

## **Résumé**

*Le travail présenté consiste à élaborer un programme de calcul numérique permettant de déterminer les caractéristiques géométriques des sections planes simplement connexes arbitraires et applications aux profils d'ailes. Dans la littérature, on trouve des solutions analytiques exactes uniquement pour quelques sections des géométries simples comme les sections circulaires, rectangulaires et elliptiques, d'où notre intérêt est orienté vers la recherche des solutions numériques approchées pour d'autres sections complexes utilisées en aéronautique. La méthode utilisée est la subdivision de la surface de la section en des surfaces triangulaires infinitésimales avec un seul observateur à l'intérieur du domaine ayant une position convenable. Les caractéristiques d'un triangle quelconque donné par les positions de ces trois nœuds sont connus dans la littérature. En utilisant le principe des surfaces composées, on peut déterminer les caractéristiques géométriques de la surface du profil d'aile. La fonction analytique de la frontière du profil d'aile est obtenue en utilisant l'interpolation Cubic spline vu qu'elle est donnée sous la forme des points tabulés. Un calcul de l'erreur est fait afin de valider le calcul numérique.*

### **Mots clés :**

*Élément triangulaire, Domaine simplement connexe, Profil d'aile, Interpolation Cubic spline, Caractéristiques géométriques d'un triangle quelconque, Erreur de calcul.*

## **Abstract**

*The presented work is to develop a numerical computation program to determine the geometrical characteristics of arbitrary simply connected planar sections and applications to airfoils. In the literature, there are exact analytical solutions only for some simple geometry such as circular, rectangular and elliptical sections. Hence our interest is focused on the search of approximate numerical solutions for more complex sections used in aeronautics. The used method is to subdivide the section in the infinitesimal triangular section with a single observer within the area having a suitable position. The characteristics of any triangle, given by the positions of these three nodes are known in the literature. Using the principle of compound surfaces, one can determine the geometric characteristics of the airfoil surface. The analytic function of the airfoil boundary is obtained by using the cubic spline interpolation because the airfoil is given in the form of tabulated points. An error estimation is done to determine the accuracy of the numerical computation.*

### **Keywords:**

*Airfoil, cubic spline interpolation, error calculation, geometric characteristics of any triangle, Triangular element, simply connected domain.*

## ملخص :

هذه الدراسة المتواضعة تتمثل اساسا في انجاز برنامج حساب رقمي يسمح بمعرفة الخواص الهندسية للمساحات المسطحة المثبتة ببساطة عشوائيا مع تطبيق على المقاطع الجانبية لأجنحة الطائرات . في السابق و بالاعتماد على الصيغ الرياضية يمكننا ايجاد حلول دقيقة حسابيا فقط من اجل المساحات الهندسية البسيطة كالمساحات الدائرية و المستطيلة و الاهليلجية في حين ان جهدنا يتمركز حول ايجاد حلول تقريبية لمساحات اخرى اكثر تعقيدا و المستعملة في مجال علم الطيران . الطريقة المستعملة هي تقسيم المساحة الى مساحات مثلثية صغيرة مع نقطة مشتركة تتموضع في مكان مناسب . خواص المثلث الكيفي تعطى بمواضع رؤوسه الثلاثة و المعروفة سابقا . نستعمل مبدأ المساحات المركبة وبهذا يمكننا ايجاد الخواص الهندسية لمساحة المقطع الجانبي للجناح . يتم ايجاد الدالة الحسابية لحدود المقطع الجانبي للجناح عن طريق استعمال استيفاء سبلين مكعب ( cubic spline ) كما هي موضحة في شكل جداول . حساب الخطأ يجرى للتحقق من الحساب العددي.

## مفاتيح :

عنصر مثلث ، مجال مثبت وببساطة ، مقطع جانبي لجناح ، استيفاء سبلين مكعب ( cubic spline ) ، الخواص الهندسية للمثلث الكيفي ، خط الحساب.

# Remerciement

*Nous tenons tout d'abord à remercier infiniment notre dieu le tout puissant pour l'aide qu'il nous a apporté pour la réalisation de ce modeste travail. Nous remercions toutes nos familles pour le courage et le soutien morale durant cette période de réalisation de ce travail.*

*Nous adressons également nos remerciements à notre encadreur Mr ZEBBICHE TOUFIK pour son soutien, ses conseils pertinents et son aide précieuse, ainsi que la confiance qu'il nous a toujours témoignée tout au long de notre projet.*

*Nous exprimons nos remerciements aux membres du jury de nous avoir honoré en acceptant de juger notre travail.*

*Nous tenons à remercier à travers ces quelques lignes les nombreuses personnes qui ont contribué au succès de notre projet par la confiance, la patience et l'amitié .*

*Nous tenons aussi à témoigner notre sincère gratitude à tous ceux qui nous ont assistés de près ou de loin, par leurs encouragements, leurs conseils et leurs critiques.*

## **TABLE DES MATIERES**

**RESUME**

**REMERCIEMENTS**

**TABLE DES MATIERES**

**LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX**

**INTRODUCTION .....12**

**CHAPITRE I : GENERALITE SUR L'HELICE , L'AILETTES DE COMPRESSEUR ET DE LA TURBINE.**

**I.1. L'hélice.....17**

**1. 1. Hélice aérienne.....17**

**1. 2. Définitions géométriques.....18**

**1. 3. Description cinématique.....21**

**1. 4. Définition du  
recul.....22**

**1. 5. Nécessite de recul.....22**

**I. 2. Compresseur.....23**

**2. 1. le compresseur axial.....23**

**2. 2. Composants du compresseur axial .....25**

**2. 3. Les avantage.....27**

**2. 4. Définition d'un étage .....27**

**2. 5. Description d'un étage.....28**

**2. 6. Grille mobile et grille fixe.....28**

**2. 6. 1. Grille mobile .....28**

**2. 6. 2. Grille fixe.....29**

**2. 7. Différents types de grilles.....30**

**2. 8. Forme d'une ailette mobile.....31**

2. 9. Fixation ailettes/glissière.....32

1.3 .Turbine .....34

3. 1 .Turbine axiale.....34

3. 2. Définition d'un étage de turbine axiale.....35

**CHAPITRE II : CARACTERISTIQUE GEOMETRIQUE D'UN TRIANGLE.**

1. Caractéristiques géométriques d'un triangle quelconque.....37

2. Génération de Maillage.....39

2. 1. Fonction de condensation.....39

2. 2. Maillage interne.....41

2. 3. Connexion des triangles du maillage.....41

3. Caractéristiques géométriques de la section composée.....42

4. Calcul de l'erreur .....44

**Chapitre III : CONTRAINTE TANGENTIELLE DUE A L'EFFORT TRANCHANT**

1. Valeur de contrainte tangentielle.....45

2. Différents cas .....49

1. Poutre à section rectangulaire.....49

2. Section circulaire.....50

3. Section  
triangulaire.....52

4. Section de forme d'une lemniscate  
verticale.....55

5. Section droite de forme de demi-ellipse..... 60

6. Section de forme d'une lemniscate horizontale.....65

7. Section de forme losangée droite .....72

8. Section de forme d'un arc de cycloïde.....77

9. Section de forme d'une cycloïde verticale.....	81
10. Section de forme cardioïde horizontale.....	85
<b>Chapitre IV : RESULTATS ET COMMENTAIRES.....</b>	<b>92</b>
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>105</b>
<b>APPENDICES</b>	
❖ <b>ANNEXE A : NOMENCLATURE .....</b>	<b>107</b>
❖ <b>ANNEXE B : CUBIC SPLINE .....</b>	<b>110</b>
❖ <b>ANNEXE C : Data des profils.....</b>	<b>120</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>140</b>

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

### Liste des figures :

- Fig. (I.1) : L'hélice aérienne et l'hélicoïde.....17
- Fig. (I.2) : L'hélice aérienne dans un turbopropulseur.....18
- Fig. (I.3) : Les éléments de l'hélice.....18
- Fig. (I.4) : Soufflante et accélérateur. ....19
- Fig. (I.5) : Schéma présente le profil conséquent de l'intersection de l'hélice et le plan parallèle à l'axe de rotation.....20
- Fig. (I.6) : L'angle de calage et le pas de l'hélice. ....20
- Fig. (I.7) : Element de pale.....21
- Fig. (I.8) : Compresseur axial. .... 23
- Fig. (I.9) : Un employeur qui vérifier la fixation des ailettes dans la turbine...23.
- Fig. (I.10): Différents types des ailettes de compresseur. ....24
- Fig. (I.11): À droite l'axe de moteur qui comprend le rotor du compresseur et au-dessous la partie fixe qui comprend le stator et le carter de moteur, et à gauche vue de profil d'une ailette (blade). ....24
- Fig. (I.12) : Compresseur axial (stator +rotor). ....25
- Fig. (I.13) : Les composants d'un rotor.....25
- Fig. (I.14) : les composants d'un stator.....26
- Fig. (I.15) : Un étage de compresseur axial. ....27
- Fig. (I.16) : Grille mobile et grille fixe. ....28
- Fig. (I.17) : Les ailettes dans une grille mobile. ....29
- Fig. (I.18) : Les ailettes dans la grille fixe. ....30

- *Fig. (I.19) : Les ailettes.....31*
- *Fig. (I.20) : ailette mobile.....31*
- *Fig. (I.21) : Epaisseur et courbure au sommet et au pied et le vrillage. ....32*
- *Fig. (I.22) : Fixation ailettes /glissière, (A) du type queue d'aronde et (B) en T  
.....32*
- *Fig. (I.23) : Différents types d'ailettes du compresseur du moteur Concorde  
Olympus 593.....33*
- *Fig. (I.24) : vue en coupe de deux aubages typiques des turbines axiales.....34*
- *Fig. (I.25) : L'étage de la turbine axiale. ....35*
- *Fig. (I.26) : Les composants d'un étage de la turbine axiale. ....35*
- *Fig. (I.27) : La structure de la turbine. ....36*
- *Fig. (I.28) : Turbine axiale à trois étages. ....36*
- *Fig. (II.1): Élément triangulaire à trois nœuds.....38*
- *Fig. (III.1) : Poutre soumise à des forces perpendiculaire à son axe.....45*
- *Fig. (III.2) : Coupe d'un élément longitudinale de longueur dz.....46*
- *Fig.(III.3) : Coupe transversale d'un élément longitudinale.....46*
- *Fig. (III.4) : Les contraintes tangentielles sur deux sections (transversale et  
longitudinale).....48*
- *Fig. (III.5) : Poutre à section rectangulaire.....49*
- *Fig. (III.6) : Section circulaire.....51*
- *Fig. (III.7) : section  
triangulaire.....53*
- *Fig. (III.8) : section de forme lemniscate  
verticale.....55*
- *Fig. (III.9) : section droite de forme de demi-  
ellipse.....60*
- *Fig. (III.10) : Section de forme lemniscate horizontale.....65*
- *Fig. (III.11) : section de forme losangée droite.....72*
- *Fig. (III.12) : section de forme arc de cycloïde.....77*
- *Fig. (III.13) : Section de forme cycloïde verticale.....81*
- *Fig. (III.14) : poutre soumise à des forces perpendiculaire à son axe.....85*

- *Fig. (IV.1) : Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec NT=10.....92*
- *Fig. (IV.2): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec NT=50.....92*
- *Fig. (IV.3): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec NT=100..... 93*
- *Fig. (IV.4) : Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec NT=300..... 93*
- *Fig. (IV.5): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec NT=600.....93*
- *Fig.(IV.6) : Position de point interne dans le cas où il n'est plus visible pour le dernier segment de l'intrados.....94*
- *Fig. (IV.7) : erreur relative des paramètres  $A$ ,  $y_G$ ,  $I_x'$  et  $I_y'$  en fonction de nombre de points de la frontière.....96*
- *Fig. (C.1) : PROFIL NACA 0012.....120*
- *Fig. (C.2) : PROFIL AQUILA 9.3%.....122*
- *Fig. (C.3) : PROFIL OAF 128. ....123*
- *Fig. (C.4) : PROFIL K3311 SMOOTHED.....125*
- *Fig. (C.5) : PROFIL ARA-D 6%.....126*
- *Fig. (C.6) : PROFIL RAF 34.....126*
- *Fig. (C.7) : PROFIL NACA 0006.....127*
- *Fig. (C.8) : PROFIL FAUVEL 14%.....128*
- *Fig. (C.9) :PROFIL GOE 9K.....129*
- *Fig. (C.10) : PROFIL RAYEN BQM-34 FIREBEE WING.....131*
- *Fig. (C.11) :PROFIL NACA-M1.....132*
- *Fig. (C.12) :PROFIL B-29 ROOT.....133*
- *Fig. (C.13) : PROFIL NLR-7223-62.....135*
- *Fig. (C.14) : PROFIL RAE 101.....137*
- *Fig. (C.15) :PROFIL GRUMMAN K-3.....139*

**List des tableaux:**

- *Table (IV.1) : Points de définition de la surface de profil d'aile NACA 63-41.....*
- *Table (IV.2) : Effet de la discrétisation sur la convergence.....*
- *Table (IV.3) : Aire de la section des différents profils d'ailes.....*
- *Table (IV.4) : Position du centre de gravité des différentes sections.....*
- *Table (IV.5) : Moments d'inerties centraux des différents profils d'ailes.....*
- *Table (IV.6) : Résultats de section de forme lemniscate vertical.....*
- *Table (IV.7) : Résultats de section de forme de demi- ellipse.....*
- *Table (IV.8) : Résultats de section de forme droite.....*
- *Table (IV.9) : Résultats de section de forme arc de cycloïde.....96*
- *Table(C.1) : data de profil NACA 0012.....120*
- *Table(C.2) : data de profil AQUILA 9.3%.....121*
- *Table(C.3) : data de profil OAF 128.....122*
- *Table(C.4) : data de profil K3311 SMOOTHED.....124*
- *Table(C.5) : data de profil ARA-D 6%.....125*
- *Table(C.6) : data de profil RAF 34.....126*
- *Table(C.7) : data de profil NACA 0006.....127*
- *Table(C.8) : data de profil FAUVEL 14%.....128*

- *Table(C.9) : data de profil GOE 9K.....129*
- *Table(C.10) : data de profil RAYEN BQM-34 FIREBEE WING.....130*
- *Table(C.11) : data de profil NACA - M1.....131*
- *Table(C.12) : data de profil B-29 ROOT.....132*
- *Table(C.13) : data de profil NLR-7223-62.....133*
- *Table(C.14) : data de profil RAE 101.....135*
- *Table(C.15) : data de profil GRUMMAN K-3.....137*

## **INTRODUCTION**

*Le but de la résistance des matériaux est de déterminer la forme, les dimensions et la matière des pièces entrant dans une construction de telle manière que celle-ci résistent aux efforts qui leur sont appliqués. Cette notion de résistance implique non seulement que les pièces étudiées ne se rompent pas mais également qu'elles n'atteignent pas des déformations prohibitives.*

*En construction aéronautique, la résistance des matériaux, qu'il serait du reste plus judicieux d'appeler "calcul des éléments de construction", joue un rôle d'autant plus important qu'il s'agit de construire léger pour des nécessités non d'économie de matière mais d'augmentation de la charge utile transportée. D'autre part, les éléments d'un avion peuvent être soumis à des coefficients de charge considérables, ce qui accroît la nécessité d'un calcul aussi exact que possible de la résistance de ces éléments.*

*Ce mémoire de thèse traite principalement les caractéristiques géométriques des sections planes simplement connexes arbitraires et applications aux profils d'ailes par le calcul de la distribution de la contrainte tangentielle appliquée sur une section plane simplement connexe soumise à un effort tranchant.*

*Généralement dans le cas d'une structure à une forme allongée (poutres) avec une dimension de section faible par rapport à la longueur, l'effort tranchant est*

*négligeable. Mais c'est cette section a une dimension prépondérante en comparant à la longueur, alors l'effort tranchant existe avec une valeur importante et il fait partie du calcul de la contrainte qui est indispensable pour le dimensionnement de la structure.*

*Ce type de structure ne concerne pas les ailes car les ailes comme sont déjà connues en une forme effilées et creuses, Par contre, les aubes du compresseur et de la turbine aussi les ailettes ont des sections prédominantes par rapport à la longueur et ce sont des structures pleines.*

*Les caractéristiques géométriques d'une section, en particulier la géométrie d'un profil d'aile jouent un rôle très important pour le calcul d'élasticité par exemple. Selon la sollicitation externe appliquée, le calcul de la distribution de contrainte et de l'effort est lié avec la connaissance des caractéristiques de la section de la structure [1], [2], [3] et [4]. Par exemple le flambement des poutres se manifeste autour de l'axe ayant le moment d'inertie le plus petit possible. Donc la force critique de flambement est liée avec le moment d'inertie le plus petit possible. D'où notre intérêt s'oriente vers le calcul de moment d'inertie  $I_{min}$ . En outre le deuxième exemple qu'on peut le citer c'est le phénomène de torsion. La contrainte de torsion est liée avec la connaissance de la valeur de moment d'inertie polaire  $I_p$ . Dans le cas général on utilise des sections circulaires. Mais pour un avion, la plus part des ses structures sont non circulaires. On parle de l'aile, fuselage, dérive, longeron, ailettes, aubes, pale d'hélicoptère, les sections sont non circulaire [1] et [5]. D'où notre intérêt s'oriente aussi vers le calcul du moment d'inertie polaire des profils d'ailes.*

*Il est nécessaire de déterminer la distribution de la contrainte de flexion que se soit simple ou déviée. Cette contrainte est liée avec les deux moments d'inerties suivant les deux axes d'applications de moment fléchissant, ainsi que le produit d'inertie de la section considérée. Le calcul de ces moments doit être fait par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section. Alors dans ce cas il faut*

déterminer la position du centre de gravité de la section par rapport au repère de définition du domaine.

