الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saâd Dahlab de Blida 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du Diplôme de

MASTER

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Analyse Mathématique et Applications**

Thème

Étude de quelques équations intégro-différentielles abstraites par l'approche des semi-groupes analytiques

---

Présenté par :

BENKARA NAZIHA

Soutenu le 14 juillet 2022 devant **le Jury composé de** :

M. Benbachir Maamar	**Professeur, USD-BLIDA1**	**Président**
M. Chaouchi Belkacem	**MCA, Université de Khemis Miliana**	**Examinateur**
Mme Boutaous Fatiha	**MCA, USD-BLIDA1**	**Promotrice**

Année universitaire : 2021/2022

REMERCIEMENTS

Jaimerai en premier lieu remercier mon Dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord ma promotrice M^{me} **Fatiha Boutaous**, qui m'a proposé le thème de ce Mémoire et m'a guidé tout au long de la réalisation de ce travail. Ses critiques et ses conseils m'ont été trés précieux.

Je tiens aussi à remercier Messieurs les membres de Jury : **M. Maamar Benbachir** et **M. Belkacem Chaouchi** qui m'ont fait un grand honneur, en acceptant d'examiner ce travail.

Finalement, j'exprime mes sincères gratitudes à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce Mémoire.

DEDICACE

Ce travail est particulièrement dédié à :

Mes chèrs parents Difallah et Yamina, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.

Mes chères soeurs Rania, rifka, Fella,et Mon frére aboubakeur el wakaL pour leurs encouragements et leur soutien moral.

Tous les enfants de ma famille.

Tous les gens qui m'aiment.

★Naziha★

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites considérées dans un espace de Banach.
Il existe plusieurs méthodes d'étude de ce type d'équations, parmi lesquelles, on s'intéresse dans ce Mémoire à celle basée sur la théorie des semi-groupes analytiques et les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires. On montre des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de ces équations intégro-différentielles .

Mots clés : Équation intégro-différentielle abstraite, semi-groupe analytique, solution classique, solution locale, solution globale.

Abstract

In this work, we are interested in the study of a class of abstract integro-differential equations considered in a Banach space. There are several methods of studying this type of equations. Among which, we are interested in that based on the theory of analytic semigroups and the fractional powers of linear operators and we show results of existence, uniqueness and regularity of the solutions of these integro-differential equations.

Keywords : Abstract integro-differential equation, analytic semigroup, classical solution, local solution, global solution.

الملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بدراسة فئة من المعادلات التكاملية التفاضلية المجردة التي يتم النظر فيها في فضاء باناخ .

هناك عدة طرق لدراسة هذا النوع من المعادلات، من بينها، في هذه المذكرة نحن مهتمون بتلك المبنية على نظرية أشباه الزمر التحليلية والقوى الكسرية للمؤثرات الخطيّة ونبرهن الوجود، الوحدانية، والنّظامية لحلول هذه المعادلات التكاملية التفاضلية .

الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية تفاضلية مجردة، أشباه زمر تحليلية، حل كلاسيكي، حل محلي، حل شامل .

Notations générales

- X : Espace de Banach.
- $\|.\|_X$: Norme de l'espace X.
- $\mathscr{L}(X,Y)$: Espace des opérateurs linéaires continus de l'espace X dans l'espace Y.
- $C^k(]a,b[)$: L'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur l'intervalle $]a,b[$.
- $C^\theta([a,b])$: L'ensemble des fonctions de Hölder, continues sur l'intervalle $[a,b]$, à exposant θ, $\theta \in]0,1[$.
- A : Opérateur linéaire .
- $D(A)$: Le domaine d'un opérateur linéaire A.
- A^{-1} : L'inverse d'un opérateur linéaire A.
- A^α : Opérateur linéaire à exposant fractionnaire α.
- $G(A)$: Graphe d'un opérateur linéaire A.
- $(A-\lambda I)^{-1}$: La résolvante d'un opérateur linéaire A.
- $\rho(A)$: L'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A.
- $H^m(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega),\ \text{tel que}\ \ D^\alpha u\in L^2(\Omega),\ \ \forall\alpha\in\mathbb{N}^N, |\alpha|\leq m\}$.
- $H_0^m(\Omega)=\{u\in H^m(\Omega),\ \text{tel que}\ u_{|\partial\Omega}=0\}$.
- $W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega),\ \text{tel que}\ \ D^\alpha u\in L^p(\Omega),\ \ \forall\alpha\in\mathbb{N}^N, |\alpha|\leq m\}$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La plupart des modèles mathématiques construits à partir des problèmes de Physique, d'Ingénierie ou de Biologie, sont mieux traités lorsqu'ils sont présentés sous la forme des équations intégrales ou intégro-différentielles. Actuellement, ces équations sont devenues d'une importance considérable en Analyse Mathématique.
D'une manière très simple, une équation différentielle lie des fonctions inconnues, leurs dérivées et leurs variables indépendantes. Une équation intégrale contient des fonctions inconnues sous une intégrale. Le terme équation intégro différentielle est utilisé dans le cas où l'équation contient une fonction inconnue avec ses dérivées et quand une fonction inconnue ou ses dérivées ou les deux apparaissent sous une intégrale.

Vers la fin du 19 ième siècle, une nouvelle théorie de V. Volterra (1860-1940) sur les équations intégrales et intégo-différentielles a contribué d'une manière cruciale au développement de l'analyse fonctionnelle, dont il est considéré comme l'un des fondateurs de cette branche très importante des Mathématiques.
Cette époque a été marquée, aussi, par l'apparition de la théorie de Fredholm (1866-1927) concernant l'étude d'un type général d'équations, l'approche de Fredholm s'est basée sur l'extension, en dimension infinie, de l'étude des systèmes de dimension finie.

Ce travail est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites non linéaires considérées dans un espace de Banach. Le terme "abstraites" signifie que ces équations sont à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) dans un espace de Banach.

Ce Mémoire, représente une synthèse des résultats obtenus dans l'article de D. Bahuguna [1], intitulé :

"Integrodifferential equations with analytic semigroups"

En utilisant une approche basée sur la théorie des semi-groupes et les hypothèses F et F_0, énoncées ci-dessous, nous établissons des résultats essentiels d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de ce type équations. Plus précisément, on se propose d'étudier, dans un espace de Banach X, l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)) + K(u)(t), \ t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où

$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(s, u(s))ds. \tag{0.2}$$

Les hypothèses fondamentales de ce travail sont :

Hypothèse F : Soit U un ensemble ouvert de $[0, \infty) \times X_a$. Pour chaque $(t, x) \in U$, il existe un ensemble $V \subset U$ voisinage de(t, x), et deux constantes $L > 0, 0 < \theta < 1$ tels que

$$\|f(s_1, u) - f(s_2, v)\| \leq L[|s_1 - s_2|^\theta + \|u - v\|_\alpha], \tag{0.3}$$

pour tous $(s_1, u), (s_2, v) \in V$. Ici X_α, pour $0 \leq \alpha \leq 1$, désigne l'espace de Banach $D(A^\alpha)$ muni de la norme $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|$.

Hypothèse F_0 : Soit U un ensemble ouvert de $[0, \infty) \times X_a$. Pour chaque $(t, x) \in U$, il existe un ensemble $V \subset U$ voisinage de (t, x) et une constante L_0 tels que

$$\|f(s, u) - f(s, v)\| \leq L_0 \|u - v\|_\alpha, \tag{0.4}$$

pour tous $(s, u), (s, v) \in V$.

L'équation (0.1) représente une formulation abstraite de certaines classes d'équations intégro-différentielles paraboliques. Ces types d'équations modélisent les phénomènes physiques impliquant certains types d'effets de mémoire. Par exemple, Nohel [17] a considéré une équation de Volterra non linéaire du type (0.1), dans laquelle $g(t,u(t)) = Bu(t)$, où $-B$ est un opérateur dissipatif non linéaire. Pour plus de détails sur ces formulations et les techniques correspondantes utilisées pour étudier de tels problèmes, nous renvoyons le lecteur à Bahuguna et Pani [3], Barbu [4, 5, 6], Crandall, Londen et Nohel [8].

Heard et Rankin [11] ont considéré l'équation intégro-différentielle suivante dans un espace de Banach X :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t,u(t)) + \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(s,u(s))ds, t_0 < t < T \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{0.5}$$

où l'opérateur linéaire $-A(t)$ pour chaque $t \geq 0$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans X, l'application non linéaire g, définie sur l'ensemble $[0,\infty)\times D(A(0))$ à valeurs dans X, est telle que $g(t,.)$ une fonction lipschitzienne sur le domaine $D(A(0))$ de l'opérateur $A(0)$ dans X par rapport à la norme du graphe de $A(0)$. L'application non linéaire f, définie sur $[0,\infty) \times X_\alpha$ à valeurs dans X, satisfait la condition :
il existe des constantes $L > 0, 0 < \eta, \gamma \leq 1$ et $0 < \alpha < 1$, telles que :

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leq L[|t-s|^\eta + \|x-y\|_\alpha^\gamma], \tag{0.6}$$

pour tous $(t,x),(t,y) \in [0,\infty) \times X_\alpha$.

Webb [24] a également considéré (0.5) et a supposé que f de $\mathbb{R} \times X_1$ dans X_α et pour chaque $t \in \mathbb{R}$, il existe une constante positive $C(t)$ telle que :

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_\alpha \leq C(t)\|x-y\|_1. \tag{0.7}$$

pour tous $x,y \in X_1$.
Le résultat d'existence est prouvé en résolvant d'abord de manière unique l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du_v(t)}{dt} + A(t)u_v(t) = f(t,v(t)) + \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(s,u_v(s))ds,\ t_0 < t < T, \\ u_v(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{0.8}$$

où $v(t)$ est choisi parmi un sous-ensemble fermé, borné et convexe S d'un espace de Banach approprié. L'existence d'un unique $u(t)$ est établie en prouvant que l'application $K(v) = u_v$ est une contraction stricte de S dans S. Ceci est possible grâce à l'hypothèse de régularité supplémentaire (0.7) sur f. Comme Heard et Rankin [11] ont supposé une condition plus faible (0.6), ils nécessitent une estimation du type suivant sur K :

$$\|K(\upsilon_1) - K(\upsilon_2)\|_{C(J,X_1)} \leq C\|\upsilon_1 - \upsilon_2\|^{\gamma}_{C(J,X_\alpha)} + \epsilon \tag{0.9}$$

et ils utilisent le théorème du point fixe de Schauder pour établir l'existence des solutions. Lorsque (0.6) est remplacé par l'hypothèse plus forte (0.3), énoncée ci-dessous. Les méthodes utilisées par Heard et Rankin [11] n'impliquent pas que la solution est unique sauf dans le cas où X est un espace de Hilbert. De plus, la fonction non linéaire g est supposée être définie de $[t_0, T) \times W$ dans X où W est un sous-ensemble ouvert de X_1 et satisfait la condition de Lipschitz locale :

$$\|g(t,x) - g(s,y)\| \leq b_0\|x - y\| \tag{0.10}$$

pour tout $t, s \in [t_0, T)$ et $x, y \in B_1(y_0; r) = \{z \in X_1 : \|z - y_0\| \leq r\}$.

Ce mémoire comporte quatre chapitres et est organisé comme suit :

▷ **Le premier chapitre** contient des rappeles des notions de base d'analyse fonctionnelle : espace de Banach, espace de Hilbert, espace de Hölder, les opérateurs linéaires, les semi-groupes d'opérateurs linéaires et les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires.
▷ **Le deuxième chapitre** contient un survol sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, ainsi que leurs différentes propriétés,
▷ **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites non linéaires. Il est constitué de deux parties principales :

La première partie concerne l'étude d'existence locale et de régularité des solutions intégrales (Mild) et classiques . Le résultat essentiel de ce chapitre est représenté par le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Supposons que l'opérateur $-A$ engendre un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ avec $\|S(t)\| \leq M, t \geq 0$ et que $0 \in \rho(A)$. Si les applications f et g vérifient l'hypothèse F_0 et que le noyau a satisfait (H), alors le problème (0.1) a une solution classique locale unique pour tout $u_0 \in X_\alpha$.*

Dans **la deuxième partie** nous nous intéressons à L'étude de l'existence globale des solutions classiques. On montre la résultat principal suivent :

Théorème 0.2. *Soit $0 \in D(A)$ et $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analy-*

tique $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *satisfaisant*

$$\|S(t)\| \leq M,$$

pour $t \leq t_0$. *Soit* $f, g : [t_0, \infty) \times X_\alpha \to X$ *deux fonctions vérifiant l'hypothèse* F *et a le noyau satisfaisant* (H). *S'il existe des fonctions continues non décroissantes* k_1 *et* k_2 *de* $[t_0, \infty)$ *dans* $[0, \infty)$, *telles que*

$$\begin{aligned} &\|f(t,x)\| \leq k_1(t)(1+\|x\|_\alpha) \text{ pour } t \geq t_0, x \in X_\alpha, \\ \text{et } &\|g(t,x)\| \leq k_2(t)(1+\|x\|_\alpha) \text{ pour } t \geq t_0, x \in X_\alpha, \end{aligned} \tag{0.11}$$

alors le problème aux valeurs initiales (0.1) *admet une solution classique unique* u *sur l'intervalle* $[t_0, \infty)$ *pour tout* $u_0 \in X_\alpha$.

▷ **Le quatrième chapitre** est une application de ce qu'on a traité dans les chapitres précédents, sous forme d'exemple de problème concrets en EDP parabolique dans l'espace considéré.

Ce travail se termine avec une **conclusion générale** et les **références bibliographiques** relatives à l'ensemble des travaux présentés ici.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons des concepts de base qui serviront dans les chapitres suivants. En particulier, nous rappellons les notions des opérateurs linéaires et des semi-groupes opérateurs linéaires bornés ainsi que leurs différentes propriétés.

