

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

UNIVERSITE DE BLIDA

Memoire de Magister

SUSPENSION ACTIVE POUR VEHICULES

PAR

KAZOULA MOHAMED

PROPOSE ET DIRIGE PAR:

Dr. MAQHRAOUI MAAMAR

BLIDA, ALGERIE

1992

32-530-48-1

32-530-48-1

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

UNIVERSITE DE B L I D A

INSTITUT DE MECANIQUE

Mémoire de Magister
spécialité: Mécanique
option : Construction Mécanique

SUSPENSION ACTIVE POUR VEHICULES.

par

Kazoula Mohamed

Présenté devant le Jury constitué de :

- | | | |
|----|--------------|-------------------|
| Mr | A. SQUAHI | Ph.D., Président |
| Mr | M. MAGHRAOUI | Ph.D., Rapporteur |
| Mr | M. OUALI | Ph.D., Examineur |
| Mr | Z. YOUBI | Ph.D., Examineur |
| Mr | A. AIAD | Ph.D., Examineur |
| Mr | M. MEGHATRIA | Ph.D., Invité |

Blida
Algérie

Décembre 1992

i. SOMMAIRE

Le but de la suspension automobile est de réduire la transmission des vibrations provoquées par les irrégularités des routes. Néanmoins les exigences humaines dans le domaine du confort et de la sécurité sont devenues si rigoureuses qu'une telle suspension ne peut satisfaire.

L'approche pratique pour répondre à ces exigences est l'augmentation des capacités et performances du véhicule moyennant un système de suspension dit actif.

Le modèle utilisé pour la formulation des équations du mouvement est un modèle linéaire simplifié à deux degrés de liberté dit modèle "1/4", utilisé par la majorité des publications citées en référence.

Une analyse paramétrique est effectuée en faisant varier la combinaison des paramètres de la suspension passive afin de permettre un choix judicieux de la variable de contrôle.

Pour l'optimisation de la suspension active, on fait appel aux techniques d'optimisation spécialement celles ne nécessitant pas la connaissance a priori du système. La méthode est basée essentiellement sur la formulation d'une fonction objective à atteindre. Celle-ci est comparée à chaque instant à une fonction optimale qui est en relation avec le confort, la course et les forces agissantes.

Les résultats montrent une réduction significative du déplacement de la masse amortie. Cette réduction est en moyenne de 26% par rapport au système passif.

Nous concluons à travers les résultats d'optimisation que la solution de l'amélioration de la suspension traditionnelle peut être trouvée dans les systèmes actifs, qui se révèlent satisfaisants pour l'obtention du meilleur comportement du véhicule en présence des aspérités de la route.

ii. REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier les professeurs et enseignants de l'Institut de Mécanique pour leur vive collaboration, leurs conseils et encouragements et pour l'intérêt avec lequel ils ont suivi ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur, D^r Maghraoui Maamar, professeur à l'institut et responsable du laboratoire de vibration, d'avoir bien voulu me suivre et m'avoir encouragé tout le long de ce travail, et surtout de m'avoir communiqué sa façon d'analyser les faits de manière critique et concise.

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cette recherche.

iii. TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE.....	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIERES.....	iii
LISTE DES FIGURES.....	iv
1. INTRODUCTION.....	1
2. CHOIX DES MODELES.....	8
2.1 Choix du modèle de suspension.....	8
2.2 Choix des fonctions d'excitation.....	10
3. ANALYSE DU SYSTEME A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE.....	14
3.1 Différences entre les systèmes passifs, semi-actifs et actifs.....	14
3.2 Analyse d'un amortisseur actif.....	16
3.3 Etude dynamique du système.....	17
4. ETUDE DE LA FORME GENERALE D'UN SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE	20
4.1 Etablissement des équations du mouvement par la méthode de LAGRANGE.....	20
4.2 Mouvement de vibration libre du système avec amortissement visqueux.....	23
4.3 Mouvement de vibration forcée du système avec amortissement visqueux.....	26
5. ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME.....	34
6. CONTROLE DE VIBRATION.....	36

iv. LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Modèles de suspension.....	9
Figure 2.2	Fonctions d'excitation.....	14
Figure 3.1	Réponse du système à un seul degré de liberté.....	19
Figure 4.1	Réponses du système passif.....	30
Figure 6.1	Analyse paramétrique.....	39
Figure 7.1	Réponses du système actif.....	58
	- Organigramme de contrôle.....	54
	- Cas linéaire.....	58
	- Cas non linéaire.....	64
Figure 8.1	Réponse en fréquence du système.....	67

7.	OPTIMISATION DU SYSTEME.....	49
7.1	Cas linéaire.....	51
7.2	Organigramme de contrôle.....	53
7.3	Cas non-linéaire.....	56
8.	REMARQUE - Aperçu pratique sur la suspension active.....	68
9.	CONCLUSION.....	70
	REFERENCES.....	72
	APPENDICE.....	76
A.	Méthode de RUNGE- KUTTA.....	76
B.	Tableau des valeurs.....	76
C.	Programme de contrôle.....	77

1. INTRODUCTION

Dans un passé récent les systèmes de suspension des véhicules terrestres étaient conçus selon des procédés passifs qui consistent en des composants adéquats et dissipatifs, réglés en un point particulier du projet.

De nos jours les exigences du confort et de la sécurité sous diverses conditions de conduite des véhicules terrestres sont devenues si rigoureuses qu'une telle suspension classique ne peut toujours satisfaire.

Deux approches peuvent être faites pour la conception d'un tel système de suspension répondant aux critères énumérés ci-dessus.

La première est d'isoler le véhicule de son environnement par la construction de route et de chaussée amplement lisses, sans bosses et en le faisant circuler dans des tunnels afin d'en éliminer les perturbations environnantes.

La seconde approche est l'augmentation des capacités et des performances du véhicule en améliorant son isolation vis à vis de l'extérieur moyennant un système de suspension dit actif relativement au système passif; système qui fait varier ces caractéristiques selon les conditions réelles de mouvement.

La conception d'un contrôle automatique et la nécessité de développement d'un nouveau système de suspension pour les futurs véhicules terrestres représentent les principaux thèmes de toutes les publications citées en annexes.

La majorité des recherches menées avaient gardées le caractère académique, mis à part de quelques applications pratiques qui ont pu voir le jour et ce malgré le coût onéreux et la complexité du matériel mis en oeuvre dans la réalisation d'un tel système.

Un dispositif dit actif pour les véhicules terrestres est un dispositif en mesure de maintenir sa caisse (masse amortie) à une hauteur et dans une position d'équilibre déterminée par rapport aux moyaux des roues et dans un laps de temps très court.

Il possède également la qualité d'atténuer les effets dûs aux irrégularités du terrain qui soumettent les roues à des chargements brusques en hauteur, et par suite à des charges et des pressions sur le sol, se traduisent par des vibrations transmises au véhicule et ceux qu'ils transportent.

Chaque suspension conventionnelle comprend en général deux étages bien distincts, caractérisés chacun par sa flexibilité et son coefficient d'amortissement.

Pour un véhicule terrestre, le premier étage est réalisé par les pneumatiques, le second par les ressorts de suspension montés en parallèle avec les amortisseurs hydrauliques ou pneumatiques.

Généralement la suspension active comprend en plus des moyens élastiques et des amortisseurs habituels pour le contrôle passif de la masse amortie, un ensemble de dispositif capable d'augmenter ou de réduire automatiquement la hauteur en fonction des irrégularités du sol de façon que la caisse du véhicule puisse conserver une position d'équilibre bien déterminée par rapport aux roues.

Certaines de ces suspensions sont destinées pour intervenir uniquement en cas de variation de la position de la masse amortie due aux chargements statiques (personnes et bagages); tandis que d'autres sont également en mesure d'assurer la correction de la position ou assiette en cas de variation de charge dynamique.

Ces suspensions et surtout celles des divers types

citées présentent de nombreux avantages par rapport aux suspensions classiques; en plus du rôle d'absorber les aspérités de la route, elles assurent l'adhérence des roues au sol et une bonne répartition des charges d'où une meilleure tenue de route et une usure ralentie.

Les systèmes de suspension active sont appliqués dans plusieurs domaines industriels à savoir:

- automobiles (suspension, siège)
- machines (systèmes d'isolation)
- aéronautique (siège de pilotage, train d'atterrissage)

A titre d'exemple , une des applications les plus récentes dans le domaine aérospatiale des systèmes actifs consiste à protéger les plateformes de missile d'un environnement dynamique imposé durant le lancement.

Le système actif comprend des vérins pneumatiques à double action et à bas coefficient de frottement.

Ce système actif fournit une isolation meilleure par rapport au système passif dans toutes les directions et maintient un déplacement relativement tolérable sous une accélération de 6g.

Les travaux sur les systèmes actifs ont débuté à partir des années 50 en parallèle avec le développement de la technologie dans le domaine de la mécanique des fluides notamment avec l'apparition des dispositifs de contrôle des servo-mécanismes [12].

A cette époque la plupart des travaux se sont axés sur l'élimination du déplacement statique de l'habitacle des véhicules terrestres dûe aux différents chargements.

Vers les années 60 l'intérêt de développer des suspensions actives a augmenté aux U.S.A ainsi que dans d'autres pays pour les véhicules de transport de marchandises primo puis les véhicules automobiles par la suite.

Ce n'est que vers les années 70, et suite aux exigences humaines relatives au confort et à celles des véhicules de compétitions à grande vitesse; que la recherche et l'application de la suspension active ont réellement commencé.

Pour la formulation des équations du mouvement et l'analyse du comportement des systèmes passifs et actifs de suspension, plusieurs auteurs [2, 4, 5, 6, 7] ont utilisé un modèle de suspension simplifié à deux degrés de liberté dit modèle " 1/4 " .

Mitshke [8] a abordé la théorie des mouvements vibratoires en général et examiné l'influence de la construction des véhicules et de la qualité structurale de la route sur le mouvement appliqué sur le véhicule.

L'auteur, par un bilan des charges dynamiques, a évalué les critères de vibration nécessaires pour un meilleur comportement et une bonne tenue de route.

Pour se faire, Le véhicule est supposé se déplacer à une vitesse horizontale constante sur un modèle de route à profil aléatoire [2, 6, 9]; parfois bien approximé par une intégrale .

Afin de mieux comprendre les systèmes d'amortissement, plusieurs auteurs [10,11,12,13,4,15] ont considéré en premier lieu un modèle simple à un seul degré de liberté. Certains diagrammes construits illustrent la relation entre l'isolation aux vibrations, les propriétés de la route et la course de la suspension pour les deux systèmes passifs et actifs.

Cependant la quasi totalité des publications citées précédemment examinent les mêmes questions en utilisant différentes méthodes de résolution.

- accélération de la masse amortie
- déplacement la masse amortie

- déplacement de la roue.

Utilisant le même modèle, Karnopp [10] analyse en faisant varier la combinaison des paramètres de la suspension passive, la réponse en fréquence du système.

Cette analyse permet de cerner les performances optimales servant de base pour la suspension active.

Quant à l'isolation aux chocs des machines outils, les travaux [12,13] sur les systèmes d'isolation actifs ont porté principalement sur l'élimination de la déformation statique du dispositif à isoler et la réalisation des systèmes de contrôle automatique de position capable de supporter les conditions réelles d'utilisation.

En utilisant le modèle "1/4", Karnopp [5] a étudié les performances et les sensibilités de la suspension à gain variable en incorporant un dispositif actif agissant comme un générateur de force et placé en parallèle avec les éléments conventionnels de la suspension.

De même qu'il a été procédé à l'examen du compromis qu'on peut obtenir entre les propriétés de la route, l'isolation sous contraintes de la course de la suspension ainsi que les avantages d'un tel dispositif.

Théoriquement, les suspensions actives enlèvent quelques restrictions essentielles des suspensions passives et fournissent un compromis favorable entre le confort, la course de la masse amortie et les caractéristiques de la route mais seulement à des coûts élevés et exigeant un matériel complexe et cher [14].

Durant ces dernières années, la maîtrise des méthodes d'étude et d'expérimentation de la suspension active a augmenté en raison du progrès technique résultant du développement des micro-ordinateurs abordables sur le plan coût. Ainsi plusieurs systèmes de suspension deviennent pratiquement faisable et permettent l'accroissement

sensible des performances recherchées.

Karnopp [16] a utilisé les techniques de la théorie modérée du contrôle pour étudier les limitations des performances de la suspension active en montrant que les avantages possibles sont caractérisés par les différents paramètres fixés aux systèmes tels que les rapports des masses et celui des raideurs des ressorts. Néanmoins l'emplacement du système de contrôle reste le facteur essentiel de limitation.

L'optimisation d'une suspension peut être définie comme une procédure servant à minimiser une fonction dynamique afin d'approcher une réponse spécifique désirée. Cette fonction est fréquemment exprimée en terme de fonction objective, de fonction mérite mais plus souvent en indice de performance [7].

Celle-ci est définie comme étant une combinaison linéaire de termes en relation directe avec le confort, la course de la suspension et les forces en présence .

La théorie du contrôle linéaire optimale a été introduite et utilisée par plusieurs auteurs [2, 7, 9, 15, 18]; pour quelques un dans le but d'étudier les lois des états de réactions et pour d'autres afin de minimiser l'indice de performance. Le système de contrôle utilise deux grandeurs contrôlables et observables, une commande de force comme contrôle et la déformation de la suspension comme mesure.

Pour l'analyse du modèle "1/4", la théorie de contrôle linéaire aléatoire a été considéré comme un outil performant par Thompson et A.Hàc [19, 6]. L'un l'utilise pour optimiser une suspension de véhicule à deux degrés de liberté se déplaçant sur une route aléatoire et l'autre pour analyser les effets d'incorporer les éléments conventionnels de la suspension dans un seul dispositif actif.

Comme on le constate, toutes les publications citées en

référence utilisent le contrôle pour optimiser la suspension active. Dans notre cas, la stratégie employée pour cette fonction est l'utilisation des techniques d'optimisation, spécialement celles qui ne nécessitent ni la connaissance a priori du système ni de celle de l'excitation.

La méthode est basée essentiellement sur la formulation d'une fonction objective à atteindre.

Le présent travail constitue une analyse du système à un seul degré de liberté représentant le siège d'un véhicule et des systèmes à deux degrés de liberté des suspensions passives et actives, relatives aux machines en général et des véhicules terrestres en particulier, sensibles aux variations des charges dynamiques qui se produisent dans les conditions d'utilisation normale.

Notre travail se divise en parties suivantes:

- Etude analytique et numérique d'un modèle de suspension à un seul degré de liberté soumis à quatre fonctions d'excitation représentatives de l'état des routes

- Etude d'un modèle "1/4" soumis aux mêmes fonctions d'excitation.

- Etude paramétrique du modèle "1/4" avec variation de la raideur du ressort K et l'amortissement C afin d'évaluer leur influence sur la réponse du système et opter pour une variable de contrôle.

- Optimisation du système à deux degrés de liberté.

2 . CHOIX DES MODELES

2.1 Modèle de suspension.

La première étape dans l'analyse dynamique d'une structure réelle est sa représentation par un modèle équivalent dont on pourra déterminer à partir d'une fonction donnée, le mouvement de chaque masse et par conséquent la déformation de ses composants.

Pour prévoir d'une manière précise l'influence de l'organisation d'une suspension particulière, il est nécessaire d'élaborer rigoureusement plusieurs modèles de suspension de véhicule et les valider par suffisamment de tests. Il existe bien sûr des limites à cette approche; un grand modèle (fig 2.1-a) est assujéti à des erreurs de formulation, des problèmes de simulation et également à la compréhension et l'interprétation des résultats.

Par exemple ce modèle possède onze degrés de liberté. Pour cela nous considérons un modèle de suspension linéaire simplifié à deux degrés de liberté dit modèle "1/4" (fig 2.1-b), utilisé par plusieurs auteurs pour l'analyse dynamique et examinons les réponses des systèmes passifs et actifs à des sollicitations extérieures.

Le système est composé de deux étages:

Le premier représente la roue du véhicule de masse M_1 et de tous les organes qui lui rattachent et un ressort de raideur K_1 du pneu. Le second étage comprend la masse du châssis M_2 et les éléments de la suspension : un ressort de raideur K_2 et un amortisseur doté de l'amortissement C_2 .

Pour motiver les études des systèmes d'amortissement actifs, nous analysons en premier un modèle simple à un degré de liberté (fig 2.1-c) appliqué principalement aux machines outils, sièges et parfois pour la suspension des véhicules terrestres.

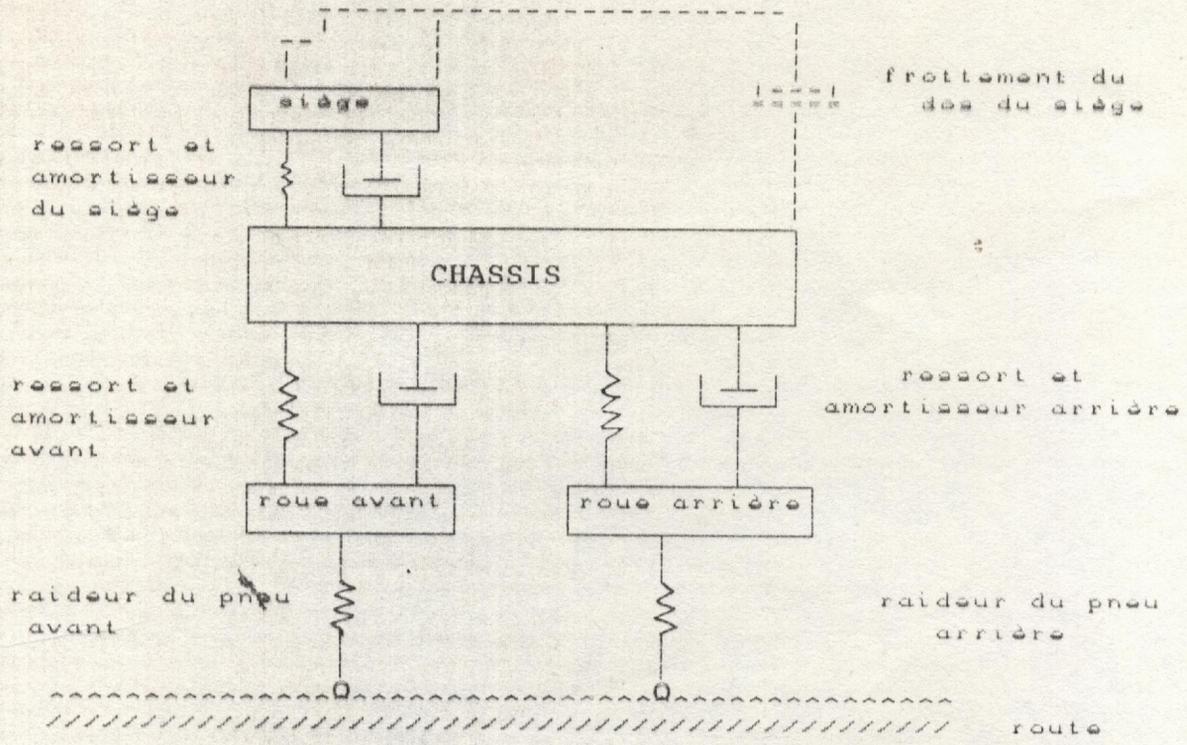


fig 2.1-a

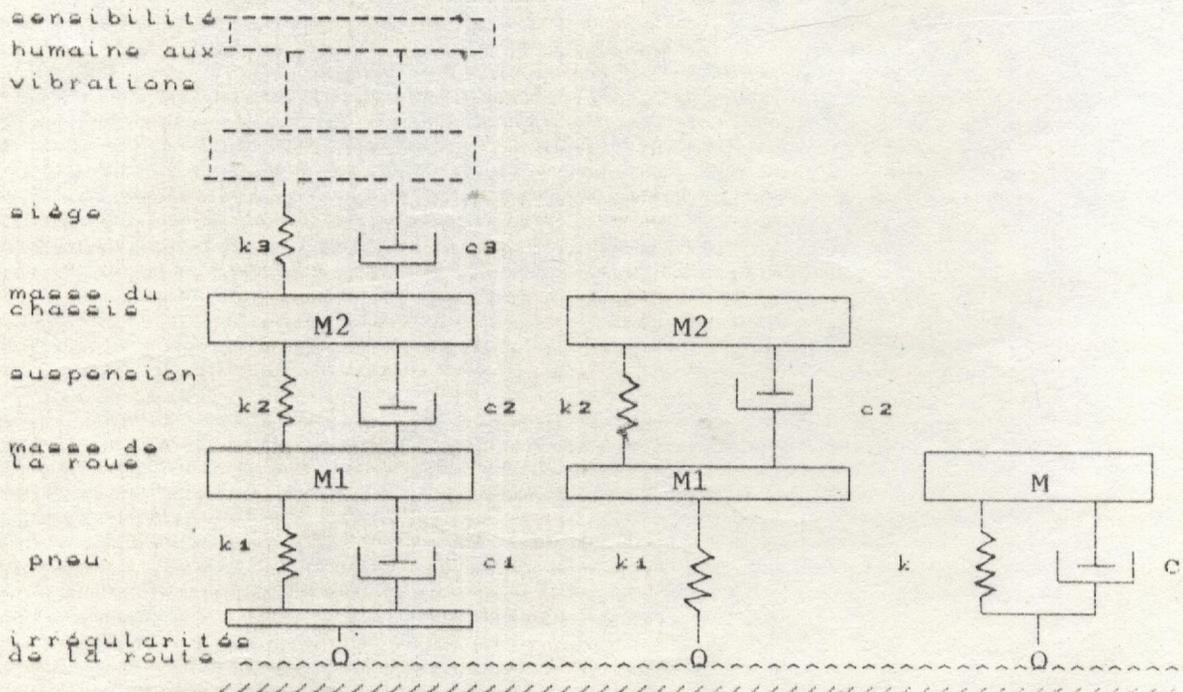


fig 2.1 Modèles de suspension.

2.2 Choix des fonctions d'excitation

L'excitation ou perturbation la plus représentative est en effet celle qui résulte du fonctionnement normal d'une structure (machine, véhicule, siège, ..) or on est confronté dans la plupart des cas à des excitations multiples avec des composants souvent difficiles à approximer.

De même qu'on se trouve presque toujours dans l'obligation d'appliquer des excitations artificielles qui ont l'avantage d'être bien contrôlables et reproductibles. Dans le cas où le véhicule se déplace à une vitesse constante sur une route à profil aléatoire, les mesures effectuées sur celle-ci ont montré que, sauf à des basses fréquences, le profil de la route (déplacement vertical de la surface) peut être bien approximé par une intégrale [2 , 7] .

Dans cette étude nous considérons que le véhicule au cours de son déplacement est soumis d'une manière ou d'une autre à quatre types de fonctions d'excitation très représentatives du profil de la surface de la route.

Les déplacements de la route correspondant au même type d'entrée, sont exprimés de la manière suivante:

- Fonction d'excitation 1 (déplacement impulsion).

$$X_0(t) = X_{\max} \cdot e^{-\nu/4} (\nu \omega_0 t) e^{-\nu \omega_0 t}$$

- Fonction d'excitation 2 (déplacement gradué).

$$X_0(t) = X_{\max} [1 - e^{-\nu \omega_0 t} (1 + \nu \omega_0 t)]$$

- Fonction d'excitation 3 (oscillation graduée).

$$X_0(t) = X_{\max} (.68684) [1 - e^{-.25 \omega_0 t} (\cos \nu \omega_0 t - .25 \sin \nu \omega_0 t)]$$

- Fonction d'excitation 4 (fonction harmonique).

$$X_0(t) = X_{\max} \cdot \cos (\nu \omega_0 t)$$

Avec :

X_{\max} : amplitude maximale

$\nu = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \tau}$ paramètre de pulsation

τ : durée de la pulsation

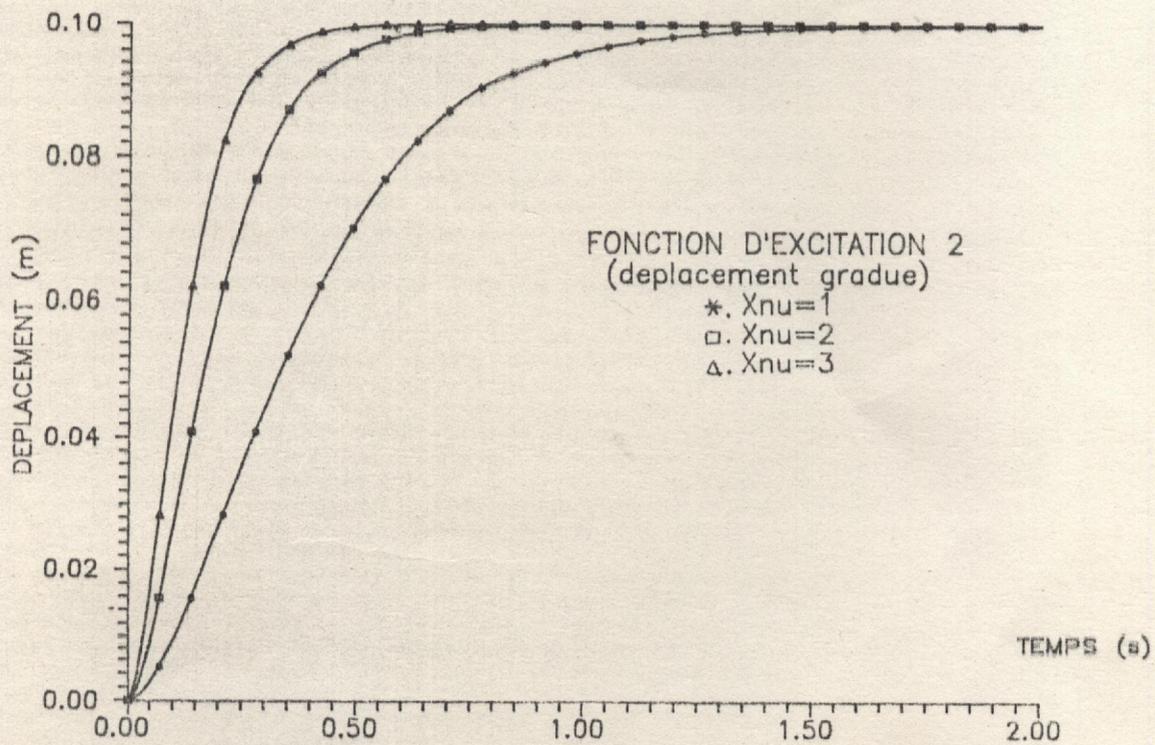
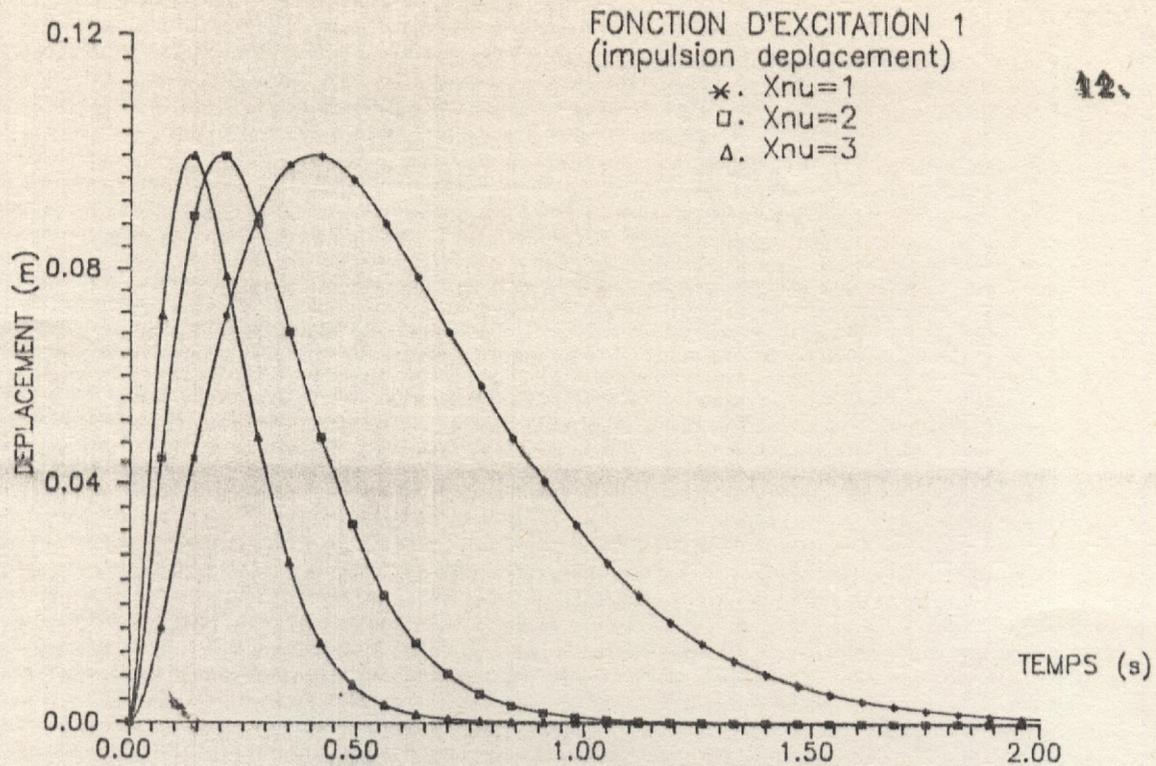
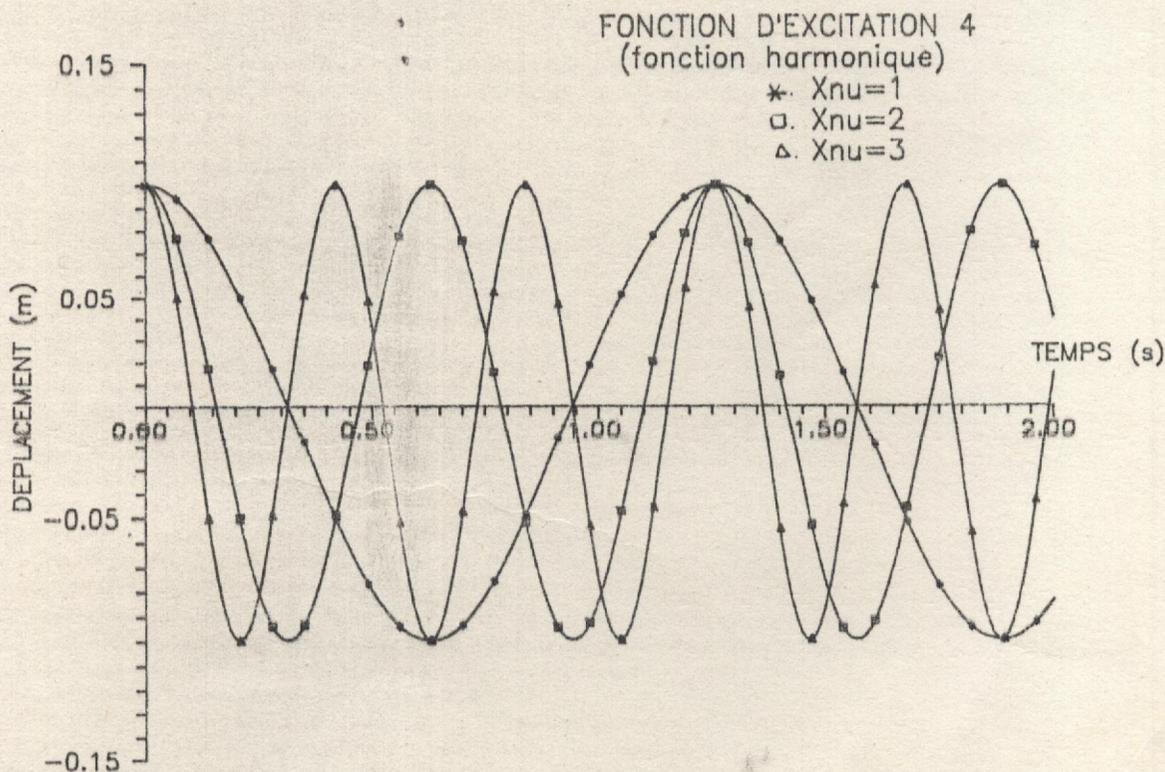
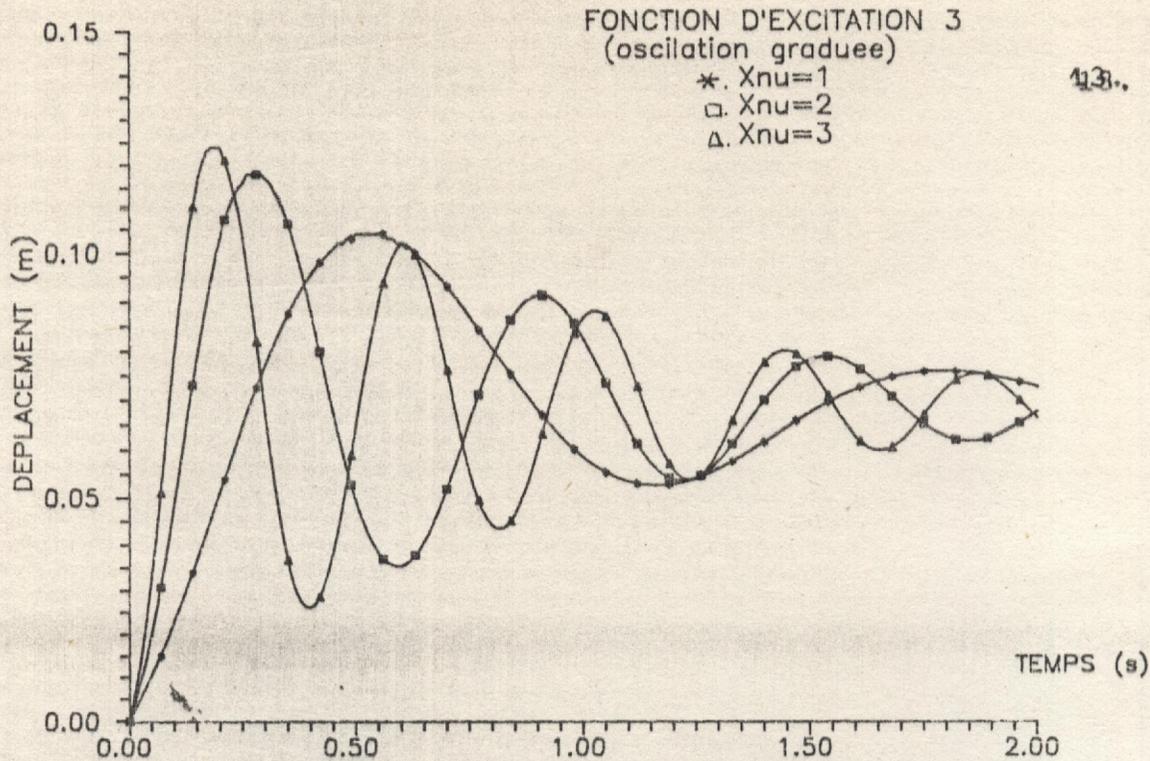


FIG 2.2 FONCTIONS D'EXCITATION.