La présente étude consiste alors, à réaliser un programme de calcul numérique permettant de déterminer les caractéristiques géométriques des sections planes simplement connexes complexes et de faire l'application aux profils d'ailes en utilisant le principe de discrétisation du domaine en des éléments triangulaires avec un seul observateur à l'intérieur du domaine, à condition que tous les nœuds de la frontière du domaine soit visible par le point interne (observateur). Les triangles sont définis par les positions de ces trois nœuds [6]. Deux nœuds se trouvent sur la frontière et le troisième nœud présente le point interne. Les caractéristiques géométriques d'un triangle quelconque sont connues [6], [7], [8], [9] et [10]. En utilisant le principe de la surface composée, on peut déterminer les caractéristiques géométriques de la surface composée. Vu que le nombre de triangle est très important, le calcul devient numérique. La précision du calcul dépend de la discrétisation. Plus le nombre des triangles est élevé, plus on aura une bonne précision.

Généralement la frontière de profil d'aile est donnée sous la forme des points tabulés [5] et [11], alors il faut faire une interpolation pour déterminer une forme analytique de la géométrie. L'interpolation choisie est celle Cubic spline [12] et [13]. C'est une très bonne interpolation. Elle garde la courbure du profil d'aile au niveau du bord d'attaque.

## **Motivation**

*La contrainte tangentielle joue un rôle essentiel pour le dimensionnement de la structure pour les poutres ayant des longueurs petites par rapport à l'aire de la section, l'hélice, les aubes du compresseur et de la turbine, ..... sont des exemples vifs dans le champ de l'aéronautique et dans le domaine de la construction en général.*

*Le problème rencontré dans le calcul analytique est de connaître les caractéristiques géométriques des sections complexes alors qu'il est indispensable de déterminer leurs caractéristiques. Notre étude va essayer de résoudre ce problème en développant un programme numérique qui va tenir compte de la discrétisation des éléments complexes en des éléments infinitésimaux simples dont les caractéristiques géométriques sont connues (dans notre cas on prend l'élément triangulaire), en augmentant les éléments de discrétisation pour donner des résultats précis et acceptables.*

*On admet l'interpolation polynomiale (cubic spline) aux valeurs de la table afin de trouver une forme analytique des deux fonctions celle de l'extrados et celle de l'intrados. Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général. La comparaison est faite selon des résultats analytique des sections simple et usuelles (rectangle, cercle, carrée,.....) qui sont obtenue par des calculs analytiques qui*

*reposent sur des formules mathématiques dans la littérature. Le calcul de l'erreur donnée par la comparaison entre les calculs analytiques et numériques approchées (programmation).*

### ***Disposition de chapitres (Plan de travail) :***

*Le travail présenté est composé de 4 chapitres.*

*Le premier chapitre est consacré à la présentation des exemples typiques pour l'application dans le monde de l'aéronautique qui touchent des parties essentielles de l'avion.*

*Le deuxième chapitre présente les caractéristiques géométriques d'un triangle quelconque (le centre de gravité, les moments d'inerties, l'aire, et les moments statique) et les formules générales pour faire un maillage à travers la fonction de condensation et la manière de réalisation du maillage interne et la manière de numérotation des triangles.*

*Dans le troisième chapitre, on présente une récapitulation des relations nécessaires de RDM enrichie par des exemples avec des solutions détaillés.*

*Le quatrième chapitre présente les différents résultats obtenus sous forme des tableaux et des graphes de trois chapitres, notamment les caractéristiques géométriques des profils et la contrainte tangentielle due à l'effort tranchant.*

*Enfin une conclusion générale du travail élaboré suivie par des perspectives qui présentent des propositions de quelques travaux à réaliser prochainement.*



## **CHAPITRE I :**

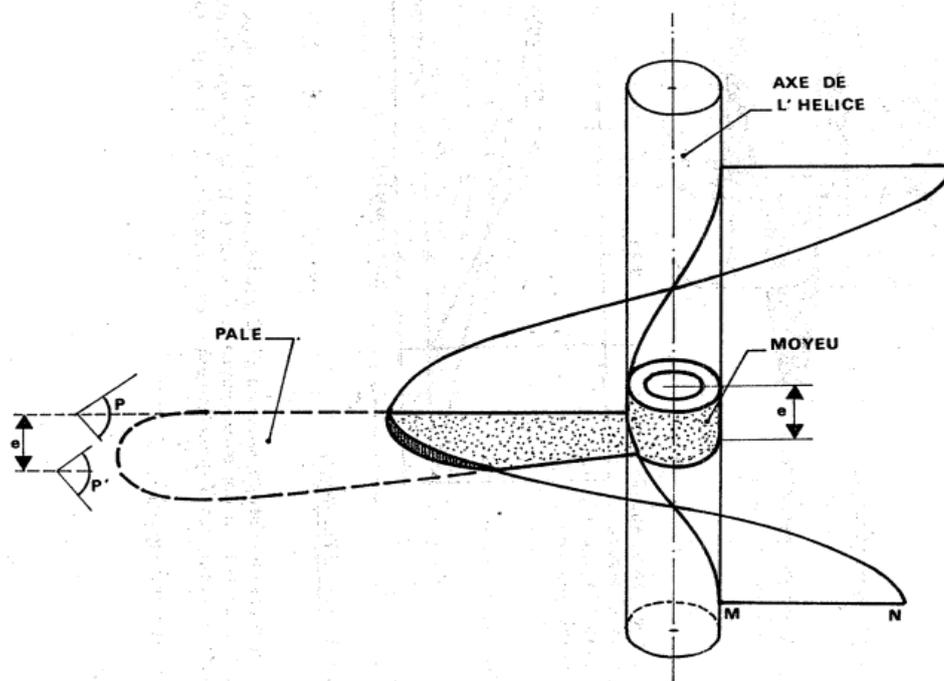
### **GENERALITE SUR L'HELICE, L'AILETTES DE COMPRESSEUR ET DE LA TURBINE.**

*Au sein de ce chapitre, on va essayer de montrer et d'expliquer les applications de l'effort tranchant sur une section pleine avec une surface considérable par rapport à la longueur qui va être illustrée par trois exemples présentant les applications les plus utilisées dans le domaine de l'aéronautique qui sont l'hélice, le compresseur axial et la turbine axiale.*

#### **I. L'hélice :**

##### **I. 1. Hélice aérienne :**

L'hélice aérienne est un morceau d'hélicoïde, compris entre deux plans P et P',



auquel on donne un certain volume (partie hachurée) et dont on façonne l'extrémité pour obtenir une pale d'hélice (pointillés).

*Fig. (I.1) : L'hélice aérienne et l'hélicoïde*



*Fig. (I.2) : L'hélice aérienne dans un turbopropulseur.*

## **2. Définition géométrique**

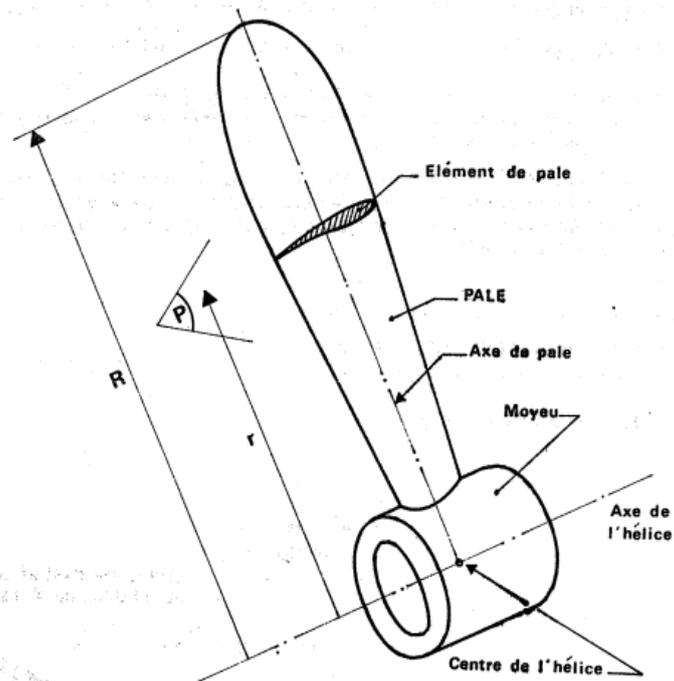


Fig. (1.3) : Les éléments de l'hélice.

- **Axe de l'hélice** : axe de rotation de l'hélice.
- **Axe de pale** : axe autour duquel la pale tourne vers le changement de calage.
- **Centre de l'hélice** : point d'intersection de l'axe de l'hélice et de l'axe de pale.
- **Plan de l'hélice** : plan engendré par la rotation des axes de pale.
- **Elément de pale** : section de pale obtenue par un plan perpendiculaire à l'axe de pale et coupant la pale à une distance  $r$  de l'axe de l'hélice.
- **Hélice à pas fixe** : si le pas géométrique est constant tout le long de la pale.
- **Hélice à pas variable** : si le pas géométrique varie tout le long de la pale (variation possible qu'au moment de la construction).
- **Hélice à calage fixe** : si le calage  $\omega$  peut être modifié par rapport au moyeu.
- **Hélice à calage réglable** : si le calage  $\omega$  peut être modifié au sol.

- Hélice a calage variable : si le calage  $\omega$  peut être modifié au vol.

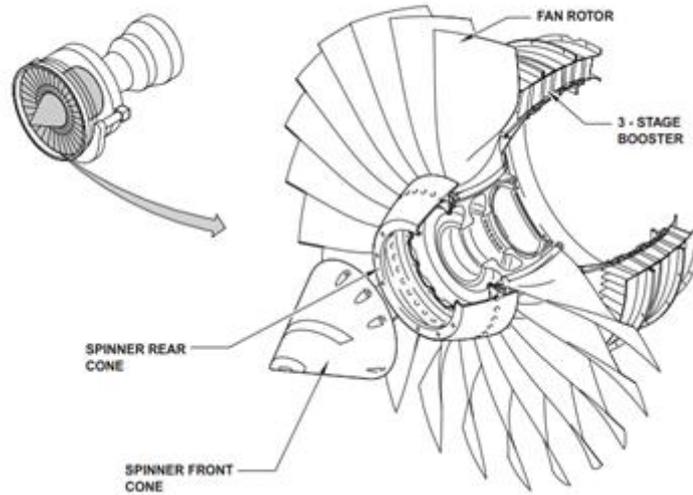


Fig. (I.4) : Soufflante et accélérateur.

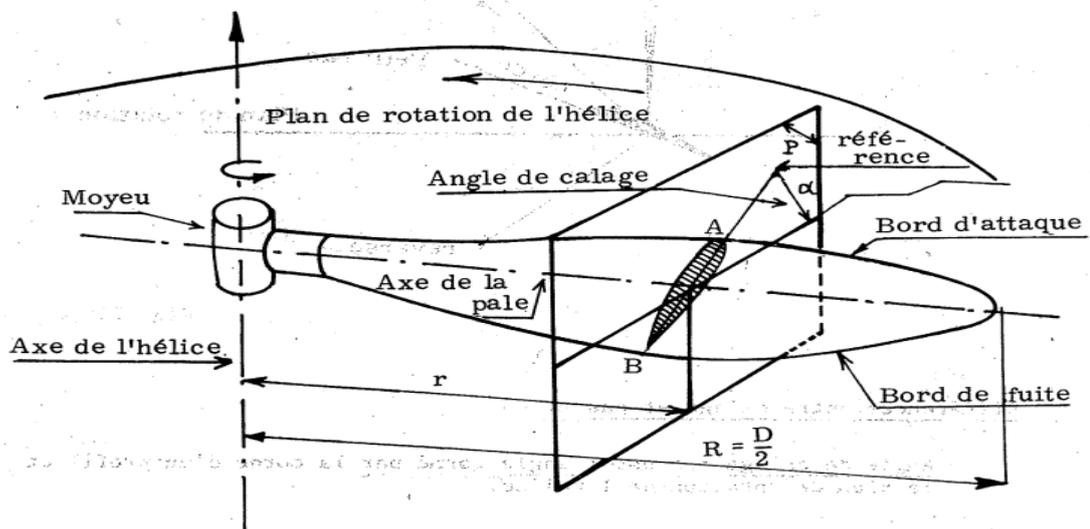


Fig. (I.5) : Schéma présente le profil conséquent de l'hélice et le plan parallèle à l'axe de rotation.

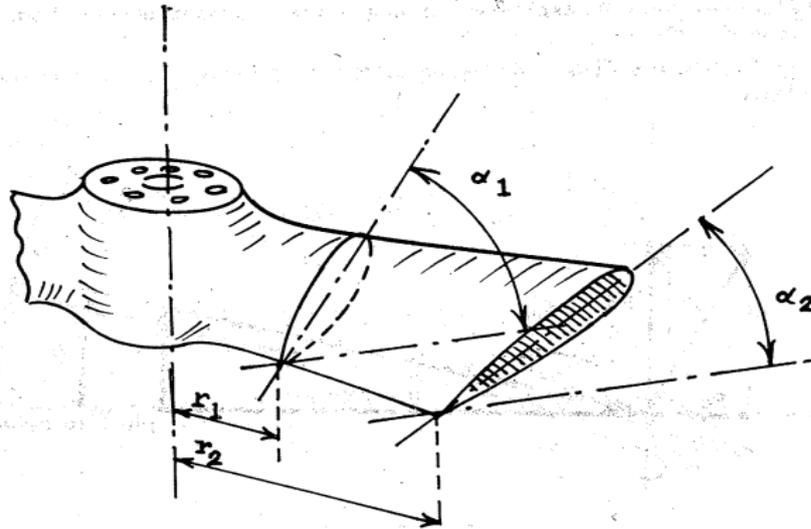


Fig. (I.6) : L'angle de calage et le pas de l'hélice.

**Nota 1** : modifier  $\omega$  revient à modifier  $H$  (puisque  $H=2\pi R \operatorname{tg} \omega$ ).

Il en resulte qu'une hélice à calage variable est souvent appelée hélice à pas variable.

**Nota 2** : le pas d'une hélice tout le long de pale prouve être variable.

Il est nécessaire de définir une section de référence.

(Par convention cette section est fixée à  $0.70 R$  ( $R$  étant le rayon de l'hélice) ,[20],[23].

### 3. Description cinématique

Soit un élément de la pale :

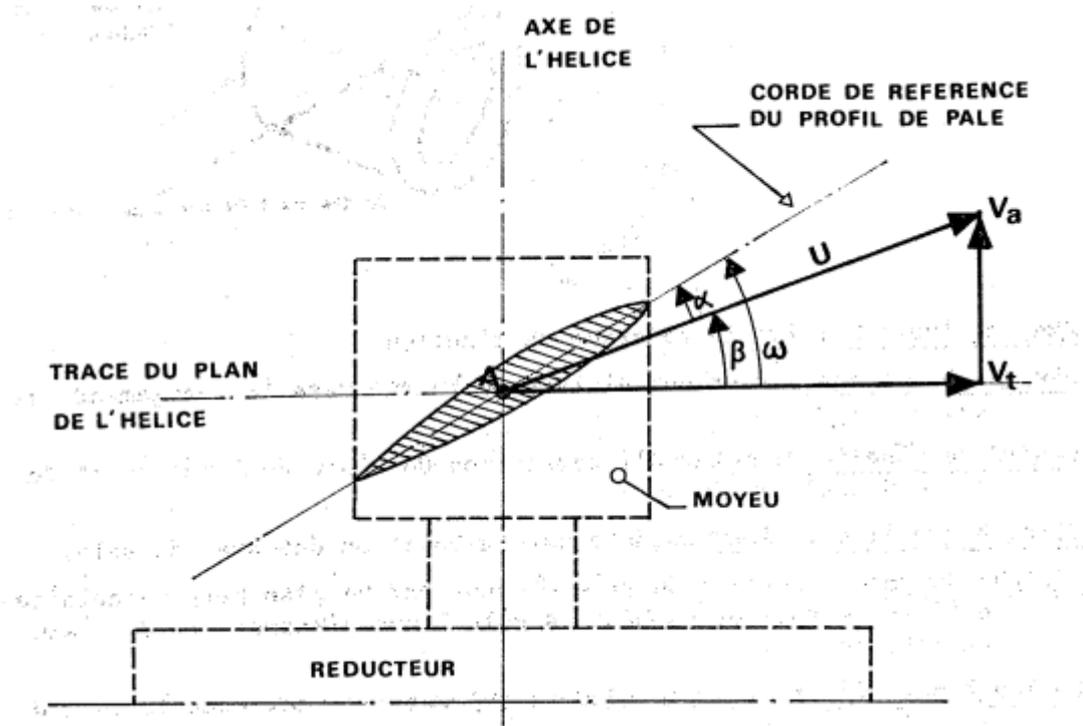


Fig. (1.7) : Eement de pale

Le point A est soumis à un mouvement :

- ✓ De rotation autour de l'axe de l'hélice, d'où une vitesse tangentielle  $V_t$
- ✓ De translation parallèle a l'axe de l'hélice, d'où une vitesse d'avancement  $V_a$  (ou vitesse avion).
- ✓ Résultant suivant le vecteur vitesse U.

