

République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
& de la recherche scientifique

INSTITUT D'AERONAUTIQUE DE BLIDA

76/02
070/2002
EX 1

DEPARTEMENT DE CONSTRUCTION AERONAUTIQUE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLOME ÉTUDE UNIVERSITAIRE D'APPLICATION**

Thème :

**CAUSES ET SOLUTIONS
DES VIBRATIONS**

examinateur: M^r BADEREDDINE
le: Mercredi 13/11/2002 à 10^h00
salle: Atelier propulsion

Encadré par M^r :

KIRADE A/Kader

Etabli par M^{rs} :

CHARA Ali

Promotion 2002

SOMMAIRE

Chap 1 : Notions sur les Vibrations

I.1. Introduction aux vibrations.....	1
I.2. Nature des vibrations.....	1
I.1.1. Vibrations périodiques.....	2
I.1.2. Vibrations a aléatoires.....	4
I.1.3. Vibrations transitoires	5
I.3. Source de vibrations.....	6
I.4. Mesure les vibrations.....	7

Chap 2 : Rotor et notion de vitesse critique

II.1. Introduction.....	9
II.2. Notion du rotor	9
II.3. Résonance.....	11
II.4. Vitesse critique.....	11

Chap 3 : Notion sur les méthodes de détermination de vitesses critiques de flexion.

III.1. Généralités.....	14
III.2. Méthode de calcul.....	15
III.2.1 Méthode de Stodola.....	15
III.2.2 Méthode de Borowicz.....	16

III.2.3 Méthode par les énergies.....	18
III.2.4 Méthode de Rayleigh.....	18

Chap 4: Modélisation des lignes d'arbres

IV.1.1 Caractéristiques du modèle	20
IV.1.2 Modélisation des arbres coudés	22
IV.1.3 Formules générales	24
IV.2 Moment d'inertie d'un coude	33
IV.3 Modélisation des arbres non coudes.....	40
IV.4 Exemple de modélisations	43

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude de vibrations de flexion et torsion des rotors et plus exactement le calcul des vitesses critiques.

Parmi les diverses méthodes existantes de calcul, nous avons choisi la méthode résiduelle dans la facilité de programmation et un minimum d'opération.

CHAPITRE 1

CHAPITRE I

NOTIONS SUR LES VIBRATIONS

1.1. Introduction aux vibrations :

Les phénomènes vibratoires et leur relations avec la mécanique sont relativement complexes, et de ce fait, c'est assez difficile à expliquer, néanmoins, nous allons essayer de les schématiser.

IL ya encore années, la vibration et la marche tranquille des machines étaient estimés, et dans la plupart des cas, en y posant les mains ou en déposant les pièces de Monnaies, ces procédés étaient cependant soumis à un jugement très subjectif, ils n'étaient pas exactes, et ne fournissaient entre autre aucun chiffre de mesure.

Au lieu de telle mesure, il ya maintenant des mesures de contrôle exactement définies ou on mesure la force de vibration des machines à l'aide d'appareils électroniques.

Tout d'abord, il faut remarquer qu'une machine n'a jamais qu'une vibrations harmonique, mais toujours un mélange de vibrations partielles de différentes fréquences , leur causes sont les différentes parties mobiles .

L'ensemble de ces efforts va produire une vibration résultante sur les paliers, cette vibration en général est de forme complexe.

1.2. Nature des vibrations :

Une vibration peut être définie comme un mouvement oscillatoire d'une particule ou d'un corps à partir de sa position de référence. ce mouvement peut être périodique , aléatoire ou transitoire .

I.2.1. Vibrations périodiques :

Le signal sinusoïdal de cette figure a par définition une fréquence discrète unique qui est donnée par $1/T$ et qui s'exprime en Hz (Hertz) qui représente le nombre de cycles par seconde, Test le temps mis par l'onde pour effectuer un cycle complet , jusqu'à revenir au même point .

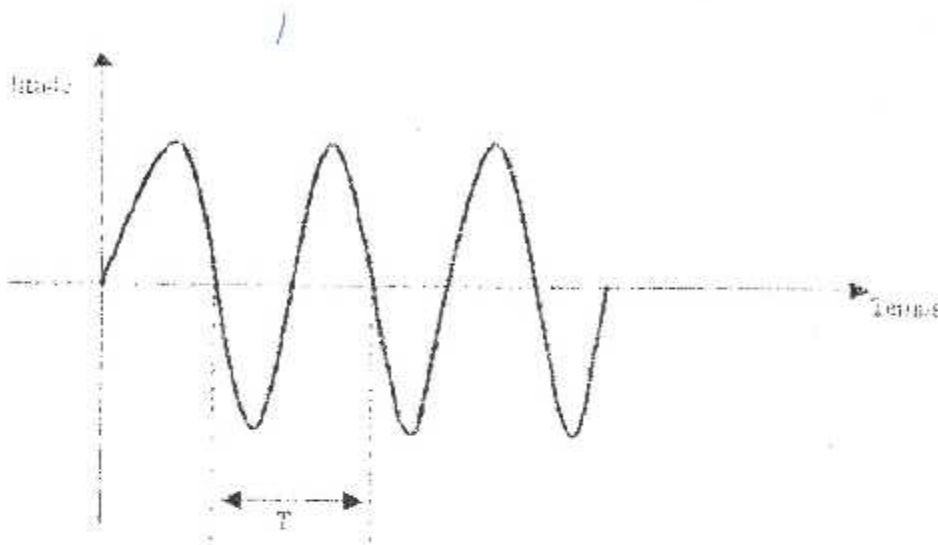


FIGURE I.1 : signal de vibration harmonique simple (sinusoïdale) $F=1/T$

Ce mouvement est périodique car il se répète de lui-même à un intervalle du temps régulier (T).

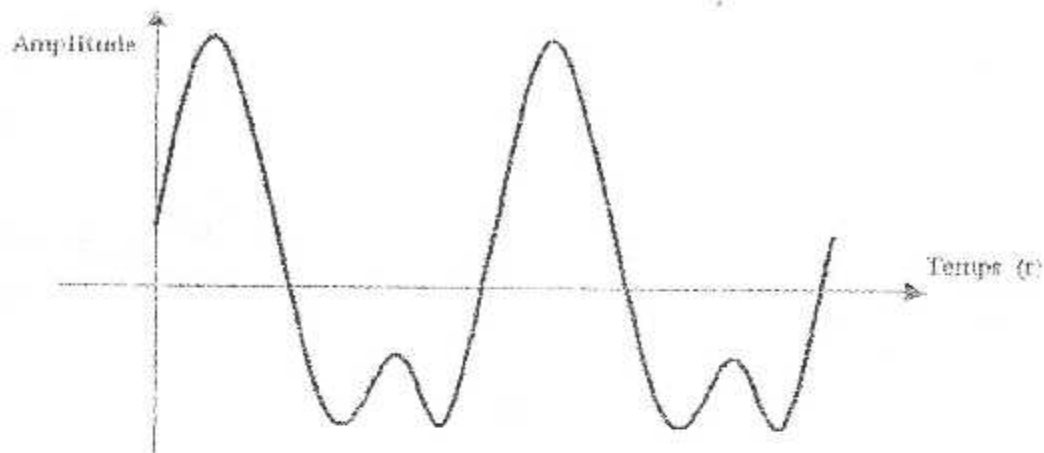
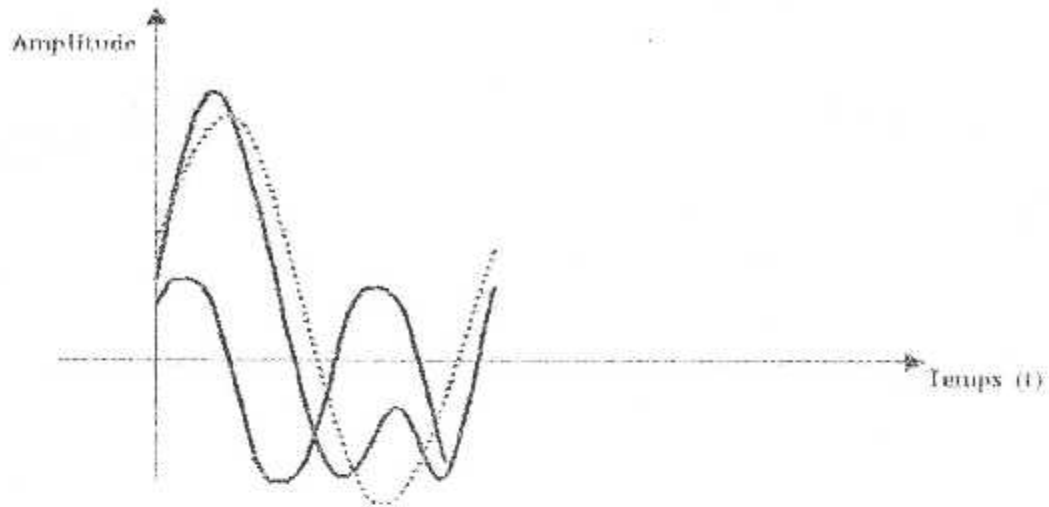


Figure 1.2 : signale de vibration harmonique simple complexe $F+2F$

La variation donnée (fig. 1.2.) est toujours périodique car elle se répète d'elle à un intervalle régulier mais, est maintenant de nature harmonique complexe ; (Elle n'est pas purement sinusoïdale). En effet, cet exemple est la combinaison de 2 ondes sinusoïdales.



FigI.3 : Forme d'onde de la figure I.2. Avec ses composants

Le signal de la forme I.3. est constitué par deux composantes ayant une fréquence et une amplitude différentes. On voit que dans ce cas (mais pas toujours), que l'une des sinusoïdes a une double de l'autre et que son amplitude est plus petit, les accélérations sont additionnées arithmétiquement pour obtenir l'amplitude du signal composé.

I.1.2. Vibrations aléatoires :

Le type vibration que l'on rencontre le plus fréquemment dans la vie courante est de type aléatoire, c'est-à-dire continu mais pas périodique et contenant beaucoup de composants de fréquence de vibration.

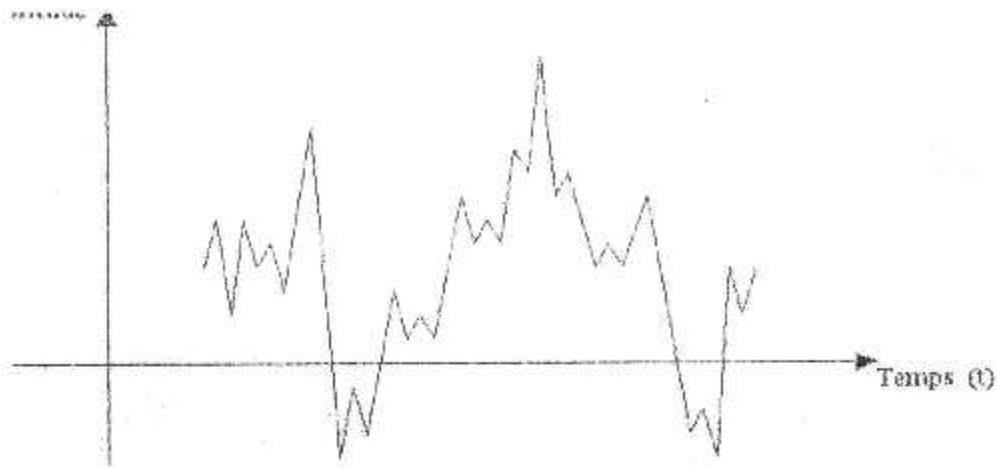


Fig.1.4. : signal de vibrations aléatoires

On voit également qu'il contient des pics dû résonances et aux harmoniques de certaines composantes de la vibration. Ces pics sont souvent dû à la source principale des vibrations.

I.1.3. Vibrations transitoires :

Une vibration transitoire est celle qui n'est pas continue, ce type de vibration se rencontre lors d'un impact durant la phase de démarrage d'un moteuretc, ou par tout ou la force d'excitation n'est pas continue.

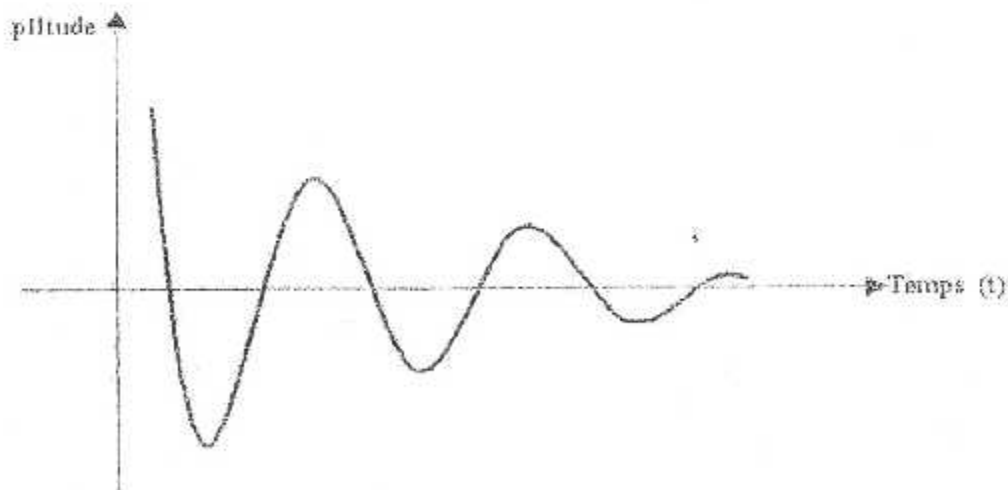


Fig. . 1.5 : signal d'une vibration transitoire

Ce type de vibrations aura un spectre de fréquence avec plusieurs lobes qui contiennent chacune toute une gamme de fréquence, la taille des lobes en terme de gamme de fréquence dépendra de la durée du phénomène transitoire.

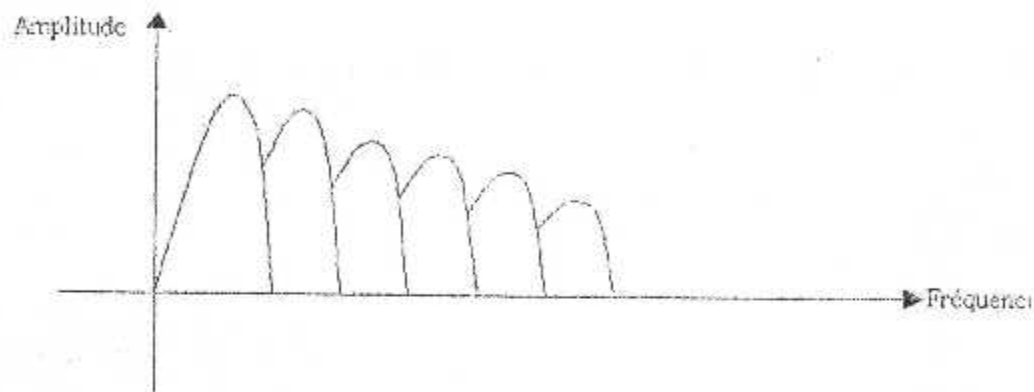


FIG. 1.6. : Spectre de fréquence d'une vibration transitoire

1.3. Source de vibrations :

Les sources les plus communes des vibrations qui se trouvent sur les machines sont des éléments en mouvement qui ne sont pas équilibrés. Les vibrations ne sont normalement pas souhaitables et peuvent le plus souvent être réduites par une conception soignée ou par des modifications de structures ou par l'équilibrage.