1.1 Les espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel X normé et complet. Autrement dit : l'espace X est muni d'une norme $\|.\|_X$ et toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans l'espace X pour la norme $\|.\|_X$.*

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2. *On appelle espace de Hilbert X, tout espace de Banach X dont la norme provient d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur X (c'est-à-dire : $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$.*

1.1.3 Espace de Hölder

On rappelle que l'espace de Banach $C([0,1];X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs dans l'espace X, muni de la norme :

$$\|f\|_{C([0,1];X)} = \max_{0\leq t\leq 1} \|f(t)\|_X.$$

Définition 1.3. *On appelle espace de Hölder à exposant $\theta \in]0,1[$, l'espace de Banach noté $C^\theta([0,1];X)$ et défini par :*

$$C^\theta([0,1];X) = \Big\{ f : [0,1] \to X \ / \ [f]_\theta = \sup_{t,s\in[0,1],t\neq s} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^\theta} < \infty \Big\}.$$

Cet espace est muni de la norme $\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + [f]_\theta$, ou plus précisément, de la norme :

$$\|f\|_{C^\theta([0;1];X)} = \max_{0\leq t\leq 1} \|f(t)\|_X + \sup_{t,s\in[0,1],t\neq s} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^\theta}.$$

1.2 Les opérateurs linéaires

1.2.1 Opérateur linéaire borné

Définition 1.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach.*
Dire que A est un opérateur linéaire sur X, signife que A est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$, appelé domaine de l'opérateur A.

Définition 1.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. Dire que l'opérateur A est borné, signifie qu'il existe une constante $C > 0$, telle que $\|Au\|_Y \leq C\|u\|_X$, $\forall u \in D(A)$.*
Sinon, A est dit opérateur linéaire non borné.

Remarque 1.1. *Lorsque $D(A) = X$, alors l'opérateur linéaire borné A est continu.*
Ceci nous conduit au résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach.*
Un opérateur linéaire A défini sur $D(A) = X$, à valeurs dans Y est continu si, et seulement s'il est borné.

Remarque 1.2. *On note par $\mathscr{L}(X;Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur X à valeurs dans Y. On le munit de la norme définie par :*

$$\|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{u\in X, \|u\|\leq 1} \|Au\|_Y.$$

1.2.2 Opérateur linéaire inversible

Soit X et Y deux espaces de Banach et $A \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Définition 1.6. *On dit que l'opérateur A est inversible s'il existe opérateur linéaire $B \in \mathscr{L}(X,Y)$, tel que $A \circ B = I_Y$ et $B \circ A = I_X$, où I_X (resp.I_Y) est l'opérateur identité de X (resp. de Y).*
Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.
Cas particulier *Si $X = Y$ et X est de dimension finie et $A \in \mathscr{L}(X,X)$, alors l'inversibilité de A aura plusieurs aspects équivalents.*
Plus précisément, rappelons le résultat important suivant :

Théorème 1.2. *Si dim $X < \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible.*
2. *A est injectif.*
3. *A est surjectif.*
4. *A admet un inverse à droite (i.e. il existe $B \in L(X,X)$ tel que $A \circ B = I_X$)*
5. *A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $C \in \mathscr{L}(X,X)$ tel que $C \circ A = I_X$).*

Théorème 1.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si l'opérateur A est linéaire, continu et bijectif de X dans Y, alors l'opérateur linéaire A^{-1} est continu de Y dans X.*

Preuve 1.1. *(voir H. Brezis [7], p. 18-19)*

1.2.3 Opérateur linéaire fermé

Définition 1.7. *Soit X un espace de Banach. On appelle graphe d'un opérateur linéaire $(A, D(A))$ le sous-espace de $X \times X$, défini par*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X.$$

Définition 1.8. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est un ensemble fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur A est fermé si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$, telle que $u_n \to u$ dans X et $Au_n \to v$ dans Y, alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.*

Proposition 1.2. *L'opérateur linéaire fermé A est continu sur son domaine $D(A)$ muni de la norme du graphe*

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_Y.$$

Ainsi, on obtient un espace de Banach $(D(A); \|.\|_{D(A)})$.

Théorème 1.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. Si l'opérateur A est fermé et admet un inverse A^{-1} alors A^{-1} est fermé.*

Preuve 1.2. *(voir H. Tanabe [23]).*

Proposition 1.3. *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to D(A)$ une fonction telle que $u(t) \in D(A)$ et les fonctions $t \longmapsto u(t)$ et $t \longmapsto Au(t)$ soient intégrables sur I (i.e. : les intégrales $\int_a^b u(t)dt$ et $\int_a^b Au(t)dt$ sont convergentes), alors $\int_a^b u(t)dt \in D(A)$ et la relation suivante est vérifiée :*

$$A\int_a^b u(t)dt = \int_a^b Au(t)dt.$$

Preuve 1.3. *(voir H. Tanabe [23]).*

Proposition 1.4. *Soit Y un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue de $Y \times I$ dans $\mathbb{K}$, tels que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $Y \times I$. Soient u et v deux applications dérivables de X dans I, alors l'application définie par $\varphi : X \to \mathbb{K}$ et $\forall x \in X, \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)dt$ est dérivable sur X et sa dérivée φ' est définie par*

$$\forall x \in X, \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x)).$$

Preuve 1.4. *(voir H. Tanabe [23]).*
Notre travail nécessite une autre notion importante :

1.2.4 Opérateur maximal dissipatif

Définition 1.9. *Un opérateur linéaire $(A, D(A))$, dans un espace de Banach X, est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\| \geq \|x\|.$$

Définition 1.10. *Un opérateur linéaire$(A, D(A))$, dans un espace de Banach X, est maximal dissipatif si*

- *A est dissipatif,*
- *$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ tel que $\lambda x - Ax = f$.*

Dans le cas où l'espace X est de Hilbert, on a la définition suivante :

Définition 1.11. *Un opérateur linéaire $(A, D(A))$, est dissipatif si, et seulement si*

$$\forall x \in D(A), \qquad (Ax, x) \leq 0.$$

Si X est un espace de Hilbert complexe, alors la condition précédente sera remplacée par

$$\forall x \in D(A), \qquad Re(Ax, x) \leq 0.$$

1.2.5 Ensemble résolvant, spectre et résolvante

Définition 1.12. *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire.*

1. *On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble noté $\rho(A)$ et défini par :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \ est \ bijectif \ et \ (\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}.$$

2. *On appelle spectre de A, l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.*
3. *Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de l'opérateur A au point λ.*

1.2.6 Opérateur adjoint, opérateur auto-adjoint

Définition 1.13. *Soit X un espace vectoriel normé. On appelle forme linéaire continue sur X, tout opérateur linéaire continu $f : X \to Y$ où $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $x \in X$ alors la valeur de*

x prise par f est notée $\langle x, f\rangle$.
L'espace des formes linéaires continues sur X est appelé dual de X et on le note X^*.

Définition 1.14. *On dit qu'un opérateur linéaire $(A, D(A))$ est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.*

Définition 1.15. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire à domaine dense dans X. Considérons l'ensemble*

$$D^* = \{f \in Y^* / \langle Ax, f\rangle = \langle x, \phi\rangle \text{ où } \phi \in X^*\} \subset Y^*.$$

L'opérateur A^* défini par $D(A^*) = D^* \subset Y$ à valeurs dans X^* et tel que

$$A^* f = \phi \text{ est appellé l'adjoint de } A.$$

Ainsi, on a la relation fondamentale qui lie les opérateurs A et A^* :

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle, \forall x \in D(A), \forall f \in D(A^*).$$

Théorème 1.5. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire à domaine dense dans$X$, alors l'opérateur adjoint A^* est fermé.*

Preuve 1.5. *(voir H. Brezis [7]).*

Définition 1.16. *Soit X un espace de Hilbert et $A \in \mathscr{L}(X)$. L'opérateur linéaire A est auto-adjoint si $A = A^*$, en d'autres termes : $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in X$.*

1.3 Intégrale de Bochner

L'intégrale de Bochner généralise la notion d'intégrale de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Mesurabilité et fonctions simples

Définition 1.17. *(Fonction simple)*
Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite simple (ou étagée), si elle est mesurable et s'il existe un nombre fini d'ensembles Lebesgue-mesurables $B_{i_{i=1,,n}} \subset \mathscr{B}$ de mesure finie, deux à deux disjoints tels que, u prenne une valeur constante $b_i \in X$ sur chaque B_i pour $i = 1, ..., n$ et u s'annule sur $B_n = \Omega / \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. Il revient au même de dire que $u = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}$, où χ_{B_i} est

la fonction caractéristique de l'ensemble $B_i \subset \Omega$ *et* $b_n = 0$. *On note* $S(\Omega, X)$ *l'ensemble des fonctions simples de* Ω *dans* X.

Proposition 1.5. *L'ensemble de fonctions simples* $S(\Omega, X)$ *est un espace vectoriel.*

Définition 1.18. *(fonction fortement mesurable)*
Une fonction $u : \Omega \to X$ *est dite fortement mesurable s'il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $S(\Omega, X)$ *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_X = 0, \textit{pour p.p. } x \in \Omega.$$

Proposition 1.6.

1. *L'ensemble des fonctions fortement mesurables est un espace vectoriel.*
2. *Si* $u : \Omega \to X$ *est fortement mesurable alors la fonction*

$$\|u\|_X : \Omega \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \|u(x)\|_X$$

   est aussi fortement mesurable.

Définition 1.19. *(Fonction Bochner-intégrable) Une fonction* $u : \Omega \to X$ *est dite Bochner-intégrable s'il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $S(\Omega, X)$ *telle que* $u_n(x) \to u(x)$ *pour p.p.* $x \in \Omega$ *et*$\int_\Omega \|u_n(x) - u(x)\|_X dx \to 0$. *On note l'ensemble des fonctions Bochner-intégrables de* Ω *dans* X *par* $\mathscr{L}^1(\Omega, X)$. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possédant les propriétés citées dans la définition ci-dessus est dite suite approximante pour* u.

Proposition 1.7.

1. *Une fonction* $u : \Omega \to X$ *est Bochner-intégrable ssi* u *est fortement mesurable et*

$$\int_\Omega \|u(x)\|_X dx < \infty.$$

2. $\mathscr{L}^1(\Omega, X)$ *est un espace vectoriel.*

Définition 1.20. *Si* $u \in \mathscr{L}^1(\Omega, X)$ *, on définit*

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx,$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arbitraire de* $S(\Omega, X)$ *approximante pour* u. *La valeur* $\int_\Omega u(x)dx$ *s'appelle l'intégrale de Bochner de la fonction* u.

Remarque 1.3. *Lorsque $A \subset \Omega$ est Lebesgue -mesurable et $u \in \mathscr{L}^1(\Omega, X)$, on définit*

$$\int_A u(x)dx = \int_\Omega u(x)\chi_A dx.$$

Proposition 1.8. *1. Si $u \in \mathscr{L}^1(\Omega, X)$, on a :*

$$\| \int_\Omega u(x)dx\|_X \leq \int_\Omega \|u(x)\|_X dx.$$

2. *L'intégrale de Bochner $\int : \mathscr{L}^1(\Omega, X) \to X$ est une application linéaire.*

3. *Si A et B sont deux ensembles Lebesgue-mesurables disjoints de Ω , alors pour tout $u \in \mathscr{L}^1(\Omega, X)$, on a*

$$\int_{A\cup B} u(x)dx = \int_A u(x)dx + \int_B u(x)dx.$$

1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

La théorie des semi-groupes dévellopée dans les années 40, permet de résoudre une grande classe des équations aux dérivées partielles (EDP). Cette théorie joue un rôle très important dans l'étude des problèmes d'évolution dans le cadre abstrait. Un de ses ingrédients essentiels est la notion d'opérateurs linéaires non bornés.

1.4.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.21. *Soit X un espace de Banach. La famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$T(0) = I$; (oú I désigne l'opérateur identité).*
2. *$T(t + s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.*
3. *Si de plus, la condition suivante est satisfaite :*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \forall x \in X.$$

alors la famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe fortement continu ou C_0-semi-groupe.

Théorème 1.6. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe, alors il existe deux constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$*, telles que*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

En particulier, Si $M = 1$ *et* $\omega = 0$*, alors* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction.*

Définition 1.22. *Un semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* X *est dit uniformément continu sur* X *si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0.$$

Voici une autre notion de base en théorie des semi-groupes :

1.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.23. *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*, tout opérateur linéaire* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X, \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ } existe\} \\ \\ Ax = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A). \end{cases}$$

On dit aussi que l'opérateur A *engendre le* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*.*

Exemple 1.1. $X = BUC([0, +\infty[)$ *: désigne l'espace des fonction définies, uniformément continues et bornées sur l'intervalle* $[0, +\infty[$*. l'espace* X *est muni de la norme de convergence uniforme* $\|\phi\|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty[} |\phi(t)|$.
On définit les opérateurs $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *par :*

$$T(t)\phi(x) = \phi(t + x), x \in [0, +\infty[, \phi \in X.$$

Alors

1. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe de contraction de* $\mathscr{L}(X)$*.*

   En effet, on a $(X, \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

a.*Montrons que* $\forall t \geq 0, T(t)$ *est linéaire et continu (borné).*
(i) *L'opérateur T(t) est linéaire, pour tout* $t \geq 0$ *(facile à faire.*

(ii) T(t) *est borné (continu), pour tout* $t \geq 0$ *:*
Soit $\phi \in X$*, on a*

$$\|T(t)\phi\|_X = \sup_{x\in[0,+\infty[} |T(t)\phi(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |\phi(t+x)|.$$

On utilise le changement de variable $t + x = \alpha \Longrightarrow \alpha \in [t, +\infty[$. *D'où*

$$\begin{aligned}\|T(t)\phi\|_X &= \sup_{x\in[0,\infty[} |\phi(t+x)| \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,\infty[} |\phi(\alpha)| = \|\phi\|_X\end{aligned}$$

Alors $\exists M = 1 > 0$ *telle que* $\|T(t)\phi\|_X \leq 1\|\phi\|_X$.
D'où $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(x)} \leq 1$. *Donc* $T(t)$ *est borné ,* $\forall t \geq 0$.

b. *Montrons que* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu de* $\mathscr{L}(x)$
Soit $\phi \in X, t \geq 0$
▷ *On a* $T(0)\phi(x) = \phi(0 + x) = \phi(x) = I\phi(x)$*, Donc* $T(0) = Id_X$.
▷ *Soit* $t, s \geq 0, \phi \in X$ *, alors*

$$\begin{aligned}T(t+s)\phi(x) = \phi(t+s+x) &= T(t)\phi(y) \\ &= T(t)\phi(s+x) \\ &= T(t)(T(s)\phi(x)).\end{aligned}$$

Car $T(s)\phi(x) = \phi(s + x)$*, par definition de* $T(s)\phi(x) = \phi(s + x)$.
D'où $T(t + s)\phi(x) = (T(t)T(s))\phi(x)$.
Ainsi $T(t + s) = T(t) \circ T(s) = T(t)T(s)$. *Donc* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe de* $\mathscr{L}(x)$.

c.*Montrons que l'application* $t \mapsto T(t)\phi$*, est continue* $\forall \phi \in X$, $\forall t \geq 0$.
Il suffit de montrer que

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)\phi - T(0)\phi\|_X = 0, \forall \phi \in X.$$

On a

$$\lim_{t\to 0^+}\|T(t)\phi-\phi\|_X=\lim_{t\to 0^+}(\sup_{x\in[0,+\infty[}|T(t)\phi(x)-\phi(x)|).$$
$$=0.$$

Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe de* $\mathscr{L}(x)$. *De plus, on a* $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(x)}\leq 1$, *alors le* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est de contraction .*
D'autre part, la définition du générateur infinitésimal d'un semi-groupe, permet de déterminer le générateur infinitésimal A *du semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *défini par*

$$A: D(A)\subset X\longrightarrow X \qquad\qquad \phi\mapsto A\phi=\phi'.$$

Nous présentons, ici, quelques propriétés importantes des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés (voir Pazy [18]).