Il en result les angles suivants [23] :

- $\omega$  angle de calage
- $\beta$  angle d'avancement
- $\alpha$  angle d'incidence ( $\alpha = \omega - \beta$ )

#### 4. Définition du recul :

Le recul est la différence entre :

- ✓ le pas géométrique  $H = 2\pi R \tan \omega$
- ✓ le pas réel  $H' = 2\pi R \tan \beta$

H' est bien le pas réel ou l'avance par tour de l'hélice, en effet :

$$\checkmark H' = 2\pi R \cdot \operatorname{tg} \beta \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{V_a}{2\pi R N}$$

$$\text{Donc} \quad H' = 2\pi R \cdot \frac{V_a}{2\pi R N} = \frac{V_a}{N} \text{ m/s}_t/\text{s}$$

H' s'exprime en mètres par tour.

### **5. Nécessite de recul :**

Le recul est nécessaire car il crée la différence entre H et H', donc entre  $\omega$  et  $\beta$  donc l'incidence qui est à l'origine de la résultante aérodynamique, donc de la traction [16],[20].

## **II. Le compresseur :**

### **1. Compresseur axial:**

Le compresseur axial est une machine dynamique qui assure :

- 1) L'établissement d'un débit d'air par mise en vitesse de l'air lorsque la vitesse de l'avion est nulle ou faible.
- 2) Une vitesse d'écoulement de l'air à l'entrée de la chambre relativement indépendante de la vitesse de vol (bonne stabilité de la combustion).

- 3) Un apport d'énergie cinétique dans le rotor par accélération du débit d'air suivant le mouvement de rotation.
- 4) La transformation de l'énergie cinétique en pression dans le stator par amortissement de la vitesse de rotation communiquée à l'air par le rotor voir [20], [23].



*Fig. (1.8) : Compresseur axial.*



*Fig. (1.9) : Un employeur qui vérifie la fixation des ailettes dans la turbine.*



*Fig. (I.10) : Différents types des ailettes de compresseur.*



*Fig. (I.11) : À droite l'axe de moteur qui comprend le rotor du compresseur et au-dessous la partie fixe qui comprend le stator et le carter de moteur, et à gauche vue de profil d'une ailette (blade).*

2. Composants du compresseur axial :

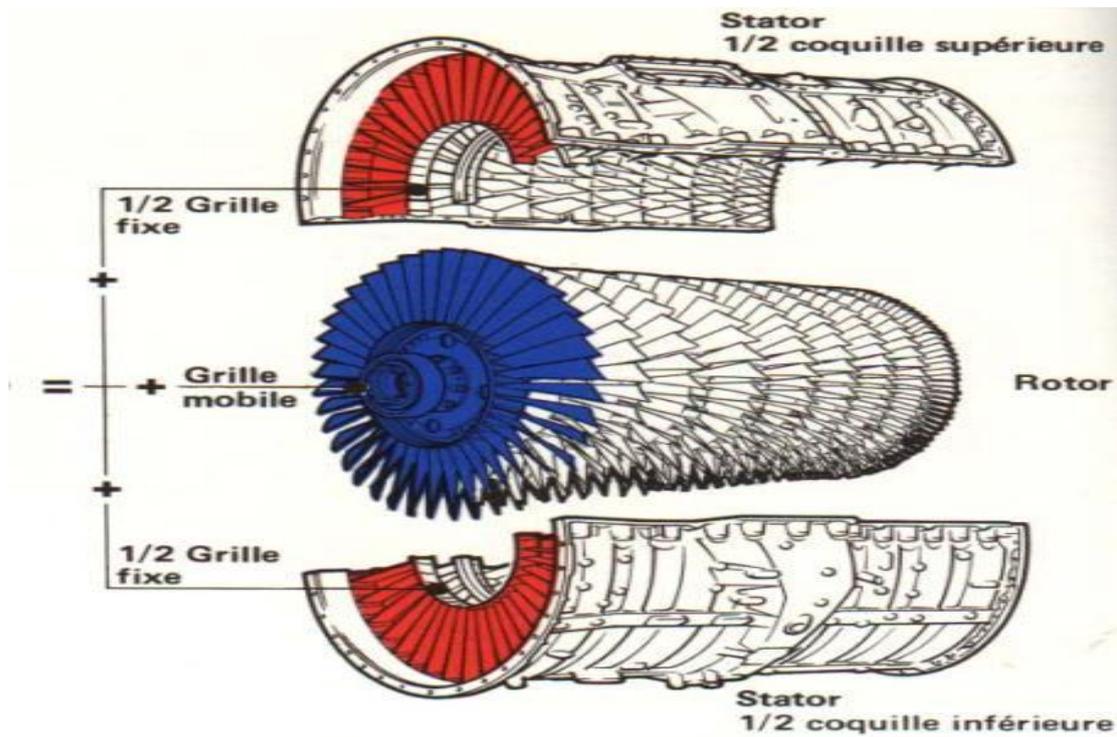


Fig. (I.12) : Compresseur axial (stator +rotor)

Un compresseur axial est constitué des éléments suivants :

- 1- Un rotor formé par empilage des disques à la périphérie auquel sont fixés des ailettes, appelés aussi aubes ; deux disques consécutifs sont séparés par une virole.

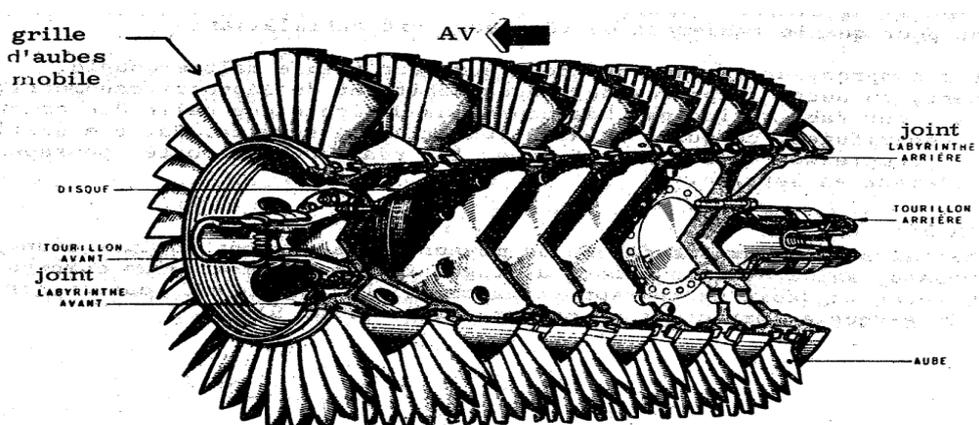


Fig. (I.13) : Les composants d'un rotor.

- 2- Un stator, formant le carter du compresseur, à l'intérieur duquel sont implantés des anneaux recevant des aubes.

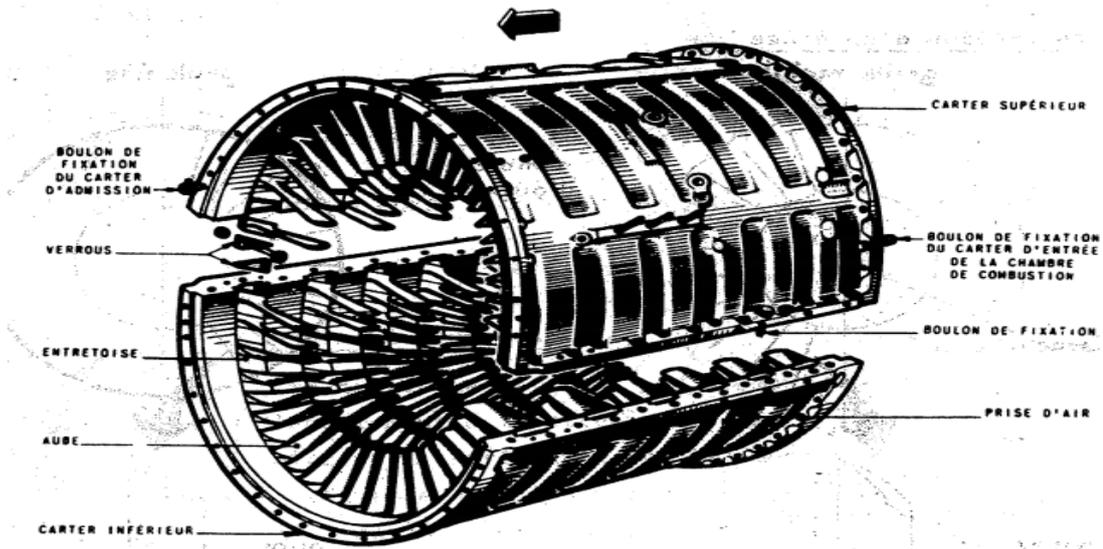


Fig. (I.14) : Les composants d'un stator.

Chaque disque du rotor équipé de ces aubes forme une grille d'aubes rotor et chaque anneau du stator avec ses ailettes constitue une grille d'aubes stator. Un étage du compresseur axial est constitué d'une grille d'aubes rotor suivie d'une grille d'aubes stator. Ce compresseur est qualifié d'axial parce que l'air y est comprimé dans une direction parallèle à l'axe du moteur .un réacteur peut être monocorps, si son compresseur est unique, ou multicorps (double ou triplecorps), si l'ensemble compresseur est séparé en deux ou trois mobiles, si le compresseur est multicorps, chaque rotor est entraîné par une turbine différente, ce qui implique que les rotors tournent à des vitesses différentes [21],[23].

### 3. Les avantages :

Le compresseur axial a l'avantage de fournir un taux de compression très élevé tout en assurant un assez bon rendement , de plus , il convient mieux pour les avions conçus pour la haute vitesse parce que son maître-couple est petit. Malheureusement ses aubages sont relativement fragiles, ce qui le rend particulièrement susceptible d'être endommagé par des corps étrangers. En outre, le nombre élevé d'aubes de stator et de rotor (il peut y en avoir plus de mille dans un gros moteur). La précision requise des ajustages pour obtenir un bon rendement et les nombreuses sensibilités aux variations de conditions de fonctionnement en font un compresseur dont la fabrication est très complexe et très onéreuse .Les techniques nouvelles ont permis de réduire les coûts de fabrication du compresseur axial, mais il reste quand même beaucoup plus cher que le compresseur radial. C'est la raison pour laquelle le compresseur axial est utilisé dans des moteurs où les considérations de rendement et de poussée prennent le pas sur les questions de coût. De simplicité, de souplesse d'utilisation...etc. nous verrons d'ailleurs plus loin que la plupart des motoristes utilisent différents trucs ingénieux pour accroître la souplesse et améliorer les caractéristiques d'utilisation du compresseur axial [16], [20].

### 4. Définition d'un étage :

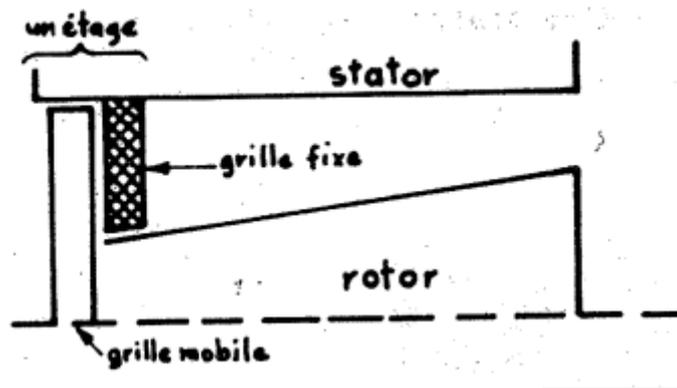


Fig. (I.15) : Un étage de compresseur axial.

Un étage de compresseur axial est un ensemble formé d'une grille d'aubages mobile, suivie d'une grille d'aubages fixe *Fig. (I.15)*.

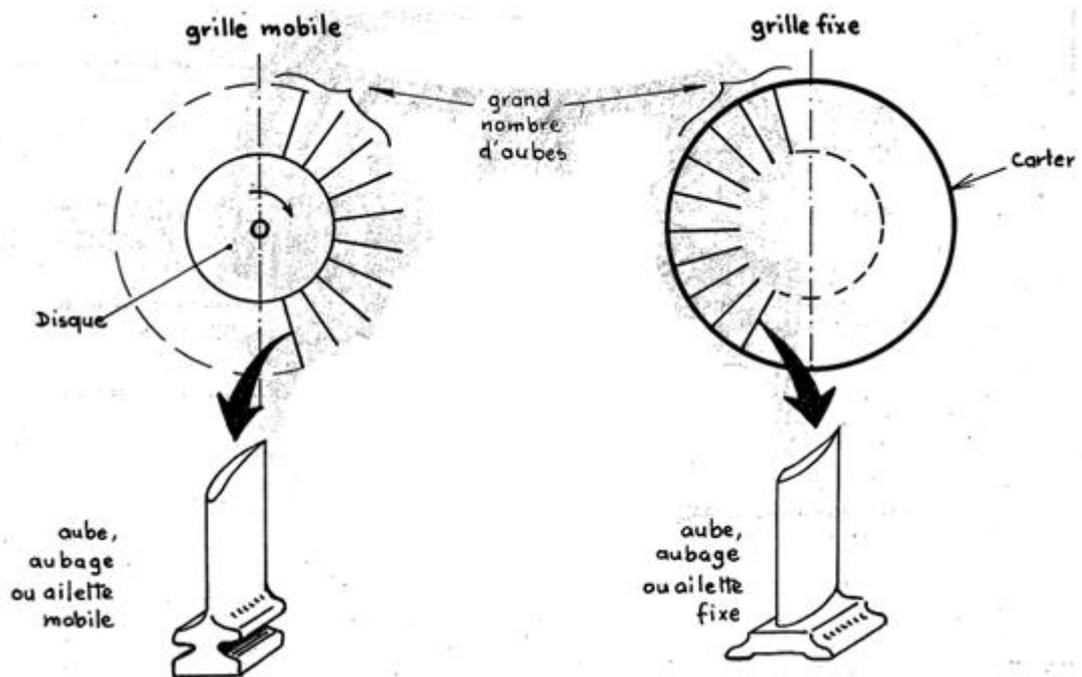
**5. Description d'un étage :**

- a) Un grand nombre de profils aérodynamiques sont fixés à la périphérie d'un disque entraîné en rotation par la turbine. ces profils forment avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation un angle de calage  $\hat{\alpha}$ .

De plus, ils sont redresseurs.

Les canaux formés par 2 profils consécutifs sont donc divergents.

**6. Grille mobile et grille fixe :**



*Fig. (I.16) : Grille mobile et grille fixe*

**6.1. Grille mobile :**

Un grand nombre de profils aérodynamique sont fixes à la périphérie d'un disque entraîné en rotation par la turbine.

Chaque profil peut être comparé à une portion de pale d'hélice ou d'aile.

Ces profils disposent parallèlement suivant un même front et aux intervalles réguliers, déterminent entre eux autant de canaux où s'écoulent le flux d'air ; ils constituent une grille d'aubes mobiles.

Ces profils forment avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation un angle  $\alpha$  appelé angle de calage. Le plan perpendiculaire étant le plan qui passe par le bord d'attaque et le bord de fuite du profil.

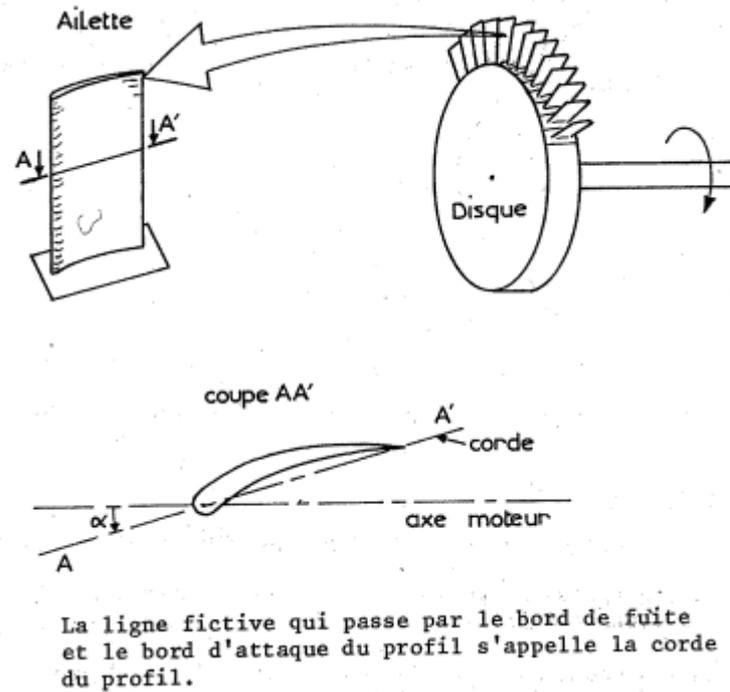


Fig. (I.17) : Les ailettes dans une grille mobile

## 6.2. Grille fixe :

Un grand nombre de profils aérodynamiques sont installés à l'intérieur d'un carter fixe.

Chaque profil peut également être comparé à une portion d'aile. Ces aubes forment des canaux où s'écoule le flux d'air et constituent une grille d'aubes fixes [20], [23].

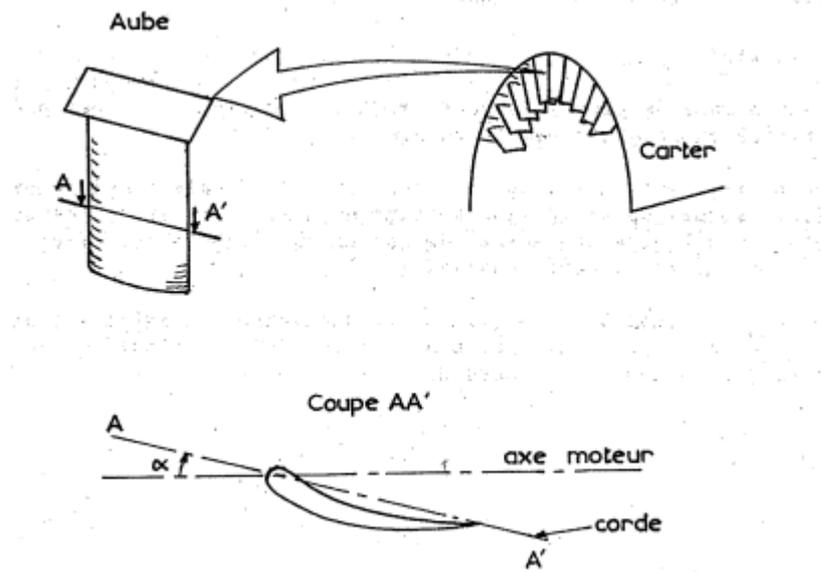


Fig. (I.18) : Les ailettes dans la grille fixe

Ces profils forment également un angle de calage  $\alpha$  avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor ou l'axe moteur [20], [23].