On sait que toutes les machines tournantes sont soumises à des vibrations après un certain nombre d'heures de fonctionnement sans interventions de maintenance et cela est dû principalement aux :

- Mauvaise linéarité des composants ;
- Usure et rupture des pièces rotatives (roulement) ;
- Mauvais serrage d'accouplement et d'assemblage divers ;
- Vibrations des machines proches.

1.4 Mesure des vibrations :

Différentes raisons font qu'il est nécessaires de mesurer les vibration, du point de vue d'étude , l'amplitude et la fréquence de la vibration sont connus pour faire en sorte que les contraintes induites ne soient pas supérieures à ce que le matériel peut supporter (voir le graphc).

La mesure des vibrations peut aussi montrer que certaines parties de la machine entre en résonance à une fréquence donnée, et l'on peut souvent éviter de faire tourner cette machine à la vitesse qui donne cette fréquence.

Il existe trois paramètres principaux pour décrire une vibration, le déplacement, la vitesse et l'accélération.

Le déplacement est la distance parcourue par le point de mesure depuis sa position neutre, la vitesse et la rapidité à laquelle se déplace le point de mesure, et l'accélération en est la vibration de la vitesse avec le temps.

Ces paramètres se mesurent en unités normalisées de longueur, vitesse et accélération qui sont (m), (m/s), (m/s²).

Considérons une vibration de la fonction :

$$X=a \sin \Omega t$$

Par dérivation successive de la fonction

$$X=a \sin \Omega t \quad a : \text{Amplitude du déplacement en } \mu\text{m}$$

On trouve la vitesse v :

$$V=\frac{dx}{dt}=a \Omega \cos \Omega t \quad a \Omega : \text{Amplitude du vitesse en } \mu\text{m /s}$$

$$y=\frac{dv}{dt}=-a \Omega^2 \quad a\Omega^2 : \text{Amplitude de l'accélération en } \mu\text{m /s}$$

CHAPITRE 2

ROTOR ET NOTION DE VITESSE CRITIQUE

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de finir le problème que peut subir un rotor :

Résonance; frottement et vitesse critiques ; en plus c'est rechercher l'expression mathématique de la vitesse critique afin de retrouver les paramètres qui influent sur sa grandeur.

2.2 Notion Du Rotor

une poutre est un système continu dont les dimensions transversale par rapport à sa dimension longitudinale, mieux par rapport à la distance entre deux points nodaux d'un régime vibratoire lorsqu'on impose une vitesse critique de rotation à une poutre elle devient un rotor.

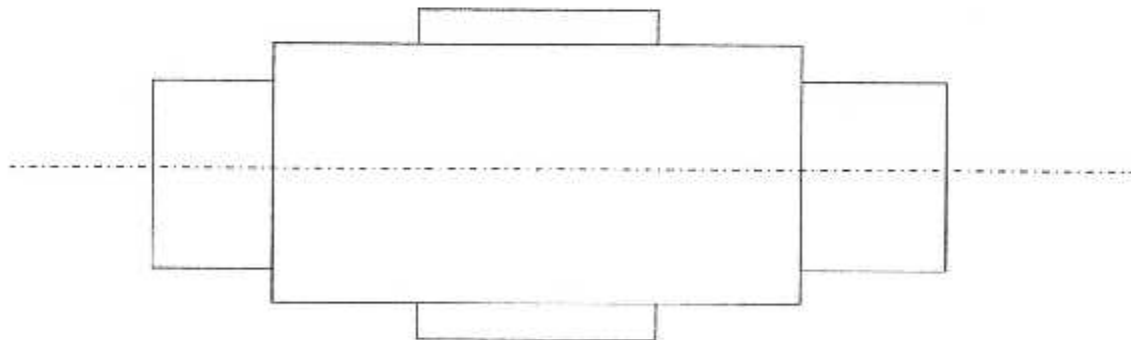


FIG. 2.1 PRESENTATION D'UN ROTOR

On peut représenter les variations de l'amplitude du déplacement en fonction de la vitesse de rotation d'un rotor comme c'est le cas de la fig(2.1).

Pour cet exemple réel, le mouvement est pratiquement sinusoïdal; on note un extremum pour 9000 tours par minute ; c'est la une première vitesse critique

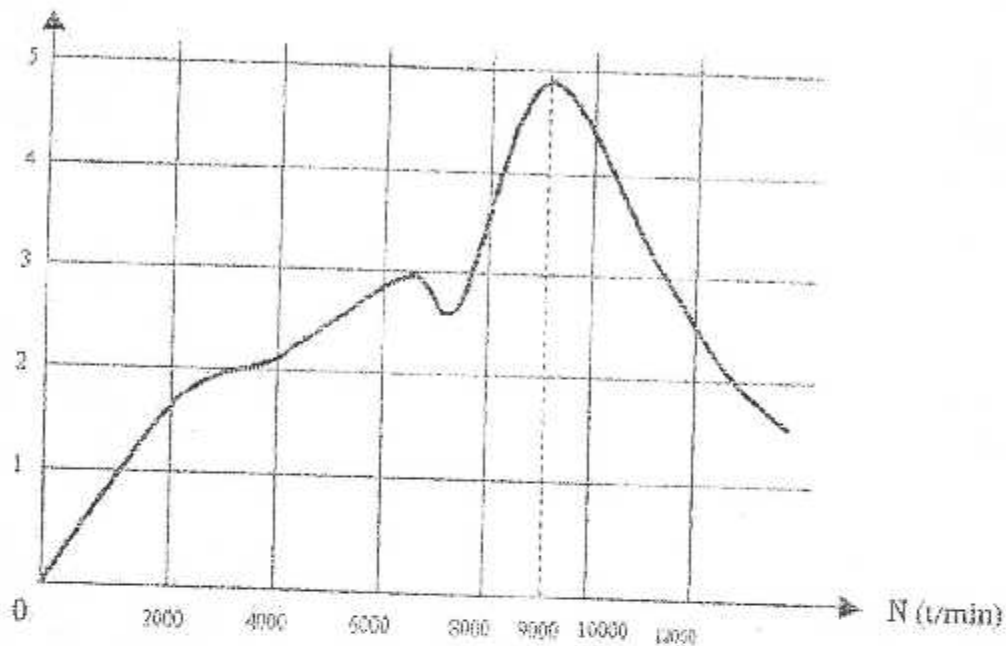


fig 2.2 : Amplitude de déplacement de la vibration au droit du disque en fonction de la vitesse d'un rotor

Le graphe (1) de la fig (2) définit l'évolution de la fréquence du mouvement du disque en fonction de sa vitesse de rotation ; on note une variation brutale des que la vitesse de rotation (N) atteint 12000 tours par minute.

Pour $N > 12000$ tr/min, il y a un problème de fouettement (1;2;3) ; il s'agit d'une instabilité du rotor, les déformations alternées sont élevées, il peut y avoir la rupture, et la destruction est imminente de certains éléments (disque ; amortisseur; supports) .

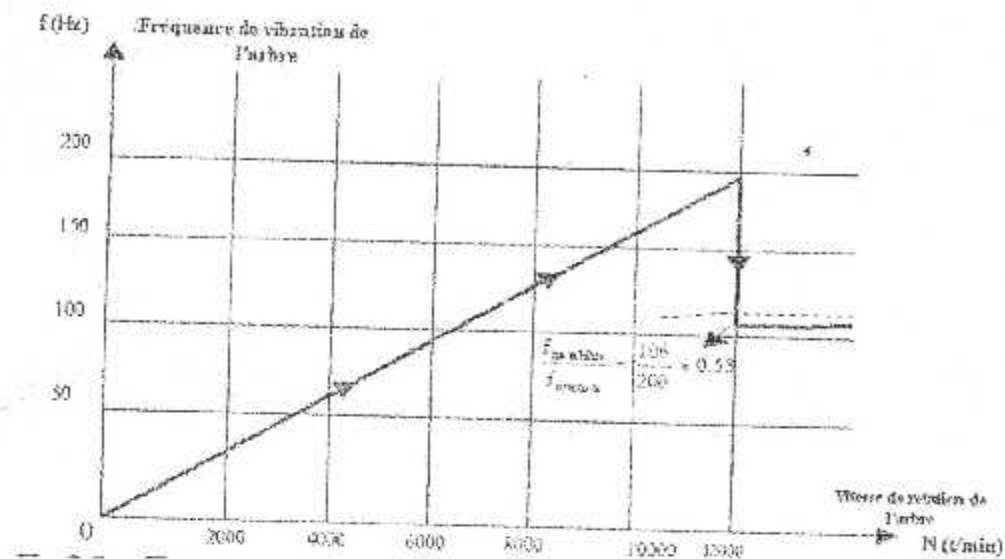


Fig 2.3 : Fréquence de la Vibration d'un rotor en fonction de sa vitesse

2.3 Résonance

Toutes variations si petites ; quelles soient positives ou négative de la fréquence d'excitation provoquant une diminution de fréquence du système, est appelée résonance.

Cette dernière est caractérisée par une pulsation de déplacement qui est donnée par l'expression mathématique démontrée en annexe (A) est donnée ci-dessous

$$w = w_d = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{f}{2m}\right)^2} \quad (2.1) \text{ (Annexe)}$$

2.4 Vitesse critique

Les vitesse critique sont des vitesse pour les qu'elles le déplacement ou la vitesse de déplacement ou l'accélération de déplacement passe

par un maximum pour un point et pour une direction donnée. Ces vitesses critiques dépendent des points dont on analyse le mouvement.

Exemple:

Soit un ensemble rotor défini par la fig (2.4) c'est l'ensemble adopté par "jeffcott" en (1914) pour l'étude des mouvements.

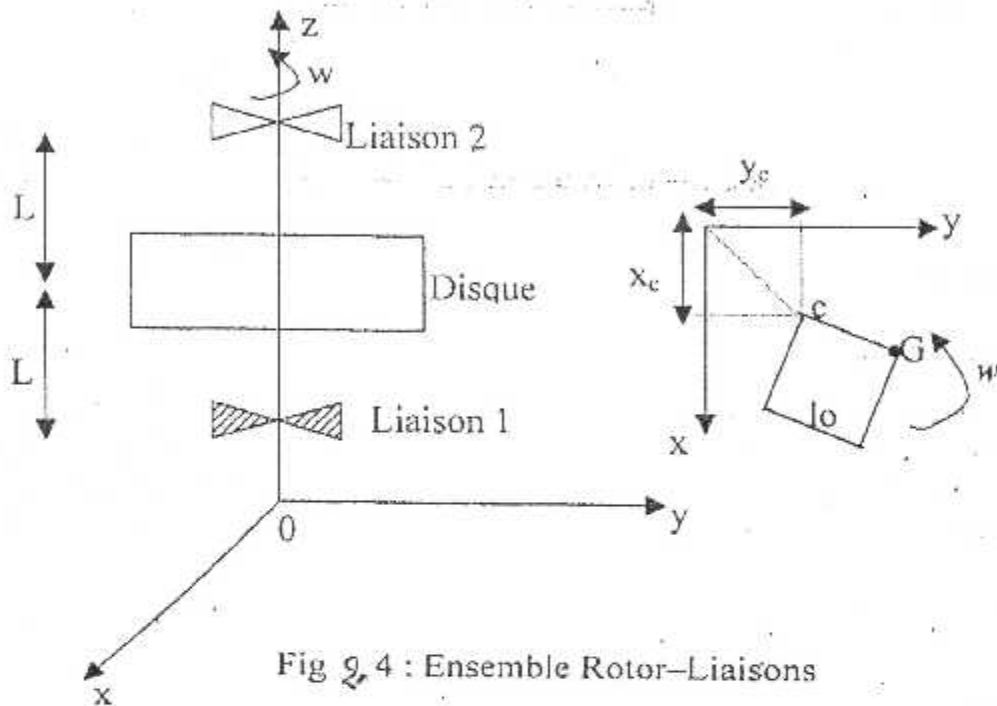


Fig 2, 4 : Ensemble Rotor-Liaisons

La vitesse critique du déplacement, c'est-à-dire la vitesse pour laquelle l'amplitude du déplacement passe par un maximum, est donnée par l'expression (1) suivante

$$W_{cr} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2F}{KM} \right)} \quad (2.2)$$

La vitesse critique de vitesse de déplacement dont l'expression mathématique a été retrouvée en annexe (b) ; c'est a dire la vitesse pour laquelle l'amplitude de la vitesse passe par un maximum est :

$$\frac{W_c}{W_{cr}} = \frac{1}{6} \left[4 - 2 \left(\frac{F}{Mw} \right)^2 + \sqrt{4 \left(\frac{F}{Mw_0} \right)^4 + 4 - 16 \left(\frac{F}{Mw_0} \right)^2} \right] \quad (2.3)$$

CHAPITRE 3

CHAPITRE III

NOTION SUR LES METHODES DE DETERMINATION DES VITESSES CRITIQUES DE FLEXION

METHODES DE DETERMINATION DES VITESSE CRITIQUES DE FLEXION

Généralités :

La caractérisation, au sens défini par l'article modélisation et caractérisation n'est pas indifférente à la méthode dont elle est une partie et qui d'ailleurs l'inspire, de ce fait, les méthodes s'appliquent sur des caractérisations dont la finesse est très variable, ainsi l'application de la méthode de calcul de Stodola supporte difficilement des liaisons à impédance finie alors que la méthode de calcul des passage matricielles (transferts) s'en accommode sans difficultés.

Les méthodes expérimentales qui utilisent des maquettes n'échappent pas aux imperfections de la caractérisation.

Finalement c'est toujours par le résultat d'une action cybernétique, qui compare le modèle de la réalité, que l'on peut apprécier la valeur d'une méthode. Le modèle est constitué par l'ensemble des premières vitesses critiques. Les objets images physiques soumis à l'expérience, peuvent fournir des comparaisons intermédiaires qui placent l'étude dans la voie bornée par des écarts faibles, de ces comparaisons résulte souvent la connaissance, des vitesses critiques avec leur incertitude, puisque les vitesses critiques réelles ne seront connues qu'après réalisation.

