase ou bien ceux que l'on rencontre en milieu semi ou confiné et pour lesquels la région de couche limite et le cœur de l'écoulement sont intimement liés, ont ainsi pu faire l'objet d'une approche numérique viable et réaliste. Ceci explique bien le fait que l'approche numérique est apte à représenter valablement un grand nombre de phénomènes physiques d'intérêt pratique et industriel. Les limitations qui se sont apparues au cours de ce développement n'étaient liées qu'aux performances des ordinateurs empêchant d'envisager la résolution de problèmes dans toute leur complexité.

Actuellement avec l'avènement du calcul vectoriel ou parallèle, on assiste à une floraison de travaux de simulation numérique ou l'on explore des problèmes toujours de plus en plus complexes en un temps de calcul de plus en plus réduit.

Dans la majorité des écoulements de fluide nous rencontrons en général les phénomènes suivants :

- Les effets de pression sont importants et les gradients de pressions sont influents.
- Le transport diffusif ne peut être négligé et ceci dans n'importe quelle direction.
- L'écoulement ne possède pas toujours la direction prédominante.

Tous ces phénomènes provoquent une recirculation de l'écoulement dont le but de notre étude est de simuler ces types d'écoulements, pour ce faire nous avons choisi deux problèmes modèles :

Le premier est la cavité entraînée qui a fait l'objet d'un développement considérable dans la littérature dû au fait qu'il permet à partir d'une géométrie simple de simuler des écoulements à nombre de Reynolds élevée qui constitue un exemple significatif pour contrôler les méthodes numériques, captant effectivement les écoulements à recirculation. [1-2-3-4]

Le deuxième est le problème de la convection-diffusion, vu son énorme champ d'application comme :

- La conception des collecteurs efficaces dans la conversion thermique de l'énergie solaire, permettant de minimiser les pertes de chaleur convective. [6]

- L'isolation des bâtiments, des avions, en ce qui concerne l'étude des flux d'énergie dans les ouvertures non ventilées, les murs multicouches, les cellules des avions et les tuyauteries.[7-8]
- La protection contre les incendies dans les avions et les bâtiments, avec deux types d'applications principales ; d'une part l'influence de la convection sur la résistance thermique des structures, notamment dans le cas de sublimation, les vaporisations des isolants et d'autre part la mise en œuvre de systèmes détecteur efficace pour localiser les débuts d'incendies surtout dans les moteurs en tenant compte des différents mouvements susceptibles de se développer.[3]
- Le problème de traitement des matériaux par des réactions chimiques, comportant un mouvement des phases fluide, exemple ; les problèmes de croissances cristalline par transport en phase gazeuse.

Les problèmes de convection-diffusion sont présents dans beaucoup de systèmes pratiques, raison pour laquelle ils ont pris ces dernières années une importance de plus en plus grande, et un manuel qui les ignorent ne sera pas scientifiquement à jour.

Sommaires toutes, l'objectif de notre travail consiste en la simulation numérique de la convection naturelle confinée en régime laminaire .

L'aspect mathématique souvent complexe de la résolution de tels équations nécessite la disponibilité d'un code de calcul. Mais à ce stade il ne faut pas se leurrer , notre Institut ne disposant pas de code commercial de type Fluent ou Phoenics , nous sommes obligés soit d'écrire nous mêmes le code « chose impossible pour des raisons évidentes » soit de se procurer un code « Free » et de l'adapter à notre problème. C'est cette dernière voie que nous avons choisie avec la disponibilité du programme fortran Team.

Pour bien expliquer notre étude le mémoire comporte les chapitres suivants :

- Le premier chapitre présente les différentes équations régissant l'écoulement et leurs dimensionalisation.
- Le deuxième chapitre est consacré à la discrétisation des équations différentielles des modèles mathématiques.
- Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons à la méthode numérique de résolution, l'algorithme du programme et sa structure.
- Le quatrième chapitre est celui de la discussions et des résultats comparés à ceux de la littératures.

CHAPITRE I

Formulation du problème

I-1 Introduction :

Dans le problème classique de la cavité entraînée, l'écoulement est engendré sous l'influence de la viscosité par le mouvement d'un des cotés de la cavité.

A l'intérieur de la cavité, le fluide se meut grâce au déplacement de la plaque. L'information est transmise de proche en proche à l'ensemble du fluide et un mouvement de rotation se crée.

L'action que nous venons de décrire est mécanique, par contre dans le cas de la convection naturelle le mouvement du fluide lorsque cela est possible (en fait sous certaines conditions que nous expliciterons plus tard) est dû à l'action simultanée des différences de température et d'un champ de forces massiques. Au contact d'un corps chaud, la température du fluide augmente, sa masse volumique décroît. Le fluide de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse de fluide chaud s'élève en enlevant de la chaleur au corps, elle est remplacée par une masse de fluide froide qui au contact du corps, s'échauffe et ainsi de suite.

Les phénomènes de convection naturelle sont décrits par les équations générales de la dynamique des fluides, complétées par l'équation de l'énergie déduite de l'application du premier principe de la thermodynamique .

I-2 Géométrie du problème :

On s'intéresse aux écoulements bidimensionnels dans des cavités. On utilise les coordonnées cartésiennes (x,y) dans la description des problèmes. Trois types de configurations physiques sont considérées.

a- Cavité entraînée :

C'est le problème de référence dans les tests de validation d'algorithmes numériques traitants d'écoulements avec recirculation..

Le domaine d'étude est schématisé sur la figure ci-dessous :

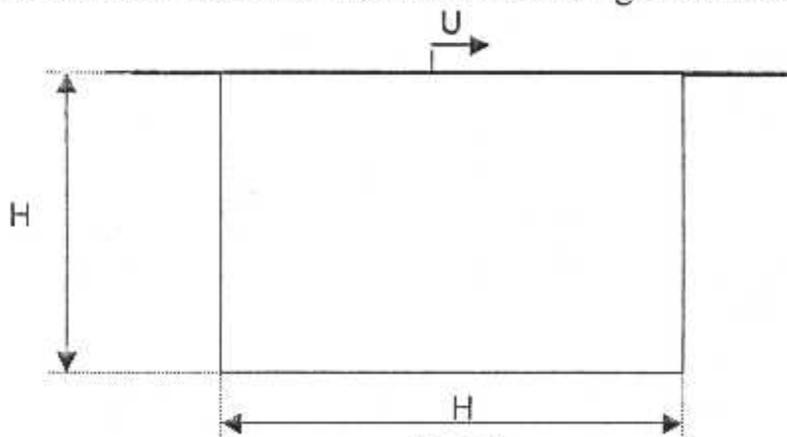


Fig.I-1

Il s'agit d'une cavité carrée, de cote H recouverte d'une plaque mobile et ayant une vitesse U (Fig.I-1).

b- Convection naturelle :

b-1- Convection naturelle dans une cavité carrée:

Considérons une cavité carrée, les parois verticales sont maintenues à température constante sous un gradient de température; l'une est froide avec une température (T_c) et l'autre est chaude avec une température (T_h).

Les parois horizontales inférieures et supérieures sont adiabatiques (Fig.I.2).

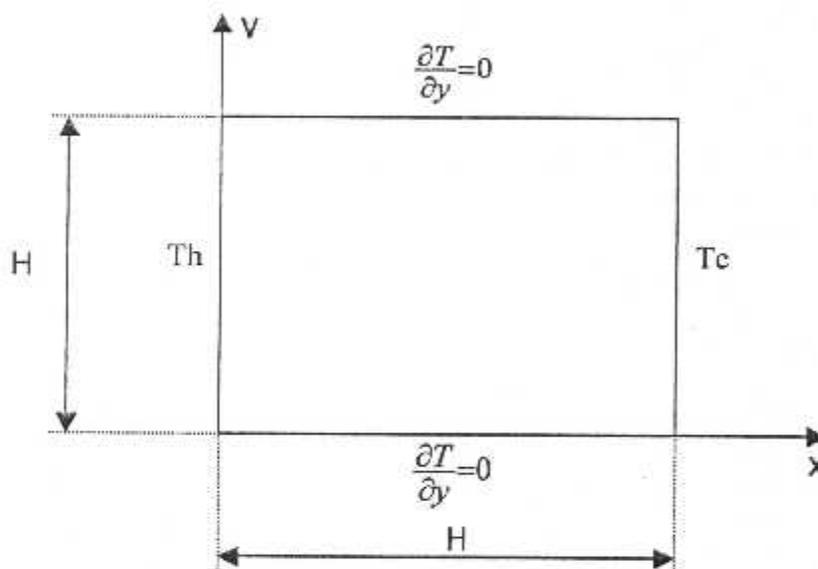


Fig.I-2

b-2- Convection naturelle dans une cavité rectangulaire (Rayleigh-Benard) :

Pour une cavité rectangulaire (la longueur égale au double de la largeur), on maintient les parois verticales adiabatiques ; et à l'instant initiale on impose un gradient de température sur les parois horizontales haute et basse de la cavité ; le coté chaud est évidemment bas car dans le cas contraire aucune recirculation n'est alors observée et l'écoulement reste stratifié.

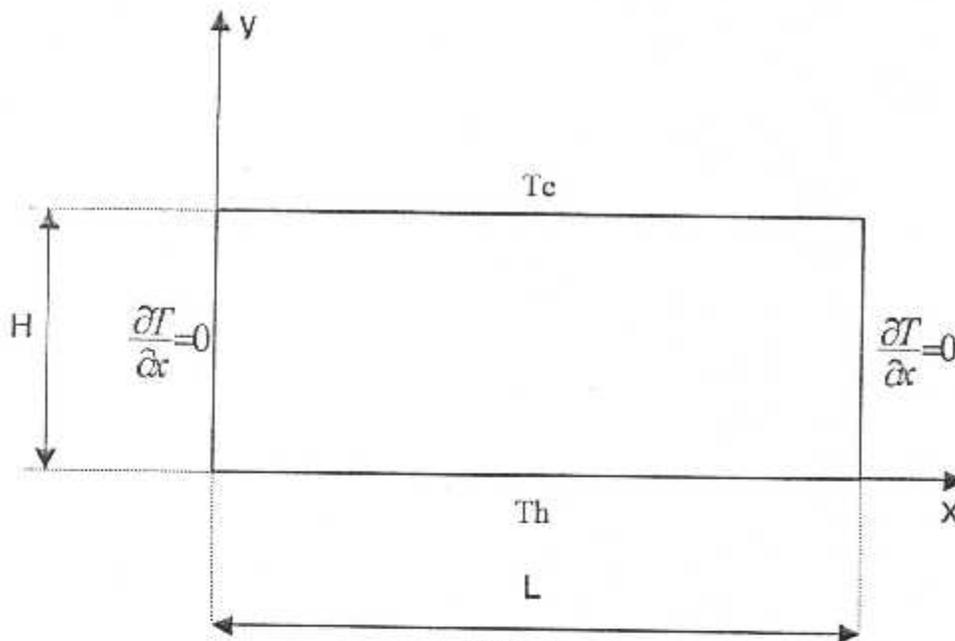


Fig.I-3

I-3 Equations régissant l'écoulement du fluide :

A l'échelle macroscopique, les problèmes de la dynamique des fluides visqueux sont tous gouvernés par la même équation, celle de Navier-Stokes. Le problème mathématique reste ouvert et ce n'est que lorsque les conditions aux limites sont fixés qu'il y'a possibilité de recherche de la solution. Celle-ci doit être bien sur unique, d'ou l'exigence d'un problème bien posé. Ceci n'excluant pas d'autres difficultés que peut rencontrer un algorithme numérique dans la résolution des problèmes de l'hydrodynamique (précisions, erreurs de discrétisations, d'arrondis, temps de calcul prohibitifs, mémoires etc...)

Un modèle mathématique doit tenir compte des mécanismes essentiels gouvernants le phénomène.

Les équations de l'hydrodynamique peuvent ainsi, selon le type d'approximation prendre les caractères elliptiques, paraboliques, hyperboliques ou mixte.

Les problèmes qui nous intéressent sont de nature elliptiques. Les conditions aux limites doivent être prescrites sur l'ensemble du domaine de calcul

La résolution d'un tel problème revient à la détermination en tout point du domaine, les grandeurs caractérisant l'écoulement sont :

- La vitesse \vec{U} par ses deux composantes :
 - u suivant l'axe OX.
 - v suivant l'axe OY.
- La distribution de la pression.
- La distribution de la température.

Pour cela on doit établir les quatre équations suivantes :

- i) Equation de continuité ou de conservation de masse.
- ii) Deux équations de quantité de mouvements.
- iii) Equation d'énergie.

I-3-1 Equation de la continuité :

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suit :

L'accumulation de masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui rentrent et celles qui sortent du volume. Il est exprimé par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}_j) = 0 \quad j : \text{indice de somme, } (j=1, 2, 3)$$

C'est l'équation de la conservation de masse d'un écoulement tridimensionnel et non permanent, elle sera simplifiée ultérieurement selon les hypothèses retenues pour notre étude

I-3-2 Equation des quantités de mouvement :

Cette équation découle de l'application de la 2^{ème} loi de Newton à un volume de contrôle élémentaire de fluide. Elle permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent.

Au premier ordre, on suppose comme Boussinesq que les variations de température n'affectent que la densité du fluide et que celle-ci restant indépendante de la pression, on fait apparaître dans les équations de quantité de mouvement un terme supplémentaire de poussée d'Archimède :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} \left[\Delta u_i + \frac{1}{3} \left(\text{grad} \left(\text{div} \vec{u} \right) \right) \right] + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} g \delta_{i,3}$$

i : indice libre, i=1, 2, 3

j : indice de somme, j=1, 2, 3

I-3-3 Equation de l'énergie :

Le fluide n'étant plus isotherme, Il est nécessaire d'y inclure une équation dans laquelle figure la température : c'est l'équation de l'énergie déduite du premier principe de la thermodynamique :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) \right) = \text{div} \left(\lambda \text{grad} T \right) + T \beta \frac{dP}{dt} + \Phi$$

I-4 Equations simplifiées :

I-4-1 Hypothèses :

- 1- Milieu continu.
- 2- Régime laminaire.
- 3- Ecoulement bidimensionnel.
- 4- Régime permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ (pour la cavité entraînée)
- 5- Fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$, $\text{div } u = 0$)
- 6- La masse volumique ρ vérifie les hypothèses de Boussinesq :
 ρ est constante est égale à ρ_0 , sauf dans le terme de la force gravitationnelle, elle est donnée par :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$

ρ_0 : la masse volumique du fluide à la température de référence T_0 et β le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

- 7- Les variations en fonction de la conductivité thermique et de la chaleur massique à pression constante sont négligeables.
- 8- La dissipation visqueuse Φ est négligeable.

En tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, les équations simplifiées s'écrivent comme suit :

I-4-2 Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

I-4-3 Equation des quantités de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_0)$$

Avec $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ est la viscosité cinématique.

I-4-4 Equation de l'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

I-5 Conditions aux limites:

La résolution de ces équations différentielles aux dérivées partielles nécessite des conditions aux limites (hydrodynamiques et thermiques) aux quatre parois de la cavité, et elles sont représentées pour les deux cas dans les tableaux suivants :

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
$X = 0$	$U = V = 0$	$T = 0$
$X = H$	$U = V = 0$	$T = 0$
$Y = 0$	$U = V = 0$	$T = 0$
$Y = H$	$U = U_{IN}, V = 0$	$T = 0$

Tab I-1. Cas de la cavité entraînée

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
$X = 0$	$U = V = 0$	$T = T_c$
$X = H$	$U = V = 0$	$T = T_h$
$Y = 0$	$U = V = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
$Y = H$	$U = V = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

Tab I-2. Cas de la cavité différentiellement chauffée

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
$X = 0$	$U = V = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
$X = L$	$U = V = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
$Y = 0$	$U = V = 0$	$T = T_h$
$Y = H$	$U = V = 0$	$T = T_c$

Tab I-3. Cas de l'écoulement de Rayleigh-Bénard.

I-6 Adimensionnalisations :

En pratique on a souvent recours à l'adimensionnalisation du système d'équation, cela permet de réduire considérablement le nombre des paramètres physiques et d'obtenir des solutions indépendantes des grandeurs du corps [9].

I-6-1 Problème de la cavité entraînée :

Dans la présente étude on ne tient pas compte des forces d'Archimède (terme de Boussinesq = 0), l'équation de l'énergie est découplée du système donc les équations de quantité de mouvement déterminent seul le mouvement.

Les adimensionnalisations sont effectuées par rapport à la vitesse de glissement U_{IN} de la paroi mobile, le coefficient de terme de diffusion est lié au nombre de Reynolds : $\Gamma = \frac{1}{Re}$

Soient les variables caractéristiques suivantes :

$$x^* = \frac{x}{H}$$

$$y^* = \frac{y}{H}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U_{in}^2}$$

$$U^* = \frac{u}{U_{in}}$$

$$V^* = \frac{v}{U_{in}}$$

a- Equation de continuité adimensionnelle :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

b- Equations adimensionnelle de Navier-Stokes :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

1-6-2 Problème de la convection naturelle :

L'élément moteur est la force ou poussée d'Archimède qui lorsqu'elle est suffisante pour vaincre les forces de viscosité initie une circulation du fluide à l'intérieur de la cavité. Cette poussée prend naissance lorsqu'une différence de température est appliquée entre les deux faces en regard d'une cavité. Les adimensionnalisations sont effectuées par rapport aux grandeurs de références.

d : longueur caractéristique [m]

$\frac{\alpha}{d}$: vitesse caractéristique [m/s]

$\rho_0 (\frac{\alpha}{d})^2$: pression caractéristique [N/m²]

$(T_h - T_c)$: température caractéristique [K]

$\alpha = \lambda / \rho_0 C_p$: coefficient de diffusion thermique [m²/s]

$$x^* = \frac{x}{d}$$

$$y^* = \frac{y}{d}$$

$$U^* = \frac{u}{(\alpha/d)}$$

$$V^* = \frac{v}{(\alpha/d)}$$

$$P^* = \frac{P}{\rho_0 (\alpha/d)^2}$$

$$\Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

a- Equation de continuité adimensionnelle :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

b- Equation de quantité de mouvement adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + Ra \cdot Pr \cdot \Theta$$

c- Equation de l'énergie adimensionnelle :

$$u^* \frac{\partial \Theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{*2}} \right)$$

Tel que :

Pr : est le nombre de Prandtl égal à $\frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$, est qui représente le rapport de la diffusivité moléculaire de la quantité de mouvement par la diffusivité thermique moléculaire.

$$Ra = Gr.Pr = \frac{g\beta(T_h - T_c)d^3}{\alpha\nu} \text{ est le nombre de Rayleigh.}$$

$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)d}{\nu^2}$ est le nombre de Grashoff qui représente les forces ascensionnelles multipliées par les forces d'inertie et divisées par le carré des forces de viscosité.

I-6-3 Conditions aux limites adimensionnelles :

Les conditions aux limites adimensionnelles sont représentées dans les tableaux suivants :

Limites	Conditions hydrodynamiques
X = 0	U = V = 0
X = 1	U = V = 0
Y = 0	U = V = 0
Y = 1	U = 1, V = 0

Tab I-4. Cas de la cavité entraînée

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
X = 0	U = V = 0	$\Theta = 1$
X = 1	U = V = 0	$\Theta = 0$
Y = 0	U = V = 0	$\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = 0$
Y = 1	U = V = 0	$\frac{\partial \Theta}{\partial y^*} = 0$

Tab I-5. Cas de la cavité différentiellement chauffée

Limites	Conditions hydrodynamiques	Conditions thermiques
X = 0	U = V = 0	$\frac{\partial \Theta}{\partial x^*} = 0$
X = 2	U = V = 0	$\frac{\partial \Theta}{\partial x^*} = 0$
Y = 0	U = V = 0	$\Theta = 1$
Y = 1	U = V = 0	$\Theta = 0$

Tab I-6. Cas de l'écoulement de Rayleigh-Bénard.

CHAPITRE II

Maillage et discrétisation

II-1 Introduction

Beaucoup des méthodes ont été développées dont l'objectif est la résolution numérique des équations non linéaire telle que celles de la mécanique des fluides, elles n'exigent pas des connaissances mathématiques poussées et sont utiles pour les études techniques où une bonne approximation de la solution est, généralement, suffisante surtout lorsqu'elle est obtenue rapidement.

L'approche numérique fournit des résultats discrets, dont il existe plusieurs méthodes de discrétisations des équations différentielles telle que : la méthode des différences finis, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis..., cette dernière utiliser dans le code consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôles entourant les nœuds du maillage, les équations sont intégrées sur chaque volume de contrôle, ce qui nous donne en un point une équation algébrique liant la variable ϕ aux valeurs des variables des points adjacents.

II-2 Forme générale de l'équation de transport

Les différents problèmes concernent les écoulements visqueux en milieu confiné. Ils sont décrit par les équations de Navier-Stokes, en utilisant les vitesses et la température locale comme variable dépendante sous la forme convection-diffusion.

Les équations peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de conservation de la quantité dépendante ϕ qui s'écrit comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j}(U_j \phi)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right)}_2 + \underbrace{S_\phi}_3 \quad (\text{II-1})$$

tel que :

Le terme (1) représente le transport de la quantité ϕ par convection.

Le terme (2) représente le transport de la quantité ϕ par diffusion.

Le terme (3) représente le terme sources/puits.

II-3-MAILLAGE

Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volume de contrôle dont chaque nœud est placé au centre de ce dernier. (Fig.II-1)

Chaque volume de contrôle de dimension $(\Delta X.\Delta Y.1)$ doit conserver les grandeurs scalaires P et T au niveau du nœud et les grandeurs vectorielles au milieu du segment reliant les deux nœuds adjacents. Ces quatre face sont repérées à l'aide des quatre point cardinaux (e,w,n,s) et les centres des volumes adjacents par (E,W,N,S).

La pression P et la température T sont stockées dans les nœuds du maillage entourés par les volumes des contrôles principaux.

Les composantes horizontales et verticales de la vitesse (U et V) sont respectivement stockées aux milieux des segments horizontaux et verticaux séparants les nœuds du maillage, ce maillage est appelé maillage central [10], qui possède les avantages suivantes :

- Une localisation des vitesses apporte une bonne estimation des flux convectifs dans les bilans des grandeurs scalaires.
- Une localisation de la pression permettant une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

Le maillage utilisé sera carrée, régulier et à pas constant. (Fig.II-1)

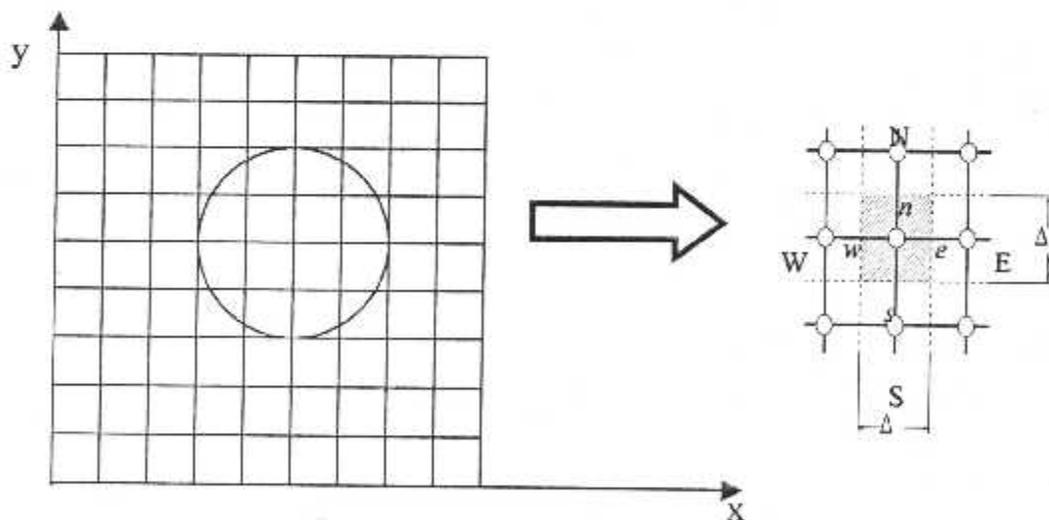


Fig.II-1

II-4 Discrétisation des équations régissant l'écoulement :

La discrétisation consiste à remplacer les équations aux dérivées partielles régissant l'écoulement, par un système d'équations algébriques. La solution d'un tel système donne les valeurs de la pression, de la température et des vitesses U et V aux différentes positions du domaine où ont été stockées ces valeurs.

II-4-1 Discrétisation de l'équation de continuité adimensionnelle:

Considérons un volume de contrôle principal, dans lequel va être intégrée l'équation en question :

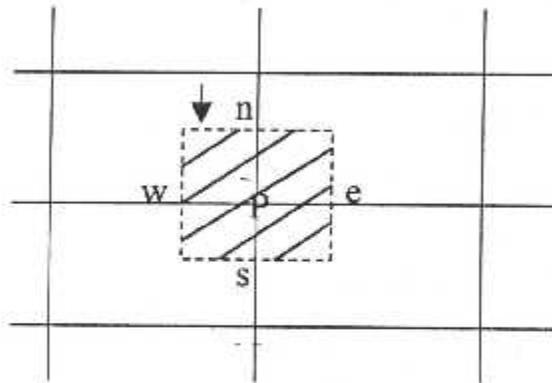


Fig.II-2

Pour un écoulement bidimensionnel, permanent et incompressible l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = 0$$

En intégrant l'équation membre à membre on aura :

$$\int_{w^*}^{e^*} \int_{s^*}^{n^*} \frac{\partial U^*}{\partial x^*} dx^* dy^* + \int_{w^*}^{e^*} \int_{s^*}^{n^*} \frac{\partial V^*}{\partial y^*} dx^* dy^* = 0$$

$$\int_{s^*}^{n^*} (U_e^* - U_w^*) dy^* + \int_{w^*}^{e^*} (V_e^* - V_w^*) dx^* = 0$$

Et donc $(U_e^* - U_w^*) \Delta y^* + (V_e^* - V_w^*) \Delta x^* = 0$ (II-2)

L'équation (II-2) est la forme discrétisée de l'équation de conservation de masse adimensionnelle.

II-4-2 Discrétisation de l'équation de transport :

L'équation de transport est intégrée sur le volume de contrôle typique, avec l'évaluation des termes (diffusif, convectif et source) aux interfaces.