3. ANALYSE DU SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE.

Dans de nombreuses applications, une masse est isolée des chocs et des vibrations en interposant une suspension entre elle et le moyen perturbateur. Dans de pareils cas les éléments de la suspension agissent comme un filtre mécanique qui atténue et empêche les forces dûes aux chocs et aux vibrations d'atteindre la masse.

Les systèmes de ce type à un seul degré de liberté ont servi de base aux études menées par plusieurs auteurs [4, 10] sur les suspensions des véhicules terrestres dont les éléments jouent un rôle d'isolateur du corps des irrégularités de la route.

De même, certaines machines sont souvent montées sur des ressorts et amortisseurs (caoutchouc) dont le but de minimiser la transmission des forces ou vibrations entre celles-ci et ses fondations.

Nous appellerons isolation vibratoire, la mise en oeuvre des moyens propres à éviter ou à réduire ces vibrations.

3.1 Différence entre les systèmes passifs, semi-actifs et actifs.

Les systèmes d'isolation peuvent être passifs, semi-actifs ou actifs selon leur conception et leur destination.

La fig.a représente un modèle de suspension passif ou conventionnel à un seul degré de liberté.

Il est composé d'un élément de soumission de raideur K et d'un autre dissipatif d'amortissement C . Ces deux éléments, pour les véhicules terrestres, se présentent sous différentes configurations physiques, ils sont réglés à un point particulier de l'étude.

Les forces dynamiques de la suspension sont produites par les éléments passifs fondamentaux (ressorts et amortisseurs) dont les paramètres ne sont pas contrôlés; ils peuvent changer discrètement ou continuellement d'une manière lente ou rapide. Ce système n'exige pas d'apport de puissance supplémentaire extérieure.

La fig.b représente un système semi-actif similaire au système passif tant que tous les éléments génèrent respectivement leurs propres forces; toutefois on considère que l'amortissement peut être changer instantanément. Le choix de ce système est motivé par le désir d'améliorer partiellement les performances des suspensions passives mais avec un minimum de matériel. Il utilise une puissance plus grande et possède une combinaison de cylindres hydrauliques et de valves électro-dynamiques créant des forces de suspension.

La fig.c représente un système actif muni d'un élément ressort et un dispositif capable de générer une force de toute grandeur et de tout signe à chaque instant.

Ce procédé appelé actif améliore considérablement l'isolation de la masse des perturbations extérieures. Il peut être appliqué pratiquement moyennant des dépenses élevées.

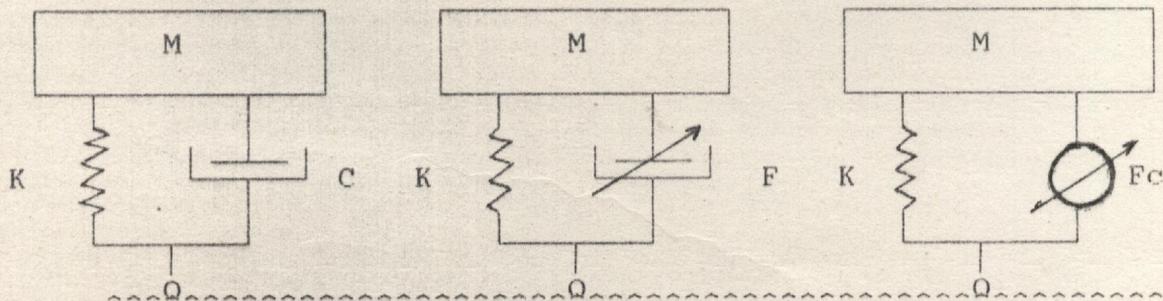


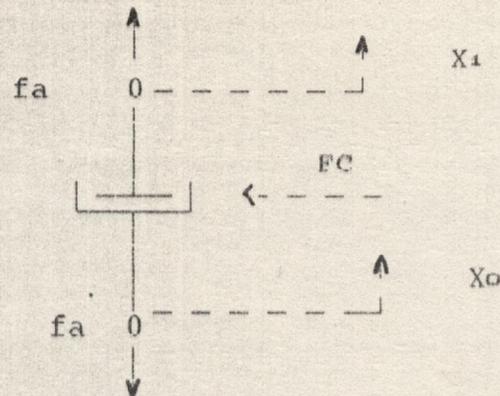
fig a

fig b

fig c

3.2 Analyse d'un amortisseur actif.

L'amortisseur actif est un procédé qui fournit instantanément une force active contrôlable laquelle est dérivée de la vitesse relative de ses deux points d'attache.

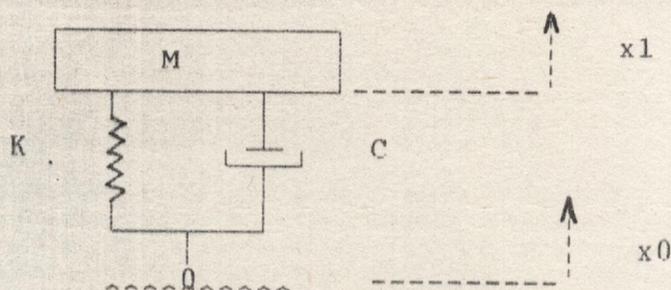


Les vitesses des points d'attache sont identifiées par \dot{X}_0 et \dot{X}_1 . La force produite sur les attaches F_a est dérivée de la vitesse relative \dot{X}_r ($\dot{X}_r = \dot{X}_0 - \dot{X}_1$) et de direction indiquée.

L'amortisseur actif est représenté par le même symbole qu'un amortisseur visqueux avec une flèche qui indique que la force d'amortissement produite est variable. La ligne discontinue indique que la force d'amortissement est contrôlée par un signal de commande f_c . En général, la force commandée F_c est fonction de plusieurs signaux variant dans le temps. Ces signaux sont normalement obtenus par des variables mesurées du système, similaire à un déplacement, vitesse, accélération et parfois une force. Ils sont transmis au contrôleur lequel fournit comme sortie une tension proportionnelle à la force d'amortissement désirée.

3.3 Etude dynamique du système

La figure suivante montre une simple masse M se déplaçant à une vitesse V supportée par un système de suspension passif et soumise à des perturbations représentées par l'amplitude X_0 de la chaussée. La masse M suit un mouvement vertical X_1 et d'un déplacement relatif $d_{rel} = X_1 - X_0$.



La réponse en accélération de la masse due à l'excitation de la base peut être exprimée par:

$$\ddot{X}_1 = -\frac{1}{m} (F_k + F_d)$$

où:

F_k et F_d sont respectivement les forces du ressort et de l'amortisseur.

Supposant que les coefficients K et C sont linéaires, les deux forces s'expriment alors par:

$$F_k = k (X_1 - X_0)$$

$$F_d = C (\dot{X}_1 - \dot{X}_0)$$

Avec:

k : raideur du ressort

C : amortissement du système.

L'accélération du mouvement s'écrit:

$$\ddot{X}_1 = \frac{c}{m} (\dot{X}_1 - \dot{X}_0) - \frac{k}{m} (X_1 - X_0)$$

Equation du mouvement:

$$\ddot{X}_1 + \frac{c}{m} \dot{X}_1 + \frac{k}{m} X_1 = \frac{c}{m} \dot{X}_0 + \frac{k}{m} X_0$$

Dans le cas d'une excitation quelconque la réponse est déterminée numériquement par la méthode Runge-Kutta.

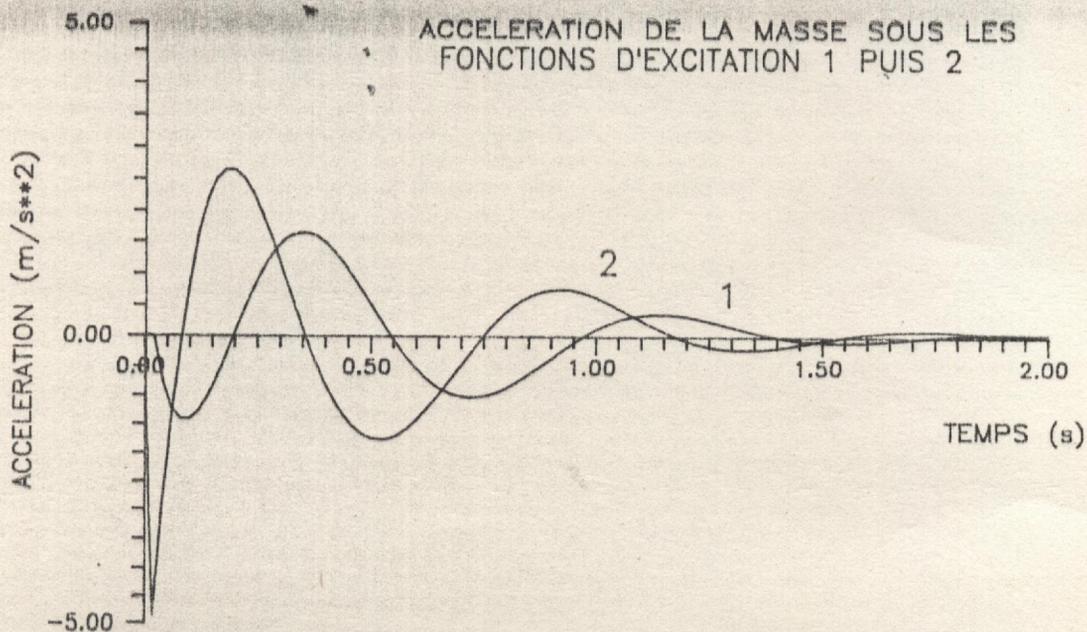
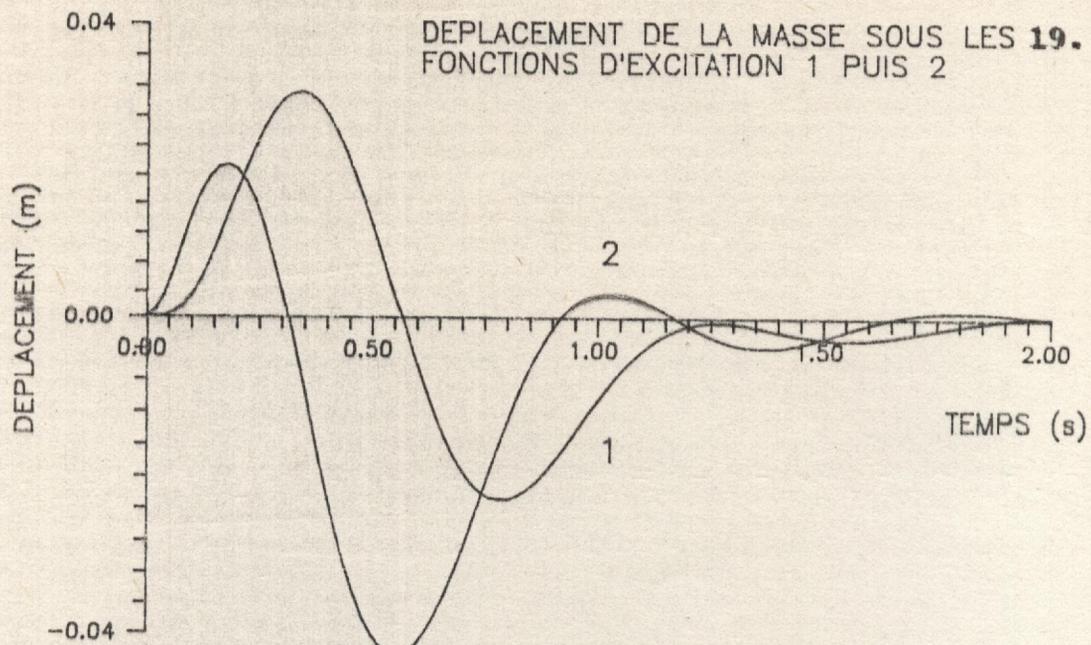


FIG 3.1 REPONSES DU SYSTEME A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE.

4. ETUDE DE LA FORME GENERALE D'UN SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE.

4.1 Etablissement des équations du mouvement par la méthode de Lagrange.

L'énergie cinétique d'un système à n degrés de liberté prend la forme suivante:

$$T = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j$$

avec:

M_{ij} : Coefficients d'inertie symétriques.
 \dot{Q}_i et \dot{Q}_j : Vitesses généralisées.

L'énergie potentielle peut s'écrire également sous la forme:

$$E_p = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} Q_i Q_j$$

avec:

K_{ij} : Coefficients de raideur symétriques.
 Q_i, Q_j : Déplacements généralisés.

De même pour la fonction dissipative, elle a la forme suivante:

$$F = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j$$

Equation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta T}{\delta \dot{q}} \right] - \frac{\delta T}{\delta q} + \frac{\delta F}{\delta \dot{q}} + \frac{\delta E_p}{\delta q} = Q_r$$

avec:

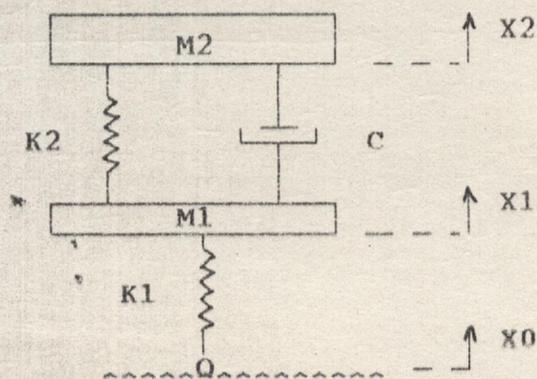
Q_r : Forces extérieures appliquées au système.

En appliquant les équations précédentes à un modèle mathématique donné, nous obtenons un ensemble d'équations différentielles couplées décrivant totalement le mouvement du système linéaire amorti.

Ces équations peuvent se présenter sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \{ \dot{q}' \} + [C] \{ \dot{q} \} + [K] \{ q \} = \{ Q \}$$

Considérons le modèle suivant à deux degrés de liberté avec amortissement forcé.



L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{X}_2^2$$

L'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} K_1 (X_1 - X_0)^2 + \frac{1}{2} K_2 (X_1 - X_2)^2$$

La fonction dissipative s'écrit :

$$F = \frac{1}{2} C_2 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2)^2$$

L'application de l'équation de Lagrange nous donne le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{X}_1 + C_2 \dot{X}_1 - C_2 \dot{X}_2 + (K_1 + K_2) X_1 - K_2 X_2 = K_1 X_0 \\ M_2 \ddot{X}_2 - C_2 \dot{X}_1 + C_2 \dot{X}_2 - K_2 X_1 + K_2 X_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le système précédent est complètement décrit par les coordonnées $X_1(t)$ et $X_2(t)$, lesquelles donnent respectivement les positions des masses M_1 et M_2 à chaque instant.

Dans un premier temps, nous considérons que les déplacements X_1 et X_2 soient suffisamment petits pour que le système agisse dans une bande linéaire.

On remarque que les équations ne sont pas indépendantes, du fait de la présence dans la première équation des termes X_2 et \dot{X}_2 et dans la seconde ceux de X_1 et \dot{X}_1 .

Nous concluons ainsi que le système (1) est un système couplé dont les termes de couplages sont $-C_2 \dot{X}_2$, $-K_2 X_2$ dans la première et $-C_2 \dot{X}_1$, $-K_2 X_1$ dans la seconde.

Le système (1) peut se mettre alors sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecrivons la forme générale:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\}$$

avec:

M- matrice masse

C- matrice d'amortissement

K- matrice raideur

Q- vecteur d'excitation.

Les matrices M , C , et K sont symétriques d'ordre n et ne sont pas diagonales.

$$[M] = [M]^T \quad [C] = [C]^T \quad [K] = [K]^T$$

La solution de cette équation pour n'importe quel vecteur de force est obtenue par découplage en raison du non dépendance des équations qui la composent.

4.2 Mouvement de vibration libre du système avec amortissement visqueux.

$$[M] \ddot{\{q\}} + [C] \dot{\{q\}} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (2)$$

Les équations réduites sont formées en introduisant le vecteur d'état $\{Y\}$ d'ordre $2n \times 1$

$$\{ \dot{Y} \} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ p \end{bmatrix}$$

On peut montrer que l'équation (2) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \{ \dot{Y} \} + B \{ Y \} = \{ 0 \} \quad (3)$$

Les matrices M , C et K deviennent des sous matrices de A et B . L'équation (2) est réduite à $2n$ équations du premier ordre (3), elle peut être exprimée d'une manière plus pratique en multipliant par A^{-1} et en posant:

$$H = -A^{-1} B$$

d'où

$$\begin{aligned} A^{-1} A \{ \dot{Y} \} + A^{-1} B \{ Y \} &= \{ 0 \} \\ \{ \dot{Y} \} - H \{ Y \} &= \{ 0 \} \end{aligned} \quad (4)$$

Les valeurs propres sont obtenues en supposant que la solution de l'équation (4) est de la forme:

$$\{ Y \} = \{ \varphi \} e^{\nu t} \quad (5)$$

où:

$\{ \varphi \}$: vecteur propre ($2n \times 1$) avec des éléments complexes.

ν : un nombre complexe.

En remplaçant l'équation (5) dans (4) on obtient:

$$[\nu I - H] \{ \varphi \} = \{ 0 \} \quad (6)$$

L'équation caractéristique est:

$$\Delta(\nu) = | \nu I - H |$$

Une solution non triviale de cet ensemble d'équations n'existe que sous la condition:

$$\Delta(\nu) = 0$$

Les ν sont des valeurs propres de la matrice carrée H d'ordre $2n$; se sont $2n$ valeurs propres, lesquelles sont nécessairement conjuguées et complexes. Nous considérons que les valeurs propres sont distinctes.

Le vecteur propre $\{ \varphi \}$ est trouvé par substitution des valeurs propres dans l'équation (6) et en résolvant les équations algébriques homogènes de $\{ \varphi \}$.

La matrice modale $[\varphi]$ d'ordre $2n$ est une combinaison linéaire de vecteurs propres.

$$[\varphi] = [\{ \varphi \}_1 \{ \varphi \}_2 \dots \{ \varphi \}_{2n}]$$

Montrons que les vecteurs propres $\{ \varphi \}$ sont orthogonaux relativement aux matrices A et B. Remplaçons l'équation (5) dans (3) et mettons en facteur le terme $e^{\nu t}$, nous aurons:

$$\nu A \{ \varphi \} + B \{ \varphi \} = \{ 0 \}$$

Remplaçons ν_r et ν_s pour le $r^{\text{ème}}$ et le $s^{\text{ème}}$ mode dans l'équation précédente.

$$\nu_r A \{ \varphi \}_r + B \{ \varphi \}_r = \{ 0 \}$$

(6.1)

$$\nu_s A \{ \varphi \}_s + B \{ \varphi \}_s = \{ 0 \}$$

Multiplions le premier terme de ces équations par la transposé $\{ \varphi \}_s$ de $\{ \varphi \}_r$ et transposons les équations résultantes. Ensuite multiplions le second terme de ces équations par $\{ \varphi \}_r$ nous obtenons:

$$\nu_r \{ \varphi \}_s^T A \{ \varphi \}_s + \{ \varphi \}_r^T B \{ \varphi \}_s = 0$$

$$\nu_s \{ \varphi \}_r^T A \{ \varphi \}_s + \{ \varphi \}_r^T B \{ \varphi \}_s = 0$$

La différence de ces équations donne:

$$(\nu_r - \nu_s) \{ \varphi \}_r^T A \{ \varphi \}_s = 0$$

Avec $\nu_r \neq \nu_s$ nous en déduisons que:

$$\{ \varphi \}_r^T A \{ \varphi \}_s = 0 \quad \text{pour } r \neq s$$

De même que:

$$\{ \varphi \}_r^T B \{ \varphi \}_s = 0 \quad \text{pour } r \neq s$$

Les deux équations précédentes sont des relations orthogonales du système avec amortissement visqueux, avec la condition qu'elles ne soient pas nulles pour $r = s$.

En utilisant les propriétés d'orthogonalité et la matrice modale $[\varphi]$ qui comporte tous les vecteurs propres, nous obtenons:

$$[\varphi]^T A [\varphi] = [A]$$

$$[\varphi]^T B [\varphi] = [B]$$

Où $[A]$ et $[B]$: sont des matrices diagonales.

Si les matrices A et B sont diagonalisées comme s'est montré ci-dessus, alors les équations du mouvement suivantes sont découplées.

$$A \{ \ddot{Y} \} + B \{ \dot{Y} \} = \{ 0 \}$$

4.3 Mouvement de vibration forcée du système avec amortissement visqueux.

$$M \{ \ddot{q} \} + C \{ \dot{q} \} + K \{ q \} = \{ Q \omega \}$$

Avec $Q\omega$ = forces extérieures d'excitation appliquées au système:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{Q(t)\} \end{bmatrix}$$

Introduisons le vecteur d'état :

$$\{ Y \} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$$

$$A \{ \dot{Y} \} + B \{ Y \} = \{ E(t) \} \quad (7)$$

Avec $\{ E(t) \}$: vecteur d'excitation représentant les forces extérieures.

$$\{ E(t) \} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(t) \end{bmatrix}$$

Les équations réduites de l'équation (7) peuvent être découplées au moyen de la matrice modale $[\varphi]$.

Introduisons un nouveau vecteur d'état $\{ Z \}$ défini par la transformation suivante :

$$\{ Y \} = [\varphi] \{ Z \}$$

ou bien

$$\{ Z \} = [\varphi]^{-1} \{ Y \}$$

(7.1)

L'équation (9) devient :

$$A [\varphi] \{ \dot{Z} \} + B [\varphi] \{ Z \} = \{ E(t) \}$$

Multiplions l'équation ci-dessus par la transposée $[\varphi]^T$ de la matrice modale et tenant compte des relations d'orthogonalité nous obtenons :

$$[\varphi]^T A [\varphi] \{ \dot{Z} \} + [\varphi]^T B [\varphi] \{ Z \} = [\varphi]^T \{ E(t) \}$$

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ A \\ \backslash \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ Z \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \backslash \\ B \\ \backslash \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ Z \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \varphi \\ \cdot \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cdot \\ E(t) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ N(t) \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Les matrices $\begin{bmatrix} \backslash \\ A \\ \backslash \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \backslash \\ B \\ \backslash \end{bmatrix}$ sont diagonales.

Nous obtenons un ensemble d'équations différentielles du premier ordre découplées de la forme:

$$a_{ii} \dot{Z}_i + b_i Z_{ii} = n_i \omega \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2n \quad (8)$$

Désormais les équations du mouvement sont découplées suivant les équations (6.1) pour $r = s = i$, nous aurons:

$$b_{ii} = -v_i \cdot a_{ii}$$

L'équation (8) peut être simplifiée et résolue indépendamment

$$\dot{Z}_i - v_i Z_i = N_i \omega / a_{ii} \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2n \quad (9)$$

La solution particulière de l'équation précédente résulte de l'application directe de l'intégrale de convolution.

$$Z_i = 1/a_{ii} \int_0^t e^{v_i(t-\tau)} N_i(\tau) d\tau \quad \text{pour } i=1, \dots, 2n \quad (10)$$

avec :

$e^{v_i t} / a_{ii}$ réponse impulsion de l'équation (9) avec les conditions initiales égales à zéro.

Les conditions initiales dont les coordonnées $\{ Z \}$ sont trouvées au moyen de la transformation suivante:

$$\{ Z \} = [\varphi]^{-1} \{ Y \} = [\varphi]^{-1} \{ \dot{q} \quad q \}$$

$$\{ Z(0) \} = [\varphi]^{-1} \{ Y(0) \} = [\varphi]^{-1} \begin{bmatrix} \dot{q}(0) \\ q(0) \end{bmatrix}$$

Considérons Z_{i0} la condition initiale pour le i^{me} mode, la solution complémentaire de l'équation (9) est de la forme:

$$Z_i = Z_{i0} e^{\nu_i t} \quad \text{pour } i=1 \dots 2n \quad (11)$$

La solution complète Z_i pour le i^{me} mode est la somme des solutions des équations (10) et (11).

On note que la solution particulière et la solution complémentaire sont évaluées séparément.

La solution complète dans les coordonnées $\{ q \}$ est déterminée au moyen de la transformation de l'équation (7.1).

$$\begin{bmatrix} q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{bmatrix} = \{ Y(t) \} = [\varphi] \{ Z(t) \}$$

La réponse du système est obtenu en utilisant la méthode d'intégration de Runge Kutta, citée en appendice.