Proposition 1.9. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe sur* X *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x\in D(A)$, *alors* $T(t)x\in D(A)$ *et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax=AT(t)x,\forall t\geq 0.$$

Preuve. *Soit* $x\in D(A)$. *Alors pour tout* $t\geq 0$ *, on a :*

$$\begin{aligned}T(t)Ax&=T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)T(t)x-T(t)x}{h}.\end{aligned}$$

Donc $T(t)x\in D(A)$ *et* $T(t)Ax=AT(t)x$, $\forall t\geq 0$

Proposition 1.10. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$t\in[0,\infty)\longmapsto T(t)x\in X,$$

est dérivable sur l'intervalle $[0,\infty)$, *pour tout* $x\in D(A)$ *et on a :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x,\forall t\geq 0.$$

Proposition 1.11. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X. *Alors, pour tout* $x\in X$ *et*

$t \geq 0$, *on a*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

pour tous $x \in X$ *et* $t \geq 0$.

Preuve. *L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :*

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)xds - T(t)x\| &= \|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(t)x - T(t))xds\| \\ &\leq \sup_{s \in [t,t+h]} \|T(s)x - T(t))x\|,\end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0, \infty) \ni t \to T(t)x \in X$.

Proposition 1.12. *Soient* $\{T(t)\}, t \geq 0$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in X$, *alors :*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A),$$

et on a l'égalité :

$$A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Preuve. *Soient* $x \in X$ *et* $h > 0$. *Alors :*

$$\begin{aligned}\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)xdu - \frac{1}{h} \int_0^t T(u)xdu \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)xdu.\end{aligned}$$

Par passage à la limite pour $h \to 0^+$ *et compte tenu de la proposition précédente, nous obtenons :*

$$A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - T(0)x = T(t)x - x, \forall t \geq 0$$

et

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A).$$

Théorème 1.7. *Un opérateur linéaire* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur* X *si, et seulement si* A *est un opérateur linéaire borné sur* X.

Proposition 1.13. *Soient* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *et* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *deux* C_0*-semi-groupes sur* X, *dont les* *générateurs infinitésimaux sont notés A et B respectivement. Si $A = B$, alors*

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

Pour conclure cette section, nous donnons un diagramme qui représente la relation entre un semi-groupe, son générateur infinitésimal et la résolvante du générateur infinitésimal.

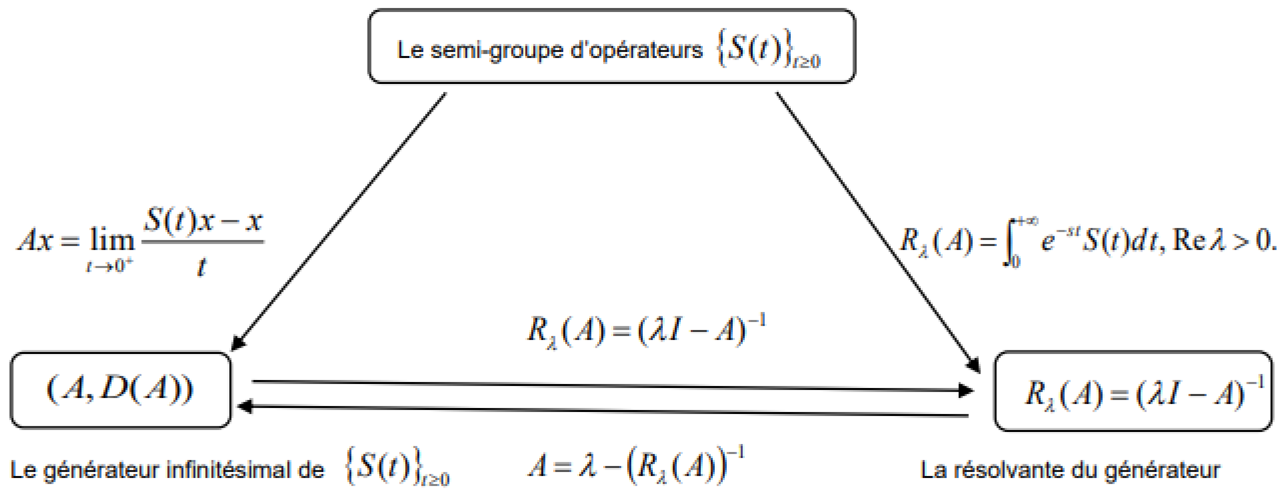

***Figure1**. Diagramme : semi-groupe et son générateur.*

On a aussi ces théorèmes essentiels en théorie des semi-groupes :

Théorème 1.8. *(**Théorème de Hille-Yosida**) Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) l'opérateur A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$, où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A et

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda - \omega}, \text{ pour } Re\lambda > \omega.$$

Une généralisation du théorème de Hille-Yosida est donnée dans le :

Théorème 1.9. ***(Théorème de Phillips-Miyadera-Feller)***
Un opérateur linéaire A vérifie les deux conditions suivantes :
(i) A est fermé et $D(\bar{A}) = X$.
(ii) il existe deux nombres $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$, tels que l'ensemble résolvant de A,

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\} \text{ et } \|(A - \lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \text{ pour } Re\lambda > \omega, n = 1, 2, ...$$

si, et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, tels que

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.10. ***(Théorème de Lumer-Phillips)***
Supposons que A est un opérateur linéaire à domaine dense dans un espace de Banach X avec $D(A)$ et $R(A)$ dans X. Si l'opérateur A est dissipatif et il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

1.4.3 Semi-groupes particuliers

Semi-groupes différentiable

Définition 1.24.
• *Un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est dit différentiable pour $t > t_0$, si pour tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.*
• *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit différentiable, s'il est différentiable pour $t > 0$.*

Proposition 1.14. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe différentiable pour $t > t_0$ et de générateur infinitésimal A. Alors :*
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > nt_0$, $T(t) : X \longrightarrow D(A^n)$ et $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ est un opérateur linéaire borné.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > nt_0$, l'application $t \longmapsto T^{(n-1)}(t)$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs.

Preuve 1.6. *(voir Pazy [18], p. 52).*

Semi-groupe analytique

Dans cette section nous étudions la possibilité d'étendre le domaine du paramétre t des semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ à des régions du plan complexe contenant l'intervalle $[0, \infty[$, appelées angles autour de la demi-droite réelle positive, notées :

$$\triangle = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2, \theta_1 < 0 < \theta_2\}.$$

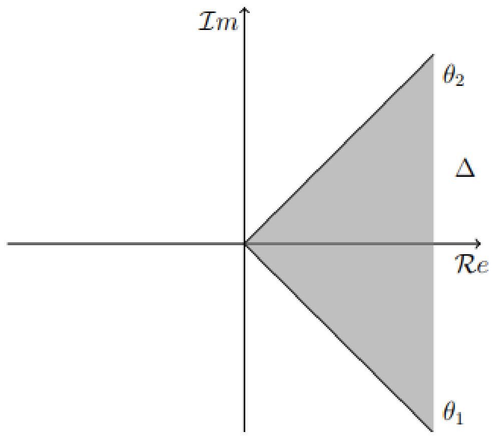

Figure 2 *: Secteur autour la demi-droite réelle positive.*

Définition 1.25. *Soit $\triangle$ un secteur dans $\mathbb{C}$. On appelle semi-groupe analytique la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(z), z \in \Omega\}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour tous $z_1 z_2 \in \triangle$.*
2. *$T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.*
3. *Pour chaque $x \in X, \lim_{z \to 0} T(z)x = x$ où $z \in \triangle$.*
4. *La fonction $z \mapsto T(z)$ est analytique dans $\triangle$.*

On rappelle aussi le théoréme très important :

Théorème 1.11. *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Supposons que $0 \in \rho(A)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ peut s'étendre à un semi-groupe analytique dans un secteur*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} = |\arg z| < \delta\}$$

et $\|T(t)\|$ est uniformément bornée sur chaque sous-secteur fermé $\bar{\Delta}_{\delta'}$ de Δ_δ tel que

$$\bar{\Delta}_{\delta'} = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \delta' < \delta\}.$$

2. *Il existe une constante $C \geq 0$, telle que pour chaque $\sigma > 0, \tau \neq 0$*

$$\|(A - (\sigma + i\sigma))^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

3. *Il existe* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ *et* $M > 0$, *tels que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}/|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\},$$

et

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|},$$

pour $\lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0$.

4. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est diffiérentiable pour* $t > 0$ *et il existe une constante* $C \geq 0$, *telle que*

$$\|AT(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{t}, \forall t > 0.$$

Preuve 1.7. *(voir Pazy [18], p. 60-61).*

Théorème 1.12. *Soit* A *le générateur inffinitésimal d'un semi-groupe analytique. Si* B *est un opérateur linéaire borné, alors l'opérateur linéaire* $A + B$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.*

Preuve 1.8. *(voir Pazy [18], p. 81).*

Dans notre travail une autre notion sera utilisée, c'est celle des :

1.5 Puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires

Soit X *un espace de Banach complexe et* A *un opérateur linéaire fermé à domaine dense, vérifiant l'hypothése* (H) *suivante :*

$$(H)\begin{cases}(i)\ \rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}\ /0 < \omega < |\arg\lambda| \leq \pi\} \cup U, U \textit{ est un voisinage de } 0,\\(ii)\ \|(A-\lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{M}{1+|\lambda|},\ \textit{pour } \lambda \in \Sigma.\end{cases}$$

Notons que si $0 < \omega < \pi/2$, *alors l'opérateur* $-A$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.*

1.5.1 Puissances fractionnaires négatives d'opérateurs linéaires

Définition 1.26. *Soit A un opérateur linéaire vérifiant l'hypothése (H) : Pour $\alpha > 0$, on définit les puissances fractionnaires négatives de lópérateur linéaire A par*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ_α est la courbe contenue dans $\rho(A)$ et allant de $\infty e^{-i\theta}$ à $\infty e^{i\theta}$ avec $\omega < \theta < \pi$, en évitant l'axe des réels négatifs et l'origine de telle facon à ce que $\lambda^{-\alpha}$ soit positif.
Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors d'après le Théoréme des résidus ,

$$A^{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_\alpha} \lambda^{-n}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ'_α est une courbe fermée entourant l'origine.
Si $0 < \alpha < 1$, alors

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

1.5.2 Puissances fractionnaires positives d'opérateus linéaires

Définition 1.27. *Soit A un opérateur linéaire vérifiant l'hypothése (H) avec $\omega < \frac{\pi}{2}$. Alors pour chaque $\alpha \geq 0$, on définit les puissances fractionnaires positives de l'opérateur A, par*

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1} \ \textit{pour} \ \alpha > 0, \\ I \qquad\quad \textit{pour} \ \alpha = 0. \end{cases}$$

Voici quelques propriétés de ces opérateurs :

Théorème 1.13. *Soit A^α l'opérateur linéaire défini précédemment, alors :*
(i)A^α est un opérateur linéaire fermé à domaine dense $(\bar{D(A^\alpha)} = X)$.
(ii) Si $0 < \alpha < \beta$, alors $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$.
(iii) $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve 1.9. *(Voir Tanabe [23], p. 35).*

1.6 Théorèmes du point fixe fondamentaux

*Ici, nous présentons les théorèmes classiques du point fixe, les plus connus : le théorème de **Banach**, le théorème de **Brouwer** et le théorème de **Schauder**. Ces théorèmes sont très importants pour montrer l'existence des solutions numériques pour les équations intégro-différentielles non linéaires.*

1.6.1 Le théorème du Banach

Le théorème du Banach donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Définition 1.28. *(Opérateur contractant) Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach E. On dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive $0 < k < 1$, telle que*

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq k\|u_1 - u_2\| \tag{1.1}$$

pour tous $u_1, u_2 \in E$.

Théorème 1.14. *(Banach,1922)*
Soit A un opérateur contractant défini dans un espace métrique complet E à valeurs dans E. Alors l'équation

$$Au{=}u \tag{1.2}$$

admet une solution unique dans E. Une telle solution est dite point fixe de l'opérateur A.

