

N° d'ordre :



Département de mathématiques

Mémoire de projet de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : **Isma Relid et Maroua Tsali**

Thème

Coloration impropre des graphes planaires

Soutenu publiquement le 20/07/2023, devant le jury composé de :

M ^r H. El Mossaoui	M.C.B	Université de Blida 1	Président
M ^{me} A. Ramoul	M.C.B	Université de Blida 1	Examinatrice
M ^{me} S. Kerdjoudj	M.C.A	Université de Blida 1	Encadreur

Remerciements

Grâce à Allah nous avons pu aboutir à la concrétisation de ce travail. Tout d'abord, merci au grand DIEU, notre créateur qui nous a donné la volonté, la force et le courage pour le parachèvement de ce travail.

Nous remercions notre promotrice Samia KERDJOUDJ pour avoir accepté de nous encadrer tout en long de ce travail, pour son amabilité, sa disponibilité et ses conseils.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Monsieur H. El Mossaoui qui nous a fait l'honneur d'accepter de présider le jury et Madame A. Ramoul, d'avoir accepté de faire partie du jury et d'examiner ce mémoire, nous tenons à leur exprimer toute notre gratitude.

Nous profitons également pour remercier chaleureusement tous les membres de nos familles ainsi que les enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à notre formation.

Coloration impropre des graphes planaires

Résumé : Une k -coloration t -frugale impropre d'un graphe G est une coloration des sommets de G utilisant k couleurs tel que pour tout sommets v de G aucune couleur n'apparaît plus de t fois dans le voisinage de v . Le nombre chromatique t -frugal impropre, noté $\chi_t^I(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration t -frugale impropre. Cette notion a été introduite par Bard en 2021. Dans ce mémoire, nous avons étudié le nombre chromatique t -frugal de certaines classes de graphes planaires.

Mots-clé : coloration impropre - coloration frugale - nombre chromatique frugale - méthode de déchargement - graphe planaire.

Improper coloring of planar graphs

Abstract : A t -frugal k -coloring of a graph G is a coloring of the vertices of G using k colors such that no color appears more than t times in the neighbourhood of any vertex. The improper t -frugal chromatic number, denoted $\chi_t^I(G)$, is the smallest integer k such that G admits a k -coloring t -frugal improper. This notion was introduced by Bard in 2021. In this work, we study the improper chromatic number t -frugal for some classes of planar graph in term of maximum degree.

Keywords : improper coloring - frugal coloring - frugal chromatic number - discharging method - planar graph

Table des matières

Introduction	1
1 Éléments de la théorie des graphes	3
1.1 Définitions et notations	3
1.1.1 Graphes non orientés	3
1.1.2 Adjacence, incidence et voisinage	4
1.1.3 Degré	4
1.1.4 Sous-graphes et sous-graphes induits	5
1.1.5 Stabilité et couplage	6
1.1.6 Chaîne et cycle	6
1.1.7 Connexité	7
1.1.8 Distance et diamètre	7
1.1.9 Subdivision	8
1.2 Quelques classes de graphe	8
1.2.1 Graphe régulier	8
1.2.2 Graphe complet	9
1.2.3 Graphe k -parti et graphe biparti complet	9
1.2.4 Arbre et forêt	10
1.2.5 Graphe planaire	10
1.2.6 Graphe planaire extérieur	11
1.2.7 Graphe k -puissance	11
1.3 Contraction et mineur	12
1.4 Quelques notions de colorations de graphes	13
1.4.1 Coloration propre des sommets	13
1.4.2 Coloration propre des arêtes	14
1.4.3 Coloration totale	15
1.5 Méthode de déchargement	15

2	Coloration frugale	17
2.1	Introduction	17
2.2	Nombre chromatique t -frugal	18
2.3	Exemple d'application	19
2.4	Problème de décision	19
2.5	Nombre chromatique t -frugal de quelques classes de graphes	20
2.5.1	Bornes générales du nombre chromatique t -frugal	20
2.5.2	Nombre chromatique t -frugal des arbres et des graphes complets	21
2.5.3	Nombre chromatique t -frugal des graphes planaires	21
2.5.4	Nombre chromatique t -frugal des graphes planaires extérieurs	23
2.5.5	Nombre chromatique t -frugal des graphes sans mineurs K_4	24
3	Coloration frugale impropre	25
3.1	Introduction	25
3.2	Nombre chromatique t -frugal impropre	26
3.3	Bornes générales du nombre chromatique t -frugale impropre	26
3.4	Complexité de la coloration t -frugale impropre	28
3.5	Coloration t -frugale impropre d'un graphe sans mineur K_4	28
3.6	Coloration t -frugale impropre des graphes planaires	34
3.7	Coloration t -frugale impropre d'un graphe planaire de maille $g \geq 8$	36
3.8	Coloration t -frugale impropre des graphes planaires extérieurs	38
	Conclusion et perspectives	41
	Bibliographie	42

Table des figures

1	Chapitre 1	3
1.1	Exemple de graphes non orientés	4
1.2	Exemples de sous-graphes et de sous-graphes induit	5
1.3	Stable et couplage	6
1.4	Exemple de cycle et chaîne	7
1.5	Exemple de Graphe non connexe et graphe connexe	7
1.6	Distance et diamètre	8
1.7	L'étoile $K_{1,3}$ subdivisée	8
1.8	Un graphe 3-régulier	9
1.9	Le graphe complet K_5	9
1.10	Exemples de Graphes bipartis	9
1.11	Exemple d'arbre et de forêt	10
1.12	Représentation planaire du K_4	10
1.13	Un graphe planaire extérieur	11
1.14	Graphe 2-puissance	12
1.15	Contraction de l'arête uv	12
1.16	Exemple de graphe contenant un mineur $K_{2,4}$	13
1.17	Coloration propre des sommets d'un graphe G	13
1.18	4-coloration propre des arêtes	14
1.19	5-coloration totale	15
2	Chapitre 2	17
2.1	Exemples de graphe pour lesquels $\Delta + 1 \leq \chi^2(G) \leq \Delta^2 + 1$	18
2.2	$\chi_2(G) = 3$	18
2.3	Le graphe planaire G_m	21

3 Chapitre 3	25
3.1 $\chi_3^I(G) = 2$	26
3.2 Majoration de $\chi_t^I(G)$	28
3.3 $S_G(a) = \{b, e, k\}$	29
3.4 Configuration réductible du Lemme 3.6.1	30
3.5 Configuration réductible du Lemme 3.6.2	31
3.6 $D_G(u) = 1$	31
3.7 $D_G(u) = 2$ et $ux \in E(G)$	32
3.8 $D_G(u) = 2$, $ux \notin E(G)$ et $uy \notin E(G)$	33
3.9 $D_G(u) = 2$, $ux \notin E(G)$ et $uy \in E(G)$	34
3.10 Configuration interdite du Lemme 3.8	35
3.11 Configuration réductible de Fait	37
3.12 Configurations inévitables dans un graphe planaire extérieur.	39
3.13 Configuration réductible du Lemme 3.13	40

Introduction

La théorie des graphes est une branche importante des mathématiques discrètes. L'origine de ce domaine remonte à 1735, lorsque le célèbre mathématicien Euler, fondateur de la théorie des graphes, a publié dans l'un de ses articles, la réponse à la question de savoir s'il est possible ou non de se promener dans la ville de Königsberg en ne traversant qu'une seule fois chacun des sept ponts. Depuis le début de XX^{ème} siècle, elle s'est développée grâce aux travaux de König, Cayley, Berge et Erdős.

De manière générale, un graphe est défini par un ensemble de points représentant des objets appelés sommets reliés entre eux, suivant une relation spécifique, par un ensemble de traits appelés arêtes. Beaucoup de problèmes réels peuvent être modélisés en terme graphe, par exemple l'organisation des horaires dans une école, l'allocation de fréquences dans un réseau de télécommunication ou encore le transport de marchandises. La résolution du problème modélisé peut alors être traitée de façon logique, en opérant des algorithmes particuliers cherchant à optimiser les paramètres du graphe, ou à déterminer le plus court chemin, ou juste à caractériser la structure du graphe.

Le problème de coloration de graphes est l'un des problèmes les plus célèbres et les plus productifs de la théorie des graphes. En 1852, le mathématicien Sud Africain Francis Guthrie a remarqué que quatre couleurs suffisent pour colorer la carte des régions d'Angleterre de façon telle que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Ce problème a été posé sous forme d'une conjecture en 1852, et depuis de nombreux chercheurs ont essayé de répondre à la question suivante : "Peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en n'utilisant que quatre couleurs de sorte que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes?". Il a fallu attendre 1976, pour qu'Appel et Haken parviennent à démontrer ce résultat à l'aide d'un ordinateur. Même si le problème des cartographes est résolu, celui des mathématiciens ne l'est pas, plusieurs chercheurs tentent de prouver cette conjecture sans utiliser l'ordinateur.

Actuellement, plusieurs types de coloration ont été introduites et étudiées. Nous citons, par exemple, la coloration d'arêtes, la coloration d'incidences ou encore la coloration totale. Dans

ce présent mémoire, nous nous intéressons au problème de la coloration t -frugale impropre des sommets d'un graphe G . Le nombre chromatique t -frugal impropre de G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les sommets de G telle que aucune couleur n'apparait plus de t fois dans le voisinage ouvert de tout sommet de G .

Ce mémoire s'articule autour de 3 chapitres qui sont organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes en générale. Nous présentons aussi certains résultats fondamentaux liés à quelques problèmes de coloration.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons d'abord le concept de la coloration frugale dans les graphes. Puis, nous donnons les principaux résultats qui existent dans la littérature concernant le nombre chromatique t -frugal.

Le troisième chapitre est consacré à notre contribution à l'étude de la coloration t -frugale impropre. Nous étudions plus particulièrement, le nombre chromatique t -frugal impropre des graphes sans mineur K_4 , des graphes planaires et des graphes planaires extérieurs.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et quelques perspectives futures dans ce domaine.

Chapitre 1

Éléments de la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur la théorie des graphes et des terminologies utilisées dans notre mémoire. Ensuite, nous abordons les notions de la coloration propre des sommets, la coloration propre des arêtes et la coloration propre totale. Nous donnons leurs définitions ainsi que certains résultats fondamentaux. Enfin, nous présentons la méthode de déchargement, qui est une technique de démonstration qui intervient souvent pour prouver des lemmes structurelles des graphes planaires.

Pour plus de détails, nous conseillons aux lecteurs de se référer aux ouvrages [4, 6, 10].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe non orienté est un couple $G = (V(G), E(G))$ où $V(G)$ est un ensemble non vide de points dont les éléments sont appelés sommets et $E(G)$ un ensemble de paire de sommets de G , appelées arêtes. Dans toute la suite, quand aucune confusion n'est possible, on écrira V et E au lieu de $V(G)$ et $E(G)$, respectivement.

Une arête $e \in E$ joignant deux sommets u et v est notée $e = uv$ ou bien $e = vu$. Les sommets u et v sont appelés extrémités de e .

L'ordre de G est le nombre n de ses sommets ($n = |V|$). La taille de G est le nombre m de ses arêtes ($m = |E|$). Une boucle dans G est une arête dont les extrémités sont confondues. Une arête de G est dite simple s'il existe une seule arête d'extrémités u et v , dans le cas contraire elle est dite multiple.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes que nous considérons dans ce mémoire sont simples et finis.

Exemple Le graphe $G = (V, E)$ de la Figure 1.1(a) est un graphe non orienté, d'ordre 8 et de taille 8. Il a pour ensemble sommets $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ et pour ensemble d'arêtes $E = \{v_2v_4, v_3v_1, v_5v_6, v_6v_8, v_5v_7, v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7\}$. Le graphe G est sans boucle et sans arête multiple. Donc c'est un graphe simple .

Un graphe $H = (V, E)$ est dit multigraphe s'il n'est pas simple. Le graphe représenté dans la Figure 1.1(b) contient une boucle en v_1 et une arête multiple.

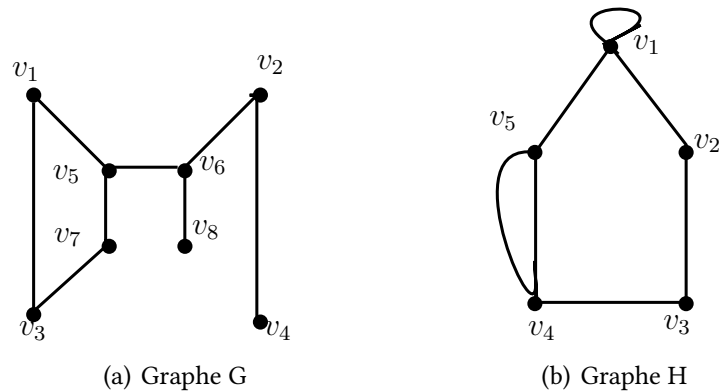


FIGURE 1.1 – Exemple de graphes non orientés

1.1.2 Adjacence, incidence et voisinage

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Deux sommets u et v de G sont dit adjacents ou voisins s'il existe une arête entre u et v dans G . On dit aussi que l'arête uv est incidente aux sommets u et v . Deux arêtes sont dites adjacentes si elles possèdent une extrémité commune.