Le rotor est installé à l'intérieur du stator de façon à ce que l'on rencontre successivement de l'avant à l'arrière : une grille d'aubes mobiles, une grille d'aubes fixes, une grille d'aubes mobiles .... etc.

### 7. Différents types de grilles :

Lorsqu'elle est interposée dans un écoulement, une grille de profils constitue, pour le fluide qui la traverse, une suite de canaux qui, selon la courbure des aubes et la direction du fluide, construisent des convergents, ou des divergents.

En voici des exemples exagérés à dessin de rendre plus évidente l'évaluation de section.

Soit deux profils consécutifs appartenant à une grille dont nous réalisons une coupe vue de dessus.

Les deux profils sont identiques :

- Même rayon de courbure.

- Même calage.

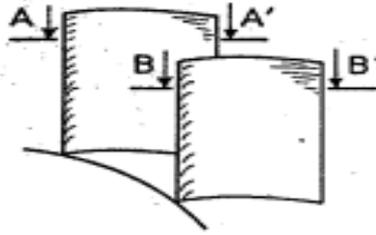


Fig. (I.19) : Les ailettes

### 8. Forme d'une ailette mobile :

Chacune des ailettes est fixée à la périphérie d'un disque et nous savons que la vitesse périphérique  $\vec{U}$  varie linéairement avec le rayon. Par conséquent, pour une même vitesse d'entrée  $\vec{v}$  de l'air et pour conserver un angle d'incidence de fonctionnement optimum sur la longueur du profil, l'angle de calage doit varier du pied au sommet de l'ailette. Cette variation d'angle de calage amène un vrillage de l'ailette sur un axe passant par le pied et l'extrémité.

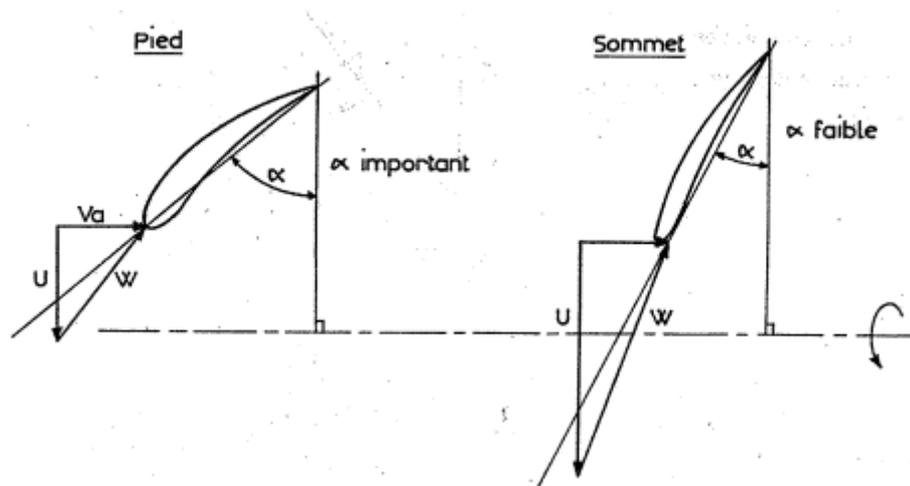


Fig. (I.20) : ailette mobile

De plus, le profil au pied est plus épais que le profil au sommet pour augmenter la résistance de l'aubage.

Enfin, la courbure au pied est supérieure à la courbure au sommet afin de maintenir un travail sensiblement constant.

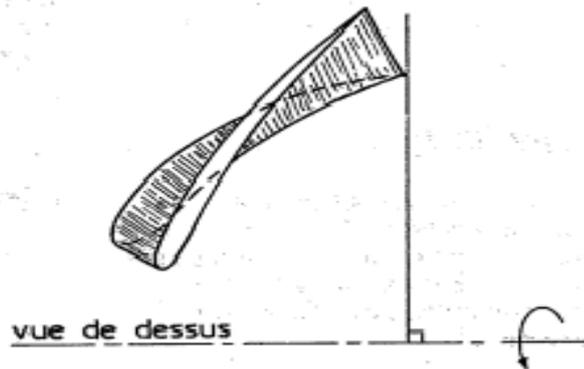


Fig. (I.21) : Epaisseur et courbure au sommet et au pied et le vrillage

### 9. Fixation ailettes/glissière :

En général, la fixation ailette/glissière est du type queue d'aronde Fig. ((I.22). (A)) ou en T (Fig. (I.22). (B)) .du fait de la longueur des ailettes des premiers stators, ceux-ci sont souvent rassemblés trois par trois et soudés sur une virole. Ou rassemblés par demi-stator comme le montre la vue précédente des deux demi-stators .ceci est importante, car en cas de rupture, les deux morceaux de l'ailette restent fixés, l'un dans le carter, l'autre dans la virole intérieure, évitant des dégâts plus importants [16], [23].

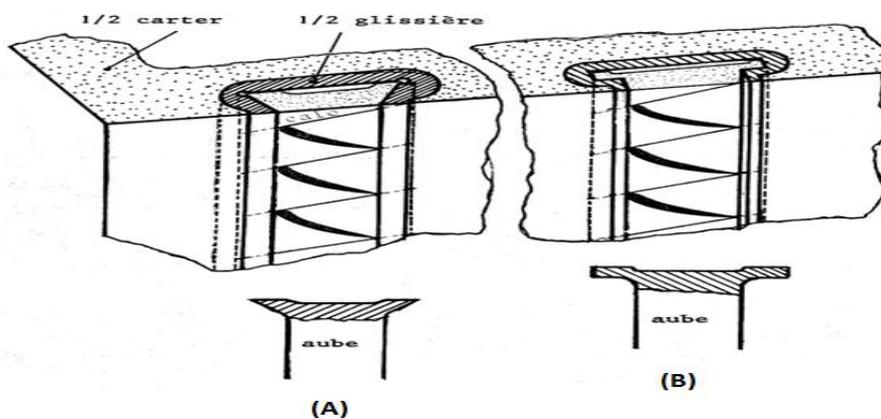


Fig. (I.22) : Fixation ailettes/glissière(A) du type queue d'aronde et (B) en T



*Fig. (I.23) : Différents types d'ailettes du compresseur du moteur Concorde Olympus 593*

### **III. La turbine**

La turbine a pour rôle d'entraîner le compresseur, les accessoires et dans le cas du turbopropulseur, l'hélice en prélevant sur les gaz de combustion à très forte température une partie de leur énergie cinétique et de pression dans un

turboréacteur classique, le compresseur absorbe environ 75% de la puissance produite intérieurement, ce qui reste sert à produire la poussée nécessaire. Pour fournir la puissance nécessaire à l'entraînement du compresseur, la turbine d'un gros turboréacteur doit développer, dans certains cas, plus de 50000 ch. Une aube de turbine peut prélever jusqu'à 250ch du flux de gaz en mouvement. C'est l'équivalent de la puissance produite par un moteur 8 cylindres d'automobile. Tout cela s'effectue dans un espace plus petit que celui qu'occupe un moteur d'automobile moyen [20].

### 1. Turbine axiale :

En général les turbines rencontrées sur turboréacteur sont axiales, l'écoulement est parallèle du moteur.

- Une turbine axiale est composée d'un ou de plusieurs étages de turbine ; chaque étage comprend une grille d'aubes stator suivie d'une grille d'aubes rotor. Il existe deux types de turbines, selon la configuration des aubes du rotor : la turbine à action et la turbine à réaction. Sur les moteurs modernes, les turbines sont un compromis : le degré de réaction augmente progressivement à partir de l'emplanture, le long de l'aube [16], [23].

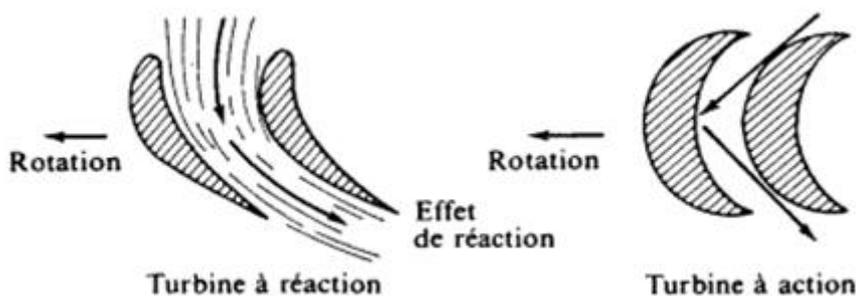
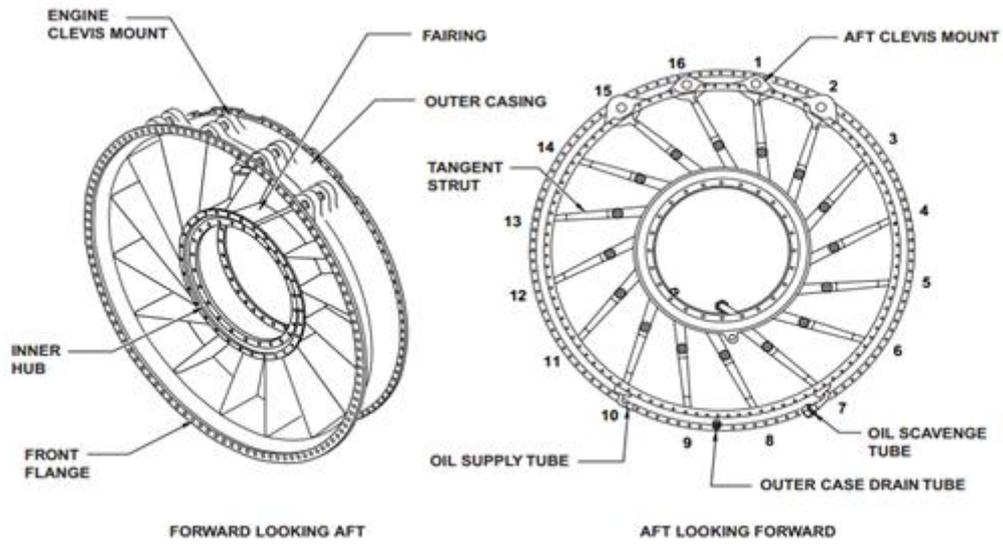


Fig. (I.24) : Vue en coupe de deux aubages typiques des turbines axiales

- Le stator est constitué d'une rangée d'aubes profilées, placées à un angle déterminé, de façon à former un ensemble de petites buses qui dirigent les gaz sur les aubes de la roue. C'est la raison pour laquelle on appelle la grille d'aube stator le distributeur de la turbine, tandis que les aubes elles-mêmes sont appelées aubes distributrices.



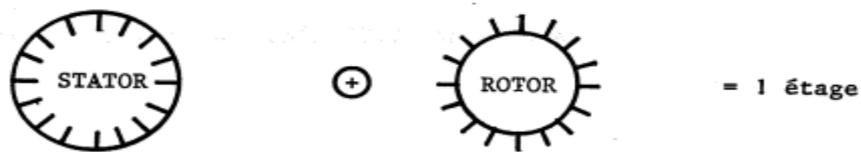
Fi

*g. (I.25) : La structure de la turbine*

**2. Définition d'un étage de turbine axiale :**

Un étage de turbine est composé de :

- Une grille d'aubes stator suivie d'une grille d'aubes rotor.
- Remarquons au passage que l'ordre de présentation stator-rotor est l'inverse de celui d'un compresseur [23].



Soit la présentation suiv

ante :

Fig. (I.26) : L'étage de la turbine axiale.

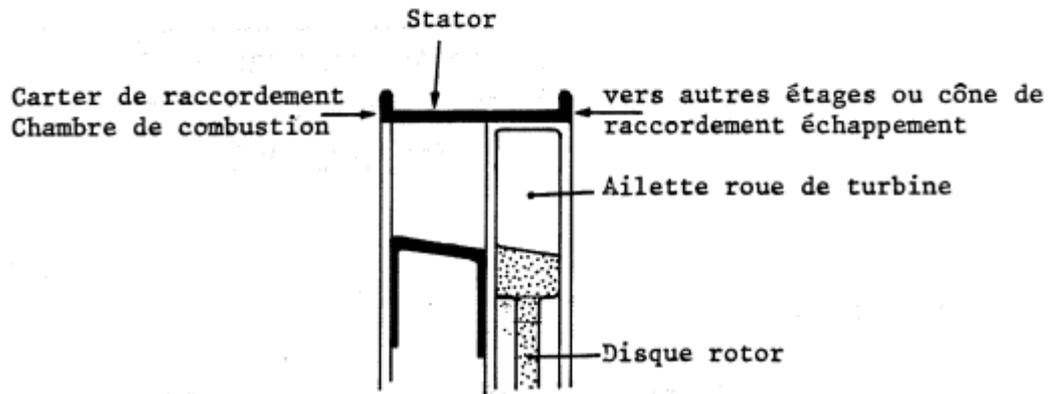


Fig. (I.27) : Les composants d'un étage de la turbine axiale.

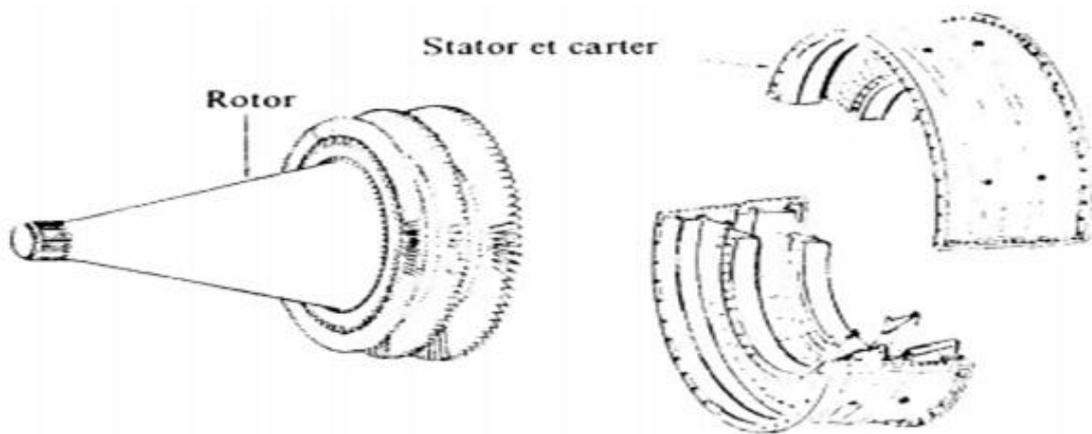


Fig. (I.28) : Turbine axiale à trois étages

**CHAPITRE II :****CARACTERISTIQUE GEOMETRIQUE D'UN TRIANGLE.**

*L'objectif de ce chapitre est de citer les caractéristique géométriques d'un triangle quelconque et de préciser la génération de maillage ou en va parler du maillage interne, de la fonction de condensation et de la numérotation des triangles, en finissant par éclaircir les caractéristiques géométriques de la section composée.*

**1. Caractéristiques géométriques d'un triangle quelconque :**

L'élément triangulaire est présenté par les nœuds de sa frontière comme présente la figure (II.1). Les coordonnées des nœuds 1, 2, 3 sont connues par rapport au repère quelconque xoy.

Les caractéristiques géométriques  $A$ ,  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_{xy}$  peuvent être déterminées par l'intégrale suivante avec  $m=0, 1, 2$  et  $n=0, 1, 2$  (II.2), (II.3), (II.4) et (II.5), (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (m=0, 1, 2) \quad (n=0, 1, 2) \quad (II.1)$$

Alors  $A=I_{00}$ ,  $S_x=I_{01}$ ,  $S_y=I_{10}$ ,  $I_{xx}=I_{02}$ ,  $I_{yy}=I_{20}$  et  $I_{xy}=I_{11}$ . À l'aide de ces relations, on peut calculer les caractéristiques géométriques ainsi que la position  $x_G$ ,  $y_G$  du centre de gravité d'une surface triangulaire par rapport à un axe quelconque comme suit.

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (II.2)$$

$$x_G = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad (II.3)$$

$$y_G = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \quad (II.4)$$

$$S_x = A y_G \quad (II.5)$$

$$S_y = A x_G \quad (II.6)$$

$$I_y = \frac{A}{12}[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9x_G^2] \quad (II.7)$$

$$I_x = \frac{A}{12}[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9y_G^2] \quad (II.8)$$

$$I_{xy} = \frac{A}{12}[x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9x_G y_G] \quad (II.9)$$

La numérotation des nœuds doit être faite dans le sens trigonométrique.