3-2- METHODES DE CALCUL

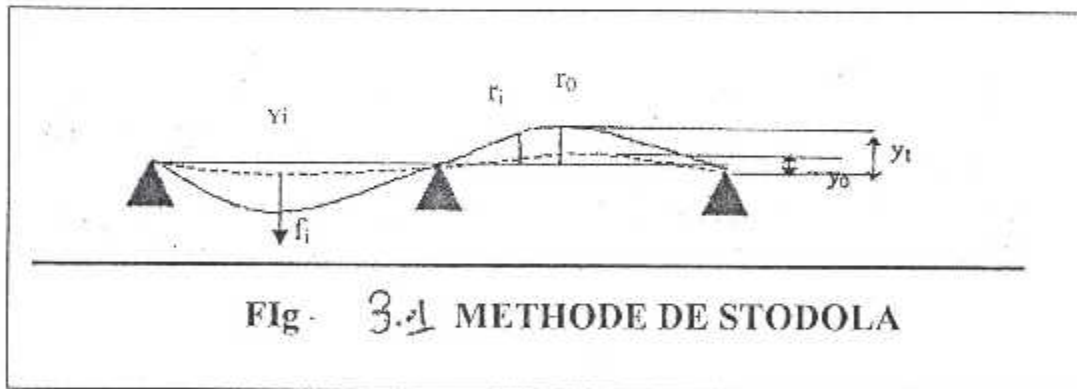
3-2-1- Méthode De Stodola :

Principe

Elle considère le rotor et procède par approximations successives après avoir choisie une déformée initiale (r_0) fig. (3.1) qui satisfait aux conditions aux limites (appuis rigides à rotules), et une vitesse angulaire (en général on prend $\Omega_0 = 1 \text{ rad / s}$), on détermine par les procédés classiques de la résistance des matériaux, la déformée r_1 qui résulte de l'application statique des efforts centrifuges $F_i = m_i \Omega_0^2 Y_i$

Si r_1 est affine de r_0 , dans le rapport $r = (Y_1 / Y_0)$ la vitesse critique est donnée par la relation $\Omega_{cr} = \Omega_0 \sqrt{1/r}$

Si r_1 n'est pas affine de r_0 , on reprend la détermination qui vient d'être précisée en choisissant r_1 pour déformée initiale, et ainsi de suit jusqu'à ce que la déformée obtenue r_{i+1} sont affine de la déformé r_i . Pratiquement deux ou trois relations suffisantes.



r_0 : Déformée initiale choisie

r_1 : Déformée résultante de l'application des efforts centrifuges.

METHODE DE BOROWICZ

Elle utilise des développements algébriques et opère par itération.

Un ensemble comportant plusieurs liaisons est assimilé à un système dont le nombre des degrés de liberté est égal au nombre des travées (pour quatre liaisons et un porte-à-faux, le nombre de degrés de liberté est égal à quatre).

Nous précisons la méthode en considérant un rotor sur trois (Fig 11). Comme dans le procédé de Stodola, nous adopterons une déformée initiale r_0 et désignerons par

Y_i : la flèche maximale relative à l'élément

R_i : la résultante des forces centrifuges de l'élément.

Ω_0 : la pulsation propre

α_i : un coefficient de répartition des masses,

On peut écrire : $R = \alpha_i y_i \Omega_0^2$ (3.1)

Par ailleurs en introduisant le coefficient d'influence a qui détermine la flèche sur l'élément, résultant de la force R_i (d'après la fig. 3.2 et j peuvent prendre les valeurs 1 et 2) on aura :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} R_1 + a_{12} R_2 \\ y_2 &= a_{21} a_1 \Omega_0^2 + a_{22} a_2 q_2 \Omega_0^2 y_2 \end{aligned} \right\} \text{(3.3)}$$

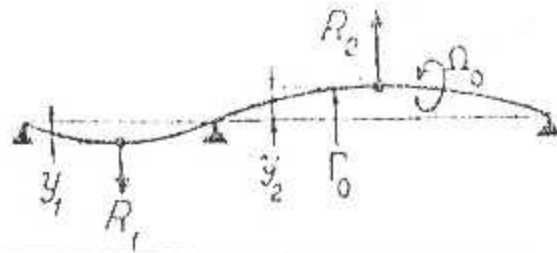


Fig . METHODE DE BOROWICZ : application à un rotor guidé par trois liaisons (appuis rigides à rotule) En tenant compte de l'expression de Ri donnée en (6) bis, le système (7) devient :

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}\alpha_1^2 y_1 + a_{12}\alpha_2 \Omega_0^2 y_2 \\ Y_2 &= a_{21}\alpha_1 \Omega_0^2 y_1 + a_{22}\alpha_2 \Omega_0^2 y_2 \end{aligned}$$

les solutions n'existent que si le déterminant des inconnus de ce système linéaire homogène est égal à zéro; cette condition fixe l'équation aux pulsations propres :

$$\begin{vmatrix} a_{11}\alpha_1 \Omega_0^2 - 1 & a_{12}\alpha_2 \Omega_0 \\ a_{21}\alpha_1 \Omega_0^2 & a_{22}\alpha_2 \Omega_0^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

avec $M\Omega_0^2 - 2N\Omega_0^2 + 1 = 0$ ou avec $M = a_{11}a_1a_2\alpha_2 - a_{12}a_2a_2\alpha_1$

$$N = 1/2(a_{11}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2)$$

L'équation (9) permet le calcul de deux pulsations propres et nous ne pouvons retenir que celle qui fixe une valeur négative au rapport y_1/y_2 (hypothèse relative à la forme de la déformée initiale r_0).

Spécification bien que la vitesse critique, qui donne au rapport y_1/y_2 une valeur positive, ne représente pas une valeur réelle.

Avec (8), on peut calculer (y_1/y_2) pour la vitesse critique Ω_0^1

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^1 = \frac{a_{12}\alpha_2 (\Omega_0^1)^2}{1 - a_{11}\alpha_1 (\Omega_0^1)^2}$$

en général $(y_1/y_2)^1$ est différent du rapport y_1/y_2 initial, et on doit reprendre le calcul qui précède en considérant une déformée r_1 dont le rapport des flèches

maximales soit égal à (y_1/y_2) pratiquement, le premier calcul suffit et l'initial n'est pas à effectuer.

Pour un ensemble à n éléments, l'équation aux vitesses critiques est d'ordre $2n$, et seule la vitesse critique, qui fixe au rapport des flèches les signes adoptés pour la déformée de base, est à retenir.

Méthode par les énergies

Elles sont basées sur le théorème des forces vives qui exprime l'égalité entre les énergie potentielle et cinétique maximales.

3.2 méthode de Rayleigh.

1 principe : considérons un rotor guidé par trois liaisons (fig. 13) découpé en n éléments \dots, i, \dots, n , à chacun, desquels on affecte le poids P_i

en adoptant une déformée dynamique Γ_0 (nous avons considéré ici la résistance statique déterminée par les procédés classiques de la résistance des matériaux) chaque élément i est caractérisé par une flèche y_i .

la première pulsion propre s'écrit:

$$\Omega_{cr} = \sqrt{g \frac{\sum_i P_i y_i}{\sum_i P_i y_i^2}}$$

avec g accélération de la pesanteur.

La méthode de Rayleigh peut encore être utilisée en adoptant pour déformée dynamique de base T_0 une courbe quelconque satisfaisant aux conditions aux limites ; dans ce cas, pulsation propre.

Méthode de Ritz - La Méthode de Rayleigh, qui suppose avoir fait choix d'une déformée, revient à introduire une contrainte dont l'effet est de limiter le nombre de degrés de liberté du système, donc à augmenter sa pulsation propre ; cette augmentation ne peut être reconnue par comparaison avec le résultat du calcul d'une autre méthode que si les hypothèses de base sont identiques.

méthode de Ritz se présente comme une amélioration de la méthode de Rayleigh grâce à la notion de minimum de la pulsation propre.

Pratiquement, on peut opérer par voie analytique en introduisant dans l'expression mathématique qui fixe la forme de la pulsation propre [I.b.1].

On peut aussi, dans les cas complexes, en particulier lorsqu'une expression analytique de la déformée est difficile à introduire, se fixer plusieurs déformées et calculer par la méthode de Rayleigh pour chacune de ces déformées la pulsation propre; la plus faible, se rapproche de la vraie valeur.

la méthode de Ritz est peu utilisée on préfère d'autres méthodes qui, par des calculs moins longs, permettent une détermination, pratiquement suffisante.

CHAPITRE 4

4.1 Modélisation des lignes d'arbres

4.1.1 Caractéristiques du modèle

Le concepteur doit prédire aussi précisément que possible les réactions de l'objet projeté aux diverses sollicitations du milieu dans lequel il évolue.

Préalablement à la fabrication, la connaissance de certaines manifestations, mises en évidence par l'observation ou l'expérimentation, est essentielle pour le constructeur.

L'état des connaissances à un instant donné et la complexité d'une ligne d'arbres, par exemple, conduisent à substituer à la réalité des esquisses simplifiées ou modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique, chaque modèle exprimant l'une des manifestations de l'objet (cf article Modélisation et caractérisation, dans ce traité)

Ainsi il est nécessaire de créer, pour une ligne d'arbres, différents modèles pour :

- réaliser l'équilibrage d'un vilebrequin ;
- connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, de flexion ou axiales ;
- déterminer les amplitudes en quelques points particuliers des oscillations forcées de torsion, de flexion ou axiales ;
- donner une image de l'état de contrainte de la matière, etc...

Nous limiterons à la caractérisation des modèles traduisant les n premières fréquences naturelles de torsion et les amplitudes des oscillations forcées. Les éléments de ces modèles doivent satisfaire

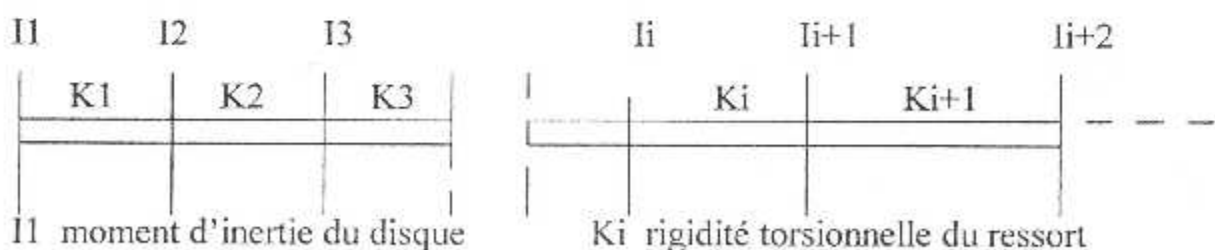
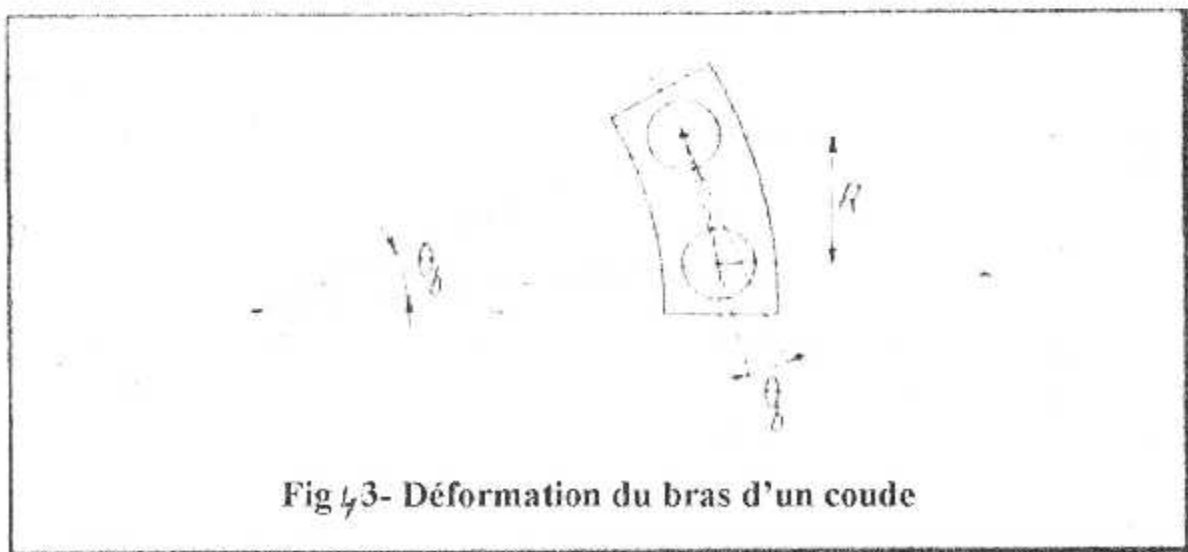
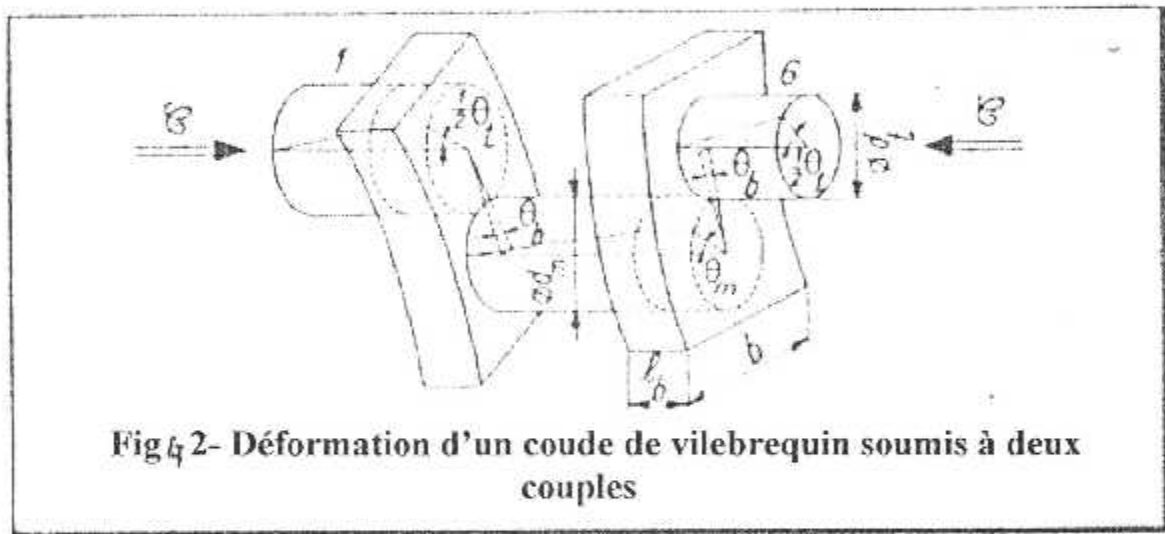


Fig1.4- Exemples de modèle de lignes d'arbres

A des règles bien connues : proportionnalité entre efforts et déformations, conservation des masses , pour que les lois de la mécanique leur soient applicables et que la résolution numérique des équations conduise à l'utilisation de schémas mathématiques classiques . Ces modèles représentent une distribution de paramètres et de degrés de liberté qui dépend de l'expérimentation.

Les lignes d'arbres qui sont essentiellement composées de coudes d'arbres épaulés , d'accouplement , de réducteurs et de rotors seront réduites à des modèles équivalents constitués de disques i d'inertie I_i reliés entre eux par des ressorts de torsion sans masse , de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la figure 1



1.2 Modélisation des arbres coudés

1,21 Longueur équivalente d'un coude

1,210 Si l'on considère un coude soumis à deux couples opposés C (en newton-mètres, $N.m$) portés par l'axe des tourillons et appliqués à chaque extrémité, la déformation globale en torsion est la somme des déformations :

- en torsion des deux demi-tourillons et du maneton.
- En flexion des deux bras.

Cela se traduit par la rotation relative des deux sections extrêmes 1 et 6 du couple d'un angle θ_{16} exprimé en radians, rad.