Soit le volume de contrôle schématisé ci-dessous :

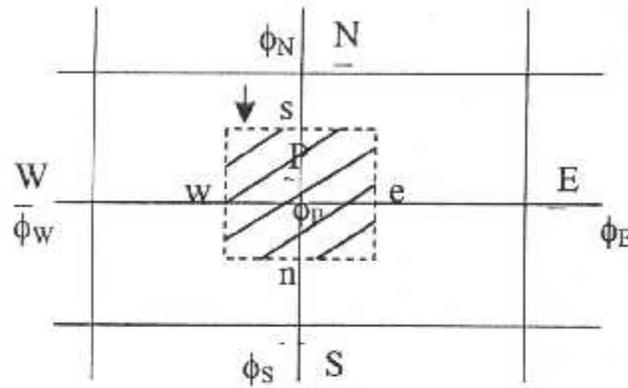


Fig.II-3

L'intégration de (II-1) dans le volume de contrôle de la Fig.(II-3) donne :

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{\partial}{\partial x} (U \cdot \phi) dx dy + \int \int \frac{\partial}{\partial y} (V \cdot \phi) dx dy = \\ & \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int \int S_e dx dy \\ \Rightarrow & \int \left[(U \cdot \phi)_e - (U \cdot \phi)_w \right] dy + \int \left[(V \cdot \phi)_n - (V \cdot \phi)_s \right] dx \\ & = \int \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dy + \int \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] dx + \int \int S_e dx dy \quad (II-3) \end{aligned}$$

a-Terme diffusif :

$$\iint \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right) dX dY + \iint \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right) dX dY = \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] dY + \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] dX$$

En appliquant le théorème de la moyenne sur les intégrales, on obtient :

$$\int \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] dY = \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y$$

$$\int \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] dX = \left[\left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X$$

Pour exprimer le terme diffusif sur les interfaces du volume de contrôle, on assume que le profil de la variation de la variable dépendante ϕ est linéaire entre les nœuds du maillage.

On aura donc :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{dX_e} \right) \\ \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial x} \right)_w &= \Gamma_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{dX_w} \right) \\ \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial y} \right)_n &= \Gamma_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{dY_n} \right) \\ \left(\frac{\Gamma \partial \phi}{\partial y} \right)_s &= \Gamma_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{dY_s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-4})$$

Pour un fluide homogène le coefficient de la diffusion est uniforme [11] on a :

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \Gamma$$

b-Terme convectif :

$$\iint \frac{\partial}{\partial X} (U \phi) dx dy + \iint \frac{\partial}{\partial Y} (V \phi) dx dy = U_e \phi_e dy - U_w \phi_w \Delta y + V_n \phi_n \Delta x - V_s \phi_s \Delta x$$

$$\left. \begin{aligned} \int (U^* \phi)_e dy^* &\approx U_e^* \phi_e \Delta y^* \\ \int (U^* \phi)_w dy^* &\approx U_w^* \phi_w \Delta y^* \\ \int (V^* \phi)_n dx^* &\approx V_n^* \phi_n \Delta x^* \\ \int (V^* \phi)_s dx^* &\approx V_s^* \phi_s \Delta x^* \end{aligned} \right\}$$

Pour évaluer les termes convectifs aux interfaces, il existe plusieurs schémas (différences centrées, upwind, hybride, quick, power law...) .

Le choix d'un schéma numérique est l'un des problèmes les plus délicat d'un numéricien de la thermohydraulique.

En effet un schéma d'ordre peu élevé peut engendrer de diffusion numérique masquant les phénomènes physiques diffusifs, des schémas d'ordres plus élevés donc plus précis peuvent quant à eux donner des phénomènes numériques d'overshoot-undershoot non physiques et par la même occasion apporter des défauts de convergence, donner des coûts de calculs prohibitifs.[10]

On choisi le schéma hybrid qui permet d'approcher le précédent profil de Φ par deux segments de droites afin d'éviter les calculs d'exponentiels coûteux.

Le schéma hybrid coïncide avec le schéma des « différences centrées » pour les valeurs du nombre de Peclet appartenant à l'intervalle [-2,2] et en dehors de l'intervalle coïncide avec les schéma « Upwind », d'où l'appellation du schéma « hybrid ». [11]

La relation qui lie la valeur de la variable à l'interface du volume de contrôle en fonction des valeurs des variables adjacentes est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e &= f_e \Phi_E + (1 - f_e) \Phi_P \\ \Phi_w &= f_w \Phi_W + (1 - f_w) \Phi_P \\ \Phi_n &= f_n \Phi_N + (1 - f_n) \Phi_P \\ \Phi_s &= f_s \Phi_S + (1 - f_s) \Phi_P \end{aligned} \right\} \quad (II-5)$$

avec $0 \leq f \leq 1$

Pe : est le nombre de Peclet qui représente le rapport du flux par convection aux flux par diffusion.

f : est un coefficient dont ses valeurs dépendent du nombre de Peclet.

Le tableau suivant représente les valeurs de f correspondantes à la variation du nombre de Peclet.

Valeur de Peclet Pe	$Pe > 2$	$-2 < Pe < 2$	$Pe < -2$
Le schéma utilisée	Décentré à gauche	Différences centrées	Décentré à droite
Le coefficient f	1	0.5	0

Tab. II-5-1

c-Terme source :

$$\iint_v S_\phi dx^* dy^* = \bar{S} \Delta X \Delta Y \quad (\text{II-6})$$

En utilisant les équations (II-4), (II-5) et (II-6), on abouti à une équation algébrique liant les valeurs de la quantité Φ aux nœuds P, E, W, N et S qui été exprimée sous forme suivante :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + S_\Phi \quad (\text{II-7})$$

Tel que : [12]

$$A_E = D_e (1 - 0.5 |Pee|) + \| -F_e, 0 \|$$

$$A_W = D_w (1 - 0.5 |Pew|) + \| F_w, 0 \|$$

$$A_N = D_n (1 - 0.5 |Pen|) + \| -F_n, 0 \|$$

$$A_S = D_s (1 - 0.5 |Pes|) + \| F_s, 0 \|$$

Avec :

$$F_e = U_e \Delta Y$$

$$F_w = U_w \Delta Y$$

$$F_n = V_n \Delta X$$

$$F_s = V_s \Delta X$$

et

$$De = \frac{\Gamma}{dXe} \Delta Y$$

$$Dw = \frac{\Gamma}{dXw} \Delta Y$$

$$Dn = \frac{\Gamma}{dYn} \Delta X$$

$$Ds = \frac{\Gamma}{dYs} \Delta X$$

II-4-3 Discrétisation de l'équation de l'énergie :

L'équation d'énergie adimensionnelle s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) = U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

$$\text{Soit donc } \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (\text{II-8})$$

L'intégration de (II-8) sur le volume de contrôle de la Fig.(II-3) donne :

$$\int \int \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) dx^* dy^* + \int \int \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) dx^* dy^* = \int \int \frac{\partial}{\partial x^*} (U^* T^*) dx^* dy^* + \int \int \frac{\partial}{\partial y^*} (V^* T^*) dx^* dy^*$$

Donc :

$$\int \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_n \right] dy^* + \int \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_e - \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n \right] dx^* = \int \left[(U^* T^*)_e - (U^* T^*)_n \right] dy^* + \int \left[(V^* T^*)_e - (V^* T^*)_n \right] dx^* \quad (\text{II-9})$$

En assumant que U^* et V^* restent constante le long des faces des volumes de contrôle et que $\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)$, $\left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)$ varient linéairement le long de ces faces on obtient donc :

$$\left. \begin{aligned}
 \int (U^* T^*)_e dy^* &\approx U_e T_e \Delta y^* \\
 \int (U^* T^*)_w dy^* &\approx U_w T_w \Delta y^* \\
 \int (V^* T^*)_n dx^* &\approx V_n T_n \Delta x^* \\
 \int (V^* T^*)_s dx^* &\approx V_s T_s \Delta x^* \\
 \\
 \int \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e dy^* &\approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* \\
 \int \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w dy^* &\approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* \\
 \int \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n dx^* &\approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* \\
 \int \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s dx^* &\approx \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^*
 \end{aligned} \right\} \quad (II-10)$$

En remplaçant (II-10) et (II-9) on obtient :

$$\left(U_e T_e \Delta y^* \right) - \left(U_w T_w \Delta y^* \right) + \left(V_n T_n \Delta x^* \right) - \left(V_s T_s \Delta x^* \right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* - \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* - \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* \quad (II-11)$$

a- La cavité entraînée

Les deux équations pour U^* et V^* données par les équations de Navier-Stocks peuvent s'écrire sous la forme générale de L'équation de transport où Γ correspond à Re qui est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (V \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi, \dots\dots\dots(II-12)$$

Le tableau suivant donne les variables et les coefficients des équations qui gouvernent le phénomène physique pour la cavité entraînée.

Equation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement X	U	$\frac{1}{Re}$	$\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement Y	V	$\frac{1}{Re}$	$\frac{\partial P}{\partial y}$

a-1 Terme convectif :

$$\int (U^* \phi) dy^* \approx U_i \phi_i \Delta y^*$$

$$\int (U^* \phi) dy^* \approx U_i \phi_i \Delta y^*$$

$$\int (V^* \phi) dx^* \approx V_j \phi_j \Delta x^*$$

$$\int (V^* \phi) dx^* \approx V_j \phi_j \Delta x^*$$

a-2 Terme diffusif :

$$\int \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e dy^* \approx \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_e \frac{\phi_e - \phi_p}{d x^*} \Delta y^*$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w dy^* \approx \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_w \frac{\phi_p - \phi_w}{d x^*} \Delta y^*$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n dx^* \approx \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_n \frac{\phi_n - \phi_p}{d y^*} \Delta x^*$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s dx^* \approx \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right)_s \frac{\phi_p - \phi_s}{d y^*} \Delta x^*$$

$$\left(U_e \Delta y^* \right) \phi_e - \left(U_w \Delta y^* \right) \phi_w + \left(V_n \Delta x^* \right) \phi_n - \left(V_s \Delta x^* \right) \phi_s =$$

$$\left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta y^* \right)_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e - \left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta y^* \right)_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w + \left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta x^* \right)_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n - \left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta x^* \right)_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s + \iint S_\phi dV$$

a-3 Terme source

$$S_\phi = \Delta y^* (P_w^* + P_p^*) \quad \text{ou} \quad S_\phi = \Delta x^* (P_s^* + P_p^*)$$

b- La convection naturelle :

L'équation de quantité de mouvement couplée avec celle de l'énergie modélise le problème de la diffusion-convection :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (U \phi) + \frac{\partial}{\partial y^*} (V \phi) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(P_x \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(P_y \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right) + S_\phi \quad (\text{II-13})$$

Le tableau suivant rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent le phénomène physique de la convection naturelle :

Equation	Φ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement suivant Y	V	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial y} + RaPr\Theta$
Energie	T	1	0

b-1 Terme convectif :

$$\int (U^* \phi)_e dy^* \approx U_e \phi_e \Delta y^*$$

$$\int (U^* \phi)_w dy^* \approx U_w \phi_w \Delta y^*$$

$$\int (V^* \phi)_n dx^* \approx V_n \phi_n \Delta x^*$$

$$\int (V^* \phi)_s dx^* \approx V_s \phi_s \Delta x^*$$



b-2 Terme diffusif :

$$\int \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e dy^* \approx (Pr)_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_e \Delta y^* = (Pr)_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x^*} \Delta y^*$$

$$\int \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w dy^* \approx (Pr)_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)_w \Delta y^* = (Pr)_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x^*} \Delta y^*$$

$$\int \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n dx^* \approx (Pr)_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_n \Delta x^* = (Pr)_n \frac{\phi_n - \phi_p}{\Delta y^*} \Delta x^*$$

$$\int \left(Pr \frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s dx^* \approx (Pr)_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^*} \right)_s \Delta x^* = (Pr)_s \frac{\phi_p - \phi_s}{\Delta y^*} \Delta x^*$$

a-3 Terme source

$$S_\phi = \Delta y^* (P_w^* + P_p^*) \quad \text{ou}$$

$$S_\phi = \Delta x^* (P_i^* + P_r^*) + \Delta x^* \Delta y^* \text{Pr} \cdot \text{Ra} \cdot \Theta$$

II-4-4 Discrétisation de la fonction de courant :

On introduit la fonction de courant ψ en rappelant sa définition par rapport aux composantes de la vitesse :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En intégrant sur le volume de contrôle de V, on aura :

$$\iint V dx dy = -\iint \frac{\partial}{\partial x} (\psi) dx dy$$

\Rightarrow

$$V(i,j) \Delta X \Delta Y = -(\psi_e - \psi_w) \Delta Y$$

\Rightarrow

$$V(i,j) \Delta X = -(\psi_e - \psi_w)$$

Et finalement :

$$\psi_e = \psi_w - \Delta X \cdot V(i,j)$$

Sous la forme indicielle :

$$\psi(i+1, j) = \psi(i, j) - \Delta X \cdot V(i, j)$$

II-4-5 Discrétisation de la fonction tourbillon :

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

\Rightarrow

$$\omega = \frac{U_e - U_w}{\Delta y} - \frac{V_n - V_s}{\Delta x}$$

II-4-6 Discrétisation des conditions aux limites :

a- Cavité entraînée :

	Vitesse	Coefficients A	Terme source
X = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0
X = 1	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0
Y = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0
Y = 1	U = 1 V = 0	Ae = Aw = As = 0 Ap = An = 1	S ϕ = 0

b- Cavité différentiellement chauffée :

	Vitesse	Coefficients A	Terme source	Température
X = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\theta = 0$
X = 1	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\theta = 1$
Y = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$
Y = 1	U = V = 0	Ae = Aw = As = 0 Ap = An = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$

c- Ecoulement de Rayleigh Bénard :

	Vitesse	Coefficients A	Terme source	Température
X = 0	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$
X = 1	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\Delta\theta = 0$
Y = 0	U = V = 0	Ae = An = As = 0 Ap = Aw = 1	S ϕ = 0	$\theta = 1$
Y = 1	U = V = 0	Ae = Aw = An = As = 0 Ap = 1	S ϕ = 0	$\theta = 0$

CHAPITRE III

*Méthodes numériques et
structure du programme*

III-1 Introduction :

Vu l'incapacité des méthodes analytiques d'aboutir à des résultats dans la majorité des problèmes, une méthode numérique s'impose pour la résolution de ces problèmes. Le choix de la méthode a été porté sur la technique des volumes finis et ceci en vertu de leur large champs d'application dans des problèmes complexes.

Pour la structure du programme nous avons gardé celle le code TEAM tout en apportant les modifications adéquates, pour être en conformité avec nos chapitres précédents.

III-2 Présentation du code TEAM:

Durant des années de nouveaux schémas et technique numérique sont apparus pour permettre aux chercheurs d'accélérer leurs recherches et d'apporter des améliorations à la connaissance.

L'un de ces techniques est le code TEAM : un programme basé sur la méthode des volumes finis ou des différences finis pour la simulation des écoulements turbulents bi - dimensionnels stationnaires. Quelques améliorations ont été incorporées sur le programme présent pour atteindre une meilleure performance que celle de TEACH qui a été étudiée pour la première fois dans l'université d'ARIZONA en janvier 1974, durant dix ans après, TEACH a été utilisé par de nombreux chercheurs.

Le programme Fortran TEAM a été écrits par W.Pun et Runchal de l'Impérial College of London. Il utilise la technique des volumes finis spécialement conçu pour la résolution de problèmes de dynamiques des fluides de types elliptiques bidimensionnels. C'est un prolongement du code Teach.

Le code peut être appliqué à un écoulement plan ou axisymétrique et la limite de l'écoulement peut être une paroi, un plan, l'axe de symétrie ou un entraînement le long de la limite avec la pression statique est généralement connue. La partie délicate dans le code est la pré-détermination d'un arrangement de maillage avec une flexibilité considérable qui est offerte quand le maillage est non uniforme. Le TEAM plus performant que le TEACH, car il utilise l'interpolation quadratique (Quick) [2] ou l'interpolation (PLDS) [13] pour la discrétisation des termes convectifs le schéma (HYBRID)[13] et en plus le choix d'utiliser un algorithme efficace (SIMPLE) [13] pour la corrélation entre vitesse et pression conduit à une bonne convergence.

III-3 Méthode itérative de solution (Algorithme TDMA) :

Le système d'équations algébriques non linéaires contient (NI-2) (NJ-2) équations, après incorporation des conditions aux limites, avec Ni et NJ représentent respectivement les nombres totaux des nœuds suivant X et Y.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + \overline{S}_\phi$$

le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\phi \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} : \text{est une matrice de (NI-2)(NJ-2) éléments.} \\ \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} : \text{vecteur des inconnues } \phi(i,j) \end{cases}$$

la résolution directe du système étant compliquée, on utilise donc une méthode de résolution itérative qui détermine les valeurs de la variable ϕ sur chaque colonne indépendamment des autres colonnes. Ainsi pour déterminer les valeurs de la variable sur la colonne (i), on suppose que ses valeurs sont connues sur les colonnes (i-1) et (i+1).

L'équation algébrique est alors réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues (ϕ_P, ϕ_N, ϕ_S).

l'équation algébrique s'écrit, pour le nœud (i,j) du maillage :

$$-A_S(i,j)\phi(i,j-1) + A_P(i,j)\phi(i,j) - A_N(i,j)\phi(i,j+1) = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + \overline{S}_\phi(i,j) \quad (\text{IV-1})$$

On posant :

$$a_j = A_P(i,j)$$

$$b_j = A_N(i,j)$$

$$c_j = A_S(i,j)$$

$$d_j = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + \overline{S}_\phi$$

L'équation (IV-1) s'écrit sous la forme suivante :

$$-c_j \phi_{j-1} + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \quad \dots \dots \dots (\text{IV-2})$$

avec : $c_1 = 0$ et $b_{NJ} = 0$

pour tous les nœuds [j=2,NJ] de la colonne, on a un système de la forme :

$$\left(\begin{array}{l} -c_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_2\phi_3 \dots \dots \dots = d_2 \\ 0 - c_3\phi_2 + a_3\phi_3 - b_3\phi_4 \dots \dots \dots = d_3 \\ \vdots \\ 0 - c_{NJ}\phi_{NJ-1} + a_{NJ}\phi_{NJ} - b_{NJ}\phi_{NJ+1} \dots \dots \dots = d_{NJ} \end{array} \right) \quad (IV-3)$$

la matrice associée au système est tridiagonale, on utilise l'algorithme TDMA pour la résoudre.

Les équations (IV-3) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j} \phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j}$$

d'où :

$$\phi_2 = \frac{c_2}{a_2} \phi_1 + \frac{b_2}{a_2} \phi_3 + \frac{d_2}{a_2}$$

⋮

$$\phi_{NJ} = \frac{c_{NJ}}{a_{NJ}} \phi_{NJ-1} + \frac{b_{NJ}}{a_{NJ}} \phi_{NJ+1} + \frac{d_{NJ}}{a_{NJ}}$$

puisque ϕ_1 est connu, on élimine ϕ_2 puis ϕ_3 et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une relation de récurrence ϕ_j .

$$\phi_j = P_j \phi_{j+1} + Q_j \quad \dots \dots \dots \quad (IV-4)$$

détermination de P_j et Q_j :

pour le nœud (i,j-1), on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1} \quad \dots \dots \dots \quad (IV-5)$$

En remplaçant (IV-5) dans (IV-4) on obtient :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j$$

d'où on a :

$$(a_j - c_j P_{j-1}) \phi_j = d_j + c_j \phi_{j-1} + b_j \phi_{j+1}$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad \dots \dots \dots \quad (IV-6)$$

de (IV-4) et (IV-6) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}}$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j-1} + \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}}$$

On dit finalement qu'on a résolu la matrice en faisant un balayage suivant X (colonne par colonne).

Pour la résolution de la matrice en faisant un balayage suivant Y (ligne par ligne), on utilisera les mêmes étapes que le balayage suivant X, en supposant que les valeurs de la variable ϕ sur les lignes (j-1) et (j+1) sont connues.

III-4 Equation algébrique de pression :

Les composantes des équations des quantités de mouvement sont couplées par la pression qui agit par les composantes de son gradient, or nous ne disposons pas d'équation propre à cette variable.

L'idée de Patankar et Spalding [13] consiste à utiliser l'équation de continuité pour obtenir le champ de pression, car si le bon champ de pression est pris en compte dans le traitement des équations des quantités de mouvement, alors les vitesses obtenus vérifient l'équation de continuité. Donc cette dernière apparaît comme une contrainte à vérifier par le champ de pression.

Reprenons les équations de quantité de mouvement suivant X et Y.

$$\begin{cases} A_p^u U_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^u U_{nb} + \bar{S}_u \\ A_p^v V_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^v V_{nb} + \bar{S}_v \end{cases}$$

On introduisant les pseudo-vitesses u, v :

$$\hat{U}_e = \frac{\sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb} + \bar{b}_u)}{A_e^u}$$

$$\hat{U}_w = \frac{\sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb} + \bar{b}_u)}{A_w^u}$$

$$\hat{V}_n = \frac{\sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb} + \bar{b}_v)}{A_n^v}$$

$$\hat{V}_s = \frac{\sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb} + \bar{b}_v)}{A_s^v}$$

Tel que b_u et b_v ne contiennent pas de termes de pression donc :

$$b_u = 0$$

$$b_v = Ra \cdot Pr \cdot \theta$$

Les relations de la correction des vitesses U_e , U_w , V_n et V_s aux niveaux des interfaces s'écrivent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} U_e &= \hat{U}_e + (P_P - P_E) \frac{\Delta Y}{A_P^u} \\ U_w &= \hat{U}_w + (P_W - P_P) \frac{\Delta Y}{A_P^u} \\ V_n &= \hat{V}_n + (P_P - P_N) \frac{\Delta X}{A_P^v} \\ V_s &= \hat{V}_s + (P_S - P_P) \frac{\Delta X}{A_P^v} \end{aligned} \right\} \quad (IV-7)$$

En intégrant l'équation de continuité sur le volume de contrôle typique, on obtient :

$$(U_e - U_w) \Delta Y + (V_n - V_s) \Delta X = 0 \quad (IV-8)$$

En remplaçant U_e , U_w , V_n et V_s par leurs valeurs (IV-7) dans l'équation (IV-8), on obtient l'équation de pression :

$$A_P^u P_P = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^u P_{nb} + \bar{S}_P$$

Avec :

$$A_E^p = \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y$$

$$A_W^p = \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y$$

$$A_N^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X$$

$$A_S^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X$$

$$A_P^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p$$

$$\overline{S}_P = (\hat{U}_w - \hat{U}_e) \Delta Y + (\hat{V}_w - \hat{V}_n) \Delta X$$

III-5 Schéma de calcul SIMPLE :

1. Initialisation des variables U^* , V^* , P^*
2. Calcul des coefficients effectifs de transport
3. Assembler les coefficients de U (équation de temps)
4. Imposer des conditions aux limites par modification des coefficients et des sources
5. Résoudre le champs de vitesse (U) et (V)
6. Résoudre le champs de pression (P)
7. Ajuster les vitesses
8. Prendre la valeur de la pression et aller a l'étape 2

III-6 Le terme transitoire :

La forme linéarisée discrète de l'équation de convection diffusion s'écrit :

$$A_p \phi_p = \sum_{nb = E, W, N, S} A_{nb} \phi_{nb} + \overline{S}_\phi$$

Comme les valeurs de ϕ peuvent varier fortement d'une itération à la suivante, on est conduit à introduire le terme transitoire pour améliorer la convergence [12], qui consiste à utiliser la forme discrète de l'équation de transport avec terme instationnaire qui s'écrit :

$$\frac{\Delta X \Delta Y}{\delta t} (\phi_p - \phi_p^0) + a_p \phi_p = \sum_{nb = E, W, N, S} A_{nb} \phi_{nb} + \overline{S}_\phi$$

soit :

$$\varphi_p \left(A_p + \frac{\Delta X \Delta Y}{\delta t} \right) = \sum_{nb = E, W, N, S} A_{pb} \varphi_{nb} + \overline{S_\phi} + \frac{\Delta X \Delta Y}{\delta t} \varphi_p^0$$

Tel que :

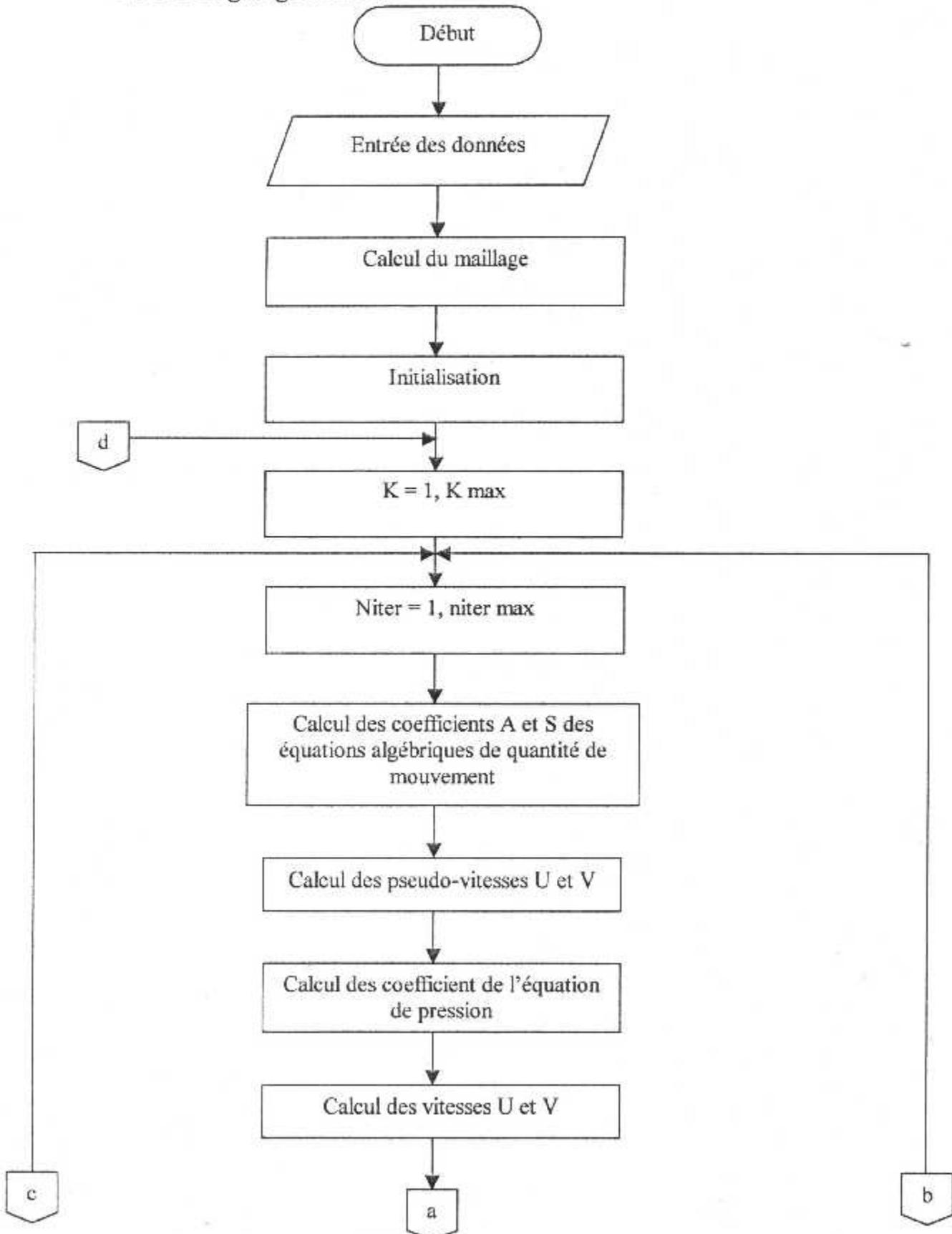
φ_p^0 : la valeur de l'itération précédente.