Preuve. *(Voir [9]) Montrons d'abord l'unicité du point fixe.*
Raisonnons par l'absurde et supposant qu'il existe deux points fixes u et v telles que $Au = u$ et $Av = v$, alors $\|u - v\| = \|Au - Av\| \leq k\|u - v\|$ et $(1 - k)\|u - v\| \leq 0$. D'où $\|u - v\| = 0$, ce qui implique $u = v$.
Pour montrer l'existence, nous allons construire un processus itératif. Soit la donnée d'un élément initial u_0 et d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_{n+1} = Au_n, n = 0, 1, 2, ...$$

On doit montrer d'abord que cette suite est de Cauchy et que sa limite est une solution de l'équation (1.2). L'existence de la limite découle du fait que dans un espace de Banach toute suite de Cauchy est convergente. Notons que

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|Au_n - Au_{n-1}\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\|.$$

D'où

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\| \leq k^2\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \leq ... \leq k^n\|u_1 - u_0\|.$$

En général, si $n > m$

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &= \|(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_{m+1} - u_m)\| \\ &\leq \|(u_n - u_{n-1}\| + \|u_{n-1} - u_{n-2}\| + ... + \|u_{m+1} - u_m\| \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k^m)\|u_1 - u_0\| \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + ...)\|u_1 - u_0\| = \frac{k^m}{1-k}\|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est de Cauchy, notons sa limite par u. Il reste à montrer que u est une solution de l'équation (1.2). Comme l'opérateur A est continu, nous avons

$$Au = A(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty} Au_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = u.$$

1.6.2 Le théorème de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 1.15. *(Brouwer, 1910))*
Toute application continue T de la boule unité fermée $B_n \subseteq \mathbb{R}$ dans lui même admet au moins un point fixe.

Preuve 1.10. *(Voir[10])*

1.6.3 Le théorème de Schauder

Le Théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théoréme de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach de dimension infinie.

Théorème 1.16. *(**Schauder**)*
Soient X un espace de Banach et $E \subseteq X$ un ensemble non vide, convexe et compact. Alors toute application continue $T : E \rightarrow E$ possède au moins un point fixe.

Preuve 1.11. *(Voir [10]).*

CHAPITRE

2

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

Introduction

Ce chapitre est constitué de deux parties principales. Dans la première partie, nous allons présenter une notion très importante qui est celle des équations intégrales et leurs différentes propriétés. La seconde partie concerne une autre notion d'une grande importance, il s'agit des équations intégro-différentielles et leurs propriétés variées.

2.1 Équations intégrales

Définition 2.1. *(Équation intégrale) Soit E est un ensemble fermé, borné et mesurable, d'un espace euclidien. et X un espace de fonctions définies de E dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$), $\lambda \in \mathbb{R}$*

On appelle équation intégrale une équation qui s'écrit sous la forme :

$$\varphi \in X; \forall x \in E; \lambda\, \varphi(x) = \int_E K(x, y, \varphi(y))dy + g(x) \tag{2.1}$$

où φ est une fonction inconnue, g est une fonction donnée et K désigne le noyau. On note :

$$K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y).\varphi(y).$$

2.1.1 Classification des équations intégrales

Il existe des différents types d'équations intégrales qu'on peut classer par leurs caractéristiques en cinq types suivants :

1/Le domaine d'intégration : *Les équations intégrales dans lesquelles le domaine d'intégration varie avec la variable indépendante dans l'équation sont dites de type* ***Volterra***

$$\lambda(x)\varphi(x) = g(x) + \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt,$$

ceux dont le domaine d'intégration est fixé sont dites de type ***Fredholm***

$$\lambda(x)\varphi(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(x))dt.$$

2/De première (deuxième) espèce : *Si $\forall\ x \in U$, $\lambda(x) = 0$, alors l'équation intégrale est de premiere espèce.*

▷ *On a les équations de Fredholm et Volterra de premiere espèce suivantes :*

$$g(x) = \int_a^b K(x, t, \varphi(x))dt,\ \ a \leq x \leq b$$

et

$$g(x) = \int_a^x K(x, t, \varphi(x))dt,\ \ a \leq x \leq b.$$

▷ *Les équations de Fredholm et de Volterra de seconde espèce :*

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, t, \varphi(x))dt = g(x),\ \ a \leq x \leq b, \lambda \neq 0,$$

et

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^x K(x, t, \varphi(x))dt = g(x),\ \ a \leq x \leq b, \lambda \neq 0.$$

3/Linéarité : *L'équation peut être classée comme étant une équation intégrale linéaire ou bien une équation intégrale non linéaire, si le noyau K est linéaire par rapport à la troisième variable, i.e :*

$$K(x, s, \varphi(x)) = K_0(x, s)\varphi(x).$$

Sinon, elle est dite non linéaire.

▷ *une équation intégrale de Fredholm non linéaire de deuxième espèce :*

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, t, \varphi(x))dt = g(x),\ a \leq x \leq b,\ \lambda \neq 0.$$

4/ Homogène (non homogène) *Une équation intégrale est homogène, si :*

$$\forall x \in U, g(x) = 0 \ sur\ [a, b].$$

Sinon, elle est dite non homogènes.

Exemple *L'équation intégrale*

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x, t)\varphi(t)dt = 0,\ 0 \leq x \leq 1,$$

est linéaire homogène de Fredholm de deuxième espèce.

▷ *Léquation intégrale*

$$\int_{-1}^x K(x, t)\varphi(t)dt = g(x),\ a \leq x \leq b,$$

est linéaire non homogène de Volterra de première espèce.

5/Singulière par rapport à x_i : *L'adjectif singulière est employé d'une part, quand l'intégration est impropre, dautre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si le noyau K ou l'ensemble V , sont non bornés dans la direction x_i, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.*

▷ ***Exemple*** *d'une équation intégrale singulière de Cauchy de la forme :*

$$\lambda u(x) + \frac{b}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t - x}dt + \int_{-1}^1 K(x, t)\ u(x)dt = g(x).$$

où λ et b sont deux constantes réelles,K et g sont deux fonctions connues.

Un autre exemple d'équation intégrale singulière est l'équation de la forme :

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x),\ 0 < \alpha < 1,\ 0 \leq x \leq 1,$$

qui est une équation intégrale de Volterra faiblement singulière de deuxième espèce. On peut aussi considérer l'équation intégrale d'Abel de deuxième espèce qui a la forme suivante :

$$u(x) - \int_a^b \frac{u(t)}{\sqrt{(x-t)}} dt = f(x), a \leq x \leq b.$$

2.1.2 Relation entre les équations différentielles ordinaires et les équations intégrales

Il existe a une relation fondamentale entre les équations intégrales et les équations différentielles ordinaires (EDO). Soit l'équation différentielle de la forme :

$$a\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)u = G(x), \tag{2.2}$$

telle que les fonctions $a_1, a_2, ..., a_n$ sont définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$,

$$u(a) = \ell_0, u'(a) = \ell_1, \ldots, u^{(n-1)}(a) = \ell_{n-1}.$$

L'équation (2.2) peut étre réduite à une équation intégrale de Volterra du second espèce

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = g(x).$$

Pour obtenir cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \varphi(x).$$

D'où, par intégration de a à x, il résulte

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \int_a^x \varphi(t)dt + \ell_{n-1}.$$

Les intégrales successives sont

$$\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} = \int_a^x \int_a^{x_2} \varphi(x_1)dx_1dx_2 + \ell_{n-1}(x-a) + \ell_{n-2},$$

$$\frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} = \int_a^x \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} \varphi(x_1)dx_1dx_2dx_3 + \ell_{n-1}\frac{(x-a)^2}{2!} + \ell_{n-3}(x-a) + \ell_{n-3},$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \ldots \int_a^{x_2} \varphi(x_1)dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt.$$

On peut écrire léquation différentielle comme suit :

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = g(x),$$

où

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

et

$$g(x) = G(x) - \ell_{n-1}a_1(x) - [(x-a)\ell_{n-1} + \ell_{n-2}]a_2(x) - \ldots - [\ell_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \ell_1(x-a) + \ell_0]a_n(x).$$

Lemme 2.1. *Pour toute fonction φ, on a*

$$\textstyle\int_a^x \int_a^s \varphi(t)dtds = \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt. \tag{2.3}$$

Preuve. *Soit $f(s) = \int_a^s \varphi(t)dt$, alors*

$$\begin{aligned}\int_a^x \int_a^s \varphi(t)dtdt = \int_a^x f(s)ds &= \int_a^x 1.f(s)ds \\ &= [s\,f(s)]_a^x - \int_a^x s.f'(s)ds, (intgration\ par\ parties) \\ &= xf(x) - af(a) - \int_a^x s\varphi(s)ds \\ &= x\int_a^x \varphi(t)dt - 0 - \int_a^x t\varphi(t)dt = \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

Exemple 2.1. *: Soit l'équation différentielle*

$$u'' + xu' + u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = 1, u'(0) = 0.$$

posons

$$u'' = \varphi(x),$$

alors

$$u' = \int_0^x \varphi(t)dt + u'(0),\ \textit{donc}\ u = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0$$

donc

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt.$$

Exemple 2.2. *: L'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sin(x) + \int_0^x (x^2-t)u(t)dt$$

est équivalente, après les transformations suivantes :

$$\frac{du}{dx}(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}\cos(x) + (x^2-x)u(x) + 2x\int_0^x u(t)dt,$$

$$\frac{d^2u}{dx}(x) = 6x + \frac{1}{2}\sin(x) + (4x-1)u(x) + (x^2-x)\frac{du}{dx}(x) + 2\int_0^x u(t)dt,$$

$$\frac{d^3u}{dx}(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x) + 4u(x) + (4x-1)\frac{du}{dx}(x) + (x^2-x)\frac{d^2u}{dx}(x) + (2x-1)\frac{du}{dx}(x) + 2u(x).$$

à l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 *au point* $c = 0$ *avec les conditions initiales*

$$\frac{d^3u}{dx}(x) - (x^2-x)\frac{d^2u}{dx}(x) - (6x-2)\frac{du}{dx}(x) - 6u(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x).$$

$$u(0) = 0, \frac{du}{dx}(0) = -\frac{1}{2}, \frac{d^2u}{dx}(0) = 0.$$

2.1.3 Exemples sur les équations intégrales

- ***Transformée de Fourier et son inverse*** *Pour tout* $t \in]-\infty, +\infty[$, *on a*

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}u(t)dt = u(x), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}g(t)dt = g(x). \end{cases}$$

▷ *Ce sont des équations intégrales linéaires singulières de première espèce.*

• ***Équations d'Abel***

$$\int_0^x \frac{K(x,t)u(t)}{(t^p - s^p)^\alpha} dt = g(x),$$

avec $p > 0, 0 < \alpha < 1$ *et* K *une fonction régulière.*

▷ *Cette équation est de type Volterra linéaire non homogéne singulière de première espèce.*

• ***Équations de Volterra linéaires*** *Pour tout* $x \in [a, b]$,

$$\begin{cases} \int_a^x K(x,t)u(t)dt = g(x), & \textit{(de première espèce)}, \\ \\ u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt + g(x), & \textit{(du deuxième espèce)}. \end{cases}$$

• ***Équations de Fredholm linéaires*** *Pour tout* $x \in [a, b]$,

$$\begin{cases} \int_a^b K(x,t)u(t)dt = g(x), & \textit{(de première espèce)}, \\ \\ u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt + g(x), & \textit{(du deuxième espèce)}. \end{cases}$$

• ***Équation Wiener-Hopf, (linéaire, de deuxième espèce, non homogène, singulière)***

$$\lambda u(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)u(t)dt, x \in [0, \infty[.$$

2.1.4 Méthodes de résolution des équations intégrales (E.I)

Méthodes directes

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant :

$$(PV1) \begin{cases} u''(x) = f(x, u(x)), 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = u_0, u'(1) = u'_0, \end{cases}$$

l'intégration des deux cotés de l'équation différentielle de 0 *a* x, *donne*

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x f(t, u(t))dt, 0 \le x \le 1.$$

En intégrant une seconde fois

$$u(x) = u_0' + u_0'x + \int_0^x \int_0^s f(t, u(t))dtds.$$

En utilisant la relation (2.3) *, on obtient*

$$u(x) = u_0 + u_0'x + \int_0^x (x-t)f(t, u(t))dt, 0 \leq x \leq 1,$$

c'est une équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce.

Exemple 2.3. *On considère le problème suivant :*

$$(PV2) \begin{cases} u''(x) = f(x, u(x)), 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, u'(1) = u_1. \end{cases}$$

De la même manière, on intègre les deux cotés de 0 *a* x*, on obtient*

$$u'(x) = c + \int_0^x f(t, u(t))dt, 0 \leq x \leq 1.$$

En intégrant de 0 *à* x*, il vient*

$$u(x) = u_0 + cx + \textstyle\int_0^x (x-t)f(t, u(t))dt, 0 \leq x \leq 1. \tag{2.4}$$

Pour déterminer la constante c*, on prend* x = *1 et on utilise la condition* $U(1) = U_1$*, d'où*

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1-t)f(t, u(t))dt.$$

Ainsi, l'équation (2.4) *devient*

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^1 (x-t)f(t, u(t))dt - x\int_0^1 (1-t)f(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^1 t(1-x)f(t, u(t))dt - \int_0^1 x(1-t)f(t, u(t))dt, \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)f(t, u(t))dt$$

avec

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), t \leq x, \\ x(1-t), t \geq x. \end{cases}$$

Équations à noyau séparable

On considére l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau séparable de la forme :

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \\ &= g(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x) \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt \end{aligned}$$

telle que

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t).$$

En posant

$$c_m = \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt,\ \ m = 1, ..., n$$

on obtient

$$u(x) = g(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \alpha_m(x) \tag{2.5}$$

où les c_m sont des constantes à déterminer. Pour ce faire, nous multiplions les deux cotés de l'équation (2.5) par $\beta_i(x)$ puis intégrons de a à b, d'où

$$\int_a^b \beta_i(x)u(x)dx = \int_a^b \beta_i(x)g(x)dx + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b \beta_i(x)\alpha_m(x)dx. \tag{2.6}$$

En utilisant les notations suivantes

$$\int_a^b \beta_i(x)g(x)dx = g_i, \int_a^b \beta_i(x)\alpha_i(x)dx = a_{im},$$

l'équation (2.6) devient

$$c_i - \lambda \sum_{m=1}^{n} a_{im}c_m = g_i, i = 1, ..., n \tag{2.7}$$

qui est un système d'équations linéaires à n inconnues de la forme

$$(I - \lambda A)c = g \tag{2.8}$$

où I est la matrice identité d'ordre n, A est la matrice (a_{im})*. c et f sont des matrices colonnes. Le déterminant D(λ) du système algébrique* (2.7) *est*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

C'est un polynome de degré au plus n, il joue un role important dans l'existence de la solution du système, et par conséquent de l'équation intégrale en question. Plus précisément, pour toutes les valeurs de λ *dont le déterminant* $D(\lambda) \neq 0$ *, le système algébrique* (2.8) *et donc également l'équation intégrale correspondante admettent une solution unique. D'autre part, pour les valeurs de* λ *dont* $D(\lambda) = 0$*, le systéme algébrique avec son équation intégrale, ou bien ils n'admettent aucune solution ou bien ils ont un nombre infini de solutions.*

Exemple 2.4. *Résoudre l'équation intégrale suivante :*

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 \varphi(t)dt. \tag{2.10}$$

Il est clair que la solution de cette équation sécrit sous la forme

$$\varphi(x) = 1 + \lambda c, \tag{2.11}$$

où

$$c = \int_0^1 \varphi(t)dt \tag{2.12}$$

En intégrant les deux cotés de léquation (2.12)*de* 0 *à* 1*, on obtient* $(1 - \lambda)c = 1$*. Donc, si* $\lambda \neq 1$*, la solution de l'équation* (2.11) *est donnée par*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 - \lambda)}.$$

Approximations successives

La méthode des approximation succesives, également appelés méthode de L'itération de picard [19].