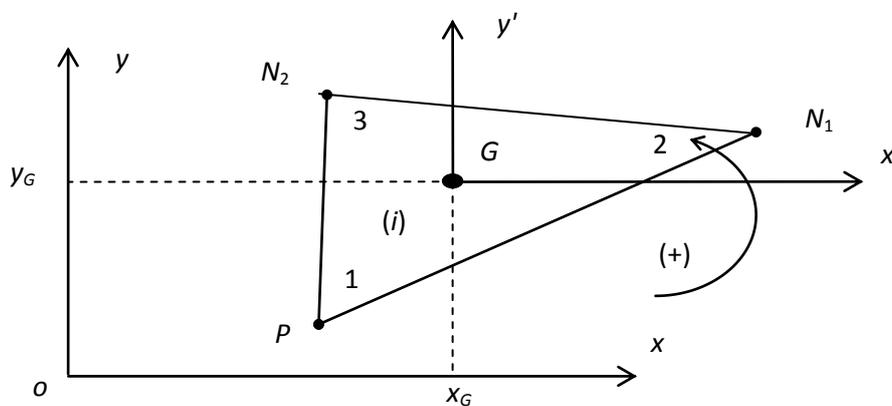


Figure (II.1): Élément triangulaire à trois nœuds.

## 2. Génération de Maillage

Il est à noter que la géométrie du profil d'aile est donnée sous la forme des valeurs tabulées [5] et [11]. Alors on a utilisé l'interpolation Cubic spline pour trouver une équation analytique de l'extrados et de l'intrados. Le nombre de points choisi pour la génération de maillage est différent à celui donnée pour la définition de la géométrie du profil. On s'intéresse aux domaines de type simplement connexes avec un seul observateur à l'intérieure du domaine.

### 2.1. Fonction de condensation

Vu la courbure de la frontière, il est parfois utile de condenser les nœuds vers une région bien spécifiée pour avoir une bonne présentation de la frontière, notamment au niveau du bord d'attaque pour les profils.

Si la fonction de condensation est appliquée sur le coté  $EA$  (voir figure (II.2)), par exemple la corde du profil, la variable indépendante normalisée est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \quad (II.10)$$

Avec :  $0 \leq \eta^* \leq 1$  et  $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$

Où :  $\eta$  représente  $x$

On peut même donner la distribution sur l'intervalle  $[0, 1]$  par  $\eta^*$  avec des sous intervalles égaux. La fonction de condensation utilisée est donnée par (II.6) et (II.14):

$$s = P \eta^* + (1 - P) \left[ 1 - \frac{\tanh [Q(1 - \eta^*)]}{\tanh [Q]} \right] \quad (II.11)$$

Une fois on obtient la valeur de  $s$ , il est demandé de spécifier la distribution de  $x$  et  $y$ . Par exemple,

$$x = x_A + s (x_A - x_E) \quad (II.12)$$

Pour des valeurs de  $P > 1.0$ , il est possible de condenser les nœuds vers le point  $A$ .

Des distributions typiques des points sur le segment  $EA$  pour différentes valeurs de  $P$  et  $Q$ , sont présentées sur la Figure (II.2) suivante :

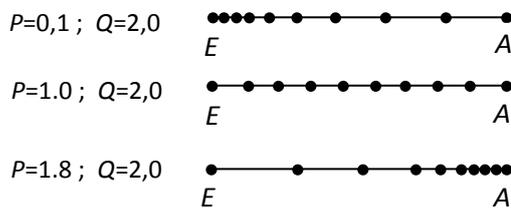


Figure (II.2) : Distribution des nœuds selon la relation (II.12)

Pour obtenir l'ordonnée du point considéré sur la frontière, il suffit qu'on utilise la fonction analytique de l'extrados ou de l'intrados.

## **2.2. Maillage interne :**

Le maillage obtenu est formé par des cellules triangulaires, dont deux nœuds de chaque triangle se trouvent sur la frontière du profil d'aile et le troisième nœud se trouve dans la surface interne du profil d'aile. Le point interne est commun pour tous les triangles formés dans le domaine. La position de nœud interne doit être choisie de telle manière que le nœud soit visible pour tous les nœuds de la frontière. Si par exemple le nœud n'est pas visible pour quelques points de la frontière, il faut dans ce cas soit changer la position du nœud interne comme première solution, sinon il faut diviser le domaine du profil d'aile en plusieurs blocs et pour chaque bloc il faut choisir le point interne de telle manière qu'il soit visible pour tous les nœuds de son bloc. Pour nos géométries des profils d'aile choisis la résolution de ce problème est faite par le changement du point interne, voir figure (II.3),(II. 4),(II. 5),(II. 6) et(II. 7).

## **2.3. Connexion des triangles du maillage :**

La numérotation des nœuds du maillage commence par le bord de fuite dans le sens antihoraire. Alors le point interne est nommé par le point  $P$  en dehors de la numérotation. Si le nombre de points sur la frontière est  $NN$ , alors le nombre de points total est  $NN+1$ . Par conséquent le nombre des triangles à traiter est égale  $NT=NN$ .

Le problème consiste à faire l'assemblage de ces triangles pour obtenir le résultat pour le domaine complet. Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros des nœuds de chaque triangle, voir figure (II.1). Pour le triangle numéro (i) ( $i=1, 2, 3, \dots, NN$ ), les nœuds  $N_1$  et  $N_2$  prennent respectivement les valeurs  $i$  et

$i+1$ . Pour le dernier triangle, le numéro de nœud  $N_2=1$  (fermeture de la frontière). Pour ce triangle, un coté se trouve sur l'intrados avec un nœud est celui le bord de fuite.

### 3. Caractéristiques géométriques de la section composée :

La surface du domaine a été subdivisée en petits éléments triangulaires. Alors, le calcul des caractéristiques géométriques pour le domaine complet sera approximer par la somme de toutes les caractéristiques géométriques des triangles constituant le domaine. Alors on peut écrire :

$$A = \sum_{i=1}^{i=NT} A_i \quad (II.13)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{i=NT} (y_G)_i A_i \quad (II.14)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{i=NT} (x_G)_i A_i \quad (II.15)$$

$$I_x = \sum_{i=1}^{i=NT} (I_x)_i \quad (II.16)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=NT} (I_y)_i \quad (II.17)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{i=NT} (I_{xy})_i \quad (II.18)$$

Le centre de gravité de cette section composée en petits éléments triangulaires est donné par les relations (II.14) et (II.15).

Les termes sous le signe sommation dans les relations (II.13), (II.14), (II.15), (II.16), (II.17) et (II.18) sont donnés par les relations dans un triangle, présentés par les relations (II.2), (II.5), (II.6), (II.7), (II.8) et (II.9).

Les caractéristiques géométriques de la section complète par rapport aux axes centraux peuvent être déterminées en utilisant le théorème d'Huygens (*théorème des axes parallèles*) (II.19), (II.20), (II.21) et (II.22). Alors on aura :

$$I'_x = I_x - y_G^2 A \quad (II.19)$$

$$I'_y = I_y - x_G^2 A \quad (II.20)$$

$$I'_{xy} = I_{xy} - x_G y_G A \quad (II.21)$$

Le moment d'inertie polaire de la section complète peut être calculé par la relation suivante (II.22). Alors :

$$I_p = I'_x + I'_y \quad (II.22)$$

On peut déterminer par la suite les deux valeurs de moments d'inerties principaux et les directions principales par des relations simples connues dans la

littérature (II.1), (II.2), (II.3) et (II.4). L'essentielle de ces résultats c'est les moments d'inerties centraux donnés par les relations (II.19), (II.20) et (II.21).

#### **4. Calcul de l'erreur :**

Pour justifier l'exactitude des résultats obtenus, il est recommandé de calculer l'erreur commise par le calcul numérique et les résultats exacts. C'est vrai qu'on n'a pas les solutions exactes pour les profils d'ailes, mais on peut choisir une section simple et de la discrétiser avec la même démarche présentée et de voir la convergence de la solution en fonction de nombre des nœuds. Tous ça doit être fait par le même programme de calcul numérique développé. Alors, pour chaque paramètres  $A, x_G, y_G, I_x', I_y', I_{xy}'$ , la valeur de l'erreur relative peut être calculée et donnée par la formule suivante :

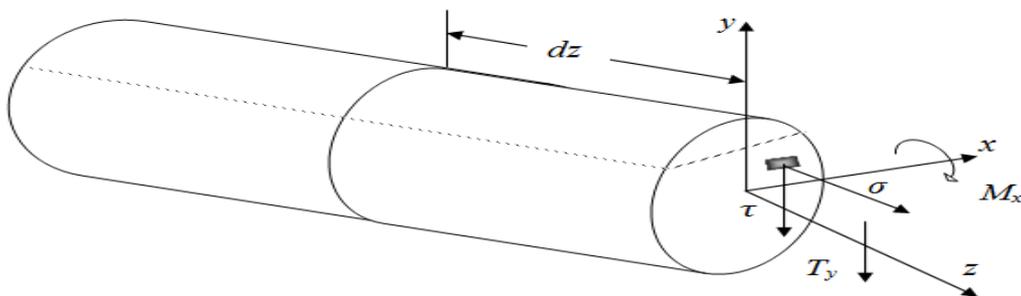
$$\varepsilon \% = \frac{|\text{Paramètre}_{\text{Calculé}} - \text{Paramètre}_{\text{Exacte}}|}{\text{Paramètre}_{\text{Exacte}}} \times 100 \quad (II.23)$$

**CHAPITRE III :****CONTRAINTE TANGENTIELLE DUE A L'EFFORT TRANCHANT**

*Le programme comporte l'étude des efforts appliqués à une section plane simplement connexe. La compréhension des phénomènes nécessite quelque acquisitions élémentaires en résistance des matériaux .c'est le but de ce chapitre dont la bonne assimilation du résumé suivi par des exemples.*

**1. Valeurs des contraintes tangentielles :**

Lorsque la poutre est soumise à des forces perpendiculaires à son axe, elle va engendrer dans les sections transversales des efforts de cisaillement  $T$  en plus d'un moment de flexion  $M$ . Dans ce paragraphe on va voir comment calculer les contraintes de cisaillement  $\tau$  engendrées dans les sections transversales sous l'effet de l'effort tranchant  $T$ .



$M_x$ : moment de flexion autour l'axe x.

$T_y$ : effort tranchant.

$\sigma$  : contrainte normale.

$\tau$  : contrainte tangentielle.

Fig. (III.1) : poutre soumise à des forces perpendiculaire à son axe  
 Coupons un élément longitudinal de longueur  $dz$  d'une poutre .le moment de flexion appliqué dans la section gauche diffère du moment dans la section droite par  $dM$ .

Découpons cet élément en deux parties par un plan horizontal distant de  $y$  de l'axe neutre et considérons l'équilibre de la partie haute de l'élément qui possède une aire  $A^*$ .

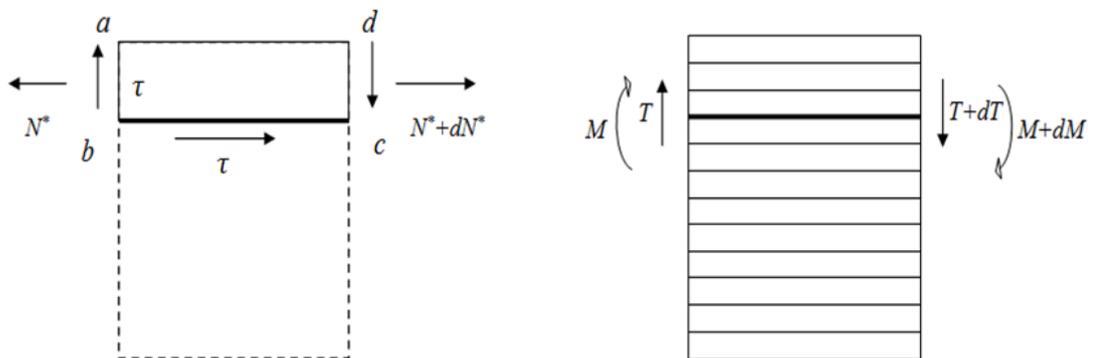


Fig.(III.2) : Coupe d'un élément longitudinale de longueur  $dz$ .

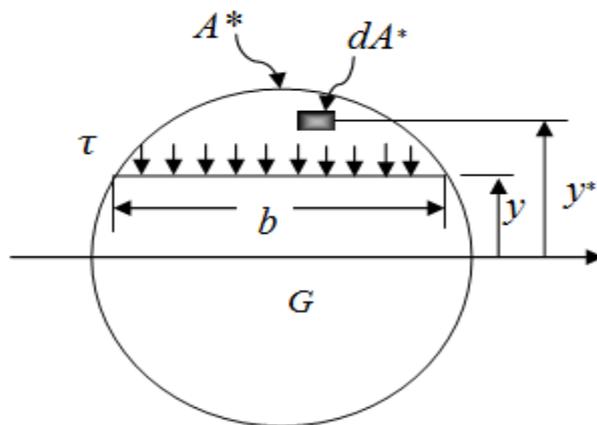


Fig.(III.3) : Coupe transversale d'un élément longitudinale.

La résultante des forces longitudinales appliquées sur la partie gauche de la section  $A^*$  est donnée par :

$$dN^* = \sigma dA^*$$

$$N^* = \int_{A^*} \sigma dA^*$$

$$= \int_{A^*} \frac{M_x y^*}{I_x} dA^* = \frac{M_x}{I_x} \int_{A^*} y^* dA^*$$

$$N^* = \frac{M_x}{I_x} S_x^*$$

Avec :

$$S_x^* = \int_A y^* dA^*$$

Où  $S_x^*$  : présente le moment statique de la partie haute de la section qui distant de  $y$  de l'axe neutre.

Sur la partie droite de la section, il s'agit de la résultante des forces longitudinale suivante, vu le changement du moment fléchissant.

$$N^* + dN^* = \frac{(M_x + dM_x)}{I_x} S_x^*$$

La différence entre la force appliquée sur la droite et celle appliquée sur la section gauche est :

$$dN^* = \frac{dM_x}{I_x} S_x^* \quad (III.1)$$

Puisque l'élément est en équilibre, la différence  $dN^*$  doit être équilibrée par les forces tangentielles existantes entre les sections  $ab$  et  $cd$ , c'est-à-dire sur la face  $bc$ .

Par supposition que la contrainte de cisaillement  $\tau$  appliquée sur la section bc est uniformément distribuée sur la largeur de la section longitudinale b la force de cisaillement appliquée est  $\tau b dz$ . alors :

$$dN^* = \tau b dz$$

$$\tau = \frac{dN^*}{b dz} \quad (III.2)$$

Remplaçant l'équation (III.1) dans l'équation (III.2), on obtient :

$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^*}{b I_x} \quad (III.3)$$

Alors l'équation (III.3) devient :

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b I_x} \quad \text{formule de JOURAVSKI} \quad (III.4)$$

Cette formule dans la contrainte tangentielle appliquée sur la section longitudinale qui représente aussi la contrainte appliquée sur la section transversale d'après la loi de parité.

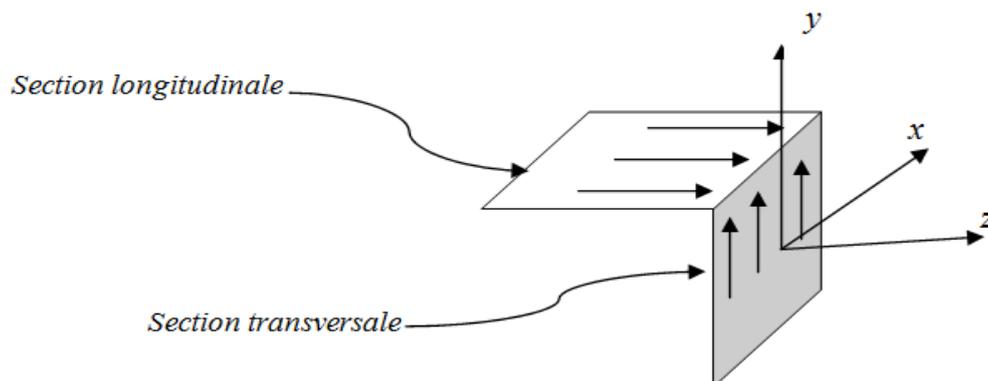


fig. (III.4) : les contraintes tangentielles sur deux sections (transversale et longitudinale).

La formule (III.4) montre que pour  $y = y_{\max}$  (partie haute) on a  $S_x^* = 0$  et par conséquent  $\tau = 0$  puisque l'aire se trouve sur  $y = y_{\max}$  est nulle. Pour la partie basse, on a  $A^* = A$  et par la suite  $S_x^* = 0$  parce que l'axe  $x$  passe par le centre de gravité de la section, comme résultat  $\tau = \tau_{\max}$ .

## 2. Exemples :

### 1. Poutre à section rectangulaire :

Déterminer la répartition de la contrainte tangentielle  $\tau$  dans une section rectangulaire soumise à un effort tranchant  $T_y$ .

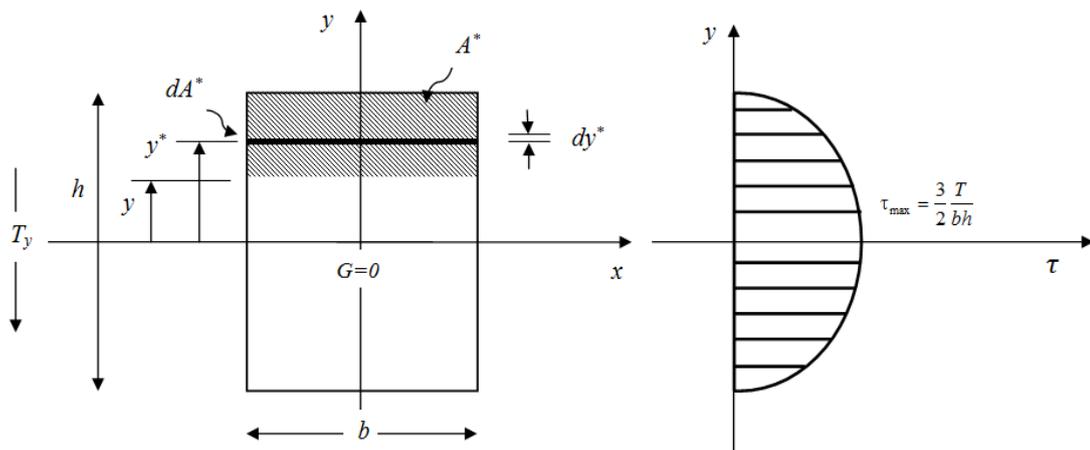


Fig. (III.5) : Poutre à section rectangulaire.