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet $v \in V$ est appelé le voisinage de v , on le note $N_G(v)$ (ou $N(v)$ s'il n'y a pas de confusion possible). Autrement dit, $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.

Exemple. Dans le graphe G de la Figure 1.1(a) les voisins de v_1 sont : $N_G(v_1) = \{v_5, v_3\}$ et les voisins de v_5 sont : $N_G(v_5) = \{v_1, v_7, v_6\}$

1.1.3 Degré

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- On appelle degré du sommet v , noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$), le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Un sommet isolé est un sommet de degré nul. Un sommet pendant est un sommet de degré un.

Lemme 1.1 (Lemme des poignées de mains). Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|$$

- Un sommet de degré k (respectivement, au plus k , au moins k) est appelé un k -sommet (respectivement, un k^- -sommet, un k^+ -sommet).
- Le degré minimum d'un graphe G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G . Autrement dit $\delta(G) = \min\{d(v), v \in V(G)\}$.
- Le degré maximum d'un graphe G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G . Autrement dit $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V(G)\}$.
- Le degré moyen d'un graphe G , noté $Ad(G)$, est égal à la moyenne des degrés de G . D'après le Lemme 1.1, on a : $Ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$.

Exemple. Dans le graphe G représenté dans la Figure 1.1(a), on a : $d(v_1) = 2$, $d(v_8) = 1$, $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$ et $Ad(G) = \frac{16}{8} = 2$.

1.1.4 Sous-graphes et sous-graphes induits

Un sous-graphe d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$; dans ce cas, on écrit $H \subseteq G$.

Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$, le sous-graphe induit par S est le graphe $G[S]$ défini par l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv : uv \in E(G) \text{ et } \{u, v\} \subset S\}$. Dans la Figure 1.2 on donne un exemple de sous-graphe et de sous-graphe induit.

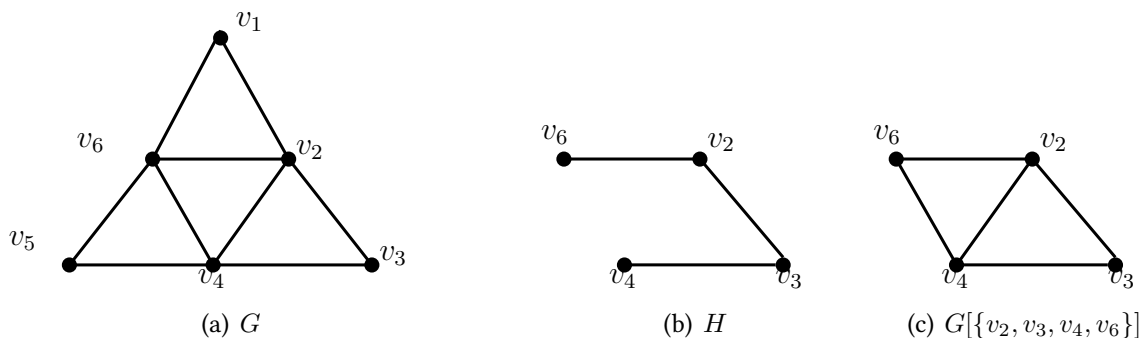


FIGURE 1.2 – Exemples de sous-graphes et de sous-graphes induit

1.1.5 Stabilité et couplage

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est un stable dans G , si tous les sommets de S sont deux à deux non adjacents. Le nombre de stabilité $\alpha(G)$ est le cardinal du plus grand stable dans G . Autrement dit, $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.
- Un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ est un couplage si toutes arêtes de M sont deux à deux non adjacentes. Un couplage M est dit parfait, si tout sommet de G est une extrémité d'une arête de M .

Dans le graphe de la Figure 1.3, l'ensemble $S = \{v_1, v_3, v_5\}$ est un stable. L'ensemble $M = \{v_1v_2, v_4v_5\}$ est un couplage, l'ensemble $M_1 = \{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_6\}$ est un couplage parfait.

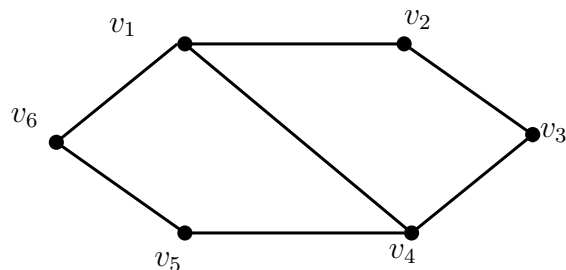


FIGURE 1.3 – Stable et couplage

1.1.6 Chaîne et cycle

Une chaîne P_k de longueur $k - 1$ dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence de sommets $v_1v_2\dots v_{k-1}v_k$ telle que $v_iv_{i+1} \in E$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa longueur et le nombre de sommets définit son ordre. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est dite simple et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite élémentaire.

Un cycle C_k de longueur k est une chaîne de longueur $k \geq 3$ dans laquelle les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets est égal à la longueur.

Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans un cycle. La maille d'un graphe G , notée $g(G)$, est la longueur minimale d'un cycle contenu dans G . La maille peut être infinie si le graphe considéré est sans cycle.

Dans la Figure 1.4, on donne un exemple d'un cycle C_6 et d'une chaîne P_4 .

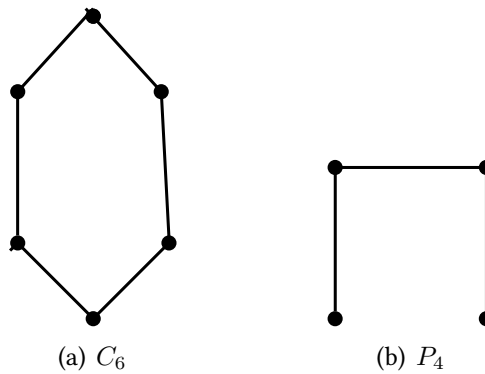


FIGURE 1.4 – Exemple de cycle et chaîne

1.1.7 Connexité

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire u, v de sommets distincts de G il existe une chaîne reliant u à v . Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal. Autrement dit, un sous graphe tel que tout sous graphe de G le contenant strictement n'est pas connexe.

Le graphe représenté dans la Figure 1.5(a) est un graphe connexe. En revanche, le graphe de la Figure 1.5(b) n'est pas connexe car il contient deux composantes connexes.

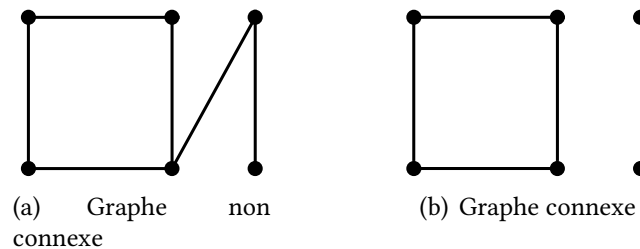


FIGURE 1.5 – Exemple de Graphe non connexe et graphe connexe

Un *ensemble d'articulation* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $G - S$ ne soit pas connexe. On note $\kappa(G)$ la taille minimale d'un ensemble d'articulation d'un graphe G :

$$\kappa(G) = \min\{|S| : S \subset V \text{ tel que } G - S \text{ n'est pas connexe ou réduit à un sommet}\}$$

Un graphe G est dit k -connexe si $\kappa(G) \geq k$. Par exemple, si $n \geq 3$ alors $\kappa(C_n) = 2$. D'où le cycle d'ordre n est un graphe 2-connexe. Si G n'est pas connexe, alors $\kappa(G) = 0$.

1.1.8 Distance et diamètre

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

La distance entre deux sommets u et v de G , notée $d_G(u, v)$ (ou $d(u, v)$), est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u et v .

Le diamètre de G , noté $diam(G)$, est la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G , c'est-à-dire $diam(G) = \max_{x, y \in V(G)} \{d_G(x, y)\}$. Dans la Figure 1.6, on a $diam(G) = d_G(v_1, v_6) = 5$

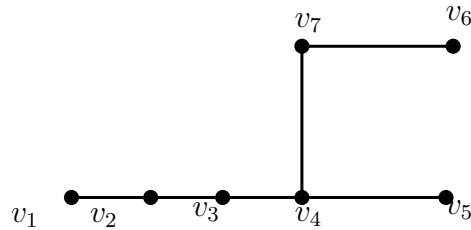


FIGURE 1.6 – Distance et diamètre

1.1.9 Subdivision

Subdiviser une arête uv dans un graphe G revient à remplacer une arête uv de G par une chaîne uvw en ajoutant un sommet w . On dit qu'un graphe H est une subdivision d'un graphe G s'il peut être obtenu à partir de G en subdivisant chaque arête de G . Dans le graphe de la Figure 1.7, nous illustrons l'étoile $K_{1,3}$ subdivisée.

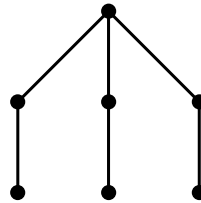


FIGURE 1.7 – L'étoile $K_{1,3}$ subdivisée

1.2 Quelques classes de graphe

1.2.1 Graphe régulier

Un graphe G est dit k -régulier si chaque sommet de G a un degré égal à k . Par exemple, le graphe illustré dans la Figure 1.8 est un graphe 3-régulier (dans ce cas le graphe est dit cubique).

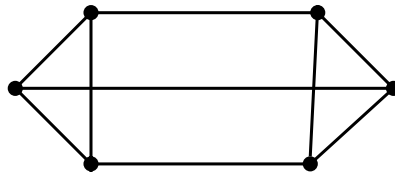


FIGURE 1.8 – Un graphe 3-régulier

1.2.2 Graphe complet

Un graphe complet d'ordre n , noté K_n , est un graphe $(n - 1)$ -régulier. Le graphe complet K_5 , est représenté sur la Figure 1.9.

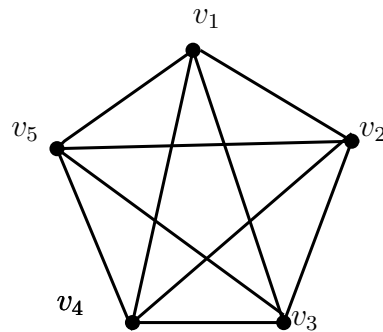


FIGURE 1.9 – Le graphe complet K_5

1.2.3 Graphe k -parti et graphe biparti complet

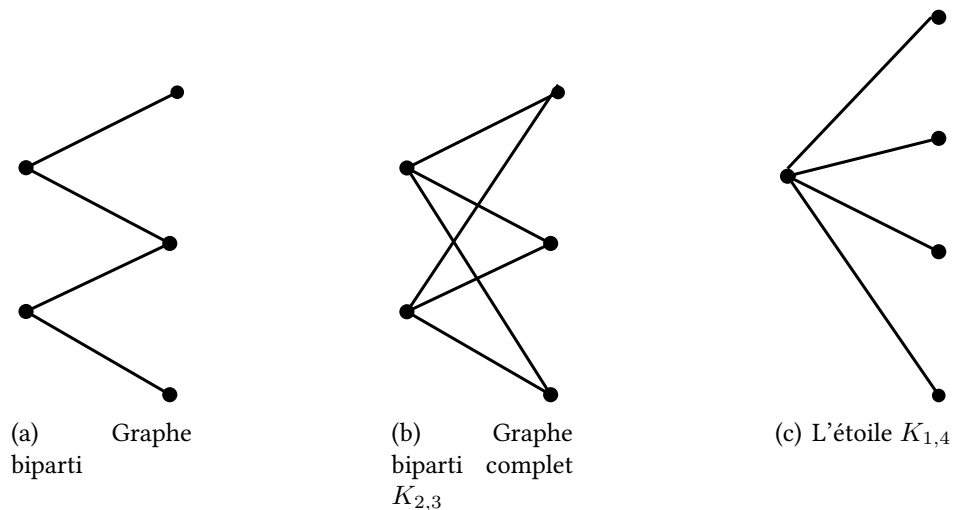


FIGURE 1.10 – Exemples de Graphes bipartis

Soit un entier $k \geq 2$. Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -parti si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en k sous ensembles V_1, V_2, \dots, V_k tel que chacun des sous-graphes

est un stable. Si $k = 2$ alors le graphe $G = (V_1 \cup V_2, E)$ est dit biparti. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impair.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -parti complet si G est k -parti et pour toute paire de sommets u et v appartenant à deux sous-ensembles différents, l'arête uv appartient à E . On note un tel graphe K_{n_1, \dots, n_k} où, $n_i = |V_i|$, pour $1 \leq i \leq k$. Si $k = 2$ alors le graphe K_{n_1, n_2} est dit biparti complet. Une étoile d'ordre $n + 1$ est le graphe biparti complet $K_{1, n}$.