D'abord, il faut rappeler que la plus part des méthodes itératives sont fondées sur le même principe, qui est la recherche d'un point fixe. Cependant, elles se différent dans la complexité des algorithmes proposés qui devraient êtres réalisés de sorte qu'ils soient consistants avec la difficulté rencontrée souvent lors du calcul des itérés. La méthode des approximations successives consiste à calculer explicitement à chaque étape k, l'itéré φ_k a l'aide de la suite itérative définie par :

$$\varphi_{k+1} = g(x) + \lambda \int k(x,t)\varphi_k(t)dt,$$

l'utiliser dans l'étape k + 1 pour le calcul de l'itéré φ_{k+1} .

Exemple 2.5. *:*

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

On choisit $\varphi_0(x) = 0$, ceci donne $\varphi_1(x)= x$ et

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt \\
&= \int_0^x (x-t)tdt \\
&= x - [\frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_0^x \\
&= x - \frac{x^3}{3!}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= \int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \\
&= \int_0^x (x-t)(t - \frac{t^3}{6})dt \\
&= x - x[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}]_0^x + [\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30}]_0^x \\
&= x - x(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}
\end{aligned}$$

En continuant ce processus, le n^{-ime} itéré :

$$\varphi_n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.2 Équations intégro-différentielles

Définition 2.2. *Une équation intégro-différentielle (E.I.D.) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue .*
▷La forme générale d'une équations intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est :

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \phi(x), \lambda \int_\Omega K(x, t, \phi(t))dt).$$

Avec

$$\phi(x) = (\varphi(x), \varphi^0(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$$

et les conditions initiales :

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \varphi^0(\alpha) = \beta_1, ..., \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}.$$

Où

- $\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}$ *: sont des fonctions inconnues.*
- K *: est le noyau de léquation intégro-différentielle.*
- F *: est une fonction donnée.*
- Ω *: est un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension fini.*
- λ *: est un paramètre numérique.*

La forme d'une équation intégro-différentielle linéaire (E.I.D) d'ordre n est

$$u_x(\varphi) = \lambda \int_T K(x, t) L_t(\varphi) + g(x),$$

où

$$u_x(\varphi) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} \alpha_{\mathrm{i}}(x)\varphi^{(\mathrm{i})}(x) \quad et \quad L_t(\varphi) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{m} \beta_{\mathrm{j}}(t)\varphi^{(\mathrm{j})}(t).$$

$\alpha_{\mathrm{i}}(x), \beta_{\mathrm{j}}(x)$ *et* $g(x)$ *sont des fonctions données et* $0 \leq \mathrm{i} \leq n$, $0 \leq \mathrm{j} \leq m)$.

2.2.1 Classification des équations intégro-différentielles

La classification des équations intégro-différentielle (E.I.D) est basée sur leurs caractéristiques, on a :

1-Types des équations intégro-différentielles *: On distingue trois types de d'équation intégro-différentielles :*

a)Équation intégro-différentielle de Fredholm

L'équation intégro-différentielle est dite de Fredholm, si les limites de l'intégrations sont fixées. Elle s'écrit sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{2.13}$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 2.6.

$$\varphi'(x) = 4 - \frac{2}{3}x + \int_0^1 2x\varphi(t)dt,$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \frac{\sin x}{2} - \int_0^{\pi/2} (3xt)\varphi(t)dt.$$

b)Équation intégro-différentielle de Volterra

L'équation intégro-différentielle est dite de Volterra, si Si l'une des bornes d'intégration est variable. Elle s'écrit sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{2.14}$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$

Exemple 2.7.

$$u'(x) = \exp x - x + \int_0^x 2xu(t)dt,$$

ou

$$\phi''(x) + \phi'(x) = 1 - \cos^2 x + \int_0^x t\phi(t)dt.$$

c)Équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm

Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra coinsident, lors l'équation intégro-différentielle est dite de de Volterra- Fredholm. Elle prend l'une des deux formes *suivantes :*

$$\varphi^{(n)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt + \lambda_2 \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt,$$

et

$$\varphi^{(n)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^T \int_\Omega G(x,t,y,z,\varphi(y,z))dydz, \ (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

où f et G sont des fonctions analytiques sur $\Omega \times [0,T]$ et Ω est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n, n = 1,2,3.$

Exemple 2.8.

$$\phi'(t) = 2022x + x^2 - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + \int_0^1 t\phi(t)dt,$$

et

$$\phi'(t,x) = 1 + t - \int_0^t \int_0^1 (s-t)dtds.$$

2-Linéarité, homogénéité des équations intégro-différentielles *: On a*

• ***Linéarité d'une (E.I.D.)*** *Si on prend $K(x,t,u(t)) = k(x,t)u(t)$, alors l'équation intégro-différentielle devient linéaire :*

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x)u^{(j)}(x) = \lambda \int_D K(x,t) \sum_{i=0}^{m} B_i(t)u^{(i)}(t)dt + g(x),$$

• *l'équation suivante*

$$u^{(n)}(x) = F(x, \phi(x), \lambda \textstyle\int_D K(x,t,\phi(t))dt), \tag{2.15}$$

avec

$$\phi(x) = (u(x), u^0(x), ..., u^{(n-1)}(x)),$$

et les conditions initiales :

$$u(\alpha) = \beta_0, u^0(\alpha) = \beta_1, ..., u^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1},$$

telles que $\beta_i, i = 0, ..., n-1$ sont des nombres donnés et u est la fonctions inconnue, est une équation intégro-différentielle non linéaire.

• ***Homogènéité des équations intégro-différentielles*** *: Si $g(x)$ dans l'équa-*

tion intégro-différentielle de ***Volterra*** *ou de* ***Fredholm****ou de* ***Volterra-Fredholm*** *de deuxième espèce est nulle, alors l'équaton intégro-différentielle est dite homogène,*

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x)u^{(j)}(x) = \lambda \int_D K(x,t) \sum_{i=0}^{m} B_i(t)u^{(i)}(t)dt,$$

sinon, elle est dite non homogène.

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x)u^{(j)}(x) = \lambda \int_D K(x,t) \sum_{i=0}^{m} B_i(t)u^{(i)}(t)dt + g(x),$$

3-Espèce d'une équation intégro-différentielle *: Une équation intégro-différentielle est dite de première espèce si la partie différentielle est nulle :*

$$g(x) = \lambda \int_D K(x,t) \sum_{i=0}^{m} B_i(t)u^{(i)}(t)dt,$$

sinon elle est dite de deuxième espèce.

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x)u^{(j)}(x) = \lambda \int_D K(x,t) \sum_{i=0}^{m} B_i(t)u^{(i)}(t)dt + g(x).$$

4-Singularité des équations intégro-différentielles *: Une équation intégro-différentielle est dite singulière dans l'un des cas suivants :*

- *L'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies.*
- *Le noyau est non borné sur l'intervalle d'intégration.*

5-Type du Noyau *: On distingue plusieurs types de noyaux :*

- ***Noyau symétrique (Hermitien)*** *Un noyau $K(x,t)$ est dit Hermitien, s'il est de la forme :*

  $$K(x,t) = \overline{K(t,x)},$$

  Dans le cas réel, ce noyau est dit symétrique si

  $$K(x,t) = K(t,x).$$

- ***Noyau dégénéré (séparable)*** *Un noyau $K(x,t)$ est dit dégénéré, s'il est de la forme :*

  $$K(x,t) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} g_{\mathrm{i}}(x)\, h_{\mathrm{i}}(t),$$

où les fonctions g_i *et* h_i *sont supposées continues et linéairement indépendantes dans le carré* $a \leq x, t \leq b$.

- ***Noyau de Cauchy*** *Un noyau* $K(x,t)$ *est dit noyau de Cauchy s'il est de la forme*

$$K(x,t) = \frac{H(x,t)}{x-t}, \; a \leq x, \; t \leq b,$$

où $H(x,t)$ *est une fonction différentiable avec* $H(x,t) \neq 0$. *Une équation intégro-différentielle définie avec ce noyau est appelée équation intégro-différentielle singulière avec noyau de Cauchy.*

- ***Noyau d'Abel*** *Un noyau* $K(x,t)$ *est dit noyau d'Abel sil est de la forme*

$$K(x,t) = \frac{H(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, 0 < \alpha < 1, \alpha \leq x, t \leq b,$$

où α *est donnée et* $H(x,t)$ *est une fonction bornée avec* $H(x,t) \neq 0$. *Une équation intégro-différentielle définie avec ce noyau est dite équation intégro-différentielle faiblement singulière.*

- ***Noyau de convolution*** *Un noyau* $K(x,t)$ *est dit noyau de convolution, s'il est de la forme* $K(x,t) = K(x-t)$.

Remarque 2.1.
L'ordre d'une équation intégro-différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée qui apparait dans l'opérateur différentiel.

Remarque 2.2.
On doit noter qu'une équation de Fredholm peut être réduite en une équation de Volterra, il suffit de prendre le noyau $K(x,t) = 0$, *pour* $x < t$.

Remarque 2.3.
• *Si la fonction inconnue dépend d'une seule variable indépendante, l'équation intégro-différentielle est dite ordinaire.*
• *Si la fonction inconnue dépend de deux ou plusieurs variables indépendantes, l'équation intégro-différentielle est dite partielle.*

2.2.2 Conversion d'une équation intégro-différentielle de Volterra en une équation intégrale de Volterra

Dans cette partie nous allons convertir léquation intégro-différentielle de Volterra en une équation intégrale de Volterra équivalente, à condition, que le noyau soit un noyau de différence défini par $k(x,t) = k(x-t)$, Nous illustrons trois formules :

$$\int_0^x \int_0^x u(t)dt = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

$$\int_0^x \dots \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt$$

Pour donner un apercu claire de cette méthode, nous donnons l'exemple suivant :

Exemple 2.9. *(Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante)*

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}\int_0^x u(t)dt,$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 0.$$

On a

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}\int_0^s \int_0^x u(t)dt,$$

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}\int_0^x (x-t)u(t)dt.$$

2.2.3 Conversion d'un probléme aux valeurs initiales en une équation intégro-différentielle de type de Volterra

On considère le problème aux valeurs initiales du second ordre de la forme (Voir [14]) :

$$U''(x) + p(x)U'(x) + q(x)U(x) = f(x). \tag{2.16}$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = \alpha,\ U'(0) = \beta, \tag{2.17}$$

où α et β sont des constantes. Les fonctions p et q sont des fonctions analytiques et f est continue. On pose

$$U''(x) = y(x), \tag{2.18}$$

où $y(x)$ est une fonction continue sur le domaine de discussion. Une première intégration de 0 à x donne

$$U'(x) - U'(0) = \int_0^x y(t)dt,$$

donc

$$U'(x) = \int_0^x y(t)dt + \beta. \tag{2.19}$$

Par une seconde intégration de 0 à x, on obtient

$$U(x) - U(0) = \int_0^x \int_0^{x_1} y(t)dtdx_1 + \beta x.$$

$$U(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt + \beta x + \alpha. \tag{2.20}$$

En substituant (2.18), (2.19) et (2.20) dans léquation (2.16), on obtient

$$y(x) + p(x)[\int_0^x y(t)dt + \beta] + q(x)[\int_0^x (x-t)y(t)dtdx_1 + \beta x + \alpha] = f(x).$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme d'une équation intégrale de Volterra.

$$y(x) = g(x) - \int_0^x K(x,t)y(t)dt, \tag{2.21}$$

où

$$K(x,t) = p(x) + q(x)(x-t)$$

et

$$g(x) = f(x) - [\beta q(x)x + \alpha + q(x)\beta p(x)]$$

En différenciant léquation intégrale de Volterra (2.21), on obtient une équation intégro-différentielle de Volterra de la forme

$$\begin{cases} u'(x) + K(x,x)u(x) = g'(x) - \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} u(t)dt, \\ u(0) = g(0). \end{cases} \tag{2.22}$$

Remarque 2.4. *Il est possible aussi de convertir un problem aux limites en une équation intégro-différentielle de Fredholm. Il suffit de suivre la même méthode précédente et de mettre les conditions aux limites à la place des conditions initiales.*

2.2.4 Méthodes de résolution des équations intégro-différentielles (E.I.D)

La résolution analytique des équations intégro-difféerentielles est difficile. Ceci a motivé ces dernières années, l'apparition de plusieurs méthodes numériques pour les résoudre. On cite, par exemple : la méthode des Polynômes de Legendre [22], *la méthode d'interpolation de Lagrange* [23]*,...etc.*

CHAPITRE

3

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites. On entend, ici, par équations intégro-différentielles abstraites (en abrégé EIDA), des équations intégro-différentielles à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) dans un espace de Banach.
L'objectif de ce chapitre est de présenter une synthèse des résultats obtenus dans l'article de D. Bahuguna [1], intitulé :

"Integrodifferential equations with analytic semigroups."