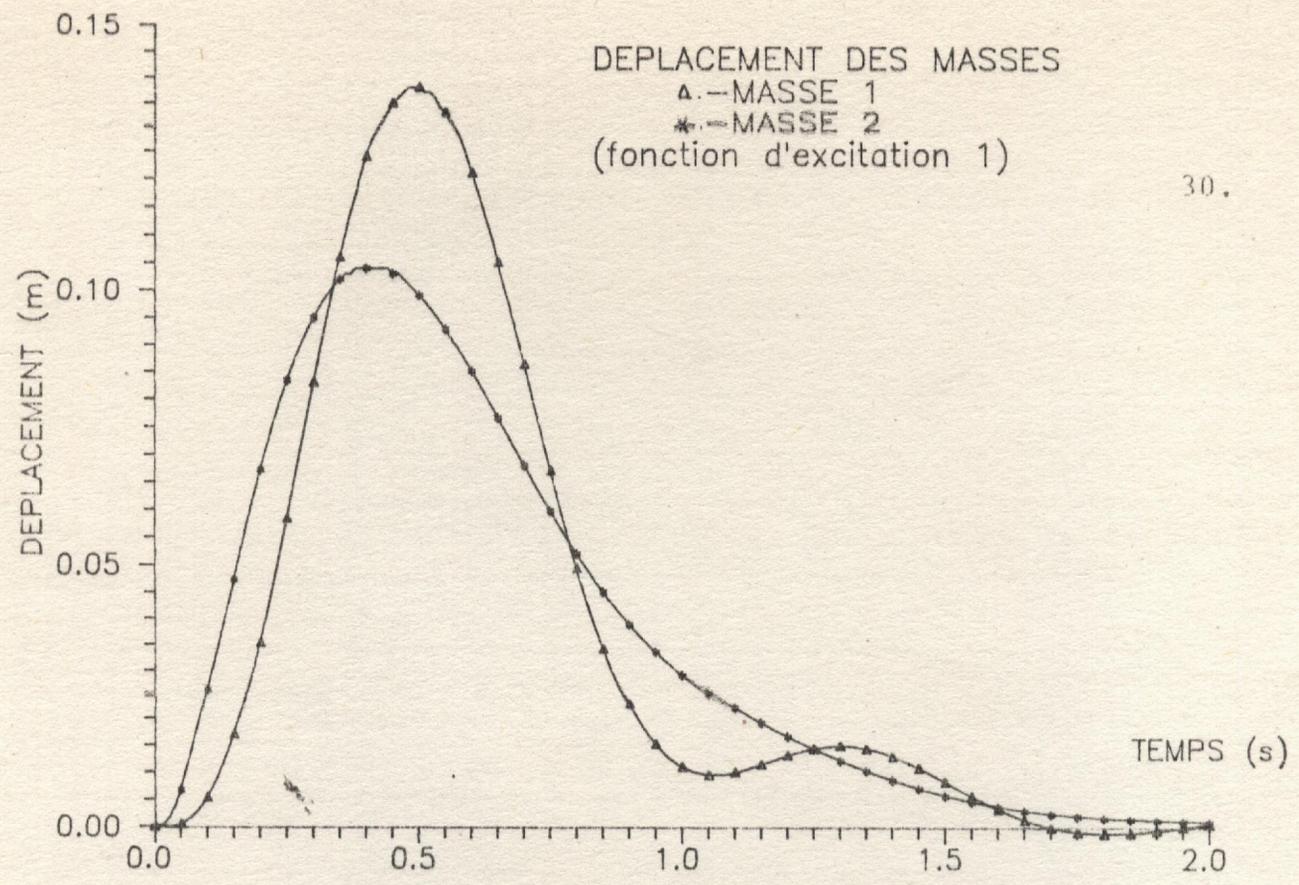


fig 4.1-a

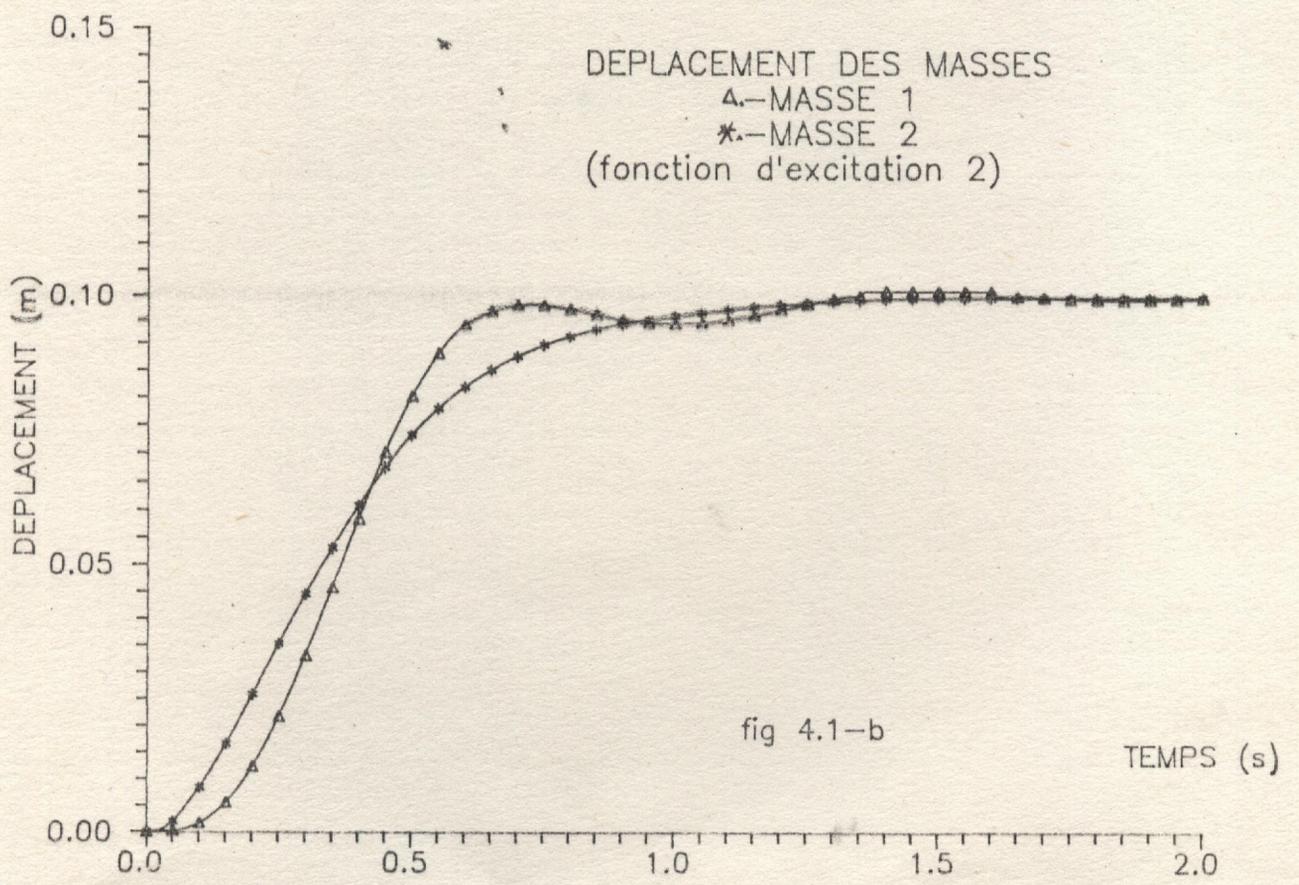
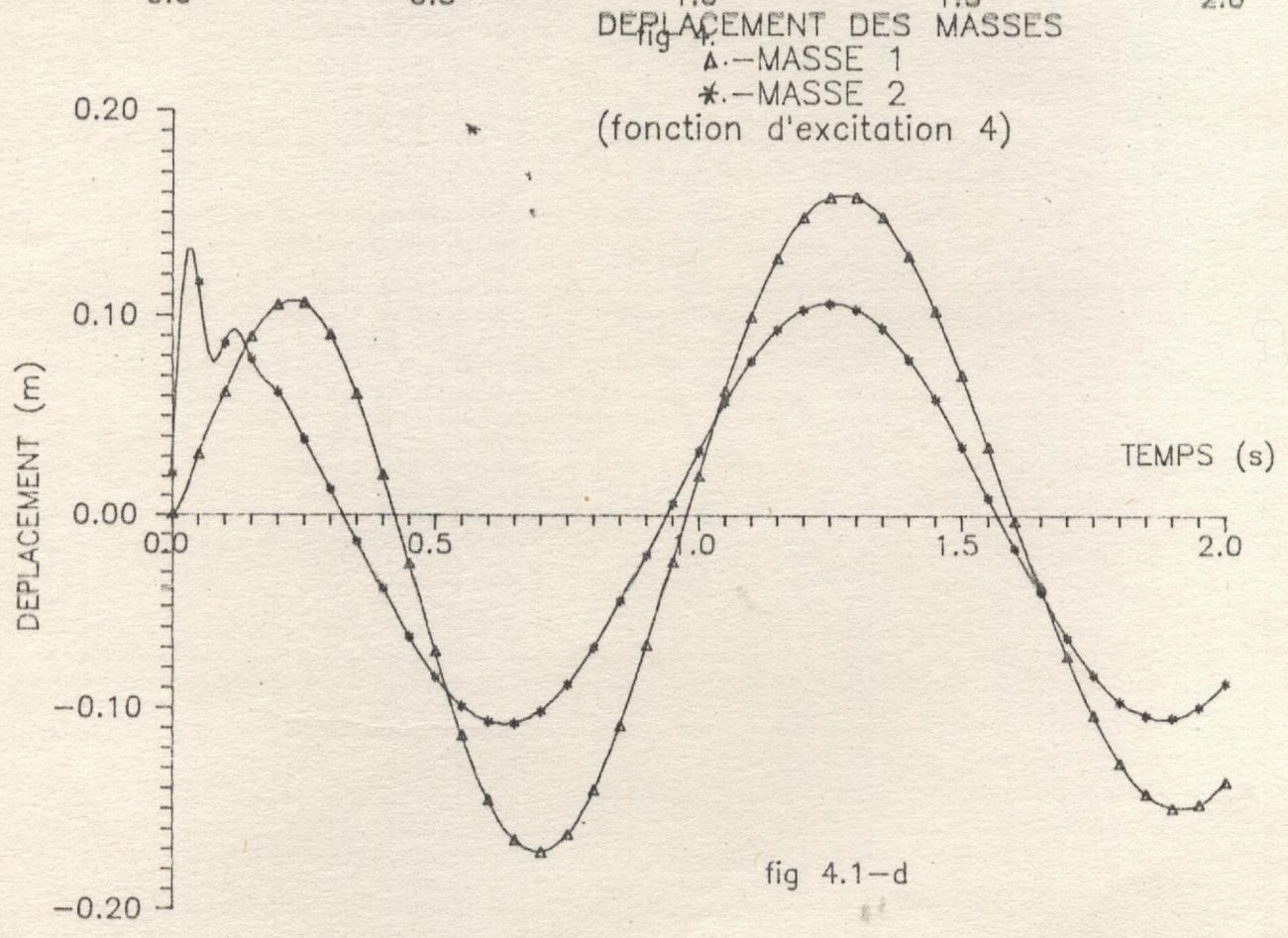
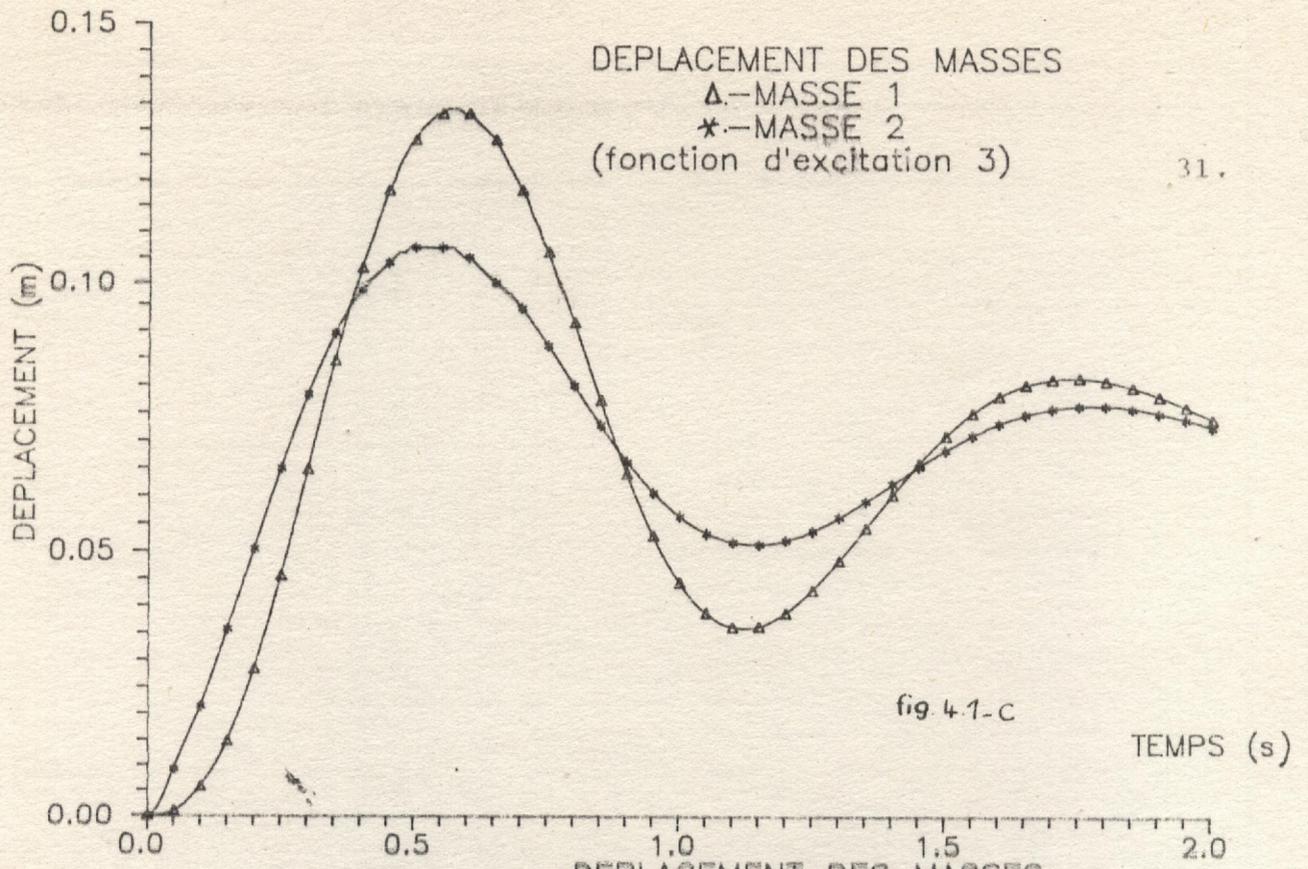


fig 4.1-b

FIG 4.1 (a-f) REPONSE DU SYSTEME PASSIF.



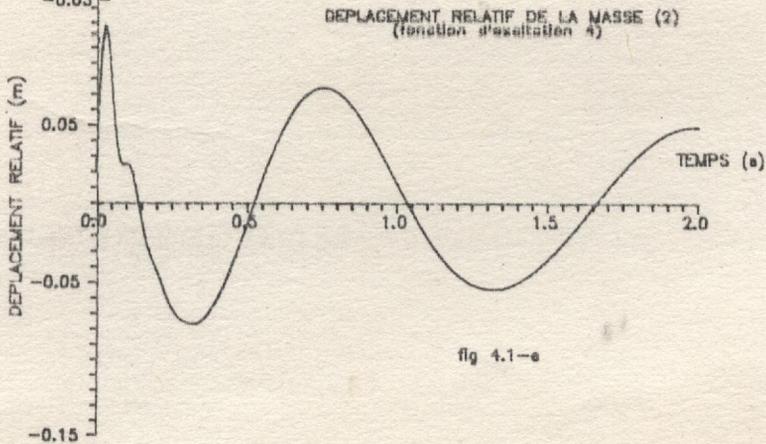
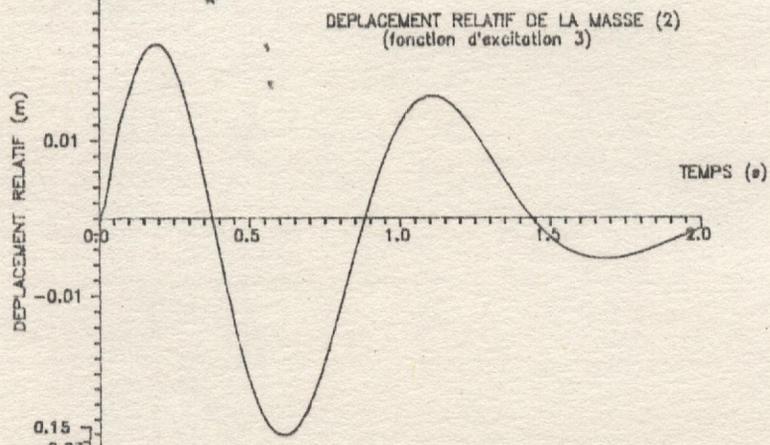
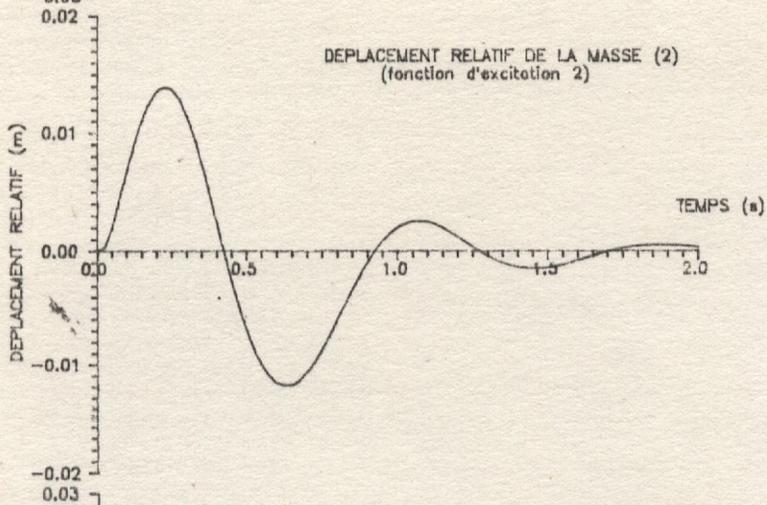
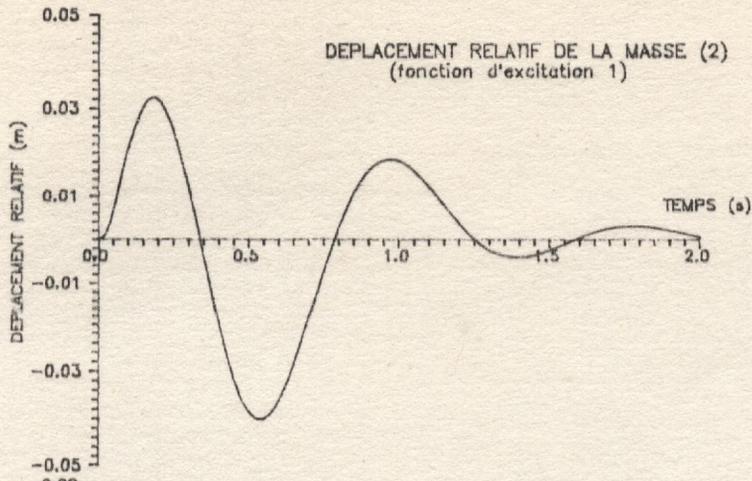


fig 4.1-e

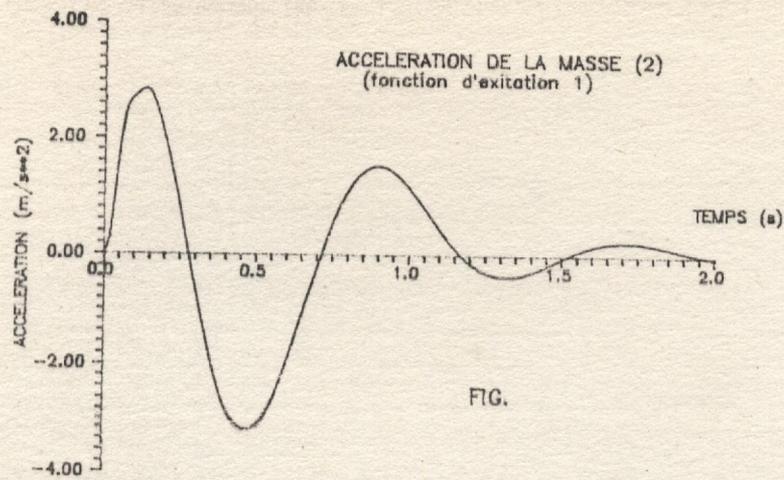


FIG.

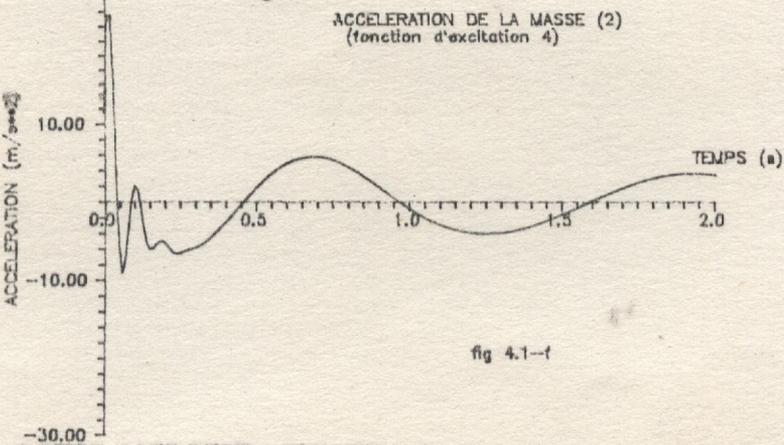
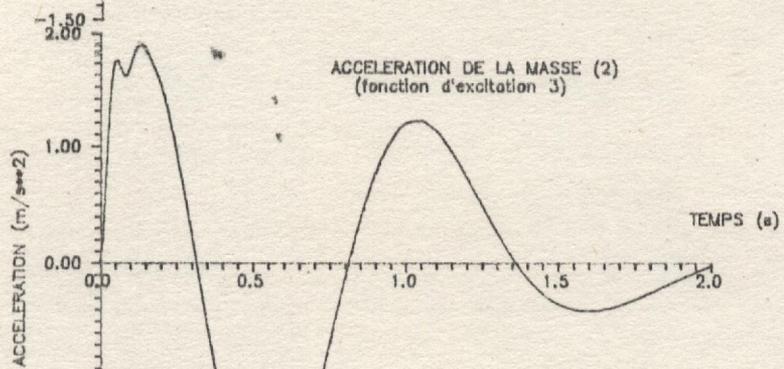
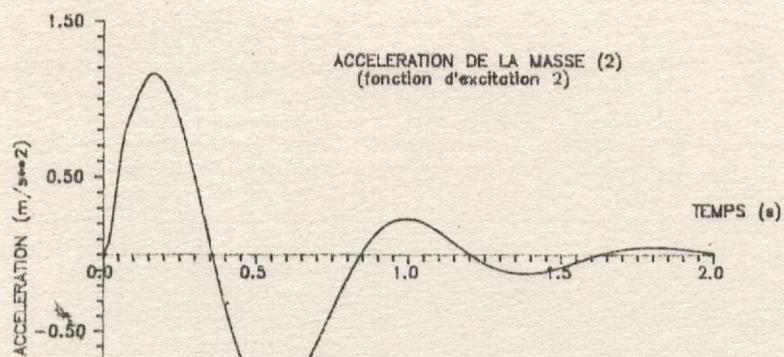


fig 4.1-f

5. ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME [22]

La forme générale de l'énergie potentielle d'un système à n degrés de liberté s'écrit:

$$E_p = E_p(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1)$$

avec: q_1, q_2, \dots, q_n déplacements généralisés.

La position d'équilibre se traduit par:

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Cela revient à choisir des coordonnées de telle manière qu'elle s'annulent en ces positions.

$$E_p = E_p(0, 0, \dots, 0)$$

Le développement de l'équation (1) en série de Mac-Laurin donne :

$$E_p = E_p(0, 0, \dots, 0) + \sum_j \left[\frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right]_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_j \partial q_\alpha} \right]_0 q_j q_\alpha + \dots \quad (2)$$

Sachant que $E_p(0, 0, \dots, 0) = 0$ et $\left[\frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right]_0 = 0$ l'équation (2) devient:

$$E_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right]_0 q_1^2 + \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right]_0 q_2^2 + \dots + \dots + \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_n^2} \right]_0 q_n^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right]_0 q_1 q_2 + \dots + 2 \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_{n-1} \partial q_n} \right]_0 q_{n-1} q_n \right] + \dots$$

Dans le cas d'un système à deux degrés de liberté, l'équation précédente s'écrit:

$$E_p(q_1, q_2) = E_p(q_0, q_0) + \left[\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \right]_0 q_1 + \left[\frac{\partial E_p}{\partial q_2} \right]_0 q_2 + \dots$$

$$\frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right]_0 q_1^2 + \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right]_0 q_2^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right]_0 q_1 q_2 \right] + \dots$$

$$E_p(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left[c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2 \right]$$

avec:

$$c_{11} = \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \right]_0 \quad c_{22} = \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \right]_0 \quad c_{12} = \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \right]_0$$

Condition de stabilité.

$$c_{11} > 0 \quad c_{22} > 0 \quad \text{et} \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$$

$$\text{ou bien} \quad D_1 > c_{11} \quad \text{et} \quad D_2 > 0$$

$$\text{avec:} \quad D_1 = c_{11}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

Application:

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_1^2 - x_1 x_0 k_1 - x_1 x_2 k_2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_1 x_0^2$$

Nous pouvons vérifier facilement que :

$$c_{11} > 0 \quad c_{22} > 0 \quad \text{et} \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$$

et conclure que le système est stable.

6. CONTRÔLE DE VIBRATION

Le but de la suspension automobile est de réduire la transmission des vibrations provoquées par les irrégularités des routes. Elle permet également la minimisation de la course de la masse amortie ce qui améliore directement son isolation de la chaussée et augmente le confort des passagers.

Cette mission est assurée par les organes de la suspension à savoir ressort et amortissement. Généralement une telle suspension présente un certain nombre de compromis entre les exigences suivantes, qui sont parfois incompatibles du fait que les caractéristiques sont limitées.

- Isolation de la masse amortie d'une chaussée irrégulière
- Le mouvement du véhicule étant bien contrôlé durant les manoeuvres.
- La force de contact route-pneu resterait constante autant que possible.
- La course de la suspension exigée resterait également petite autant que possible.

Malheureusement ces exigences sont difficiles à quantifier sans pour autant faire varier les caractéristiques des organes de la suspension en fonction de l'état des routes.

En se référant à l'une des équations du mouvement du modèle "1/4" suivante:

$$\ddot{X} + \frac{c_2}{m} \dot{X} + \frac{k_2}{m} X = \frac{f(t)}{m}$$

On remarque que les seules caractéristiques qu'on peut changer sur les organes de la suspension sont la raideur k_2 et l'amortissement c_2 .

Ces deux paramètres dans le cas de la suspension passive sont réglés durant la conception du projet.

L'analyse paramétrique illustrée dans les figures suivantes permet d'observer l'influence de la variation de C_z et K_z sur les différentes réponses du système et de pouvoir choisir le ou les variables de contrôle. L'influence de ses deux paramètres sur les relations entre les déplacements et les accélérations des masses par rapport au temps est illustrée sur les figures suivantes pour les quatre fonctions d'excitations. Nous considérons que les caractéristiques de base de la suspension sont $C_z=1398$ (Ns/m) et $k_z=1.87 E04$ (N/m) [2].

Une famille de courbes sont tracées en faisant varier la raideur seule de 25, 50, et 75% de part et d'autre de la valeur de base pour un rapport de masse égal à $m_1/m_2 = .14$; ce qui est typique pour les véhicules automobiles.

Pour les quatre fonctions d'excitation, les figures 6.1 (a,b,c,d,e,f,g,h) relatives à une réduction de K_z de la valeur de $1.87 E04$ à $.4675 E04$ correspondent à une suspension molle; ce qui s'accompagne d'une dégradation de l'isolation de la masse amortie. Tandis que celles correspondantes à l'augmentation de K_z de la valeur $1.87 E04$ à $3.275 E04$ affichent une suspension rigide; ce qui s'accompagne d'une amélioration dans l'isolation.

De même qu'une famille de courbes sont tracées fig 6.1 (i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t) en faisant varier l'amortissement C_z seul de 25, 50 et 75% de part et d'autre de la valeur de base. Pour les quatre fonctions d'excitation, on observe quand l'amortissement est réduit de 1398 à 350 Ns/m, une réduction significative dans l'accélération. Celle-ci s'accompagne d'une augmentation de la déformation de la suspension. Par contre quand C_z augmente, le déplacement diminue sensiblement.

D'une manière générale si C_2 et K_2 augmentent par rapport à la valeur de base, la suspension devient rigide et dans le cas contraire elle devient molle.

On peut observer à partir des figures 6.1(e,f) qu'avec la variation de K_2 il n'y a pas une fluctuation de l'amplitude de l'accélération autour de la valeur de base; par contre il y a une augmentation sensible de celle-ci dans le temps avec la variation de l'amortissement notamment quand celui-ci diminue.

L'amortissement dans une suspension peut varier rapidement et avec des petites consommations de puissance.

Pour le contrôle par exemple à travers l'utilisation d'une valve électro-hydraulique, la situation est entièrement différente dans le cas de changement de la raideur du ressort. Celui-ci enmagasine de l'énergie quand il est sous charge et un changement dans sa constitution exigera inévitablement l'introduction ou l'absorption de l'énergie. Les tentatives pour changer rapidement la raideur des ressorts exigent une grande puissance; depuis il est peu pratique de récupérer leur l'énergie stockée.

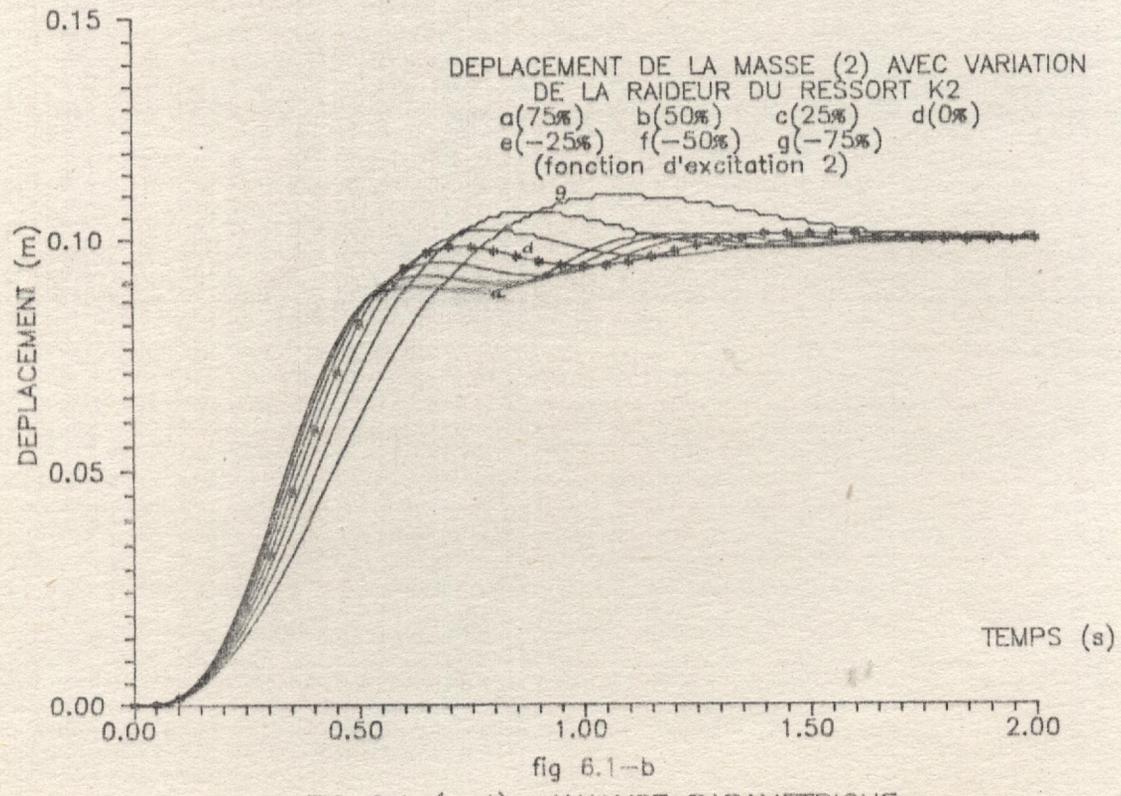
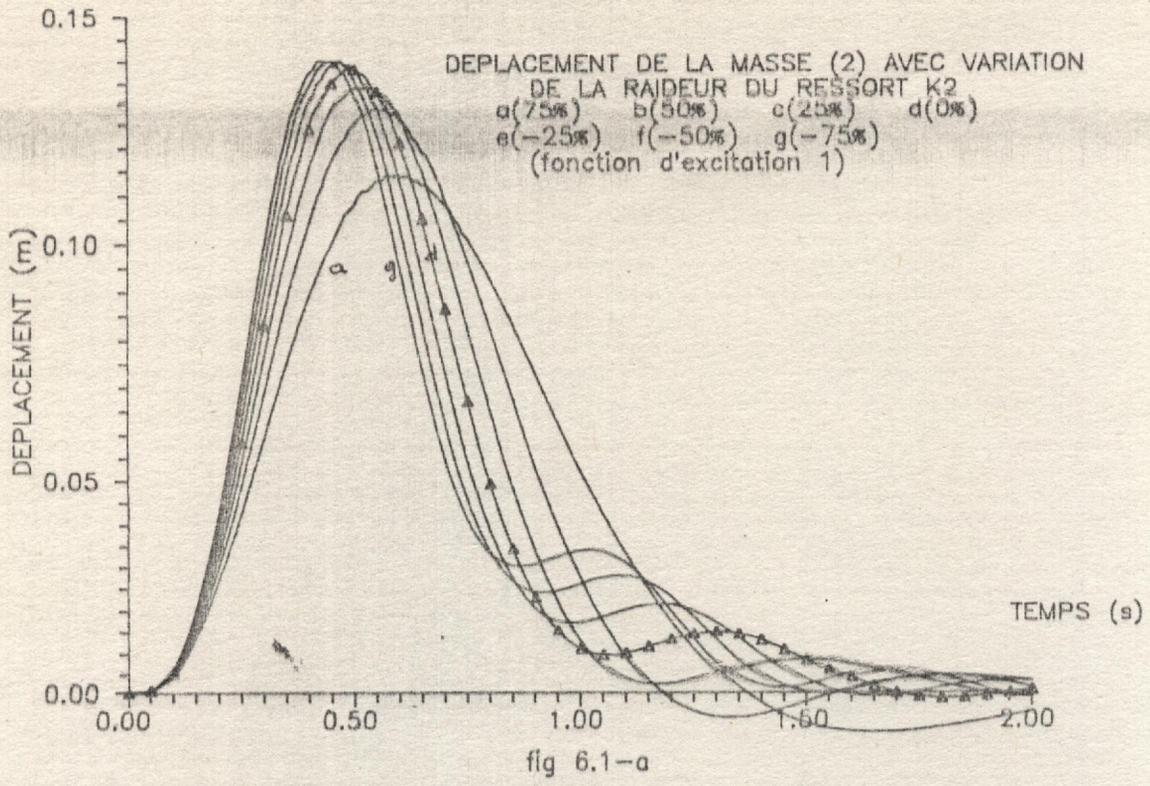


FIG 6.1 (a-t) ANALYSE PARAMETRIQUE.