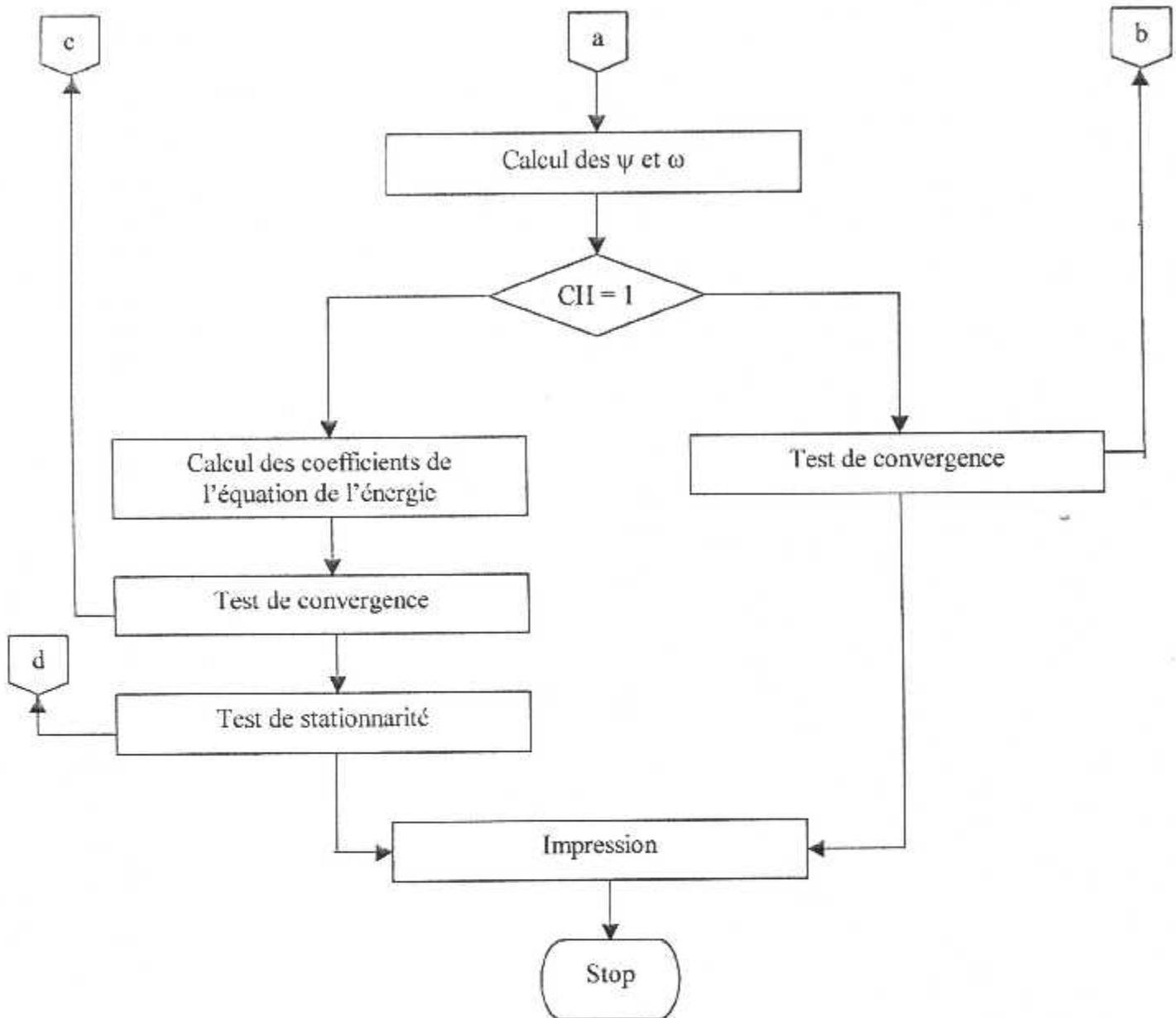
III-7 Critère de convergence :

La convergence est vérifiée après chaque itération en comparant la somme des valeurs absolues des sources résiduelles ($\sum |R_\phi|$) sur tous les volumes de contrôles pour chaque variable ϕ avec une variable de référence R_ϕ ou le résidu s'écrit :

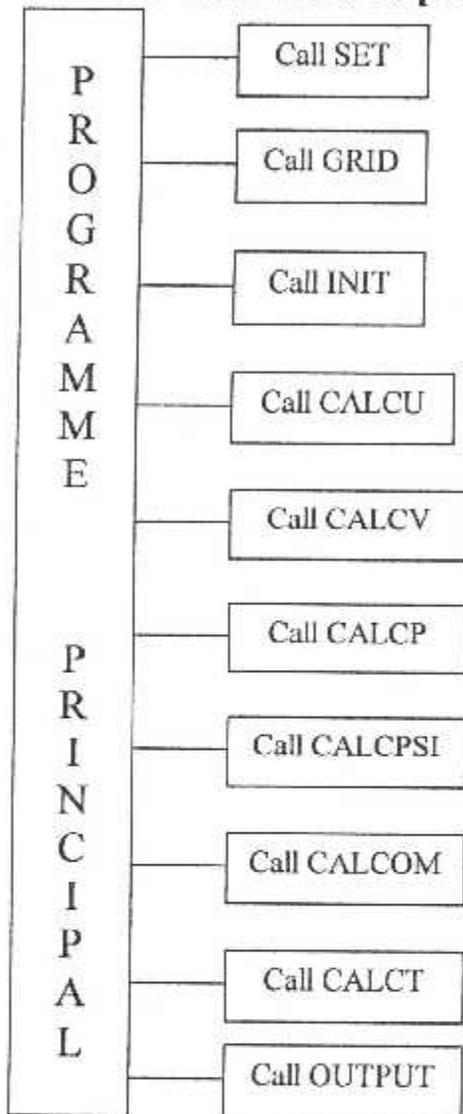
$$R_\phi = A_p \phi_p - \sum_{nb = E, W, N, S} A_{nb} \phi_{nb} + \overline{S_\phi}$$

Dans notre travail la convergence est supposée atteinte lorsque la somme des sources résiduelles normalisées pour chaque variables ϕ est inférieure à 10^{-4} .

III-8 Programme de simulation :**III-8-1 Organigramme :**



III-8-2 Structure du programme :



Le programme principal fait appel à 10 sousroutines (voir figure ci-dessus).

La sousroutine **SET** : initialise les paramètres de contrôle.

La sousroutine **GRID** : calcul les coordonnées du maillage.

La sousroutine **INIT** : initialise les paramètres physiques.

La sousroutine **CALCU** : calcul des pseudo U.

La sousroutine **CALCV** : calcul des pseudo V.

La sousroutine **CALCP** : calcul de champ de pression et les champs des vitesses.

La sousroutine **CALCPSI** : calcul de la fonction de courant.

La sousroutine **CALCOM** : calcul de la vorticité.

La sousroutine **CALCT** : calcul du champ des températures.

La sousroutine **OUTPUT** : afficher les résultats.

III-8-3 Installation du programme :

Afin de faciliter l'accès et la manipulation de notre programme, nous avons créé une disquette d'installation qui permet par un simple double clic sur le fichier SETUP, l'installation du programme comme un logiciel ordinaire.

A la fin de l'installation il apparaît sur le bureau un icône du fichier exécutable « ALG-NIG.EXE » et une autre dans la barre de tâches.

Pour l'exécution, un double clic sur l'un des deux icône permet l'affichage sur l'écran d'une fenêtre permettant le choix de modèle :

Le choix 1 : pour la cavité entraînée.

Le choix 2 : pour la cavité différentiellement chauffée.

Le choix 3 : pour l'écoulement de Rayleigh-Bénard.

Pour tracer les graphes sur TECPLOT consulter le fichier « ALG-NIG1.TEC ».

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV- DISCUSSION DES RESULTATS

IV-1/ PROBLEME DE LA CAVITE ENTRAINEE :

IV-1-1/ Courbes des fonctions de courant :

Fig.(IV-1),(IV-2),(IV-3), (IV-3), (IV-5), (IV-6)

Ce sont des courbes représentant les contours des fonctions de courant pour des nombres des Reynolds de 1,100, 1000, 4000, 7000 et 10000 respectivement. Elles montrent l'allure que possède l'écoulement à l'intérieur de la cavité.

On remarque que le centre du vortex change de position quand Reynolds change de valeur ; le centre du vortex s'éloigne de la plaque mobile tout en se déplaçant dans le sens du mouvement de cette dernière, quand le nombre de Reynolds augmente , comme le montre le tableau suivant :

Re	1	100	1000	4000	7000	10000
Yc	0.761	0.734	0.561	0.512	0.510	0.495

On remarque aussi que près de la paroi mobile l'écoulement est plus intense (grande concentration de lignes de courant) et que le frottement est plus élevé près de l'angle supérieur droit de la cavité et tout cela est dû au fait que le fluide en présence est visqueux et que le gradient de vitesse croit de gauche à droite.

Sur la courbe (IV-3) pour $Re = 1000$ à 10000 il y'a apparition de vortex dans les angles inférieurs. Ce qui n'est pas le cas pour les courbes pour $Re = 1$ et 100 . Ceci est dû à l'intensité des forces d'inerties, et les particules fluide proche des coins de la cavité se trouvent entraînées de plus en plus vite et deviennent en quelque sorte prisonnières du mouvement de l'ensemble du fluide.

L'ensemble des figures trouvées est conforme à celui publiés par la littérature, certains résultats ont même été amélioré puisque nous avons été capable d'aller jusqu'à de nombre de Reynolds égal à 10000 . L'auteur [3] a présenté des résultats que pour des nombre de Reynolds inférieurs ($Re \leq 7000$).

IV-1-1/ Courbes de fonction tourbillon :

Fig.(IV-7),(IV-8),(IV-9), (IV-10), (IV-11), (IV-12)

On constate plus d'intensité de la vorticité, près de la paroi verticale droite, à cause des gradients de vitesse et de pression élevés dans cette zone, et tendance à longer tout le long de la paroi, quand le nombre de Reynolds augmente.

L'observation de ces courbes montre une parfaite concordance avec celle obtenues précédemment (fonction de courant); elle confirme l'exactitude de nos calculs et le bien fondé de la modélisation.

La méthode des volumes finis employé est parfaitement capable de suivre un tel écoulement.

IV-1-2/ COURBE DE $U/UP = f(y/H) : (IV-13)$

Les figures (IV-13) montrent les profils de la composante horizontale de la vitesse U/Up en fonction de y/H pour un maillages de (41x41), pour un nombre de Reynolds égal à 1.

La distribution commence à décroître à partir de la valeur maximale $U/Up = 1$ tout en restant positives (phase aller de droite à gauche) puis elle s'annule aux alentours du milieu de la cavité où le bloc central tourne autour de lui-même.

La distribution prend ensuite des valeurs négatives (phase retour de gauche à droite) pour s'annuler une deuxième fois au fond de la cavité (paroi inférieure).

Il apparaît d'une façon bien claire qu'il y'a une variation linéaire de la vitesse en fonction de y_p à proximité de la plaque mobile et ceci vu que l'on a considéré l'écoulement du type couette dans cette région de la cavité.

Il est a noter que l'aire comprise entre le plan central vertical est la partie positive de la courbe est sensiblement égal à l'aire comprise entre le même plan et la partie négative de la courbe et ceci est dû au fait qu'il y'ait conservation des quantités transportables en question.

IV-1-3/ COURBE DE $V/UP = f(x/H) : (IV-14)$

Elle montre le profil de la composante verticale de la vitesse V/Up en fonction de x/H dans le plan central horizontal, pour $Re = 1$ et un maillage de (41x41).

La distribution croit depuis la valeur 0 jusqu'à atteindre un maximum de 14% Up ; elle décroît ensuite jusqu'à s'annuler aux alentours du milieu de la cavité, c'est la partie où le fluide est en mouvement ascendant.

Ensuite le profil possède des valeurs négatives dont le sommet est à 14 % Up en valeur négative et finalement il s'annule pour $x/H = 1$ (paroi Est) (mouvement descendant).

On remarque que pour cette distribution qu'il y'a une symétrie par rapport au point $x/H = 0.5$ sur le plan central horizontal.

Pour les deux distributions on peut noter que l'aire comprise entre le plan central horizontal et la partie positive du profil est aussi sensiblement égale à l'aire comprise entre le même plan et la partie négative du profil et aussi pour la même raison que précédemment.

IV-1-4/ COMPARAISON DES RESULTATS :

Dans le tableau suivant les coordonnées du vortex sont données pour l'étude présente, celle rapportées par Burggraf [1]et celle rapportées par Al-Sanea, WnPun and DB Spalding [2]

	Re	Maillage	Xc	Yc
Etude présente	1	(16x16)	0.500	0.779
Burggraf	1	(16x16)	0.50	0.77
Etude présente	1	(51x51)	0.500	0.760
Référence (8)	1	(51x51)	0.50	0.76

	Re	Maillage	Xc	Yc
Etude présente	400	(20x20)	0.610	0.661
Burggraf	400	(20x20)	0.57	0.62
Etude présente	400	(41x41)	0.574	0.620
Référence (8)	400	(41x41)	0.54	0.67

IV-2 PROBLEME DE LA CONVECTION NATURELLE :

IV-2-1 Cavité différentiellement chauffée :

IV-2-1-1 L'effet du maillage : Fig.(IV-15)

Afin d'avoir une idée sur l'effet de la densité du maillage sur les résultats numérique nous traçons le graphique donnant le maximum du résidu en fonction de la taille du maillage.

La courbe obtenue est décroissante jusqu'à une taille de (41×41) puis elle devient pratiquement constante ce qui explique l'indépendance des résultats vis à vis de la taille du maillage. On peut affirmer que la taille optimale est celle correspondante à (41×41)

IV-2-1-2 CHAMP D'ECOULEMENT :

La Fig.(IV-16) représente les contours de la fonction de courant pour une cavité carrée pour trois cas des nombres de Rayleigh ($Ra = 10^3, 10^5, 10^6$).

Pour un nombre de Prandtl égale à (0.71) on remarque tout d'abord sur la Fig. (IV-16.a) (cas $Ra = 10^3$) qu'il y a mouvement du fluide dans le sens des horaires c'est à dire de la paroi chaude vers la paroi froide.

Au cours de son trajet, la particule fluide absorbe de la chaleur de la paroi chaude, sa température s'élève fait un mouvement ascendant en allant céder de la chaleur à la paroi froide tout en descendant et revient lécher la paroi chaude et les mêmes phénomènes se reproduisent.

On distingue trois structure dans ces figures : les couches limites verticales, les couches limites horizontales et la région de la cellule.

Pour les nombres de Rayleigh croissant, les couches limites deviennent minces et la région de la cellule s'élargissait et se disloquerait. Dans ce cas apparaîtrait un autre régime à étudier. Ce phénomène est expliqué par l'augmentation de l'inertie, donc des vitesses de convection.

« Les comparaisons des profils de vitesses verticales V au centre de la cavité pour le même nombre de Prandtl et pour les nombre de Rayleigh ($10^3, 10^5, 10^6$) représentent dans les Fig.(IV-17-a, 17-b, 17-c), Fig.(IV-19-a, 19-b, 19-c). la première remarque à faire est qu'il y a conservation du débit, la deuxième est que la couche limite se développe et la région de stratification s'agrandie avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et ce qui est particulièrement intéressant est le renversement du mouvement du fluide au centre de la cavité ($x = 0.5$), cela est due à la forte vorticité près des parois.

Les profils des [14-15-16] sont similaire aux profils de la présente étude avec une faible erreur qualitative. »

IV-2-1-3 Champ thermique :

Les champs thermique présentés par les contours de température pour Ra (10^3 , 10^5 , 10^6), et $Pr=0.71$ sont exposés dans les **Fig.(IV21-a, 21-b, 21-c)**.

La **Fig.(IV-21-a)** montre que la température décroît au long des parois horizontales et que les gradients des températures sont relativement importants près de la paroi froide à droite et près de la paroi chaude à gauche.

Avec l'accroissement du nombre de Rayleigh, les gradients de température deviennent de plus important **Fig.(IV-21-b, 21-c)**. Cette augmentation entraîne une augmentation du flux de chaleur près des parois.

Les profils de température des études [14-15-16] coïncident avec les profils de la présente étude pour les valeurs ($Ra=10^3$, $Ra=10^5$, $Ra=10^6$, pour $Pr=0.71$)

IV-2-1-4 L'effet de Prandtl :

Le nombre de Prandtl n'a pas un très grand effet sur l'écoulement pour un nombre de Ra ($Ra=10^3$) petit sur la fonction de courant comme le montre les **fig.(IV-22-a-b-c)**, et sur les profils des vitesses, **Fig.(IV-25-a)** et **Fig.(IV-26-a)**.

L'effet de Prandtl ne peut être considéré que si le nombre de Rayleigh augmente au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente [14].

Nous constatons l'effet à partir de Rayleigh supérieur ou égale à 10^5 , respectivement **Fig.(IV-23-a-b-c)**, **Fig.(IV-25-a-b-c)** à $Ra=10^5$, **Fig(IV-24-a-b-c)**, **Fig.(IV-26-a-b-c)** à $Ra=10^6$ pour la fonction de courant et le champs de température **Fig.(IV-25-b-c)** à $Ra=10^5$, **Fig.(IV-26-b-c)** à $Ra=10^6$ pour les profils des vitesses.

IV-2-2 Ecoulement de Rayleigh – Bénard

Nous avons étudié ce type d'écoulement décrit précédemment, en effet, nous avons traité ce type d'écoulement pour un nombre de Rayleigh égal à 6060 (travaux de K.Perks [réf]) correspondant aux caractéristiques suivant :

- dimension cavité 0.1m x 0.05m
- différence de température 2 °K (401°K – 399°K)
- nombre de Prandtl..... 0.71

A la différence du cas précédent, lorsque la cavité est chauffée par la base, la convection naturelle n'apparaît qu'à partir d'une valeur seuil du nombre de Rayleigh (ou du ΔT). En effet, tant que $Ra < 1708$ [, le fluide reste stratifié et le transfert thermique est purement conductif **Fig(IV-31-a)**. Dès que $Ra > 1708$, la convection naturelle apparaît tout d'abord sous forme de cellules de Bénard (du nom de celui qui étudia ce phénomène en 1900), boucles de recirculations à sens alternés bidimensionnelles et à section quasi-carrée **Fig(IV-31-b)** pour $Ra = 1710$, **Fig(IV-32)** pour $Ra = 1.80 E+3$, **Fig(IV-33)** pour $Ra = 6.06 E+3$.

