

---

**Simulation numérique  
des transferts thermiques  
par éléments finis**

Jean-Michel Bergheau  
Roland Fortunier

 **hermes**

*Lavoisier*

---

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	9
<b>PREMIÈRE PARTIE. CONDUCTION EN RÉGIME STATIONNAIRE</b> .....	15
<b>Chapitre 1. Formulation du problème</b> .....	19
1.1. Modélisation physique .....	19
1.1.1. Équation d'équilibre thermique .....	19
1.1.2. Loi de Fourier .....	20
1.1.3. Conditions aux limites .....	21
1.2. Analyse mathématique .....	22
1.2.1. Méthode des résidus pondérés .....	23
1.2.2. Formulation intégrale faible .....	25
1.3. Exemple de travail .....	29
1.3.1. Modélisation physique .....	29
1.3.2. Méthodes directes .....	30
1.3.3. Méthodes de collocation .....	33
1.3.4. Méthode de Galerkin .....	36
<b>Chapitre 2. Méthode des éléments finis</b> .....	43
2.1. Approximation par éléments finis .....	43
2.1.1. Maillage .....	43
2.1.2. Approximation nodale .....	46
2.2. Formulation du problème discret .....	49
2.2.1. Quantités élémentaires .....	49
2.2.2. Assemblage .....	51
2.3. Résolution .....	54
2.3.1. Application des conditions aux limites en température .....	54
2.3.2. Résolution du système linéaire .....	57
2.3.3. Stockage de la matrice du système linéaire .....	62
2.3.4. Analyse des résultats .....	64
2.4. Exemple de travail .....	69
2.4.1. Approximation par éléments finis .....	71

2.4.3. Résolution . . . . .	75
<b>Chapitre 3. Éléments finis isoparamétriques</b> . . . . .	79
3.1. Définitions . . . . .	79
3.1.1. Élément de référence . . . . .	79
3.1.2. Éléments isoparamétriques . . . . .	85
3.1.3. Propriétés des fonctions d'interpolation . . . . .	89
3.2. Calcul des quantités élémentaires . . . . .	90
3.2.1. Expression dans le repère de référence . . . . .	91
3.2.2. Méthode d'intégration de Gauss . . . . .	93
3.3. Quelques éléments finis . . . . .	98
<b>DEUXIÈME PARTIE. RÉGIME TRANSITOIRE, NON-LINÉARITÉS, PHÉNO- MÈNES DE TRANSPORT</b> . . . . .	103
<b>Chapitre 4. Conduction en régime transitoire</b> . . . . .	107
4.1. Formulation du problème . . . . .	107
4.1.1. Le problème continu . . . . .	107
4.1.2. Approximation par éléments finis . . . . .	109
4.1.3. Cas linéaire . . . . .	111
4.2. Intégration dans le temps . . . . .	113
4.2.1. Méthode modale . . . . .	114
4.2.2. Intégration directe dans le temps . . . . .	118
4.2.3. Précision et stabilité d'un algorithme d'intégration directe . . . . .	122
4.2.4. Règles pratiques complémentaires . . . . .	127
4.3. Exemple de travail . . . . .	138
4.3.1. Modélisation physique et approximation . . . . .	138
4.3.2. Applications numériques . . . . .	142
<b>Chapitre 5. Non-linéarités</b> . . . . .	147
5.1. Formulation et techniques de résolution . . . . .	147
5.1.1. Formulation . . . . .	147
5.1.2. Méthodes de résolution de systèmes d'équations non linéaires . . . . .	148
5.1.3. Méthode de <i>line search</i> . . . . .	156
5.2. Les non-linéarités classiques . . . . .	157
5.2.1. Propriétés physiques . . . . .	157
5.2.2. Conditions aux limites en flux ou source volumique . . . . .	159
5.2.3. Modélisation des changements d'état . . . . .	161
<b>Chapitre 6. Phénomènes de transport</b> . . . . .	167
6.1. Mise en évidence des instabilités . . . . .	167
6.1.1. Bilan thermique . . . . .	167
6.1.2. Traitement d'un cas simple . . . . .	169
6.2. Techniques de résolution . . . . .	172

6.2.2. Méthode SUPG (Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin) . . . . .	17
6.2.3. Formulation de Petrov-Galerkin en 2D et en 3D . . . . .	17
<b>TROISIÈME PARTIE. PHÉNOMÈNES COUPLÉS</b> . . . . .	18
<b>Chapitre 7. Transferts radiatifs dans une enceinte</b> . . . . .	18
7.1. Modélisation des échanges thermiques par rayonnement dans une cavité . . . . .	18
7.1.1. Position du problème . . . . .	15
7.1.2. Calcul des facteurs de forme . . . . .	15
7.1.3. Couplage diffusion-rayonnement . . . . .	15
7.2. Exemples . . . . .	20
7.2.1. Rayonnement entre deux murs . . . . .	20
7.2.2. Trempe de cylindres . . . . .	20
<b>Chapitre 8. Couplage fluide-structure dans une canalisation</b> . . . . .	20
8.1. Modélisation du fluide . . . . .	20
8.1.1. Modèle physique et formulation mathématique . . . . .	20
8.1.2. Modélisation du couplage . . . . .	21
8.2. Exemple . . . . .	21
8.2.1. Modélisation physique et géométrique . . . . .	21
8.2.2. Résultats . . . . .	21
<b>Chapitre 9. Couplage thermomécanique</b> . . . . .	21
9.1. Modélisation des changements de phase . . . . .	21
9.1.1. Vitesse de variation des proportions de phase . . . . .	21
9.1.2. Intégration numérique . . . . .	22
9.1.3. Cas de plusieurs changements de phase . . . . .	22
9.1.4. Modélisation du couplage . . . . .	22
9.2. Exemples . . . . .	22
9.2.1. Diagrammes de transformation de phase . . . . .	22
9.2.2. Trempe d'un acier . . . . .	22
<b>Chapitre 10. Couplage électrothermique</b> . . . . .	22
10.1. Modélisation électrocinétique . . . . .	22
10.1.1. Formulation faible . . . . .	22
10.1.2. Modélisation du couplage . . . . .	22
10.1.3. Résolution du problème couplé . . . . .	22
10.2. Soudage par résistance . . . . .	22
10.2.1. Mise en place du modèle . . . . .	22
10.2.2. Résultats . . . . .	22
<b>Bibliographie</b> . . . . .	24
<b>Index</b> . . . . .	24