Le graphe G de la Figure 1.10(a) représente un graphe biparti et le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 1.10(b) représente un graphe biparti complet et le graphe de la Figure 1.10(c) est l'étoile $K_{1,4}$.

1.2.4 Arbre et forêt

Un graphe ne contenant pas de cycle est dit forêt. Chaque composante connexe d'une forêt est appelé arbre. Les sommets de degré 1 d'une forêt sont appelés feuilles, les autres sont appelés sommets internes. Un exemple d'arbre et de forêt est donné sur la Figure 1.11

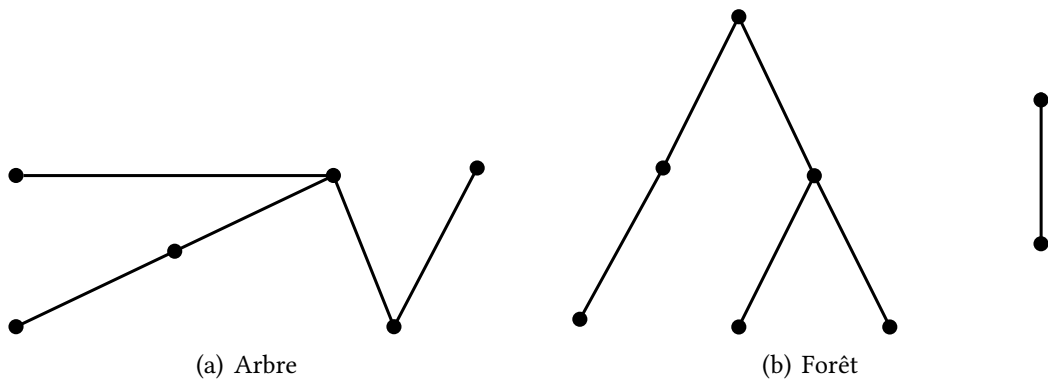


FIGURE 1.11 – Exemple d'arbre et de forêt

1.2.5 Graphe planaire

Un graphe G est dit planaire s'il existe une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

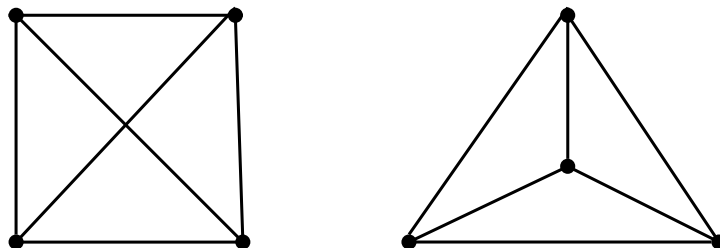


FIGURE 1.12 – Représentation planaire du K_4

Par exemple, le graphe représenté dans la Figure 1.12 est un graphe planaire car il est possible de le représenter dans le plan sans croisement.

On appelle *face* d'un graphe G une région du plan délimitée par les arêtes de G , telle que deux points arbitraires de cette région peuvent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommets ni arêtes. L'unique face infinie est la *face extérieure* de G . L'ensemble des faces de G est noté $F(G)$. Pour chaque face f de $F(G)$, on note $r(f)$ la *taille* de f , c'est-à-dire le nombre d'arêtes bordant f . Il existe pour les graphes planaires un lemme semblable au Lemme 1.1.

Lemme 1.2. *Pour tout graphe planaire $G = (V, E, F)$ on a $\sum_{f \in F} r(f) = 2|E|$.*

En 1752, Euler propose une formule établissant une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire.

Théorème 1.3 (Formule d'Euler). *Si G est un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces, alors :*

$$f = m - n + 2$$

En 1930, K. Kuratowski [33] a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

Théorème 1.4. *Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

1.2.6 Graphe planaire extérieur

Un graphe planaire G est un *graphe planaire extérieur*, s'il peut être dessiné dans le plan sans croisements de telle façon que tous les sommets appartiennent à la face extérieure. (voir la Figure 1.13)

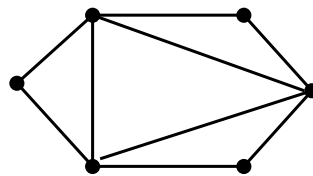


FIGURE 1.13 – Un graphe planaire extérieur

1.2.7 Graphe k -puissance

Un graphe k -puissance, noté G^k , de G est le graphe obtenu à partir de G en reliant par une arête toute paire de sommets à distance k ou moins, avec $k \geq 1$. Le graphe G^2 est appelé le carré de G (voir la Figure 1.14)

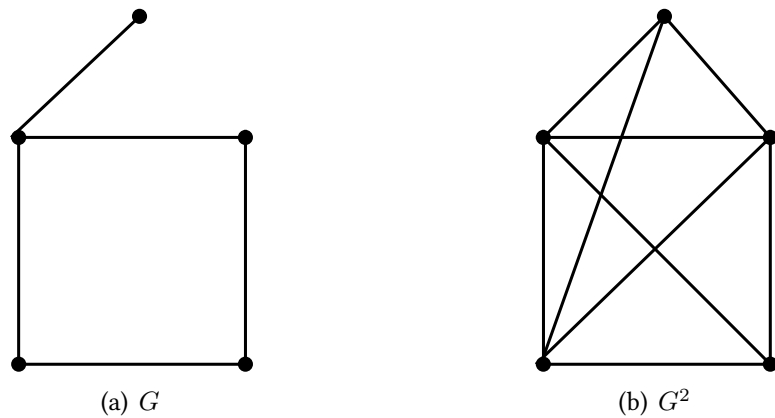


FIGURE 1.14 – Graphe 2– puissance

1.3 Contraction et mineur

La *contraction* d'une arête $e = uv$ dans un graphe G est l'opération qui transforme G à un autre graphe, noté G/e , en supprimant l'arête e et en fusionnant ses extrémités u et v par un nouveau sommet w (c'est-à-dire w devient adjacent à tous les anciens voisins de u et de v).

La Figure 1.15 représente un graphe G et le graphe G/e obtenu à partir de G en contractant l'arête $e = uv$.

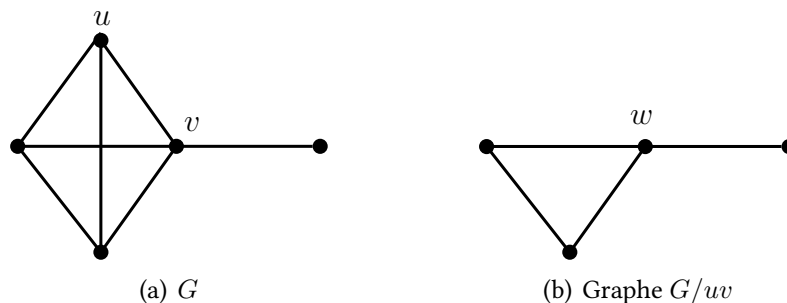


FIGURE 1.15 – Contraction de l'arête uv

Un graphe H est un *mineur* d'un graphe G si H est obtenu à partir de G par une série de suppressions de sommets, de suppressions d'arêtes et de contractions d'arêtes, dans n'importe quel ordre.

Par exemple, la Figure 1.16, représente le graphe de Petersen P_{10} en contractant les deux arêtes rouges et en ne gardant que les arêtes bleues, et les sommets adjacentes aux arêtes bleues, on obtient un graphe biparti complet $K_{2,4}$. Donc, le graphe de Petersen admet $K_{2,4}$ comme mineur.

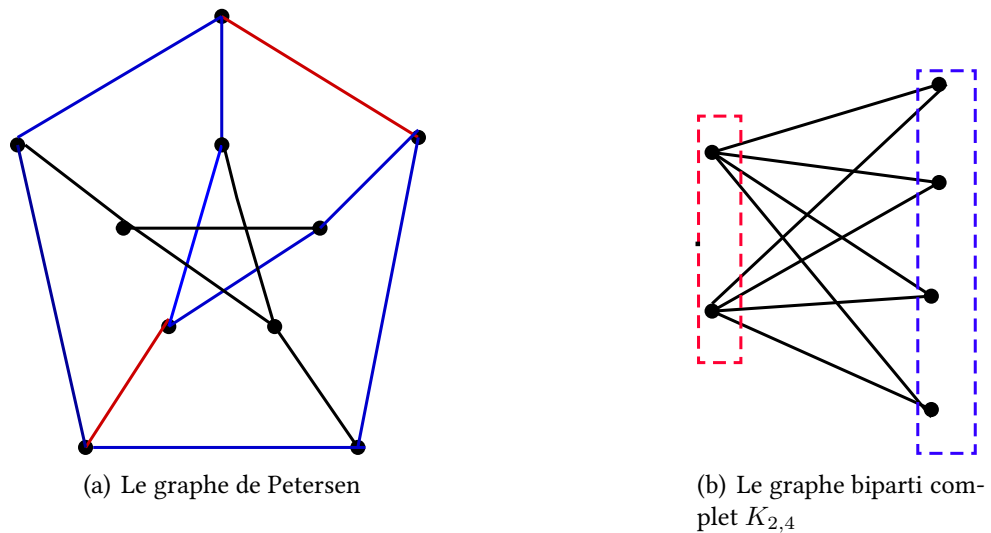


FIGURE 1.16 – Exemple de graphe contenant un mineur $K_{2,4}$

1.4 Quelques notions de colorations de graphes

1.4.1 Coloration propre des sommets

Définition 1.5. Une k -coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une application ϕ de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes. Autrement dit, pour toute arête $uv \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$.

Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration propre des sommets.

Exemple. La coloration proposée dans la Figure 1.17(a) est une coloration propre des sommets de G utilisant 4 couleurs. Ce nombre de couleur utilisé n'est pas minimum. En effet, le graphe G contient un C_3 , donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe G . Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (voir Figure 1.17(b)), alors $\chi(G) = 3$.

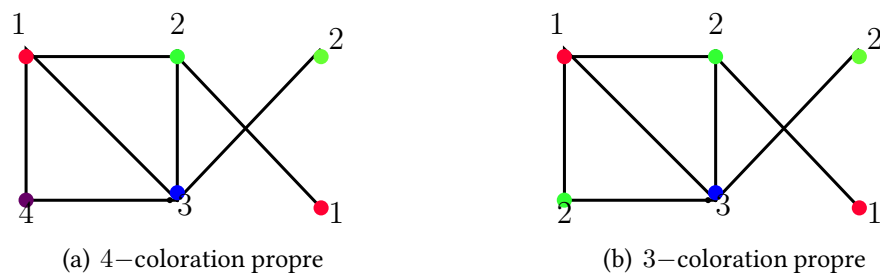


FIGURE 1.17 – Coloration propre des sommets d'un graphe G

En 1941, Brooks [12] a proposé une borne supérieure de $\chi(G)$ d'un graphe G en fonction de son degré maximum $\Delta(G)$.

Théorème 1.6 (Brooks, [12]). *Soit G un graphe connexe. Si G n'est ni un cycle impair ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$. De plus, si G est complet ou contient un cycle impair, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Parmi les nombreux résultats du nombre chromatique, nous pouvons citer le théorème des quatre couleurs, démontré par Appel et Haken [5], en 1976, à l'aide d'un ordinateur :

Théorème 1.7 (Théorème des quatre couleurs). *Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.*

1.4.2 Coloration propre des arêtes

Définition 1.8. *Une k -coloration propre des arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est une application ϕ de l'ensemble des arêtes E dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$, de telle sorte que deux arêtes adjacentes dans G reçoivent des couleurs différentes. Autrement dit, pour toutes arêtes adjacentes $uv, vw \in E$, $\phi(uv) \neq \phi(vw)$.*

L'indice chromatique de G , noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration propre des arêtes.

Exemple. La coloration proposée dans la Figure 1.18 représente une 4-coloration propre des arêtes du graphe G . De plus, $\chi'(G) = 4$.

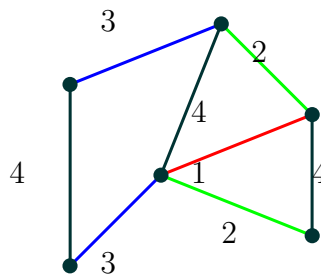


FIGURE 1.18 – 4-coloration propre des arêtes

En 1964, Vizing [42] a donné un résultat le plus important sur l'indice chromatique d'un graphe G

Théorème 1.9 (Vizing, [42]). *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ on a :*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ainsi, on peut classer les graphes en deux classes selon leurs indice chromatique : la première classe contient les graphes tel que $\chi'(G) = \Delta(G)$ et la deuxième contient les graphes tel que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

1.4.3 Coloration totale

Définition 1.10. Une k -coloration totale d'un graphe $G = (V, E)$ est une application ϕ de l'ensemble des sommets et des arêtes $V \cup E$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ de telle manière que deux éléments adjacents et deux éléments incidents n'aient pas la même couleur.