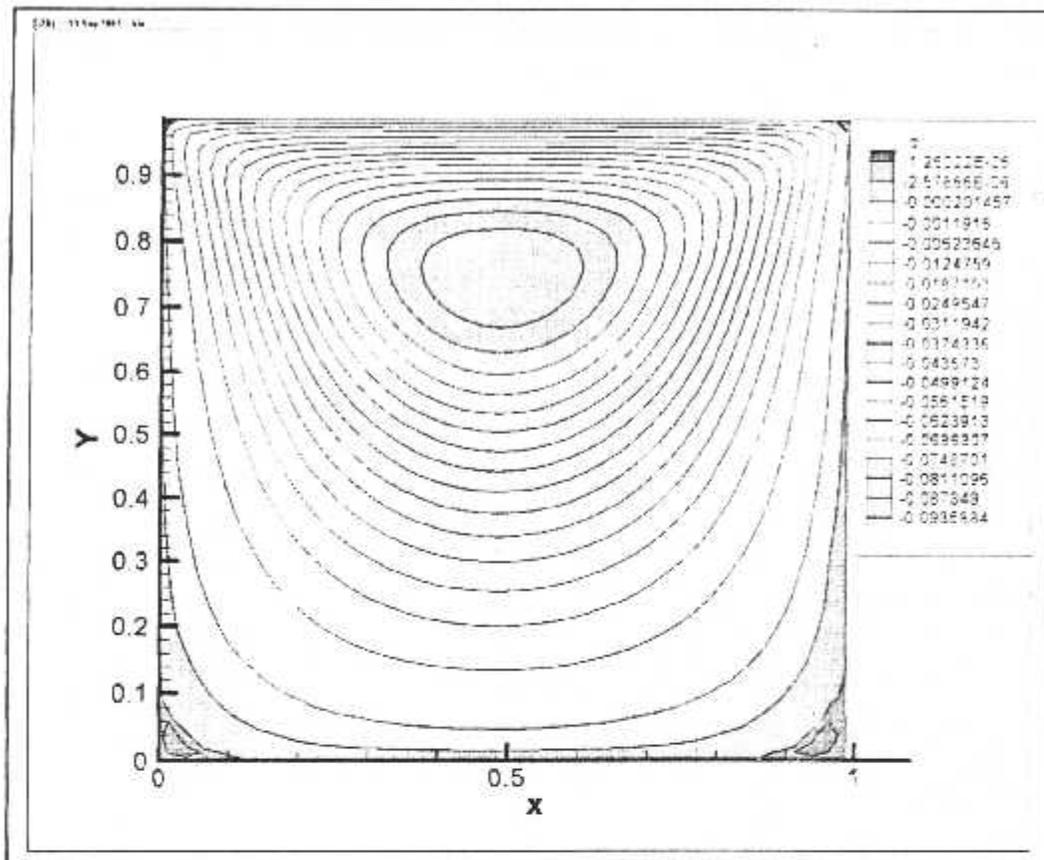


Fig.(IV-1) $Re = 1$

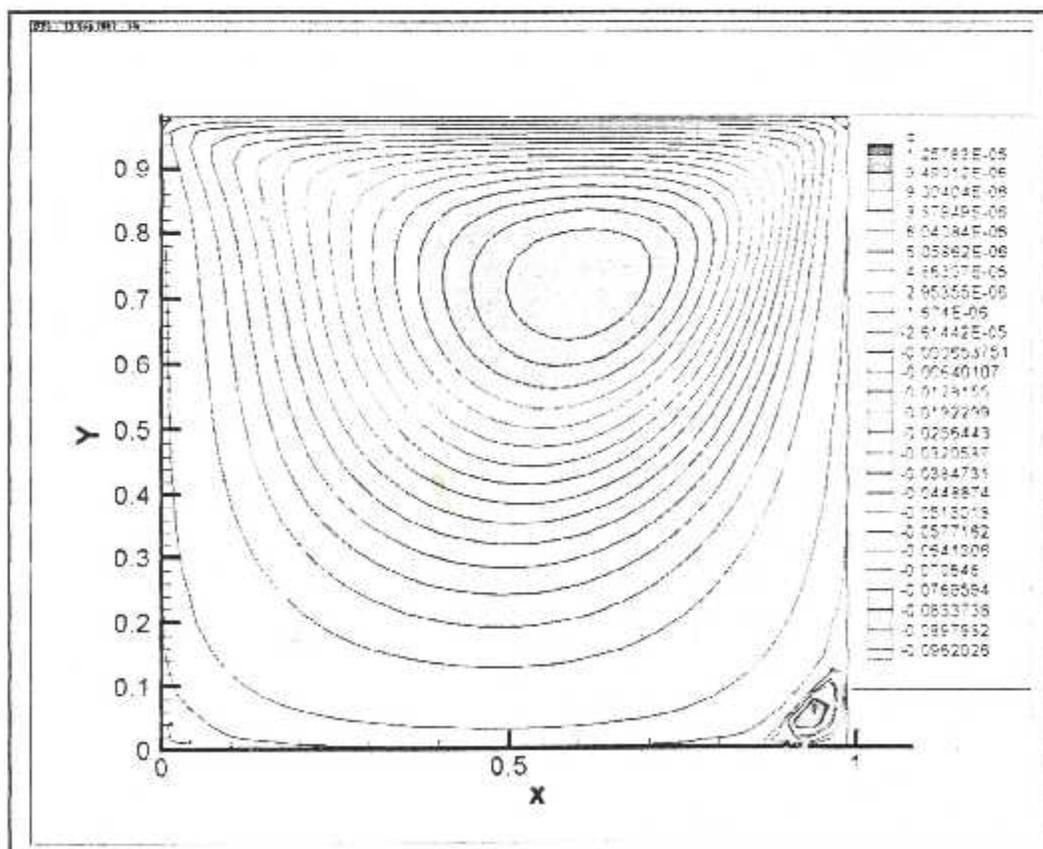


Fig.(IV-2) $Re = 100$

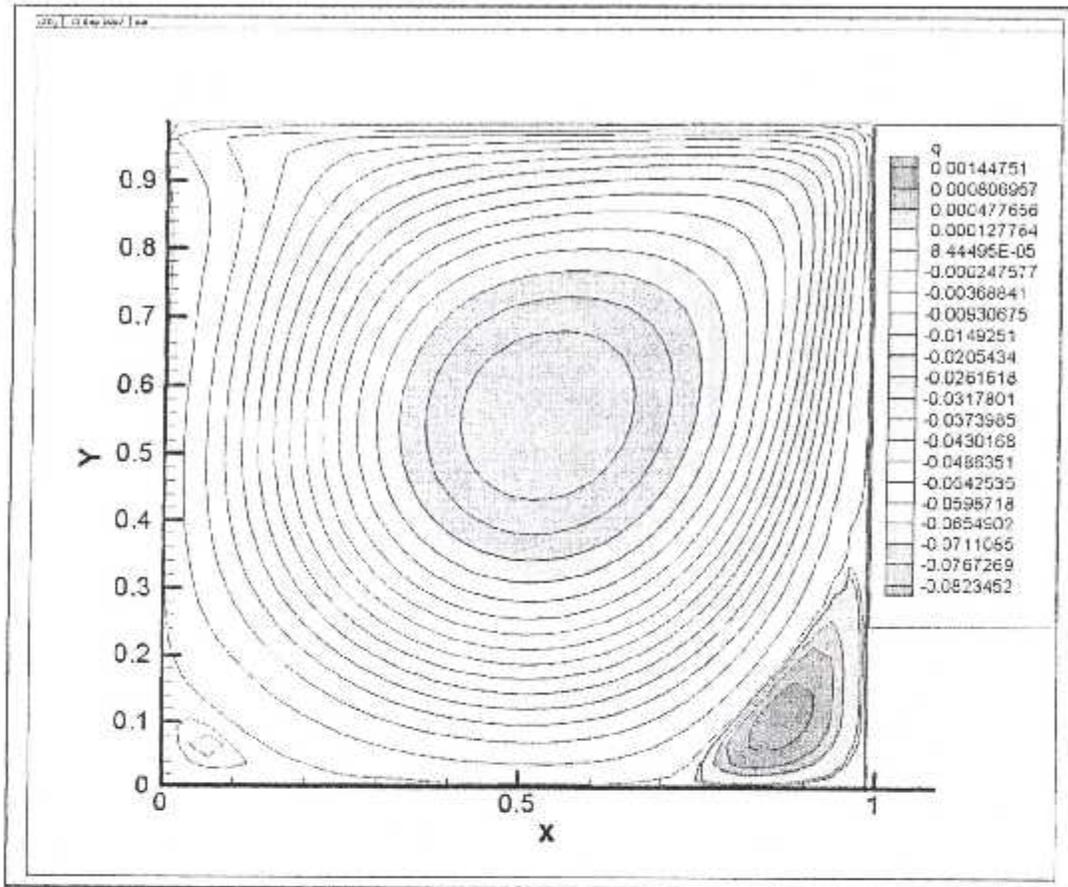


Fig.(IV-3) $Re = 1000$

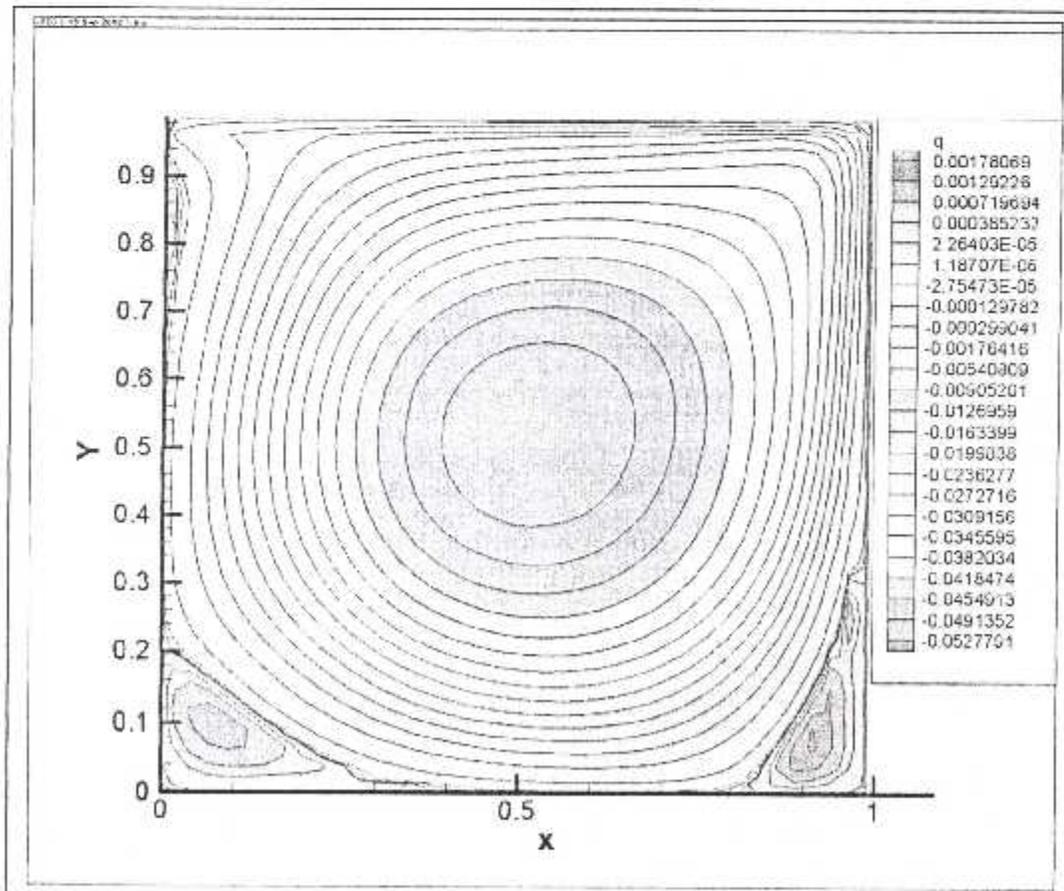


Fig.(IV-4) $Re = 4000$

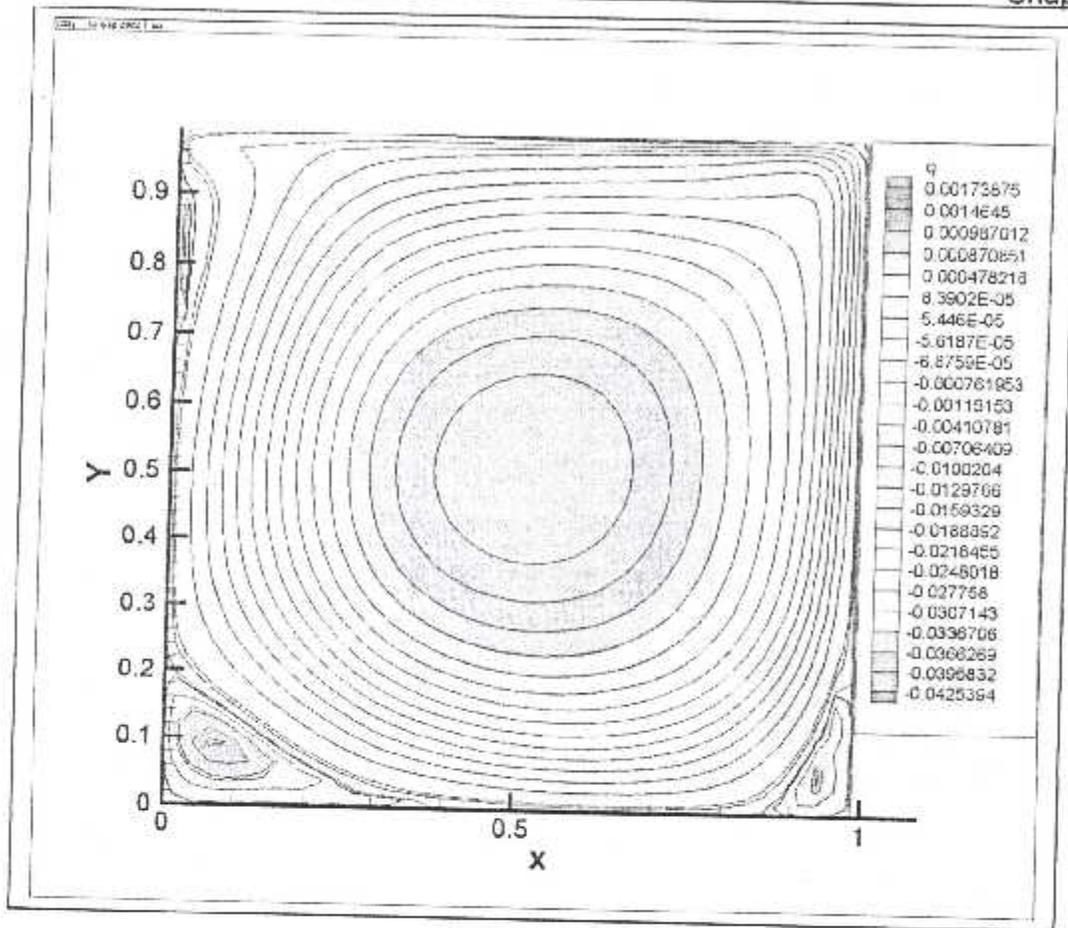


Fig.(IV-5) $Re = 7000$

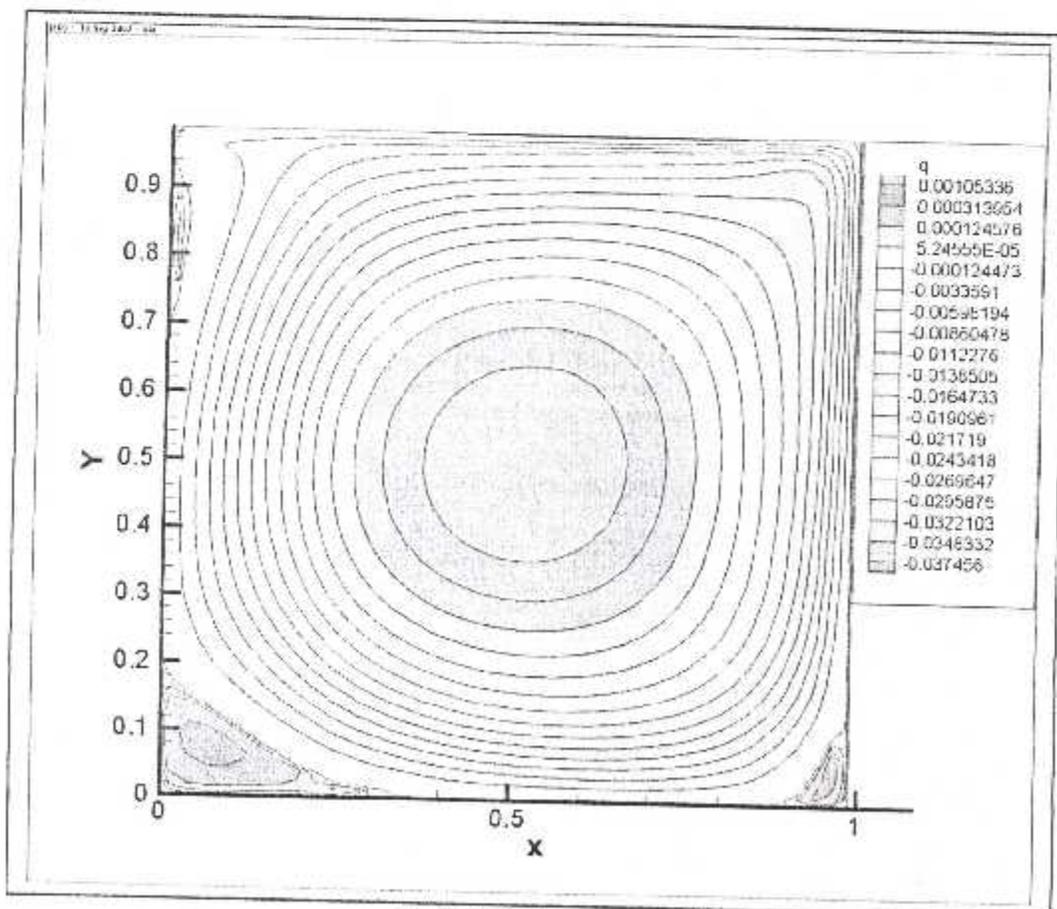


Fig.(IV-6) $Re = 10000$

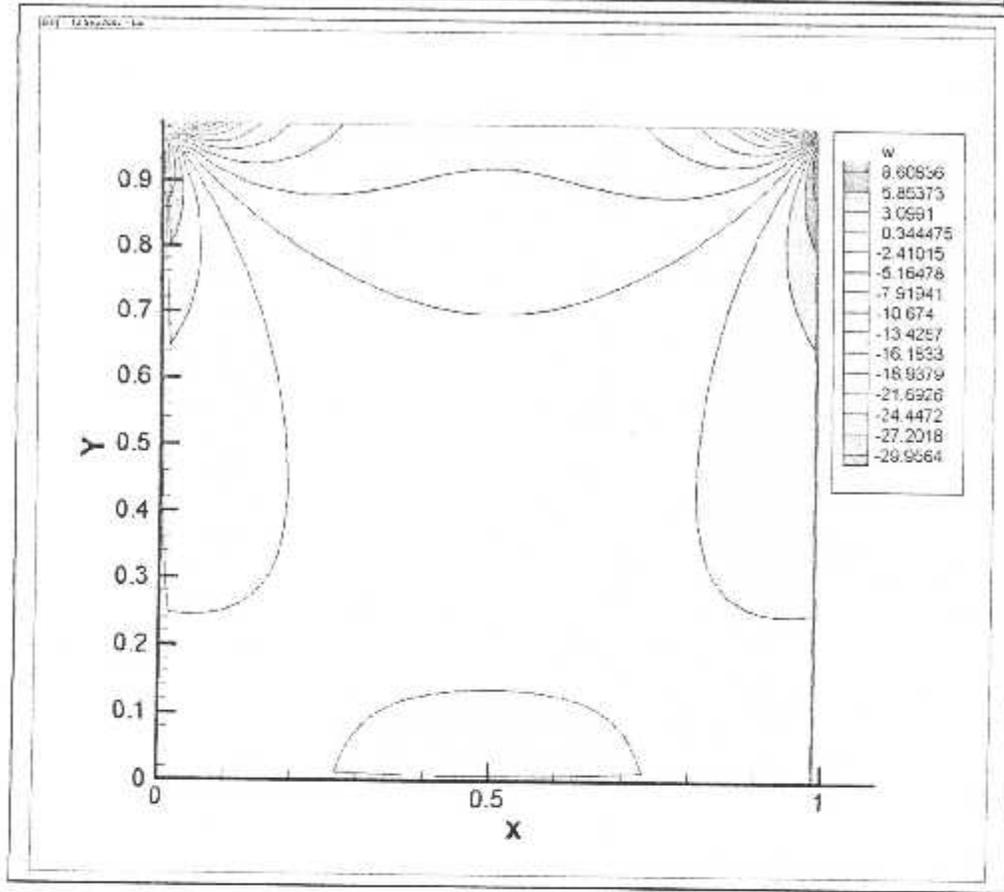


Fig.(IV-7)Re = 1

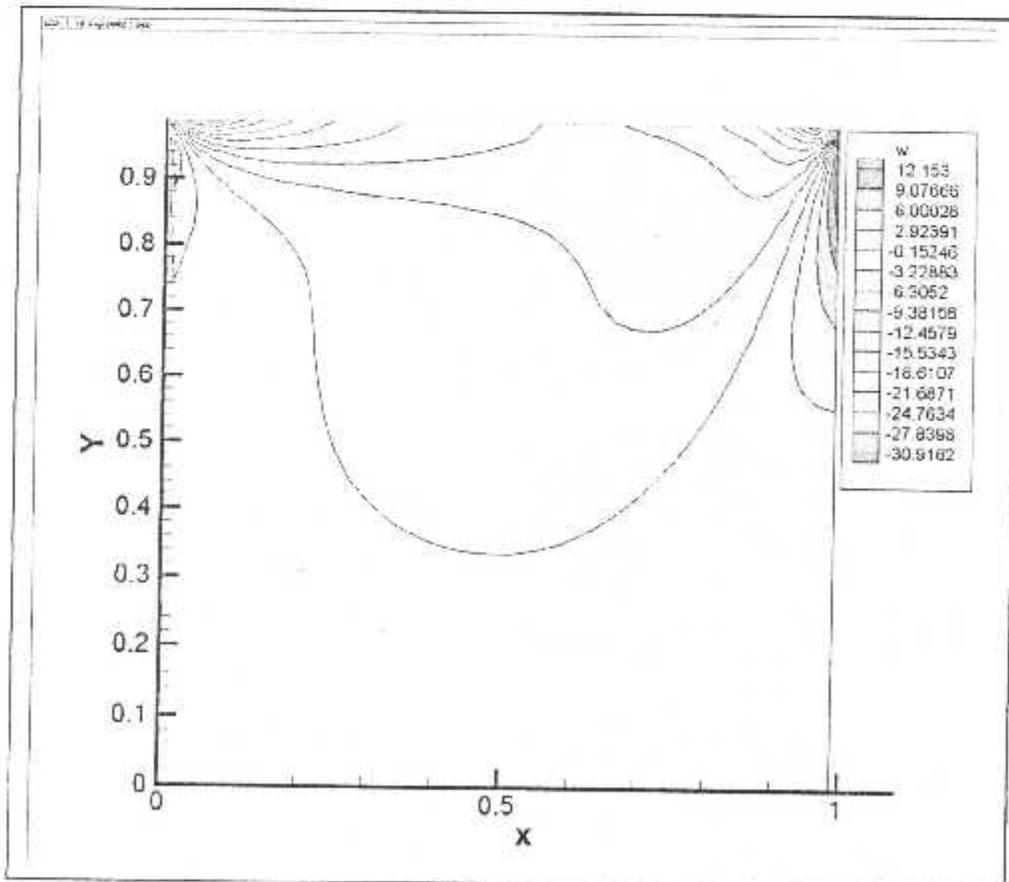


Fig.(IV-8) Re = 100

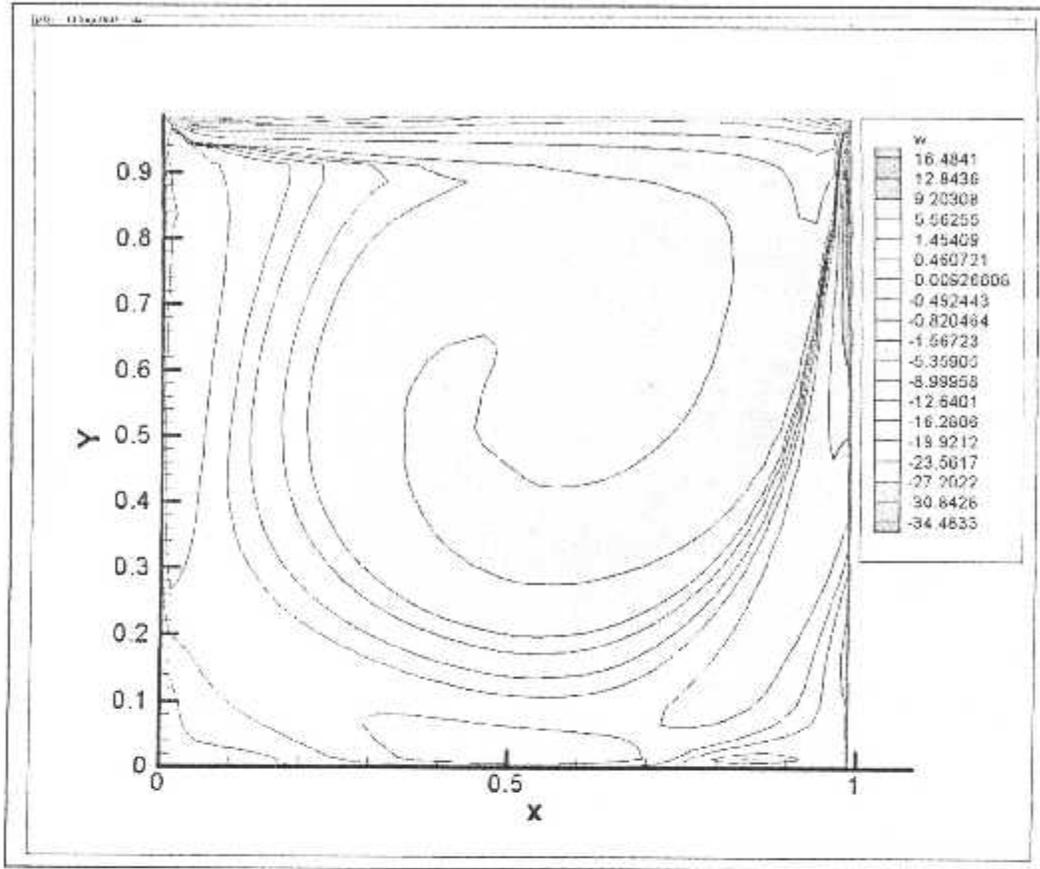


Fig.(IV-9) $Re = 1000$

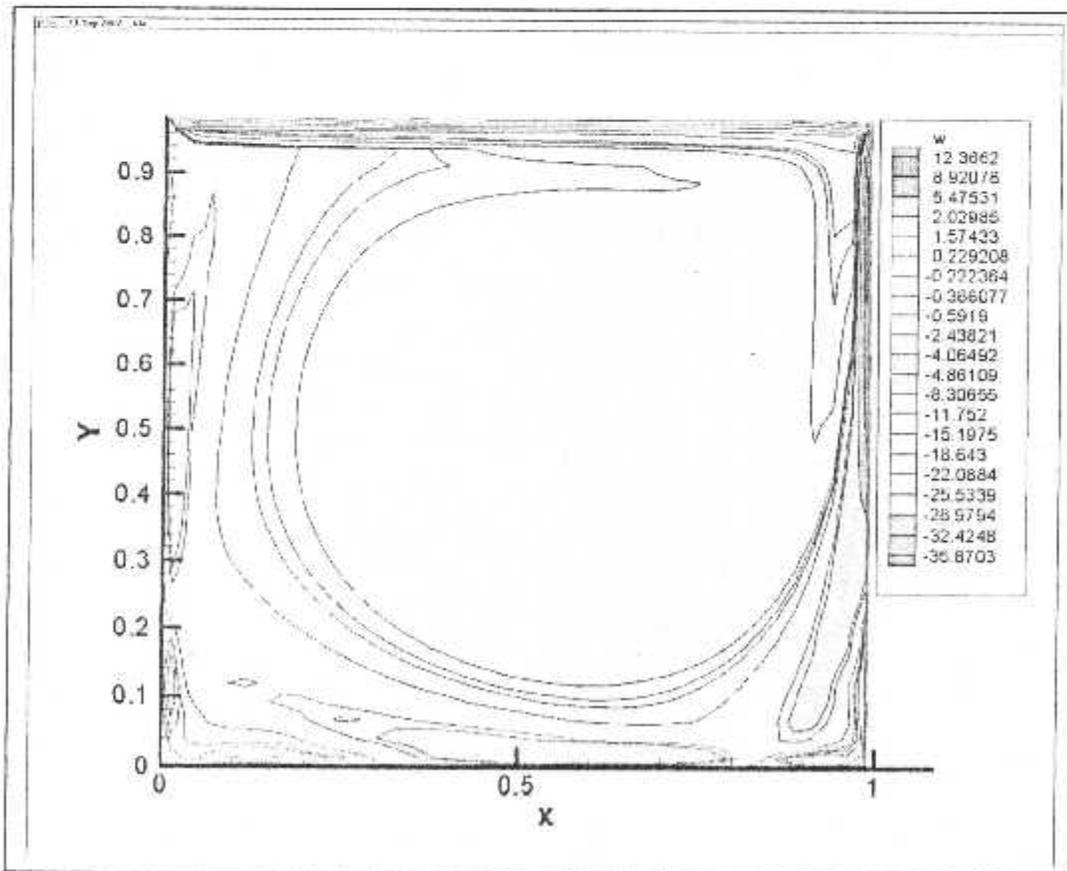


Fig.(IV-10) $Re = 4000$

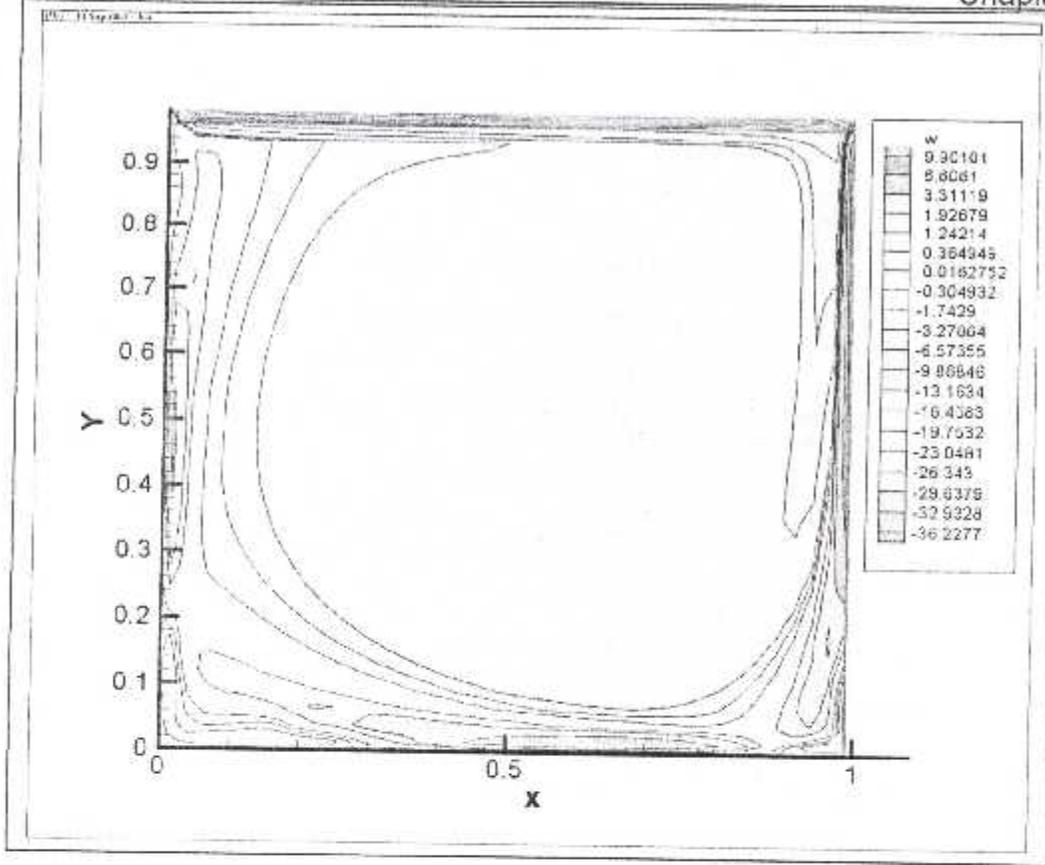


Fig.(IV-11) $Re = 7000$

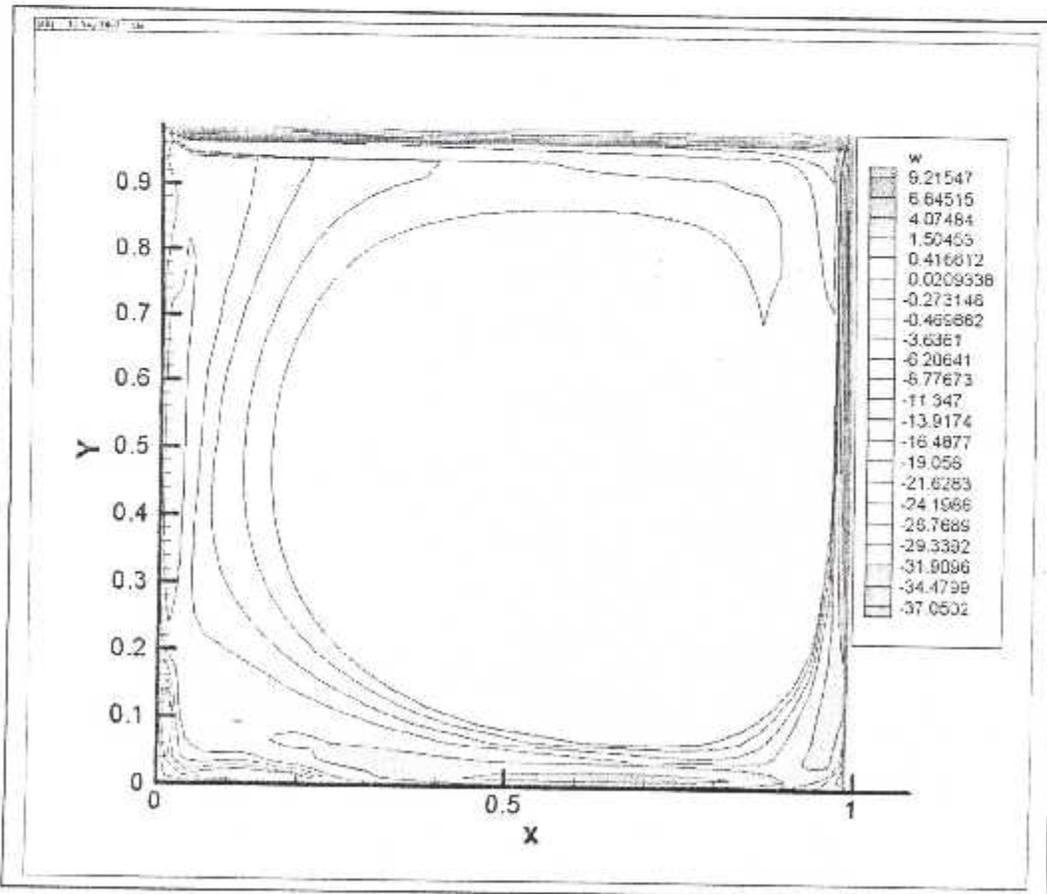


Fig.(IV-12) $Re = 10000$

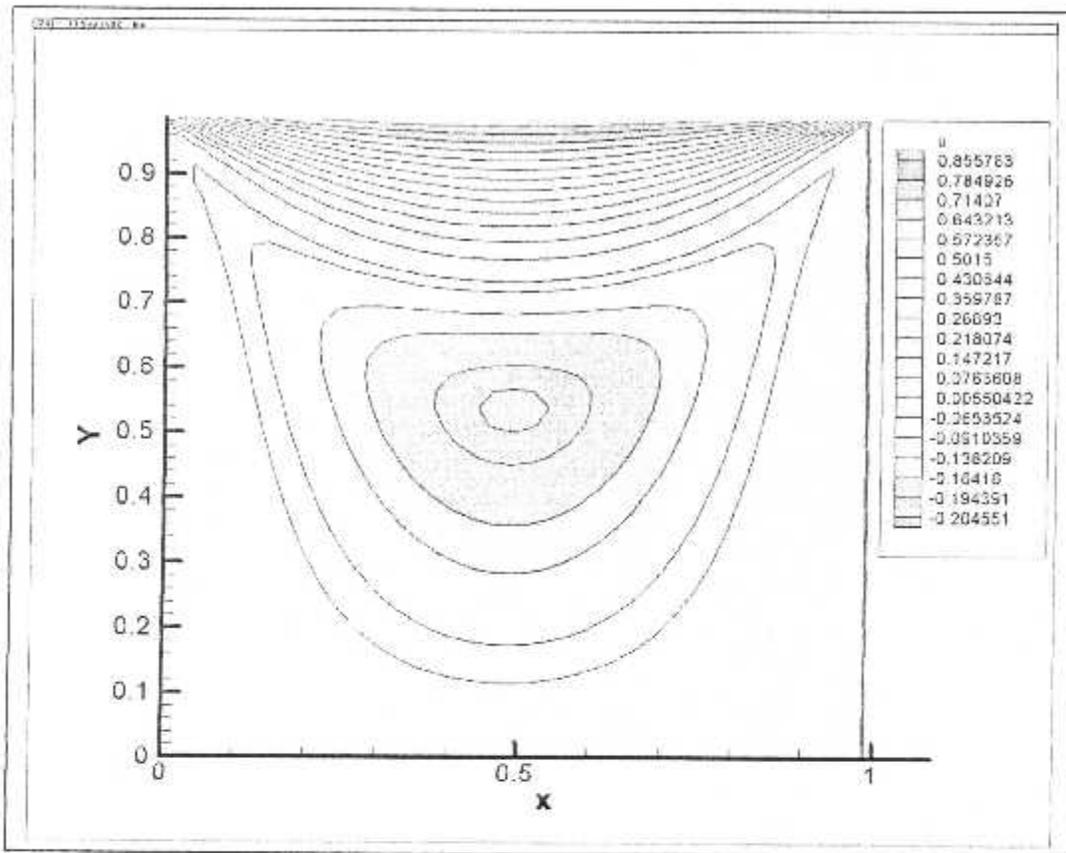