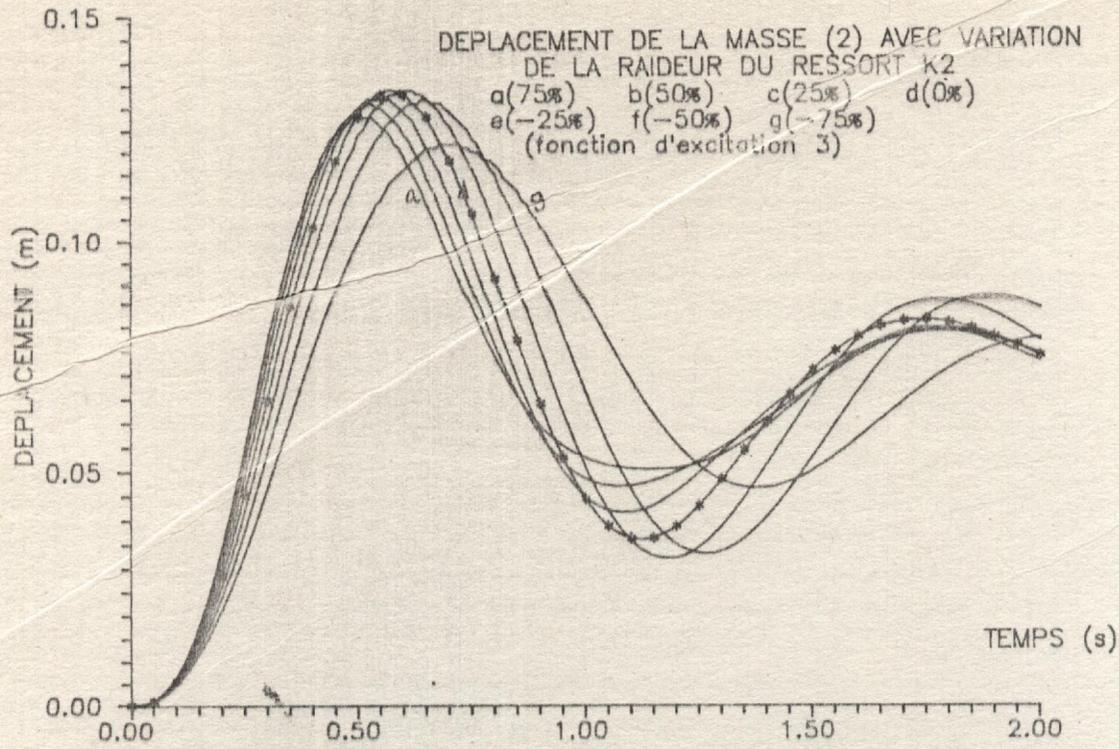


fig 6.1-c

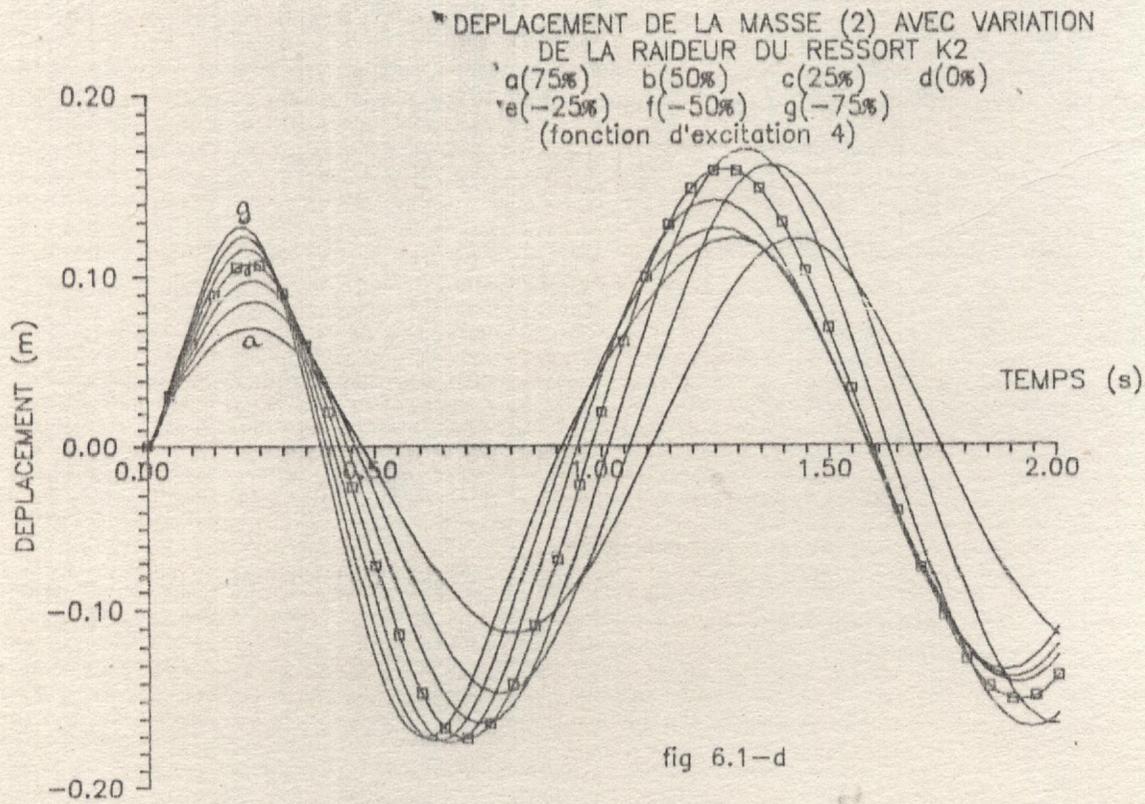
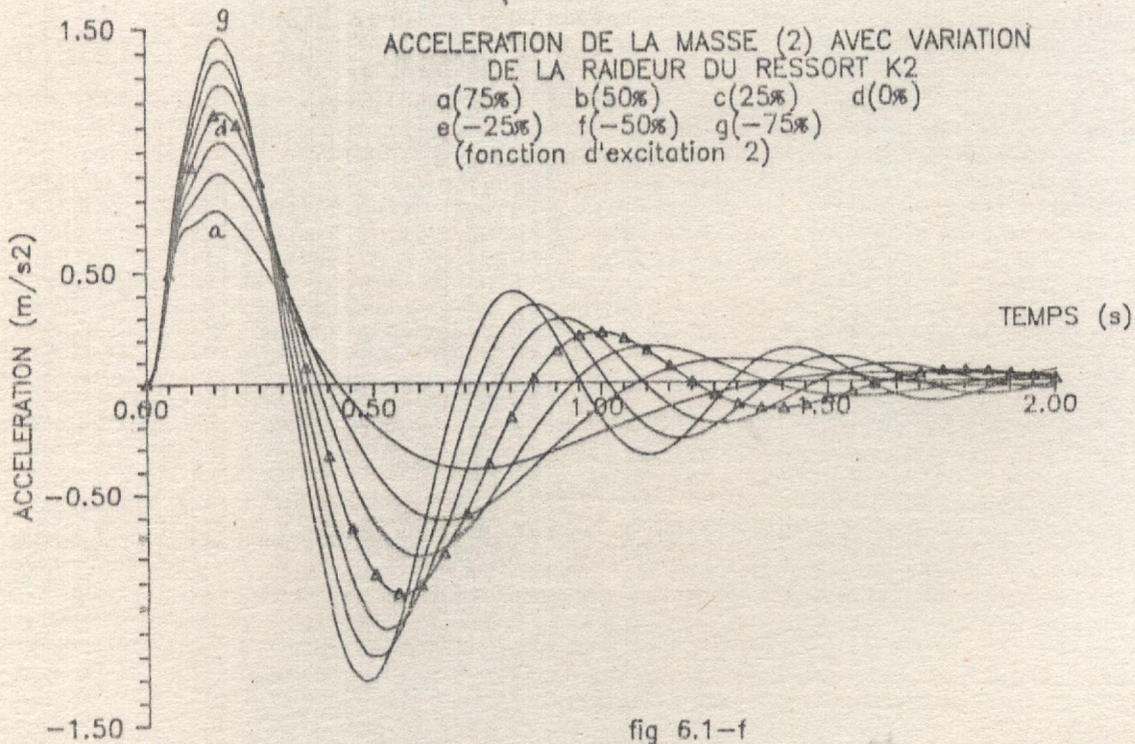
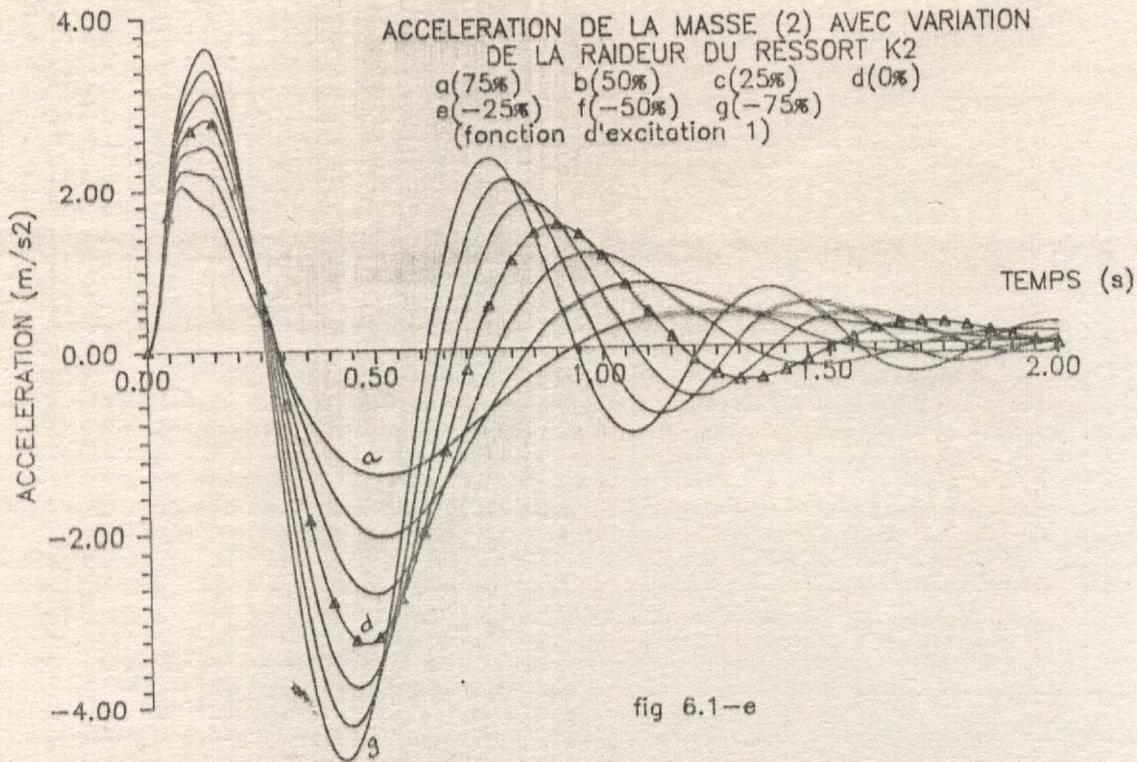
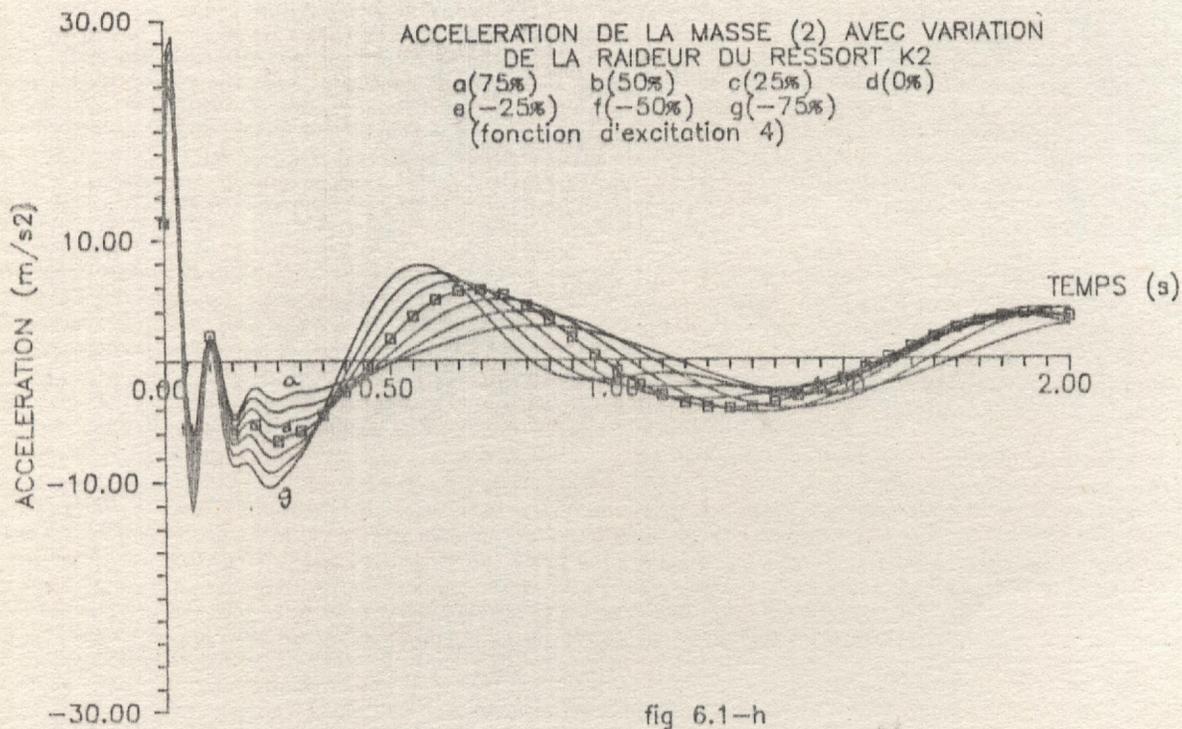
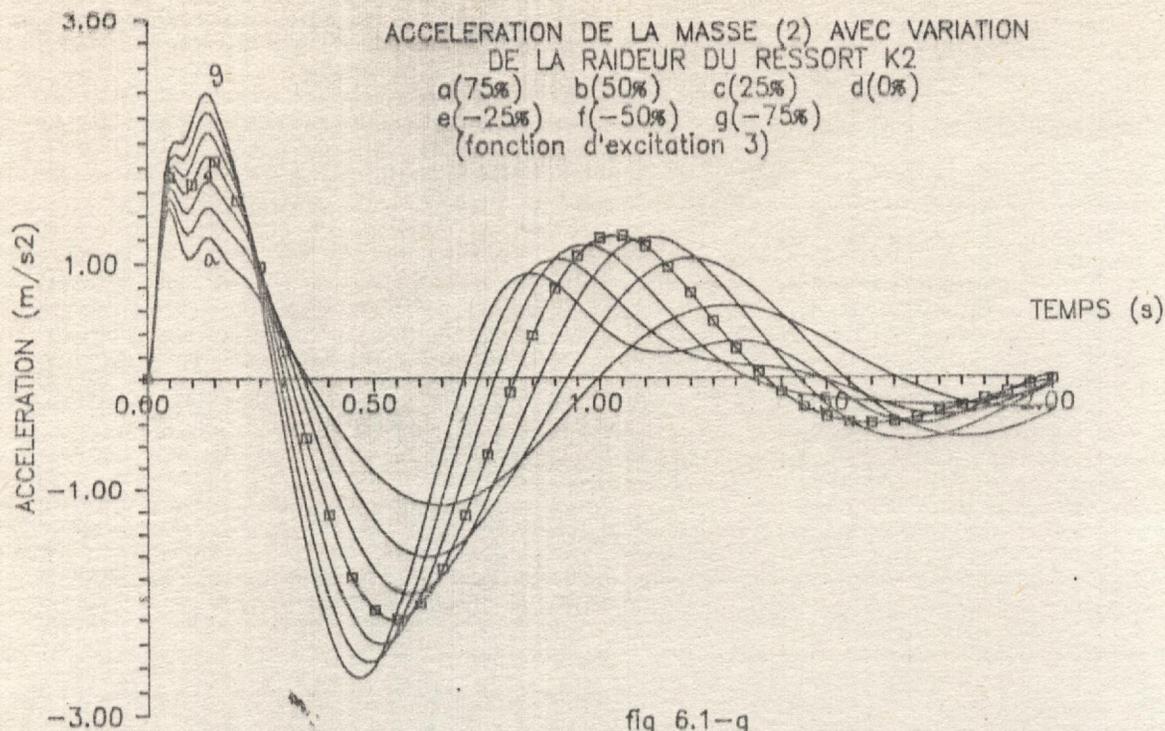
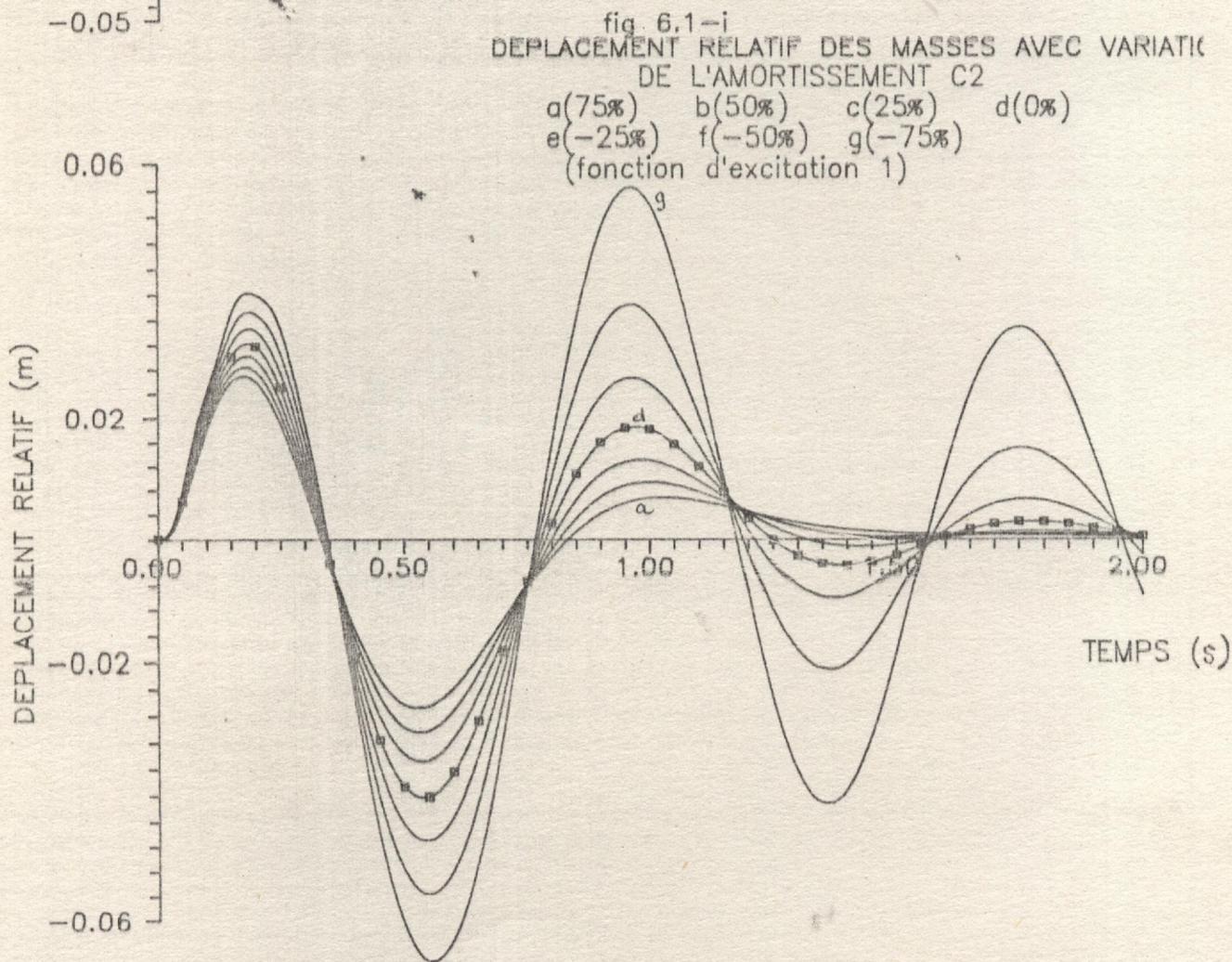
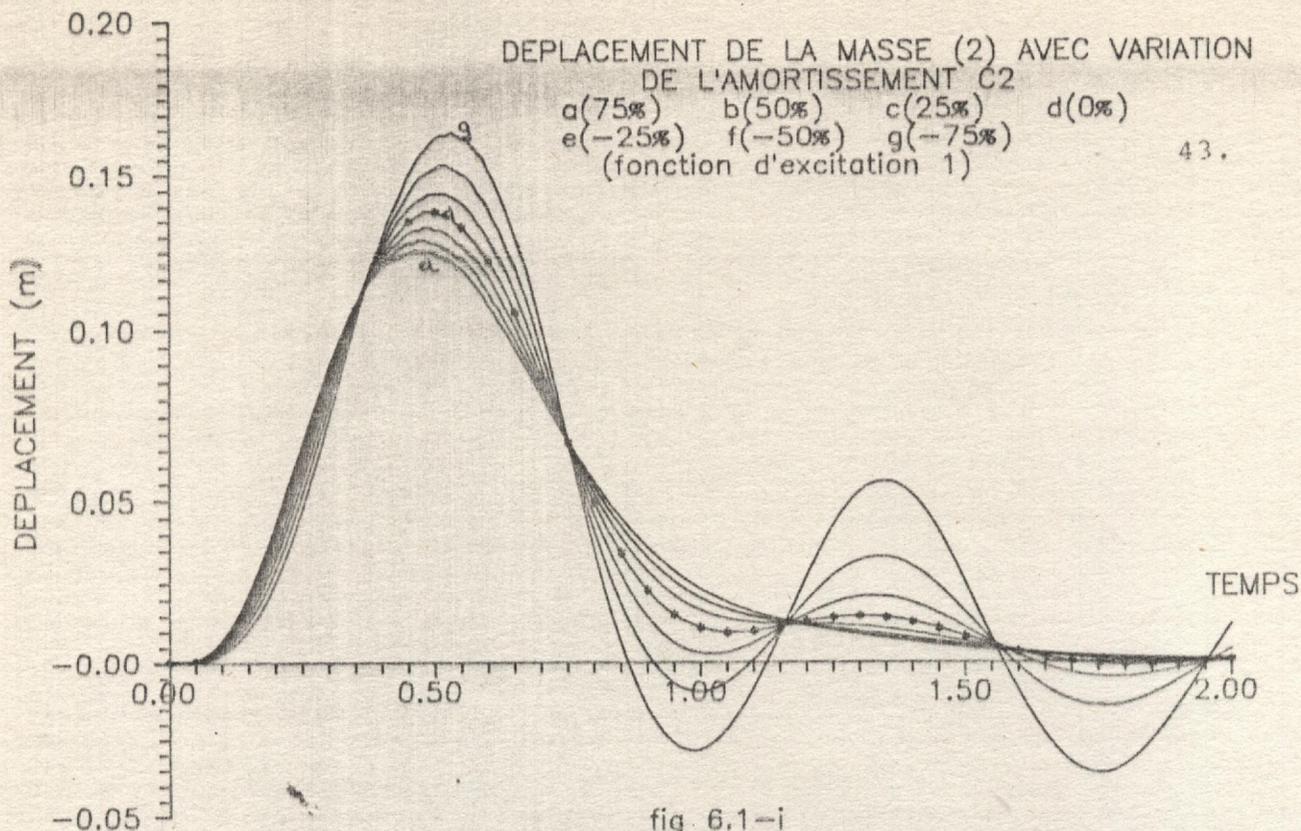


fig 6.1-d







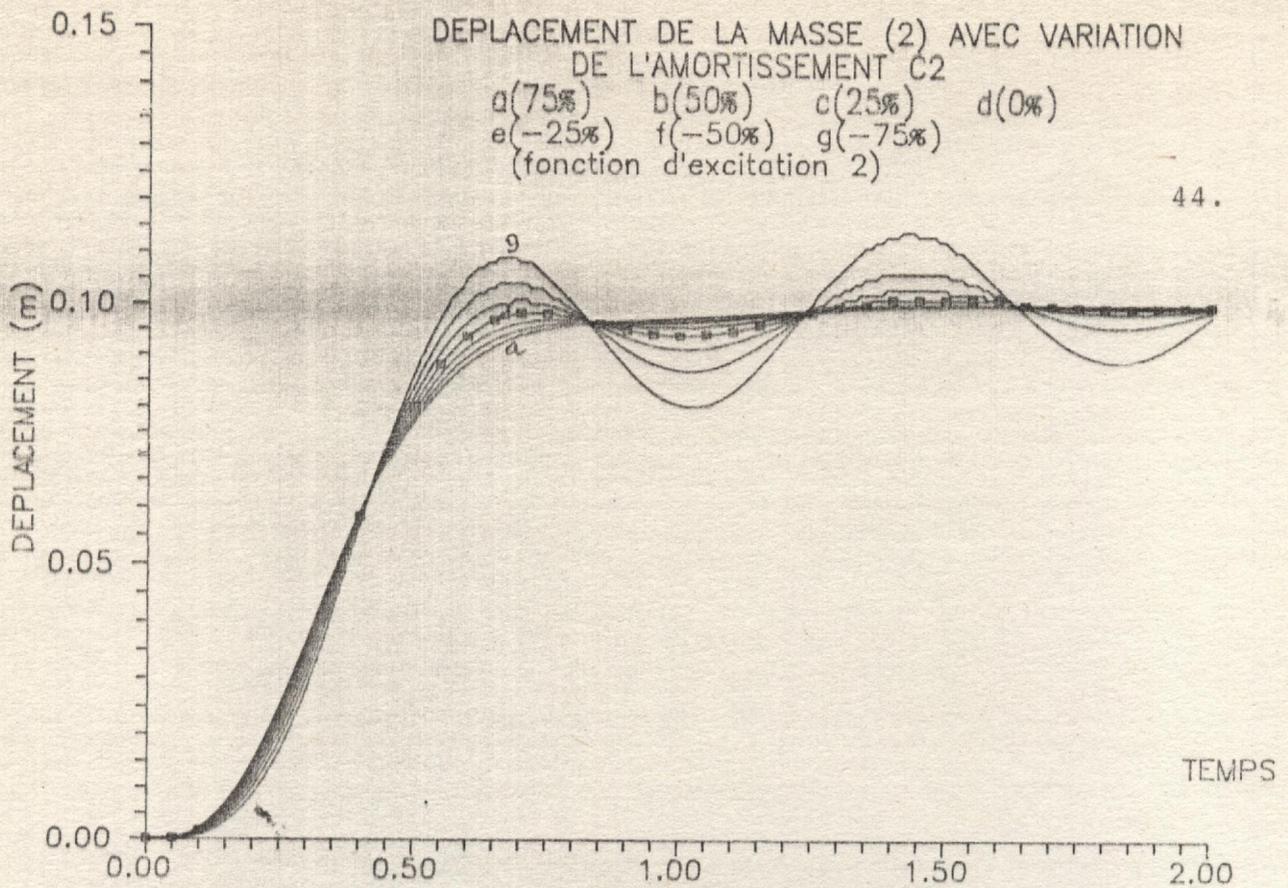


fig 6.1-k

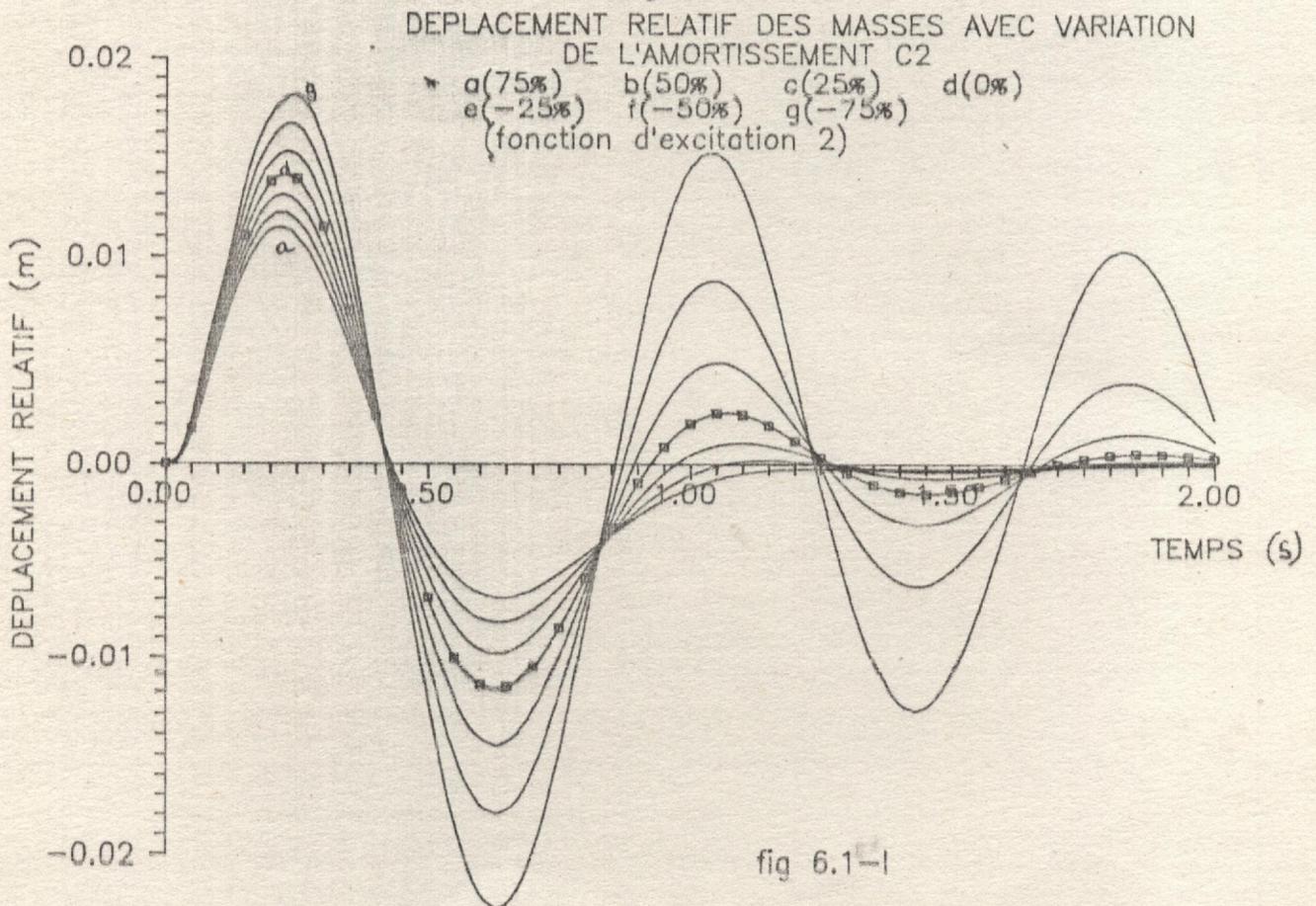
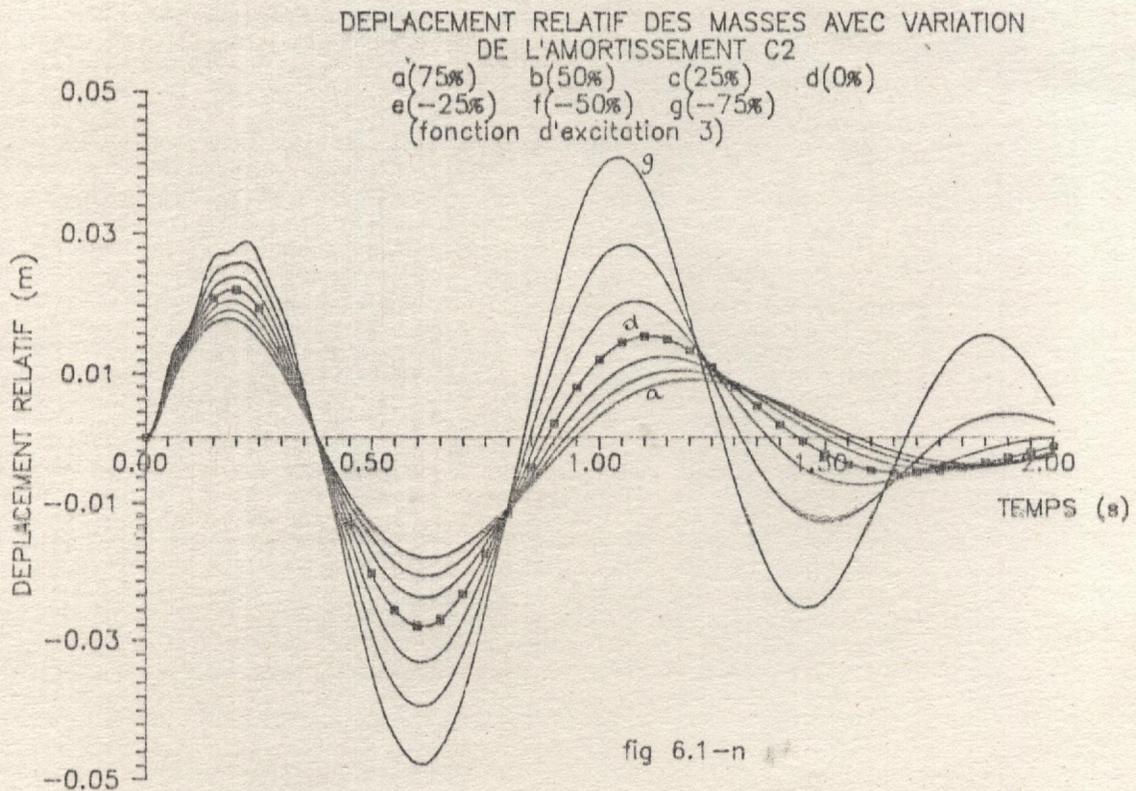
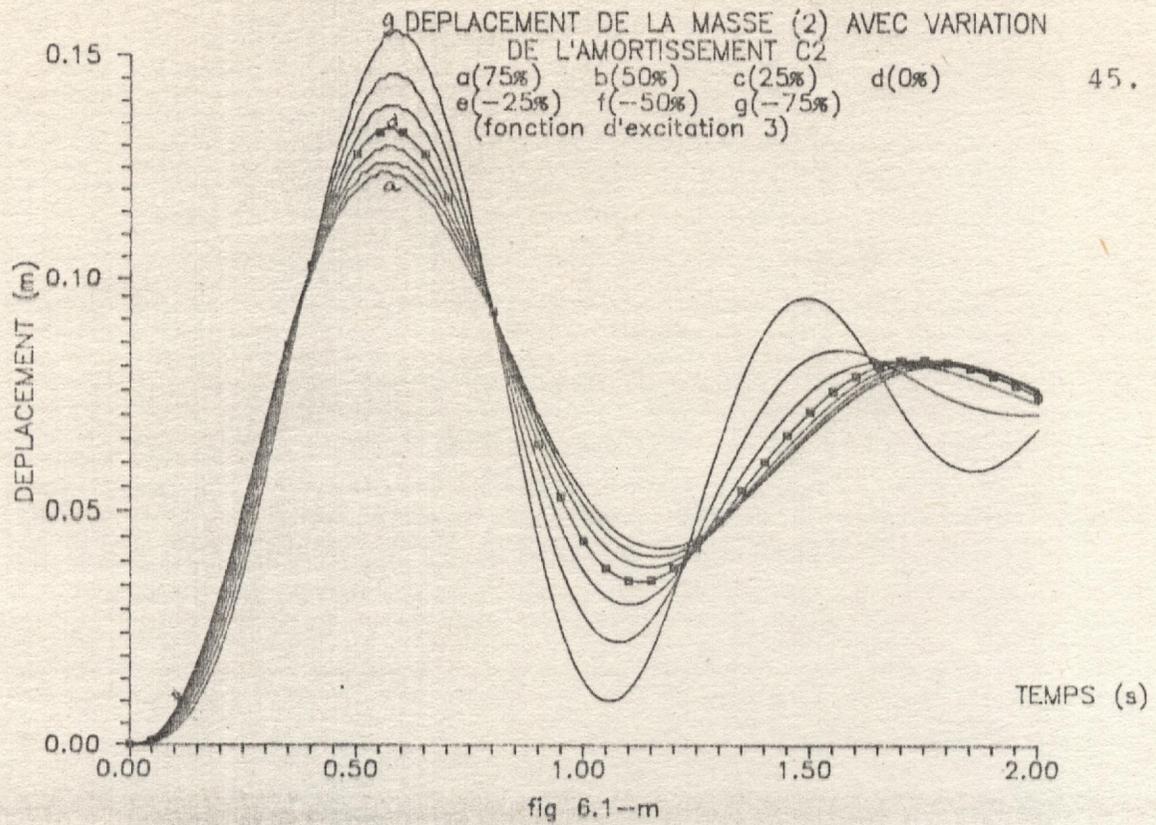


fig 6.1-l



DEPLACEMENT DE LA MASSE (2) AVEC VARIATION DE L'AMORTISSEMENT C2

a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
 e(-25%) f(-50%) g(-75%)
 (fonction d'excitation 4)

46.