Le nombre chromatique total de G , noté $\chi''(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration totale de G .

Exemple. La coloration proposée dans la Figure 1.19 est une 5-coloration totale du graphe G . De plus $\chi''(G) = 5$. En effet, G est de degré maximum $\Delta(G) = 4$, alors nous avons besoin de 4 couleurs pour colorer les voisins d'un sommet de degré Δ et d'une couleur supplémentaire pour colorer le sommet lui-même.

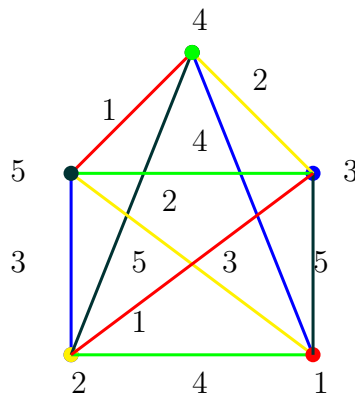


FIGURE 1.19 – 5-coloration totale

Dès les années 1960, Vizing [43] et Behzad [9] ont posé la conjecture suivante

Conjecture 1.11. Soit G un graphe de degré maximum Δ alors

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$$

Cette conjecture a été confirmée pour les graphes de degré maximum au plus égal à 5.

1.5 Méthode de déchargement

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le théorème des quatre couleurs a été prouvé par Appel et Haken [5] en 1976. En fait, sa preuve assistée par ordinateur utilisait la méthode de déchargement. Cette méthode est de plus en plus utilisée pour résoudre des problèmes de graphes avec ou sans l'aide d'un ordinateur. La méthode est principalement

utilisée pour les graphes planaires. Dans cette section nous allons expliquer le principe de la méthode de déchargement.

Soit H la classe des graphes planaires et supposons que l'on veuille prouver que tout graphe appartenant à H possède une propriété P . Pour ce faire en utilisant la méthode de déchargement, nous avons 6 principales étapes :

- **Étape 1** : Supposons que $G \in H$ est un graphe qui ne vérifie pas la propriété P . Généralement, G est un contre-exemple minimal.
- **Étape 2** : On montre que G ne peut pas contenir certains sous-graphes. De tels sous-graphes sont appelés configurations réductibles.
- **Étape 3** : On attribue des poids initiaux aux sommets et aux faces de G .
- **Étape 4** : En utilisant la formule d'Euler, $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$, et Lemme des poignées de main $\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} r(f) = 2|E(G)|$, nous montrons que la somme totale des poids est égal à une constante.
- **Étape 5** : On fixe des règles de déchargement appropriées on effectue un processus de déchargement, tout en préservant les poids totaux. Une fois la déchargement terminée, un nouveau poids pour chaque sommet et face est obtenu.
- Étape 6** : En utilisant l'absence de configurations réductibles, nous montrons que la somme totale des nouveaux poids est maintenant différent de la somme totale des poids initiaux. Cette contradiction démontre qu'un tel contre-exemple G n'existe pas. Donc, tout graphe de G a la propriété P .

Chapitre 2

Coloration frugale

2.1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximum $\Delta(G)$. Une k -coloration à distance deux d'un graphe G est une coloration propre des sommets de G , telle que deux sommets à distance au plus deux reçoivent deux couleurs différentes. Le nombre chromatique à distance deux, noté $\chi^2(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration à distance deux.

Si on considère G^2 le graphe obtenu à partir de G en reliant par une arête toute paire de sommets à distance 2, alors il est clair que la coloration à distance deux de G n'est autre que la coloration propre de G^2 . Autrement dit,

$$\chi^2(G) = \chi(G^2)$$

Comme, d'une part, dans une coloration propre d'un graphe G^2 , un sommet et ses voisins ont tous des couleurs différentes. Et d'autre part, un sommet de G a au plus $\Delta^2(G)$ voisins dans G^2 , nous pouvons déduire les bornes de $\chi^2(G)$ en fonction de $\Delta(G)$ suivantes

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi^2(G) \leq \Delta^2(G) + 1$$

Il est à noter que ces bornes sont optimales. En effet, il existe des graphes dont le nombre chromatique atteint ces bornes, comme l'étoile pour la borne inférieure (voir Figure 2.1(a)) ou le cycle de longueur 5 pour la borne supérieure (voir Figure 2.1(b)).

En 1992, Lloyd et Ramanathan [36], ont montré que trouver le nombre chromatique du carré d'un graphe G est un problème NP-complet, et ce même lorsque G est un graphe planaire.

Au fil des ans, la coloration à distance deux est devenue un centre d'intérêt pour de nombreux chercheurs, pour plus d'informations nous renvoyons le lecteur aux références [13, 14, 29].

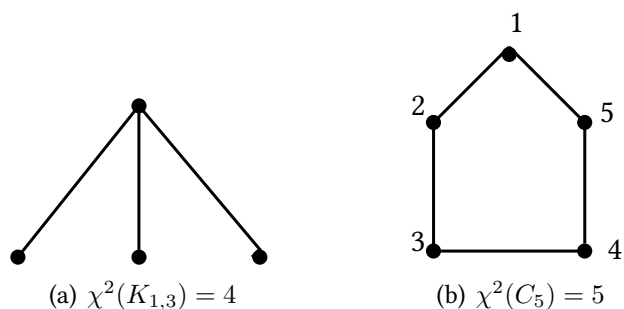


FIGURE 2.1 – Exemples de graphe pour lesquels $\Delta + 1 \leq \chi^2(G) \leq \Delta^2 + 1$

Dans le but d’améliorer les résultats existants sur le nombre chromatique total d’un graphe, Hind *et al.* [26] ont introduit une notion plus générale de la coloration à distance 2 appelée *coloration t -frugale*.

2.2 Nombre chromatique t -frugale

Définition 2.1. Soient t et k deux entiers positifs et soit $G = (V, E)$ un graphe .

1. Une k -coloration t -frugale d’un graphe G est une coloration propre des sommets de G , tel que pour tout sommet $v \in V(G)$ aucune couleur n’apparaît plus de t fois dans le voisinage de v .
2. Le nombre chromatique t -frugal de G , noté $\chi_t(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration t -frugale.

Remarque 2.2. Il n’est pas difficile de voir qu’une coloration 1-frugale n’est autre qu’une coloration à distance deux. Par conséquent $\chi^2(G) = \chi_1(G)$.

Dans la Figure 2.2, on propose une 3-coloration 2-frugale propre du graphe G . En effet, pour tout sommets du graphe aucune couleur n’apparaît plus de 2 fois dans son voisinage. Il est facile de voir que $\chi_2(G) = 3$.

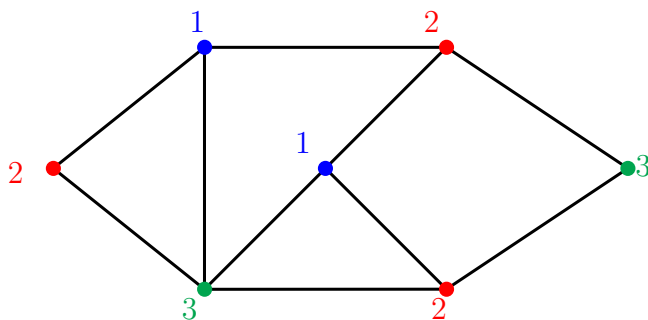


FIGURE 2.2 – $\chi_2(G) = 3$

2.3 Exemple d'application

Le concept de la coloration t -frugale a de nombreuses applications dans le monde réel. Il peut être utilisé pour modéliser des problèmes divers tels que les problèmes d'assignation de fréquences dans les réseaux radio ou téléphone mobile, d'ordonnancements ou encore les problèmes d'emplois du temps [27].

Supposons que nous ayons un ensemble d'enseignants qui doivent donner chaque semaine des cours à des classes. La semaine est divisée en tranches horaires dans lesquelles doivent se placer ces cours. L'objectif est d'établir un emploi du temps hebdomadaire pour ces cours (c'est à dire déterminer quel enseignant fait quoi et à quel moment dans la semaine). Les contraintes d'optimisations sont les suivantes :

- Un enseignant ne donne cours qu'à au plus une classe et chaque classe n'a cours qu'avec un seul enseignant. En d'autres termes, certains cours ne peuvent pas être programmés dans une même tranche horaire.
- En raison du nombre limité de salles de cours, au plus t cours peuvent être programmés dans une tranche horaire.

Ce problème se modélise par un graphe de la manière suivante :

- Chaque cours est représenté par un sommet.
- Deux sommets sont reliés par une arête si deux cours ne peuvent pas être programmés à la même période.

Ainsi, résoudre ce problème d'emplois du temps des cours revient à rechercher une k -coloration t -frugale de G , où chaque couleur correspond à une tranche horaire (le but étant de minimiser le nombre de couleurs utilisées).

2.4 Problème de décision

Kratochvil et Fiala [21, 30] ont prouvé que le problème de déterminer si un graphe G admet une coloration à distance 2 en utilisant au plus k couleurs est un problème NP-complet pour tout entier fixé $k \geq 4$, et est un problème résolvable en temps polynomial si $k \leq 3$.

Soit le problème de décision $P(t, k)$ -coloration qui détermine si un graphe donné admet une k -coloration t -frugale. Ce problème de décision est formellement défini comme suit :

Problème : $P(t, k)$ -coloration

Instance : Un graphe G non vide et deux entiers positifs k et t .

Question : Existe-t-il une k -coloration t -frugale de G ?

Dans [7] Bard a généralisé les résultats de Kratochvil et Fiala [21, 30] à toutes les paires d'entier positifs t et k . Il a montré que si $t = 1$ et $k = 3$ ou $k \leq 2$, alors la $P(t, k)$ -coloration est résolvable en temps polynomial et si $t \geq 2$ et $k = 3$ ou $t \geq 1$ et $k \geq 4$, alors $P(t, k)$ -coloration est un problème NP-complet.

2.5 Nombre chromatique t -frugal de quelques classes de graphes

Cette section est consacrée à l'énoncé de certains résultats sur le nombre chromatique de quelques classes des graphes qui ont été établis dans la littérature.

2.5.1 Bornes générales du nombre chromatique t -frugal

Soit G un graphe de degré maximum Δ . D'après la définition de la coloration t -frugale nous pouvons déduire la chaîne d'inégalités suivante :

$$\chi_1(G) \leq \chi_2(G) \leq \dots \leq \chi_\Delta(G) = \chi(G).$$

Dans [7], Bard a donné des bornes supérieures et inférieures de $\chi_t(G)$ en fonction de son degré maximum Δ .

Théorème 2.3 (Bard, [7]). *Soient t un entier positif non nul et G un graphe de degré maximum Δ . On a*

$$\left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil + 1 \leq \chi_t(G) \leq \Delta + \Delta \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor + 1$$

Notons que la borne inférieure est atteinte pour les arbres. Pour la borne supérieure Bard [7], a amélioré le résultat dans le cas où G n'est pas un graphe régulier.

Théorème 2.4 (Bard, [7]). *Si G n'est pas un graphe régulier, alors,*

$$\chi_t(G) \leq \Delta + (\Delta - 1) \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\Delta - 2}{t} \right\rfloor$$

Dans le cas où G est un graphe régulier et $2 \leq t \leq \Delta - 1$, il montre que

Théorème 2.5 (Bard [7], 2021). *Si G est un graphe régulier et $2 \leq t \leq \Delta - 1$ alors*

$$\chi_t(G) \leq \Delta + \Delta \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor$$

2.5.2 Nombre chromatique t -frugal des arbres et des graphes complets

Dans la proposition 2.6, Bard [7] a déterminé la valeur du nombre chromatique t -frugal des arbres, des graphes complets et des graphes k -partis.

Proposition 2.6 (Bard [7], 2021). *Soient T , K_n et K_{a_1, a_2, \dots, a_k} respectivement un arbre, graphe complet et graphe k -parti complet. On a*

1. $\chi_t(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{t} \right\rceil + 1$.
2. $\chi_t(K_n) = n$.
3. $\chi_t(K_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = \left\lceil \frac{a_1}{t} \right\rceil + \left\lceil \frac{a_2}{t} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{a_k}{t} \right\rceil$.

2.5.3 Nombre chromatique t -frugal des graphes planaires

La question de connaître la borne supérieure pour le nombre chromatique du carrée d'un graphe planaire a été posée pour la première fois par Wegner [44]. Il propose la conjecture suivante :

Conjecture 2.7 (Wegner, [44]). *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ .*

$$\chi^2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta \leq 3 \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7 \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 8 \end{cases}$$

Il est à noter que si cette conjecture s'avère vérifiée alors les bornes proposées sont optimales. En effet le graphe de la Figure 2.3 satisfait $\chi^2(G) = \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$.

