

**SRD**

sciences du risque et du danger

collection dirigée par Franck Guarnieri

directeur du Centre de recherche sur les Risques et les Crises (CRC), Mines ParisTech / ARMINES

série **Références**

139

# Introduction à l'analyse probabiliste des risques industriels

Henri Procaccia

Editions  
**TEC**  
& **DOC**

*Lavoisier*

# Table des matières

Préface .....	.III
Remerciements .....	V
Avertissement .....	VII
Notations .....	XVII

## Chapitre 1 Généralités

1 Introduction .....	1
2 Les éléments fondamentaux communs aux deux démarches .....	2
2.1 Définitions .....	2
2.2 Fiabilité des matériels et systèmes .....	4
2.3 Les essais de fiabilité, le retour d'expérience .....	5
2.4 Les modèles statistiques de fiabilité .....	7
2.5 La démarche décisionnelle bayésienne .....	10

## Chapitre 2

### L'estimation – Les modèles statistiques fréquentiels et bayésiens

1 Les difficultés de l'estimation .....	11
1.1 Les estimateurs utilisés en pratique .....	13
1.2 Les principales propriétés des estimateurs .....	15
2 Les méthodes d'estimation .....	17
3 Les principales distributions statistiques .....	17
3.1 La loi exponentielle .....	18
3.2 La distribution gamma .....	20
3.3 La loi de Weibull à deux et à trois paramètres .....	22
3.4 La distribution binomiale .....	25
3.5 La distribution bêta .....	27
3.6 La loi de Fisher-Snedecor .....	29
3.7 La distribution normale .....	30
3.8 La distribution du Chi deux .....	34
3.9 La distribution log normale (ou loi de Galton) .....	35

3.10. La distribution de Student (Student-Fisher) .....	38
3.11. La distribution uniforme .....	40

### Chapitre 3

#### L'estimateur ponctuel du maximum de vraisemblance et l'estimation par intervalle – Les difficultés liées à la démarche fréquentielle

1. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) dans un cadre exponentiel .....	43
1.1. Estimateur fréquentiel et estimateur bayésien .....	44
1.2. Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) .....	51
1.3. Influence du plan d'échantillonnage .....	51
1.3.1. Essais censurés de type II .....	51
1.3.2. Essais censurés de type I .....	52
1.3.3. Plan d'échantillonnage des données de Retour d'Expérience (REX) .....	53
2. L'estimateur du maximum de vraisemblance d'une probabilité de défaillance à la sollicitation de type binomial .....	53
2.1. Calcul de l'estimateur .....	53
2.2. Influence du plan d'échantillonnage .....	54
2.2.1. Essais de type I .....	54
2.2.2. Essais de type II .....	54
3. L'estimateur du maximum de vraisemblance d'une loi de Weibull .....	55
4. L'estimation par intervalle Mesure de l'incertitude associée à un estimateur .....	57
4.1. Intervalle de confiance bilatéral d'un temps ou d'un taux de défaillance .....	58
4.1.1. Essais de type II .....	58
4.1.2. Essais de type I .....	60
4.2. Intervalle de confiance unilatéral .....	61
4.3. Intervalle de confiance d'une probabilité de défaillance à la sollicitation63 .....	64
4.4. Les effets de la maintenance .....	64
4.5. Difficultés et limites de la démarche fréquentielle .....	64

### Chapitre 4

#### La démarche bayésienne

1. Le principe des probabilités subjectives .....	67
2. La démarche historique – Le traité du révérend Thomas Bayes .....	69
2.1. Discussion : comment « bâtir » la loi <i>a priori</i> .....	74
2.2. Exemple 1 .....	75
2.3. Exemple 2 : détermination des paramètres de la loi <i>a priori</i> pour un taux de défaillance .....	76
3. Le théorème de Bayes .....	77
3.1. Cas des événements discrets .....	77
3.2. Cas de variables continues .....	79
3.2.1. Intérêt de la démarche bayésienne .....	81
3.2.2. Les difficultés de la démarche bayésienne .....	83
3.2.3. Quantité d'information apportée par une distribution statistique .....	83

### Chapitre 5

#### Paramètres de fiabilité constants – La modélisation de l'expertise

1. Introduction .....	95
2. Modélisation des expertises .....	95
2.1. Expertises peu informatives .....	96
2.1.1. Densités <i>a priori</i> « non informatives » de Jeffreys – Lien entre estimateurs fréquentiel et bayésien .....	96
2.1.2. Modélisation <i>a priori</i> de valeurs moyennes non informatives .....	100
2.1.3. Loi <i>a priori</i> non informative uniforme [0, 1] – Expertises de type binaire mutuellement exclusives .....	102
2.1.4. Densité <i>a priori</i> uniforme bornée « peu » informative .....	111
2.2. Expertises informatives .....	112
2.2.1. Élicitation et modélisation d'expertises censurées .....	112
2.2.2. Expertises <i>a priori</i> conjuguées au retour d'expérience .....	116
2.2.3. Expertise sur l'espérance d'un estimateur fiabiliste – Lois normale-lognormale .....	117
2.3. Modélisation de l'estimation de l'efficacité d'une action de maintenance .....	126