La répartition de la contrainte est donnée par l'équation (III.4)

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b I_x}$$

Avec  $b = b$  (largeur du rectangle) constante

$$S_x^* = \int_A y^* dA^*$$

Ou  $dA^* = b dy^*$

Alors :  $S_x^* = \int_{y^*=y}^{y^*=h/2} b y^* dy^* = \frac{b}{2} y^{*2} \Big|_y^{h/2}$

$$\frac{b}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - y^2 \right]$$

Donc : 
$$\tau = \frac{T_y^* \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b^* \frac{b h^3}{12}}$$

$$\tau(y) = \frac{6 T_y}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (III.5)$$

On remarque une variation parabolique de la contrainte  $\tau$  suivant l'axe  $y$ .

La contrainte  $\tau_{\max}$  est obtenu pour :

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \rightarrow y = 0$$

Alors :  $y = 0 ; \tau_{\max} = \frac{3 T}{2 b h} \quad (III.6)$

Pour  $y = \pm \frac{h}{2}$  on a  $\tau = 0$  (sur les frontière supérieurs et inférieures)

Par définition on a :

$$\tau_{moy} = \frac{T}{A} = \frac{T}{b h} \text{ pour un rectangle.}$$

Alors : 
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{moy}} \quad (III.7)$$

## 2. Section circulaire

Déterminer la répartition de la contrainte  $\tau$  pour une section circulaire de rayon  $R$ , soumise à un effort tranchant  $T$ .

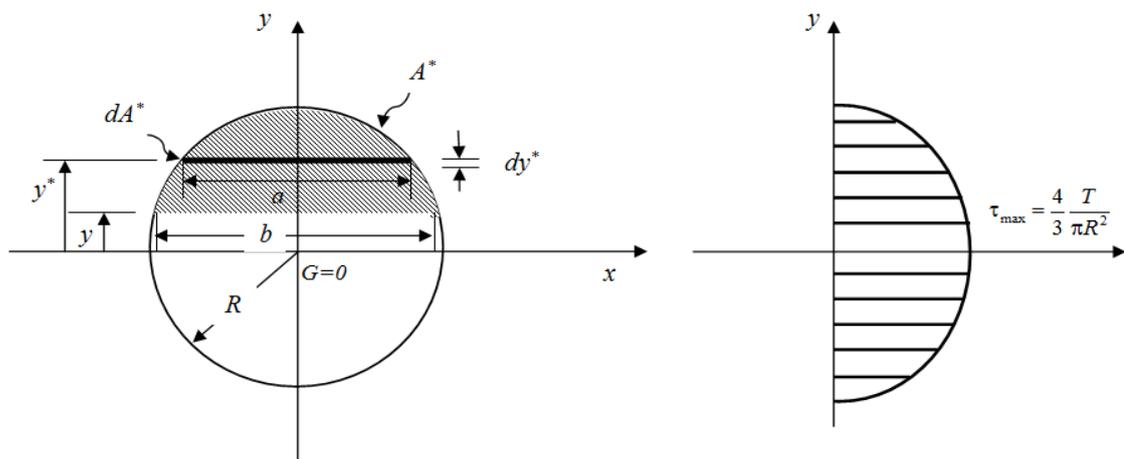


Fig. (III.6) : Section circulaire.

On a 
$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b I_x}$$

Avec : 
$$I_x = \frac{\pi}{4} * R^4$$

$$b = 2\sqrt{(R^2 - Y^2)}$$

Et 
$$S_x^* = \int_{A^*} y^* dA^*$$

$$dA^* = a^* dy^*$$

$$b = 2\sqrt{(R^2 - Y^{*2})}$$

Alors :

$$S_x^* = \int_{A^*} y^* 2\sqrt{(R^2 - Y^{*2})} dy^*$$

$$S_x^* = \int_{y^*=y}^{y^*=R} 2y^* \sqrt{(R^2 - Y^{*2})} dy^*$$

On pose :  $R^2 - Y^{*2} = u$  ;  $-2y^* dy^* = du$

Pour  $y^* = y$  ;  $u = R^2 - Y^2$

$y^* = R$  ;  $u = 0$

D'où :

$$S_x^* = \int_0^{R^2 - Y^2} \sqrt{udu} = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$S_x^* = \frac{2}{3} (R^2 - Y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Alors :

$$\tau = \frac{T \frac{2}{3} (R^2 - Y^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{(R^2 - Y^{*2})} \frac{\pi}{4} R^4} \quad (III.8)$$

On remarque que la variation de  $\tau$  suivant  $y$  est une distribution parabolique.

Pour  $y = 0$  ;  $\tau = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2}$

Pour  $y = \pm R$  ;  $\tau = 0$  (sur les frontière)

On pose :  $\tau_{\text{moy}} = \frac{T}{A} = \frac{T}{\pi R^2}$  pour un cercle

Alors :

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_{\text{moy}} \quad (III.9)$$

### 3. section triangulaire

Déterminer la variation de  $\tau$  pour une section transversale triangulaire de base  $C$  et de hauteur  $h$ , soumise à un effort tranchant  $T$  verticale.

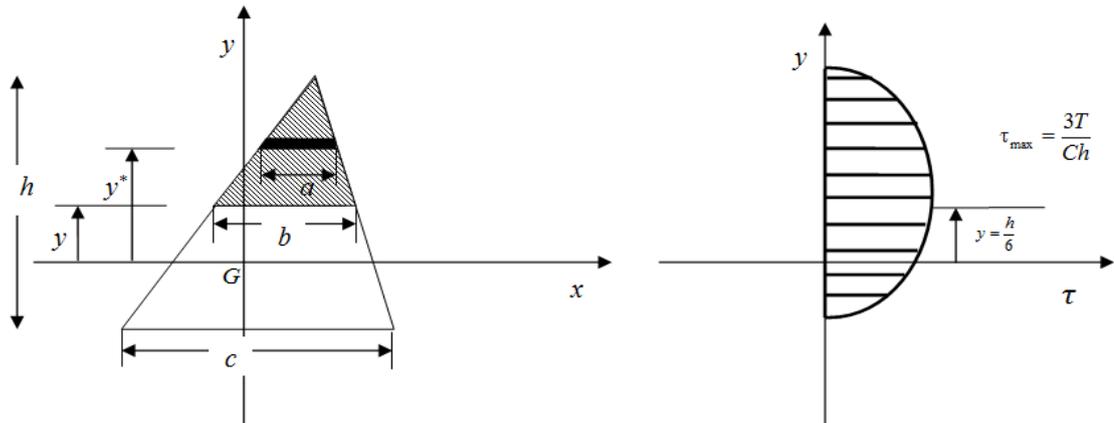


Fig. (III.7) : section triangulaire.

On a : 
$$\tau = \frac{TS_x^*}{bI_x}$$

Avec : 
$$I_x = \frac{1}{36} Ch^3$$

$$\frac{b}{C} = \frac{2/3 h - y}{h} ; b = \frac{C}{R} \left( \frac{2}{3} h - y \right)$$

Et 
$$S_x^* = \int_{A^*} y^* dA^*$$

$$dA^* = a^* dy^*$$

$$\frac{a}{C} = \frac{2/3 h - y^*}{h} ; a = \frac{C}{h} \left( \frac{2}{3} h - y^* \right)$$

Alors :

Après intégration et simplification, on obtient :

$$S_x^* = \frac{1}{3} \frac{C}{R} \left( \frac{2}{3} h - y \right)^2 \left( \frac{1}{3} h + y \right)$$

$$\text{D'où : } \tau = \frac{T \frac{1}{3} \frac{C}{R} \left( \frac{2}{3} h - y \right)^2 \left( \frac{1}{3} h + y \right)}{\frac{C}{R} \left( \frac{2}{3} h - y \right) \frac{1}{36} Ch^3}$$

$$\text{Après simplification on aura : } \tau(y) = \frac{12T}{Ch^3} \left( \frac{2}{3} h - y \right) \left( \frac{1}{3} h + y \right) \quad (III.10)$$

On remarque une variation parabolique de  $\tau$  suivant  $y$ .

$$\text{Pour } y = \frac{2}{3} h ; \tau = 0 \text{ (frontière supérieur)}$$

$$\text{Pour } y = -\frac{1}{3} h ; \tau = 0 \text{ (frontière inférieur)}$$

Détermination de la position et de la valeur de  $\tau_{\max}$

$$\frac{d\tau}{dy} = 0$$

$$-2y + \frac{1}{3} h = 0$$

$$y = \frac{h}{6}$$

$$\text{Pour } y = \frac{h}{6} ; \tau \left( y = \frac{h}{6} \right) = \tau_{\max} = \frac{3T}{Ch} \quad (III.11)$$

Par définition :

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{T}{A} = \frac{2T}{Ch} \text{ pour une section triangulaire.}$$

$$\text{Alors : } \tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{moy}} \quad (III.12)$$

4. section de forme d'une lemniscate verticale.

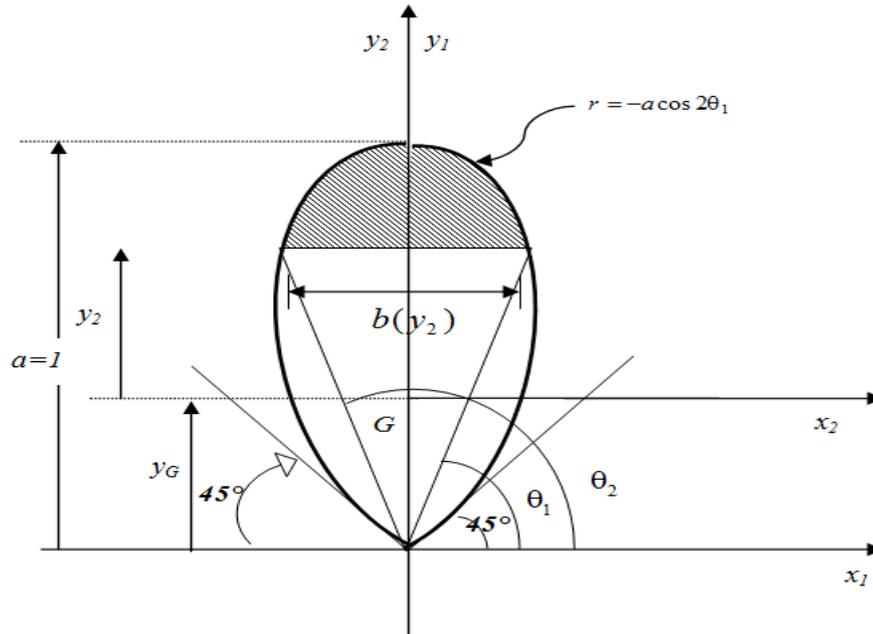


Fig. (III.8) : section de forme d'une lemniscate verticale.

1. La valeur de  $\pi$  :

$$\pi = pi = 3.1415926535897932384626433832D-00 \quad (III.13)$$

2. L'aire totale de la section :

$$A = \frac{\pi}{8} a^2 = 0.392699081a^2 \quad (III.14)$$

3. Le centre de gravité de la section :

$$y_G = \frac{128 \sqrt{2}}{105 \pi} a = 0.54876423a \quad (III.15)$$

4. Le moment d'inertie  $I_{x_2}$

$$I_{x_2} = \frac{45\pi + 128}{1920} - (y_G)^2 A$$

$$I_{x_2} = 0.022039486a^4 \quad (III.16)$$

5. Détermination de la variation de la contrainte

$$\text{On a :} \quad \tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)} \quad (III.17)$$

• L'intervalle de variation de l'ordonnée  $y_2$  :

$$\text{On a :} \quad -y_G \leq y_2 \leq a - y_G$$

$$-\frac{y_G}{a} \leq \frac{y_2}{a} \leq 1 - \frac{y_G}{a} \quad (III.18)$$

• Les angles  $\theta_1, \theta_2$  correspondant à l'ordonnée  $y_2$  :

$$\text{Soit :} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{On a :} \quad y_2 + y_G = r \sin \theta_1$$

$$= (-a \cos 2\theta_1) \sin \theta_1$$

On obtient l'équation suivante :

$$f(\theta_1) = \sin \theta_1 \cos 2\theta_1 + \frac{y_2}{a} + \frac{y_G}{a} = 0 \quad (III.19)$$

Pour  $\frac{y_2}{a}$  donnée dans l'intervalle  $\left[-\frac{y_G}{a}, 1 - \frac{y_G}{a}\right]$  on calcule  $\theta_1$  dans l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  qui annule l'équation suivante.

$$f(\theta_1) = \sin \theta_1 \cos 2\theta_1 + \frac{y_2}{a} + \frac{y_G}{a} = 0$$

On utilise la méthode de bipartition "dichotomie" par voie numérique

$$\theta_a = \frac{\pi}{4} ; f(\theta_a) \geq 0$$

$$\theta_b = \frac{\pi}{2} ; f(\theta_b) \leq 0 \text{ avec } f(\theta_a) \cdot f(\theta_b) \leq 0$$

$$\exists \theta_1 \in [\theta_a, \theta_b] ; f(\theta_1) = 0$$

En suite on détermine

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

- Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

On a d'après la figure :

$$\frac{b(y_2)}{2} = r \cos \theta_1 = (-a \cos 2\theta_1) \cos \theta_1$$

Alors :

$$\frac{b(y_2)}{a} = -2 \cos 2\theta_1 \cdot \cos \theta_1$$

- Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :
- Détermination du moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

$$S_{x_2}^*(y_2) = \int_{y_2}^{a-y_G} y_2 dA^*$$

$$\approx 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

Avec  $NT$  : le

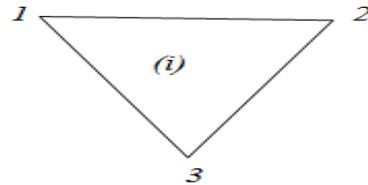
nombre de triangle donné dans le premier quadrant.

$AT(i)$  : Surface du triangle (i)  $i = 1, 2, 3, \dots, NT$

$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  de centre de gravité du triangle (i)

$i = 1, 2, 3, \dots, NT$

a) Pour un triangle(i) on a :



$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \} \quad (III.20)$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \} \quad (III.21)$$

b) Position des nœuds dans le repère  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale des nœuds est déterminée par :

$$NN = NT + 2$$

Par raison de symétrie par rapport a l'axe  $Gy_2$  on discrétise uniquement le premier quadrant ensuite on multiple le résultat par deux.

On choisit la distribution suivante :

$$\frac{x_1}{a} = 0 ; \quad \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

$$\Delta\theta = \frac{(\pi/2) - \theta_1}{NT} = 0$$

$$\theta = \theta_1 + (i-2)\Delta\theta$$

$$\frac{R}{a} = -\cos(2\theta) \quad i = 2,3,4,\dots,NT$$

$$\frac{x_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right)\cos\theta$$

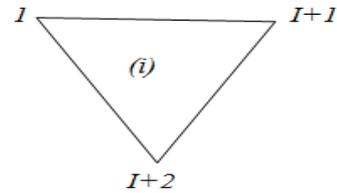
(III.22)

$$\frac{y_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right)\sin\theta - \frac{y_G}{a}$$

c) numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i = 1,2,3,\dots,NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{a^2} \right) \left( \frac{y_{GT}(i)}{a} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GT_i}}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{a^3}}{\left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y_2)}{a} \right)} \right\}$$

5. section droite de forme de demi-ellipse.

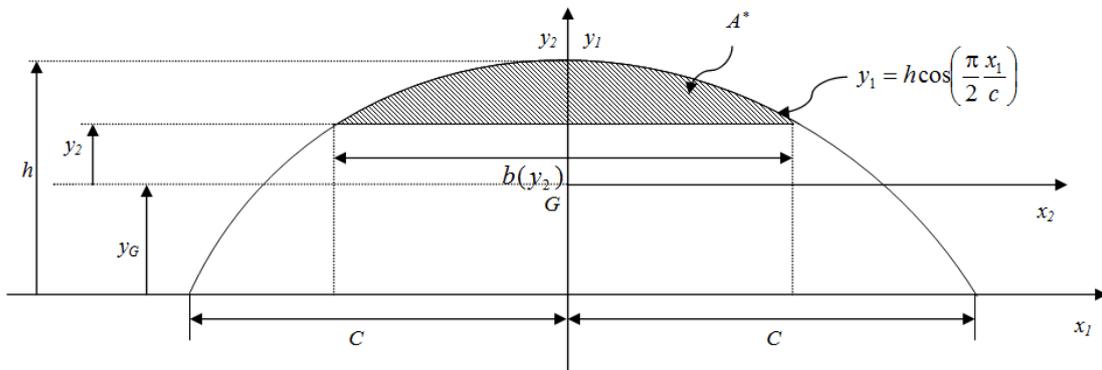


Fig. (III.9) : section droite de forme de demi-ellipse.