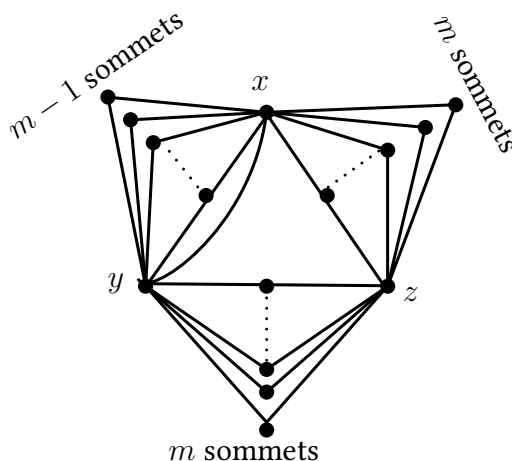


FIGURE 2.3 – Le graphe planaire G_m

Bien que la conjecture de Wegner a reçu une attention considérable par de nombreux chercheurs, à l'exception du cas où $\Delta \leq 3$ (prouver dans [24, 40]), aucune des deux autres affirmations n'a été démontrée. Havet *et al.* [25] et Amini *et al.* [3] ont indépendamment montré que cette conjecture est asymptotiquement vérifiée. De nombreux résultats de la forme $c\Delta + O(1)$ (où c est une constante) ont également été prouvés. Le Tableau 2.1 résume certains des résultats existants.

Auteurs	Restriction	Borne supérieure de $\chi^2(G)$
Thomassen [40]	$\Delta \leq 3$	7
Jonas [28]	$\Delta \geq 7$	$8\Delta - 22$
Wong [45]	$\Delta \geq 7$	$3\Delta + 5$
Madaras and Marcinova [38]	$\Delta \geq 12$	$2\Delta + 18$
Borodin <i>et al.</i> [11]	$\Delta \leq 20$	59
	$21 \leq \Delta \leq 46$	$\Delta + 39$
	$\Delta \leq 47$	$\lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 1$
Van den Heuvel and McGuinness [41]	$\Delta \geq 5$	$9\Delta - 19$
	-	$2\Delta + 25$
Agnarsson and Halldorsson [1]	$\Delta \geq 749$	$\lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 2$
Molloy and Salavatipour [39]	$\Delta \geq 249$	$\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$
	-	$\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$
Zhu and Bu [46]	$\Delta \leq 5$	20
	$\Delta \geq 6$	$5\Delta - 7$
Krzyzinski <i>et al.</i> [32]	$\Delta \geq 6$	$3\Delta + 4$

TABLE 2.1 – Nombre chromatique à distance 2 des graphes planaires

En s'inspirant de la conjecture de Wegner, Amini, Espert et Heuval [2] ont conjecturé la borne suivante pour le nombre chromatique t -frugal des graphes planaires

Conjecture 2.8 (Amini, Espert et Heuval, [2]). *Pour tout entier $t \geq 1$ et tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq \max\{2t, 8\}$, on a*

$$\chi_t(G) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{\Delta-2}{t} \rfloor + 3 & \text{si } t \text{ est pair} \\ \lfloor \frac{3\Delta-2}{3t-1} \rfloor + 3 & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

Amini, Espert et Heuval [2] ont noté que si cette conjecture est vérifiée alors le graphe planaire G_m de degré maximum $2m$ de la Figure 2.3 atteint ces bornes. En effet, considérons les deux cas suivants :

- Si t est pair (autrement dit $t = 2\ell$) alors une même couleur est utilisée au plus $\frac{3}{2}t$ fois pour les sommets de G_m , et chaque couleur qui apparaît exactement $\frac{3}{2}t = 3\ell$ fois doit

nécessairement apparaitre ℓ fois sur chacun des trois ensembles de voisins communs de x et y , de x et z , et de y et z . D'où, au plus $\frac{1}{\ell}(m - 1) = \frac{1}{t}(\Delta(G_m) - 2)$ couleurs sont utilisées $\frac{3}{2}t$ fois. Ainsi, les sommets restants peuvent être colorés en utilisant juste trois nouvelles couleurs.

- Si t est impair (autrement dit, $t = 2\ell + 1$) alors chaque couleur peut apparaitre au plus $3\ell + 1 = \frac{1}{2}(3t - 1)$ fois, et la seule façon d'utiliser une couleur autant de fois est de l'utiliser sur les sommets de $V(G_m) - \{x, y, z\}$. D'où, nous pouvons faire cela au plus $\frac{3m-1}{(3t-1)/2} = \frac{3\Delta(G_m)-2}{3t-1}$ fois. Par conséquent les sommets restants peuvent être colorés utilisant juste trois nouvelles couleurs.

Amini, Espert et Heuval [2], ont donné une borne supérieure de $\chi_t(G)$ des graphes planaires en fonction du degré maximum Δ . Ils montrent

Théorème 2.9. *Pour tout graphe planaire G et pour tout entier $t \geq 1$, on a*

$$\chi_t(G) \leq \left\lceil \frac{5\Delta(G) + 180}{3t} \right\rceil + 18$$

En attribuant une autre borne inférieure au degré maximum $\Delta(G)$ d'un graphe planaire, Amini, Espert et Heuval [2] ont amélioré le résultat du théorème précédent, il a prouvé ce qui suit :

Théorème 2.10 (Amini, Espert et Heuval, [2]). *Soit $t \geq 1$ un entier. Si G est un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G) \geq 12$, alors*

$$\chi_t(G) \leq \left\lceil \frac{2\Delta(G) + 19}{t} \right\rceil + 6$$

Plusieurs bornes ont été trouvées pour cette classe de graphes en fonction de la maille g . Dans le théorème suivant, nous recueillons les principaux résultats.

Théorème 2.11 (Amini, Espert et Heuval, [2]). *Soit $t \geq 1$ un entier. Si G est un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G)$ et de maille g , alors*

1. *si $g \geq 7$ et $\Delta(G) \geq 190 + 2t$, alors $\chi_t(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)-1}{t} \right\rceil + 2$.*
2. *si $g \geq 6$, alors $\chi_t(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+4}{t} \right\rceil + 6$.*
3. *si $g \geq 5$, alors $\chi_t(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+10}{t} \right\rceil + 6$.*

2.5.4 Nombre chromatique t -frugal des graphes planaires extérieurs

En 2006, Lih et Wang [34] ont montré que pour tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta(G) \geq 3$, le nombre chromatique à distance deux de G est au plus égal à $\Delta(G) + 2$.

Ce résultat confirme la conjecture de Wegner [44] pour la classe des graphes planaires. De plus, les auteurs ont montré que si $\Delta(G) \geq 7$ alors le nombre chromatique à distance 2 de G est égal à $\Delta(G) + 1$.

Amini, Espert et Heuval, [2], ont étudié le nombre chromatique t -frugal de la classe des graphes planaires extérieurs. Ils ont montré le théorème suivant

Théorème 2.12 (Amini, Espert et Heuval, [2]). *Pour tout entier $t \geq 1$ et pour tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta(G) \geq 3$, on a*

$$\chi_t(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 1}{t} \right\rfloor + 3$$

Dans le même article, ils ont affiné ce résultat pour le cas de graphes planaires extérieurs 2-connexes.

Théorème 2.13 (Amini, Espert et Heuval, [2]). *Pour tout entier $t \geq 2$ et pour tout graphe planaire extérieur 2-connexe G de degré maximum $\Delta(G) \geq 7$, on a*

$$\chi_t(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{t} \right\rfloor + 3$$

2.5.5 Nombre chromatique t -frugal des graphes sans mineurs K_4

Un graphe G est dit sans mineur K_4 si aucun sous graphe de G ne peut être transformé en un K_4 en contractant des arêtes.

Lih *et al.* [35] ont étudié le nombre chromatique à distance 2 des graphes sans mineurs K_4 , ils ont montré le théorème suivante :

Théorème 2.14 (Lih *et al.*, [35]). *Si G est un graph sans mineurs K_4 alors*

$$\chi_1(G) \leq \begin{cases} \Delta + 3 & \text{si } 2 \leq \Delta \leq 3 \\ \left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 4 \end{cases}$$

Dans [8], les auteurs ont généralisé ce résultat à $t \geq 1$. Ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.15 (Lih, Wang et Zhu, [8]). *Soit G est un graph sans mineurs K_4 et $t \geq 1$ alors*

$$\chi_t(G) \leq \begin{cases} 3 + \left\lfloor \frac{\Delta-1}{t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor & \text{si } 2 \leq \Delta \leq 3 \\ 3 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor - 2}{t} \right\rfloor & \text{si } \Delta \geq 4 \end{cases}$$

Chapitre 3

Coloration frugale impropre

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la coloration t -frugale impropre. Nous commençons par définir cette coloration, puis nous donnons les principaux résultats déjà existants sur le nombre chromatique t -frugal. Enfin nous présentons notre contribution.

3.1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une coloration *injective des sommets* est une affectation de couleurs aux sommets de G telle que deux sommets ayant un voisin en commun reçoivent des couleurs différentes. Le nombre chromatique injectif, noté $\chi_{inj}(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration injective des sommets de G . Notons que cette coloration n'est pas nécessairement propre.

La notion de coloration injective des sommets a été introduite, en 2002, par Hahn *et al.* [22]. Ils montrent que pour tout graphe G de degré maximum Δ , on a

$$\Delta \leq \chi_{inj}(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1.$$

Dans le cas des graphes planaires Hahn, Raspaud et Wang [23] ont montré que cette borne supérieure peut être réduite d'une unité dans le cas où $\Delta \geq 3$. Dans [19], Doyon, Hahn et Raspaud montrent que $\chi_{inj}(G) \leq \Delta + 3$ (respectivement, $\Delta + 4$, $\Delta + 8$) si $g \geq 7$ (respectivement, 5 et 6). Plus tard, ces bornes ont été réduites à $\Delta + 2$ par Luzar *et al.* [37, 16], $\Delta + 3$ par Dong et Lin [17], et $\Delta + 6$ par Dong et Lin [18]. La coloration injective des graphes a largement été étudiée. De nombreux auteurs ont considéré la valeur de $\chi_{inj}(G)$ pour quelques classes particulières de graphes, nous pouvons citer à titre d'exemple les références suivantes [19, 37, 16, 17, 22, 18].

Dans sa thèse de doctorat, soutenue en 2021, Stefan Bard [7] a généralisé la notion de coloration injective en introduisant la coloration t -frugale impropre.

3.2 Nombre chromatique t -frugal impropre

Définition 3.1. Soient t et k deux entiers positifs et soit $G = (V, E)$ un graphe.

1. Une k -coloration t -frugale impropre ϕ de G est une coloration des sommets de G utilisant k couleurs, tel que pour tout sommet $v \in V(G)$ aucune couleur n'apparaît plus de t fois dans le voisinage ouvert de v .
2. Le nombre chromatique t -frugal impropre, noté $\chi_t^I(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration t -frugale impropre.
3. Notons que cette coloration n'est pas nécessairement propre et pour $t = 1$, on a $\chi_1^I(G) = \chi_{inj}(G)$.

Exemple Dans la Figure 3.1, on donne une coloration ϕ du graphe G .

1. La coloration ϕ est une coloration 3-frugale impropre de G . En effet, pour tout sommet du graphe aucune couleur n'apparaît plus de 3 dans son voisinage. De plus, comme $\Delta(G) = 5$, il est facile de déduire que $\chi_3^I(G) = 2$.
2. Par contre, la coloration ϕ n'est pas une coloration 2-frugale impropre de G , car il existe un sommet de G pour lequel une couleur est répétée plus de 2 fois dans son voisinage (le sommet u possède 3 voisins colorés avec la couleur 1).

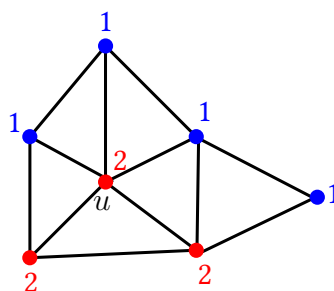


FIGURE 3.1 - $\chi_3^I(G) = 2$

3.3 Bornes générales du nombre chromatique t -frugal impropre

Dans cette section nous donnons des résultats déjà existants dans la littérature et qui concerne le nombre t -frugal impropre.

Définition 3.2. Une coloration t -frugale impropre partielle ϕ d'un graphe $G = (V(G), E(G))$, est une coloration t -frugale impropre définie uniquement pour quelques sous ensembles V de

$V(G)$. Pour chaque sommet non coloré $u \in V(G)$, on définit l'ensemble $F_t(u)$ comme étant l'ensemble des couleurs interdites pour colorer le sommet u .

Bard [7] a donné des bornes générales du nombre chromatique t -frugale impropre d'un graphe G en fonction de son degré maximum Δ . Il a montré le théorème suivant :

Théorème 3.3 (Bard [7], 2021). *Soit G un graphe. Alors,*

$$\left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil \leq \chi_t^I(G) \leq \Delta(G) \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 1}{t} \right\rfloor + 1$$

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximum $\Delta(G)$. Il n'est pas difficile de voir que $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les voisins d'un sommet de degré $\Delta(G)$ dans toute coloration t -frugale impropre de G , et donc la borne inférieure est vérifiée.