Par une approche basée sur la théorie des semi-groupes analytiques et les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires. Plus précisément, on se propose d'étudier, dans un espace *de Banach X, l'équation intégro-différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)) + K(u)(t), \ t > t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où

$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(s, u(s))ds. \tag{3.2}$$

Nous supposons que l'opérateur $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans l'espace X et que $\|S(t)\| \leq M$, pour $t \geq 0$. et $0 \in \rho(-A)$. où $\rho(-A)$ désigne l'ensemble résolvant de $-A$.
Soit J l'intervalle fermé de $[t_0, T)$, $t_0 < T \leq \infty$.
Les hypothèses fondamentales de ce travail sont :
***Hypothèse F** : Soit U un ensemble ouvert de $[0, \infty) \times X_a$. Pour chaque $(t, x) \in U$, il existe un ensemble $V \subset U$ voisinage de(t, x), et deux constantes $L > 0, 0 < \theta < 1$ tels que*

$$\|f(s_1, u) - f(s_2, v)\| \leq L[|s_1 - s_2|^{\theta} + \|u - v\|_{\alpha}], \tag{3.3}$$

pour tous $(s_1, u), (s_2, v) \in V$. Ici X_{α}, pour $0 \leq \alpha \leq 1$, désigne l'espace de Banach $D(A^{\alpha})$ muni de la norme $\|u\|_{\alpha} = \|A^{\alpha}u\|$.
***Hypothèse** F_0 : Soit U un ensemble ouvert de $[0, \infty) \times X_a$. Pour chaque $(t, x) \in U$, il existe un ensemble $V \subset U$ voisinage de (t, x) et une constante L_0 tels que*

$$\|f(s, u) - f(s, v)\| \leq L_0\|u - v\|_{\alpha}. \tag{3.4}$$

pour tous $(s, u), (s, v) \in V$.
Les solutions étudiées dans ce chapitre, sont définies par :

Définition 3.1. *Une solution intégrale (mild en anglais) de (3.1) sur J, est une fonction continue u définie de $J \to X$ satisfaisant l'équation intégrale suivante*

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, u(s)) + K(u)(s)ds]ds, \ t \in J.$$

Définition 3.2. *On dit que (3.1) admet une solution intégrale (mild) locale, s'il existe un $T_0, 0 < T_0 < T$ et une fonction continue u définie de $J_0 = [t_0, T_0] \to X$ telle que u soit une solution intégrale (mild) de (3.1) sur J_0.*

Définition 3.3. *Une solution classique de* (3.1) *sur* J*, est une fonction* $u \in C(J,X) \cap C^1(J/\{t_0\},X)$ *vérifiant* (3.1)*sur* J*.*

Définition 3.4. *Une solution classique locale de* (3.1) *sur* J *est une fonction vérifiant : il existe un* $T_0, t_0 < T_0 < T$*, et une fonction* u *définie de* $J_0 = [t_0, T_0] \to X$ *telle que* u *soit une solution classique de* (3.1) *sur* J_0*.*

3.1 Existence locale des solutions

3.1.1 Existence et unicité d'une solution intégrale (mild) locale

Comme indiqué précédemment, on peut supposer sans perte de généralité que le semi-groupe analytique engendré par $-A$ *est borné et que* $-A$ *est inversible. De plus, nous supposons que* $0 < T < \infty$ *pour établir l'existence locale de la solution. Avec ces simplifications on a le résultat essentiel suivant.*

Théorème 3.1. *Supposons que l'opérateur*$-A$ *engendre le semi-groupe analytique* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *avec* $\|S(t)\| \leq M, t \geq 0$ *et que* $0 \in \rho(A)$*. Si les fonctions* f *et* g *vérifient l'hypothèse* F_0 *et que la fonction à valeurs réelles* a *est intégrable sur* J*, alors le problème* (3.1) *a une unique solution local intérgrale (Mild) pour tout* $u_0 \in X_\alpha$*.*

Preuve. *On fixe un point* (t_0, u_0) *dans l'ouvert* U *de* $[0,\infty) \times X_\alpha$ *et on choisit* $t_1' > t_0$ *et* $\delta > 0$ *tel que (3.4) avec une constante* $L_0 > 0$ *pour les fonctions* f *et* g *sur l'ensemble*

$$V = \{(t,x) \in U; t_0 \leq t \leq t_1', \|x - u_0\|_\alpha \leq \delta\}. \tag{3.5}$$

On a $B_1 = \sup_{t_0\leq t\leq t_1'} \|f(t,u_0)\|$ *et* $B_2 = \sup_{t_0\leq t\leq t_1'} \|g(t,u_0)\|$*.*
Choisissons $t_1 > t_0$ *tel que*

$$\|S(t-t_0) - I\|\|A^\alpha u_0\| \leq \frac{1}{2}\delta, \textit{ pour } t_0 \leq t \leq t_1 \tag{3.6}$$

et

$$t_1 - t_0 < \min\{t_1' - t_0, [\frac{\delta}{2} C_\alpha^{-1}(1-\alpha)\{(L_0\delta + B_1) + a_T(L_0\delta + B_2)\}^{-1}]^{\frac{1}{1-\alpha}}\} \tag{3.7}$$

où C_α *est une constante positive dépendant de* α *satisfaisant*

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}, \quad \textit{pour} \quad t > t_0 \tag{3.8}$$

et

$$a_T = \int_0^T |a(s)ds|. \tag{3.9}$$

Soit $Y = C([t_0,t_1];X)$ *muni de la norme* $\|y\|_Y = \sup_{t_0\leq t\leq t_1} \|y(t)\|$. *Alors* Y *est un espace de Banach. On définit une application sur* Y *par* $Fy = \tilde{y}$ *où* $\tilde{y}$ *est donnée par*

$$\tilde{y}(t) = S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha S(t-s)[f(s, A^{-\alpha}y(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau]ds.$$

Maintenant, pour tout $y \in Y, Fy(t_0) = A^\alpha u_0$ *et pour* $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$, *on a*

$$\begin{aligned}
Fy(t) - Fy(s) = {} & S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha S(t-s)[f(s, A^{-\alpha}y(s)) \\
& + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau, A^\alpha y(\tau))d\tau]ds \\
& - S(t-t_0)A^\alpha u_0 - \int_{t_0}^s A^\alpha S(s-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) \\
& + \int_{t_0}^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta))d\eta]d\tau.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Fy(t) - Fy(s) = {} & [S(t-t_0) - S(s-t_0)]A^\alpha u_0 \\
& + \int_{t_0}^s A^\alpha S(t-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) + \int_{t_0}^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta))d\eta]d\tau \\
& + \int_s^t A^\alpha S(t-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) + \int_s^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta))d\eta]d\tau \\
& - \int_{t_0}^s A^\alpha S(s-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) + \int_{t_0}^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta))d\eta]d\tau.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Fy(t) - Fy(s) = {} & [S(t-t_0) - S(s-t_0)]A^\alpha u_0 \\
& + \int_s^t A^\alpha S(t-\tau)[f(\tau, A^{-\alpha}y(s)) \\
& + \int_{t_0}^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta)d\eta)]d\tau \\
& + \int_{t_0}^s A^\alpha[S(t-\tau) - S(s-\tau)][f(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) \\
& + \int_{t_0}^\tau a(\tau-\eta)g(\eta, A^{-\alpha}y(\eta))d\eta]d\tau.
\end{aligned}$$

Il découle de ***l'hypothèse*** F_0 *sur les fonctions* f *et* g, *de* (3.8) *et* (3.9) *que* $F : Y \to Y$.

Soit S l'ensemble fermé et borné non vide défini par :

$$S = \{y \in Y : y(t_0) = A^\alpha u_0, \|y(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta\}. \tag{3.10}$$

Alors pour $y \in S$, on a

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - A^\alpha u_0\| = \|&S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s)[f(s, A^{-\alpha}y(s)) \\
&+ \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau]ds \\
&- A^\alpha(u_o + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s)[f(s,u_0) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u_0)d\tau]ds) \\
&+ \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s)[f(s,u_0) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u_0)d\tau]ds\|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - A^\alpha u_0\| \leq \|&(S(t-t_0) - I)A^\alpha u_0\| \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\| \|[f(s, A^{-\alpha}y(s)) - f(s,u_0)\| ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\| [\int_{t_0}^{s} |a(s-\tau)| \|g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau)) - g(s,u_0)\| d\tau] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\| \|f(s,u_0)\| ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\| \int_{t_0}^{s} |a(s-\tau)| \|g(\tau,u_0)\| d\tau] ds
\end{aligned}$$

De l'inégalité (3.8), on a

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\| ds &\leq C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \\
&\leq C_\alpha \Big(- \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big) \Big|_{t_0}^{t} \\
&\leq C_\alpha (1-\alpha)^{-1} (t-t_0)^{1-\alpha}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En utilisant les deux dernières inégalités (3.6) et (3.9), tel que :

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - A^\alpha u_0\| &\leq \frac{1}{2}\delta + C_\alpha(1-\alpha)^{-1} \\
&\quad [(L_0\|A^{-\alpha}y(s) - u_0\| + B_1) + a_T(L_0\|A^{-\alpha}y(\tau) - u_0\| + B_2)](t-t_0)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{1}{2}\delta + C_\alpha(1-\alpha)^{-1}[(L_0\delta + B_1) + a_T(L_0\delta + B_2)](t_1 - t_0)^{1-\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.7), *il vient*

$$\|Fy(t) - A^\alpha u_0\| \leq \delta. \tag{3.13}$$

Ainsi, on obtient $F : S \to S$. *Montrons maintenant que* F *est une contraction stricte de* S *qui assurera l'existence d'une fonction continue unique vérifiant l'équation* (3.4).

Soient y *et* z *dans* S, *alors*

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - Fz(t)\| &= \|\tilde{y}(t) - \tilde{z}(t)\| \\
&= \|S(t-t_0)A^\alpha u_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s)[f(s, A^{-\alpha}y(s)) \\
&+ \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))d\tau]ds \\
&- S(t-t_0)A^\alpha u_0 - \int_{t_0}^{t} A^\alpha S(t-s)[f(s, A^{-\alpha}z(s)) \\
&+ \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, A^{-\alpha}z(\tau))d\tau]ds.\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\|\|f(s, A^{-\alpha}y(s)) - f(s, A^{-\alpha}z(s))\|ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\|[\int_{t_0}^{s} |a(s-\tau)|\|g(\tau, A^{-\alpha}y(\tau))\|d\tau]ds.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant l'hypothèse F_0 *sur* f *et* g *et* (3.8), (3.9), *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - Fz(t)\| &\leq L_0\|A^{-\alpha}y - A^{-\alpha}z\| \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\|ds \\
&+ a_T L_0\|A^{-\alpha}y - A^{-\alpha}z\| \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha S(t-s)\|ds.
\end{aligned}$$

En multipliant par δ *et* $\dfrac{1}{\delta}$ *avec :*

$$\|y - z\|_Y = \|A^{-\alpha}(y-z)\|, \ y \text{ et } z \in Y.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - Fz(t)\| &\leq L_0(1-a_T)C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\|y-z\|_Y \\
&\leq \frac{1}{\delta}\delta L_0(1-a_T)C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\|y-z\|_Y \\
&\leq \frac{1}{\delta}[\delta L_0 + B_1 + a_T(L_0\delta + B_2)]C_\alpha(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\|y-z\|_Y.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.7) dans la dernière inégalité , il vient

$$\|Fy(t) - Fz(t)\| \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_Y. \tag{3.15}$$

Ainsi F est une application de contraction stricte de S dans S et donc par le principe de contraction de Banach il existe un unique point fixe $y$de F dans S, c'est-à-dire qu'il existe un unique $y \in S$ tel que

$$Fy = y = \tilde{y} \tag{3.16}$$

Soit $u = A^{-\alpha}y$. Alors pour $t \in [t_0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &= A^{-\alpha}y(t) \\ &= S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s, u(s)) + k(u)(s)]ds \end{aligned}$$

Donc u est une unique solution locale intégrale (Mild) de (3.1).

3.1.2 Régularité des solutions intégrales (mild)

Dans cette section nous établissons la régularité des solutions intégrales de (3.1). Encore une fois, notons J la fermeture de l'intervalle $[t_0, T)$, $t_0 < T \leq \infty$. En plus des hypothèses mentionnées dans les sections précédentes, nous supposons que la fonction a :

***(H)** Il existe des constantes $C_0 \geq 0$ et $0 < \beta \leq 1$ telles que*

$$|a(t) - a(s)| \leq C_0|t - s|^{\beta}$$

pour tout $t, s \in J$.