### Chapitre 6

#### Évaluation bayésienne d'un taux ou d'un temps de défaillance

1. Introduction .....	129
2. Connaissances <i>a priori</i> non informatives sur un taux ou un temps de défaillance .....	130
2.1. Densité <i>a priori</i> de Jeffreys .....	130
2.1.1. Évaluation bayésienne d'un taux de défaillance .....	130
2.1.2. Évaluation bayésienne d'un temps de défaillance .....	132
2.2. Densité <i>a priori</i> uniforme bornée .....	132
2.2.1. Évaluation d'un taux de défaillance .....	132
2.2.2. Évaluation d'un temps de défaillance .....	138
3. Connaissances <i>a priori</i> informatives – Taux et temps de défaillance .....	140
3.1. Modélisation d'une densité <i>a priori</i> gamma .....	140
3.1.1. Taux de défaillance .....	140
3.1.2. Temps moyen de défaillance .....	141
3.1.3. Filtration de l'expertise .....	141
3.1.4. Modélisation de l'expertise .....	142
3.2. Fonction de vraisemblance .....	145
3.3. Densité de probabilité et paramètres de fiabilité <i>a posteriori</i> .....	145
3.3.1. Taux de défaillance – Espérance et variance .....	145
3.3.2. Taux de défaillance – Intervalle de crédibilité <i>a posteriori</i> .....	146
3.3.3. Temps de défaillance .....	149

### Chapitre 7

#### Évaluation bayésienne d'une probabilité de défaillance à la sollicitation

2.2. Densité *a priori* uniforme tronquée peu informative . . . . . 158  
 2.2.1. Densité *a priori* « peu » informative . . . . . 158  
 2.2.2. Retour d'expérience binomial . . . . . 158  
 2.2.3. Densité *a posteriori* . . . . . 158  
 3. Loi *a priori* informative . . . . . 162  
 3.1. Élicitation et modélisation de la loi *a priori* . . . . . 162  
 3.2. Retour d'expérience et fonction de vraisemblance . . . . . 164  
 3.3. Densité de probabilité *a posteriori* . . . . . 164

Chapitre 8

Paramètres de fiabilité variables avec le temps

1. Introduction . . . . . 169  
 2. Démarche fréquentielle . . . . . 170  
 2.1. Matériels non réparables et matériels réparables . . . . . 170  
 2.2. Détermination des paramètres de la loi de Weibull – Méthode de régression . . . . . 171  
 2.2.1. Régression sur l'axe des  $y$  – Méthode des rangs médians . . . . . 172  
 2.2.2. Régression sur l'axe des  $x$  . . . . . 177  
 2.2.3. Différents modes de défaillance – Risque compétitif et modèle BiWeibull . . . . . 178  
 2.2.4. Facteur de réduction de biais RBA . . . . . 181  
 2.3. Méthode du maximum de vraisemblance (EMV) . . . . . 182  
 2.3.1. Détermination analytique des paramètres de la loi de Weibull . . . . . 182  
 2.3.2. Intervalle de confiance sur les paramètres de la loi de Weibull et la fiabilité . . . . . 184  
 2.4. La méthode *stochastic expectation maximisation* (SEM) . . . . . 185  
 2.5. Comparaison des méthodes d'évaluation des paramètres de la loi de Weibull et des résultats obtenus par différents logiciels . . . . . 188  
 3. Démarche bayésienne . . . . . 189  
 3.1. Détermination bayésienne du paramètre d'échelle lorsque le paramètre de forme  $\beta$  est connu . . . . . 190  
 3.1.1. Évaluation du paramètre d'échelle à partir d'une densité *a priori* uniforme bornée, peu informative . . . . . 190  
 3.1.2. Détermination du paramètre d'échelle et du temps moyen de défaillance à partir d'une densité *a priori* non informative de Jeffreys . . . . . 195  
 3.1.3. Détermination du paramètre d'échelle à partir d'une densité *a priori* gamma informative . . . . . 198  
 3.2. Détermination bayésienne des paramètres de la loi de Weibull lorsque les paramètres de forme  $\beta$  et d'échelle  $\eta$  sont inconnus . . . . . 200  
 3.2.1. Introduction . . . . . 200  
 3.2.2. Élicitation et modélisation de l'expertise *a priori* . . . . . 201  
 3.2.3. Fonction de vraisemblance . . . . . 208  
 3.2.4. Pondération entre connaissance *a priori* et vraisemblance . . . . . 209  
 3.2.5. Densités *a posteriori* des paramètres de la loi de Weibull . . . . . 210  
 3.2.6. Calculs complémentaires . . . . . 212  
 3.2.7. Comparaison entre logiciels bayésiens . . . . . 216  
 4. Modèle bayésien multiphases de la loi de Weibull à quatre paramètres (BiWeibull) . . . . . 218  
 4.1. Exemple – Évaluation des phases de rajeunissement et de vieillissement