1) Détermination de l'aire totale de la section :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A dA = \iint_A dx_1 dy_1 = \int_{-c}^c \left[ \int_0^{y_1} dy_1 \right] dx_1 = \int_{-c}^c [y_1]_0^{h \cos \frac{\pi x_1}{2c}} dx_1 \\
 &= \int_{-c}^c h \cos \frac{\pi x_1}{2c} dx_1 = 2h \int_0^c \cos \frac{\pi x_1}{2c} dx_1 \quad (\text{Par raison de symétrie}) \\
 &= 2h \frac{2c}{\pi} \sin \left( \frac{\pi x_1}{2c} \right) \Big|_0^c = \frac{4ch}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right\} = \frac{4}{\pi} ch
 \end{aligned}$$

Alors 
$$A = \frac{4}{\pi} ch = 1.273239545ch \quad (III.23)$$

2) Détermination de la position du centre de gravité de la section :

$x_G = 0$  (Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $oy_1$ ).

$$y_G = \frac{S_{x_1}}{A}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 S_{x_1} &= \int_A y_1 dA = \iint_A y_1 dx_1 dy_1 = \int_{-c}^c \left[ \int_0^{y_1} y_1 dy_1 \right] dx_1 = \int_{-c}^c \left[ \frac{1}{2} y_1^2 \right]_{0}^{h \cos \frac{\pi x_1}{2c}} \\
 &= \frac{1}{2} h^2 \int_{-c}^c \cos^2 \frac{\pi x_1}{2c} dx_1 = h^2 \int_0^c \cos^2 \frac{\pi x_1}{2c} dx_1 \quad (\text{Par raison de symétrie}). \\
 &= h^2 \int_0^c \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi x_1}{c} \right) dx_1 = \frac{1}{2} h^2 \left\{ x_1 + \frac{c}{\pi} \sin \frac{\pi x_1}{c} \right\}_0^c = \frac{1}{2} h^2 c
 \end{aligned}$$

Alors :

$$S_{x_1} = \frac{1}{2} h^2 c$$

Donc :

$$y_G = \frac{1}{2} h^2 c \cdot \frac{\pi}{4ch} = \frac{\pi}{8} h \quad ; \quad y_G = \frac{\pi}{8} h \quad (\text{III.24})$$

3) Détermination du moment d'inertie  $I_{x_1}$  :

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \iint_A y_1^2 dx dy = \int_{-c}^c \left[ \int_0^{y_1 = h \cos \frac{\pi x_1}{2c}} y_1^2 dy_1 \right] dx_1 \\
 &= \int_{-c}^c \left\{ \frac{1}{3} y_1^3 \right\}_0^{h \cos \frac{\pi x_1}{2c}} dx_1 = \frac{1}{3} h^3 (2) \int_0^c \cos^3 \frac{\pi x_1}{2c} dx_1
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\frac{\pi x_1}{2c} = z \quad ; \quad x_1 = \frac{2c}{\pi} z \quad ; \quad dx_1 = \frac{2c}{\pi} dz$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad z = 0$$

$$x_1 = c \quad ; \quad z = \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$I_{x_1} = \frac{2}{3} h^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 z \left( \frac{2c}{\pi} \right) dz = \frac{4}{3\pi} ch^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 z dz$$

$$= \frac{4}{3\pi} ch^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \cos z dz = \frac{4}{3\pi} ch^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 z) d(\sin z)$$

$$= \frac{4}{3\pi} ch^3 \left\{ \sin z - \frac{1}{3} \sin^3 z \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} ch^3 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \right\} = \frac{8}{3\pi} ch^3$$

Alors :

$$I_{x_1} = \frac{8}{9\pi} ch^3 \quad (III.25)$$

4) Détermination du moment d'inertie  $I_{x_2}$  :

$$I_{x_1} = I_{x_2} + y_G^2 A$$

Alors :

On trouve :

$$I_{x_2} = \frac{128 - 9\pi}{144\pi} ch^3 = 0.08659258ch^3 \quad (III.26)$$

5) Détermination de la variation de la contrainte

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

• Intervalle de variation de l'ordonnée  $y_2$  :

On a :

$$-y_G \leq y_2 \leq y_G$$

$$-\frac{y_G}{h} \leq \frac{y_2}{h} \leq 1 - \frac{y_G}{h}$$

- Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

On a d'après la figure :

$$y_2 + y_G = h \cos \frac{\pi b}{4c}$$

$$f(b) = \cos \frac{\pi b}{4c} - \frac{y_2}{h} - \frac{y_G}{h} = 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi b}{4c} \right) = \frac{y_2}{h} + \frac{y_G}{h} \quad ;$$

$$\frac{\pi b}{4c} = \arccos \left( \frac{y_2}{h} + \frac{y_G}{h} \right)$$

(III.27)

$$\frac{4(y_2)}{c} = \frac{4}{\pi} \arccos \left( \frac{y_2}{h} + \frac{y_G}{h} \right)$$

- Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

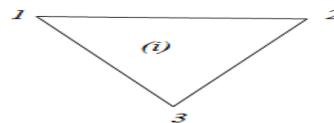
$$S_{x_2}^* = \int_{y_2}^{c-y_G} y_2 dA^* = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

Avec : NT : le nombre de triangle donnée dans le premier quadrant.

$AT(i)$  : Surface du triangle (i)  $i = 1, 2, 3, \dots, NT$

$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$i = 1, 2, 3, \dots, NT$



a) Pour un triangle(i) on a :

$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$

b) Position des nœuds dans le repéré  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale de nœuds est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

Par raison de symétrie par rapport a l'axe  $Gy_2$  on discrétise

Uniquement le premier quadrant ensuite on multipliant le résultat par deux.

On choisi la distribution suivante :

$$\frac{x_1}{a} = 0 ; \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

$$\Delta x = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{NT}$$

$$\frac{x_i}{h} = \frac{b}{2} - (i-2)\Delta x$$

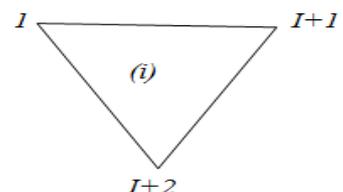
$$\frac{y_i}{h} = \cos\left(\frac{\pi x_i}{2 c}\right) \quad i = 2,3,4,\dots,NN$$

c) Numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans

le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i = 1,2,3,\dots,NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{ch^2} = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{ch} \right) \left( \frac{y_{GT}T(i)}{h} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{c} - \frac{x(1)}{c} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{h} - \frac{y(1)}{h} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{h} - \frac{y(1)}{h} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{c} - \frac{x(1)}{c} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GTi}}{c} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{c} + \frac{y(i+1)}{c} + \frac{y(i+2)}{c} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{ch} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{ch^2}}{\left( \frac{I_{x_2}}{ch^3} \right) \left( \frac{b(y_2)}{c} \right)} \right\}$$

### 6. Section de forme lemniscate horizontale.

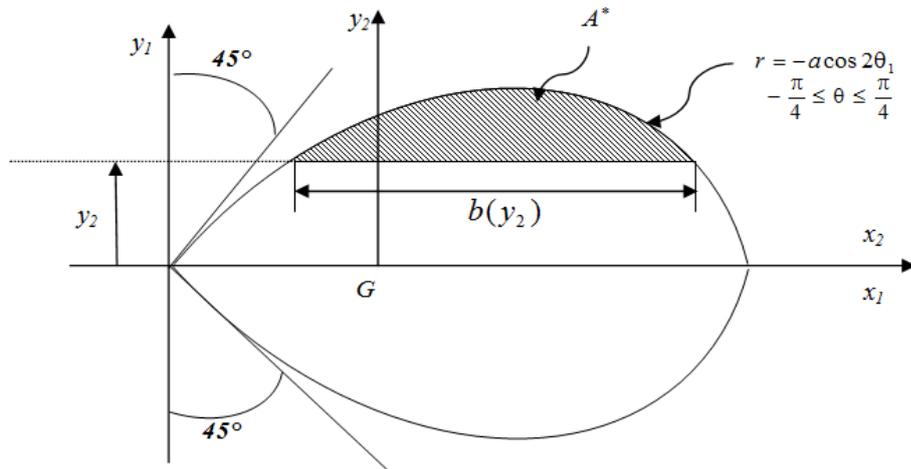


Fig. (III.10) : Section de forme lemniscate horizontale.

1. L'aire totale de la section :

$$A = \frac{\pi}{8} a^2 = 0.392699081a^2 \quad (III.28)$$

2. Le centre de gravité de la section :

$$x_G = \frac{128}{105} \frac{\sqrt{2}}{\pi} a = 0.54876423a \quad (III.29)$$

3. Le moment d'inertie  $I_{x_2}$

$$I_{x_2} = \frac{45\pi + 128}{1920} a^4$$

$$I_{x_2} = 0.006964411a^4 \quad (III.30)$$

4. Détermination de la variation de la contrainte

On a :

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $ox_2$  on a :

$$\tau(y_2) = \tau(-y_2) \text{ , pour cela on s'intéresse uniquement pour } y_2 \geq 0$$

• L'intervalle de variation de l'ordonnée  $y_2$  :

On a :

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$y_1 = r \sin \theta$$

Avec :  $r = a \cos 2\theta \sin \theta$

$$\frac{dy_1}{d\theta} = 0 \quad ; \quad -2 \cos 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta = 0$$

$$2 \tan 2\theta \tan \theta = 1$$

$$2 \left( \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right) \tan \theta = 1 \quad ; \quad \left( \frac{4 \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right) = 1$$

$$4 \tan^2 \theta = 1 - \tan^2 \theta \quad ; \quad 5 \tan^2 \theta = 1 \quad ; \quad \tan^2 \theta = \frac{1}{5} \quad ;$$

$$\theta = 24.09484255^\circ = 0.420534335 \text{ rad}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \left( \frac{1}{5} \right) \left( \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Alors :

$$y_{\max} = a \left( \frac{4}{6} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = a \frac{4 \sqrt{6}}{6 \cdot 6} = a \frac{\sqrt{6}}{9} = 0.272165527a \quad (III.31)$$

Alors :

$$-\frac{\sqrt{6}}{9} \leq \frac{y_2}{a} \leq \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$-0.272165527 \leq \frac{y_2}{a} \leq 0.272165527$$

- Détermination des valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

On a  $0 \leq \theta_1 \leq 0.420534335rad$

$$0.420534335rad \leq \theta_1 \leq 0.785398163rad$$

$$\begin{aligned} y_2 &= r \sin \theta_1 \\ &= (a \cos 2\theta_1) \sin \theta_1 \\ &= a \cos 2\theta_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$\frac{y_2}{a} = \cos 2\theta_1 \sin \theta_1 \quad ; \quad \theta_1 \in [0, \theta_m] \quad ; \quad \theta_m = 0.420534335rad$$

De même :  $\frac{y_2}{a} = \cos 2\theta_2 \sin \theta_2 \quad ; \quad \theta_2 \in \left[ \theta_m, \frac{\pi}{4} \right] \quad ; \quad \theta_m = 0.420534335rad$

Pour  $\frac{y_2}{a}$  donné dans l'intervalle  $\left[ 0, \frac{\sqrt{6}}{9} \right]$  on calcule  $\theta_1$  dans l'intervalle  $[0, \theta_m]$  et  $\theta_2$

dans l'intervalle  $\left[ \theta_m, \frac{\pi}{4} \right]$  qui annulent respectivement

$$f(\theta_1) = \frac{y_2}{a} - \cos 2\theta_1 \sin \theta_1 = 0$$

$$g(\theta_2) = \frac{y_2}{a} - \cos 2\theta_2 \sin \theta_2 = 0$$

Pour cela on utilise la méthode de bipartition "dichotomie" par voie numérique

a) Détermination de  $\theta_1$  :

$$\theta_a = 0 \quad ; \quad f(\theta_a) \geq 0$$

$$\theta_b = \theta_m \quad ; \quad f(\theta_b) \leq 0 \quad \text{avec} \quad f(\theta_a) \cdot f(\theta_b) \leq 0$$

$$\exists \theta_1 \in [\theta_a, \theta_b] \text{ pour que } f(\theta_1) = 0$$

b) Détermination de  $\theta_2$  :

$$\theta_a = \theta_m ; g(\theta_a) \leq 0$$

$$\theta_b = \frac{\pi}{4} ; g(\theta_b) \geq 0 \quad \text{avec } g(\theta_a) \cdot g(\theta_b) \leq 0$$

$$\exists \theta_2 \in [\theta_a, \theta_b] \text{ pour que } g(\theta_2) = 0$$

• Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

$$\begin{aligned} b(y_2) &= r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2 \\ &= (a \cos 2\theta_1) \cos \theta_1 - (a \cos 2\theta_2) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{b(y_2)}{a} = \cos 2\theta_1 \cdot \cos \theta_1 - \cos 2\theta_2 \cdot \cos \theta_2$$

• Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

$$\begin{aligned} S_{x_2}^*(y_2) &= \int_{y_2}^{\frac{\sqrt{6}}{9}a} y_2 dA^* \\ &\approx 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i) \end{aligned}$$

Avec NT : le nombre de triangle donné.

$AT(i)$  : Surface du triangle (i)  $i = 1,2,3,\dots,NT$

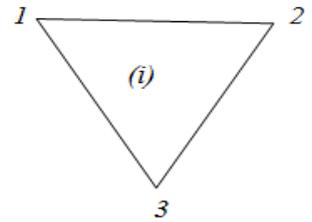
$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$i = 1,2,3,\dots,NT$

a) Pour un triangle(i) on a :

$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$



b) Position des nœuds dans le repéré  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale de nœuds  $NN$  est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

On choisit la distribution suivante :

Pour obtenir les positions des nœuds :

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\left( \frac{b(y_2)}{a} \right)}{2} + \cos 2\theta_2 \cos \theta_2 - \frac{x_G}{a} \quad (\text{Au milieu de la largeur } b(y_2))$$

$$; \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{NT} = 0$$

$$\theta = \theta_1 + (i-2)\Delta\theta$$

$$\frac{R}{a} = -\cos(2\theta) \quad i = 2,3,4,\dots,NN$$

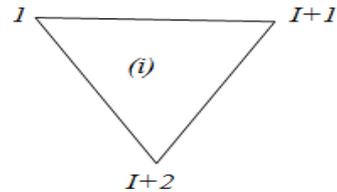
$$\frac{x_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right) \cos \theta - \frac{x_G}{a}$$

$$\frac{y_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right) \sin \theta$$

c) numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i=1,2,3,\dots,NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{a^2} \right) \left( \frac{y_{GT}(i)}{a} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GT}(i)}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{S_{x_2}^*}{a^3} \right\} \left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y_2)}{a} \right)$$

**7. section de forme losangée droite.**

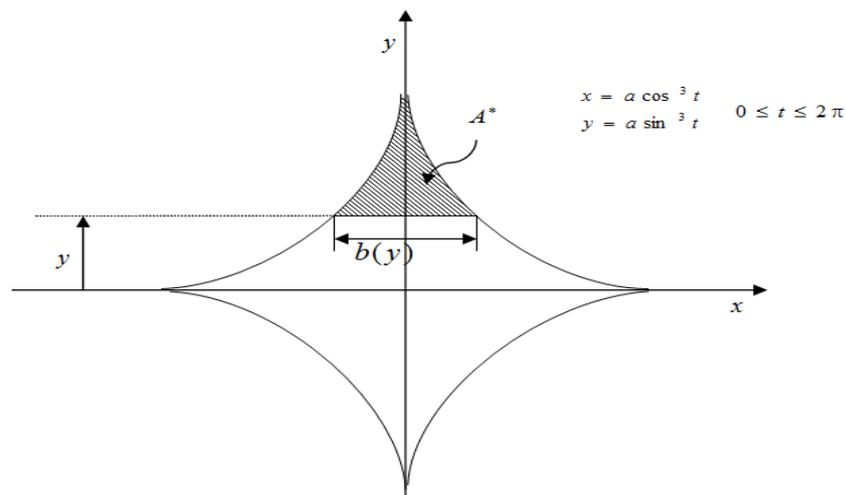


Fig. (III.11) : section de forme losangée droite.

1) Détermination de l'aire totale de la section :

$$A = \int_A dA = \iint_A dx dy = \int_A y dx = -4 \int_0^{\pi/2} (a \sin^3 t) \{3a \cos^2 t\} (-\sin t) dt$$

$$= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \quad (III.32)$$

Connaissant que :

$$\sin^4 t = \frac{1}{8}(\cos 4t - 4\cos 2t + 3)$$

Et 
$$\sin^6 t = \frac{1}{32}(-\cos 6t + 6\cos 4t - 15\cos 2t + 10)$$

Alors :

$$\begin{aligned} A &= 12a^2 \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{\sin 4t}{4} - 4 \frac{\sin 2t}{2} + 3t \right) - \frac{1}{32} \left( -\frac{\sin 6t}{6} + 6 \frac{\sin 4t}{4} - 15 \frac{\sin 2t}{2} + 10t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 12a^2 \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{10}{32} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{3}{8} \pi a^2 \end{aligned}$$

$$A = \frac{3\pi}{8} a^2 \quad (III.33)$$

2) Détermination du moment d'inertie  $I_x$  :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \iint_A y^2 dx dy = \int \left[ \int y^2 dy \right] dx = \int_A \frac{1}{3} y^3 dx \\ &= \frac{1}{3} 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \sin^3 t)^3 \{3a \cos^2 t\} (-\sin t) dt = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t \cos^2 t \sin t dt \\ &= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} t \cos^2 t dt = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin^{10} t - \sin^{12} t\} dt \\ &= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{63}{256} - \frac{231}{1024} \right\} dt = \frac{21}{1024} 4 \left( \frac{\pi}{2} \right) a^4 \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{21}{512} \pi a^4 = 0.128854386a^4 \quad (III.34)$$

3) Détermination de la variation de la contrainte

On a :

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $ox$  on a :

$$\tau(y) = \tau(-y) \quad ; \quad \text{Pour cela on s'intéresse uniquement pour } y \geq 0$$

- Intervalle de variation de l'ordonnée  $y_2$  :

$$t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = 0$$

$y = a$  alors

$$-a \leq y \leq a$$

$$-1 \leq \frac{y}{a} \leq 1$$

- Détermination de la fonction  $b(y)$  :

Pour  $b(y)$  donnée dans l'intervalle  $[0,1]$  ("moitié supplémentaire")

$$\frac{b(y)}{2} = a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t$$

$$\frac{y}{a} = \sin^3 t \quad , \quad \sin t = \left( \frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Connaissant que :

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad ; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\frac{b(y)}{2} = a \left[ 1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Donc :

$$\frac{b(y)}{2} = a \left[ 1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \quad 0 \leq \frac{y}{a} \leq 1$$

- Détermination de  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieure  $A^*$  en des triangles.

$$S_{x_2}^* = \int_y^{a-y} y \, dA^* = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_x^*(i) = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

Avec :  $NT$  : le nombre de triangle donné dans le premier quadrant.