La rigidité torsionnelle k du coude est :

$$k = \frac{C}{\theta_{16}}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k_t} + \frac{2}{k_b} + \frac{1}{k_m}$$

avec k_t ($N.m/rad$) rigidité torsionnelle d'un demi-tourillon,

k_m ($N.m/rad$) rigidité torsionnelle du maneton,

k_b ($N.m/rad$) rigidité équivalente d'un bras.

Si, dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que les formules simples de résistance des matériaux sont applicables aux coudes de vilebrequin, nous pouvons calculer la rigidité k en fonction des dimensions :

$$k_t = \frac{2 G J_t}{\ell_t}$$

$$k_m = \frac{G J_m}{\ell_m}$$

$$k_b = \frac{E J_b}{R}$$

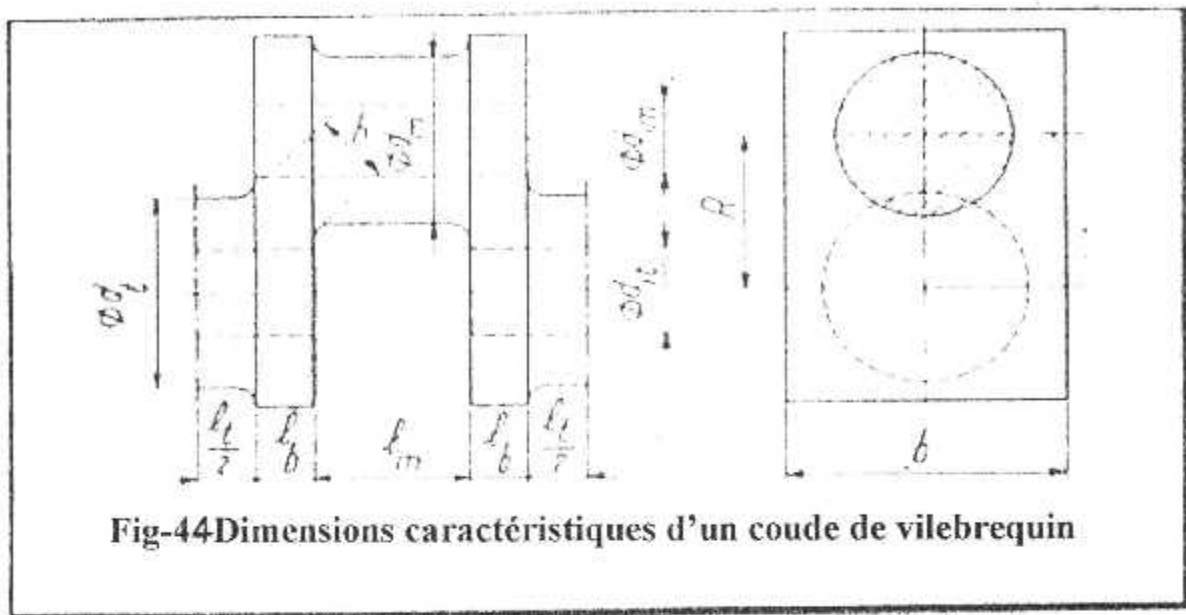


Fig-44 Dimensions caractéristiques d'un coude de vilebrequin

Avec E (N/m² ou pa) module d'élasticité

G (N/m² ou Pa) module de glissement

J_i, J_m, J_b (m⁴) moments quadratiques des sections, égaux à :

$$J_i = \frac{\pi}{32} (d_i^4 - d_{it}^4)$$

$$J_m = \frac{\pi}{32} (d_m^4 - d_{im}^4)$$

$$J_b = \frac{\ell_b \cdot b^3}{12}$$

Où d_{it} , d_{im} (m) diamètres des alésages dans les tourillons et les manetons s'ils existent,

D_{mi}, d_i (m) diamètres respectifs manetons et tourillons,

L_b, b (m) dimensions de la section du bras :

d'où

$$\frac{1}{k} = \frac{32 \ell_i}{\pi (d_i^4 - d_{it}^4) G} + \frac{32 \ell_m}{\pi (d_m^4 - d_{im}^4) G} + \frac{24 R}{E \ell_b b^3}$$

La longueur ℓ_e (m) de l'arbre rectiligne de diamètre équivalent en torsion D_e (m) est égale à :

$$\ell_e = \frac{G \pi D_e^4}{32} \cdot \frac{1}{k}$$

Soit :

$$\ell_e = D_e^4 \left[\frac{\ell_i}{d_i^4 - d_{it}^4} + \frac{\ell_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + 2,35 \frac{GR}{E \ell_b \cdot b^3} \right]$$

Cette formule , qui repose sur l'hypothèse contestable réduisant le coude de vilebrequin à une suite de poutres , au sens classique de la résistance des matériaux , est très approximative .

Un coude est un système complexe , et seule la prise en compte des formes réelles permet de déterminer avec précision la longueur équivalente .
De nombreux auteurs proposent des formules semi-expérimentales.
Nous avons sélectionné celles qui donnent des résultats acceptables.

4-1,3 Formules générales

4-1,3-1 Les dimensions (en mètres) utilisées pour calculer les longueurs équivalentes ℓ_e , dans les formules homogènes ci après, sont indiquées sur la figure 4 .

4-1,3-2 Formule de Carter.- On a :

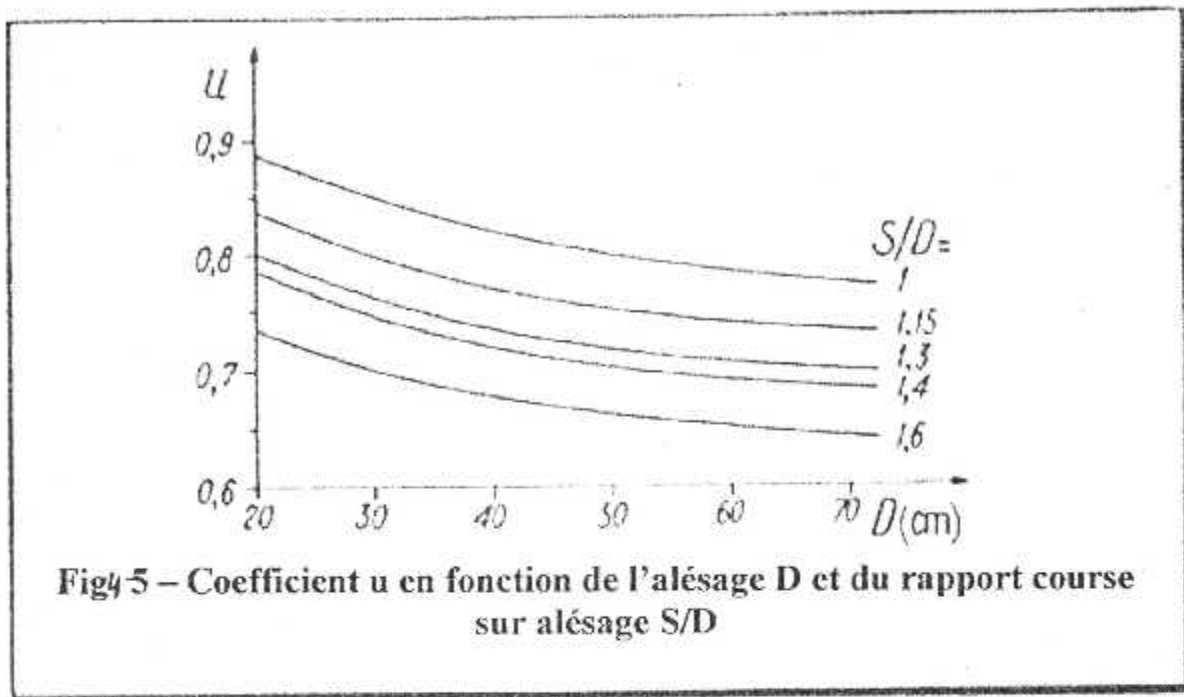
$$\ell_e = D_e^4 \left[\frac{\ell_i + 0,8 \ell_b}{d_i^4 - d_{it}^4} + \frac{3}{4} \frac{\ell_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + \frac{3}{2} \frac{R}{\ell_b \cdot b^3} \right]$$

4-1,3-3 Formule de Geiger.- On a :

$$\ell_e = D_e^4 \left[\frac{\ell_i + 0,4 \ell_b}{d_i^4 - d_{it}^4} + \frac{\ell_m + 0,4 \ell_b}{d_m^4 - d_{im}^4} + 0,912 \frac{R - z d_i}{\ell_b \cdot b^3} \right]$$

Avec z fonction de b/d_i et de R/d_i .

Cette formule s'applique aux arbres manivelles des gros moteurs.



D'après Geiger :

$z = 0$ pour $1,6 < b/d_i < 1,63$ et $0,92 < R/d_i < 1,2$,

$z = 0,4$ pour $b/d_i = 1,49$ et $R/d_i = 0,84$,

et $z = 0,3$ pour $b/d_i = 1,33$ et $R/d_i = 1,07$.

4.134 Formule de ker wilson – On a :

$$\ell_a = D_a^4 \left[\frac{\ell_i + 0,4 d_i}{d_i^4 - d_{ii}^4} + \frac{\ell_m + 0,4 d_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + \frac{R - 0,2 (d_i + d_m)}{\ell_b \cdot b^3} \right]$$

Formule de Seelmentt.- On a :

$$\ell_a = D_a^4 \left[\frac{\ell_i}{d_i^4 - d_{ii}^4} + \frac{0,9 \ell_b}{d_m^4 - d_{im}^4} + u \left(\frac{0,93 R}{\ell_b \cdot b^3} + \frac{\ell_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + \frac{0,9 \ell_b}{d_i^4 - d_{ii}^4 + d_m^4 - d_{im}^4} \right) \right]$$

avec u fonction du rapport course sur alésage S/D et de l'alésage D du cylindre (fig. 5). Cette formule est applicable aux arbres manivelles des gros moteurs.

4.1.3.5 Formule rJe Timoahenko.—On a :

$$\ell_e = D_e^4 \left[\frac{\ell_t + 0,9 \ell_b}{d_t^4 - d_a^4} + \frac{\ell_m + 0,9 \ell_b}{d_m^4 - d_a^4} + \frac{0,93 R}{\ell_b \cdot b^3} \right]$$

4.1.3.6 Formule de Tuplin - On a :

$$\ell_e = D_e^4 \left[\frac{\ell_t + 0,15 d_t}{d_t^4 \left(1 - \frac{d_a^4}{d_t^4}\right)^2} + \frac{\ell_m + 0,15 d_m}{d_m^4 \left(1 - \frac{d_a^4}{d_m^4}\right)^2} + \frac{2 \ell_b - 0,15 (d_m + d_t)}{b^4 - d_t^4} \right. \\ \left. + \frac{R}{\ell_b \cdot b^3} \left(0,58 + \frac{0,065 d_t}{\ell_b}\right) + \frac{0,016}{b \cdot \ell_b^2} \right]$$

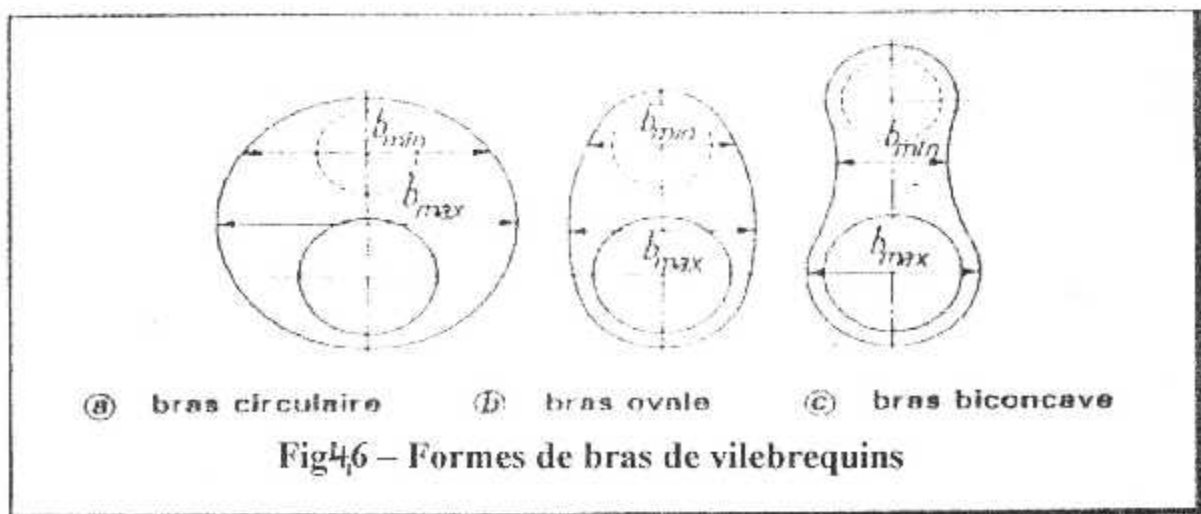
4.1.3.7 Formule de Gironnet—Cette formule est applicable a des coudes qui ont un recouvrement des soies supérieur ou égal a zéro.

$$\ell_e = \frac{D_e^4}{d_t^4} \left[\ell_t + 0,5 h + \frac{d_t^4}{d_m^4} \ell_m + 1,4 \frac{d_t^4}{h \cdot b^3} \cdot R \right]$$

recouvrement des soies: intersection des deux cercles de base du maneton et du tourillon sur un plan perpendiculaire a l'axe du vilebrequin.

4.1.3.8 Méthode du British Internal Combustion Engine Research Association.

Cette méthode, applicable a toutes les formes de vilebrequins et qui tient compte en détail de la géométrie du coude, est celle qui, à l'expérience, nous parait la plus proche de la réalité.



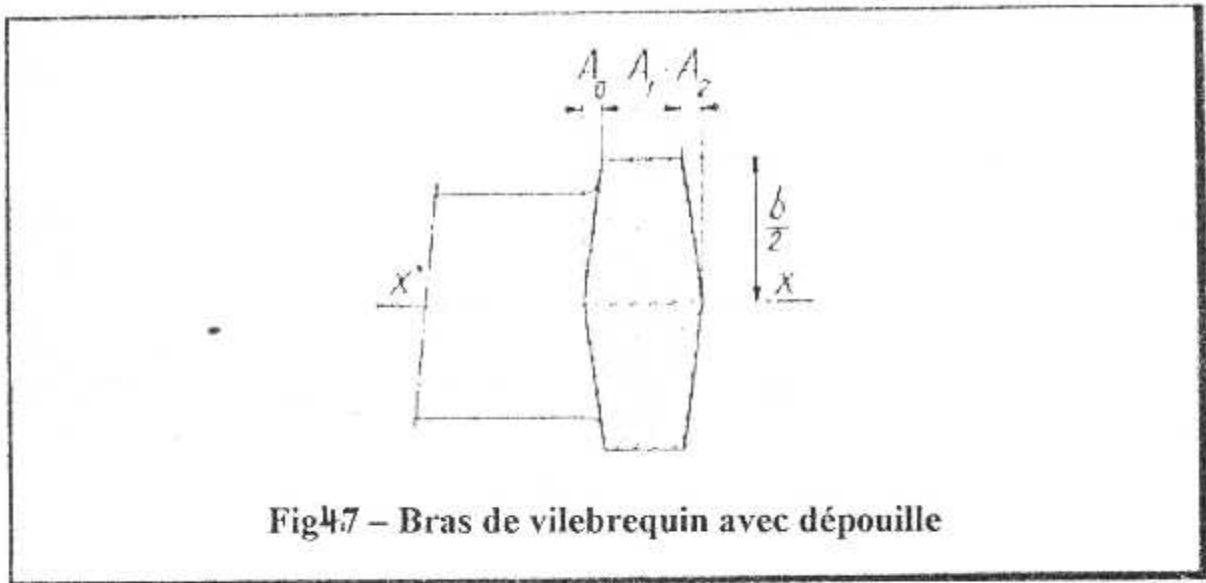


Fig4.7 - Bras de vilebrequin avec dépouille

Nous donnons ci-après les étapes successives proposées par le BICERA (British Internal Combustion Engine Research Association).