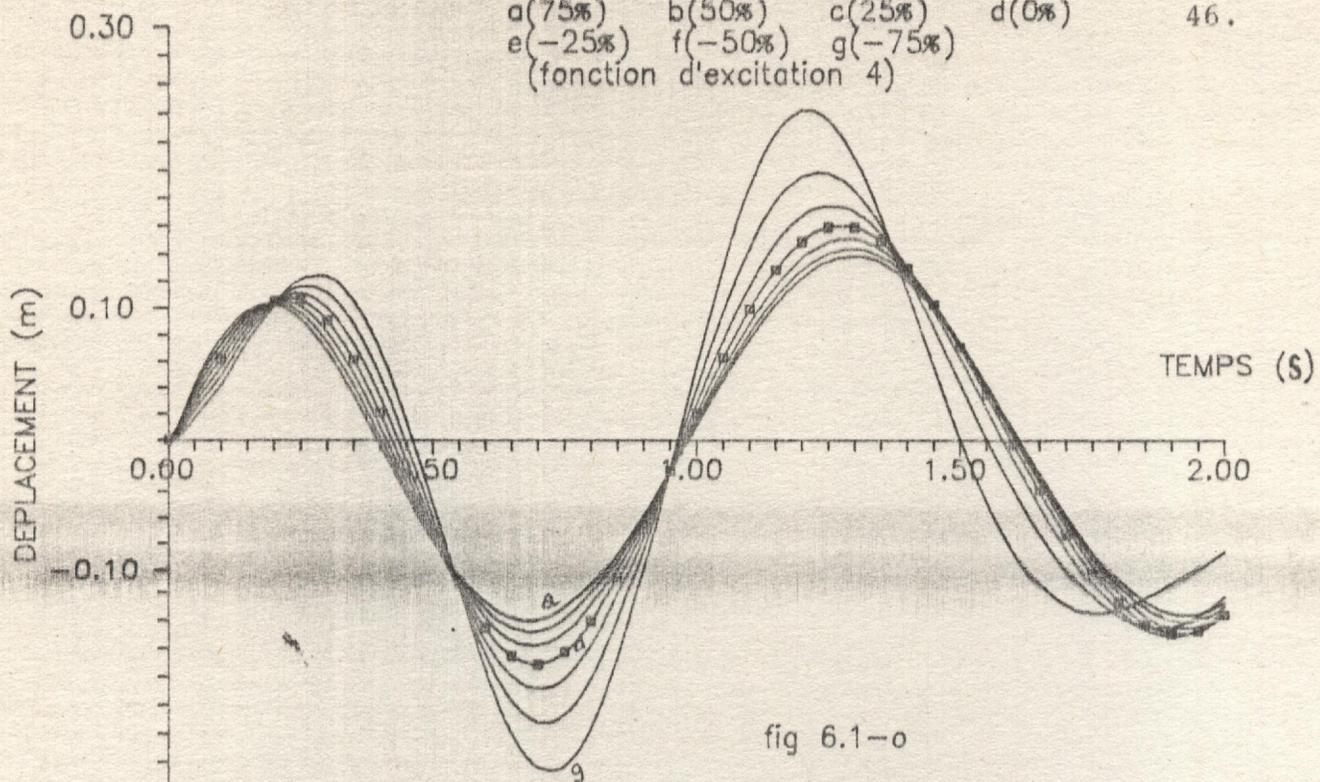


fig 6.1-o

DEPLACEMENT RELATIF DES MASSES AVEC VARIATION DE L'AMORTISSEMENT C2

a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
 e(-25%) f(-50%) g(-75%)
 (fonction d'excitation 4)

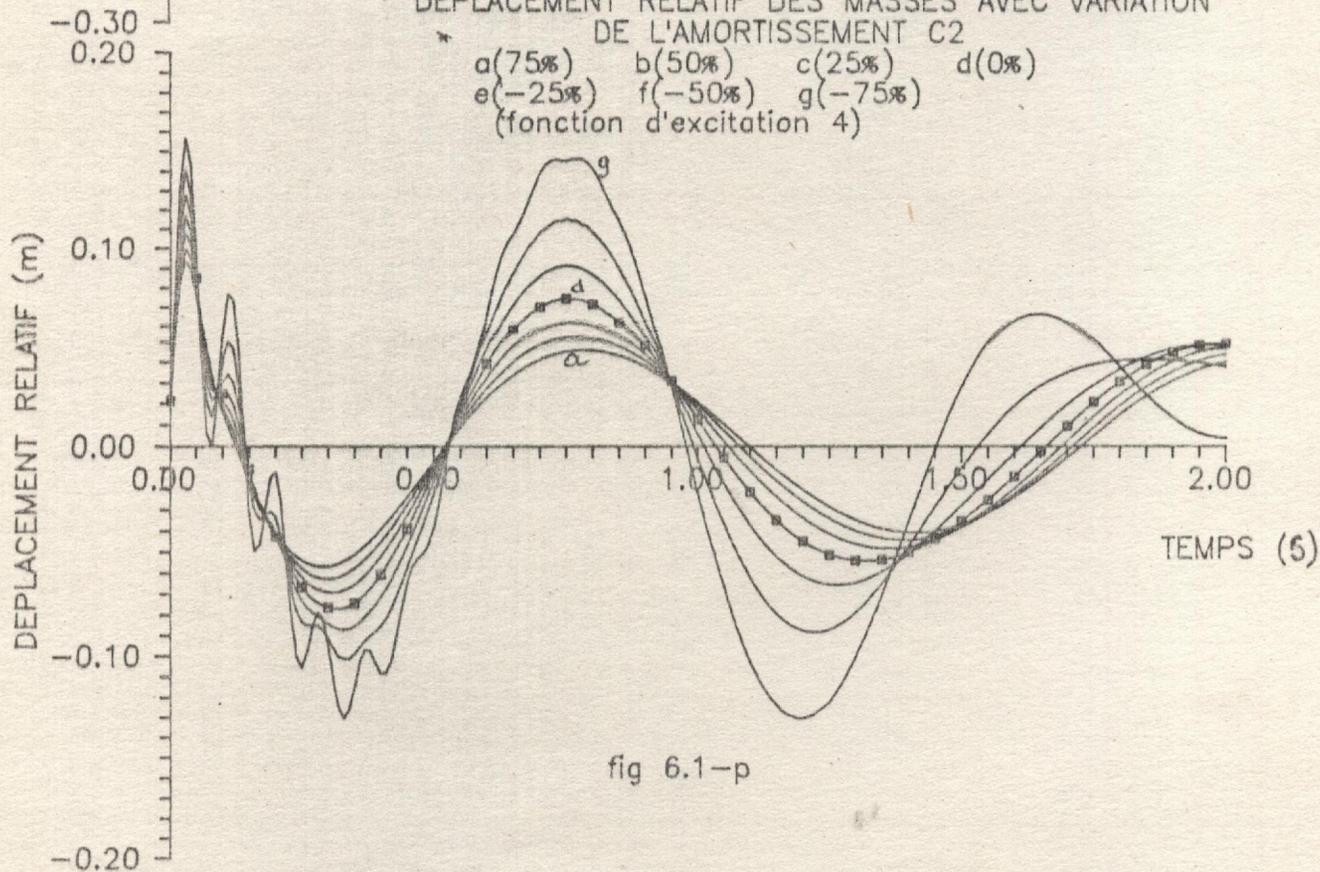
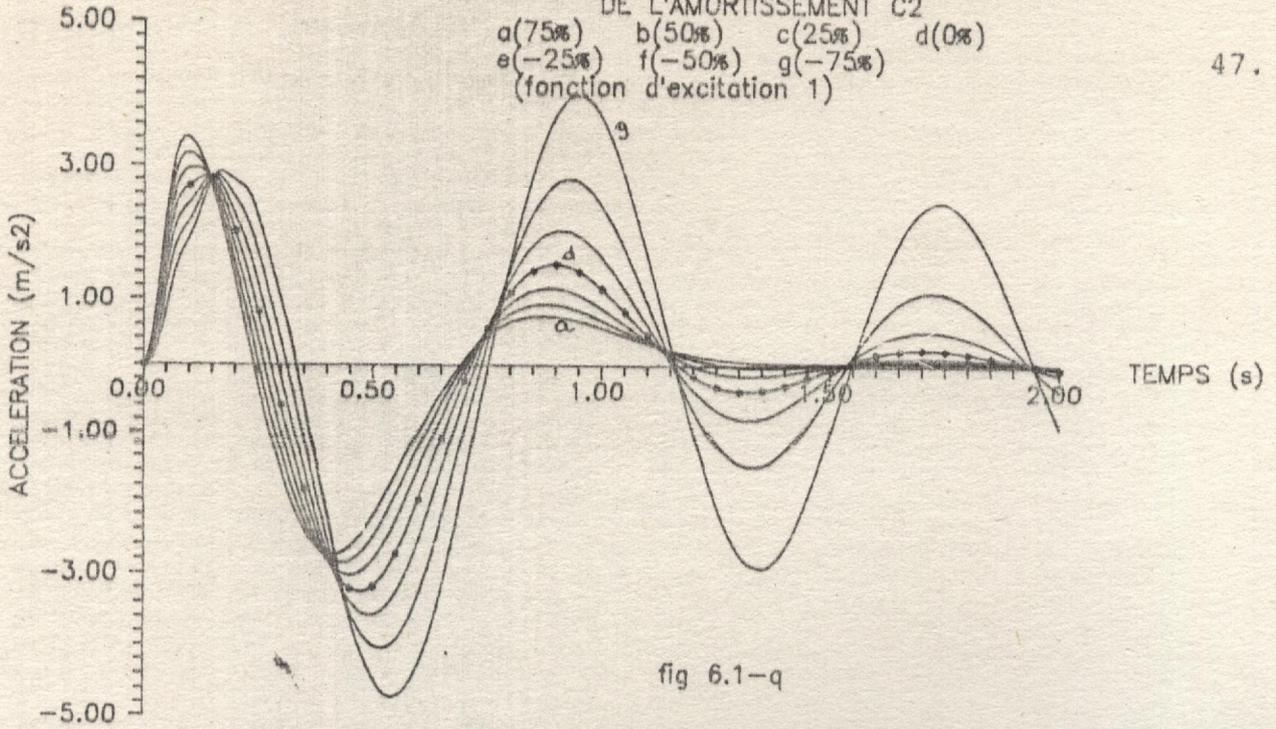


fig 6.1-p

ACCELERATION DE LA MASSE (2) AVEC VARIATION
DE L'AMORTISSEMENT C2

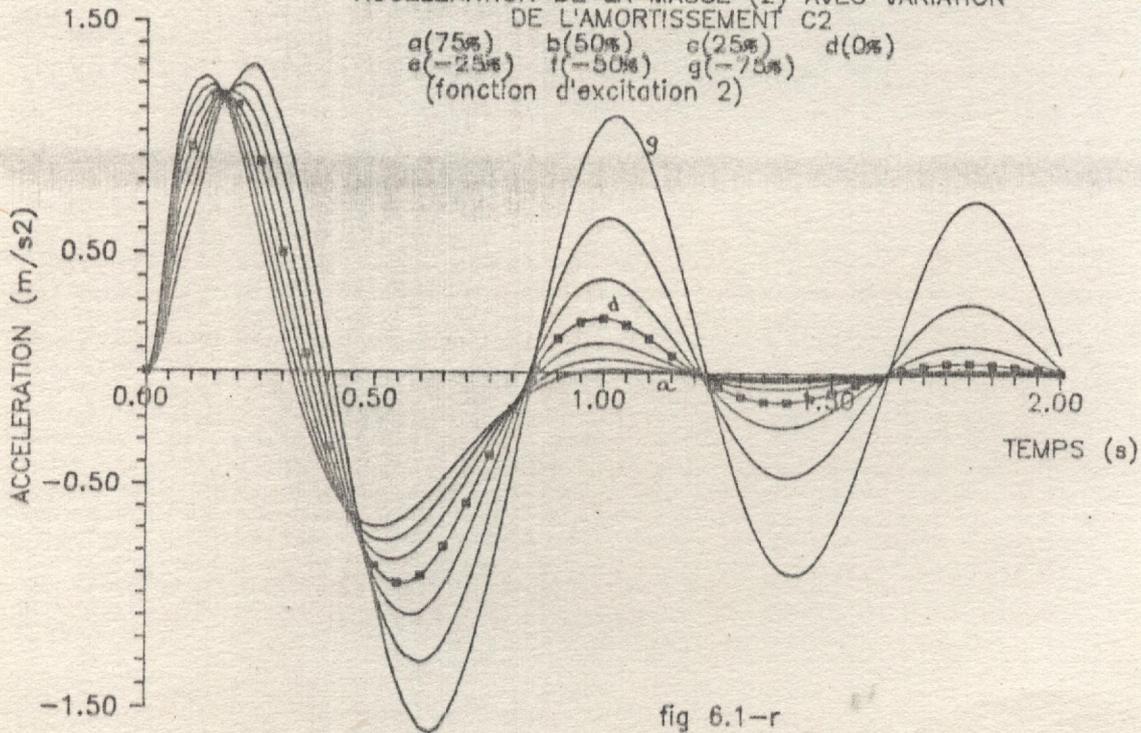
a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
e(-25%) f(-50%) g(-75%)
(fonction d'excitation 1)

47.



ACCELERATION DE LA MASSE (2) AVEC VARIATION
DE L'AMORTISSEMENT C2

a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
e(-25%) f(-50%) g(-75%)
(fonction d'excitation 2)



ACCELERATION DE LA MASSE (2) AVEC VARIATION
DE L'AMORTISSEMENT C2

a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
e(-25%) f(-50%) g(-75%)
(fonction d'excitation 3)

48.

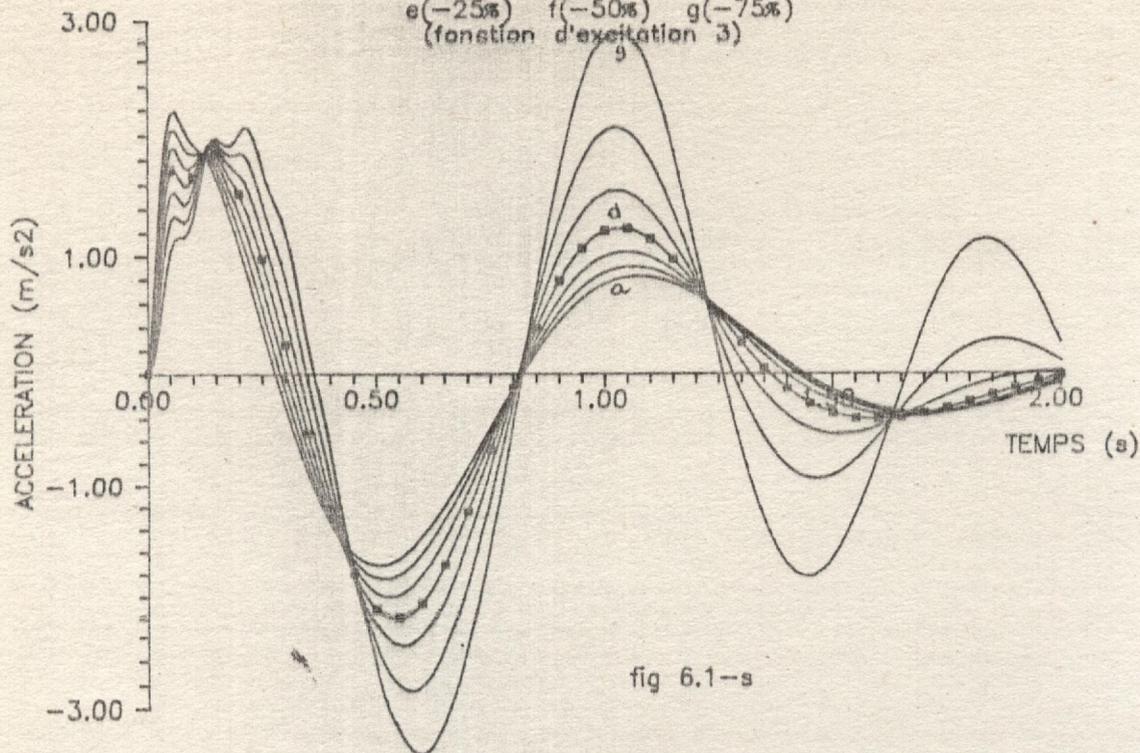


fig 6.1-s

ACCELERATION DE LA MASSE (2) AVEC VARIATION
DE L'AMORTISSEMENT C2

a(75%) b(50%) c(25%) d(0%)
e(-25%) f(-50%) g(-75%)
(fonction d'excitation 4)

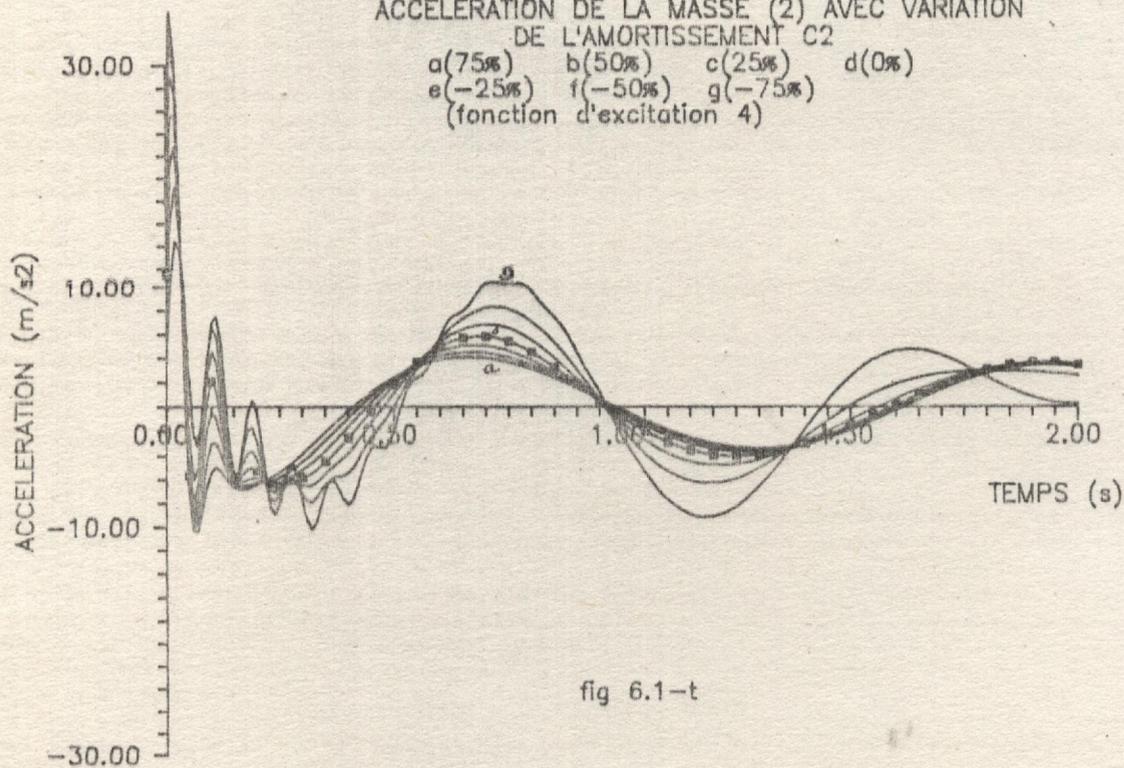


fig 6.1-t

7. OPTIMISATION DU SYSTEME.

Plusieurs algorithmes d'optimisation exigent qu'une fonction $F(x)$ et un ensemble initial de variables d'étude X_0 soient spécifiées.

En commençant à partir de ce point de départ, l'étude est menée itérativement.

La forme la plus commune de cette procédure itérative [21] est donnée par l'équation suivante:

$$X^k = X^{k-1} + \alpha^k S^k$$

avec:

- k : nombre d'itération
- S : vecteur de recherche de direction
- α : quantité scalaire définissant la distance nécessaire pour déplacer dans la direction S
- X : vecteur contenant les variables de décision lequel est réalisé à chaque itération K

L'algorithme d'optimisation basé sur l'équation précédente peut être séparé en deux parties de base.

La première est la détermination de la direction de recherche S améliorant la fonction objective sujette ou non à des contraintes. La seconde est la détermination du paramètre scalaire α définissant la distance de déplacement dans la direction S .

Chacune de ces composantes joue un rôle fondamental dans l'efficacité et la fiabilité d'un algorithme d'optimisation donné. Une fois qu'un point meilleur est trouvé, X est adopté et la recherche continue dans cette direction. Ce processus d'itération se poursuit jusqu'à ce qu'une amélioration soit faite sur la fonction objective avec une

tolérance bien fixée. Autrement dit quand le critère de convergence prédéterminé est rencontré. Néanmoins cet algorithme suppose que l'on puisse calculer le gradient de la fonction $F(x)$ à chaque pas.

Dans notre cas, comme $\nabla F(x)$ est difficile à évaluer on a recours à des méthodes directes telles que celles de Powell, Golden, Hooke, ..., nécessitant le calcul de $F(x)$ à chaque pas.

Ce sont des procédures itératives de recherche avec lesquelles on minimise $F(x)$ et ne deviennent intéressantes que lorsque $\nabla F(x)$ est difficile à évaluer.

Pour réaliser ceci nous commençons avec le choix de la variable initiale x_0 et à l'aide d'une procédure, nous tirons de nouveau le vecteur x_1 lequel donne une valeur plus basse de $F(x)$.

Pour la minimisation d'une fonction sans le calcul du gradient, la méthode Golden offre un résultat satisfaisant.

Une fonction F et un triplet de point a, b, c de rapprochement de son minimum, sont donnés de telle manière que l'abscisse b se situe entre a et c .

Dans ce cas nous savons que la fonction possède un minimum dans l'intervalle $[a, c]$; celui-ci est approché successivement en choisissant un point d'abscisse x dans l'intervalle $[a, b]$ ou dans $[b, c]$, ensuite on évalue $F(x)$.

Si $F(b) < F(x)$ alors le nouveau triplet de rapprochement est $a < x < b$ sinon $b < x < c$; dans tous les cas le point milieu du nouveau triplet est l'abscisse dont l'ordonnée est le meilleur minimum réalisé.

Nous continuons le processus de rapprochement jusqu'à ce que la distance entre les deux points extérieurs du triplet ait une tolérance autour de la valeur TOL. L'abscisse du

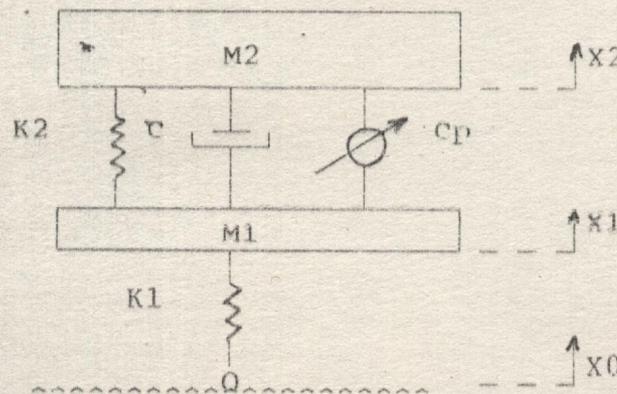
minimum est retourné comme X_{min} et la valeur de la fonction en ce point.

Pour introduire le problème d'optimisation dans notre travail, nous considérons le modèle du véhicule suivant à deux degrés de liberté en mouvement horizontal avec une vitesse constante.

Les deux degrés de liberté sont associés à la masse amortie M_2 et à celle de la roue M_1 du véhicule qui accomplissent respectivement les déplacements verticaux absolus X_2 et X_1 .

La force de la suspension résultante de l'amortissement C_p dont l'action est indépendante des forces d'autres éléments passifs, est considérée comme la variable de contrôle.

Considérons le modèle actif suivant:



7.1 Cas linéaire.

Equations du mouvement:

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{X}_1 - C_2 (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - C_p (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + K_2 (X_2 - X_1) + K_1 (X_1 - X_0) &= 0 \\
 M_2 \ddot{X}_2 + C_2 (X_2 - X_1) + C_p (X_2 - X_1) + K_2 (X_2 - X_1) &= 0
 \end{aligned}$$

Forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z + C_p & -C_z - C_p \\ -C_z - C_p & C_z + C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] \{ \ddot{X} \} + [C] \{ \dot{X} \} + [K] \{ X \} = \{ Q(t) \}$$

Le système de suspension actif doit être optimisé en respectant l'indice de performance préalablement défini comme étant une combinaison linéaire de termes directement en relation avec les critères de performance à savoir: le confort, la course de la suspension et parfois les forces en présence.

Les critères les plus importants sont:

- L'accélération (acc_z) du compartiment des passagers doit être inférieure à la limite admissible. (Critère de confort).
- Le déplacement relatif (D_{rel}) entre les deux masses 1 et 2, qui limite l'espace exigé de la suspension et le dispositif actif. (Critère d'encombrement).
- La vitesse relative (V_{rel}) entre les deux masses, limite les charges supportées par le dispositif actif (Critère de charge).

Des équations précédentes nous avons :

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [c_z (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_z (x_1 - x_2)]$$

Cette équation montre qu'il y a augmentation dans l'accélération à chaque fois que les efforts du ressort et de l'amortisseur sont de même signe. Inversement l'accélération décroît quand l'effort de l'amortisseur s'oppose à celui du ressort. Autrement dit:

$$\ddot{x} = f (c_2 , k_2)$$

L'influence de l'amortissement sur l'accélération $|\ddot{x}|$ dépend des signes du déplacement relatif $(x_1 - x_2)$ et de la vitesse relative $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$; de même que pour la variation de la raideur k_2 .

D'une manière générale les paramètres C_2 et k_2 influent d'une façon directe sur la valeur de l'accélération $|\ddot{x}|$.

Ceci montre qu'une suspension passive (avec des caractéristiques de raideur et d'amortissement fixées) n'est pas tout à fait un système optimal pour le critère du confort des passagers.

Pour une fonction d'excitation donnée, un amortissement optimum C augmentera en valeur absolue l'accélération de la masse amortie $|\ddot{x}|$ si:

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \text{ et } (x_1 - x_2)$$

sont de même signe, autrement dit si:

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(x_1 - x_2) > 0$$

où bien

$$\text{sig} > 0$$

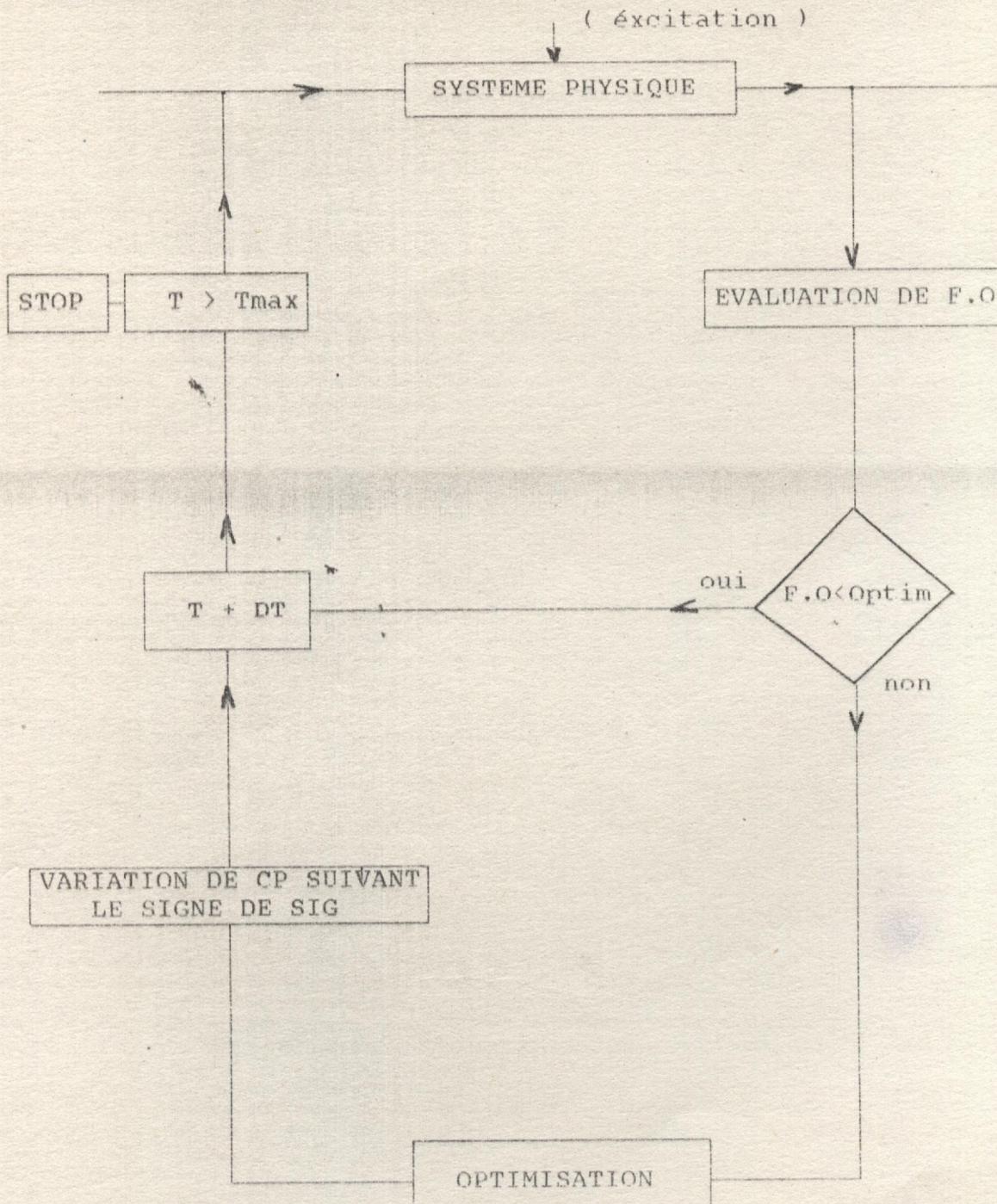
$$\text{avec sig} = \text{Drel} * \text{Vrel}$$

Si nous voulons minimiser $|\ddot{x}|$, il faudrait diminuer C_2 et/ou k_2 sinon dans le cas où $\text{Drel} * \text{Vrel} < 0$ il faudrait augmenter C_2 et/ou k_2 .

Dans notre cas et d'après le modèle utilisé on ne peut jouer que sur la variable de contrôle du dispositif d'amortissement C_p .

Pour réaliser les opérations ci-dessus nous appliquons un dispositif actif capable de faire varier son amortissement d'une valeur minimale allant de 10 jusqu'à quatre fois la valeur maximale du système passif.

7.2. ORGANIGRAMME DE CONTRÔLE.



Au départ quand $t=0$ nous avons $C_2 = \text{amort}$ (cas passif).
On évalue chaque instant la fonction objective F.O définie
comme suit:

$$F.O = C_{12} \cdot f_k^2 + C_{22} \cdot f_i^2 + C_{32} \cdot f_d^2$$

$$F.O = \sqrt{(F.O / \text{SUM})}$$

avec:

$f_k = \text{Ressort} * \text{Drel}$ (Force du ressort),

$f_i = \text{Vmasse} * \text{Acc2}$ (Force d'inertie),

$f_d = C_p * \text{Vrel}$ (Force d'amortissement active),

avec:

C_{12}, C_{22}, C_{32} : sont des coefficients de pondération.

$$\text{SUM} = C_{12} + C_{22} + C_{32}$$

Ensuite on effectue un test comparatif sur les deux
fonctions.

F.O: fonction calculée à chaque instant et OPTIM une
fonction évaluée d'après les critères de performance.

La fonction optimale est également définie de la même
manière que la fonction objective seulement avec des
valeurs Drel, Vrel et Acc2 connues.

D'après la ref [20]

- L'accélération permise est de l'ordre de 1.77 m/s^2
- Le déplacement relatif de la suspension
(encombrement) est de 0.017 m .
- La vitesse relative est de $.2 \text{ m/s}$

Si F.O est inférieure ou égale à la fonction OPTIM, le
calcul se poursuit avec une incrémentation du temps de la
valeur DT; sinon on fait appel au programme d'optimisation.

Dans celui-ci on calcule la valeur de sig et on observe
son signe.

1^{er} Cas:

$$\text{sig} \geq 0$$

Pour minimiser la fonction objective F.O, il faut agir sur la variable de contrôle Cp en la diminuant de la valeur de celle du système passif à la valeur minimale de 10.

2^{ème} Cas:

$$\text{sig} < 0$$

il faut augmenter Cp de la valeur de celle du système passif à la valeur maximale de 4 fois cette dernière.

Dans les deux cas on fait appel à la méthode de Golden pour trouver le Cp minimum qui réduit la fonction objective.

7.3 Cas non linéaire.

Jusqu'à présent on a supposé que l'amortissement est linéaire c'est à dire que l'écoulement entre les deux parois est laminaire, que le fluide circule dans l'amortisseur à petite vitesse et que la force est proportionnelle à la vitesse ($F = C_z \cdot X$).

Alors que physiquement l'amortissement est non linéaire, que l'écoulement est turbulent; ce qui implique que la force devient proportionnelle au carré de la vitesse.

$$F = C_z \cdot \dot{X}^2 \quad \text{ou bien} \quad F = C_z \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}|$$

Dans ce cas, l'amortissement est non visqueux; la valeur de C_z est remplacée par une nouvelle valeur C_{zq} (amortissement équivalent).

Le système d'équations différentielles devient:

$$[M] \{ \ddot{X} \} + [C_{zq}] \{ \dot{X} \} + [K] \{ X \} = \{ Q(t) \}$$

Calcul de C_{eq} .