Soient v_1, v_2, \dots, v_n un ordre des sommets de G . Nous colorons les sommets de G un à un dans l'ordre en commençant par v_1 , pour chaque sommet nous utilisons la plus petite couleur possible en respectant la condition de frugalité impropre de la coloration partielle. Pour tout $1 \leq i \leq n$, considérons le nombre des couleurs nécessaires pour assurer que v_i peut être coloré. Les couleurs qui ne peuvent pas être attribuées à v_i sont exactement les couleurs qui apparaissent t fois au voisinage de certains voisins de v_i . Il y a au plus $\Delta(G)$ voisins de v_i , chacun ayant au plus $\Delta(G) - 1$ autres voisins (voir Figure 3.2). Par conséquent,

$$F_t(v_i) \leq \Delta(G) \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 1}{t} \right\rfloor.$$

D'où, s'il existe au moins $\Delta(G) \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 1}{t} \right\rfloor + 1$ couleurs, nous aurons toujours au moins une couleur disponible pour colorer v_i .

□

Bard [7] a déterminé le nombre chromatique t -frugal impropre des arbres et de graphes bipartis complets

Théorème 3.4 (Bard [7], 2021). *Soient n et m deux entiers positifs. Soient $K_{n,m}$ et T respectivement un graphe complet biparti et un arbre. Alors*

1. $\chi_t^I(K_{n,m}) = \left\lceil \frac{\Delta(K_{n,m})}{t} \right\rceil = \max \left\{ \left\lceil \frac{n}{t} \right\rceil, \left\lceil \frac{m}{t} \right\rceil \right\}$.
2. $\chi_t^I(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{t} \right\rceil$.

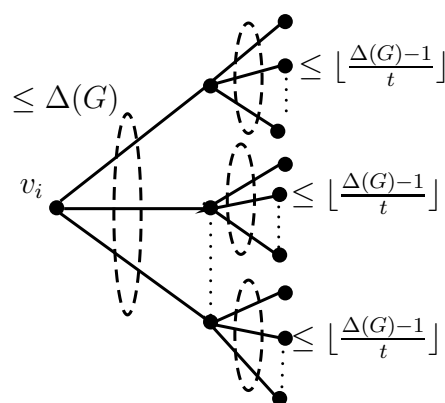


FIGURE 3.2 – Majoration de $\chi_t^I(G)$

3.4 Complexité de la coloration t -frugale impropre

Hahn *et al.* [22] ont prouvé que le problème de déterminer si un graphe G admet une coloration injective utilisant au plus k couleurs est un problème NP-complet pour tout $k \geq 3$. Kratochvil et Siggers [31] ont montré que le problème reste NP-complet dans le cas des graphes planaires et pour tout $k \geq 4$.

Soit le problème de décision $I(t, k)$ -coloration qui détermine si un graphe donné a une k -coloration t -frugale impropre. Ce problème de décision est formellement défini comme suit :

Problème : $I(t, k)$ -coloration

Instance : Un graphe G non vide et deux entiers positifs k et t .

Question : Existe-t-il une k -coloration t -frugale impropre de G ?

Dans [7], Brad a généralisé les résultats de complexité de Hahn *et al.* [22] en donnant un théorème de dichotomie pour le problème $I(t, k)$ -coloration pour $t \geq 2$. Il a montré que si $k = 1$, ou $t = 1$ et $k \leq 2$, alors $I(t, k)$ -coloration est résolvable en temps polynomial; et si $t = 1$ et $k \geq 3$, ou $t \geq 2$ et $k \geq 2$, alors le problème $I(t, k)$ -coloration est NP-complet.

3.5 Coloration t -frugale impropre d'un graphe sans mineur K_4

Chen, Hahn, Raspaud et Wang [15], ont étudié le nombre chromatique injectif des graphes sans mineurs K_4 . Ils ont montré ce qui suit .

Théorème 3.5. Soit G un graphe sans mineur K_4 de degré maximum $\Delta \geq 1$. On a

$$\chi_{inj}(G) \leq \left\lceil \frac{3\Delta}{2} \right\rceil$$

Avant d'énoncer le principal résultat de cette section, nous présentons quelques notations que nous utiliserons dans le reste de ce document.

Soient G un graphe, u et v des sommets de G .

1. Si u est un sommet de G , on note $G - \{u\}$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet u .
2. Si uv est une arête de G , on note $G - \{uv\}$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv .
3. Si wu n'est pas une arête de G , on note $G + \{wu\}$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant l'arête wu .
4. Dans tout les figures que nous présentons dans ce chapitre, les sommets en noir ont un degré fixe, et les sommets en blanc possèdent des restrictions sur leur degré ou leur type.
5. On note

$$S_G(u) = \{x \in V(G) \mid (d_G(x) \geq 3 \text{ et } ux \in E(G)) \text{ ou } (\exists z \in V(G), d_G(z) = 2, uz, zx \in E(G))\}$$

$$\text{et } D_G(u) = |S_G(u)|.$$

Exemple. Dans le graphe G de la Figure 3.3, nous avons

- $S_G(a) = \{b, e, k\}$.
- $D_G(a) = |S_G(a)| = 3$.

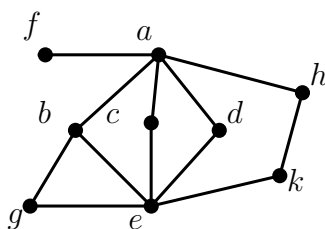


FIGURE 3.3 – $S_G(a) = \{b, e, k\}$

En 2003, Lih, Wang et Zhu [35] ont démontré le lemme structurel suivant :

Lemme 3.6 (Lih et al., [35]). Soit G est un graphe sans mineur K_4 . Alors l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. G contient un 1-sommet.

2. G contient deux 2-sommets u et v adjacents.
3. G contient un sommet u tel que $d(u) \geq 3$ et $D_G(u) \leq 2$.

On peut maintenant prouver le résultat principal de cette section

Théorème 3.7. Soit $t \geq 2$ un entier. Si G est un graphe sans mineur K_4 de degré maximum Δ alors

$$\chi_t^I(G) \leq \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta = 2 \\ \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor}{t} \right\rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 3 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $t \geq 2$ un entier. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de considérer le cas des graphes connexes. Supposons que le théorème est faux et soit G le plus petit contre exemple.

1. Si $\Delta = 2$ alors le graphe G est soit un cycle ou une chaîne. Dans ce cas, il est facile de voir qu'une seule couleur est suffisante pour avoir une coloration t -frugale impropre de G .
2. Si $\Delta \geq 3$ alors, pour tout sommet u dans G notons $F_t(u)$ le nombre maximum de couleurs qui ne peuvent pas être utilisées pour colorer u dans une coloration t -frugale impropre de G . Les couleurs sont exclues si elles sont utilisées t fois au voisinage d'un voisin de u . D'où, $F_t(u) \leq \left\lfloor \frac{|N_2(u)|}{t} \right\rfloor$, où $N_2(u)$ est l'ensemble des sommets adjacents aux voisins de u .

Soit $k^* = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor}{t} \right\rfloor + 1$. D'après le Lemme 3.6 nous devons considérer les trois cas suivants :

Cas 1. G contient un 1-sommet u . Soit v l'unique voisin de u dans G (voir la Figure 3.4).

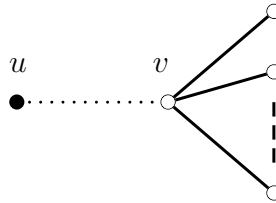


FIGURE 3.4 – Configuration réductible du Lemme 3.6.1

Le graphe $H = G - \{u\}$ est un graphe sans mineur K_4 connexe avec $|V(H)| \leq |V(G)|$ et $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Par minimalité de G , le graphe H admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant k^* couleurs. Puisque

$$F_t(u) \leq \left\lfloor \frac{|N_2(u)|}{t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor < k^*$$

Alors il existe au moins une couleur libre pour colorer u . Par conséquent, ϕ peut être étendue à une k^* -coloration t -frugale impropre de G , ce qui est une contradiction.

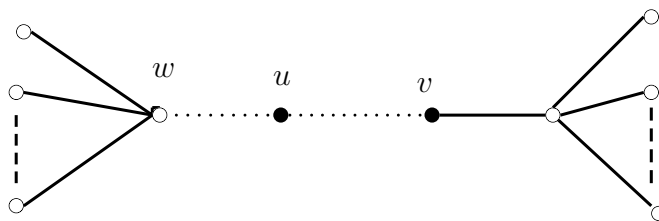


FIGURE 3.5 – Configuration réductible du Lemme 3.6.2

Cas 2. G contient deux 2-sommets u et v adjacents (voir la Figure 3.5).

Le graphe $H = G - \{u\}$ est un graphe sans mineur K_4 connexe avec $|V(H)| \leq |V(G)|$ et $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Par minimalité de G , le graphe H admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant k^* couleurs. Comme $d_G(u) = d_G(v) = 2$ et $t \geq 2$ aucun choix de couleur de u ne peut violer la condition t -frugale impropre du sommet v . Par conséquent,

$$F_t(u) \leq \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor < k^*$$

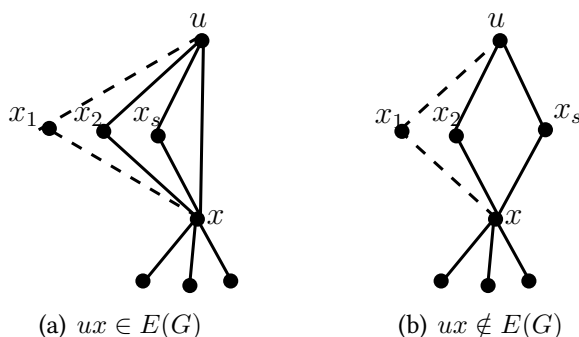
D'où, il existe au moins une couleur libre pour colorer u , donc ϕ est étendue à une k^* -coloration t -frugale impropre de G , contradiction.

Cas 3. G contient un sommet u avec $d(u) \geq 3$ et $D_G(u) \leq 2$.

Comme $\delta(G) \geq 2$, il s'ensuit que $1 \leq D_G(u) \leq 2$.

Soit $x \in S_G(u)$, on note $M(u, x)$ l'ensemble des sommets de degré deux qui sont adjacents à la fois à u et à x , et $m(x) = |M(u, x)|$.

- Si $D_G(u) = 1$ alors soit $S_G(u) = \{x\}$ et $M(u, x) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$. Nous avons évidemment $s \geq 2$ et $d_G(x) \geq 3$ (G n'a pas de 1-sommet ni de paire de 2-sommets adjacents).


 FIGURE 3.6 – $D_G(u) = 1$

Considérons les deux sous cas suivants :

- (a) Si $ux \in E(G)$ (voir Figure 3.6(a)). Par minimalité de G , le graphe $H = G - \{x_1\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant k^* couleurs.

$$F_t(x_1) \leq \left\lfloor \frac{d(x) - 1}{t} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor < k^*$$

Donc ϕ peut être étendue à une coloration t -frugale impropre de G utilisant k^* couleurs, contradiction.

- (b) Si $ux \notin E(G)$ (voir Figure 3.6(b)). Par minimalité de G , le graphe $H = G - \{x_1\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant k^* couleurs.

$$F_t(x_1) \leq \left\lfloor \frac{d(x) - 1}{t} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor < k^*$$

Donc ϕ peut être étendue à une coloration t -frugale impropre de G utilisant k^* couleurs, contradiction.

- Si $D_G(u) = 2$ alors soit $S_G(u) = \{x, y\}$. Sans perte de généralité supposons que $m(x) \geq m(y)$. Puisque $d(u) \geq 3$, on a $m(x) \geq 1$. Soit $x_1 \in M(u, x)$ et considérons le graphe $H = G - \{x_1\}$. Par minimalité de G , le graphe H admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant k^* couleurs. Nous allons étendre ϕ à une coloration t -frugale impropre de G .

Considérons les cas suivants basés sur les adjacences possibles entre u , x et y .

- (a) Si $xu \in E(G)$ (voir Figure 3.7).