1) Calculer:

- la longueur 6quivalente des deux demi-tourillons:

$$\ell_{ot} = \ell_t \frac{d_t^A}{d_t^A - d_{tt}^A} ;$$

- la longueur équivalente du maneton:

$$\ell_{om} = \ell_m \frac{d_m^A}{d_m^A - d_{mm}^A} .$$

2) Calculer la largeur équivalente du bras b_e .

Dans le cas d'un bras rectangulaire, nous avons immédiatement e t d'4 sans rectification b_e ; mais, si les bras sont circulaires, ovales 4 biconcaves comme l'indique la figure 6, la largeur équivalente déterminée par:

$$\frac{1}{b_e^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_{max}^3} + \frac{1}{b_{min}^3} \right) .$$

3) Calculer, si les bras comportent une dépouille, l'épaisseur équivalente ℓ_{eb} :

$$\ell_{eb} = \frac{12 J^*}{b^3}$$

avec J^* moment quadratique de la section transversale du bras par rapport à l'axe $x'x'$ (fig. 7).

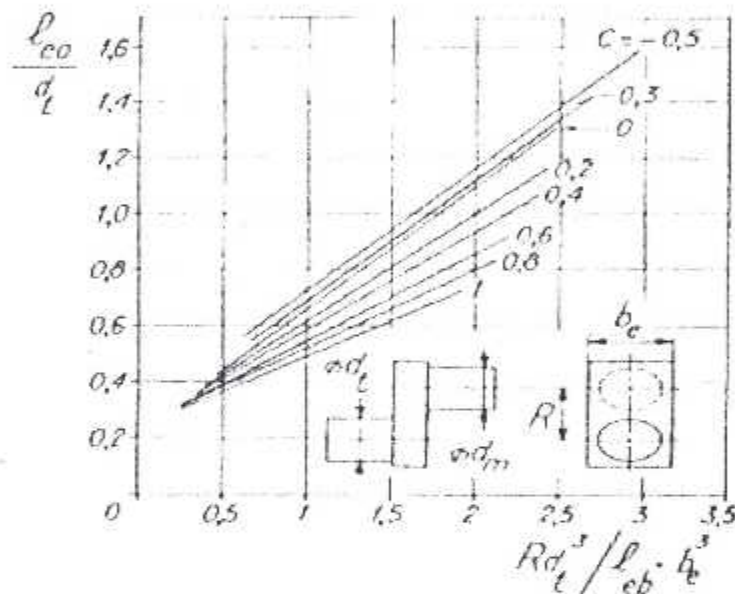
Dans le cas de cette figure:

$$J^* = \frac{1}{6} A_0 \left(\frac{b}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} A_1 b^3 + \frac{1}{6} A_2 \left(\frac{b}{2}\right)^3$$

$$= \frac{b^3}{12} \left(\frac{A_0}{4} + A_1 + \frac{A_2}{4}\right)$$

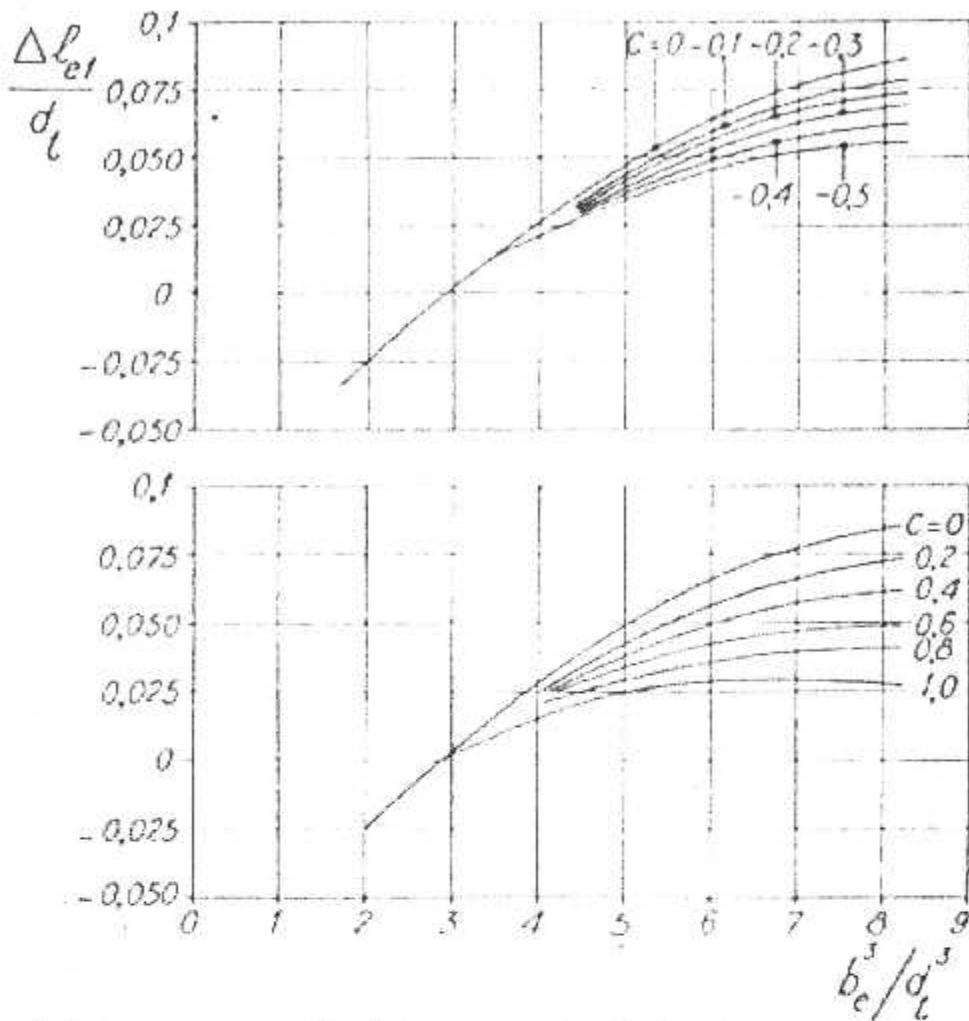
d'où

$$l_{eb} = \frac{A_0}{4} + A_1 + \frac{A_2}{4}$$



l_{eo} longueur équivalente du bras rectangulaire de référence

Fig 48 - Détermination de l_{eo}



$\Delta l_{e1}/d_t$ terme correctif de longueur équivalente

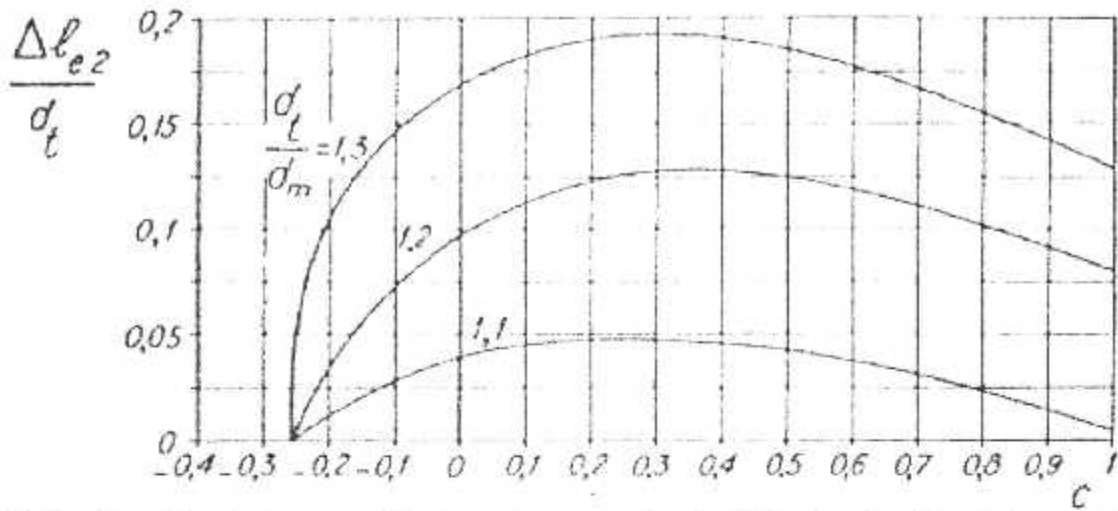
Fig49 – Détermination de $\Delta l_{e1}/d_t$.

- 4) Calculer $\frac{R \cdot d_t^3}{l_{ob} \cdot b_e^3}$ et le recouvrement relatif

$$c = \frac{\frac{d_m}{2} + \frac{d_t}{2} - R}{R}$$

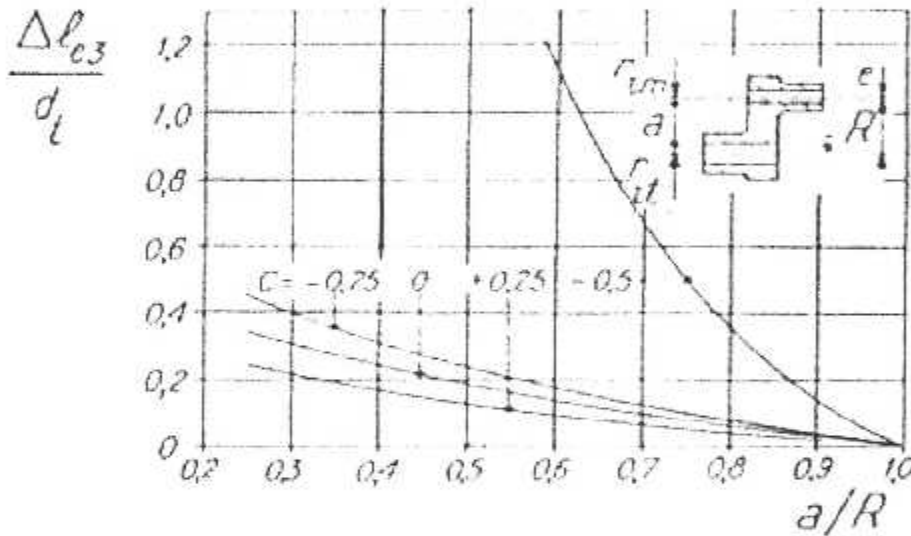
Et déterminer à l'aide de la figure 8 la longueur relative équivalente du bras rectangulaire de référence l_{e0} .

- 5) Calculer le terme correctif de longueur équivalente $\Delta l_{e0}/d_t$ en fonction de la largeur relative du bras b_e^3/d_t^3 et du recouvrement relatif c à l'aide de la figure 9.



$\Delta l_{e2}/d_t$ terme correctif tenant compte de l'écart de diamètre entre le tourillon et le maneton

Fig4,10 – Détermination de $\Delta l_{e2}/d_t$.



$\Delta l_{e3}/d_t$ terme correctif tenant compte de l'influence du forage des bras

Fig4,11 – Détermination de $\Delta l_{e3}/d_t$.

6) Pour tenir compte de l'écart de diamètre entre le tourillon maneton, déterminer, en fonction de c et à l'aide de d_t/d_m le terme correctif $\Delta l_{e2}/d_t$ sur la figure 10.

7) La figure 11 permet de déterminer l'influence du forage des bras en utilisant le rapport a/R .

$$\text{ou } a = R - (r_{it} + r_{im} - e).$$

avec e excentricité de l'alésage,

et le recouvrement relatif c . On obtient ainsi $\Delta l_{e3}/d_t$.

8) L'influence des rayons de raccordement des tourillons r_{ft} et des manetons r_{fm} est donnée par les termes correctifs:

$\Delta l_{ef}/d_t$ et $\Delta l_{ef}/d_m$ lus sur la figure 12.

La correction totale est:

$$\frac{\Delta l_{es}}{d_t} = \frac{\Delta l_{st}}{d_t} + \frac{\Delta l_{st}}{d_m} \left(\frac{d_t}{d_m} \right)^3.$$

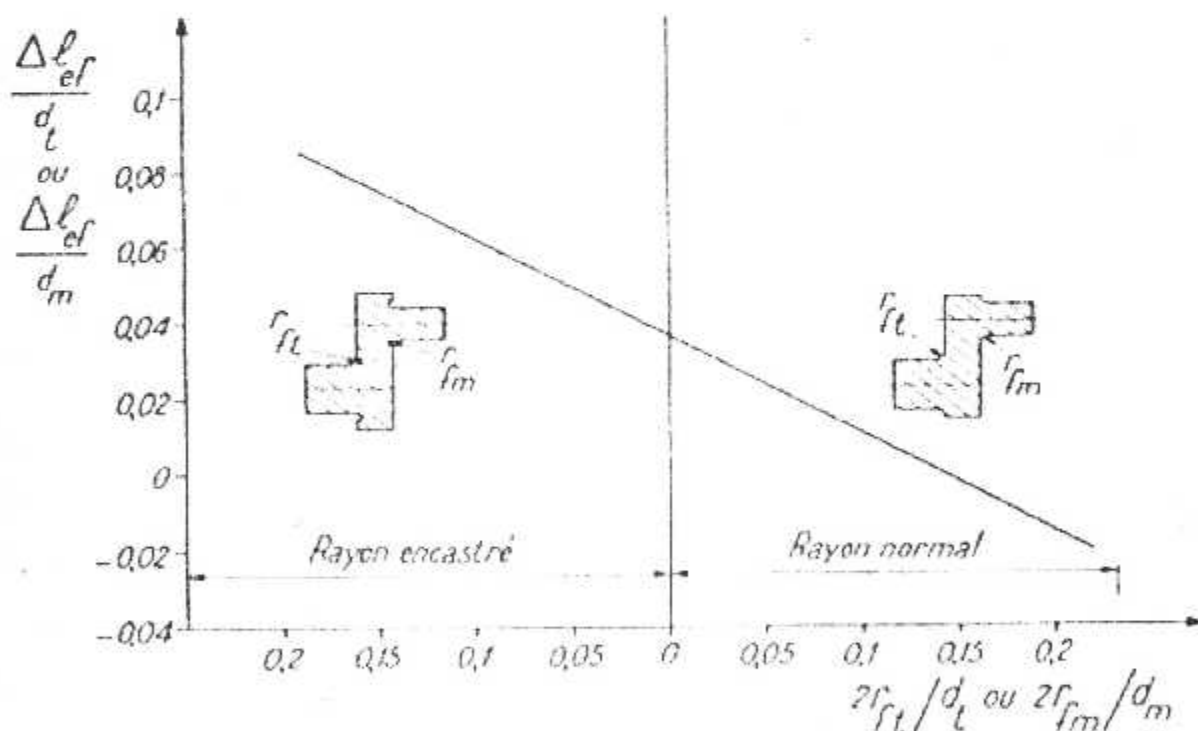
9) L'abaque 13 permet de déterminer l'influence des chanfreins arrière et des chanfreins latéraux.