Considérant l'énergie dissipée dans l'amortisseur en un cycle de vibration.

$$E = \oint f_t dx = \int_0^T f_t \frac{dx}{dt} dt$$

f_t : force d'amortissement .

$$\tau = 2\pi / W$$

- Cas d'un amortissement visqueux.

$$F_t = C_{eq} \dot{X}$$

on suppose un mouvement harmonique $x = X \cdot \cos(\omega t)$

$$E = \int_0^T C_{eq} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

$$E = W^2 \cdot X \cdot C_{eq} \int_0^T \sin(\omega t) dt$$

$$E = \pi \cdot W \cdot C_{eq} \cdot X^2$$

- Cas d'un amortissement non visqueux.

$$F_t = C_2 x^2$$

$$E = \int_0^T C_2 x^2 \frac{dx}{dt} dt$$

$$E = -2 \cdot C_2 \cdot X^3 \cdot W^3 \int_{-\mu/W}^{\mu/W} \sin^3 \omega t dt = -2 \cdot C_2 \cdot X^3 \cdot W^3 \left[\frac{1}{W} \left(-\frac{4}{3} \right) \right]$$

$$E = \frac{8}{3} \cdot W^2 \cdot X^3 \cdot C_2$$

En égalisant les deux énergies on obtient C_{eq} :

$$C_{eq} = \frac{8}{3\pi} \cdot W \cdot X \cdot C_2$$

Le système d'équation différentielle sous la forme matricielle devient.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{eq} & -C_{eq} \\ -C_{eq} & C_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x_0 - C_p (x_1 - x_2) \\ C_p (x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Dans le programme d'optimisation on remplace:

$$\begin{array}{lll} \text{vrel} = \text{vrel} & \text{par} & \text{vrel} = \text{vrel} * \text{abs}(\text{vrel}) \\ \text{force}(n+1) = k_1 x_0 & \text{par} & \text{force}(n+1) = k_1 x_0 - C_p (x_1 - x_2) \\ \text{force}(n+2) = 0 & \text{par} & \text{force}(n+2) = C_p (x_1 - x_2) \end{array}$$

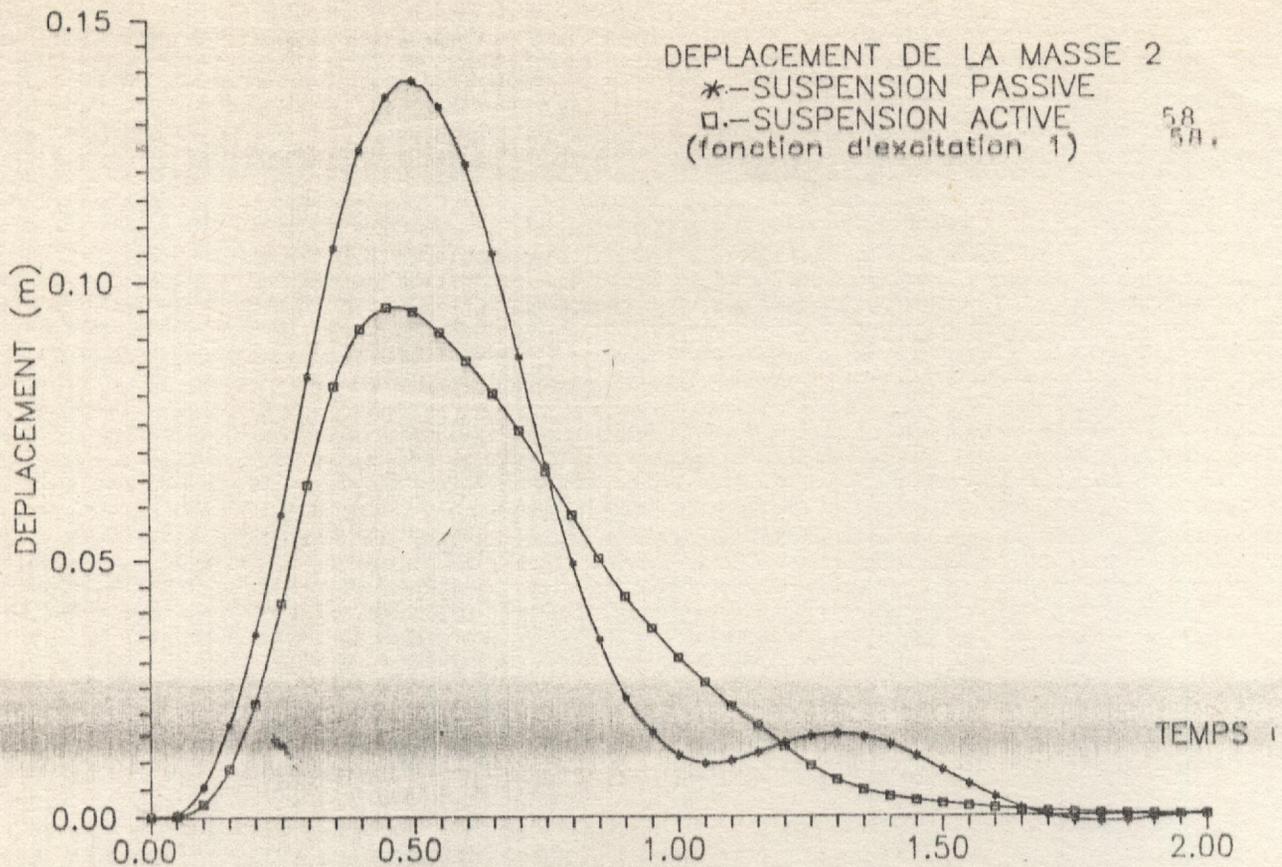


fig 7.1-a

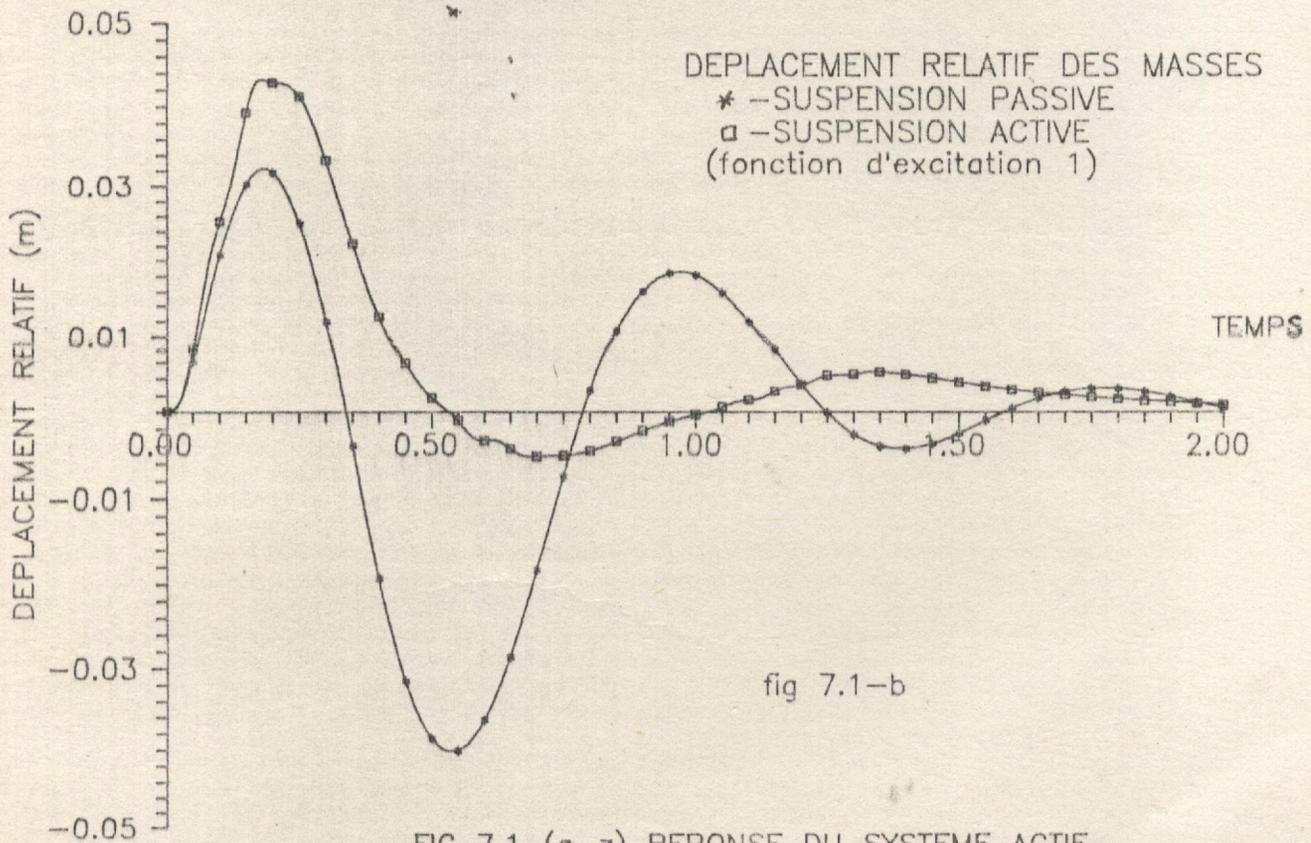


fig 7.1-b

FIG 7.1 (a-z) REPOSE DU SYSTEME ACTIF.

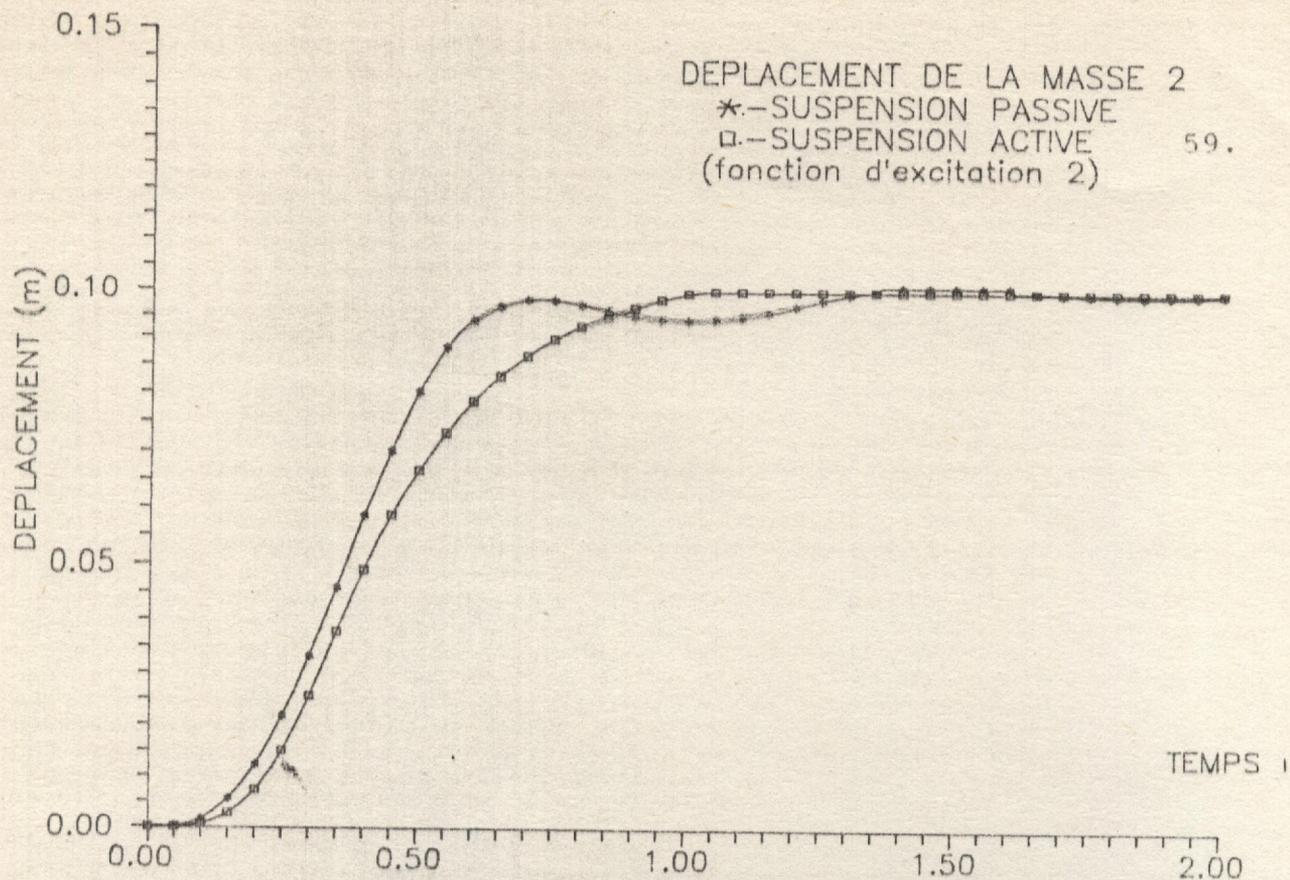


fig 7.1-c

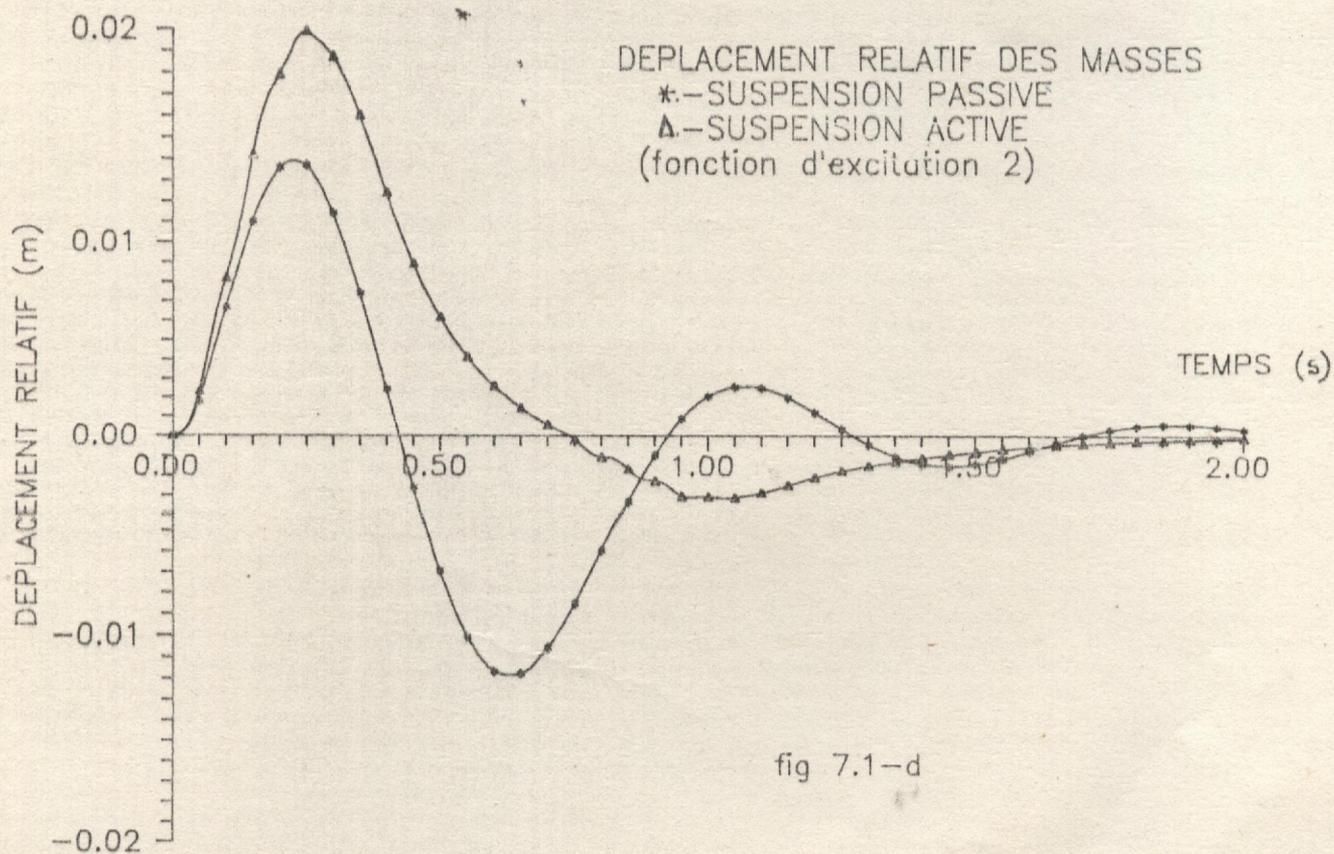


fig 7.1-d

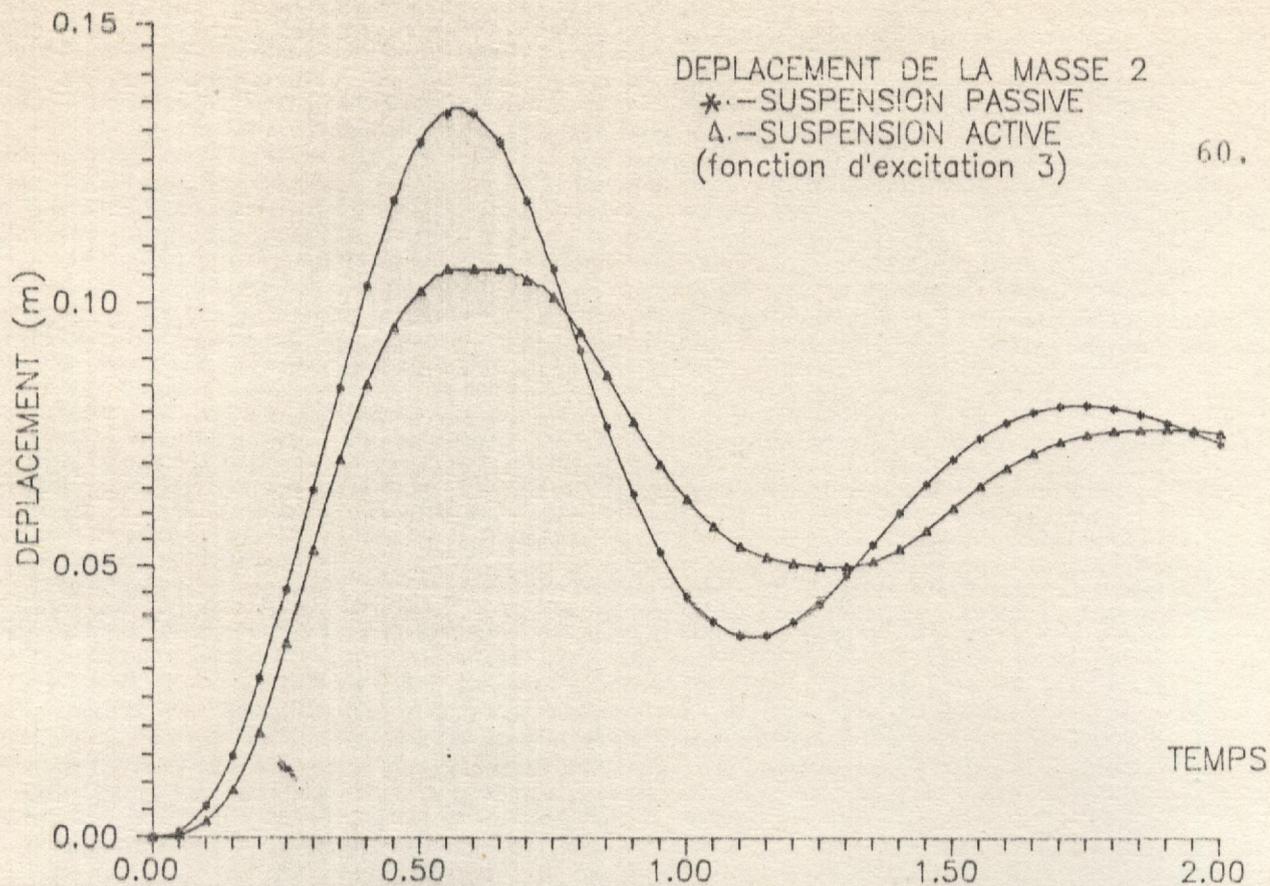


fig 7.1-e

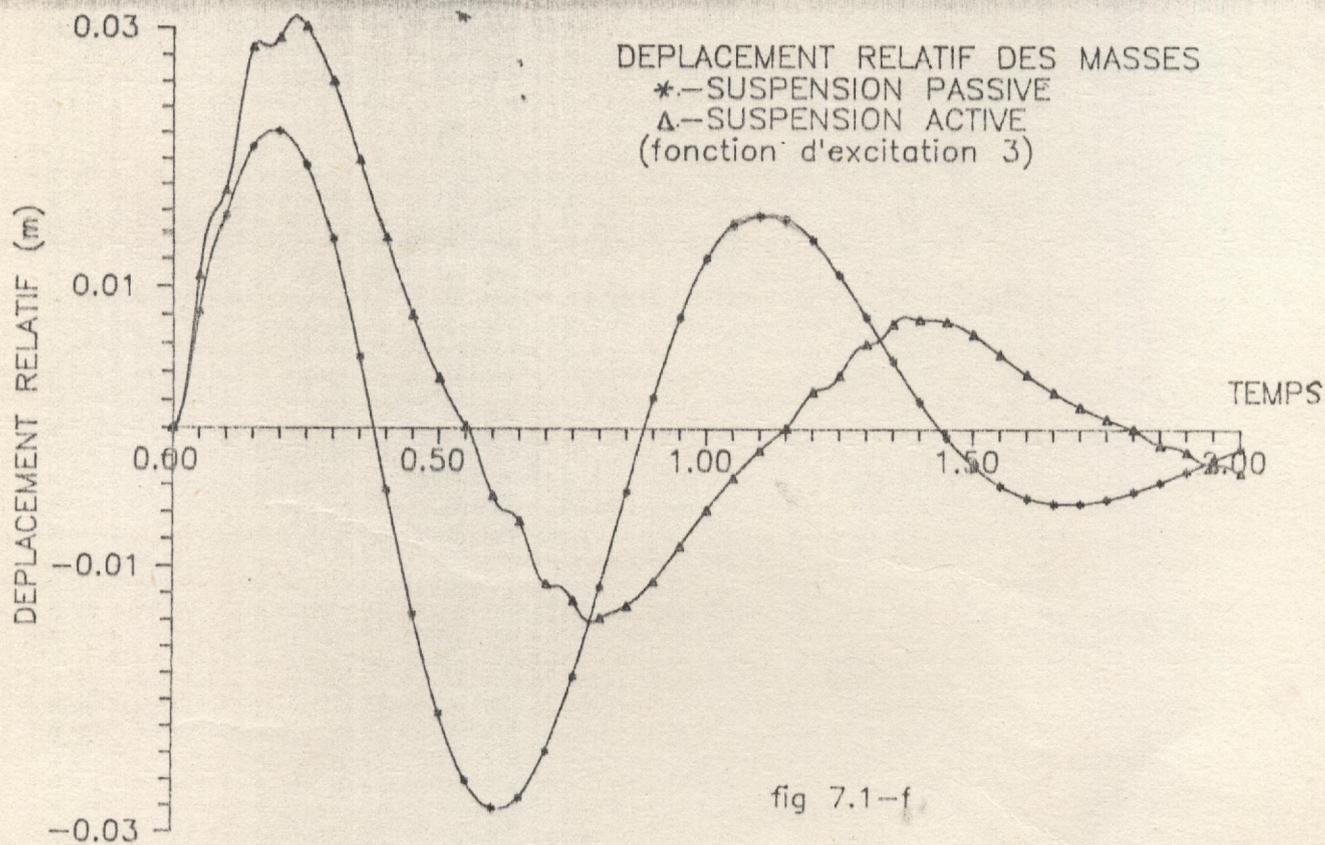
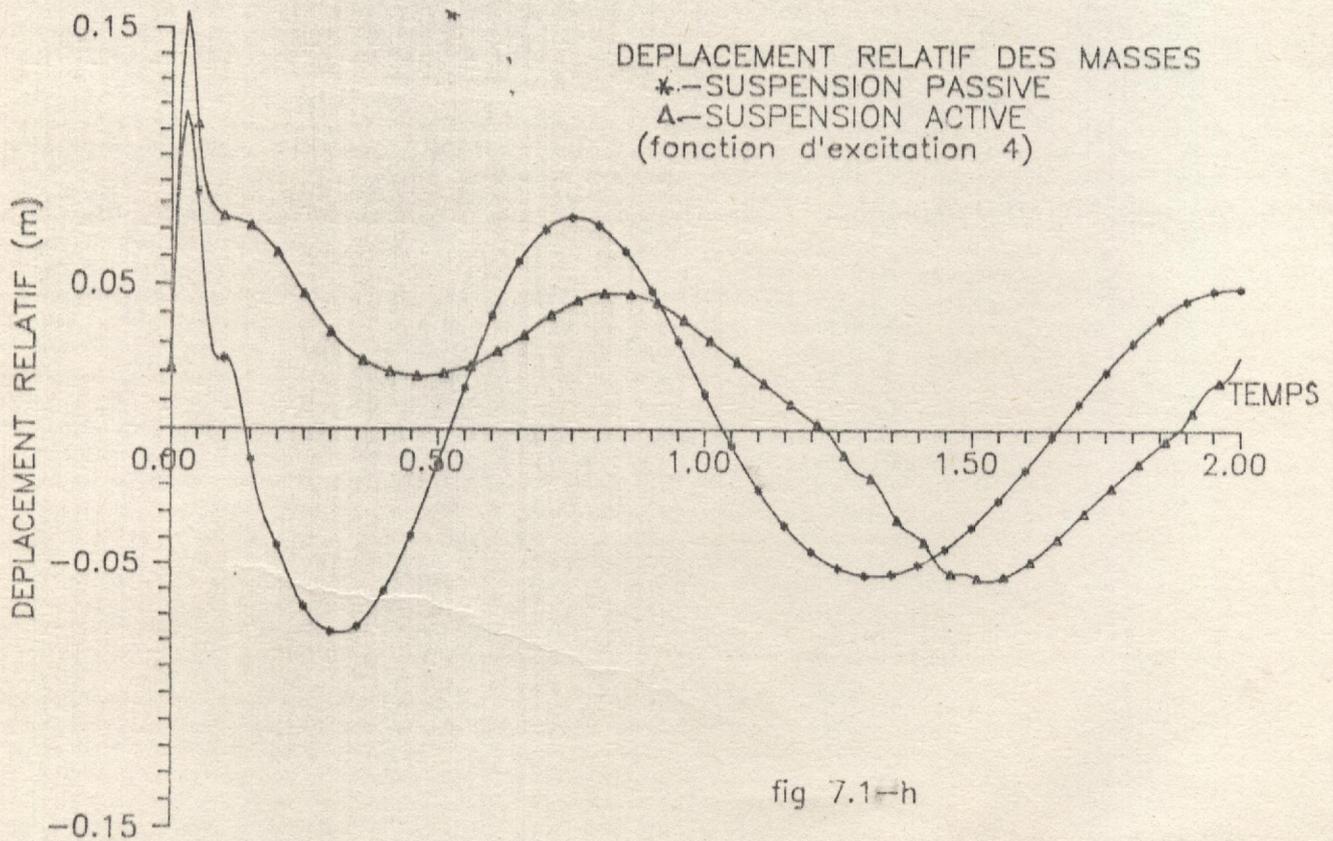
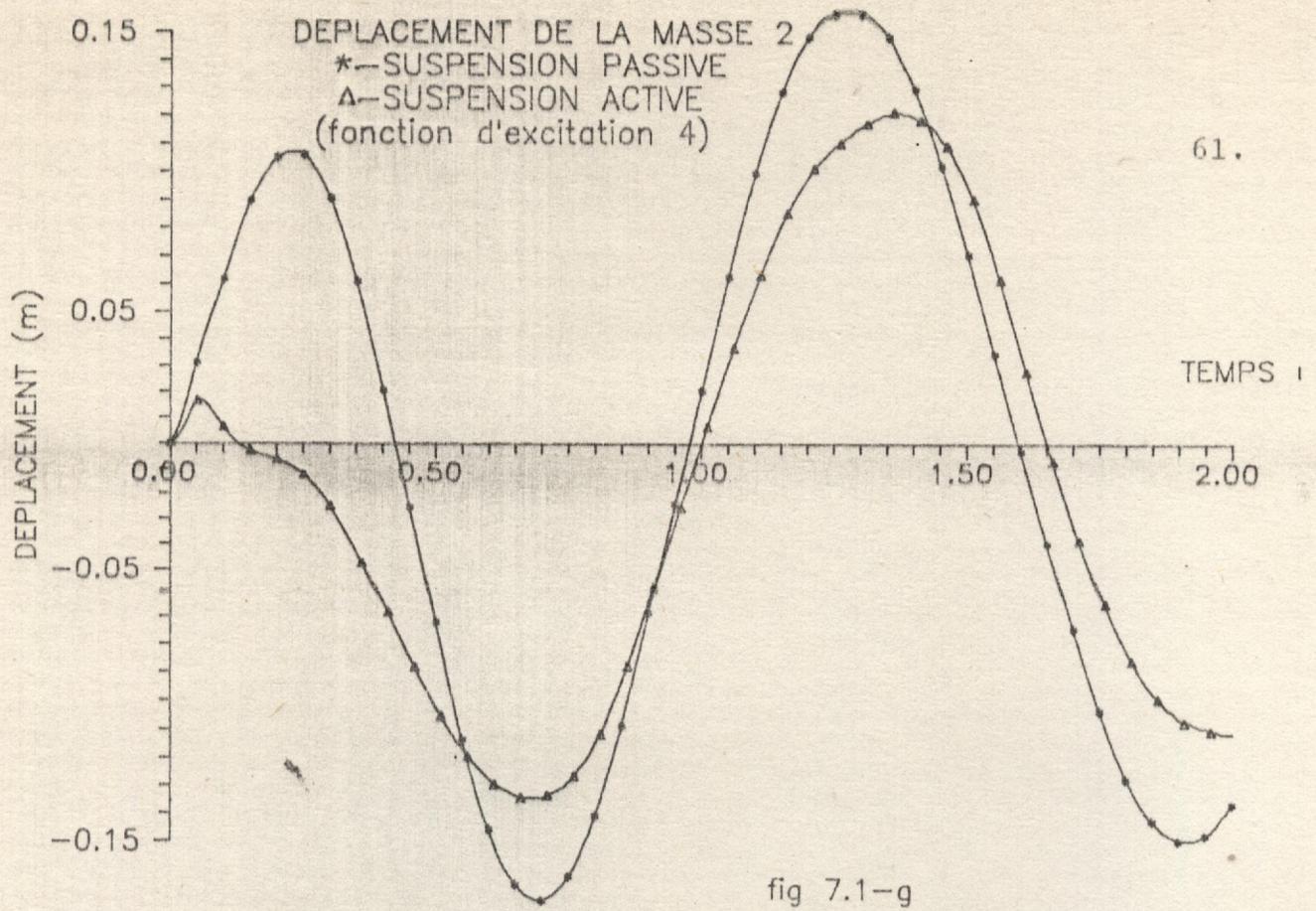