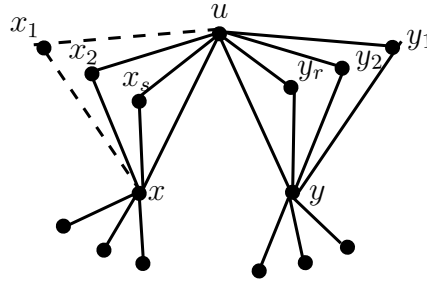


FIGURE 3.7 – $D_G(u) = 2$ et $ux \in E(G)$

Comme $D_G(u) = 2$, nous avons $m(x) + m(y) \geq d(u) - 2$ et puisque $m(x) \geq m(y)$,

on a $m(x) \geq \left\lceil \frac{d(u)-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{d(u)}{2} \right\rceil - 1$. D'où,

$$\begin{aligned}
 F_t(x_1) &\leq \left\lceil \frac{|N_2(x_1)|}{t} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{d(u) - 1 + d(x) - m(x)}{t} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{\Delta - 1 + \Delta - (\left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 1)}{t} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{2\Delta - \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil}{t} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor}{t} \right\rceil < k^*
 \end{aligned}$$

Donc il existe au moins une couleur disponible pour colorer x_1 . D'où, ϕ peut être étendue à une coloration t -frugale impropre de G utilisant k^* couleurs, contradiction.

(b) Si $xu \notin E(G)$ et $yu \notin E(G)$ (voir Figure 3.9).

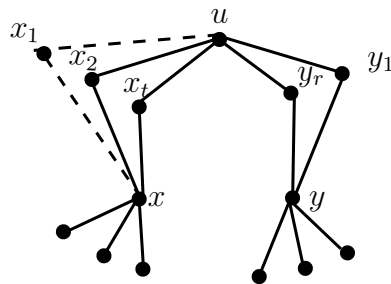


FIGURE 3.8 - $D_G(u) = 2$, $xu \notin E(G)$ et $uy \notin E(G)$

Dans ce cas, $m(x) + m(y) = d(u)$, il s'ensuit que $m(x) \geq \left\lceil \frac{d(u)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil$. Donc

$$\begin{aligned}
 F(x_1) &\leq \left\lfloor \frac{|N_2(x_1)|}{t} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{d(u) - 1 + d(x) - m(x)}{t} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{\Delta - 1 + \Delta - (\left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil)}{t} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{2\Delta - \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 1}{t} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor - 1}{t} \right\rfloor < k^*
 \end{aligned}$$

Donc il existe au moins une couleur disponible pour colorer x_1 . D'où, ϕ peut être étendue à une coloration t -frugale impropre de G utilisant k^* couleurs, contradiction.

(c) Si $xu \notin E(G)$ et $yu \in E(G)$ (Voir Figure 3.9)

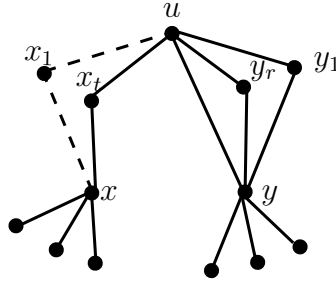


FIGURE 3.9 – $D_G(u) = 2$, $ux \notin E(G)$ et $uy \in E(G)$

Dans ce cas $m(x) + m(y) = d(u) - 1$. Si $m(x) = m(y)$ alors on procède de la même manière que pour le cas $xu \in E(G)$, contradiction.

Donc $m(x) > m(y)$ et $m(x) \geq \left\lceil \frac{d(u)}{2} \right\rceil$ et nous pouvons procéder comme pour le cas précédent.

Ce qui achève la preuve. □

3.6 Coloration t -frugale impropre des graphes planaires

En 2003, Van Den Heuvel *et al.* [41] ont démontré le Lemme structurel suivant :

Lemme 3.8 (Van Den Heuvel *et al.*, [41]). Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire. Alors, il existe un sommet $v \in V$ ayant m voisins v_1, \dots, v_m avec $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_m)$ vérifiant l'une des condition suivantes :

1. $m \leq 2$.
2. $m = 3$ avec $d(v_1) \leq 11$.
3. $m = 4$ avec $d(v_1) \leq 7$ et $d(v_2) \leq 11$.
4. $m = 5$ avec $d(v_1) \leq 6$, $d(v_2) \leq 7$ et $d(v_3) \leq 11$.

En utilisant le Lemme 3.8, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 3.9. Soit $t \geq 1$ un entier.

Si G est un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G) \geq 12$ alors

$$\chi_t^I(G) \leq \left\lfloor \frac{2\Delta(G) + 19}{t} \right\rfloor + 1$$

Démonstration. Soit $C \geq 12$ un réel. Montrons que si G est un graphe planaire satisfaisant $\Delta(G) \leq C$ alors $\chi_t^I(G) \leq \left\lfloor \frac{2C+19}{t} \right\rfloor + 1$.

On procède par contradiction. On suppose que le Théorème 3.9 est faux et soit G le plus petit contre-exemple. Sans perte de généralité, on suppose que G est connexe, sinon par minimalité de G on peut colorier indépendamment chacune des composantes connexes.

Soient v, v_1, \dots, v_m des sommets de G vérifiant les hypothèses du Lemme 3.8 (voir Figure 3.10(a)). Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en contractant l'arête vv_1 à un nouveau sommet v' (voir figure 3.10(b)).

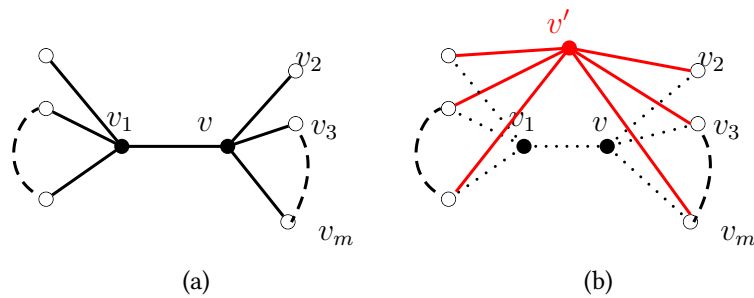


FIGURE 3.10 – Configuration interdite du Lemme 3.8

G' est un graphe planaire où tous les sommets sauf v' ont un degré au plus égal à celui qu'ils avaient dans G , tandis que v' a un degré au plus égal à $\Delta(G)$ (pour le cas (1)) ou au plus égal à 12 (pour les cas (2)-(3)). En particulier, nous avons $\Delta(G') \leq C$.

Par minimalité de G , le graphe G' admet une coloration t -frugal impropre ϕ' utilisant $\left\lfloor \frac{2C + 19}{t} \right\rfloor + 1$ couleurs.

Nous allons étendre la coloration ϕ' à une coloration t -frugal impropre ϕ de G comme suit. Tout d'abord, colorons le sommet v_1 avec la couleur de v' (autrement dit, on pose $\phi(v_1) = \phi'(v')$). Ensuite, colorons le sommet v . Puisque $F_t(v) \leq \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{d(v_i) - 1}{t} \right\rfloor$. En utilisant, les conditions des cas (1)-(4), nous obtenons $F_t(v) \leq \left\lfloor \frac{2C + 19}{t} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{2C + 19}{t} \right\rfloor + 1$. Ainsi, il existe au moins une couleur disponible pour colorer le sommet v , contradiction. \square

3.7 Coloration t -frugale impropre d'un graphe planaire de maille $g \geq 8$

Dans cette section, nous allons étudier, pour $t \geq 3$, le nombre chromatique t -frugal d'un graphe planaire de maille $g \geq 8$.

Théorème 3.10. *Soit $t \geq 3$ un entier. Si G un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G)$ et de maille $g \geq 8$, alors*

$$\chi_t^I(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil$$

Démonstration. Soit un entier $t \geq 3$. Par le Théorème 3.3 on a $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil \leq \chi_t^I(G)$. Il suffit donc de prouver que G admet une coloration t -frugale impropre utilisant $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil$ couleurs.

Supposons que le théorème est faux et soit H un contre-exemple minimal de degré maximum Δ . On peut supposer sans perte de généralité que G est connexe.

Fait 1. *Le contre-exemples H ne contient pas un 1-sommet.*

Démonstration. Si H contient un 1-sommet u , alors par minimalité de H , le graphe $H' = H - \{u\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ en utilisant $\left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil$ couleurs. Nous avons

$$F_t(u) \leq \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{t} \right\rfloor = \left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil - 1 < \left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil$$

D'où, il existe au moins une couleur disponible pour colorer u , contradiction. \square

Fait 2. *H ne contient pas deux 2-sommets adjacents u et v .*

Démonstration. Supposons qu'il existe dans H deux voisins de degré deux u et v .

Par minimalité de H , le graphe $H' = H - \{u\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant $\left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil$ couleurs. Comme $F_t(u) \leq \lfloor \frac{\Delta-1}{t} \rfloor = \lceil \frac{\Delta}{t} \rceil - 1 < \lceil \frac{\Delta}{t} \rceil$ nous pouvons donc étendre ϕ à H , contradiction. □

Fait 3. H ne contient pas un 3-sommet adjacent à deux 2-sommets.

Démonstration. Supposons que H contient un 3-sommet u adjacent à deux sommets de degré deux v, w (voir Figure 3.11).

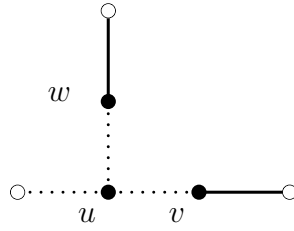


FIGURE 3.11 – Configuration réductible de Fait 3

Par minimalité de H , le graphe $H' = H - \{u\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant $\left\lceil \frac{\Delta}{t} \right\rceil$ couleurs. Comme $t \geq 3$ et $F_t(u) \leq \lfloor \frac{\Delta-1}{t} \rfloor = \lceil \frac{\Delta}{t} \rceil - 1 < \lceil \frac{\Delta}{t} \rceil$, nous pouvons donc étendre ϕ à H , contradiction. □

La formule d'Euler $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$ peut être s'écrire de la façon suivante

$$(6E(H) - 8V(H)) + (2E(H) - 8F(H)) = -16.$$

En utilisant la relation $\sum_{v \in V(H)} d(v) = \sum_{f \in F(H)} r(f) = 2|E(H)|$ nous obtenons l'équation suivante :

$$\sum_{v \in V(H)} (3d(v) - 8) + \sum_{f \in F(H)} (r(f) - 8) = -16 \tag{3.1}$$

Nous définissons la fonction de poids $\omega : V(H) \cup F(H) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = 3d(x) - 8$ si $x \in V(H)$ et $\omega(x) = r(x) - 6$ si $x \in F(H)$. Il découle de l'équation 3.1 que la somme totale des poids est égal à -16 . Dans ce qui suit, nous définissons la règle de déchargement (**R**) puis nous redistribuerons les poids suivant cette règle. Une fois la procédure de déchargement terminé, une nouvelle fonction de poids $\omega^*(x)$ est créée où la somme totale des poids reste fixe et inchangée. Nous montrons que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$ ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V \cup F} w^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} w(x) = -16 < 0$$

La règle de déchargement est définie comme suit

(R) Chaque 3^+ –sommet donne 1 à son 2–sommet voisin.

Soit v un k –sommet. Alors pas le Fait 1 $k \geq 2$.

- Si $k = 2$, nous observons que $\omega(v) = -2$ v est adjacent à deux 3^+ –sommet d’après le Fait 2. Par **(R)**, $\omega^*(v) = -2 + 2 \times 1 = 0$.
- Si $k = 3$, nous observons que $\omega(v) = 1$. Par le Fait 3, v est adjacent à au plus un 2–sommet. Par **(R)**, $\omega^*(v) \geq 1 - 1 \geq 0$.
- Si $k \geq 4$, nous observons que $\omega(v) = 3k - 8$. Le sommet v peut donner 1 à chacun des ses 2–sommets voisins. Par **(R)**, $\omega^*(v) \geq 3k - 8 - k \geq 2k - 8 \geq 0$.

Soit $f \in F(H)$ une k –face. Par hypothèse sur la maille, nous savons que $k \geq 8$, donc $\omega^*(f) = \omega(f) \geq 0$.

Après avoir effectué la procédure de déchargement, les nouveaux poids de toutes les faces et de tous les sommets sont positifs, contradiction et donc H ne peut pas exister.

□

3.8 Coloration t -frugale impropre des graphes planaires extérieurs

Lemme 3.11 (Esperet et Ochem, [20]). *Soit G un graphe planaire extérieur. Alors l’une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. G contient un 1–sommet.
2. G contient deux 2–sommets adjacents.
3. G contient un 2–sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents et $d_G(v) = 3$.
4. G contient un 2–sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents, $d_G(v) = 4$ et ses deux autres voisins x et y (distincts de u et w) sont adjacents et $d_G(x) = 2$.

Théorème 3.12. *Pour tout entier $t \geq 2$ et tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta(G)$ on a*

$$\chi_t^I(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{t} \right\rceil + 1$$

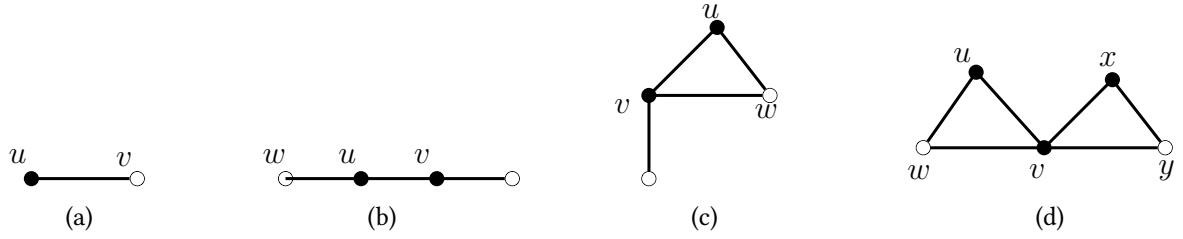


FIGURE 3.12 – Configurations inévitable dans un graphe planaire extérieur.