Fig. Le champs de vitesse U pour $Re = 1$

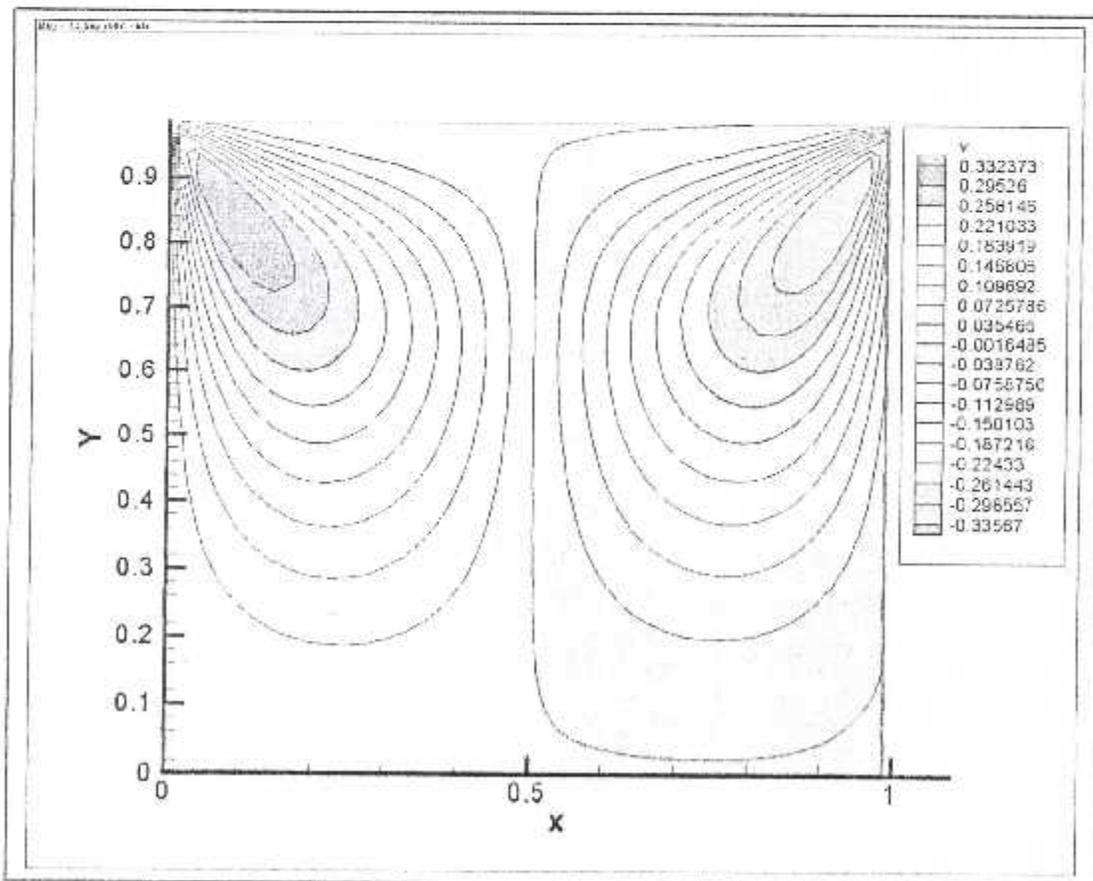


Fig. Le champs de vitesse V pour $Re = 1$

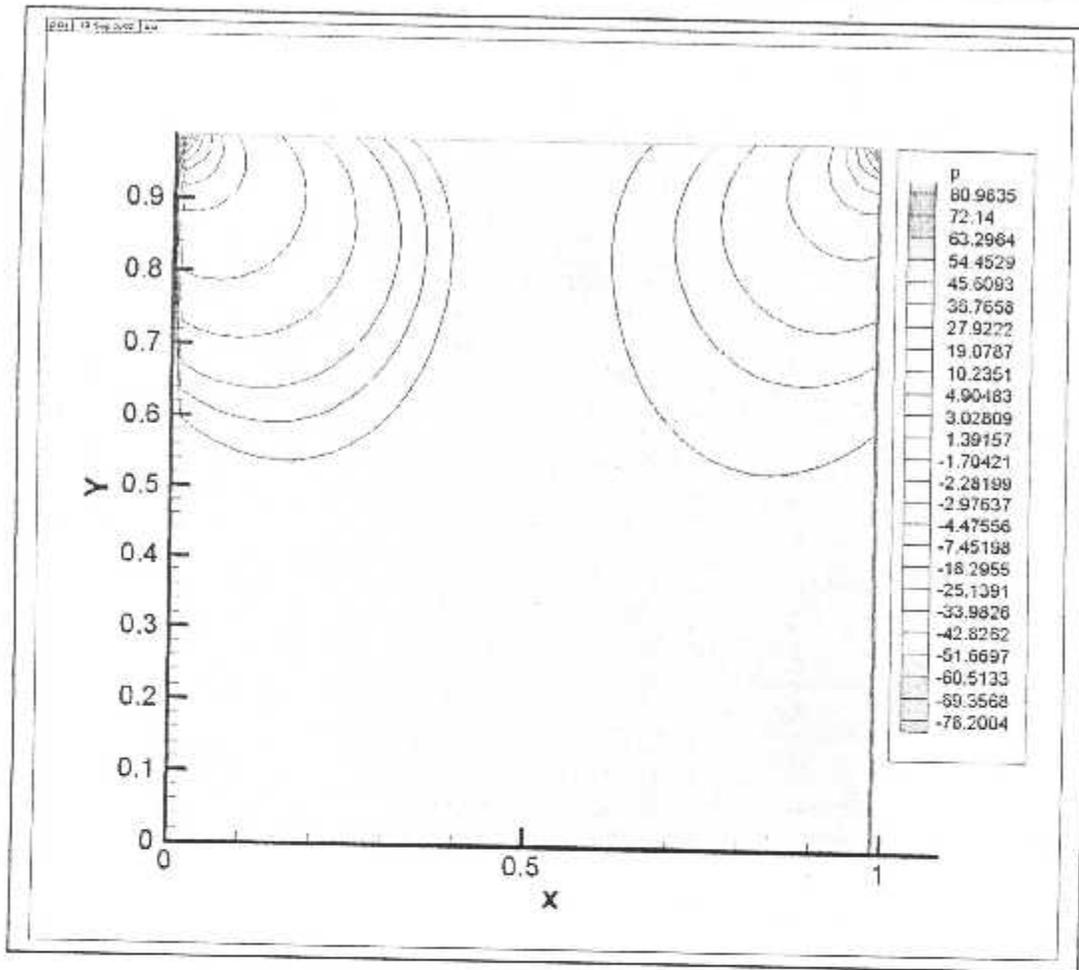


Fig. Le champs de pression P pour $Re = 1$

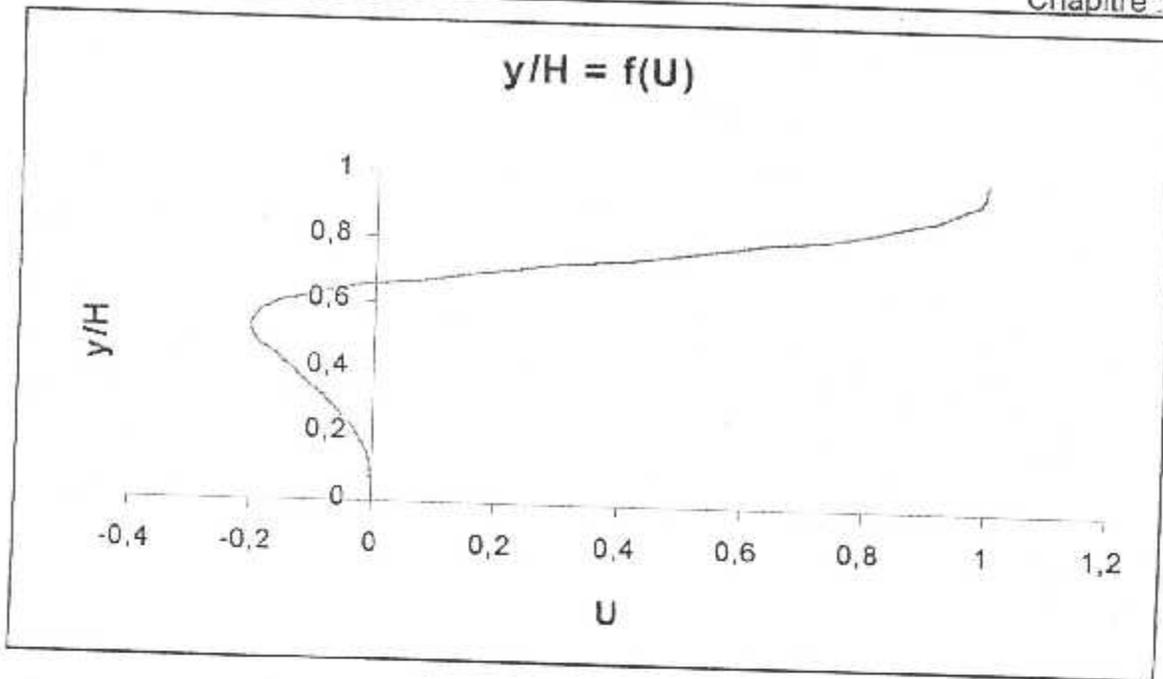


Fig.(IV-13) : Superposition des profils de $u/U=f(y/h)$ pour $Re = 1$

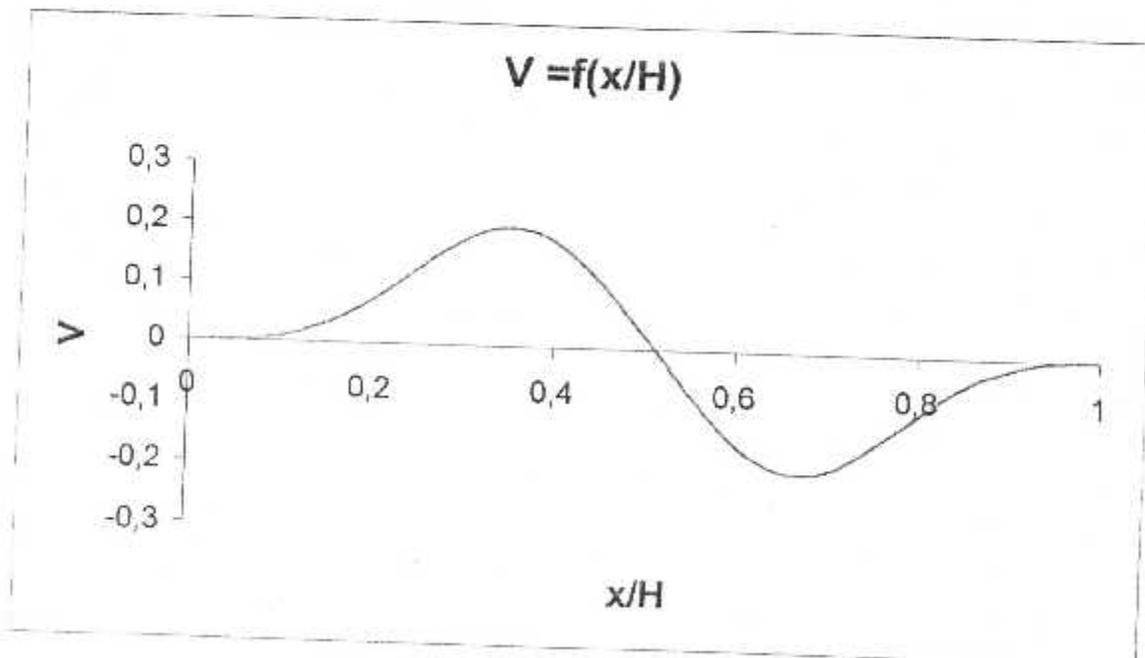


Fig.(IV-14) : Superposition des profils de $V/U=f(x/H)$ pour $Re = 1$

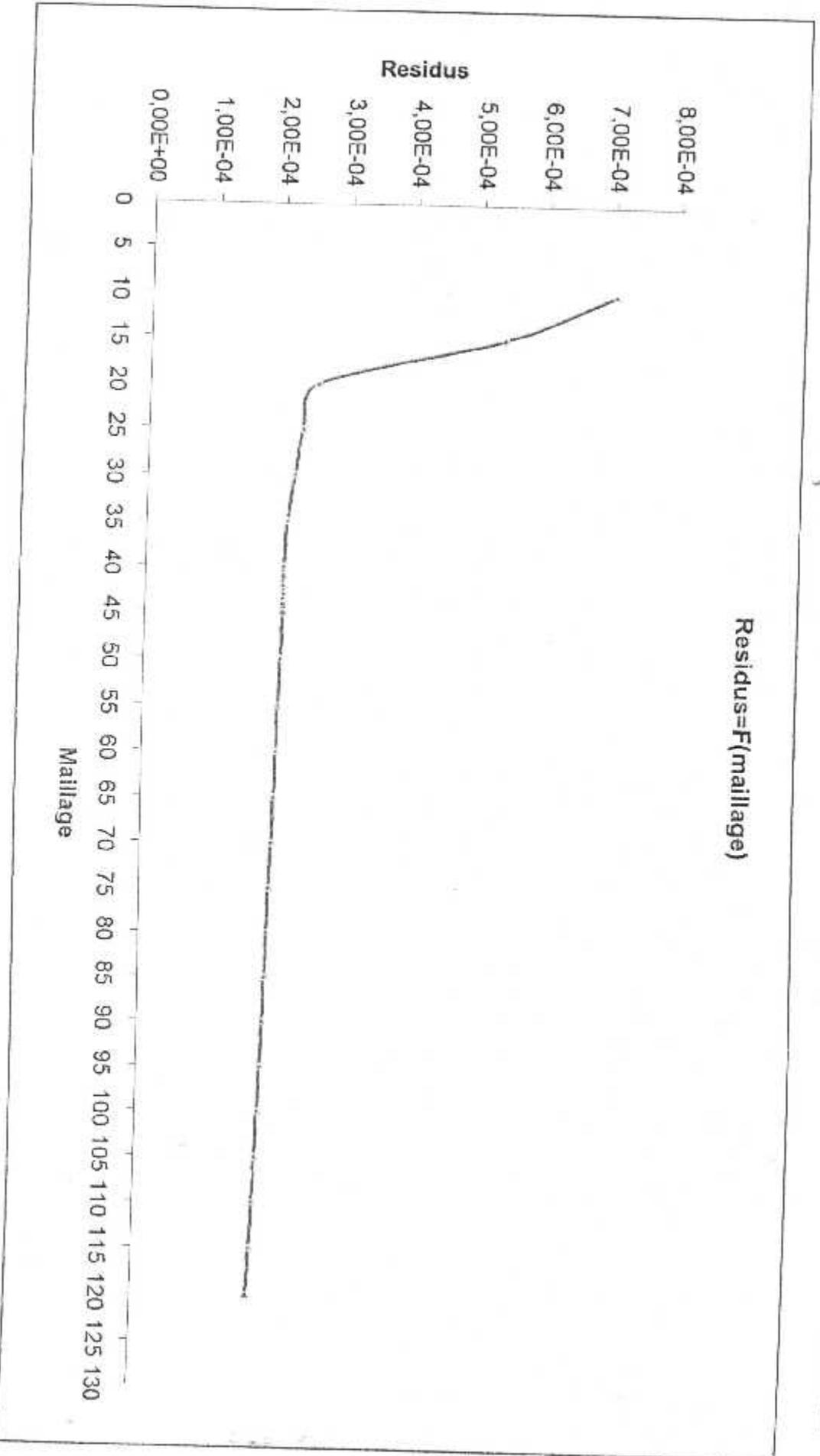


Fig.(IV- 15) : Variation des résidus en fonction du maillage

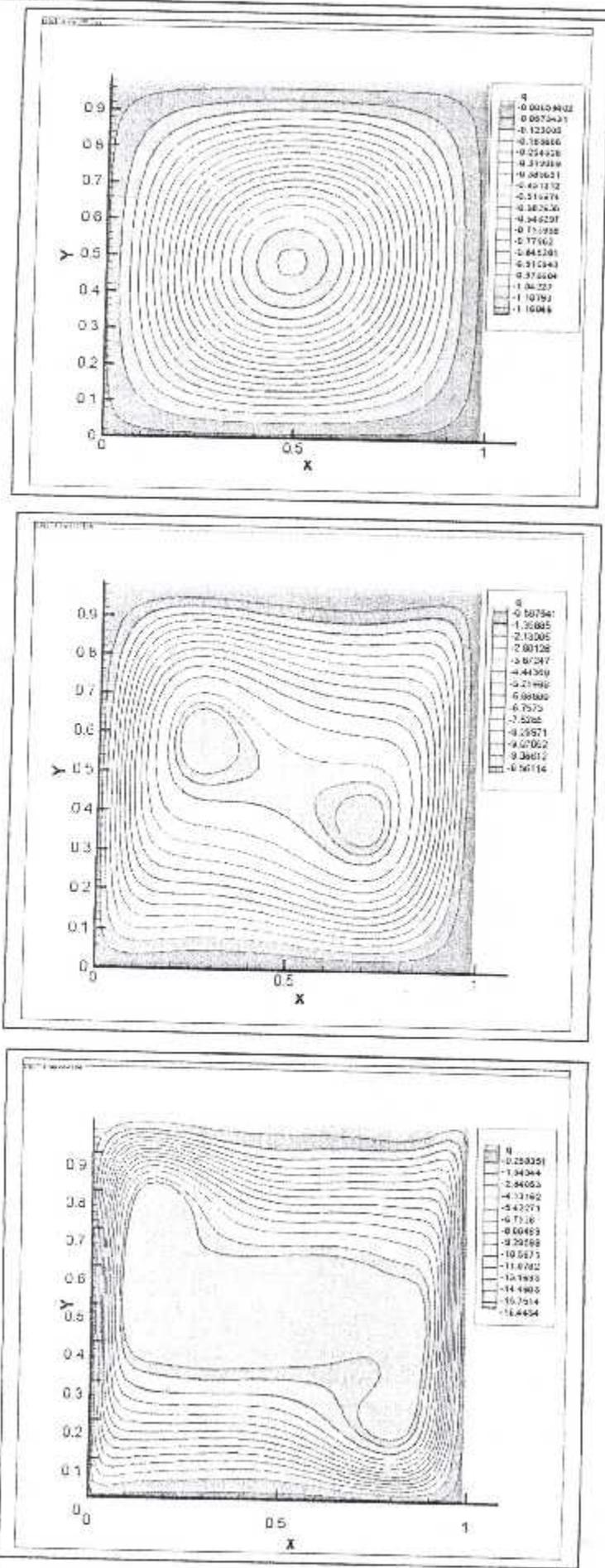


Fig.(IV-16) :Fonction de courant pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

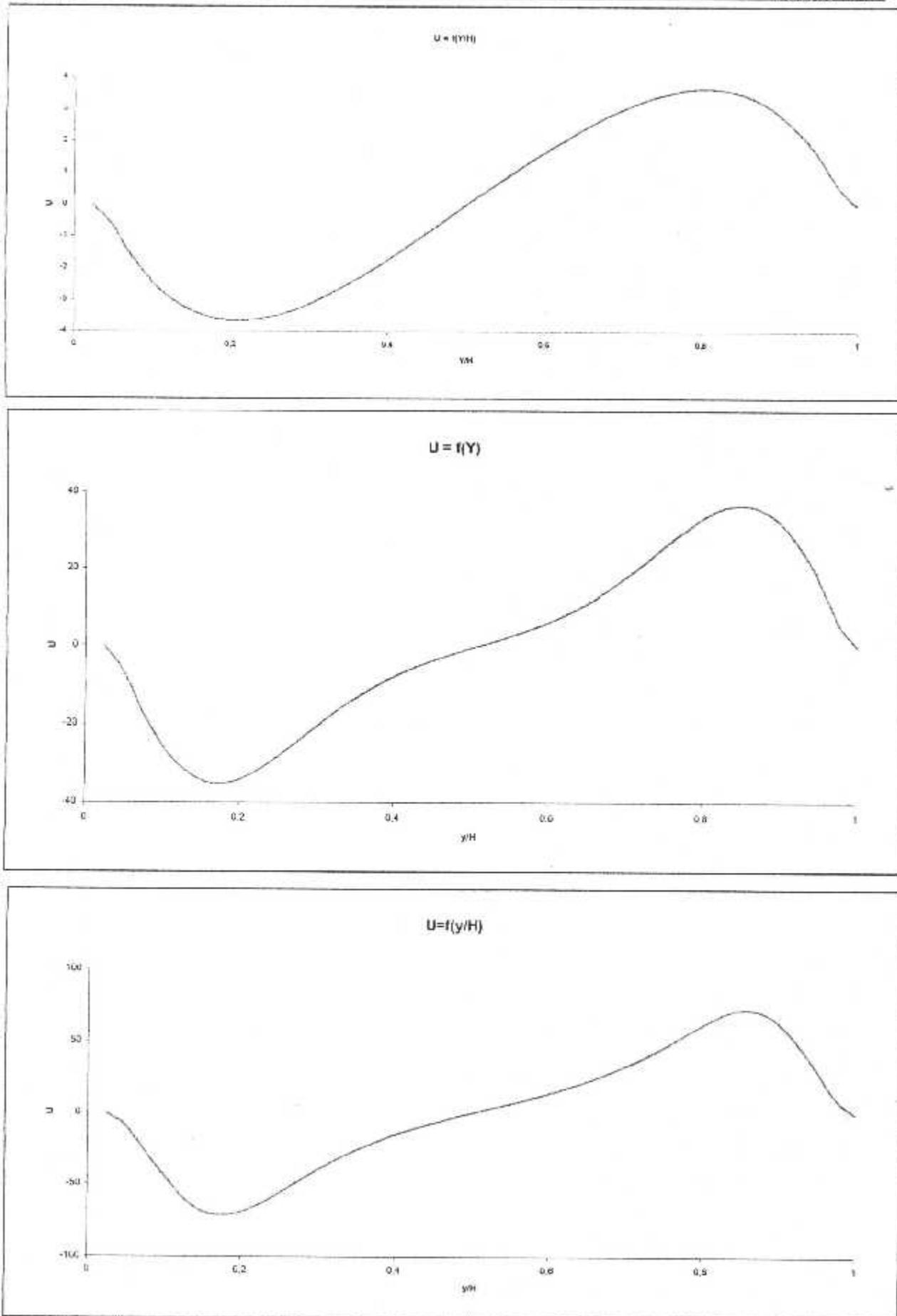


Fig (IV-17) : Effet du nombre de Rayleigh sur le profil du vitesse U au centre de la cavité
 a) $Ra = 10^3$; b) $Ra = 10^5$; c) $Ra = 10^6$ ($Pr = 0.71$)