Théorème 3.2. *Supposons que $-A$ engendre le semi-groupe analytique $S(t)$ tel que $\|S(t)\| \leq M$ pour $t \geq 0$, et $0 \in \rho(-A)$. De plus, supposons que les fonctions f et g satisfont l'hypothèse F et que la fonction a satisfait l'hypothèse (H). Alors le problème (3.1) admet une unique solution classique locale pour chaque $u_0 \in X_\alpha$.*

Preuve 3.1. *D'après théorème 3.1, il existe $T_0, t_0 < T_0 < T$ et une fonction u tel que u soit une unique solution Mild de (3.1) sur $J_0 = [t_0, T_0)$ donnée par*

$$u(t) = s(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)[f(s, u(s)) + k(u)(s)]ds,\ t\ inJ_0 \tag{3.17}$$

où
$$K(u)(t) = \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(s,u(s))ds.$$

Soit
$$v(t) = A^{\alpha}u(t). \tag{3.18}$$

Puis
$$\begin{aligned} v(t) &= S(t-t_0)A^{\alpha}u_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} S(t-s)[f(s,A^{-\alpha}v(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,A^{-\alpha}v(\tau))d\tau]ds. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pour simplifier, nous posons :
$$\tilde{f}(t) = f(t,A^{-\alpha}v(t)), \tilde{g}(t) = g(t,A^{-\alpha}v(t)) \tag{3.20}$$

Alors (3.19) *peut être réécrit comme*
$$\begin{aligned} v(t) &= S(t-t_0)A^{\alpha}u_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} S(t-s)[\tilde{f}(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau]ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Comme $u(t)$ *est continue sur* J_0 *et que les fonctions* f *et* g *vérifient* ***l'hypothèse F*** *, il s'ensuit que* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *sont continues, donc bornées sur* J_0*.*
Soit
$$N_1 = \sup_{t\in J_0} \|\tilde{f}(t)\| \text{ et } N_2 = \sup_{t\in J_0} \|\tilde{g}(t)\|. \tag{3.22}$$

Nous montrons que $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *sont localement Hölderiennes continues sur* J_0*. Pour cela, nous montrons d'abord que* $v(t)$ *est localement Hölderienne continue sur* J_0*. Du* ***théorème 2.6.13 de Pazy*** *[18], il résulte que pour tout* $0 < \beta < 1-\alpha$ *et tout* $0 < h < 1$ *, on a*
$$\begin{aligned} \|(S(h)-I)A^{\alpha}S(t-s)\| &\leq C_{\beta}h^{\beta}\|A^{\alpha+\beta}S(t-s)\| \\ &\leq Ch^{\beta}(t-s)^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Ensuite, On a

$$\begin{aligned}\|v(t+h)-v(t)\| &= \|S(t+h-t_0)A^{\alpha}u_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t+h} S(t+h-s)[\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau]ds. \\ &- S(t-t_0)A^{\alpha}u_0 \\ &- \int_{t_0}^{t} S(t-s)[\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau]ds.\| \\ &\leq \|(S(h)S(t-s)-S(t-s))A^{\alpha}u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|(S(h)-I)A^{\alpha}S(t-s)\|\|\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|ds \\ &+ \int_{t_0}^{t+h} \|A^{\alpha}S(t+h-s)\|\|\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|ds.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|v(t+h)-v(t)\| &\leq \|(S(h)-I)S(t-s)A^{\alpha}u_0\| \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|(S(h)-I)A^{\alpha}S(t-s)\|\|\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|ds \\ &+ \int_{t_0}^{t+h} \|A^{\alpha}S(t+h-s)\|\|\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|ds.\end{aligned} \tag{3.24}$$

D'où

$$\|(S(h)-I)S(t-t_0)A^{\alpha}u_0\| \leq C(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}h^{\beta} \leq M_1h^{\beta}. \tag{3.25}$$

Où M_1 *dépend de* t *et lorsque* t *diminue jusqu'à* t_0*. aussi,*

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t} \|(S(h)-I)A^{\alpha}S(t-s)\|\|\tilde{f}(s)+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|ds \\ &\leq [N_1+a_{T_0}N_2T_0]h^{\beta}C\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-(\alpha+\beta)}ds \\ &\leq M_2h^{\beta}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Où M_2 est indépendant de t. Aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+h} \|A^\alpha S(t+h-s)\| \|\tilde{f}(s) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\| ds \\
&\leq [N_1 + a_{T_0} N_2 T_0] C_\alpha \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} ds \\
&\leq [N_1 + a_{T_0} N_2 T_0] C_\alpha \frac{h^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} \\
&\leq M_3 h^\beta.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Où M_3 est aussi indépendant de t. Des estimations de (3.25)-(3.26)-(3.27) , il s'ensuit qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $t > t_0$, on a

$$\|v(t) - v(s)\| \leq c_1 |t-s|^\beta \tag{3.28}$$

pour tout $t_0 < t'_0, s < T_0$.
*Maintenant, **l'hypothése F** avec (3.28) impliquent qu'il existent des constants $C_2, C_3 \geq 0$ et $0 < \gamma, \eta < 1$, telles que pour tout $t_0 < t'_0 < t, s < T_0$, On a*

$$\|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)\| \leq C_2 |t-s|^\gamma \tag{3.29}$$

$$\|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(s)\| \leq C_3 |t-s|^\eta. \tag{3.30}$$

Soit

$$h(t) = \tilde{f}(t) + \int_{t_0}^t a(t-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau. \tag{3.31}$$

Montrons maintenant que la fonction h est localement continue de Hölder sur J_0. Pour $s \leq t$, on a

$$\begin{aligned}
\|h(t) - h(s)\| &= \|\tilde{f}(t) + \int_{t_0}^t a(t-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau - \tilde{f}(s) - \int_{t_0}^s a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\| \\
&= \|\tilde{f}(t) + \int_{t_0}^s a(t-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau + \int_s^t a(t-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau \\
&- \tilde{f}(s) - \int_{t_0}^s a(s-\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau\|
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\|h(t)-h(s)\| &= \|\tilde{f}(t)-\tilde{f}(s)\| + \int_{t_0}^{s} |a(t-\tau)-a(s-\tau)|\|\tilde{g}(\tau)\|d\tau \\ &\quad + \int_{s}^{t} |a(t-\tau)|\|\tilde{g}(\tau)\|d\tau \\ &\leq C_2|t-s|^{\gamma} + N_2C_0T_0|t-s|^{\beta} + N_2a_{T_0}(2T_0)^{1-\beta}|t-s|^{\beta} \\ &\leq C_4|t-s|^{\delta},\end{aligned} \tag{3.33}$$

pour certaines constantes $C_4 \geq 0$ et $0 < \delta < 1$. Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + Av(t) = h(t), t > t_0, \\ v(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{3.34}$$

D'après le corollaire 4.3.3 de Pazy [18], (3.34) admet une solution unique $v \in C^1((t_0, T_0]; X)$ donnée par

$$v(t) = S(t-t_0)u_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} S(t-s)h(s)ds. \tag{3.35}$$

Pour $t > t_0$, chaque terme du membre de droite appartient à $D(A)$ et donc appartient à $D(A^{\alpha})$. En appliquant A^{α} aux deux membres de (3.35) et en utilisant l'unicité de $v(t)$, on obtient $A^{\alpha}v(t) = u(t)$. Donc u est la solution classique de (3.1) sur J_0.

3.2 Existence globale des solutions classiques

Pour établir l'existence globale des solutions classiques de (3.1), nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soit $\phi(t,s) \geq 0$ continue sur $0 \leq s \leq t \leq T < \infty$. S'il y a des constantes positives A, B et α telles que*

$$\phi(t,s) \leq A + B\int_{s}^{t} (t-\sigma)^{\alpha-1}\phi(\sigma,s)d\sigma, \tag{3.36}$$

pour $0 \leq s < t \leq T$, alors il existe une constante C telle que

$$\phi(t,s) \leq C.$$

Preuve. *Pour* $0 \leq s \leq t \leq T$, *On a* $\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau$.
Par le changement de variable
$x = \dfrac{\tau - s}{t-s}$ *alors* $\tau \to t, x \to 1$ *et* $\tau \to s, x \to 0$ *et* $d\tau = (t-s)dx$.
On a

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx.$$

telle que

$$\beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Donc

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{3.37}$$

ce qui est vrai pour tout $\alpha, \beta > 0$. *En intégrant* (3.36) *(n-1) fois ,en utilisant* (3.37) *et en remplaçant* $t-s$ *par* T, *on obtient : (voir Pazy [18], p. 159)*

$$\phi(t,s) \leq A\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{BT^{\alpha}}{\alpha})^j + (\frac{B\Gamma(\alpha))^{\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\int_s^t (t-\sigma)^{n\alpha-1}\phi(t,\sigma)d\sigma. \tag{3.38}$$

Soit n *assez grand pour que* $n\alpha > 1$. *On majore* $(t-\sigma)^{n\sigma-1}$ *par* $T^{n\alpha-1}$ *pour obtenir :*

$$\phi(t,s) \leq C_1 + C_2\textstyle\int_s^t \phi(\sigma,s)d\sigma. \tag{3.39}$$

L'application de ***l'inégalité de Gronwall*** *conduit à*

$$\phi(t,s) \leq C_1 e^{C_2(t-s)} \leq C_1 e^{c_2 T} \leq C, \tag{3.40}$$

où C_1 , C_2 *sont indépendant de* s *alors l'inégalité est vérifiée pour*
$0 \leq s < t \leq T$. *Ceci complète la preuve du lemme. Le théorème suivant concerne l'existence globale de solutions classiques du problème* (3.1).

Théorème 3.4. *Soit* $0 \in D(A)$ *et soit* $-A$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique S(t) satisfaisant*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

pour $t \leq t_0$. *Soit* $f, g : [t_0, \infty) \times X_\alpha \to X$ *satisfait* ***l'hypothèse F*** *et soit la fonction* a *satisfait* ***(H)***. *S'il existe des fonctions continues non décroissantes* k_1 *et* k_2 *de* $[t_0, \infty)$ *dans*

$[0, \infty)$ *telles que*

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &\leq k_1(t)(1+\|x\|_\alpha) \text{ pour } t \geq t_0, x \in X_\alpha \\ \|g(t,x)\| &\leq k_2(t)(1+\|x\|_\alpha) \text{ pour } t \geq t_0, x \in X_\alpha \end{aligned} \tag{3.41}$$

aux valeurs initiales (3.1) *admet une unique solution classique* u *sur* $[t_0, \infty)$ *pour tout* $u_0 \in X_\alpha$.

Preuve 3.2. *Du Théorème 3.2, il existe un* $T_0, t_0 < T_0$ *et une solution classique unique* u *sur* $J_0 = [t_0, T_0]$. *Si*

$$\|u(t)\|_\alpha \leq C \tag{3.42}$$

pour $t \in J_0$ *pour une constante positive* C, *alors la solution* $u(t)$ *peut être poursuivie plus loin à droite de* T_0. *Il suffit donc de prouver que si une solution classique* u *de* (3.1) *existe sur* $[t_0, T], t_0 < T < \infty$ *alors* $\|u(t)\|_\alpha$ *est borné car* $t \to T$. *Puisque* $u(t)$ *est une solution classique, c'est aussi une solution intégrale (Mild solution). Par conséquent nous avons*

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t-t_0)u_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} S(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{t} a(t-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds \end{aligned} \tag{3.43}$$

En utilisant le fait que $S(t)$ *commute avec* A *et que*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

$$\|A^\alpha S(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha}$$

pour $t \geq t_0$ *dans* (3.43) , *après application de* A^α *et prise des normes des deux côtés, on obtient*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\leq M\|A^\alpha u_0\| \\ &\quad + C_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\|f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{t} a(t-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau\|ds \end{aligned} \tag{3.44}$$

Pour le dernier terme de (3.44), *nous avons l'estimation*

$$\textstyle\int_{t_0}^{t} a(t-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau \leq a_T k_2(T) \int_{t_0}^{s}(1+\|u(\tau)\|_\alpha)d\tau. \tag{3.45}$$

alors ,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha &\le M\|A^\alpha u_0\| \\ &\quad + C_\alpha[k_1(T)+a_T k_2(T)]\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[1+\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}1+\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Après une légère modification dans (3.46)*, il résulte*

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha &\le M\|A^\alpha u_0\| \\ &\quad + C_\alpha(1+T)[k_1(T)+a_T k_2(T)]\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.47}$$

L'estimation en (3.47) *est du type*

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha &\le C_1 \\ &\quad + C_2\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.48}$$

pour certaines constantes positives C_1 *et* C_2 *dépendant de* α *et* T *seulement . En intégrant* (3.48) *sur* (t_0, t) *, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha d\xi &\le C_1 T \\ &\quad + C_2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\xi}(\xi-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]dsd\xi.\end{aligned} \tag{3.49}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans (3.49)*, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha d\xi &\le C_1 T \\ &\quad + C_2\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}(\xi-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]d\xi ds.\end{aligned} \tag{3.50}$$

On réécrit (3.50) *sous la forme*

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha d\xi &\leq C_1T \\ &+ C_2\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}(\xi-s)^{-\alpha}d\xi[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds \\ &\leq C_1T+\frac{C_2T}{1-\alpha}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.51) *est de la forme*

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha d\xi &\leq C_3 \\ &+ C_4\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.52}$$

pour certaines constantes positives C_3 *et* C_4*, dépendant de* α *et* T *seulement. En ajoutant* (3.48) *et* (3.52)*, on a*

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha+\int_{t_0}^{t}\|u(\xi)\|_\alpha d\xi &\leq C_5 \\ &+ C_6\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}[\|u(s)\|_\alpha+\int_{t_0}^{s}\|u(\tau)\|_\alpha d\tau]ds.\end{aligned} \tag{3.53}$$

pour certaines constantes positives C_5 *et* C_6*, dépendant uniquement de* α *et* T*. En appliquant le lemme 3.3 à* (3.53)*, on conclut que*

$$\|u(t)\|\leq C,$$

sur $[t_0,T]$*. Ceci achève la preuve du théorème.*

CHAPITRE

4

EXEMPLE D'APPLICATION EN EDP PARABOLIQUE

Nous passons maintenant à l'application des résultats obtenus à une EDP parabolique. Pour cela, nous utiliserons les notations suivants :
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *un élément de l'espace* $\mathbb{R}^n$.
Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, *on définit*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

et

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \text{ pour } x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

On rappelle aussi les notions suivantes : $D_K = \partial/\partial x_k$ *et* $D = (D_1, D_2, ..., D_n)$ *et*

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},$$

où $a_\alpha(x)$ *est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur* $\bar{\Omega}$ *pour chaque multi-*

indice α.
Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ avec frontière $\partial\Omega$. Rappelons que $C^m(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions m fois continûment différentiables sur Ωà valeur réelles (ou parfois comlexes).
Pour $u \in C^m(\Omega)$ et $1 \leq p < \infty$ nous définissons la norme :

$$\|u\|_{m,p} = (\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^p dx)^{1/p}.$$