fig 7.1-f



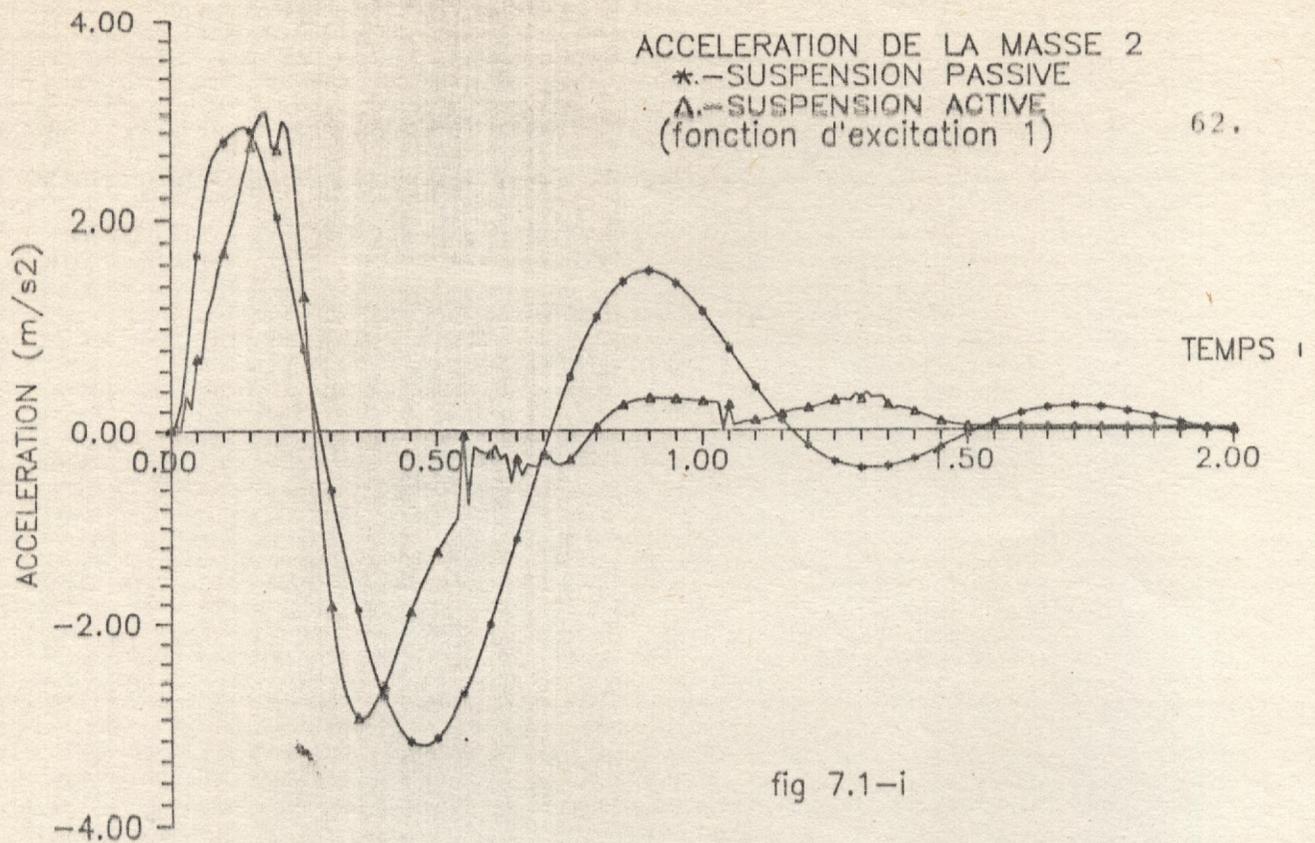


fig 7.1-i

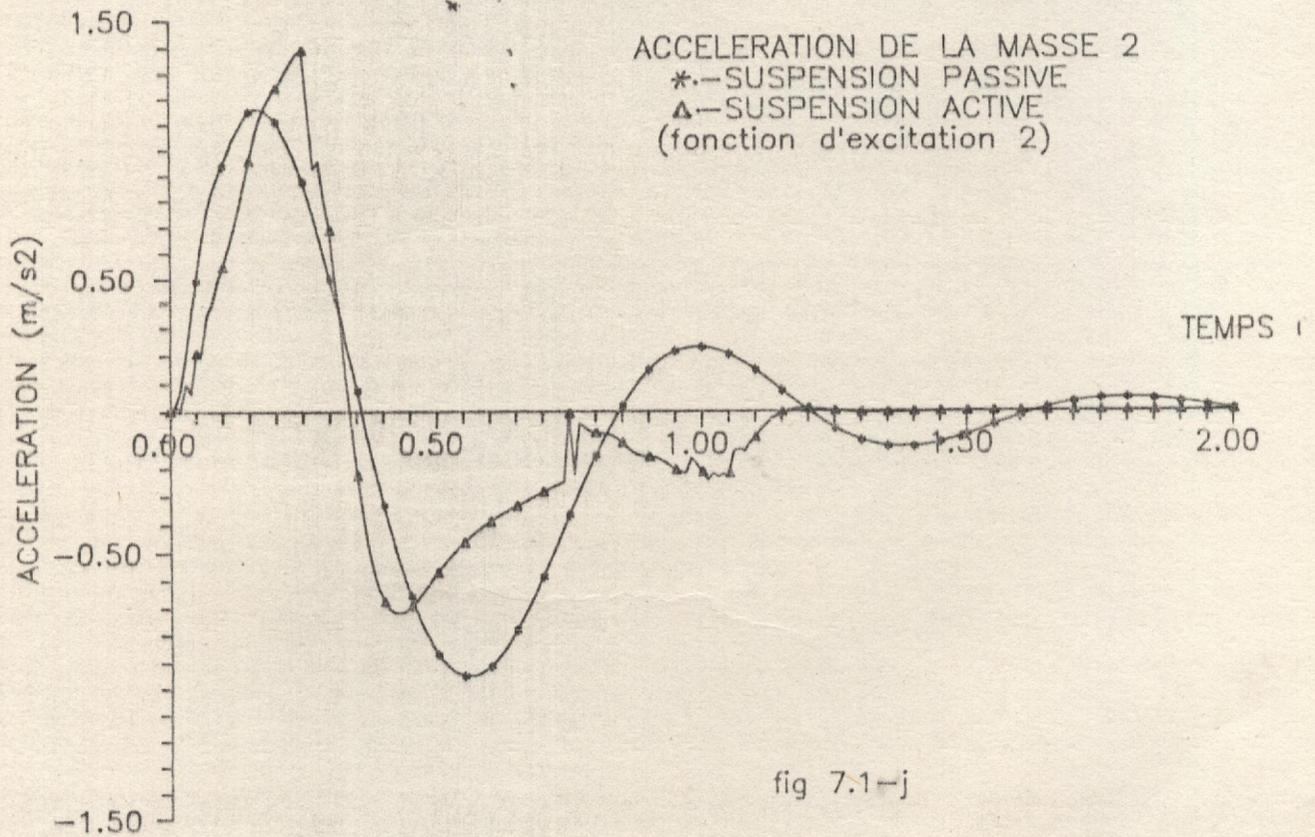


fig 7.1-j

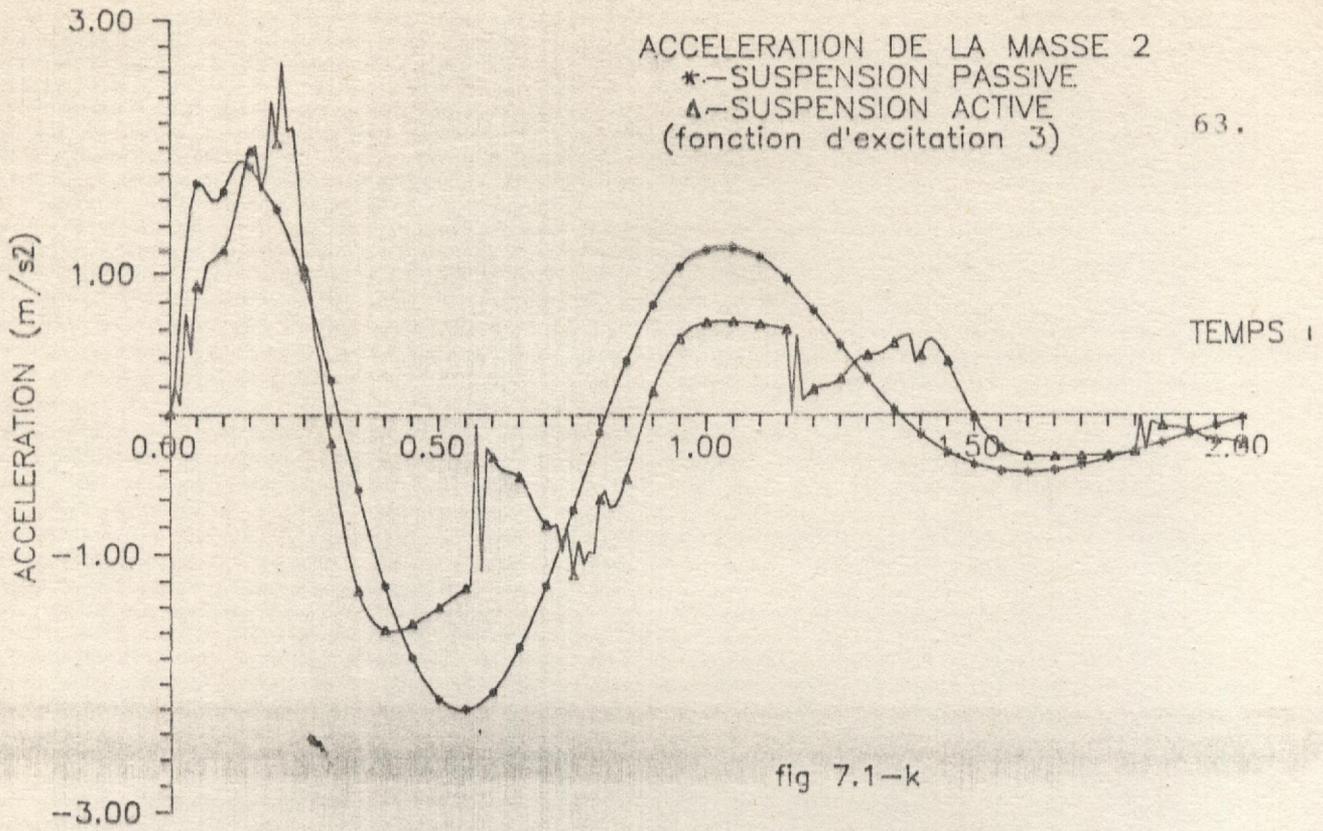


fig 7.1-k

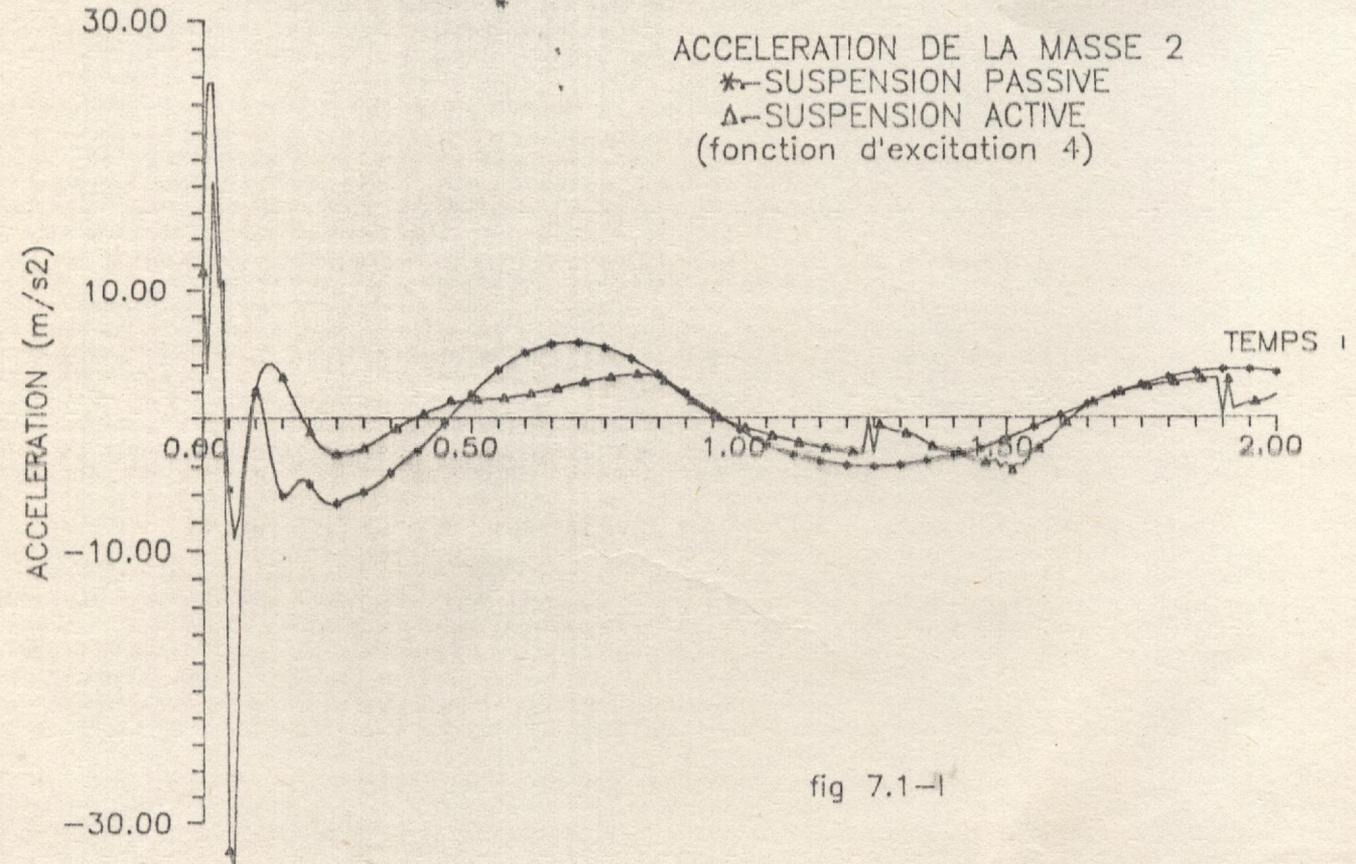
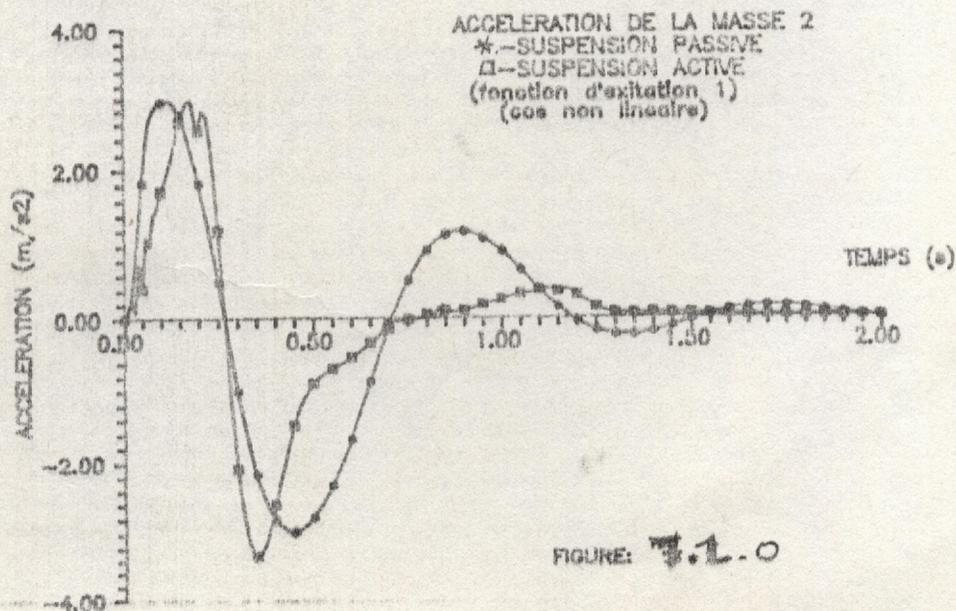
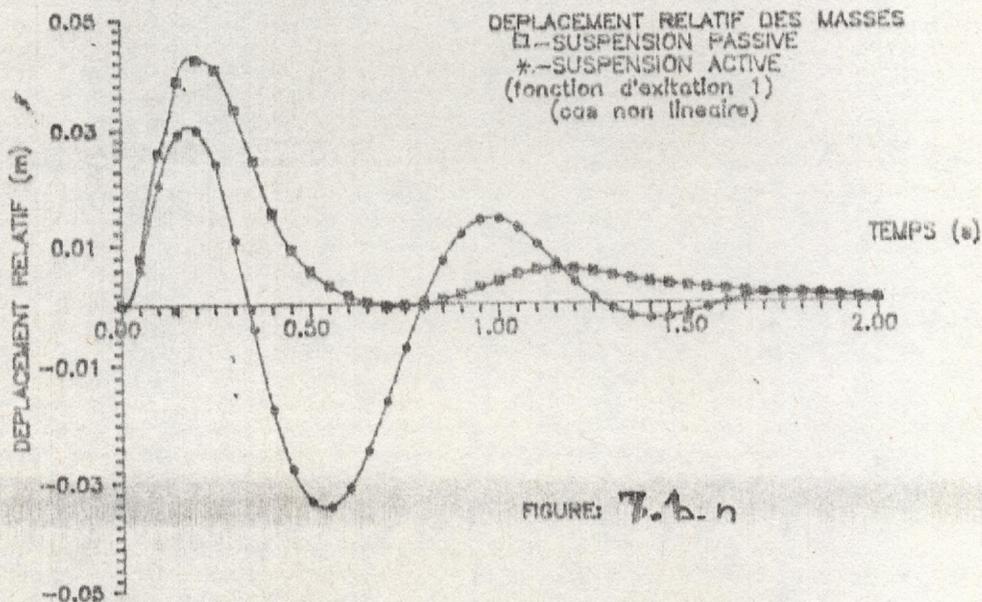
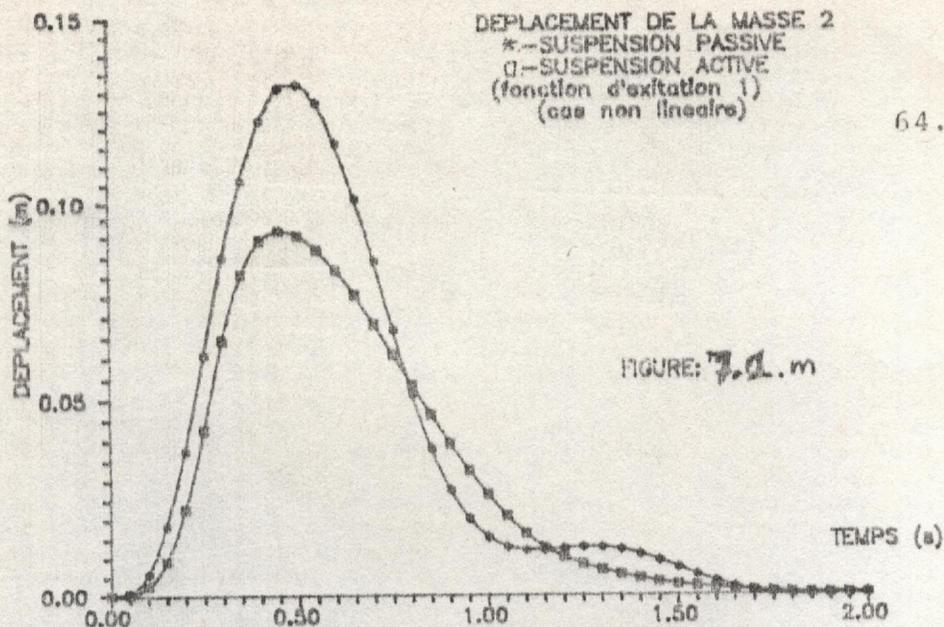
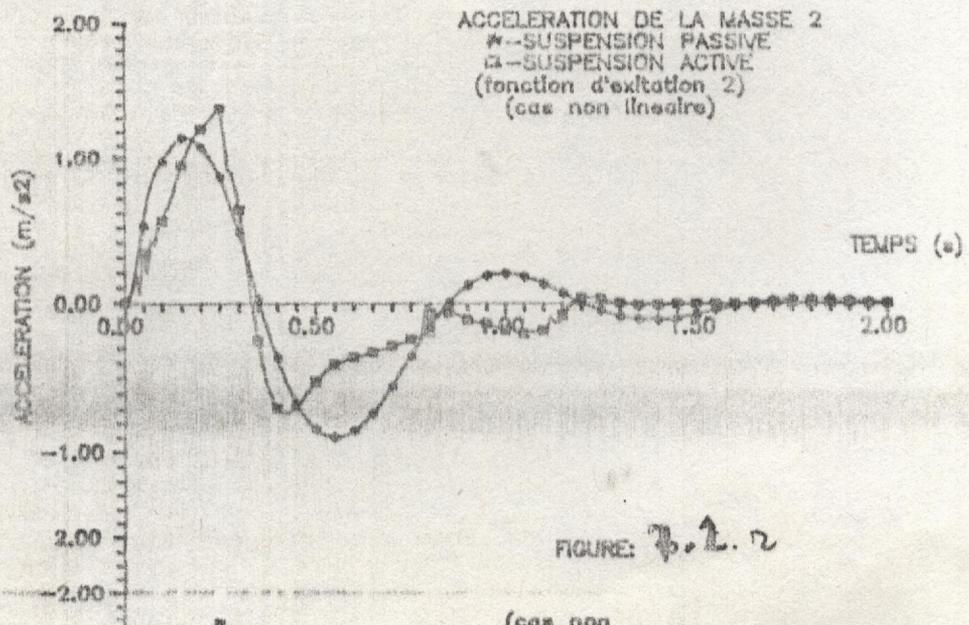
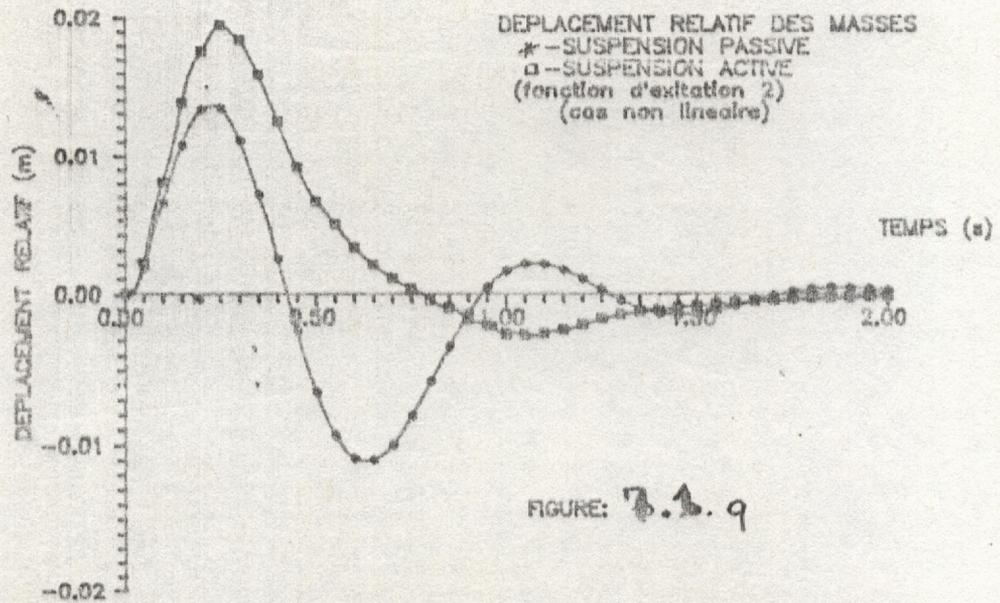
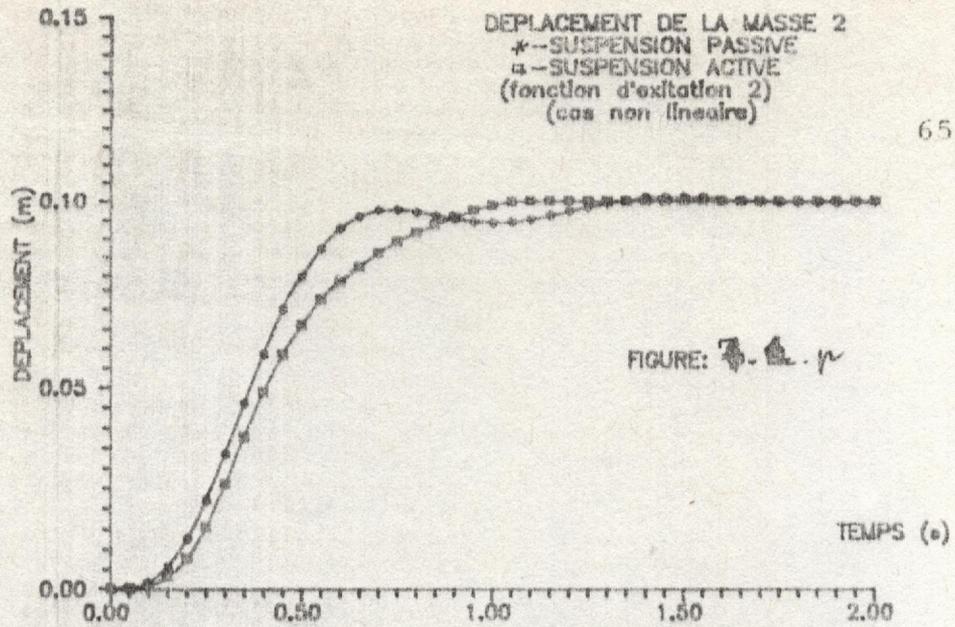
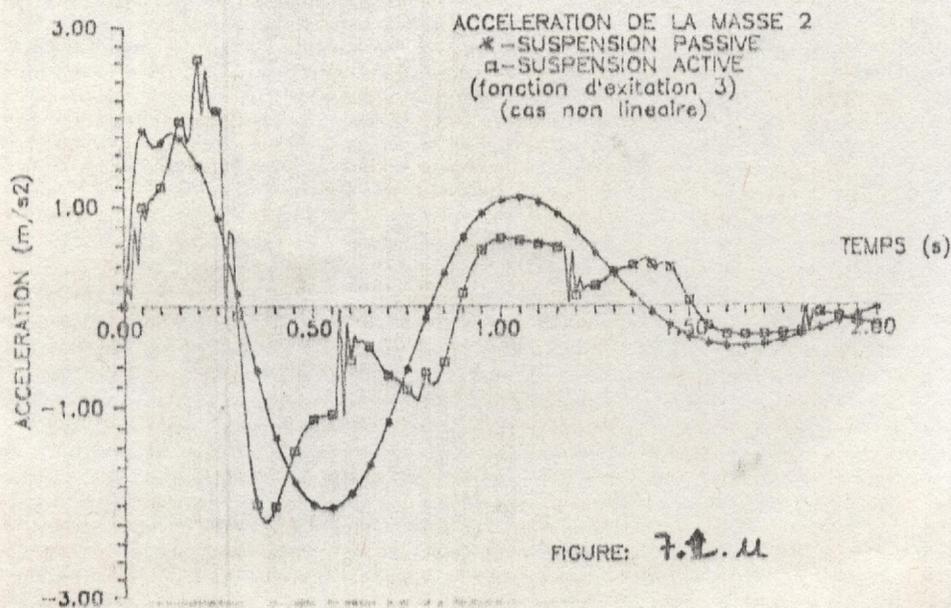
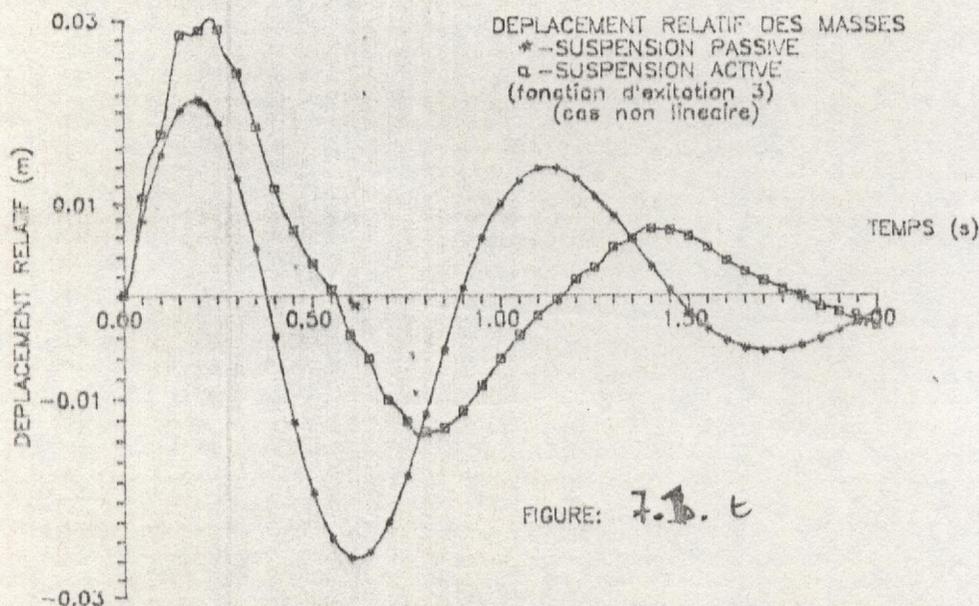
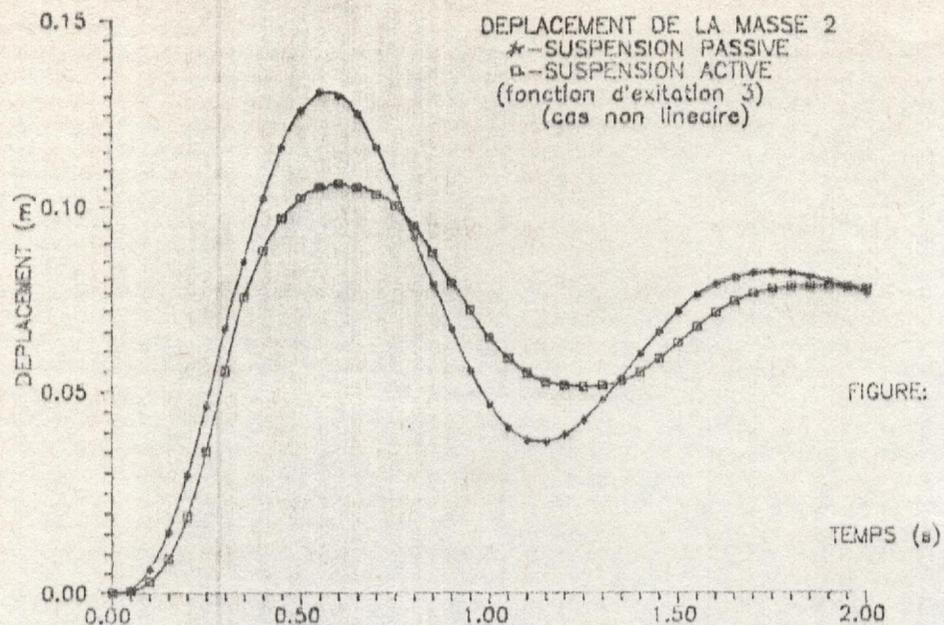


fig 7.1-l







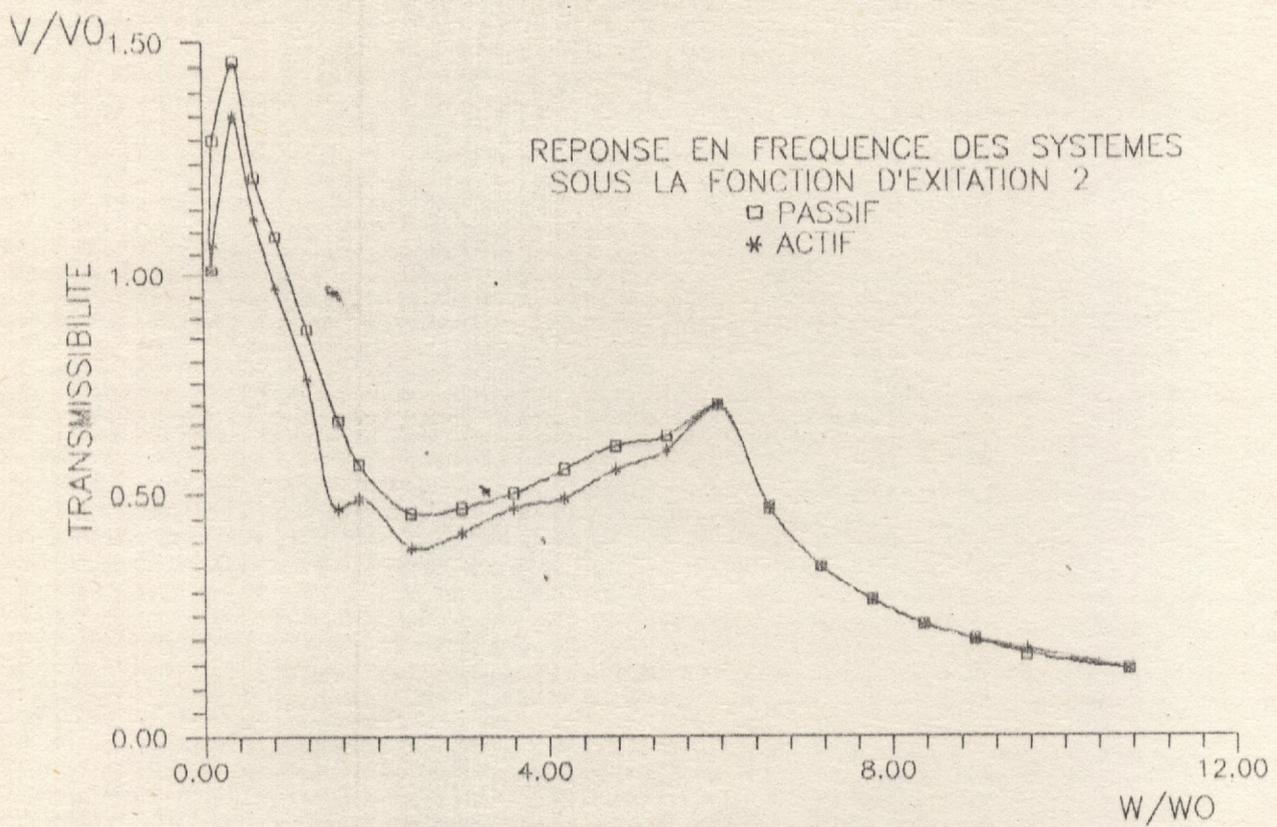


FIG 8.1 REPONSES EN FREQUENCE DU SYSTEME.

8. REMARQUES.

(Aperçu pratique sur la suspension active.)

Les éléments de la suspension conventionnelle sont incontestablement les plus simples, moins chers et principalement sûr pour assurer un certain degré de confort. Cependant comme nous l'avons constaté, le système actif présente une amélioration sensible dans ce domaine.

Le premier facteur essentiel de l'utilisation d'un tel système est son emplacement sur le véhicule. Celui-ci peut être placé seul en éliminant le ressort et amortisseur déjà existant ou en parallèle avec eux.

Le deuxième facteur est la disponibilité du matériel et des composants nécessaires pour sa réalisation pratique.

L'idée générale appliquée dans les systèmes actifs est de faire varier la force d'amortissement sur la base des informations recueillies et traitées préalablement.

Ces informations sur la suspension sont facilement accessibles par la mesure, à l'aide de capteurs de vibration du types très nombreux; mais les plus utilisés sont ceux de position, vitesse et d'accélération.

Les tensions électriques délivrées par ces capteurs sont une image des mouvements vibratoires. Elles sont enregistrées, filtrées puis analysées avec précision à l'aide des méthodes dites de traitement du signal.

A son tour le contrôleur dispose des variables d'entrées sous forme de tensions et fournit un signal de commande proportionnel à la force d'amortissement nécessaire pour conserver la position d'équilibre. Cette force, contrôlée électriquement, est obtenue à travers les dimensions des orifices situées sur une servovalve électro-hydraulique en regard avec un amortisseur d'exécution.

Ainsi le système de contrôle utilisant directement des grandeurs mesurables (vitesse et déplacement) fournit une force d'amortissement en rapport avec le signal de commande.

Pour ce faire, une puissance extérieure embarquée est nécessaire pour le fonctionnement normal du mécanisme d'exécution. Elle représente la principale distinction entre les systèmes passifs et actifs.

La fonction de contrôle la plus adaptable peut être réalisée à l'aide des composants électroniques [14], néanmoins le contrôle mécanique offre une suspension fiable et moins coûteuse qui est déjà en application dans d'autres domaines.