4.1.5. Taux de défaillance mixte . . . . . 225  
 4.1.6. Temps d'initiation du vieillissement . . . . . 226  
 4.2. Fiabilité globale . . . . . 226  
 5. Matériels réparables – Impact de la maintenance sur des matériels réparables . . . . . 227  
 5.1. Maintenance minimale (ABAO) – Lois puissance (Crow-Amsaa, Weibull) . . . . . 227  
 5.1.1. Estimation des paramètres de la loi de Crow AMSAA par la méthode du maximum de vraisemblance . . . . . 230  
 5.1.2. Détermination graphique . . . . . 230  
 5.1.3. Estimation dans le cas d'un système de  $k$  matériels . . . . . 232  
 5.1.4. Estimation des paramètres du modèle de Weibull . . . . . 233  
 5.2. Maintenance parfaite – Processus de renouvellement (AGAN, RP, *renewal process*) . . . . . 235  
 5.2.1. Le modèle de processus de renouvellement . . . . . 235  
 5.2.2. Détermination du nombre espéré de défaillances – Estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Weibull . . . . . 236  
 5.2.3. Simulation de Monte Carlo . . . . . 236  
 5.3. Les processus généralisés de renouvellement (GRP) à réduction arithmétique d'âge (ARA) et à réduction d'intensité de défaillance (ARI) . . . . . 238  
 5.3.1. Le modèle GRP 1 (*generalised renewal process 1*) . . . . . 239  
 5.3.2. Le modèle GRP 2 à réduction stochastique d'âge type 2 . . . . . 240  
 5.3.3. Évaluation du nombre espéré de défaillances par simulation de Monte Carlo . . . . . 240  
 5.3.4. Estimation des paramètres du modèle GRP par la méthode du maximum de vraisemblance . . . . . 241  
 5.3.5. Les différents modèles généralisés de renouvellement GRP . . . . . 245  
 5.4. Les modèles particuliers à réduction arithmétique d'âge (ARA) . . . . . 250  
 5.4.1. Le modèle  $ARA_{\infty}$  (modèle équivalent à Kijima 2, et Rexpert) . . . . . 250  
 5.4.2. Le modèle  $ARA_1$  (équivalent au modèle Kijima 1) . . . . . 251  
 5.4.3. Le modèle  $ARA_m$  . . . . . 252  
 5.5. Les modèles à réduction d'intensité de défaillance ARI . . . . . 253  
 5.5.1. Le modèle  $ARI_{\infty}$  . . . . . 253  
 5.5.2. Le modèle  $ARI_1$  . . . . . 254  
 5.5.3. Le modèle  $ARI_m$  . . . . . 255  
 5.5.4. Les modèles de réduction géométrique de l'intensité de défaillance . . . . . 256

Chapitre 9

Applications industrielles

1. Introduction . . . . . 257  
 2. Actualisation d'un recueil de données de fiabilité – Application à la banque EIREDA . . . . . 258  
 2.1. Densité *a priori* . . . . . 260  
 2.2. Fonction de vraisemblance . . . . . 261  
 2.3. Densité gamma *a posteriori* . . . . . 261  
 2.4. Calcul logiciel . . . . . 262  
 3. Détermination d'un taux de défaillance générique pour un compresseur centrifuge . . . . . 264  
 3.1. Courbes d'isovieilles

3.3.2. Détermination de paramètres de fiabilité génériques utilisant une expertise <i>a priori</i> complémentaire, et le retour d'expérience .....	272
4. Optimisation de la maintenance par la fiabilité de pompes à eau (OMF) .....	276
4.1. Difficultés liées au retour d'expérience .....	277
4.2. Le principe de réduction d'âge (ARA) apporté par la maintenance .....	278
4.3. Modélisation de l'expertise <i>a priori</i> des paramètres de la loi de Weibull .....	280
4.4. Modélisation de la fonction de réduction d'âge .....	281
4.5. Application à l'optimisation de la maintenance de pompes alimentaires d'une centrale de production d'énergie .....	281
4.5.1. Programme de base de maintenance préventive des pompes alimentaires ..	282
4.5.2. Retour d'expérience .....	283
4.5.3. Détermination fréquentielle des paramètres de la loi de vieillissement des pompes .....	284
4.5.4. Modèle à réduction d'âge bayésien – Détermination de la loi réelle de vieillissement des étanchéités de pompe et de leur fiabilité intrinsèque ..	290
4.5.5. Conclusion .....	302

### Chapitre 10

#### Conclusions – Perspectives

1. Les difficultés de la démarche probabiliste d'évaluation des risques industriels .....	305
1.1. Une première difficulté : le recueil et la modélisation de l'expertise .....	307
1.2. Une deuxième difficulté : la pondération des sources d'information disponibles ..	307
1.3. Une troisième difficulté : le calcul des paramètres de fiabilité <i>a posteriori</i> .....	308
2. Les axes de recherche actuels .....	308

<b>Bibliographie</b> .....	<b>311</b>
<b>Annexes</b> .....	<b>315</b>
<b>Glossaire</b> .....	<b>339</b>
<b>Index</b> .....	<b>343</b>