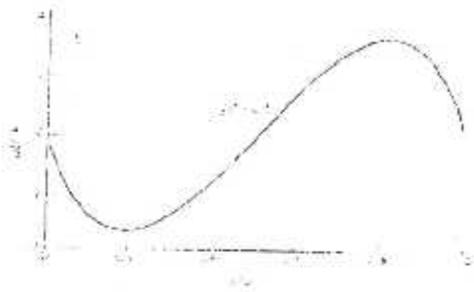


Fig 219) Profil de vitesse au centre de la cavité $Re = 10^3$ de l'écoulement avec la turbulence

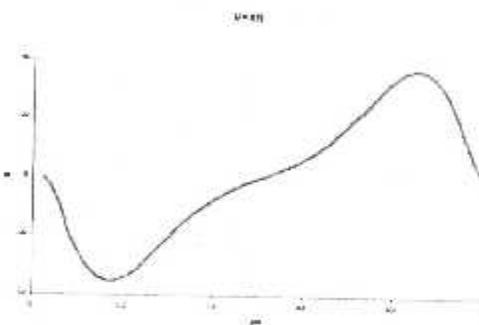
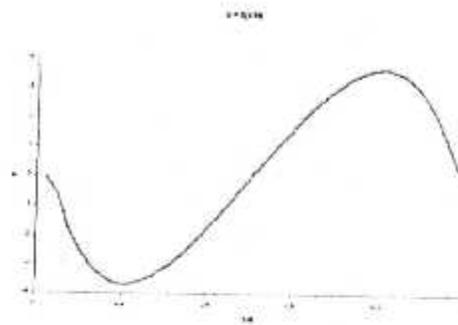


Fig 220) Profil de vitesse au centre de la cavité $Re = 10^4$ de l'écoulement avec la turbulence

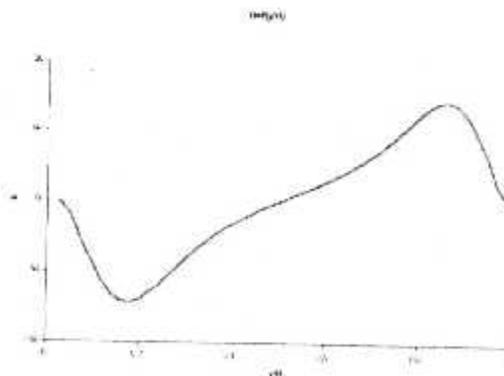
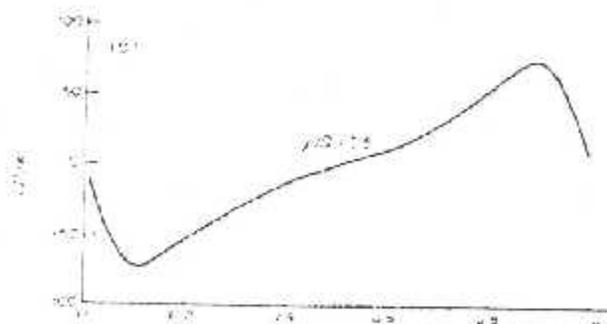


Fig (IV-18) Comparaison du profil du vitesse U au centre de la cavité avec [15].

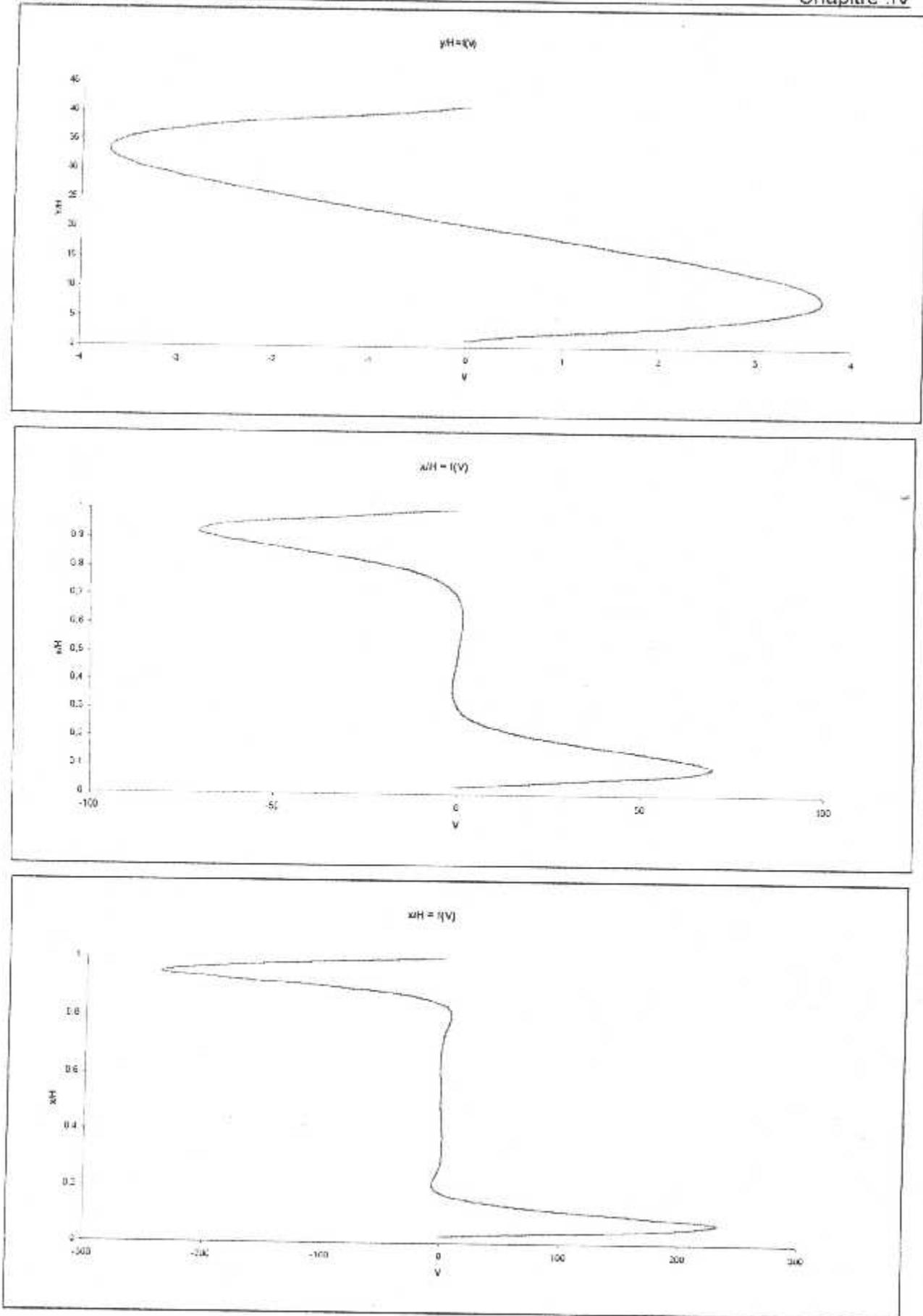


Fig (IV-19) : Effet du nombre de Rayleigh sur le profil du vitesse V au centre de la cavité
 a) $Ra = 10^3$; b) $Ra = 10^5$; c) $Ra = 10^6$ ($P = 0.71$)

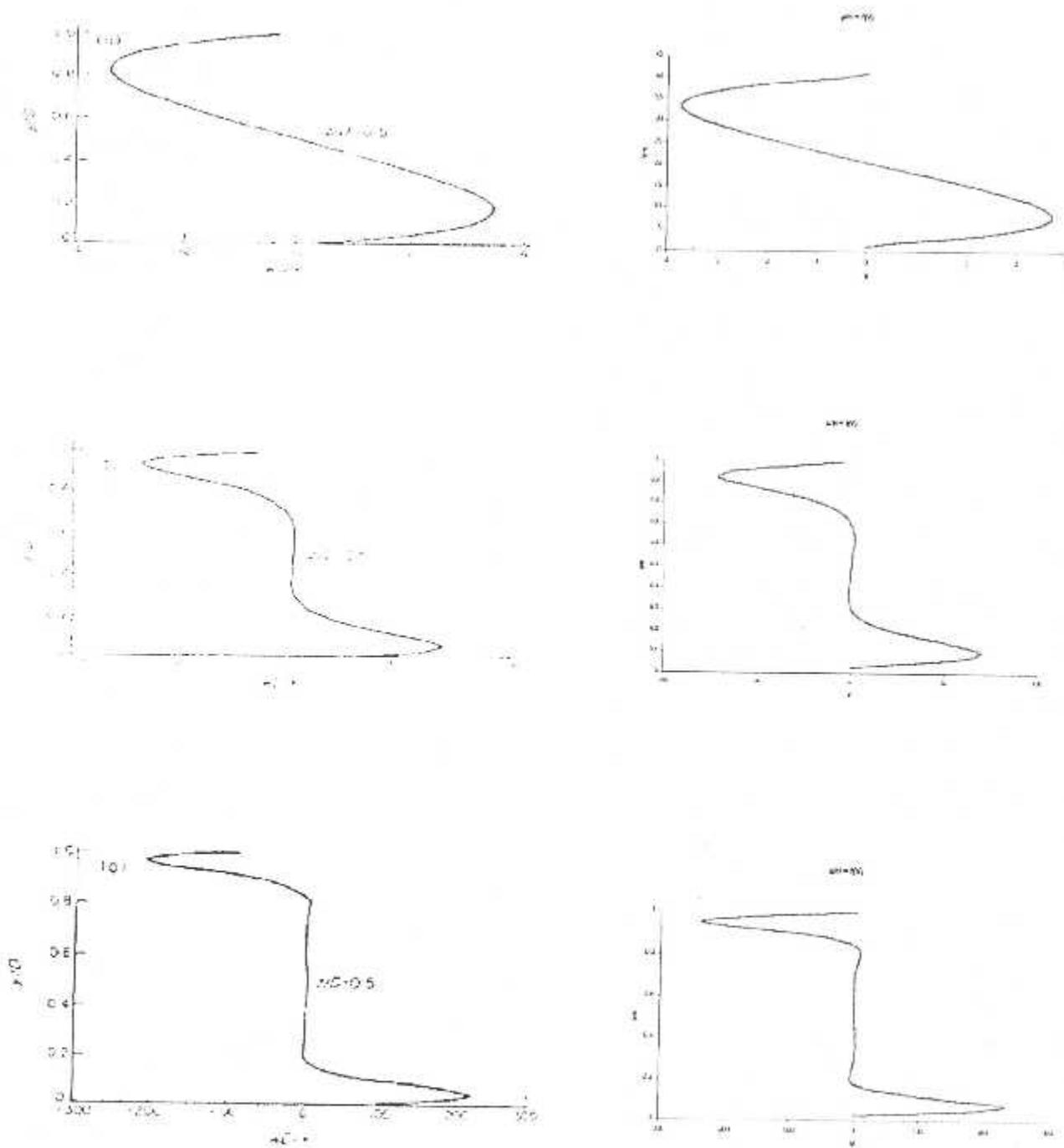


Fig (IV-20) Comparaison du profil du vitesse V au centre de la cavité avec [15].

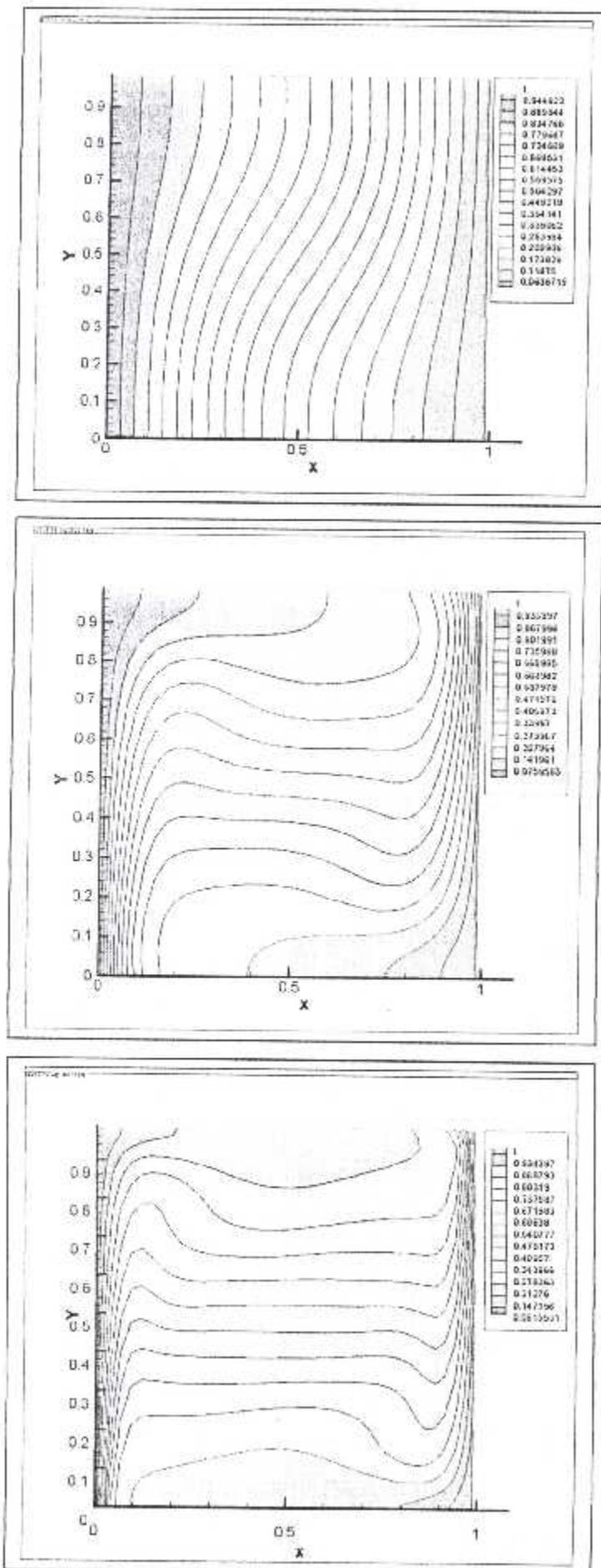


Fig.(IV-21) : Champs de température pour : a) $Ra=10^3$; b) $Ra=10^5$; c) $Ra=10^6$

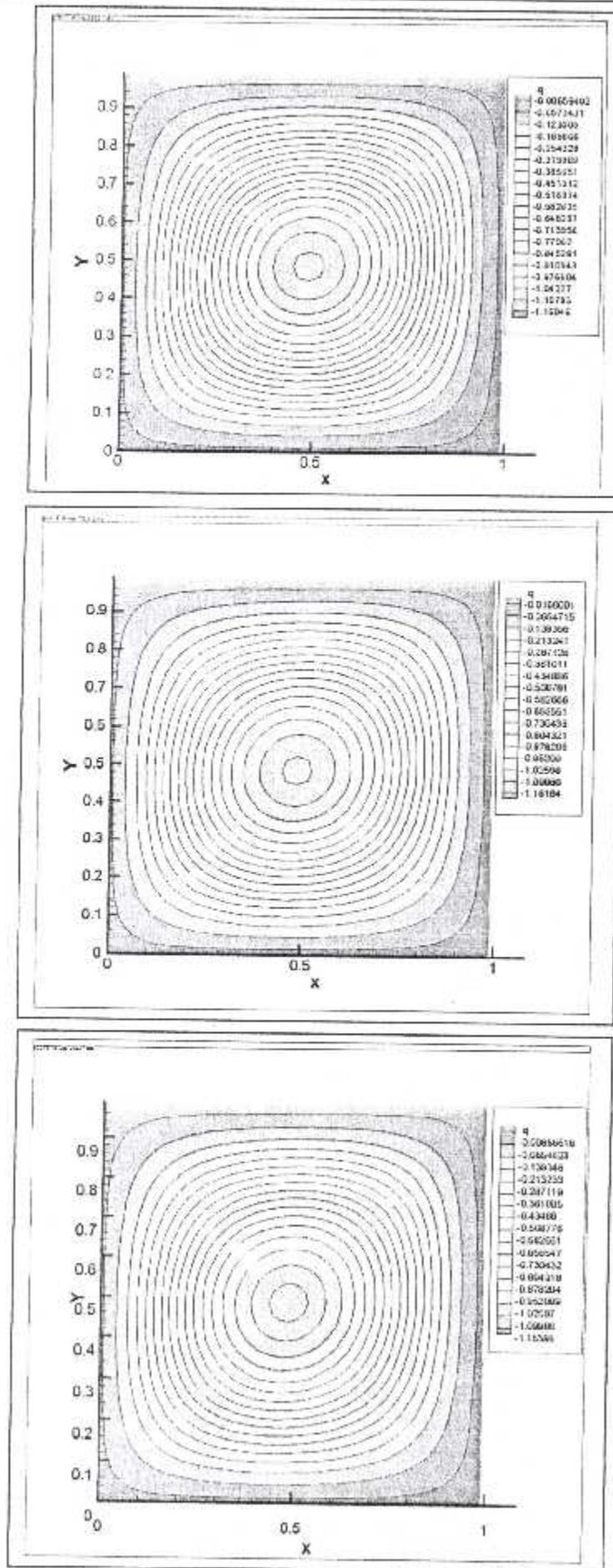


Fig.(IV-22): Effet de Prandtl sur Ψ pour $Ra=10^3$; a) $Pr=0.71$; b) $Pr=100$; c) $Pr=1000$

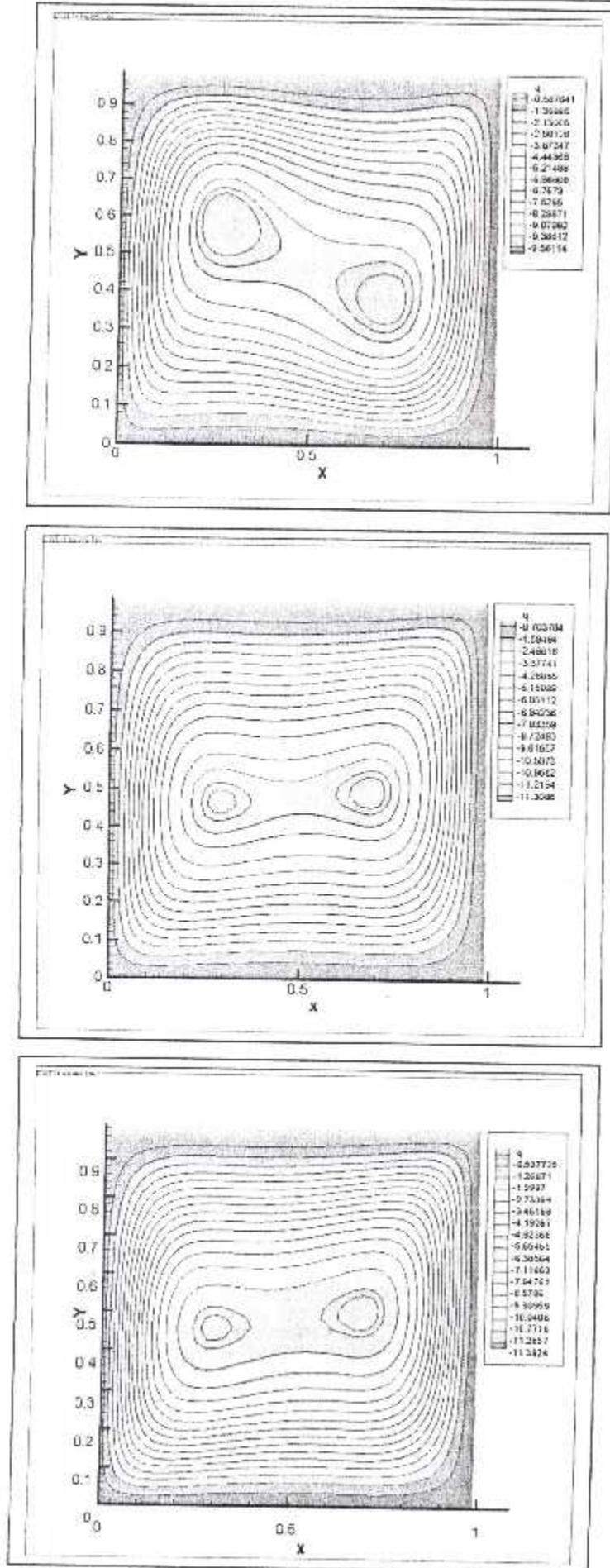


Fig.(IV-23): Effet de Prandtl sur Ψ pour $Ra=10^5$; a) $Pr=0.71$; b) $Pr=100$; c) $Pr=1000$
 Simulation numérique des écoulement à recirculation

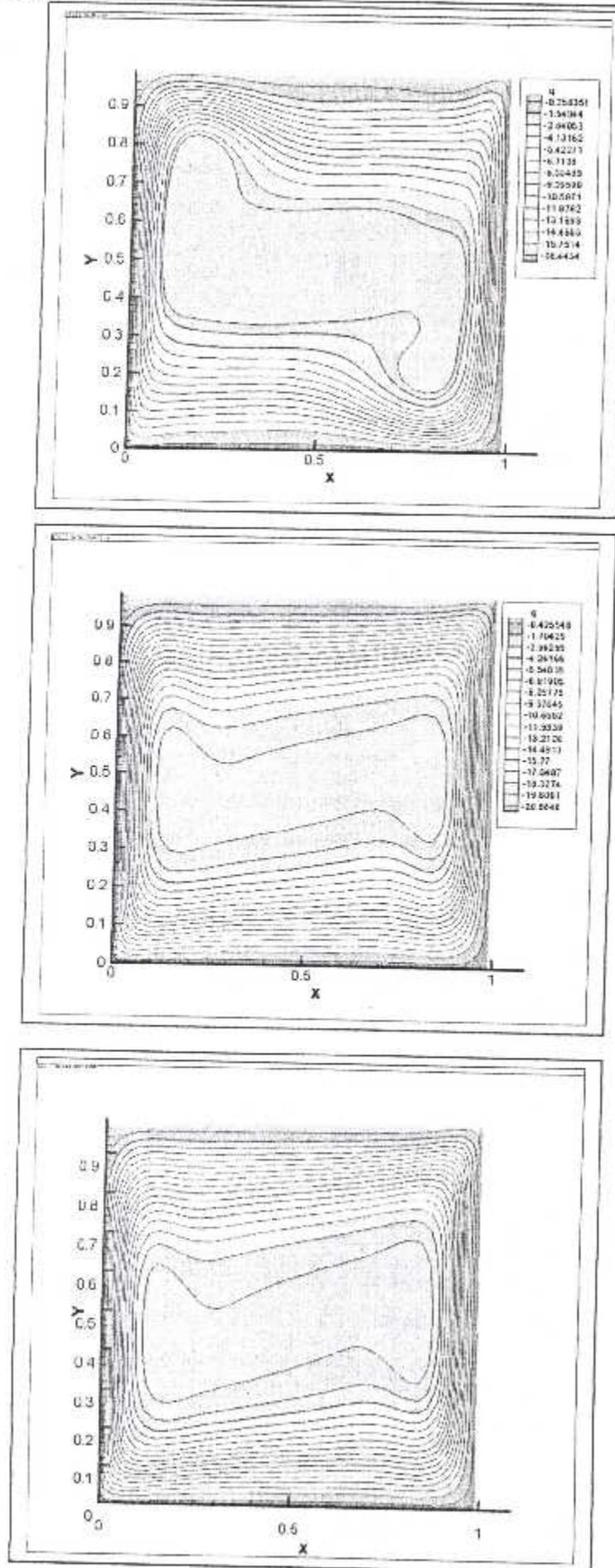


Fig.(IV-24): Effet Prandtl sur Ψ pour $Ra=10^6$; a) $Pr=0.71$; b) $Pr=100$; c) $Pr=1000$