Chanfreins arrière:

- pour le tourillon, calculer:

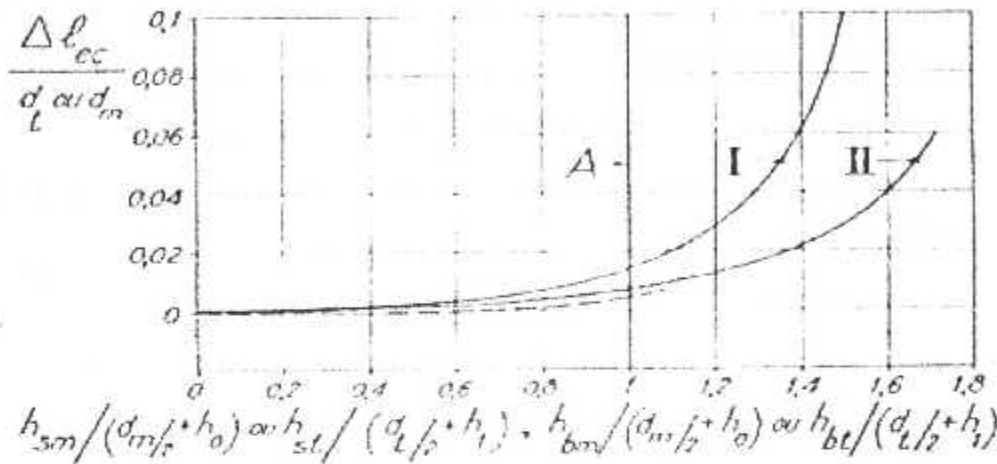
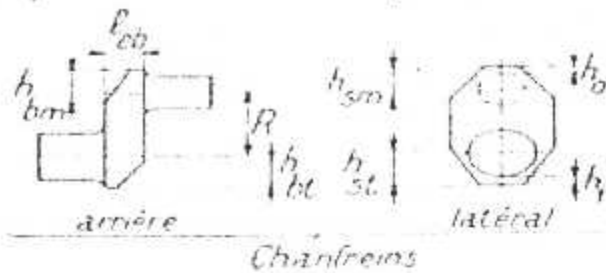
$$\frac{h_{es}}{\frac{d_t}{2} + h_s} \quad \text{et} \quad \frac{l_{es}}{d_m}$$

et lire la valeur correspondante de $\frac{\Delta l_{ec}}{d_t}$;



$\Delta l_{st}/d_t$ et $\Delta l_{st}/d_m$ termes correctifs tenant compte de l'influence des rayons de raccordement des tourillons r_{ft} et des manetons r_{fm}

Fig 12 - Détermination de $\Delta l_{ef}/d_t$ et l_{ef}/d_m



A axe du maneton

— chanfrein arrière { I $l_{ob}/(d_m \text{ ou } d_t) = 0,42$

--- chanfrein latéral { II $l_{ob}/(d_m \text{ ou } d_t) = 0,66$

$\Delta l_{cc}/d_t$ et $\Delta l_{cc}/d_m$ termes correctifs tenant compte de l'influence des chanfreins

Fig. 4,13 – Détermination de $\Delta l_{cc}/d_t$ ou $\Delta l_{cc}/d_m$

- pour le maneton, calculer:

$$\frac{h_{bm}}{d_m + h_0} \quad \text{et} \quad \frac{l_{ob}}{d_m}$$

et lire la valeur correspondante $\frac{\Delta l_{cc}}{d_m}$.

- La correction totale pour les chanfreins arrière est:

$$\frac{\Delta l'_{cc}}{d_t} = \frac{\Delta l_{cc}}{d_t} + \frac{\Delta l_{cc}}{d_m} \left(\frac{d_t}{d_m} \right)^3$$

Chanfreins latéraux: dans le cas où les chanfreins latéraux descendent au-dessous de l'axe du maneton et du tourillon, calculer la correction:

$$\frac{\Delta l''_{cc}}{d_t} = \frac{\Delta l_{cc}}{d_t} + \frac{\Delta l_{cc}}{d_m} \left(\frac{d_t}{d_m} \right)^3$$

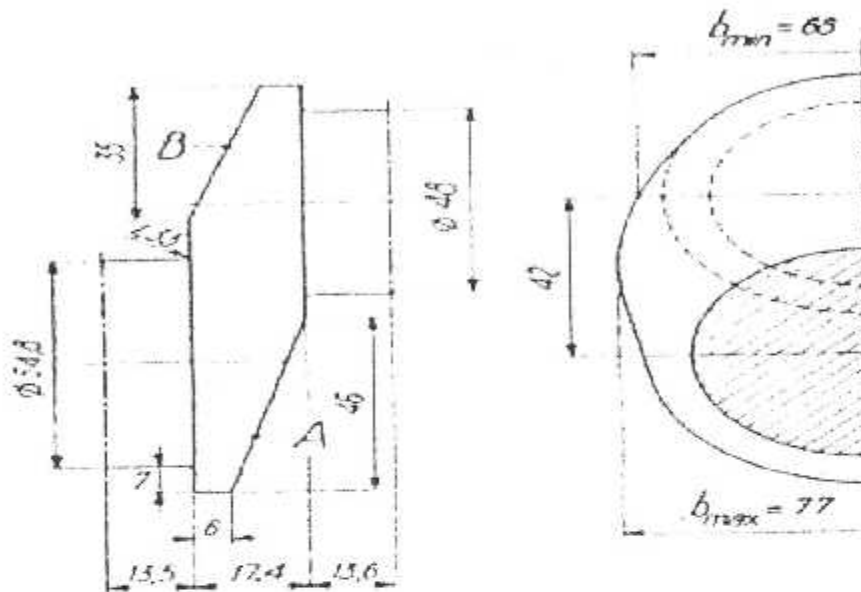
10) Longueur équivalente des bras:

$$\ell_{\text{eq}} = d_t \left(\frac{\ell_{e0}}{d_t} + \frac{\Delta \ell_{e1}}{d_t} + \frac{\Delta \ell_{e2}}{d_t} + \frac{\Delta \ell_{e3}}{d_t} + \frac{\Delta \ell_{e4}}{d_t} + \frac{\Delta \ell_{e5}}{d_t} \right).$$

11) Longueur équivalente du coude pour un diamètre équivalent:

$$D_e = d_t$$

$$L_e = 2 \ell_{\text{eb}} + \ell_{\text{ct}} + \ell_{\text{em}}.$$



Les cotes sont en millimètres.

Fig4,14- Caractéristiques d'un demi-coude pour calcul par la méthode du BICERA

4-2 MOMENT D'INERTIE D'UN COUDE

4.2.3 Moments d'inertie des différents éléments d'un coude.

D'après la figure 4, on a:

- moment d'inertie d'un demi-tourillon par rapport à l'axe du vilebrequin:

$$\frac{I_t}{2} = \frac{\rho \pi}{64} (d_t^4 - d_i^4) \ell_t$$

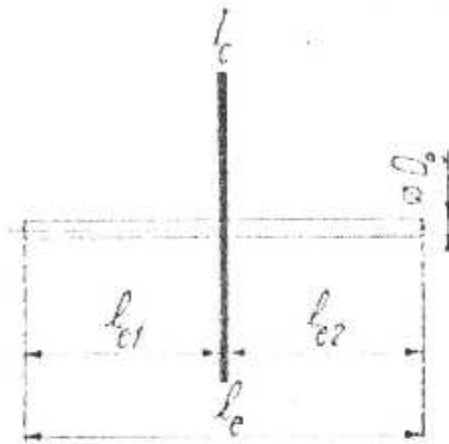


Fig 4.15 – Modèle à un disque

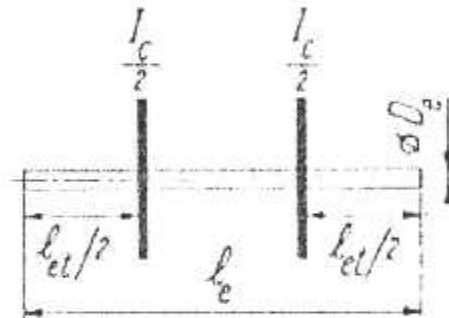


Fig 4.16 – Modèle à deux disques

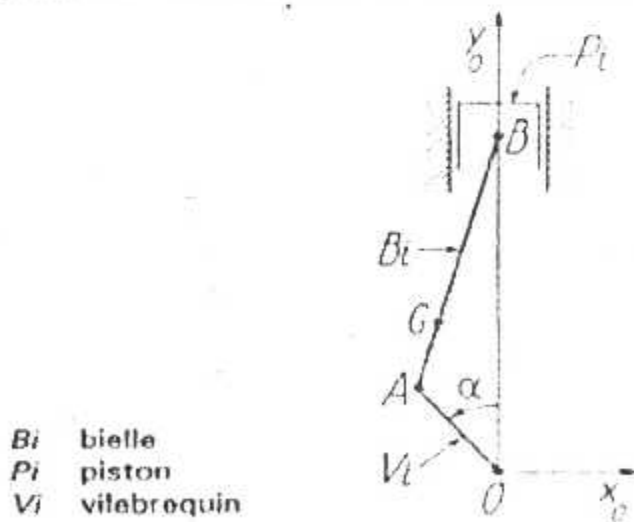


Fig 4.17 – Système bielle-manivelle

avec p (kg/m^3) masse volumique du matériau;

- moment d'inertie du maneton par rapport à l'axe du vilebrequin :

$$I_m = \frac{\pi \rho \ell_m}{4} \left[\frac{d_m^4 - d_{im}^4}{8} + R^2 (d_m^2 - d_{im}^2) \right]$$

- moment d'inertie d'un bras par rapport à l'axe du vilebrequin I_b .

On effleure un découpage du bras et de son contrepoids, s'il existe, en éléments simples. Puis, pour chaque élément après avoir calculé son inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe du vilebrequin, on détermine son moment d'inertie par rapport à l'axe du vilebrequin en appliquant le théorème de Huyghens: la somme de ces inerties élémentaires est égale à l'inertie du bras par rapport à l'axe du vilebrequin (cf article Mécanique générale, dans le traité Sciences fondamentales).

4.2-4 Modèle à un disque. - Le modèle à un disque (fig. 15) est constitué par un arbre, sans masse, de diamètre D_c et de longueur l_c portant un disque d'épaisseur nulle et d'inertie I_c .

$$I_e = I_t + I_m + I_{b1} + I_{b2}$$

Avec I_{b1} et I_{b2} moments d'inertie des bras 1 et 2.

Le plan du disque doit être confondu avec le plan de symétrie du maneton, perpendiculaire à l'axe du vilebrequin.

Les longueurs l_{e1} et l_{e2} sont les longueurs équivalentes des deux demi-coudes. Elles sont différentes lorsque le coude est dissymétrique.

4.2-5 Modèle à deux disques. - Le modèle du coude (fig. 16) est constitué par un arbre, de diamètre D_c et de longueur l_c portant deux disques de moment d'inertie $I_c/2$, situés à une distance $l_{e1}/2$ des extrémités (avec $l_{e1}/2$, longueur équivalente d'un demi-tourillon).

4.2-6 MOMENT D'INERTIE EQUIVALENT DE L'EQUIPAGE MOBILE

Pour tenir compte de l'effet de l'attelage mobile sur le système élastique (vilebrequin), nous allons calculer une masse équivalente constante liée au maneton du coude.

4.2.7 Masse équivalente du piston et de son axe. - L'énergie cinétique T_p du piston (fig. 17) à tout instant, au cours de son déplacement doit être égale à l'énergie cinétique de la masse équivalente attachée au mouvement du maneton. La fonction de force due à la pesanteur est identique dans les deux cas:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p [\overline{V^0(B)}]^2$$

Avec m_p (kg) masse du piston et de son axe,

$\overline{V^0(B)}$ vecteur vitesse du point B par rapport au repère fixe.

L'énergie cinétique de la masse équivalente attachée au maneton est :

$$T_m = \frac{1}{2} m_{ep}(\alpha) \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

avec $m_{ep}(\alpha)$ (kg) masse équivalente du piston, fonction de l'angle de rotation α (rad) de la manivelle.

$R = OA$ (m) rayon de la manivelle.

$\omega = d\alpha/dt$ (rad/s) vitesse de rotation constante de la manivelle ,

d'où :

$$m_{ep}(\alpha) = \frac{m_p [\overline{V^0(B)}]^2}{R^2 \cdot \omega^2}$$

La masse équivalente moyenne cherchée sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction $m_{ep}(\alpha)$, pour α variant de 0 à π

$$M_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m_{ep}(\alpha) d\alpha$$

4.2.8 Masse équivalente de la bielle. - En se reportant à la figure 17, et en posant:

m_b (kg) masse de la bielle,

α (rad) angle de rotation de la manivelle.

$\omega = d\alpha/dt$ (rad/s) vitesse de rotation constante de la manivelle .

$\overline{\Omega}_b$ vecteur rotation de la bielle par rapport à un repère fixe,

$I(b/G)$ tenseur d'inertie de la bielle par rapport a un repère lie a la bielle et d'origine G. centre de gravite,

$\vec{V}^o(G)$ vecteur vitesse de G par rapport au repère fixe,

L'énergie cinétique de la bielle est:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b [\vec{V}^o(G)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_b^o I(b/G) \vec{\Omega}_b^o$$

L'énergie cinétique de la masse équivalente ponctuelle m_{eb} de la bielle attachée au maneton est:

$$T_m = \frac{1}{2} m_{eb}(\alpha) \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

La masse équivalente de la bielle, en fonction de α , est donnée par l'expression:

$$m_{eb}(\alpha) = \frac{m_b [\vec{V}^o(G)]^2 + \vec{\Omega}_b^o I(b/G) \vec{\Omega}_b^o}{R^2 \cdot \omega^2}$$

La masse équivalente cherchée sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction $m_{eb}(\alpha)$, pour α variant de 0 à Π :

$$M_{eb} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{m_b [\vec{V}^o(G)]^2 + \vec{\Omega}_b^o I(b/G) \vec{\Omega}_b^o}{R^2 \cdot \omega^2} d\alpha$$

Remarque: pour une bielle admettant deux plans de symétrie et dont la répartition des masses est telle que le centre de gravite est situe à un tiers de la longueur de la bielle à partir de l'axe de la tête. la masse équivalente, en kilogrammes, est:

$$M_{eb} = \frac{3}{4} m_b + \frac{I}{2L^2}$$

avec m_b (kg) masse de la bielle,

I ($N.m.s^2$) moment d'inertie de la bielle par rapport à un axe parallèle à l'axe du vilebrequin et passant par le centre de gravite de la bielle .