9. Conclusion

On remarque que pour les quatre fonctions d'excitation, les performances de la suspension active sont nettement supérieures à celles du système passif.

Les courbes des déplacements montrent que lorsqu'on utilise la technique d'optimisation Golden, on peut observer une réduction significative du déplacement de la masse amortie (voir tableau en appendice).

Cette réduction est approximativement de l'ordre de:

fonction 1-----27.7 %

fonction 3-----30 %

fonction 4-----22.2 %

Egalement , les résultats sur l'accélération de la même masse pour une durée de deux secondes montrent qu'il y a une réduction générale sur le système actif.

Une meilleure compréhension de la nature de l'amélioration des performances offertes par la suspension active peut être observée également à travers la caractéristique de transmissibilité en fonction du rapport de fréquence.

Cette réponse en fréquence se caractérise par deux pics de résonance. Le premier correspond au battement de la masse amortie et le second à celui de la roue.

Les courbes de la figure 8.1 correspondantes à la fonction d'excitation 2, exhibent un niveau de transmissibilité différent.

En effet on remarque que le système actif a un niveau inférieur au système passif.

Pour un coefficient d'amortissement $\xi = 0.31$, on observe que pour des basses fréquences, les deux systèmes se situent dans la zone d'amplification.

Dans cette intervalle, l'amortissement a pour effet de modérer l'amplification et il est donc utile d'avoir un amortissement élevé afin de réduire les efforts transmis à l'habitacle.

Tandis que pour des fréquences supérieures; ce qui correspond à peu près à la bande de fréquence [0.5 - 10 HZ] qui contient le plus d'énergie d'entrée du sol pour des véhicules traversant une chaussée typique à une vitesse de 150 km/h, le système est atténué.

On peut remarquer à travers les résultats d'optimisation que l'une des solutions pour l'amélioration de la suspension conventionnelle peut être trouvée dans les systèmes actifs qui se révèlent beaucoup plus satisfaisants en raison de la possibilité de réagir automatiquement afin d'obtenir le meilleur comportement possible en présence des aspérités de la route, simulées par les quatre fonctions d'excitation.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIE

1. RAKHEJA, S. AND SAMKAR, S., (1986), " VIBRATION AND SHOCK ISOLATION PERFORMANCE OF A SEMI-ACTIVE ON-OFF DAMPER , AMERICAIN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS.

2. CHALASANI, R.M., (1986), " RIDE PERFORMANCE POTENTIAL OF ACTIVE SUSPENSION SYSTEMS", PART I AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, VOL 80.

3. DOMINY, J. AND BULMAN, D.N , (1985) , " AN ACTIVE SUSPENSION FOR A FORMULA ONE GRAND PRIX RACING, AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, VOL 107, P. 79-7B.

4. KARNOPP, D., (1983), "ACTIVE DAMPING IN ROAD VEHECLE SUSPENSION SYSTEMES VEHICULE SYSTEM DYNAMICS ", VOL 12, P. 201-216.

5. REDFIELD , R.C. AND KARNOPP, D., (1987) " PERFORMANCE SENITIVITY OF ANACTIVELY DAMPED VEHECLE SUSPENSION TO FEEDBACK VARIATION ", JOURNAL OF DYNAMIC SYSTEMS, MEASUREMENT AND CONTROL, VOL 111, P. 54-59.

6. HAC, A., (1984), "SUSPENSION OPTIMISATION OF A 2 DOF VEHECLE MODEL USING A STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL TECHNIQUE ", INSTITUTE OF MECHANICAL ENGINEERING, UNIVERSITY OF WARSAW, POLAND.

7. HEDRICK, J.K., "SOME OPTIMAL CONTROL TECHNIQUES. APPLICABLE TO SUSPENSION SYSTEM DESIGN ". AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, 79-ICT-55.

8. DR. ENG M. , MITSCHKE , (1962), " INFLUENCE OF ROAD AND VEHICLE DIMENSIONS ON THE AMPLITUDE OF BODY MOTIONS AND DYNAMIQUE WHEEL LOADS (THEORITICAL AND EXPERIMENTAL VIBRATION INVESTIGATIONS) ", SAE TRANSACTIONS, VOL 70.
9. THOMPSON, A.G.,(1971) "DESIGN OF ACTIVE SUSPENSION, PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF MECHANICAL ENGINEERING ", AUTOMOBILE DIVISION, P. 36-71.
10. DEAN KARNOPP AND DONALD MARGOLIS,(1984)," ADAPTIVE SUSPENSION CONCEPTS FOR ROAD VEHICLES",VEHICLE SYSTEM DYNAMICS, VOL 13, P. 145-160.
11. DONALD MARGOLIS., (1982),"THE REPOSE OF ACTIVE AND SEMI-ACTIVE SUSPENSIONS TO REALISTIC FEEDBACK SIGNALS ",VEHICLE SYSTEM DYNAMICS,VOL 11, P. 267-282.
12. RUZICKA ,E. JEROME., (1968) " ACTIVE VIBRATION AND SHOCK ISOLATION "SAE TRANSACTIONS, P. 2872-2886.
13. GROSBY, MICHAEL, J. AND DEAN KARNOPP, (1973) "THE ACTIVE DAMPER A NEW CONCEPT FOR SHOCK AND VIBRATION CONTROL", 43 rd SHOCK AND VIBRATION BULLETIN, PART H.
14. C. O. A. S. T (1985) " COMPUTER OPTIMUN ADAPTIC SUSPENSION TECHNOLOGY ",IEEE TRASCTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL IE-32 N°4 .
15. HEDRICK, J. K. AND WOMLEY, D. N., (1975) " ACTIVE SUSPENSION FOR GROUND TRANSPORT VEHICLES ", AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS,VOL 15.

16. DEAN, KARNOPP, (1989) "THEORETICAL LIMITATIONS IN ACTIVE VEHICLE SUSPENSIONS, VEHICLE SYSTEM DYNAMICS, VOL 15, N°1, P. 41-54.
17. HROVAT, D., (1982) "A CLASS OF ACTIVE L.Q.G OPTIMAL ACTUATOR AUTOMATICA", VOL 18, P. 117-119.
18. YUE, C., BUTSNER, T. AND HEDRICK, J.K., (1988) "ALTERNATIVE CONTROL LAWS FOR AUTOMOTIVE ACTIVE SUSPENSION" JOURNAL OF DYNAMIC SYSTEMS, MEASUREMENT AND CONTROL.
19. THOMPSON, A. G., "OPTIMAL AND SUBOPTIMAL LINEAR ACTIVE SUSPENSIONS FOR ROAD VEHICLES", VEHICLE SYSTEM DYNAMICS, VOL 13, P. 61-72.
20. ALLAN, Y. AND MUTASIM A., (1988) "ON THE DESIGN SUSPENSION INCORPORATION HUMAN SENSITIVITY TO VIBRATION", OPTIMAL CONTROL APPLICATIONS AND METHODS, VOL 10, P. 189-195.
21. MAGHRAOUI, M., (1989) "CONTROL OF ROTATING MACHINERY VIBRATIONS USING A MULTI-FREQUENCY SPECTRAL OPTIMIZATION STRATEGY" THESE DE PH. D. CASE WESTERN RESERVE UNIVERSITY, CLEVELAND, OHIO.
22. D^r. OUALI MOHAMED, (1990-1991) "COURS DE MECANIQUE ANALYTIQUE" INES DE MECANIQUE.
- J.C SNOWDON, "VIBRATION AND SHOCK IN DAMPED MECHANICAL SYSTEMS.
- LEONARD MEIROVITCH, "ANALYTICAL METHODS IN VIBRATIONS.
- LEONARD MEIROVITCH, "ELEMENTS OF VIBRATIONS ANALYSIS"

- R. W. CLOUGH, J. PENZIEN "DYNAMIQUE DES STRUCTURES" T. 1
- J. PIERRE . " VEHECULES ROUTIERS "
- G. BUZDUGAN. " LA MESURE DES VIBRATIONS MECANIQUEES "
- FRANCIS. TSE IVAN ,E. MORSE ROLLAND AND T. HINKLE.
" MECHANICAL VIBRATIONS. THEORY AND APPLICATION "

APPENDICE.

A. METHODE DE RUGGE KUTTA.

La solution de l'équation différentielle du 1^{er} ordre est donnée comme suit:

$$\frac{dx}{dt} + C * x = F$$

$$\Delta x = \Delta t * (-C * x + F)$$

ou

C et F sont des constantes.

Pour la condition initiale x_1 , appliquant la méthode de Rugge Kutta au 4^{ème} ordre.

$$K_1 = \Delta t * (-C * x_1 + F)$$

$$K_2 = \Delta t * [-C * (x_1 + K_1/2) + F]$$

$$K_3 = \Delta t * [-C * (x_1 + K_2/2) + F]$$

$$K_4 = \Delta t * [-C * (x_1 + K_3) + F]$$

$$\Delta x = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

La méthode calcule la valeur de x pour chaque Δt .

b. Tableau des valeurs.

Résultats comparatifs entre la suspension passive et active pour différentes fonctions d'excitations.

fonctions	susp.P	susp.A	% de reduction
1	.135	.097	27.7
3	.136	.102	25
4	.175	.136	22.2

C. PROGRAMME DE CONTRÔLE.

```

Character*8 Nom
REAL*8 DT,TIME,TEMPS,X(5),V(5),Xmax,XNU,W0
COMPLEX*16 A(10,10),BDA(10),U(10,10),UINVS(10,10),UT(10,10)
COMMON /SCOM/ N,NT2,VMASS,RMASS,ROUE,RESSORT,AMORT
COMMON /TCOM/ DT,TIME,TEMPS,X,V,NFONC,CONT
COMMON /ZCOM/ A,BDA,U,UT,UINVS
COMMON /OCOM/ C12,C22,C32,SUM,Xmax,XNU,W0

c--- Choix de la fonction d'excitation : de 1 à 4
WRITE(*,*)' Quelle fonction utilisez-vous ? (1-4) > '
READ(*,*)nfonc

c--- Option de contrôle.
WRITE(*,*)' contrôlez-vous le système? 1= non et 2= oui > '
READ(*,*)cont

c--- C1,C2 et C3 sont des coefficients de pondération
c--- C1 est affecté à la force du ressort ( Manoeuvrabilite )
c--- C2 est affecté à la force d'inertie de la masse 2 (Confort)
c--- C3 est affecté à la force de contrôle cp*vrel (limitation)

WRITE(*,*)'coefficient de Pondération pour ressort*(x1-x2)>'
READ(*,*)C1
WRITE(*,*)'coefficient de Pondération pour Vmass*a2 > '
READ(*,*)C2
WRITE(*,*)'coefficient de Pondération pour cp*vrel > '
READ(*,*)C3
WRITE(*,*)'Donner le nom du fichier de sortie > '

C12 = C1**2
C22 = C2**2
C32 = C3**2
SUM = C12 + C22 + C32

```

```

c--- *****
      * OPEN(Unit=1,File=' ',status='new') *
c--- *****

c--- Modèle de suspension " 1/4" à deux degrés de liberté .
      N = 2
      NT2 = N*2

c--- From ref [1]
c--- vibration and shock isolation performance of
c--- a semi-active "on-off" damper.

c--- Paramètres sont choisis pour une durée d'environ 2 secondes
      Xmax = 0.1%
      XNU = 1.
      W0 = 5.

c--- From ref [5]
c--- Performance sensitivity of an actively damped
c--- vehicle suspension to feedback variation
c--- by R.C.Redfield and D.C.Karnopp.

      Vmass = 267.
      Rmass = 36.6
      Roue = 1.84E+5
      Ressort = 1.87E+4
      Amort = 1398.

C---- Conditions initiales.
      DO 1 I = 1 , N
      X(I) = 0.
      V(I) = 0.

1 CONTINUE

c--- Temps d'intégration.
      TIME = 0.
      TEMPS = 2.
      DT = 0.01

```

```

c--- La valeur optimale de la fonction objective est évaluée
c--- d'après les normes [20].
c--- Elle est définie comme suit: ( de même que func )
A20 = 1.77
VRO = .2
DRO = .017
OPTIM = C12*RESSORT*DRO**2+ C22*VMASS*A20**2+C32*CP*VRO**2
OPTIM = Sqrt(OPTIM/SUM)
MAT = 1
TOL = 1.0e-20
CTOL = 1.
CPMAX = 4.* AMORT
CPMIN = 10.
CP = AMORT

c--- Réponse du système non contrôlé.
IF(CONT.EQ.2) GO TO 20
CP = AMORT
CALL MATS(CP)
MAT = 0
10 OF = FUNC(MAT,CP,SIG)
IF(TIME.GT.TEMPS) GO TO 100
GO TO 10

c--- Réponse du système contrôlé ( une seule variable : CP )
c--- Recherche du CP optimum
20 OF = FUNC(MAT,CP,SIG)
25 IF(TIME.GT.TEMPS) GOTO 100
MAT = 0
IF(OF.LE.OPTIM) GOTO 20
IF(ABS(SIG).LE.TOL) GOTO 20

c--- Si SIG > 0 Alors, diminuer CP
IF(SIG.GT.0.) GOTO 30

c--- ***** AUGMENTER CP *****
IF(CP.GE.CPMAX) GOTO 20

```

```
MAT = 1
AX = CP
BX = CPMAX
CX = CPMAX
OFMIN = GOLDEN(AX,BX,CX,CTOL,XMIN,MAT,SIG)
CP = XMIN
GOTO 25
```

```
c--- ***** D I M I N U E R   CP *****
```

```
30 IF(CP.LE.CPMIN) GOTO 20
```

```
MAT = 1
```

```
AX = CPMIN
```

```
BX = CPMIN
```

```
CX = CP
```

```
OFMIN = GOLDEN(AX,BX,CX,CTOL,XMIN,MAT,SIG)
```

```
CP = XMIN
```

```
GOTO 25
```

```
c--- Terminé
```

```
100 CLOSE(1)
```

```
CLOSE(2)
```

```
STOP
```

```
END
```

```
c--- *****
```

```
SUBROUTINE MATS(CP)
```

```
c--- *****
```

```
REAL*8 C(10,10),K(10,10),M(10,10)
```

```
COMPLEX*16 A(10,10),B(10,10),DUM(10,10),BDA(10),
```

```
* U(10,10),UINVS(10,10),UT(10,10)
```

```
COMMON /SCOM/ N,NT2,VMASS,RMASS,ROUE,RESSORT,AMORT
```

```
COMMON /ZCOM/ A,BDA,U,UT,UINVS
```

```
c--- Raideur (N/m)
```

```
K(1,1) = Roue + Ressort
```

```
K(1,2) = - Ressort
```

```
K(2,1) = - Ressort
```

```
K(2,2) = Ressort
```

c--- Amortissement (N.S/m)

C(1,1) = CP

C(1,2) = -CP

C(2,1) = -CP

C(2,2) = CP

c--- Initialisation de A et B

DO 20 I = 1 , NT2

DO 20 J = 1 , NT2

A(I,J) = 0.

B(I,J) = 0.

20 CONTINUE

CALL CMODL (M, C, K, U, N)

DO 44 I = 1 , N

DO 44 J = 1 , N

A(I+N,J) = M(I,J)

A(I,N+J) = M(I,J)

A(I+N,J+N) = C(I,J)

B(I,J) = -M(I,J)

B(I+N,J+N) = K(I,J)

44 CONTINUE

DO 45 I = 1 , NT2

DO 45 J = 1 , NT2

45 UT(I,J) = U(J,I)

CALL CPLY (UT, A, DUM, NT2)

CALL CPLY (DUM, U, A, NT2)

CALL CPLY (UT, B, DUM, NT2)

CALL CPLY (DUM, U, B, NT2)

DO 46 I = 1 , NT2

46 BDA(I) = B(I,I)/A(I,I)

CALL CINVS (U, UINVS, NT2)

RETURN

END

```

c--- *****
      FUNCTION FUNC(MAT,CP,SIG)
c--- *****
      REAL*8  DT, FORCE(10), ZR0, V(5), X(5), DREL, VREL, ACC2, F,
      *      TIME, TEMPS, VKEEP, Xmax, XNU, W0, FDET
      COMPLEX*16 A(10,10), FN(10), BDA(10), U(10,10), UINVS(10,10),
      *      UT(10,10), Y(10), Z(10), Z0(10)
      COMMON /SCOM/ N, NT2, VMASS, RMASS, ROUE, RESSORT, AMORT
      COMMON /TCOM/ DT, TIME, TEMPS, X, V, NFONC, CONT
      COMMON /ZCOM/ A, BDA, U, UT, UINVS
      COMMON /OCOM/ C12, C22, C32, SUM, Xmax, XNU, W0
      IF(MAT.EQ.1) CALL MATS(CP)
      ZR0 = 0.

c--- Intégration
      DO 48 I = 1 , N
      Y(I) = V(I)
      Y(N+I) = X(I)
48  CONTINUE
      VKEEP = V(2)

c--- Fonction d'excitation.
      FDET = F(t)
c--- Cas d'un amortissement linéaire  $F_c = C(v_1 - v_2)$ 
      FORCE(N+1) = FDET
      FORCE(N+2) = 0.

c--- Cas d'un amortissement non linéaire  $F_c = C*(v_1 - v_2)*abs(v_1 - v_2)$ 
c---  $Vrel = v(1) - v(2)$  ( Vitesse relative des 2 masses )
c---  $Vrel = vrel * abs(vrel)$ 
c---  $Force(N+1) = fdet - cp * vrel$ 
c---  $Force(N+2) = cp * vrel$ 

      DO 49 I = 1 , NT2
      Z0(I) = DCMPLX(ZR0, ZR0)

```

```

FN(I) = Z0(I)
DO 50 J = 1 , NT2
Z0(I) = Z0(I) + UINVS(I,J)*Y(J)
FN(I) = FN(I) + UT(I,J)*FORCE(J)
50 CONTINUE
FN(I) = FN(I)/A(I,I)
49 CONTINUE

CALL CRKUT (FN,Z0,BDA,DT,Z,NT2)
c--- Réponse transitoire dans les coordonnées d'origine.

DO 51 I = 1 , NT2
51 Z0(I) = Z(I)
DO 52 I = 1 , NT2
Y(I) = DCMLX(ZR0,ZR0)
DO 52 J=1,NT2
Y(I) = Y(I) + U(I,J)*Z0(J)
52 CONTINUE
DO 53 I = 1 , N *
V(I) = Y(I)
X(I) = Y(N+I)
53 CONTINUE
c--- Fin de l'intégration.

c--- Calcul de l'indice de performance FUNC .
c--- Drel = déplacement relatif (x1-x2)
c--- Vrel = vitesse relative (v1-v2)
c--- Acc2 = accélération de la masse 2 (chassis)

DREL = X(1) - X(2)
VREL = V(1) - V(2)
ACC2 = V(2) - VKEEP
ACC2 = ACC2 / DT
SIG = DREL * VR
FK = RESSORT * DREL
FD = CP * VREL
FI = VMASS * ACC2

```

```

c--- Func est définie comme suit:
      FUNC = C12 * FK**2 + C22 * FI**2 + C32 * FD**2
      FUNC = SQRT(FUNC/SUM)
      Write(*,5)TIME,FUNC,CP
5      Format(2x,'Temps = ',f7.3,' sec.   FUNC = ',G12.3,
*      CP = ',G12.3)
c--- Sortie.
      IF(CONT.EQ.1)WRITE(1,90)TIME,FDET,DREL,ACC2,FUNC,FD
      IF(CONT.EQ.2)WRITE(1,95)TIME,DREL,ACC2,FUNC,FD,CP
c--- IF(CONT.EQ.1)WRITE(1,90)TIME,X(1),X(2),DREL,ACC2,V(2)
c--- IF(CONT.EQ.2)WRITE(1,95)TIME,X(1),X(2),DREL,ACC2,V(2)
90     FORMAT (f6.3,5(G12.3))
95     FORMAT (f6.3,5(G12.3))
      TIME = TIME + DT
      RETURN
      END
c--- From ref [1]
c--- *****
      FUNCTION F(t)
c--- *****
      REAL*8 F,Xmax,XNU,W0,W0T,WNT,X0,DT,TIME,TEMPS,
*      X(5),V(5),e
      COMMON /SCOM/ N,NT2,VMASS,RMASS,ROUE,RESSORT,AMORT
      COMMON /TCOM/ DT,TIME,TEMPS,X,V,NFONC,CONT
      COMMON /OCOM/ C12,C22,C32,SUM,Xmax,XNU,W0
      t = 0.
      e = 2.71828
      W0T = W0 * TIME
      WNT = XNU * W0T
      GOTO (1,2,3,4,5) NFONC
c--- Rounded Pulse Displacement.
1      X0 = Xmax * ((e**2) / 4) * WNT**2 * EXP(-WNT)
      GOTO 10

```

c--- Rounded Step Displacement.

```
2 X0 = Xmax * (1 - (1 + WNT) * EXP(-WNT))
   GOTO 10
```

c--- Oscillatory Step Displacement.

```
3 X0 = Xmax*.68684*(1-(COS(WNT)-(SIN(WNT))/4.)*EXP(-WNT/4.))
   GOTO 10
```

C--- Harmonic Displacement.

```
4 X0 = Xmax * COS(WNT)
   GOTO 10
```

10 CONTINUE

c--- D'après la ref (2), Roue est la raideur du pneu.

F = ROUE * X0

RETURN

END

C--- *****

FUNCTION GOLDEN(AX,BX,CX,CTOL,XMIN,MAT,SIG)

C--- *****

PARAMETER (R=.61803399,C=.38196602)

REAL*8 DT,TIME,TEMPS,X(5),V(5),Xmax,XNU,W0

COMPLEX*16 A(10,10),BDA(10),U(10,10),UINVS(10,10),UT(10,10)

COMMON /TCOM/ DT,TIME,TEMPS,X,V,NFONC,CONT

COMMON /SCOM/ N,NT2,VMASS,RMASS,ROUE,RESSORT,AMORT

COMMON /ZCOM/ A,BDA,U,UT,UINVS

COMMON /OCOM/ C12,C22,C32,SUM,Xmax,XNU,W0

X0=AX

X3=CX

IF(ABS(CX-BX).GT.ABS(BX-AX))THEN

X1=BX

X2=BX+C*(CX-BX)

ELSE

X2=BX

X1=BX-C*(BX-AX)

ENDIF

```
F1=FUNC(MAT,X1,SIG)
F2=FUNC(MAT,X2,SIG)
1 IF(ABS(X3-X0).GT.CTOL*(ABS(X1)+ABS(X2)))THEN
IF(TIME.GT.TEMPS) RETURN
IF(F2.LT.F1)THEN
X0=X1
X1=X2
X2=R*X1+C*X3
F0=F1
F1=F2
F2=FUNC(MAT,X2,SIG)
ELSE
X3=X2
X2=X1
X1=R*X2+C*X0
F3=F2
F2=F1
F1=FUNC(MAT,X1,SIG)
ENDIF
GOTO 1
ENDIF
IF(F1.LT.F2) THEN
GOLDEN=F1
XMIN=X1
ELSE
GOLDEN=F2
XMIN=X2
ENDIF
RETURN.
END
```

```

C *****
C * CALCUL DE LA MATRICE MODALE D'UN SYSTEME POSITIF DEFINI*
C * AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX. *
C * SUBROUTINES UTILISEES: *
C * (1) $COEFF (2) $CHOMO (3) $CROOT *
C * (4) $CINVS (5) $CMPLY (6) $CSUBN *
C * (7) $INVS (8) $MPLY (9) $SUBN *
C *****
SUBROUTINE CMODL (M, C, K, U, N)
REAL*8 C(10,10), H(10,10), H1(10,10), H2(10,10),
*K(10,10), M(10,10), MINVS(10,10), UNIT(10,10), ZERO(10,10)
COMPLEX*16 DUM(10,10), ROOT(2,5), U(10,10), X(10)
DATA UNIT, ZERO/200*0.0/
NT2 = N*2
DO 40 I=1,N
40 UNIT(I,I) = 1.
CALL INVS (M,MINVS,N)
CALL MPLY (MINVS,C,H1,N)
CALL MPLY (MINVS,K,H2,N)
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
H(I,J) = -H1(I,J)
H(I,N+J) = -H2(I,J)
H(N+I,J) = UNIT(I,J)
41 H(N+I,N+J) = ZERO(I,J)
CALL CROOT(H,ROOT,NT2)
DO 42 JJ=1,N
DO 42 II=1,2
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 DUM(I,J) = M(I,J)*ROOT(II,JJ)**2 + C(I,J)*ROOT(II,JJ)+K(I,J)
CALL CHOMO (DUM, X, N)
JI=2*(JJ-1) + II
DO 42 L=1,N

```

```

U(N+L,JI) = X(L)
42 U(L,JI)= U(N+L,JI)*ROOT(II,JJ)
RETURN
END
C *****
C * INVERSION DE LA MATRICE REELLE.CHERCHE L'INVERSE (HINVS)*
C * DE LA MATRICE H. *
C * SUBROTINES UTILISEES: (1) $SUBN (2) $MPLY *
C *****

SUBROUTINE INVS (H, HINVS, N)
REAL*8 H(10,10), HINVS(10,10), A(10,10), B(10,10), SUM
CALL SUBN (H, A, N)
NM1 = N - 1
DO 40 I =1,NM1
SUM =0
DO 41 K =1,N
41 SUM = SUM + A(K,K)
SUM = SUM/I
DO 42 J=1,N
42 A(J,J) = A(J,J) - SUM
IF (I.EQ.NM1) CALL SUBN (A, HINVS, N)
CALL MPLY (H, A, B, N)
40 CALL SUBN (B, A, N)
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
43 HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
RETURN
END
C *****
C * MATRICE REELLE DE SUBSTITUTION : A = B *
C *****

SUBROUTINE SUBN (A, B, N)
REAL*8 A(10,10), B(10,10)
DO 40 I=1,N

```

```

DO 40 J=1,N
40 B(I,J) = A(I,J)
RETURN
END

```

```

C *****
C * MATRICE COMPLEXE DE MULTIPLICATION :CALCUL C = A*B *
C *****
SUBROUTINE MPLY (A, B, C, N)
REAL*8 A(10,10), B(10,10), C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N
40 C(I,J) = C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

```

```

C *****
C RECHERCHE LA RACINE COMPLEXE DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE*
C * D'UN SYSTEME POSITIF DEFINI AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX.*
C * RACINES DISTINCTES. *
C * SUBROUTINES UTILISEES: (1) $COEFF (2) $MPLY (3) $SUBN *
C *****
SUBROUTINE CROOT (H, ROOT, N)
REAL*8 A(2,5), A1, A2, B(12), C(12), DA1, DA2, DBDA1(12)
*, DBDA2(12), DET,ERREUR, H(10,10), P, Q, Z
PARAMETER (ERREUR=1d-16,NITER=400)
COMPLEX*16 ROOT(2,5)
DATA B, DBDA1, DBDA2, Z/ 36*0.0, 0.0/
B(2) = 1
CALL COEFF (H, C, N)
I = N + 2
10 L = I/2 - 1
A1 = 0
A2 = 0

```

```

DO 40 IT=1,NITER
DO 41 J=3,I
B(J) = C(J) - A1*B(J-1) - A2*B(J-2)
DBDA1(J) = -A1*DBDA1(J-1) - A2*DBDA1(J-2) - B(J-1)
41 DBDA2(J) = -A1*DBDA2(J-1) - A2*DBDA2(J-2) - B(J-2)
DET = DBDA1(I-1)*DBDA2(I) - DBDA1(I)*DBDA2(I-1)
DA1 = (-B(I-1)*DBDA2(I) + B(I)*DBDA2(I-1))/DET
DA2 = (+B(I-1)*DBDA1(I) - B(I)*DBDA1(I-1))/DET
A1 = A1 + DA1
A2 = A2 + DA2
IF ((DABS(DA1)-ERREUR).GE.0) GOTO 40
IF ((DABS(DA2)-ERREUR).GE.0) GOTO 40
DO 42 I1=4,I
42 C(I1-2) = B(I1-2)
A(1,L) = A1
A(2,L) = A2
IF (I.EQ. 4) GOTO 11
I = I-2
GOTO 10
40 CONTINUE
11 ND2 = N/2
DO 43 J=1,ND2
P = A(1,J)**2 - 4*A(2,J)
Q = DSQRT(DABS(P))
IF (P.GE.0) GOTO 12
ROOT(1,J) = DCMLX(-A(1,J), Q)
ROOT(2,J) = DCMLX(-A(1,J), -Q)
GOTO 13
12 ROOT(1,J) = DCMLX(-A(1,J)-Q,Z)
ROOT(2,J) = DCMLX(-A(1,J)+Q,Z)
13 ROOT(1,J) = ROOT(1,J)/(2*A(2,J))
43 ROOT(2,J) = ROOT(2,J)/(2*A(2,J))
RETURN
END

```

```
C *****
C * RECHERCHE LES COEFICIENTS DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE *
C * SUBROTINES UTILISEES: (1) $SUBN (2) $MPLY *
C *****
```

```
SUBROUTINE COEFF (H, C, N)
REAL*8 A(10,10), B(10,10), C(12), H(10,10), SUM
CALL SUBN (H, A, N)
```

```
NP2 = N + 2
C(1) = 0
C(NP2) = 1
```

```
DO 40 I = 1, N
SUM = 0
DO 41 K = 1, N
```

```
41 SUM = SUM + A(K,K)
C(NP2-I) = -SUM/I
DO 42 J = 1, N
```

```
42 A(J,J) = A(J,J) + C(NP2-I)
CALL MPLY (H, A, B, N)
40 CALL SUBN (B, A, N)
```

```
DO 43 I = 2, NP2
43 C(N+4-I) = C(N+4-I)/C(2)
RETURN
```

```
END
```

```
C *****
C * MATRICE COMPLEXE DE SUBSTITUTION : B = A *
C *****
```

```
SUBROUTINE CSUBN (A, B, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10)
```

```
DO 40 I = 1, N
DO 40 J = 1, N
```

```
40 B(I,J) = A(I,J)
RETURN
```

```
END
```

```

C *****
C * SOLUTIONS DES EQUATIONS ALGEBRIQUES COMPLEXES ET *
C * HOMOGENES. *
C * SUBROUTINES UTILISEES:(1) $CINVS (2) $CMPLY (3) $CSUBN *
C *****

```

```

SUBROUTINE CHOMO (A, X, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10), BINVS(10,10), X(10), Y(10)
REAL*8 U, Z
DATA U, Z /1.0, 0.0/
X(N) = DCMLPX(U, Z)
NMI = N - 1
DO 40 I=1,NMI
Y(I) = -A(I,N)
DO 40 J=1,NMI
40 B(I,J) = A(I,J)
IF (NMI.EQ. 1) BINVS(1,1) = 1./B(1,1)
IF(NMI.EQ.1) GOTO 10
CALL CINVS (B, BINVS, NMI)
10 DO 41 I=1,NMI
X(I) = DCMLPX(Z, Z)
DO 41 J=1,NMI
41 X(I) = X(I) + BINVS(I,J)*Y(J)
RETURN
END

```

```

C *****
C * MATRICE COMPLEXE DE MUTIPLICATION: CALCUL C = A*B *
C *****
SUBROUTINE CMPLY (A, B, C, N)
COMPLEX*16 A(10,10), B(10,10), C(10,10)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
C(I,J) = 0
DO 40 K=1,N

```

```

40  C(I,J) = C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
    RETURN
    END

```

```

C *****
C *SOLUTION COMPLEXE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DU 1 ORDRE*
C *
C *           METHODE : RUNGE KUTTA.           *
C * LA SUBROUTINE CALCULE LA VARIABLE Z POUR CHAQUE DT/4 *
C *****

```

```

SUBROUTINE CRKUT (F, Z1, C, DT, Z, N)

```

```

REAL*8 A, DT

```

```

COMPLEX*16 K1, K2, K3, K4, C(10), F(10), Z(10), Z1(10)

```

```

A = DT/4.

```

```

DO 40 I=1,N

```

```

DO 41 J=1,N

```

```

K1 = A*(-C(I)*Z1(I) + F(I))

```

```

K2 = A*(-C(I)*(Z1(I)+K1/2.) + F(I))

```

```

K3 = A*(-C(I)*(Z1(I)+K2/2.) + F(I))

```

```

K4 = A*(-C(I)*(Z1(I)+K3) + F(I))

```

```

41  Z1(I) = Z1(I) + (K1 + 2.*K2 + 2.*K3 + K4)/6.

```

```

40  Z(I) = Z1(I)

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

C *****
C * INVERSION DE LA MATRICE COMPLEXE. CHERCHE L'INVERSE *
C * (HINVS) DE H.SUBROUTINES UTILISEES: (1) CPLY (2) CSUBN *
C *****

```

```

SUBROUTINE CINVS (H, HINVS, N)

```

```

COMPLEX*16 H(10,10), HINVS(10,10), A(10,10), B(10,10), SUM

```

```

CALL CSUBN (H, A, N)

```

```

NM1 = N - 1

```

```

DO 40 I=1,NM1

```

```

SUM = 0

```

```

DO 41 K=1,N

```

```
41  SUM = SUM + A(K,K)
    SUM = SUM/I
    DO 42 J=1,N
42  A(J,J) = A(J,J) - SUM
    IF(I.EQ.NM1) CALL CSUBN (A, HINVS, N)
    CALL CPLY (H, A, B, N)
40  CALL CSUBN (B, A, N)
    DO 43 I=1,N
    DO 43 J=1,N
43  HINVS(I,J) = HINVS(I,J)/A(1,1)
    RETURN
    END
```