4.1 Application

4.1.1 Équation parabolique dans l'espace de Hilbert L^2

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à frontière lisse $\partial\Omega$. Considérons l'opérateur différentiel d'ordre $2m$,

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.1}$$

où les coefficients $a_\alpha(x)$ sont des fonctions à valeurs complexes définies sur $\bar{\Omega}$ pour chaque multi-indice α. la partie principale $A'(x, D)$ de $A(x, D)$ est l'opérateur

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

On a aussi la définition importante suivante :

Définition 4.1. *(voir Pazy [18], p. 209).*
L'opérateur $A(x, D)$ est fortement elliptique s'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$Re(-1)^m A'(x, \xi) \geq c|\xi|^{2m}. \qquad \text{pour tous } x \in \bar{\Omega} \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

*On suppose que $A(x, D)$ est **fortement elliptique**, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq c|\xi|^{2m}. \tag{4.3}$$

Pour les opérateurs fortement elliptiques, nous avons l'estimation suivante :

Théorème 4.1. ***(Inégalité de Garding)***

Si $A(x,D)$ est un opérateur fortement elliptique d'ordre $2m$, alors il existe des constantes $c_0 > 0$ et $\lambda_0 \geq 0$, telles que pour chaque $u \in H^{2m} \cap H_0^m$ nous avons

$$Re(Au,u)_0 \geq c_0\|u\|_{m,2}^2 - \lambda_0\|u\|_{0,2}^2. \tag{4.4}$$

Preuve 4.1. *(voir Pazy [18], p. 209).*

Considérons l'équation intégro-différentielle parabolique

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A(x,D)u(x,t) = f(x,t,u(x,t),Du(x,t),...,D^{2m-1}u(x,t))\\ + \int_{t_0}^{t} a(t-s)g(x,s,u(x,s),Du(x,s),..,D^{2m-1}u(x,s))ds,\\ x \in \Omega,\ t > t_0,\end{aligned} \tag{4.5}$$

avec les conditions :
$u(x,t_0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$
$u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, t \in [t_0,T), t_0 < T \leq \infty.$
On suppose que les fonctions f et g sont continûment différentiables pour toutes leurs variables, sauf éventuellement en x.
L'équation intégro-différentielle parabolique (4.5) peut être reformulée en une équation intégrodifférentielle abstraite dans l'espace $H = L^2(\Omega)$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t)}{\partial t} + Au(t) = F(t,u(t)) + \int_{t_0}^{t} a(t-s)G(s,u(s))ds, t > t_0,\\ u(t_0) = u_0,\end{aligned} \tag{4.6}$$

où l'opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ est défini par :

$$D(A) = H^{2m} \cap H_0^m,$$

et $Au = A(x,D)u + \lambda u$ pour $u \in D(A), \lambda > 0$ et $F, G : [t_0,T) \times D(A) \to H$ sont les opérateurs de Nemyckii donnés par :

$$F(t,u)(x) = f(x,t,u(x,t),Du(x,t),...,D^{2m-1}u(x,t)), \tag{4.7}$$

$$G(t,u)(x) = g(x,t,u(x,t), Du(x,t), ..., D^{2m-1}u(x,t)). \tag{4.8}$$

Théorème 4.2. *Soit $A(x,D)$, fortement elliptique d'ordre $2m$. Pour chaque λ vérifiant $Re\lambda \geq \lambda_0$ et pour chaque $f \in L^2(\Omega)$ il existe un élément unique $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ satisfaisant l'équation*

$$A(x,D)u + \lambda u = f.$$

Pour un opérateur fortement elliptique donné $A(x,D)$ sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nous associons un opérateur linéaire A dans l'espace hilbert
$H = L^2(\Omega)$.

Preuve 4.2. *(voir Pazy [18], p. 211).*

Cela se fait comme suit :

Définition 4.2. *(voir Pazy [18], p. 211).*
Soit $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ un opérateur fortement elliptique sur l'ensemble Ω et $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. Pour chaque
$u \in D(A)$, l'opérateur A est défini par

$$Au = A(x,D)u.$$

Avec cette définition , nous avons :

Théorème 4.3. *Soit $H = L^2(\Omega)$ et A L'opérateur défini ci-dessus . Pour chaque λ satisfaisant $Re\lambda \geq \lambda_0$, l'opérateur $-A_\lambda = -(A + \lambda I)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur $H = L^2(\Omega)$.*

Preuve 4.3. *(voir Pazy [18], p. 211).*

En fait,nous avons :

Théorème 4.4. *Si $A(x,D)$ est un opérateur fortement elliptique d'ordre $2m$, alors l'opérateur $-A$ (donné par la définition 4.2) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs sur $H = L^2(\Omega)$.*

Preuve 4.4. *(voir Pazy [18], p. 211).*

Nous avons aussi le corollaire essentiel suivant :

Corollaire 4.1. *Soit A le générateur infinitésimal de semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si la fonction $f \in L^1(0,T:X)$ est de Hölder locallement continue sur l'intervalle $]0,T]$, alors pour chaque $x \in X$ le problème à valeur initiale a une solution unique u.*

Preuve 4.5. *(voir Pazy [18], p. 113).*

Corollaire 4.2. *Soit $A(x,D)$ un opérateur fortement elliptique d'ordre $2m$ dans le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f(t,x) \in L^2(\Omega)$ pour chaque $t \geq 0$.*
Si

$$\int_{\Omega} |f(t,x) - f(s,x)|^2 dx \leq K|t-s|^{2\vartheta} \tag{4.9}$$

alors, pour chaque valeur initiale $u_0(x) \in L^2(\Omega)$, le probleme (4.6) admet une solution unique $u(t,x) \in C^1(]0,\infty[); H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Il s'ensuit que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur l'espace H. De plus, on peut vérifier que ***L'hypothèse F*** *est satisfaite par F et G. Sous des hypothèses convenables sur le noyau a, le théorème 3.2 assure l'existence d'une solution classique globale unique de (4.6) pour $p = 2$, ce qui garantit l'existence d'une solution classique globale unique de (4.5).*

Remarque 4.1. *Notons que, dans cet exemple on peut aussi considérer les coefficients $a_\alpha(x) = a_\alpha$ constants et les résultat obtenus ici restent vérifiés.*

4.1.2 Équation parabolique dans l'espace de Banach L^p

Soit Ω un domaine borné avec une frontière lisse dans $\mathbb{R}^n$. Dans la section précédent nous avons considéré des semi-groupes définis sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Il est souvent utile pour remplacer l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ par l'espace de Banach $L^p(\Omega)$. Ceci est généralement important si l'on souhaite obtenir des résultats optimaux de régularité des solutions.
Soit $1 < p < \infty$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ avec une frontiére lisse $\partial\Omega$. On considère l'opérateur différentiel forte ment elliptique dans Ω

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.10}$$

Pour $1 < p \leq \infty$ nous associons à l'opérateur $A(x,D)$, l'opérateur A_p,dans $L^p(\Omega)$ défini par

$$D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega),$$

et

$$A_p = A(x, D)u, \text{ pour } u \in D(A_p).$$

(voir définition (7.3.3) , Pazy [18], p.213). On a aussi le théoréme essentiel suivant :

Théorème 4.5. *Soit $1 < p < \infty$ et $A(x, D)$ un opération fortement elliptique d'ordre $2m$ sur l'ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$, avec frontière lisse $\partial\Omega$. Si A_p est un opérateur associé à A par défintion (3.3), alors $-A$ est le générateur infinitésimale d'un semi-groupe analytique sur $L^p(\Omega)$.*

Preuve 4.6. *(voir Pazy [18], p.214).*

Nous avons vu dans le théoréme 4.5 que $-A$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur $L^p(\Omega)$. Par conséquent $-(A_p + \lambda I)$ générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique qui est inversible.
Dans la suite, nous supposons que cela a été fait et supposons donc directement que A_p, lui-même est inversible. Voici un autre théoréme dont on aura besoin :

Théorème 4.6. *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre $2m$ sur Ω avec frontiére lisse en $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C \geq 0$, telle que*

$$\|u\|_{2m,p} \leq C(\|Au\|_{0,p} + \|u\|_{0,p}) \tag{4.11}$$

pour chaque $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$.

Nous supposons maintenant que A est inversible dans $L^p(\Omega)$, il s'ensuit que $C\|u\|_{0,p} \leq \|A_p u\|_{0,p}$, pour certaines constantes $C > 0$. Donc nous avons

$$\|u\|_{2m,p} \leq C\|A_p u\|_{0,p}, \text{ pour } u \in D(A_p). \tag{4.12}$$

Soit

$$F(t, u)(x) = f(t, x, u, Du, D^2u, ..., D^{2m-1}u). \tag{4.13}$$

$$G(t, u)(x) = g(t, x, u, Du, D^2u, ..., D^{2m-1}u). \tag{4.14}$$

oú D^j représente toute dérivée d'ordre j-ième. Supposons que f est une fonction continue *aussi différentiable pour toutes ses variables et considérons le problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_p u = F(t,u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Théorème 4.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à frontiére lisse $\partial\Omega$ et A_p l'oérateur défini ci-dessus. Si $0 \leq \alpha < 1$ alors :*

$$X_\alpha \subset W^{k,q}(\Omega) \ \ pour\ k - \frac{n}{q} < 2m\alpha - \frac{n}{p},\ q \geq p. \tag{4.16}$$

$$X_\alpha \subset C^\nu(\bar{\Omega}) \ \ pour\ 0 \leq \nu < 2m\alpha - \frac{n}{p}. \tag{4.17}$$

Preuve 4.7. *(voir Pazy [18], p.243).*

Du théoréme 4.7, si $1 - \frac{1}{2m} < \alpha < 1$ et p est assez grand, alors $X_\alpha \subset C^{2m-1}(\bar{\Omega})$. Cela implique que

$$\|F(t,u) - F(s,v)\|_{0,p} \leq C(|t-s| + \|u-v\|_{0.p}) \tag{4.18}$$

$$\|G(t,A^{-\alpha}u) - G(s,A^{-\alpha}v)\|_{0,p} \leq C(|t-s| + \|u-v\|_{0.p}) \tag{4.19}$$

Par conséquent, Si p est assez grand, Les conditions du théoréme 3.2 sont vérifiés. Nous avons

Théorème 4.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à frontière lisse $\partial\Omega$ et A_p l'opérateur défini ci-dessus. Soit F(t,u) et G(t,u) définies par (4.14) où f et g sont des fonctions continues différentiable pour toutes leurs variables.*
Si $p > n$ alors pour chaque $u_0 \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$, le probleme à valeur initiale (4.15) admet une solution globale unique.

CHAPITRE

5

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, après avoir présenté un survol sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, ainsi que leurs différentes propriétés, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites non linéaires considérées dans un espace de Banach. Plus précisément, ce travail, représente une synthèse des résultats obtenus dans l'article de D. Bahuguna [1], intitulé :

"INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ANALYTIC SEMIGROUPS",

En utilisant une méthode basée sur la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires et les puissances fractionnaires d'opérateurs, sous certaines hypothèses, nous avons montré des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions classiques de ce type d'équations. Les résultats abstraits obtenus ont été appliqués à une EDP parabolique.

CHAPITRE

6

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE

[1] *D, Bahuguna, Integrodifferential equations with analytic semigroups, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 16 :2 (2003), 177-189.*

[2] *D, Bahuguna, Integrodifferential equations with Analysis 24 (1995), 175-183.*

[3] *D. Bahuguna, and A.K. Pani, Strong solutions to nonlinear integrodifferential equations, Research Report CMA-R-29-90, Australian National University 1990.*

[4] *V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Editura Bouchuresti-Noordhoff 1976.*

[5] *V. Barbu, On nonlinear Volterra integral equation on a Hilbert space, SIAM J. Math. Anal. 8 (1977), 346-355.*

[6] *V. Barbu, Integrodifferential equations in Hilbert spaces, An. Sti.int. Univ. Al.I. Cuza Iasi Sect. Ia Mat. (N.S.) 19 (1973), 265-383.*

[7] *H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris,1983.*

[8] *M.G. Crandall, S.O.Londen, and J. A. Nohel, An abstract nonlinear Volterra integro-differential equation, J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), 701-735.*

[9] *K. Engel and R. Nagel, Short course on semigroups. Springer, 2010.*

[10] I. Farmakis, and M. Moskowitz, *Fixed point theorems and their applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.

[11] M. Heard, and S.M. Rankin, *A semilinear parabolic Volterra integrodifferential equation*, J. Differential Equations 71 (1988), 201-233.

[12] S.O. Londen, *On an integral equation in a Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal. 8 (1977), 950-970.

[13] A. Lunardi, and E. Sinestrari,, *Fully nonlinear integrodifferential equations in general Banach spaces*, Math. Z. 190 (1985), 225-248.

[14] A. Maadadi Étude et Construction de Méthodes Numériques pour Quelques Équations Intégro-Différentielles, thèse de Doctorat LMD, Université de Bordj Bou Arréridj, Algérie, 2018.

[15] K. Maleknejad, B. Basirat and Hashemizadeh, E. Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations. Comput. Math. Appl. 61 (2011) 2821-2828.

[16] P. Mikusinski and E. Weiss, The Bochner Integral, University of Central Florida, Orlando, Florida.

[17] J.A. Nohel, Nonlinear Volterra equations for heat flow in materials with memory, MRC. Report 2081, Madition, WI.

[18] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag 1983.

[19] M. Rahman, Integral Equations and Their Applications, Dalhousie university. Canada, 2007.

[20] M.T. Rashed, Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 151 (2004) 869-878.

[21] E. Sinestrari, Continuous interpolation spaces and special regularity in nonlinear Volterra integrodifferential equations, J. Integral Equations 5, 1983, 287-308.

[22] D.R. Smart, Fixed Point Theorem, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cambridge University Press, London.New York,1974.

[23] *H. Tanabe, Equations of evolution, Pitman, London, San fransisco, Melbourne, 1979.*

[24] *G.F. Webb, Abstract Volterra integrodifferential equations and a class of reaction diffusion equations, Lecture Notes in Mathematics Vol. 737, 295-303, Springer-Verlag, 1979*