$L=AB$ (m) longueur de la bielle.

4-2-9 Moment d'inertie équivalent. - Il s'écrit :

$$I_{eq} = (M_{cp} + M_{eb}) R^2$$

avec I_{eq} ($N. m. s^2$) moment d'inertie équivalent,

M_{cp} (kg) masse équivalente du piston (§ 1,231),

M_{eb} (kg) masse équivalente de la bielle (§ 1,232),

R (m) rayon de la manivelle.

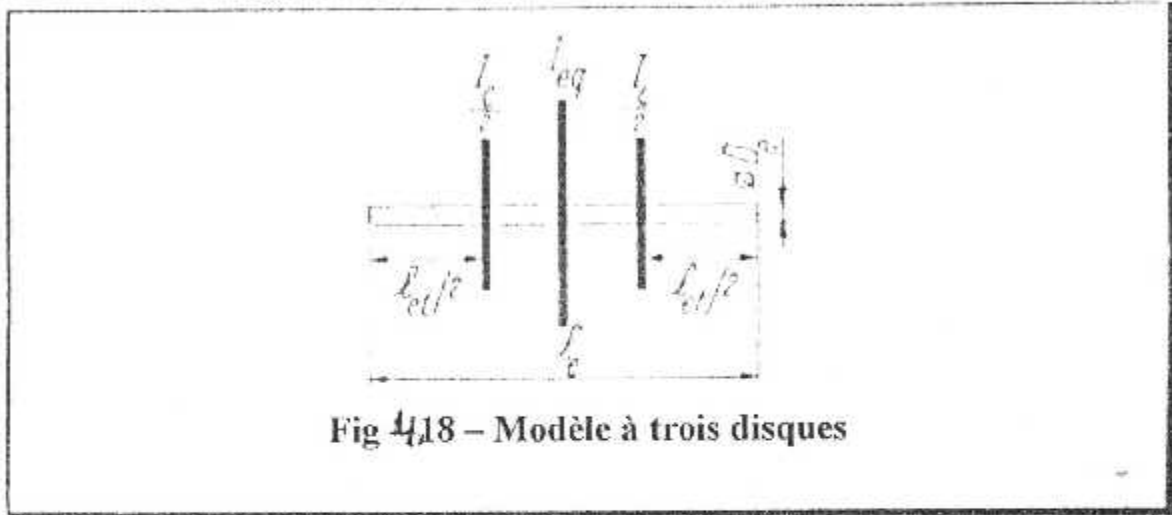


Fig 4,18 – Modèle à trois disques

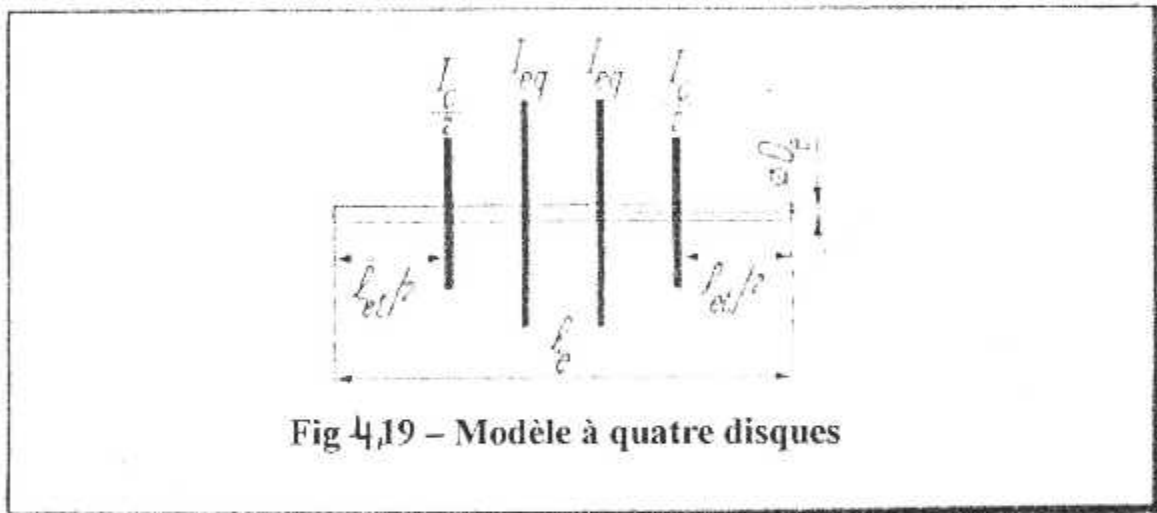


Fig 4,19 – Modèle à quatre disques

4.2.10 MODILES D'UN COUDE ET DES PIECES MOBILES ASSOCIEES

Modèle à trois disque. - Le modèle est identique a celui que nous avons défini au paragraphe 1,222. Dans ce cas, le disque a pour moment d'inertie:

$$I = I_c + I_{eq}$$

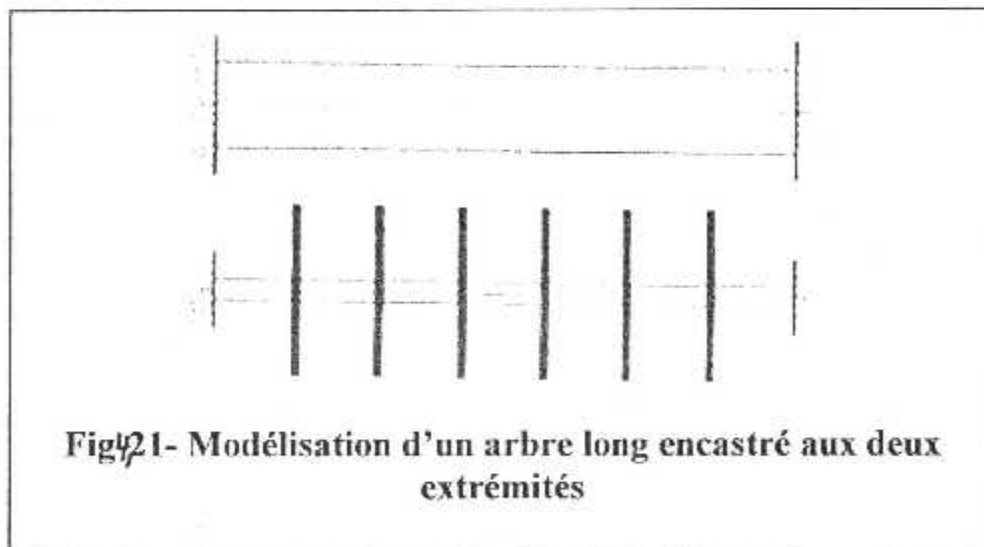
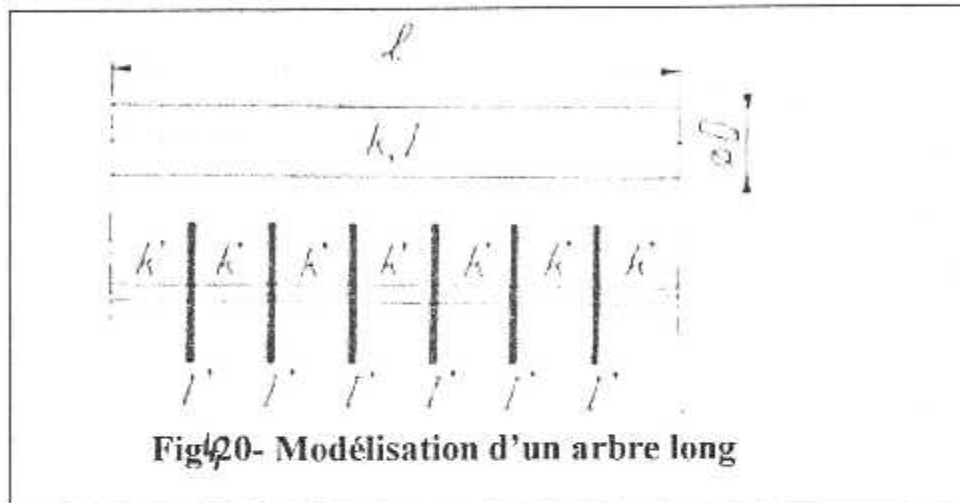
avec I_c (N.m.s²) moment d'inertie du coude,

I_{eq} (N. m, s²) moment d'inertie équivalent de l'équipage mobile.

Modèle à trois disque. - Ce modèle est construit a partir du modèle du coude, a deux disques, défini au paragraphe 1,223 auquel on ajoute un disque de moment d'inertie I_{eq} dans le plan de l'équipage mobile (fig. 18).

Modèle a quatre disques . - Ce modèle (fig. 19) convient particulièrement aux équipages mobiles des moteurs en V, avec bielles cote à cote.

Il est construit a partir du modèle du coude, a deux disques, défini au paragraphe 1,223 auquel on ajoute des disques de moment d'inertie I_{eq} , dans les plans des équipages mobiles.



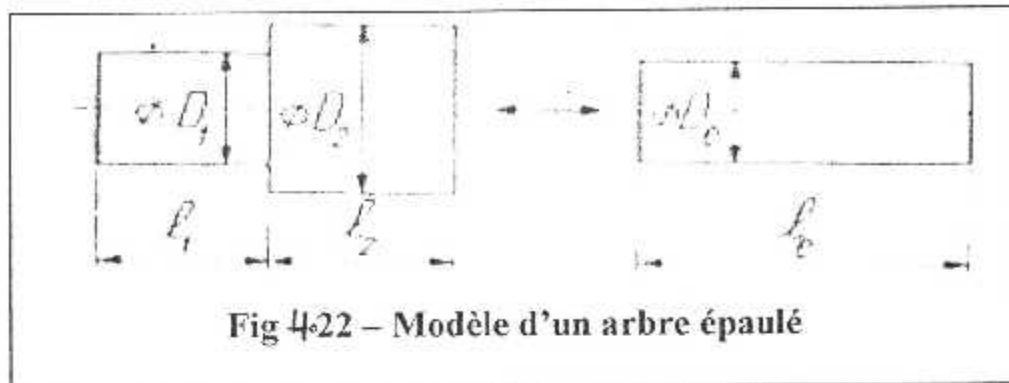


Fig 4.22 – Modèle d'un arbre épaulé

4.3 MODELISATION DES ARBRES NON COUDES

4.3.1 Arbres longs de diamètre constant.

Lorsque le moment d'inertie d'un arbre par rapport à son axe n'est pas négligeable vis-à-vis des autres inerties de la ligne d'arbres, on remplace cet arbre par une série de tronçons, sans masse, séparés par des disques de moment d'inertie I' (fig. 20).

Soit I le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son axe et k sa rigidité torsionnelle,

Le moment d'inertie I' de chacun des n disques du modèle est égal à I/n et la rigidité torsionnelle k' des $(n + 1)$ tronçons est égale $(n + 1) k$.

$$\text{On a : } k = \frac{Gj}{l}$$

Avec K (N.m/rad) rigidité torsionnelle de l'arbre.

G (Pa) module de glissement du matériau de l'arbre,

L (m) longueur de l'arbre,

$J = \pi D^4/32$ (m^4) moment quadratique de la section par rapport à l'axe de l'arbre,

D (m) diamètre de l'arbre.

Le comportement vibratoire du modèle est pratiquement semblable à celui de l'arbre réel pour n grand.

Dans la pratique, pour limiter les temps de calcul, on choisira n de telle sorte que les inerties I' soient égales ou supérieures à la plus petite inerties de l'installation.

On pourra vérifier que le nombre de disques choisi pour établir modèle est suffisant en calculant la pulsation propre de l'arbre,

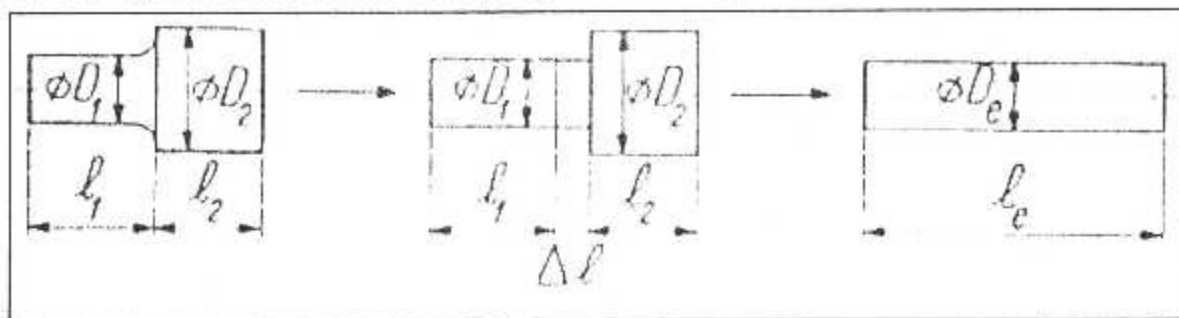


Fig 4-23 - Modélisation d'un arbre épaulé avec congé torique.

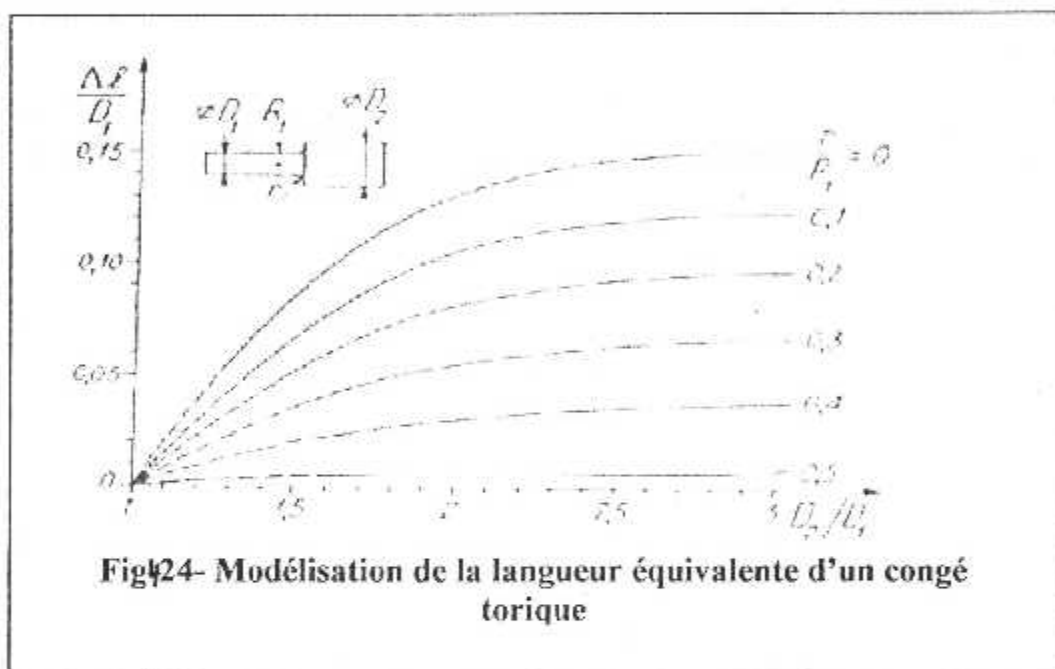


Fig 4-24 - Modélisation de la longueur équivalente d'un congé torique

considère comme un milieu continu, à partir de l'équation aux dérivées partielles de la rotation λ de la section x au temps t .

$$\frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2}$$

avec $a = \sqrt{G/\rho}$ (m/s) célérité de l'onde de torsion dans le milieu homogène.