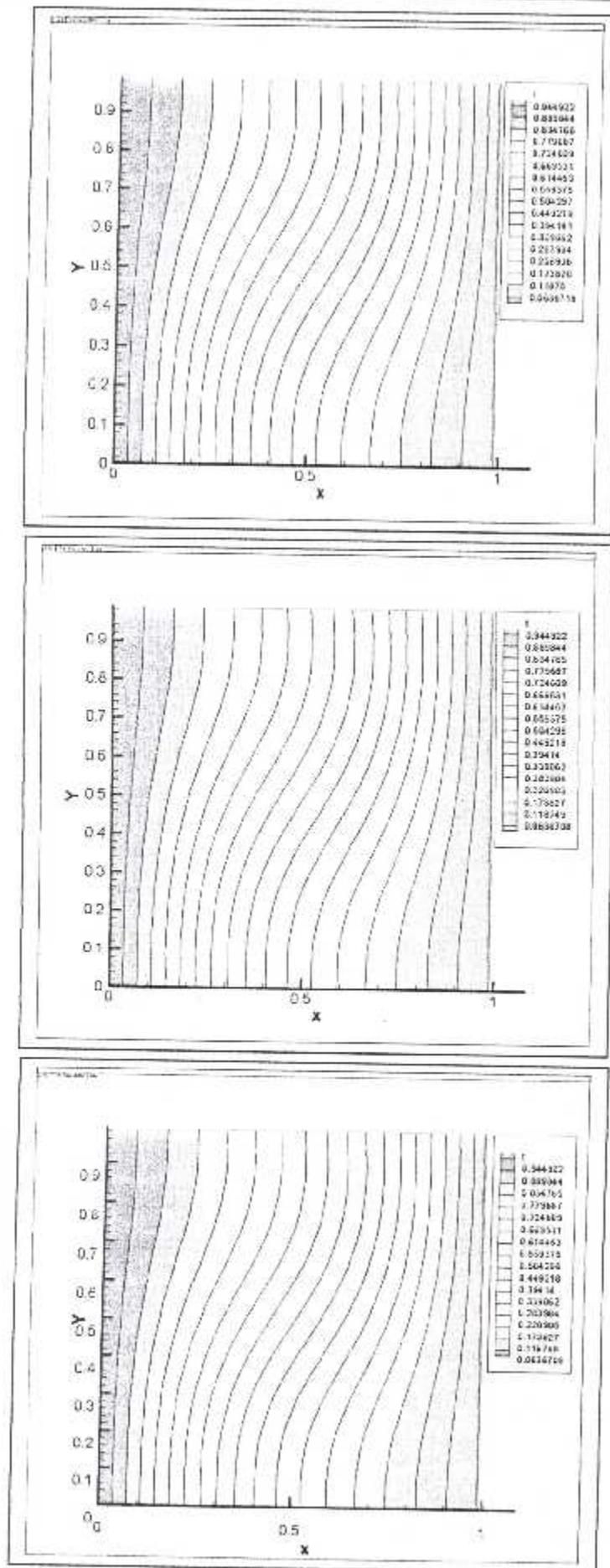


Fig.(IV-25): Effet de Prandtl sur T pour $Ra=10^3$; a)Pr=0.71 ; b)Pr=100 ; c)Pr=1000

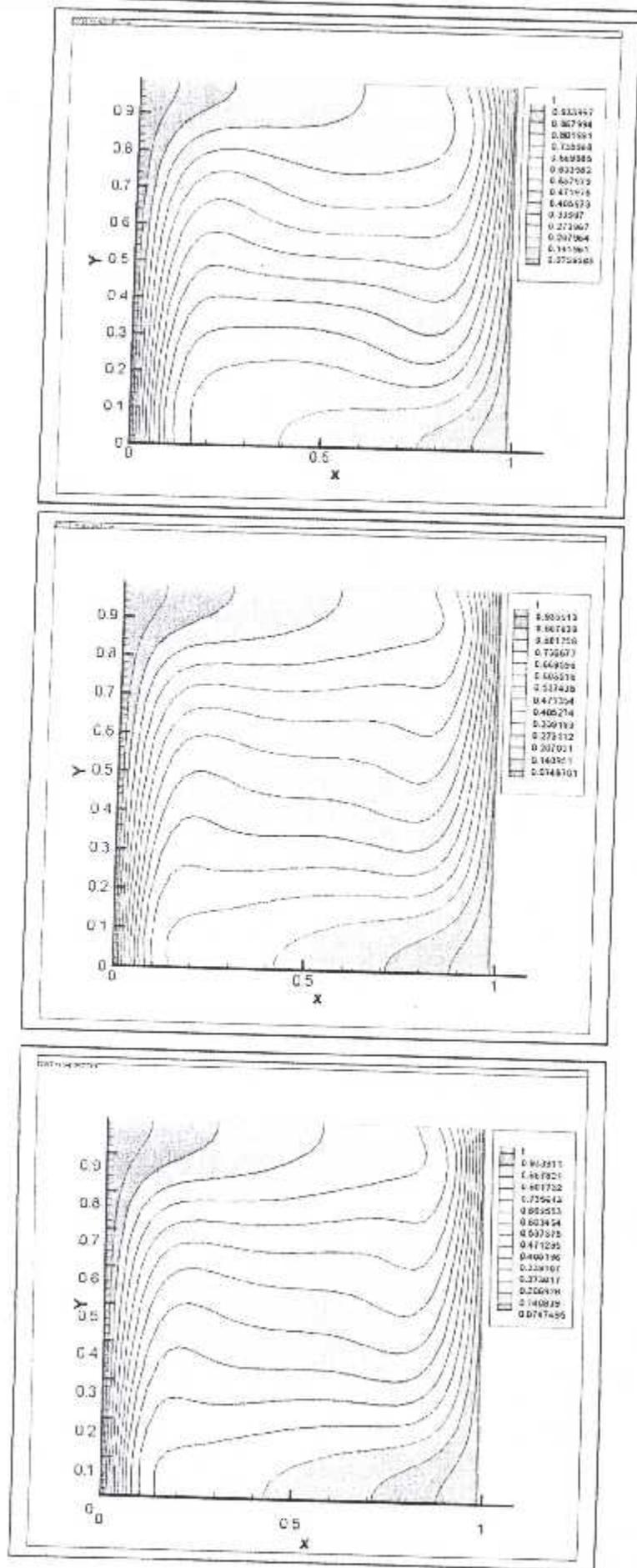


Fig.(IV-26): Effet de Prandtl sur T pour $Ra=10^5$: a) $Pr=0.71$; b) $Pr=100$; c) $Pr=1000$
 Simulation numérique des écoulements à recirculation

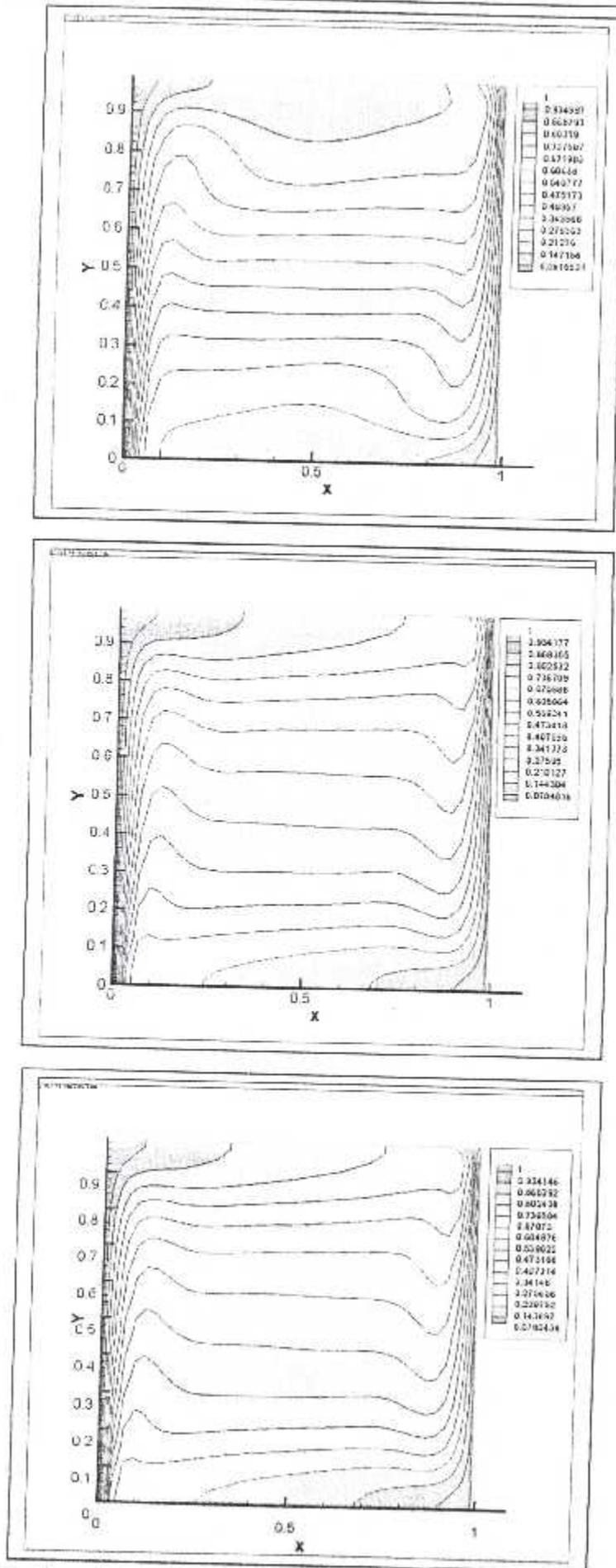


Fig.(IV-27): Effet de Prandtl sur T pour $Ra=10^6$; a) $Pr=0.71$; b) $Pr=100$; c) $Pr=1000$
 Simulation numérique des écoulements à recirculation

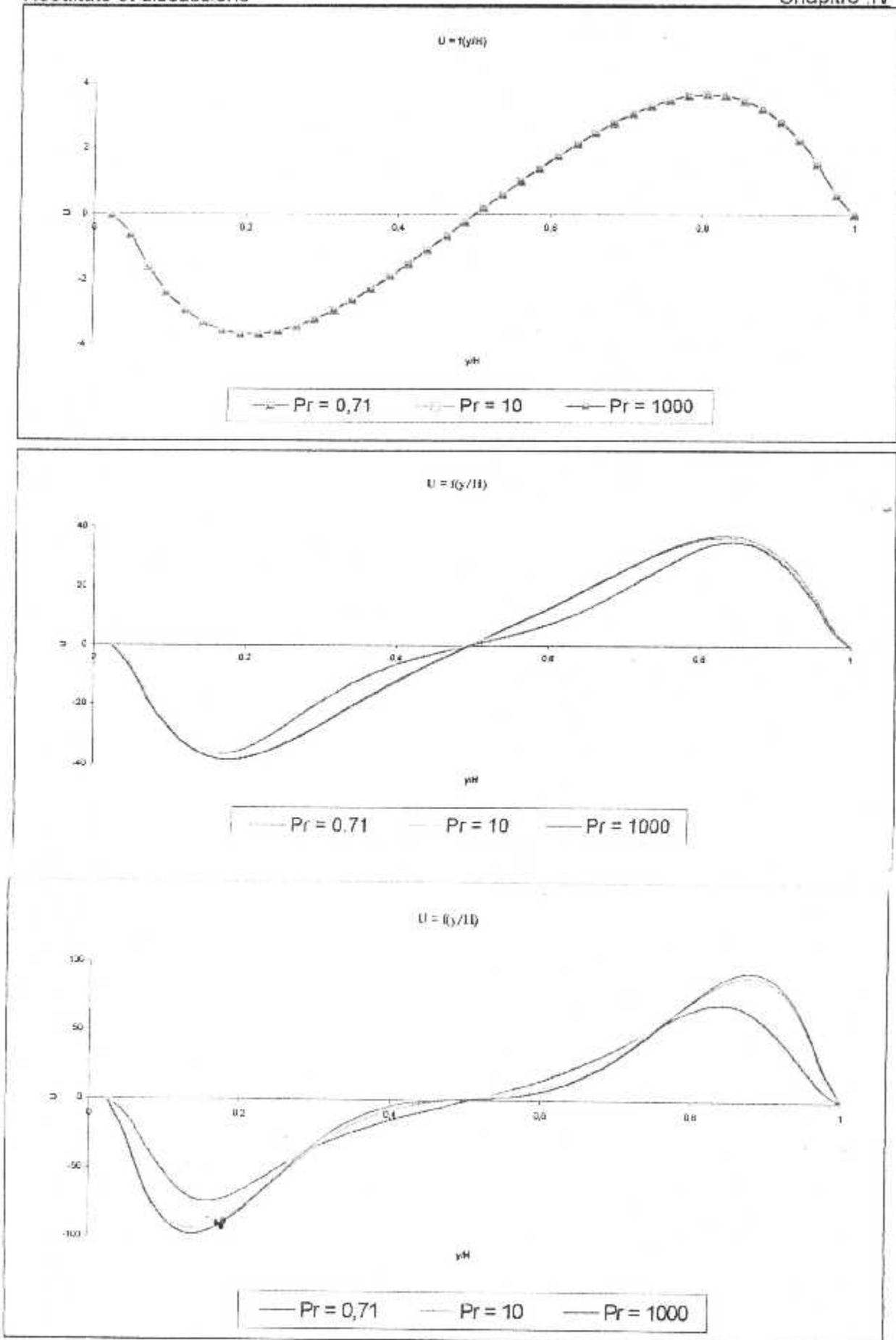


Fig. (IV-28) : Effet de nombre de Prandtl sur le profil de vitesse U au centre de la cavité
 a) $Ra = 10^3$; b) $Ra = 10^5$; c) $Ra = 10^6$

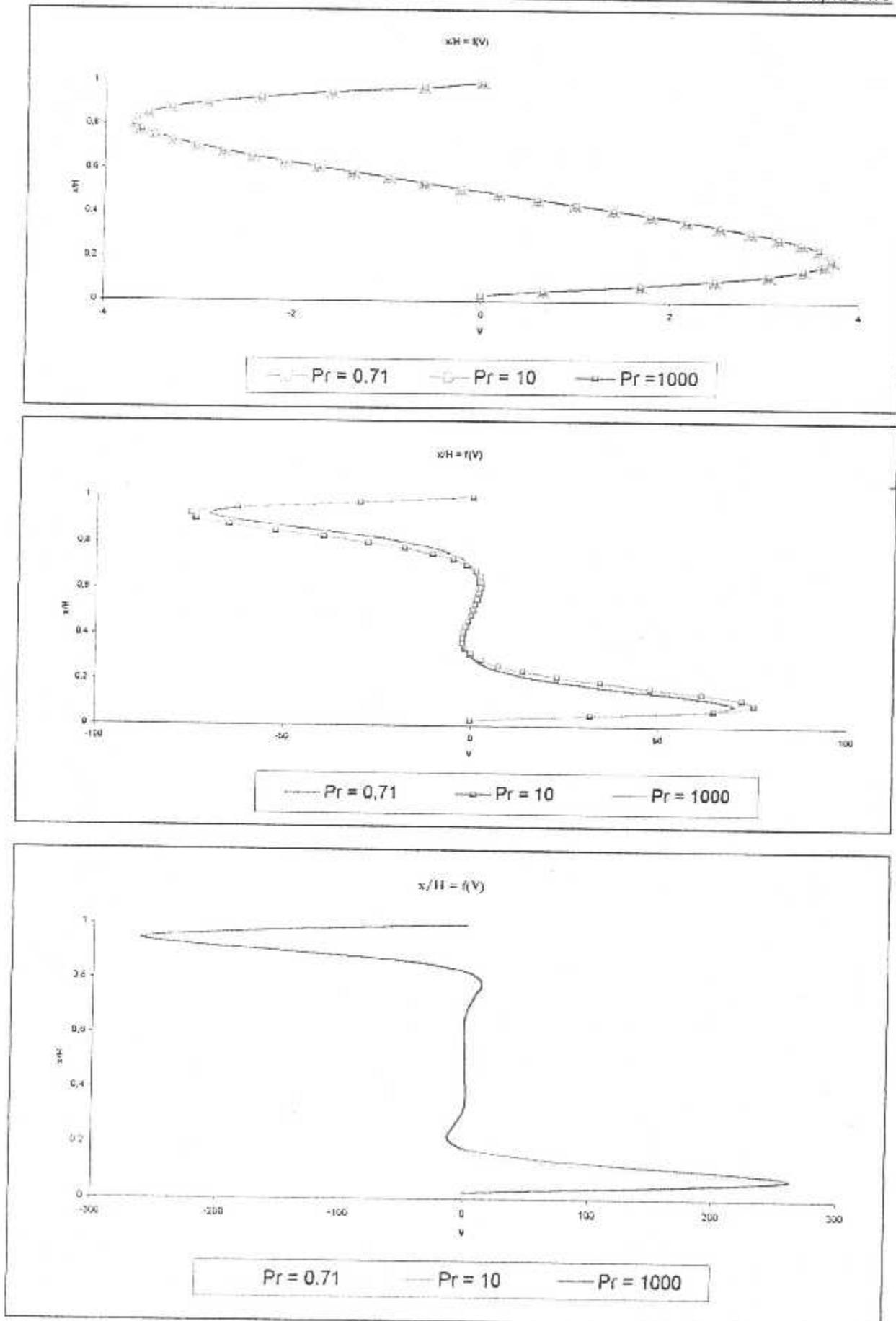
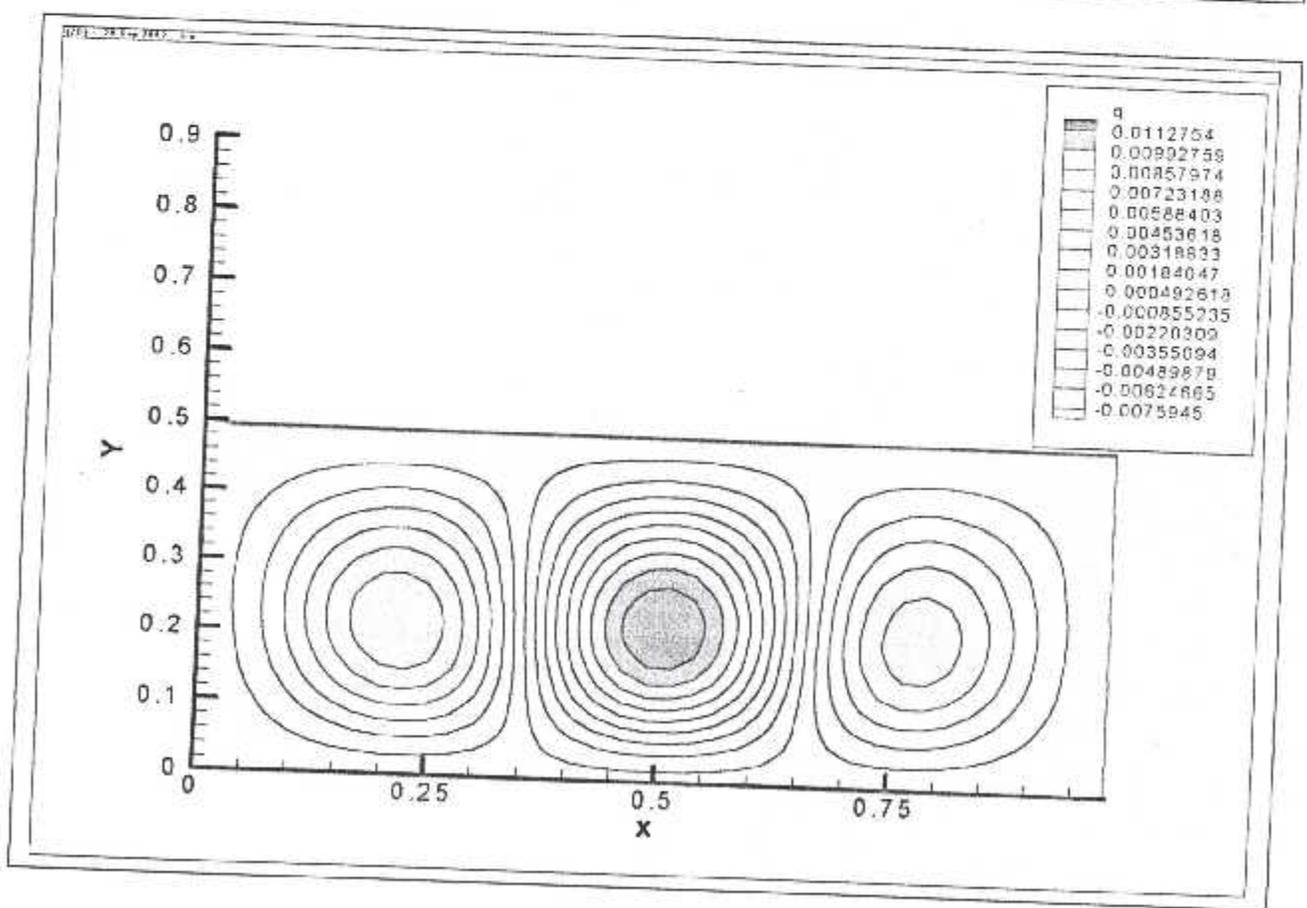
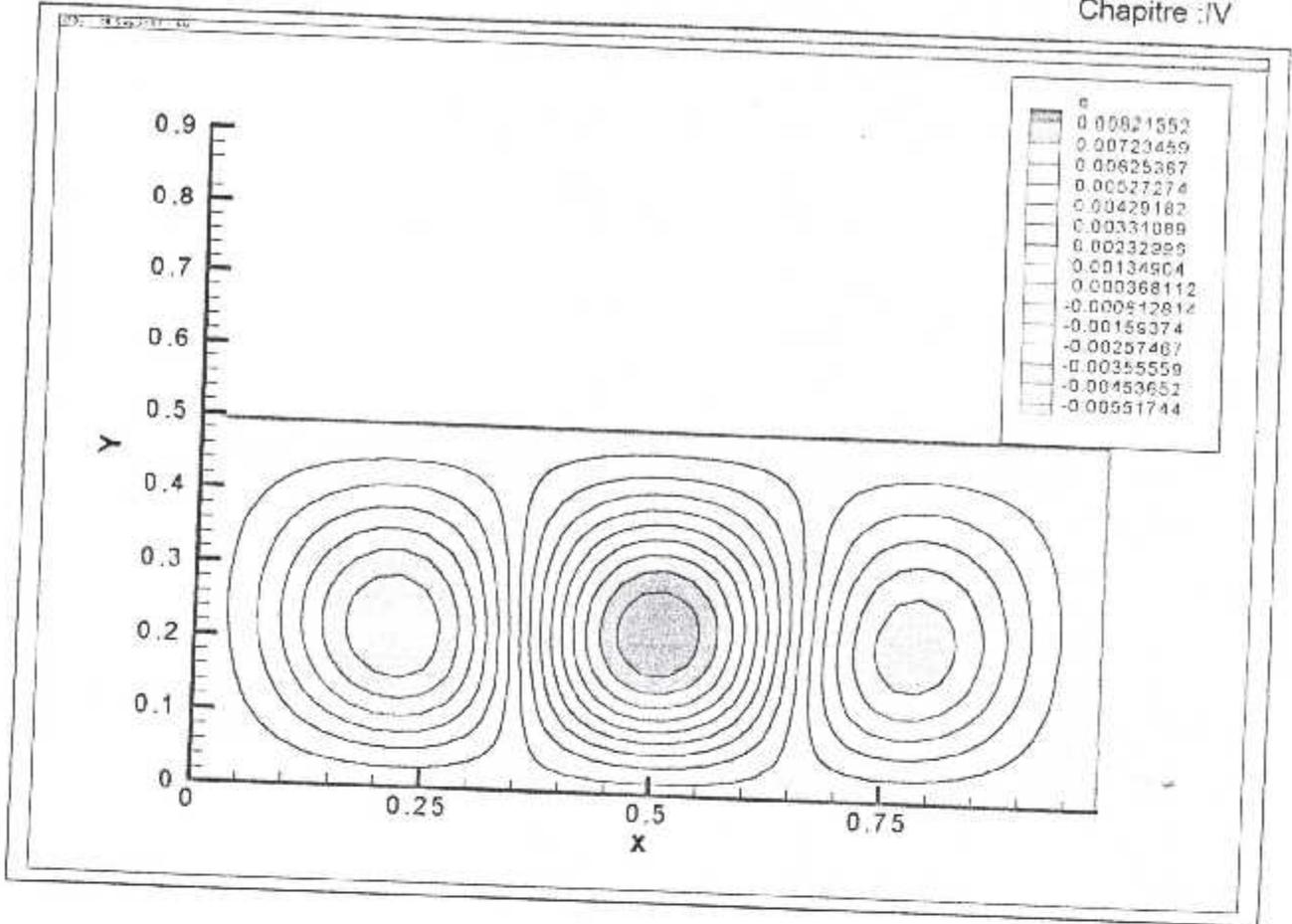
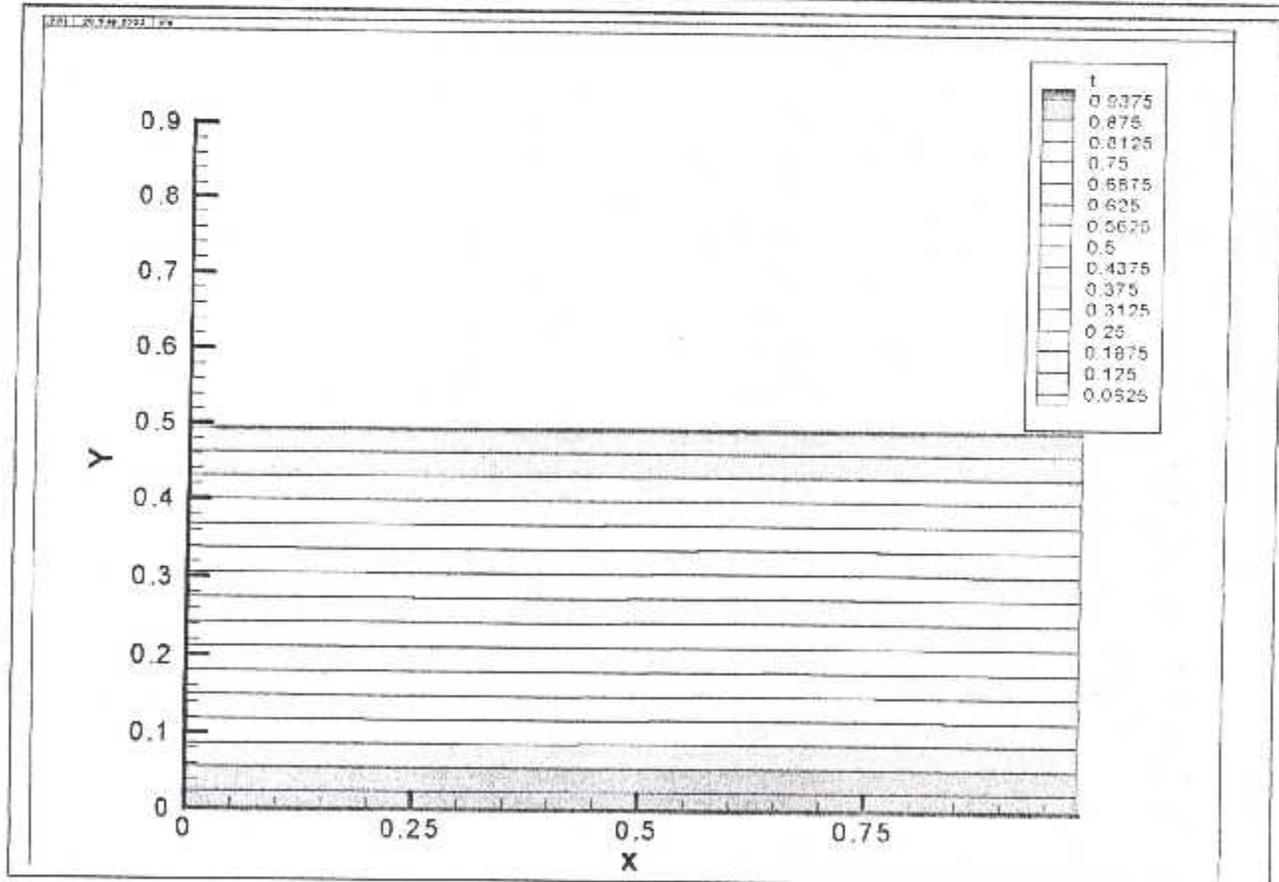
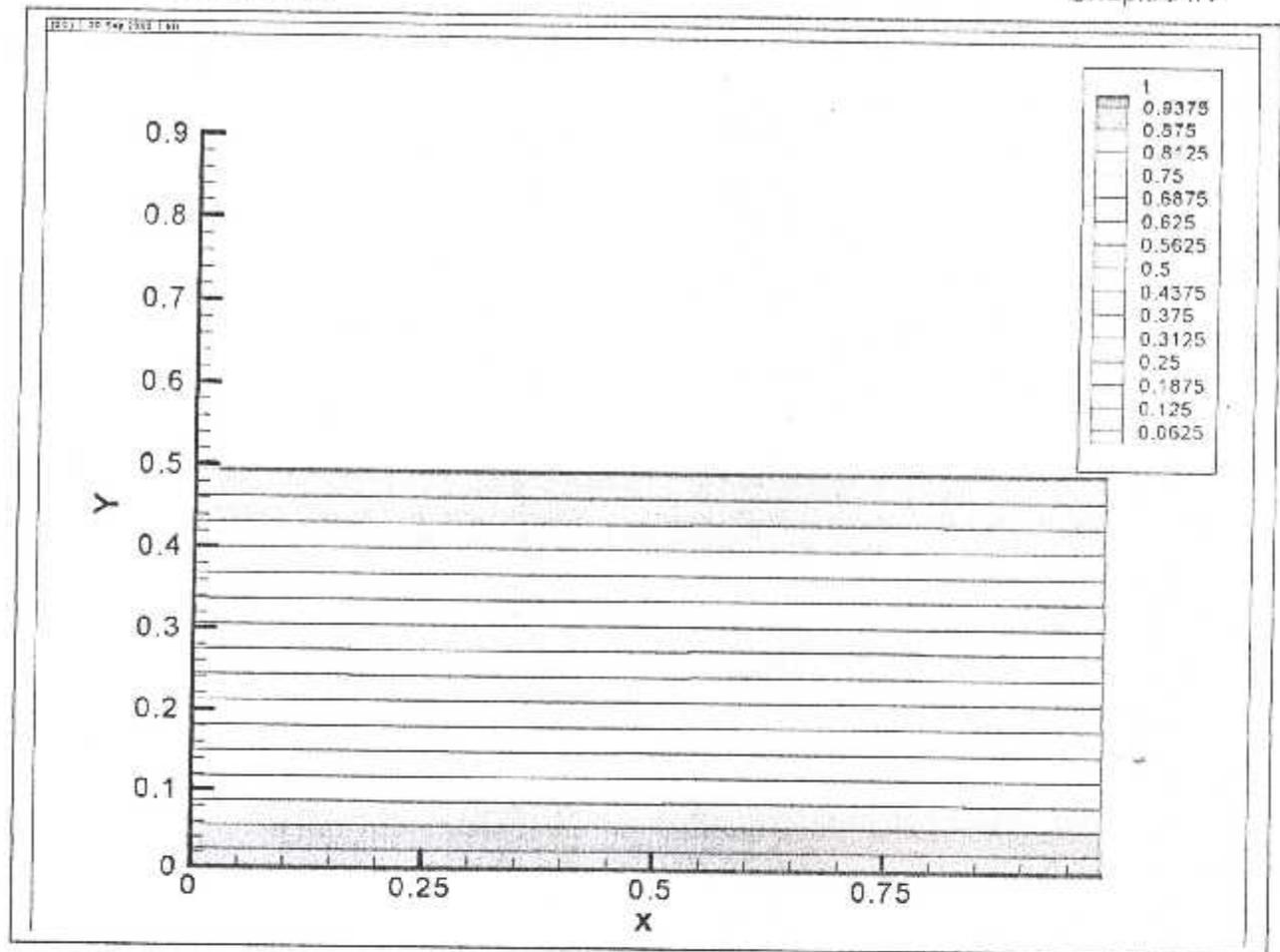