Démonstration. Soit H le plus petit contre-exemple du théorème 3.12 minimisant le nombre de sommets de H . Considérons un sommet $u \in V(H)$ ayant l'une des configurations décrites dans le Lemme 3.11. Par minimalité de H , Le graphe $H' = H - \{u\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant $\left\lceil \frac{\Delta(H)}{t} \right\rceil + 1$ couleurs.

- Si u vérifie la propriété du Lemme 3.11.1 ou du Lemme 3.11.2 (voir Figure 3.12(a) et Figure 3.12(b)) alors il est facile de voir qu'au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(H) - 1}{t} \right\rfloor < \left\lceil \frac{\Delta(H)}{t} \right\rceil + 1$ couleurs sont interdites pour colorer u . Par conséquence nous pouvons étendre ϕ à une coloration t -frugale impropre de H , contradiction.
- Si u vérifie la propriété du lemme 3.11.3 ou du lemme 3.11.4 (voir Figure 3.12(c) et Figure 3.12(d)) alors il est facile de voir qu'au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(H) - 1}{t} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{\Delta(H)}{t} \right\rceil < \left\lceil \frac{\Delta(H)}{t} \right\rceil + 1$ couleurs sont interdites pour colorer u . Par conséquence nous pouvons étendre ϕ à une coloration t -frugale impropre de H , contradiction.

□

En utilisant le résultat de Lih et Wang [34], nous pouvons réduire la borne du Théorème 3.12, à condition pour le cas des graphes planaires extérieur 2-connexes de degré maximum $\Delta \geq 7$.

Lemme 3.13 (Lih et Wang, [34]). *Tout graphe planaires extérieur 2-connexe avec un degré maximum $\Delta(G) \geq 7$ contient un 2-sommet u ayant au plus $\Delta(G) - 2$ sommets à une distance exactement deux.*

Nous montrons que

Théorème 3.14. *Soit $t \geq 2$ un entier. Pour tout graphe planaires extérieur 2-connexe G de degré maximum $\Delta(G) \geq 7$. On a :*

$$\chi_t^I(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{t} \right\rfloor + 1.$$

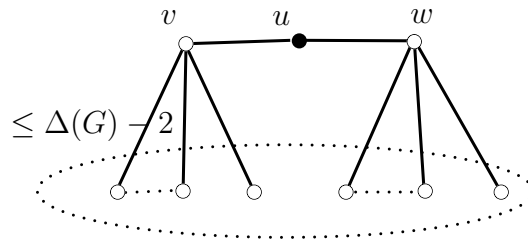


FIGURE 3.13 – Configuration réductible du Lemme 3.13

Démonstration. Supposons que le Théorème 3.14 est faux et soit G le plus petit contre-exemple. G contient un sommet u ayant la propriété décrite dans le Lemme 3.13 (voir Figure 3.13).

Soient v et w les voisins de u . Par minimalité de G , le graphe $G' = G - \{u\}$ admet une coloration t -frugale impropre ϕ utilisant $\left\lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{t} \right\rfloor + 1$ couleurs. Il est facile de voir qu'au plus $\left\lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{t} \right\rfloor$ sont interdites pour colorer u . Ainsi, la coloration ϕ de G' peut être étendue à une coloration t -frugale impropre de G utilisant $\left\lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{t} \right\rfloor + 1$ couleurs, ce qui contredit le choix de G , et le théorème est ainsi prouvé.

□

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une nouvelle notion de coloration dans les graphes à savoir la coloration frugale impropre des sommets.

Notre attention s'est portée sur l'attribution d'une majoration, en fonction du degré maximum, des graphes planaires, planaires extérieurs, des graphes sans mineurs K_4 .

En utilisant quelques résultats connus sur les propriétés structurelles des graphes sans mineurs K_4 et des graphes planaires, nous avons montré que pour tout graphe G sans mineur K_4 de degré maximum Δ , $\chi_t^I(G) \leq \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor}{t} \right\rfloor + 1$ si $\Delta \geq 3$. Nous avons ensuite, prouvé que tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 12$, au plus $\lfloor \frac{2\Delta+19}{t} \rfloor + 1$ suffisent pour obtenir une coloration t -frugale impropre de G . Nous avons pu réduire cette borne à $\lceil \frac{\Delta}{t} \rceil + 1$ couleur pour la classe des graphes planaires extérieurs et à $\lfloor \frac{\Delta-2}{t} \rfloor + 1$ pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum au moins 7.

Enfin, en utilisant la méthode de déchargement, nous avons démontré que pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ et de maille au moins égale à 8 on a $\chi_t^I(G) = \lceil \frac{\Delta}{t} \rceil$.

Le travail réalisé dans ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de recherche. Dans ce sens, nous citons ci-dessous quelques questions ouvertes :

1. Quel est le nombre chromatique t -frugal impropre d'un graphe planaire de maille au plus égale à 6?
2. Quel est le nombre chromatique t -frugal impropre des graphes k -dégénérés?
3. Quel est le nombre chromatique t -frugal impropre des graphes de Halin?
4. Quel est le nombre chromatique t -frugal impropre des graphes de degré moyen maximum borné?

Bibliographie

- [1] G. Agnarsson and M. M Halldórsson. Coloring powers of planar graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(4) :651–662, 2003. (Cité en page 22)
- [2] O. Amini, L. Esperet, and J. V. D. Heuvel. Frugal colouring of graphs. *arXiv preprint arXiv :0705.0422*, 2007. (Cité en pages 22, 23, et 24)
- [3] O. Amini, L. Esperet, and J. Van Den Heuvel. A unified approach to distance-two colouring of graphs on surfaces. *Combinatorica*, 33(3) :253–296, 2013. (Cité en page 22)
- [4] K Appel, W Haken, and J Koch. Every planar map is four colorable. part ii : Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3) :491–567, 1977. (Cité en page 3)
- [5] K Appel and Wolfgang Haken. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. *Illinois Journal of Mathematics*, 20(2) :218–297, 1976. (Cité en pages 14 et 15)
- [6] A. S Asratian and R. R Kamalian. Investigation on interval edge-colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 62(1) :34–43, 1994. (Cité en page 3)
- [7] S. Bard. Complexity of frugale homomorphisme, 2021. (Cité en pages 20, 21, 25, 27, et 28)
- [8] S. Bard, G. MacGillivray, and S. Redlin. The complexity of frugal colouring. *Arab. J. Math.*, (10) :51—57, 2021. (Cité en page 24)
- [9] Mehdi Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. Michigan State University, 1965. (Cité en page 15)
- [10] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. (Cité en page 3)
- [11] OV Borodin, HJ Broersma, A Glebov, and J Van den Heuvel. Stars and bunches in planar graphs. part ii : General planar graphs and colourings. *CDAM Reserach Report*, 5 :2002, 2002. (Cité en page 22)
- [12] Rowland Leonard Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941. (Cité en page 14)

- [13] Y Bu and X Zhu. An optimal square coloring of planar graphs. *Journal of combinatorial optimization*, 24(4) :580–592, 2012. (Cité en page 17)
- [14] C. Charpentier. *Coloration, jeu et marquages dans les graphes*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2014. (Cité en page 17)
- [15] M. Chen, G. Hahn, A. Raspaud, and W. Wang. Some results on the injective chromatic number of graphs. *Journal of combinatorial optimization*, 24(3) :299–318, 2012. (Cité en page 28)
- [16] W.D Cranston, S-J. Kim, and G. Yu. Injective colorings of graphs with low average degree. *Algorithmica*, 60(3) :553–568, 2011. (Cité en page 25)
- [17] W. Dong and W. Lin. Injective coloring of planar graphs with girth 6. *Discrete Math*, 313(12) :1302–1311, 2013. (Cité en page 25)
- [18] W. Dong and W. Lin. Injective coloring of planar graphs with girth 5. *Discrete Math*, (315–316) :120–127, 2014. (Cité en page 25)
- [19] A. Doyon, G. Hahn, and A. Raspaud. Some bounds on the injective chromatic number of graphs. *Discrete Math*, 310(3) :585–590, 2010. (Cité en page 25)
- [20] L. Esperet and P. Ochem. Oriented colorings of 2-outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 101 :215–219, 2007. (Cité en page 38)
- [21] J. Fiala and J. Kratochvíl. Partial covers of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22(1) :89–99, 2002. (Cité en pages 19 et 20)
- [22] G. Hahn, J. Kratochvíl, J. Siran, and D. Sotteau. On the injective chromatic number of graphs. *Discrete Math*, 256(1-2) :179–192, 2002. (Cité en pages 25 et 28)
- [23] G. Hahn, A. Raspaud, and W. Wang. On the injective coloring of K_4 minor free graphs. *preprint*, 2006. (Cité en page 25)
- [24] S.G. Hartke, S. Jahanbeka, and B. Thomas. The chromatic number of the square of subcubic planar graphs. *arXiv preprint arXiv :1604.06504*, 2016. (Cité en page 22)
- [25] F. Havet, J. Van Den Heuvel, C. McDiarmid, and B. Reed. List colouring squares of planar graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29 :515–519, 2007. (Cité en page 22)
- [26] H. Hind, M. Molloy, and B. Reed. Colouring a graph frugally. *Combinatorica*, 17(4) :469–482, 1997. (Cité en page 18)
- [27] M. Jarvis and B. Zhou. Bounded vertex coloring of trees. *Discrete Mathematics*, 232 :145–151, 2001. (Cité en page 19)
- [28] T. K. Jonas. *Graph coloring analogues with a condition at distance two : $L(2, 1)$ -labellings and list λ -labellings*. University of South Carolina, 1993. (Cité en page 22)

- [29] F. Kramer and H. Kramer. A survey on the distance-colouring of graphs. *Discrete mathematics*, 308(2-3) :422–426, 2008. (Cité en page 17)
- [30] J. Kratochvíl. Regular codes in regular graphs are difficult. *Discrete Math*, 133(1-3) :191–205, 1994. (Cité en pages 19 et 20)
- [31] J. Kratochvíl and M. Siggers. Locally injective k -colourings of planar graphs. *Discrete Appl. Math.*, 173 :53–61, 2014. (Cité en page 28)
- [32] M. Krzyżiński, P. Rzażewski, and S. Tur. Coloring squares of planar graphs with small maximum degree. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2021. (Cité en page 22)
- [33] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930. (Cité en page 11)
- [34] K.W. Lih and W.F. Wang. Coloring the square of an outerplanar graph. *Taiwanese J. of Math.* 10, pages 1015–1023, 2006. (Cité en pages 23 et 39)
- [35] K.W. Lih, W.F. Wang, and X. Zhu. Coloring the square of a k_4 -minor free graph. *Discrete Math.*, 269(1–3) :303–309, 2003. (Cité en pages 24 et 29)
- [36] E. L Lloyd and S. Ramanathan. On the complexity of distance-2 coloring. In *Proceedings ICCI92 : Fourth International Conference on Computing and Information*, pages 71–74. IEEE, 1992. (Cité en page 17)
- [37] B. Lužar, R. Škrekovski, and M. Tancer. Injective colorings of planar graphs with few colors. *Discrete Math*, 309(18) :5636–5649, 2009. (Cité en page 25)
- [38] T. Madaras and A. Marcinová. On the structural result on normal plane maps. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22(2) :293–303, 2002. (Cité en page 22)
- [39] M. Molloy and M. R Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 94(2) :189–213, 2005. (Cité en page 22)
- [40] Carsten Thomassen. The square of a planar cubic graph is 7-colorable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 128 :192–218, 2018. (Cité en page 22)
- [41] J. Van den Heuvel and S. McGuinness. Coloring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory*, 42 :110–124, 2003. (Cité en pages 22, 34, et 35)
- [42] V. G Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret analiz*, 3 :25–30, 1964. (Cité en page 14)
- [43] Vadim G Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, 23(6) :125, 1968. (Cité en page 15)
- [44] G. Wegner. Graphs with given diameter and a coloring problem : Technical report. *University of Dortmund, Germany*, 1977. (Cité en pages 21 et 24)

BIBLIOGRAPHIE

- [45] Stephen A Wong. *Colouring graphs with respect to distance*. PhD thesis, University of Waterloo, 1996. (Cité en page 22)
- [46] J. Zhu and Y. Bu. Minimum 2-distance coloring of planar graphs and channel assignment. *Journal of Combinatorial Optimization*, 36 :55–64, 2018. (Cité en page 22)