G (Pa) module de glissement du matériau de l'arbre.

ρ (kg/m³) masse volumique du matériau de l'arbre.

Cf article Vibrations dans le traité Sciences fondamentales.

Nous considérerons que l'arbre est encastre aux deux extrémités, pour tenir compte des raideurs extrêmes (fig. 21).

Les pulsations propres de cet arbre sont égales à :

$$\Omega_p = \frac{p \pi a}{\ell} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

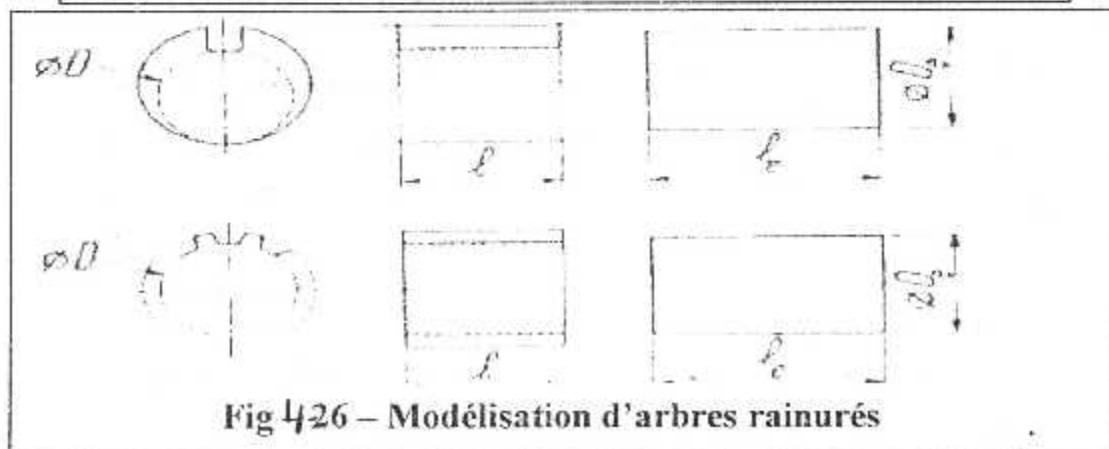
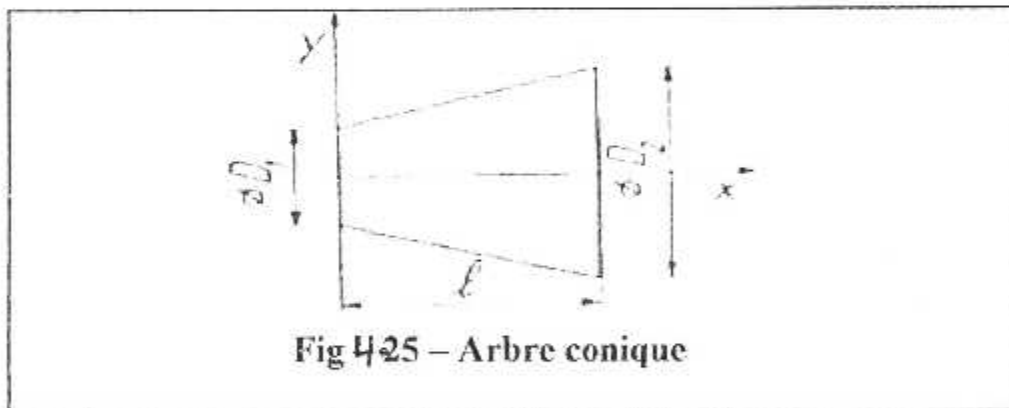
Ces pulsations propres sont obtenues avec le programme RUTHIS. Lorsqu'il y a correspondance entre les deux premières pulsations propres obtenues, d'une part avec la formule (1) et d'autre part, par le programme RUTHIS, on peut considérer que le nombre de disques choisi pour le modèle est correct.

4.32 Arbres épaulés.

Considérons l'arbre épaulé représenté sur la figure 22; la longueur ℓ_e de l'arbre équivalent, de même raideur et de diamètre D_e est :

$$\ell_e = \ell_1 \left(\frac{D_e}{D_1} \right)^4 + \ell_2 \left(\frac{D_e}{D_2} \right)^4$$

lorsque l'arbre équivalent est dans le même matériau que l'arbre réel.



4,4 EXEMPLES DE MODELISATION

D'INSTALLATIONS INDUSTRIELLES

4.41 Modèles d'une ligne d'arbres non ramifiée.

Nous présentons sur la figure 32 la ligne d'arbres d'un groupe compresseur composé d'un moteur électrique M, d'un accouplement a grande vitesse A_{GV} , d'un réducteur R, d'un accouplement petit vitesse A_{PV} , d'un volant d'inertie V et d'un compresseur bi-étagé C.

4.4.2. Théorie des vibrations de flexion des poutres.

Les vibrations de flexion des arbres sont régies par l'équation aux dérivés partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

X :axe du vilebrequin

Y :fonction de x et de t = f(x).y(t)

E : module d'Young du matériau

I : moment d'inertie des arbres

L :longueur

M :masse

M : masse

l'équation est équivalente à : $F \cdot g'' + \frac{EI}{m} F^{(4)} \cdot g = 0$

soit : $\frac{g''}{g} = -\frac{EI F^{(4)}}{m F} = \lambda$

Résolution par la méthode de séparation des variables.

Nous obtenons deux équations différentielles, dont l'une est fonction du temps :

$$g'' - g \cdot \lambda = 0$$

Pour avoir une solution stable, il faut que $\lambda < 0$

Posons alors $\lambda = -\omega^2$

L'équation différentielle en x devient :

$$F^{(4)} - \frac{\omega^2 m}{EI} F = 0$$

posons : $s^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$

L'équation précédente a pour équation caractéristique : $r^4 - s^4 = 0$

$$\Rightarrow r = \pm j \cdot s$$

$$r = \pm s$$

F peut donc être mis sous la forme :

$$\begin{aligned}
 f &= A_1 \cdot \cos(sx) + A_2 \cdot \sin(sx) + A_3 \cdot e^{sx} + A_4 \cdot e^{-sx} \\
 f' &= s(-A_1 \cdot \sin(sx) + A_2 \cdot \cos(sx) + A_3 \cdot e^{sx} - A_4 \cdot e^{-sx}) \\
 f'' &= s^2(-A_1 \cdot \cos(sx) - A_2 \cdot \sin(sx) + A_3 \cdot e^{sx} + A_4 \cdot e^{-sx}) \\
 f''' &= s^3(A_1 \cdot \sin(sx) - A_2 \cdot \cos(sx) + A_3 \cdot e^{sx} - A_4 \cdot e^{-sx}) \\
 \text{avec } M_f &= -EI \cdot f'' \quad \text{et} \quad T = -EI \cdot f'''
 \end{aligned}$$

Les constantes A_{ij} seront déterminées par les conditions aux limites sur les flèches, pentes, moments fléchissant et efforts sur l'arbre ($i=1,2,3,4$; $j=N^\circ$ du tronçons).

4.4-3 ETUDE VILEBREQUIN MOTEUR écyindrs en V .

Nous allons schématiser le vilebrequin de façon simple par un arbre sur quatre paliers avec deux masses aux extrémités.

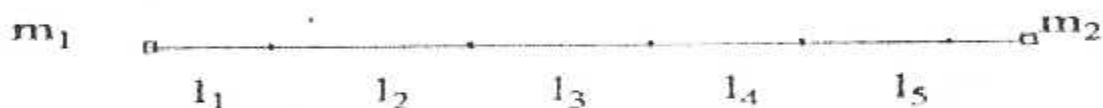


Figure 4-27 Schéma de vilebrequin avec les deux masses aux extrémités

Pour chaque tronçon , la flèche f a pour expression :

$$F = A_{1i} \cdot \cos(sx) + A_{2i} \cdot \sin(sx) + A_{3i} \cdot e^{sx} + A_{4i} \cdot e^{-sx}$$

Pour $x=0$ $f'''(x=0) - m_1 \omega^2 F_1(x=0) = 0$ effort tranchant dû à la masse m_1
 $F''_1(x=0) = 0$ moment fléchissant nul

A l'appui d'indice i , nous avons :

$F_i(x=l_i) = 0$ pas de déplacement suivant y pour le tronçon i

$F_{i+1}(x=0) = 0$ // // // $i+1$

$$\left. \begin{aligned} F_i'(x=li) &= F_{i+1}'(x=0) \\ F_i''(x=li) &= F_{i+1}''(x=0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{continuité des pentes et de courbes à l'appui } i \\ \text{pour les tronçons } i \text{ et } i+1 \end{array}$$

Pour le tronçon 5, nous aurons également:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } x=l_5, & f_5'' + m_2 \cdot \omega^2 \cdot f_5 = 0 & \text{effort tranchant dû à la masse } m_2 \\ & f_5'' = 0 & \text{moment fléchissant nul} \end{array}$$

Nous obtenons le système de 20 équations à 20 inconnues.

Nous sommes amenés à étudier la configuration suivante :

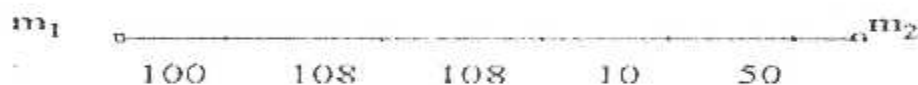


Figure 4.28 La configuration du vilebrequin avec les deux masses aux extrémités

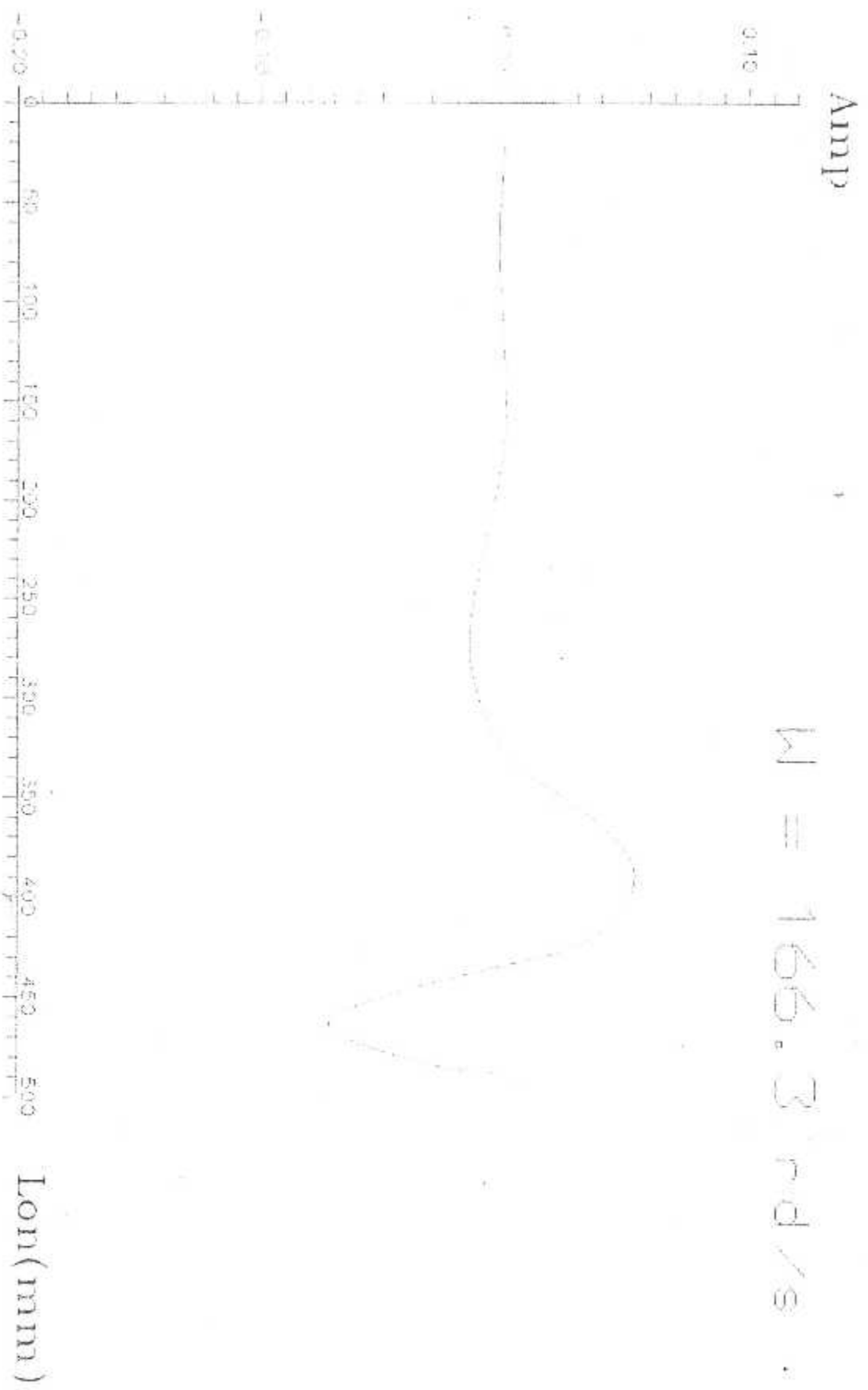
Où :

La masse m_1 correspond au Damper . Nous la ferons évoluer de 0 à 5 Kg
 La masse M_2 correspond aux volants , poulies , pignons ou accouplement Nous prendrons des valeurs pour les calculs variant de 0 à 4,5 Kg

Résultats

Position(x)	21	171	281	326	390	431	464	486
Amplitude pour W=137.2 rd(s)	0	0	-0.01	0	0.04	0	-0.06	0
Amplitude pour W=137.2 rd(s)	0	0	-0.01	0	0.05	0	-0.07	0
Amplitude pour W=137.2 rd(s)	0	0.01	-0.02	0	0.08	0	-0.11	0
Amplitude pour W=137.2 rd (s)	0	0.01	-0.02	0	0.08	0	-0.11	0
Amplitude pour W= 137.2 rd(s)	0	0.01	-0.02	0	0.09	0	-0.08	0

Tableau 4.1 : Variation de la déformée pour chaque valeur de W



$$M = 166.3 \text{ rad/s}$$

Fig 2.7 VARIATION DE LA DEFORMEE POUR LA VALEUR 2

Conclusion

Ce projet nous a permis de constater que le calcul des vibrations était indispensable, afin d'amortir les efforts transmis à la cellule de l'avion , par conséquent une étude pratique est nécessaire d'une part pour valider et d'autres part pour parachever notre étude qui rentre dans un cadre de projet de recherche qui est la motorisation de l'avion léger.

Enfin ce projet représente pour moi le fruit de trois années durant lesquelles nous avons acquis de nombreuses connaissances , couronnées par la réalisation de ce mémoire.