Fig. (IV-29) : Effet de nombre de Prandtl sur le profil de vitesse V au centre de la cavité
 a) $Ra = 10^3$; b) $Ra = 10^5$; c) $Ra = 10^6$



Fig(IV-30) : Fonction de courant pour : a) $Ra = 1700$; b) $Ra = 1720$



Fig(IV-31) : Champs de température pour a) $Ra = 1700$; b) 1720

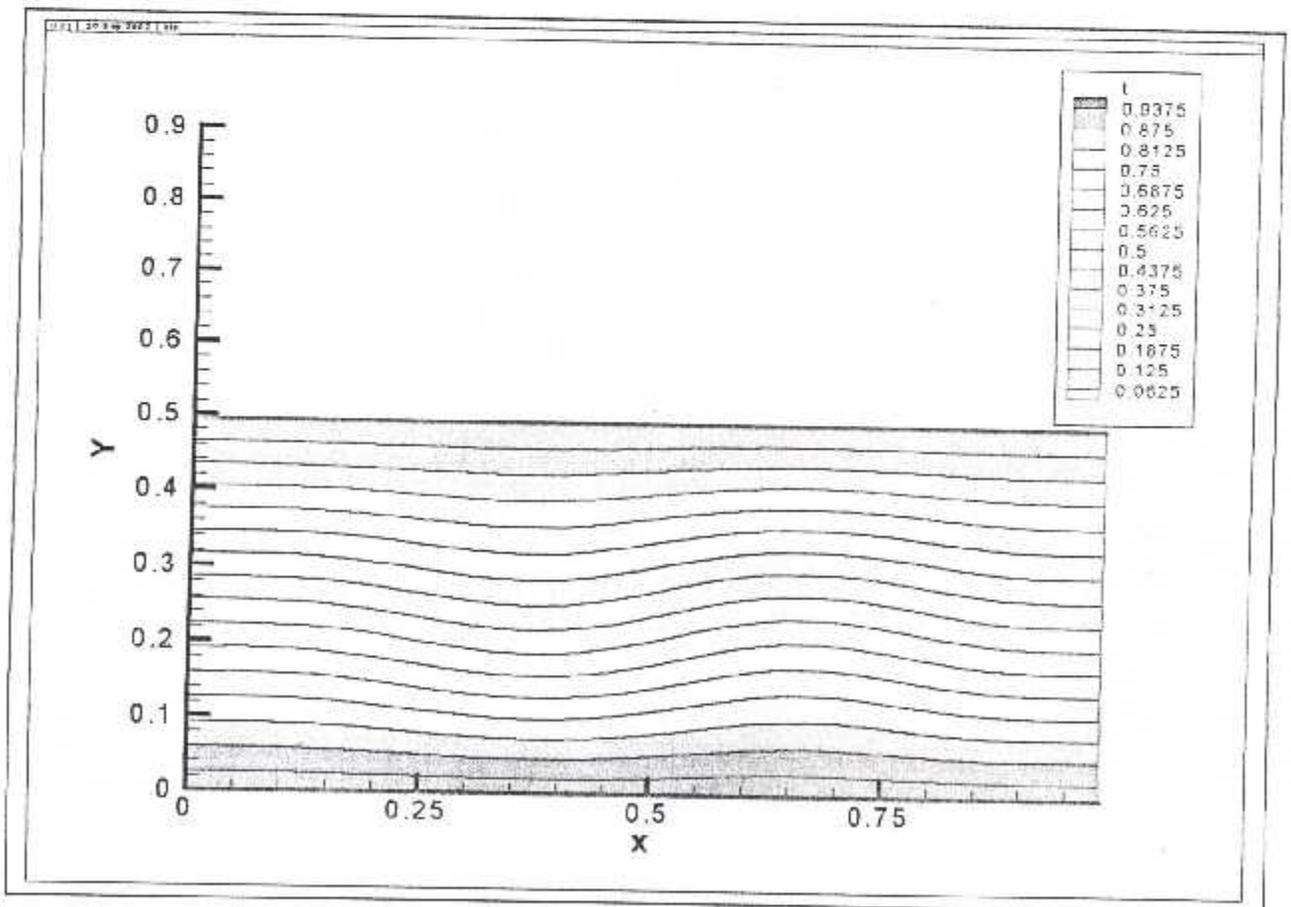
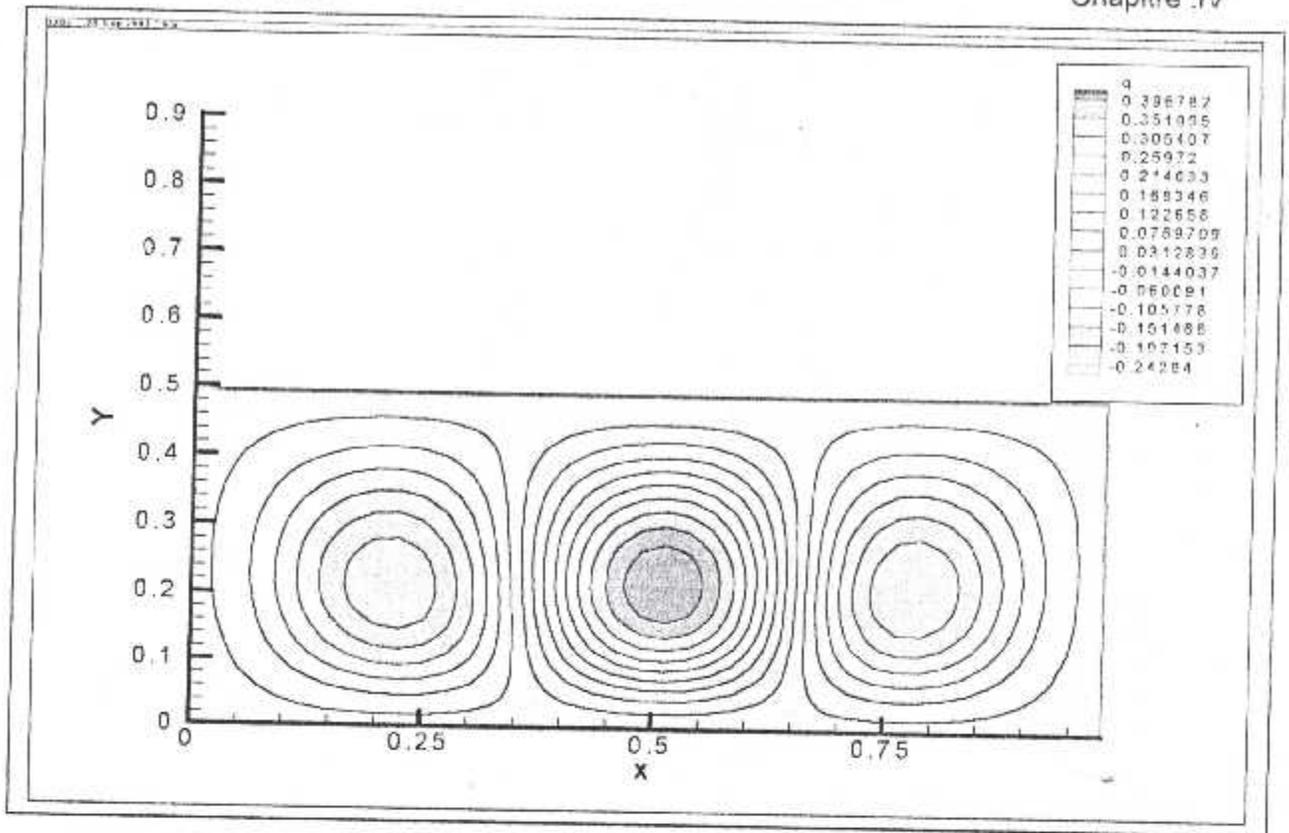


Fig.(IV-32) : pour $Ra = 1800$; a) fonction de courant ; b) champs de température

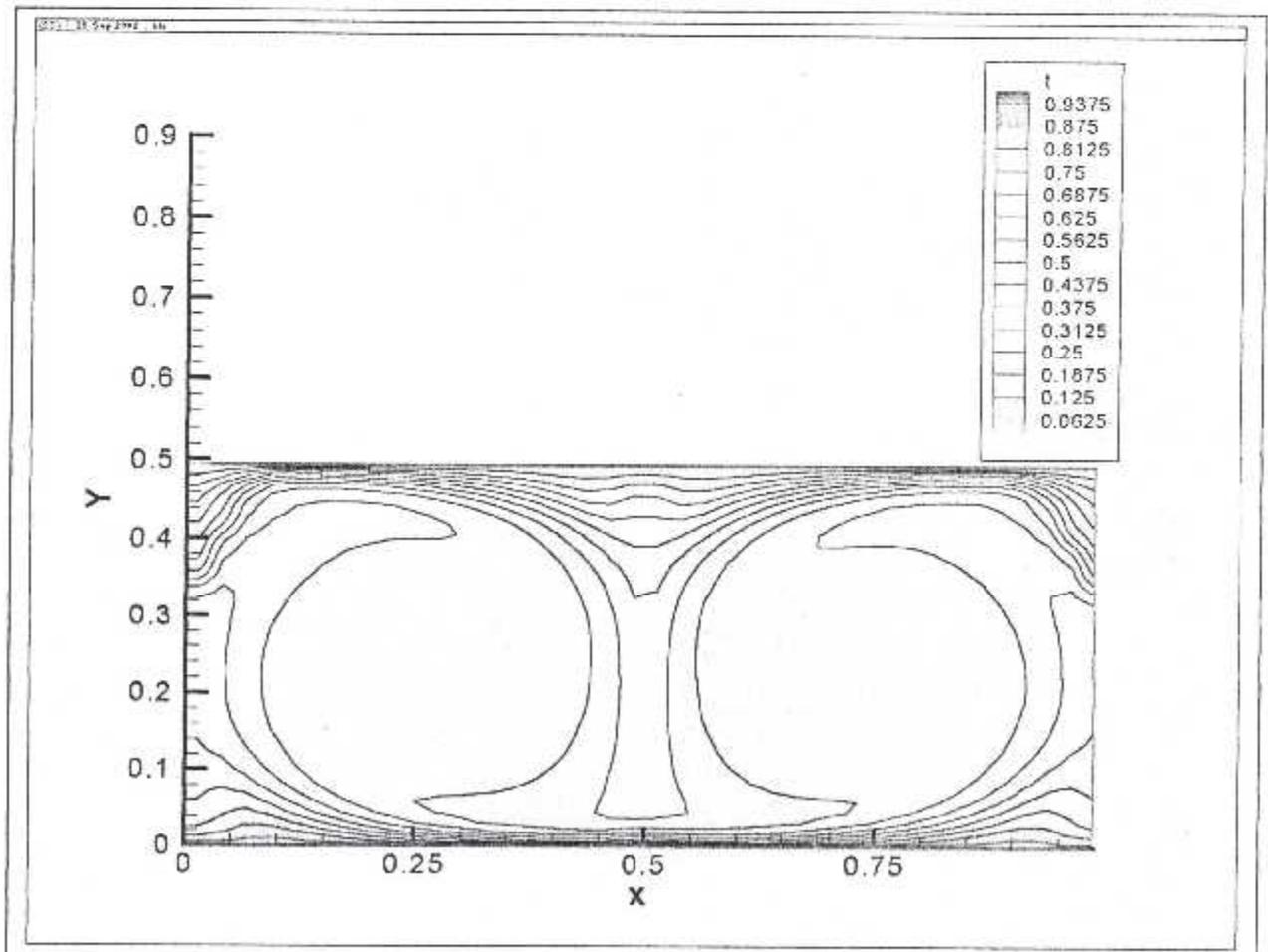
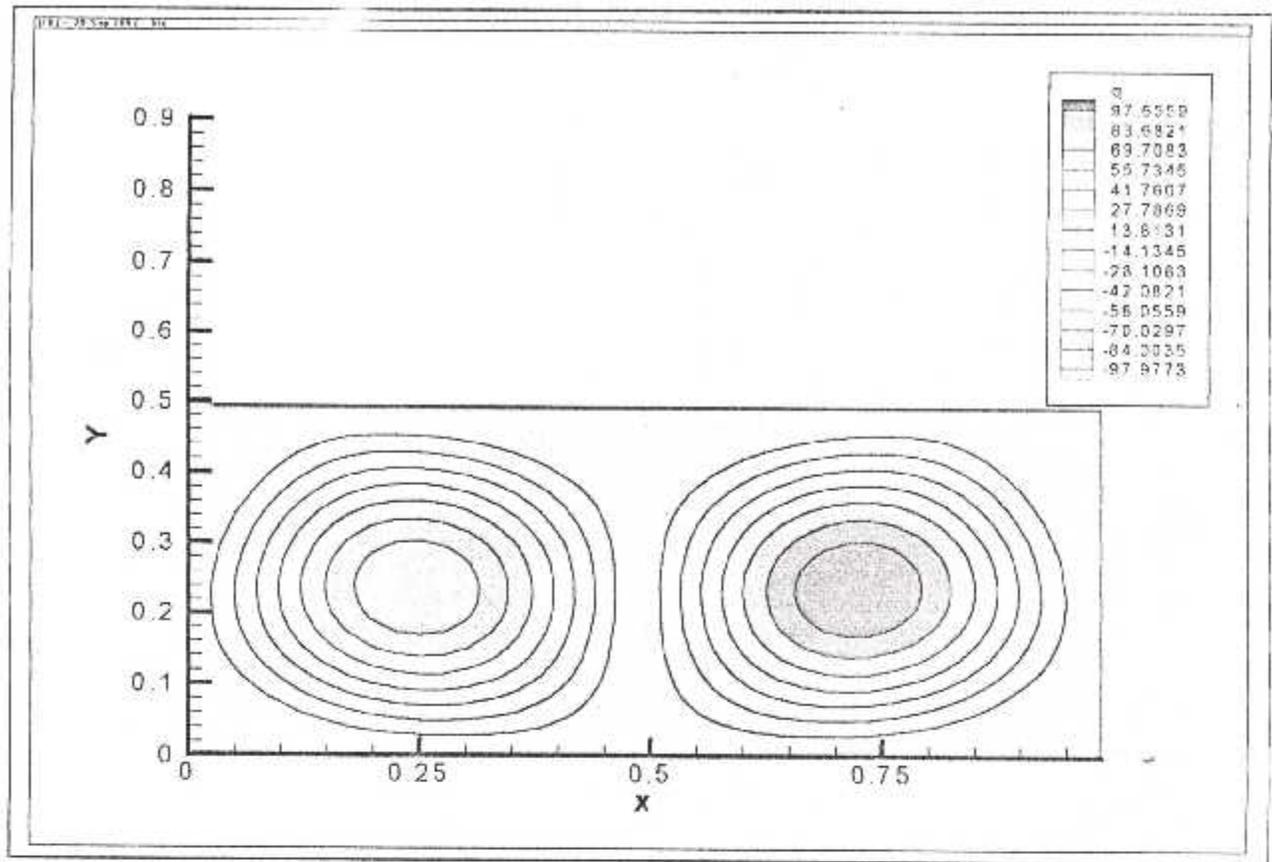


Fig.(IV-33) : $Ra = 6.06 \text{ E}+3$; a) fonction de courant ; b) champs de température

	Ra = 10 ³			Ra = 10 ⁴			Ra = 10 ⁵			Ra = 10 ⁶		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
U (X=0.5)	3.612	3.544	3.649	16.126	16.18	16.178	33.61	35.73	34.73	66.895	68.81	64.63
Y	0.804	0.832	0.813	0.814	0.832	0.823	0.845	0.857	0.855	0.862	0.872	0.850
V (X=0.5)	3.688	3.593	3.697	19.17	19.44	19.617	68.70	69.08	68.59	225.651	221.8	217.36
X	0.172	0.168	0.178	0.106	0.113	0.119	0.065	0.067	0.066	0.0368	0.0375	0.0379

(1) notre étude

[2] N. C. Markatos & K. A. Pericleous

[3] de Vahl Davis

Tab : Comparaison des résultats obtenus par notre étude avec les résultats des références

Conclusion

Le but de notre travail est de simuler les écoulement à recirculation . Ce type d'écoulement est le résultat de l'action simultanée de la convection et de la diffusion en présence de gradient de température . La modélisation mathématique de tels phénomènes implique nécessairement le couplage entre le champ dynamique et celui de la température et nécessitant par la même des procédés itératifs de résolution .

Dans le cas concret qui nous concerne , il s'agit de résoudre les équations de Navier-Stokes plus l'équation de l'énergie dans des cavités bidimensionnelles et de voir la possibilité de pouvoir capter numériquement les mouvements du fluide aussi infimes soient-ils s'il y'a lieu .

C'est ainsi que nous nous sommes intéressés au problème de la cavité entraînée, problème purement dynamique ou la recirculation est provoquée par une action mécanique de mise en mouvement du couvercle de la cavité .

Le schéma numérique que nous avons utilisé pour le traitement des termes convectifs (HYBRIDI) a donné des résultats très satisfaisants. Comparativement , nous avons été capable de suivre l'écoulement jusqu'à un nombre de Reynolds égal à 10000 contre 7000 rapportés par la référence [3] .

Confiants de ces résultats , nous avons abordés les problèmes de la convection naturelle en milieux confinés. Deux types de configurations ont été étudiées : la cavité différentiellement chauffée par ses cotés latéraux et celle dite de Rayleigh-Bénard . La raison de ce choix est due en fait à la différente nature de ces deux types d'écoulements. Le premier est le résultat d'une instabilité de couche limite alors que le second est due à l'action de la poussée d'Archimède contre les forces de viscosité.

Pour obtenir de bons résultats , nous avons été contraints de modifier l'algorithme initiale du programme Team en lui associant la technique de stationnarité (Euler rétrograde).

En effet étant donné la nature elliptique des équations , il faut se donner un estimé initial (choix très difficile surtout en convection naturelle) puis par un procédé interne itératif rechercher la solution. Il va sans dire que si par malchance l'estimé initial est trop loin de la solution recherché le nombre d'itération devient rapidement prohibitif. Nos premiers tests ont confirmé cette réalité puisque nous n'avons pas été capable d'obtenir le moindre résultat.

Un moyen efficace pour éviter cette difficulté est de rajouter un terme temporel aux équations de mouvement, les équations devenant paraboliques, il est possible l'emploi d'une technique de stationnarité (Marching in Time).

Grâce à cette technique, les résultats très satisfaisants sont obtenus dans le cas de la cavité différentiellement chauffée; ils ont été confrontés à un benchmark mondialement reconnu celui de G. de Vahl Davis.

Concernant le problème de Rayleigh-Bénard, les résultats obtenus pour les lignes de courant sont satisfaisants puisque notre programme de calcul prévoit correctement la présence de deux vortex l'un rotatif et l'autre contrarotatif. Les vitesses prédites sont de l'ordre de 2.9 cm/sec pour un nombre de Rayleigh égal à 6060. Ce résultat est proche de celui obtenu par K.Perks (3.4 cm/sec).

De même, la représentation des lignes isothermes montre la présence de ces deux vortex, ce qui confirmerais nos résultats à celui du même auteur utilisant le code commercial phoenics.

Finalement, nous avons montré à travers cette étude que le code TEAM est parfaitement apte à simuler des problèmes de convection naturelle moyennant quelques adaptations. Il sera certainement utile dans des travaux futurs traitants du problème de changement de phase en présence de la convection naturelle.

Bibliographies

[1] O.R BURGGRAF

«Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows»
J. Fluid Mech. ,Vol.24, pp. 113-151, 1966.

[2] S.A AL-SANTA W.M PUN AND D.B SPELDING

Computation of two dimensional elliptic flows, including heat transfert.

[3] PATRICK BONTOUX

« Contribution à l'étude des écoulements visqueux en milieu confine.
Analyse et optimisation de méthodes numériques de haute précision »

Thèse de Doctorat es-Sciences, U.E.R Institut de Mécanique des Fluides de
l'Université d'Aix Marseille II 18 décembre 1978.

[4] GRAND ,D

« Contribution à l'étude des courants de recirculation »

Thèse de Doctorat es-Sciences, Institut National Polytechnique, Université de
Grenoble, 17 Avril 1975.

[5] BENABBAS. M. E et OUNNOUS . S

« Etude d'un Ecoulement Elliptique à l'Intérieur d'une Cavité Carrée avec
Transfert de Chaleur par les volumes Finis ».

Mémoire d'Ingénieur Institut de Génie Mécanique, Université de Constantine,
promotion 1994.

[6] MEFLEH K.K S

« Simulation Numérique de la Convection Naturelle Laminaire dans une
Enceinte Rectangulaire »

Mémoire d'Ingénieur, Institut de Génie Mécanique, Université de Constantine,
promotion 1996.

[7] CATTON, I

« Convection naturelle en espace clos », sixième congrès international sur le
transfert de chaleur, Toronto, Canada, 1978

[8] GILLY, B. GRANDIN, J, C. BONTOUX, P. et ROUX, B.

« Etude théorique des perte convective dans un capteur solaire plan », Troisième
congrès français de mécanique, Grenoble, Septembre, 1977.

- [9] **KREIYH, F**
« Transmission de la chaleur et thermodynamique », Masson et C^{ie} éditeurs, 1967.
- [10] **J, F, SACADURA**
« Initiation au transfert thermique » TEC 8 Doc, 1993
- [11] **méthode numérique de résolution C.I.S.I.**
- [12] **SUHAS V. PATANKAR**
« Numerical heat transfer and fluid flow », Mc Grow-Hill book company, 1981.
- [13] **DOMINIQUE GODIN**
« introduction à la méthode des volumes finis » (note de cours) 1992-1993
- [14] **G. D. MALLINSON and G. DE VAHL DAVIS**
« Tree dimensional natural convection in a box: a numerical study », J. Fluid mech. 83, 1-31 (1977).
- [15] **N. MARKATOS and K. A. PERICEOUS**
« Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity », Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 27. No 5. pp 755 – 772. 1984.
- [16] **R. J. A. JANSSEN and R. A. W. M. HENKES**
« Accuracy of finite – volume discretizations for the bifurcating natural convection flow in a square cavity », Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 24, pp. 191 – 207, 1993.
- [17] **K. PERKS**
University of Colombia ,USA,