$AT(i)$  : Surface du triangle (i)  $i = 1, 2, 3, \dots, NT$

$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$i = 1, 2, 3, \dots, NT$

a) Pour un triangle(i) on a :

$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$

b) Position des nœuds dans le repère  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale de nœuds est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $oy$  on discrétise uniquement le premier quadrant ensuite on multiple le résultat par deux.

On choisit la distribution suivante :

$$\frac{x_1}{a} = 0 ; \quad \frac{y_1}{a} = \frac{y}{a}$$

$$\Delta x = \frac{\left(\frac{b(y)}{a}\right)}{2NT}$$

$$\frac{x_i}{a} = \frac{\left(\frac{b(y)}{a}\right)}{2} - (i-2)\Delta x$$

$$\frac{y_i}{a} = \left[1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} \quad i = 2,3,4,\dots,NN$$

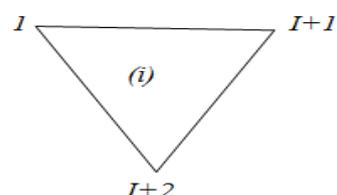
c) numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i = 1,2,3,\dots,NT)$$

Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \left(\frac{AT(i)}{a^2}\right) \left(\frac{y_G T(i)}{a}\right)$$



Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et 
$$\frac{y_{GT_i}}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{a^3}}{\left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y)}{a} \right)} \right\}$$

### 8. section de forme arc de cycloïde.

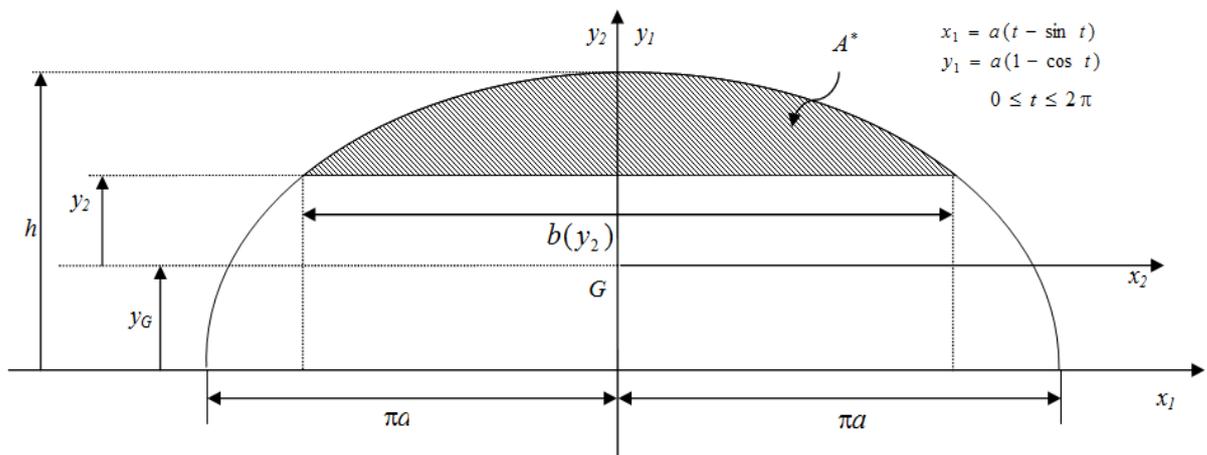


Fig. (III.12) : section de forme arc de cycloïde.

1. L'aire totale de la section :

$$A = 3\pi a^2 \quad (III.35)$$

2. Le centre de gravité de la section :

$$x_G = \pi a \quad ; \quad y_G = \frac{5}{6} a \quad (III.36)$$

3. Le moment d'inertie  $I_{x_2}$  :

$$I_{x_2} = \frac{5}{6} \pi a^4 \quad (III.37)$$

$$I_{y_2} = \frac{\pi}{12} (12\pi^2 - 35) a^4$$

4. Détermination de la variation de la contrainte

On a :

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

• L'intervalle de la variation de l'ordonnée  $y_2$  :

On a :

$$-y_G \leq y_2 \leq 2a - y_G$$

Alors :

$$-\frac{y_G}{a} \leq \frac{y_2}{a} \leq 2 - \frac{y_G}{a}$$

Ou :

$$-\frac{5}{6} \leq \frac{y_2}{a} \leq \frac{7}{6}$$

• Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

On a pour  $\frac{y_2}{a}$  donne:

$$\begin{cases} \frac{y_2}{a} + \frac{y_G}{a} = 1 - \cos t \\ \frac{\left(\frac{b(y_2)}{2}\right)}{a} = -t + \sin t + \frac{x_G}{a} \end{cases}$$

Alors :

$$\cos t = 1 - \frac{y_2}{a} - \frac{y_G}{a} = 1 - \frac{y_2}{a} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} - \frac{y_2}{a}$$

$$t = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{y_2}{a}\right)$$

Et :

$$\frac{b(y_2)}{a} = 2\left\{-t + \sin t + \frac{x_G}{a}\right\} = 2\{-t + \sin t + \pi\}$$

Alors :

$$\begin{cases} t_1 = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{y_2}{a}\right) \\ \frac{b(y_2)}{a} = 2\{-t + \sin t + \pi\} \end{cases} \quad 0 \leq t_1 \leq \pi$$

- Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

Par raison de symétrie par rapport a l'axe  $Gy_2$  on discrétise

Uniquement le premier quadrant ensuite on multipliant le résultat de  $S_{x_2}^*(y_2)$  par deux.

$$S_{x_2}^*(y_2) = \int_{y_2}^{2a-y_G} y_2 dA^*$$

$$\approx 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

Avec  $NT$  : le nombre de triangle donné dans le premier quadrant.

$AT(i)$  : surface du triangle (i)  $i = 1, 2, 3, \dots, NT$

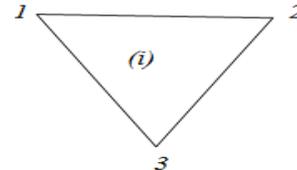
$y_{GT}(i)$  : coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$$i = 1, 2, 3, \dots, NT$$

a) Pour un triangle(i) on a :

$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$



b) Position des nœuds dans le repéré  $Gx_2, y_2$  :

Le nombre totale de nœuds est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

On choisit la distribution suivante :

$$\frac{x_1}{a} = 0 ; \quad \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

$$t_2 = 2\pi - t_1$$

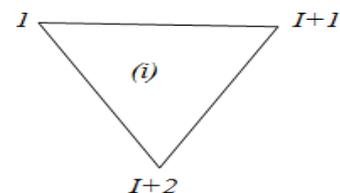
$$\Delta t = \frac{t_2 - \pi}{NT}$$

$$\begin{cases} t = t_2 + (i-2)\Delta t \\ \frac{x_i}{a} = t - \sin t - x_G \\ \frac{y_i}{a} = t - \cos t - y_G \end{cases} \quad i = 2, 3, 4, \dots, NN$$

c) numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = 2 \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{a^2} \right) \left( \frac{y_{GT}(i)}{a} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GT_i}}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{a^3}}{\left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y_2)}{a} \right)} \right\}$$

### 9. Section de forme d'une cycloïde verticale.

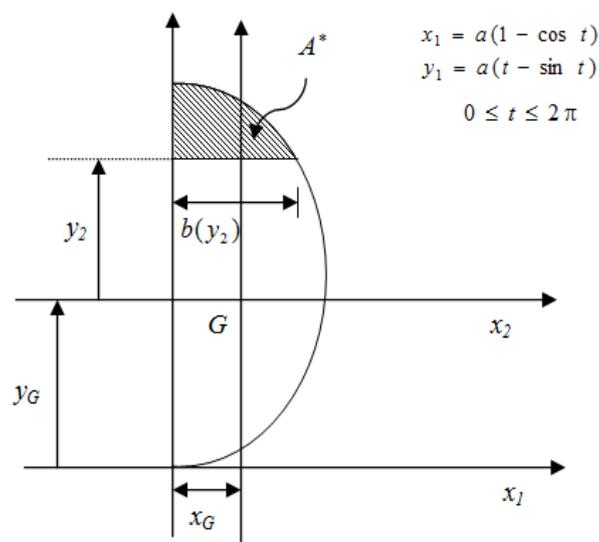


Fig. (III.1) : Section de forme d'une cycloïde verticale.

1. L'aire totale de la section :

$$A = 3\pi a^2$$

2. Le centre de gravité de la section :

$$x_G = \frac{5}{6}a \quad ; \quad y_G = \pi a$$

3. Le moment d'inertie  $I_{x_2}$  :

$$I_{x_2} = \frac{\pi}{12} (12\pi^2 - 35)a^4 \quad (III.38)$$

4. Détermination de la variation de la contrainte

On a :

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

- L'intervalle de variation de l'ordonnée  $y_2$  :

On a :

$$-y_G \leq y_2 \leq 2\pi a - y_G$$

$$-\pi a \leq \frac{y_2}{a} \leq \pi a$$

$$-\pi \leq \frac{y_2}{a} \leq \pi$$

- Détermination de la valeur de  $t_2$  correspondant a  $y_2$  :

$$y_2 + y_G = a(t_2 - \sin t_2) \quad ; \quad \pi \leq t_2 \leq 2\pi$$

$$\frac{y_2}{a} + \frac{y_G}{a} = t_2 - \sin t_2 \quad ; \quad \pi \leq t_2 \leq 2\pi$$

$$f(t_2) = t_2 - \sin t_2 - \frac{y_2}{a} - \frac{y_G}{a} = 0$$

$$f(t_2) = t_2 - \sin t_2 - \frac{y_2}{a} - \pi = 0$$

Pour cela on utilise la méthode de bipartition par voie numérique :

$$t_a = \pi \quad ; \quad f_a \leq 0$$

$$t_b = 2\pi \quad ; \quad f_b \geq 0 \quad \text{avec} \quad f_a(t_a) \cdot f_b(t_b) \leq 0$$

$$\exists t_2 \in [t_a, t_b] \quad \text{pour que} \quad f(t_2) = 0$$

- Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

On a :

$$b(y_2) = x_1(t_2)$$

$$= a(1 - \cos t_2)$$

$$\frac{b(y_2)}{a} = 1 - \cos t_2$$

- Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

$$S_{x_2}^*(y_2) = \int_{y_2}^{\pi a} y_2 dA^*$$

$$\approx \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

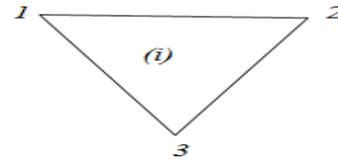
Avec  $NT$  : le nombre de triangle donné dans le premier quadrant.

$AT(i)$  : surface du triangle (i)  $i = 1,2,3,\dots,NT$

$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$i = 1,2,3,\dots,NT$

a) Pour un triangle(i) on a :



$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$

b) Position des nœuds dans le repéré  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale de nœuds dans la discrétisation est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

On choisit la distribution suivante :

$$\frac{x_1}{a} = -X_G = -\frac{5}{6} ; \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

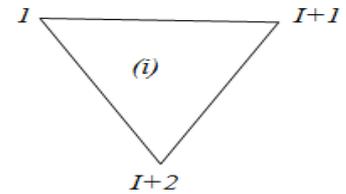
$$\Delta t = \frac{2\pi - t_2}{NT}$$

$$\begin{cases} t = t_2 + (i-2)\Delta t \\ \frac{x_i}{a} = t - \cos t - x_G \\ \frac{y_i}{a} = t - \sin t - y_G \end{cases} \quad i = 2,3,4,\dots,NN$$

c) numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i=1,2,3,\dots,NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{a^2} \right) \left( \frac{y_{GT}(i)}{a} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GT_i}}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{a^3}}{\left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y_2)}{a} \right)} \right\}$$

### 10. Section de forme cardioïde horizontale.

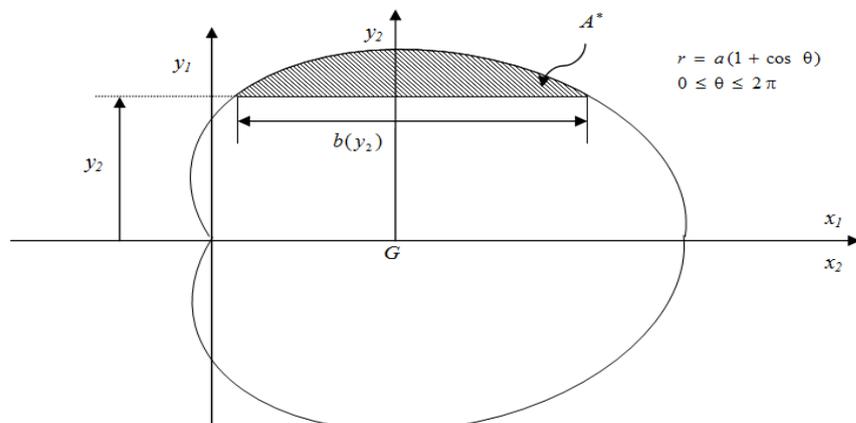


Fig. (III.13) : Section de forme cardioïde horizontale.

1. L'aire totale de la section :

$$A = \frac{3\pi}{2} a^2$$

2. Le centre de gravité de la section :

$$x_G = \frac{5}{6} a$$

3. Le moment d'inertie  $I_{x_2}$

$$I_{x_2} = \frac{21}{32} \pi a^4$$

4. Détermination de la variation de la contrainte

On a :

$$\tau(y_2) = \frac{TS_{x_2}^*(y_2)}{I_{x_2} b(y_2)}$$

Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $ox_2$  on a :

$$\tau(y_2) = \tau(-y_2) \text{ , pour cela on s'intéresse uniquement pour } y_2 \geq 0$$

- L'intervalle de la variation de l'ordonnée  $y_2$  :

On a :

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$y_1 = r \sin \theta$$

Avec :

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

Alors :

$$y_1 = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dy_1}{d\theta} = 0 \quad ; \quad -\sin \theta \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = 0$$

$$-\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta = 0$$

$$2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad ; \quad \theta_m = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Pour  $\theta = \pi$  ;  $y_1 = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad y_1 = a \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a$$

Alors :

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq \frac{y_2}{a} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$-0.272165527 \leq \frac{y_2}{a} \leq 0.272165527$$

- Détermination des valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

On a  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta_2 \leq \pi$$

$$y_2 = r \sin \theta_1$$

$$= a(1 + \cos \theta_1) \sin \theta_1$$

$$\frac{y_2}{a} = (1 + \cos \theta_1) \sin \theta_1 \quad ; \quad \theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

De même :

$$\frac{y_2}{a} = (1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \quad ; \quad \theta_2 \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Pour  $\frac{y_2}{a}$  donné dans l'intervalle  $\left[0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$  on calcule  $\theta_1$  dans l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  et

$\theta_2$  dans l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  qui annulent respectivement

$$f(\theta_1) = \frac{y_2}{a} - (1 + \cos \theta_1) \sin \theta_1 = 0$$

$$g(\theta_2) = \frac{y_2}{a} - (1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 = 0$$

Pour cela on utilise la méthode de bipartition "dichotomie" par voie numérique

c) Détermination de  $\theta_1$  :

$$\theta_a = 0 ; f(\theta_a) \geq 0$$

$$\theta_b = \frac{\pi}{3} ; f(\theta_b) \leq 0 \quad \text{avec } f(\theta_a) \cdot f(\theta_b) \leq 0$$

$$\exists \theta_1 \in [\theta_a, \theta_b] \text{ pour que } f(\theta_1) = 0$$

d) Détermination  $\theta_2$  :

$$\theta_a = \frac{\pi}{3} ; g(\theta_a) \leq 0$$

$$\theta_b = \pi ; g(\theta_b) \geq 0 \quad \text{avec } g(\theta_a) \cdot g(\theta_b) \leq 0$$

$$\exists \theta_2 \in [\theta_a, \theta_b] \text{ Pour que } g(\theta_2) = 0$$

- Détermination de la fonction  $b(y_2)$  :

$$b(y_2) = r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2$$

$$= a(1 + \cos \theta_1) \cos \theta_1 - a(1 + \cos \theta_2) \cos \theta_2$$

Alors : 
$$\frac{b(y_2)}{a} = (1 + \cos \theta_1) \cos \theta_1 - (1 + \cos \theta_2) \cos \theta_2$$

- Détermination  $S_{x_2}^*(y_2)$  :

On détermine le moment statique  $S_{x_2}^*(y_2)$  numériquement on discrétise la section supérieur  $A^*$  en des triangles.

$$S_{x_2}^*(y_2) = \int_{y_2}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} y_2 dA^*$$

$$\approx \sum_{i=1}^{i=NT} \Delta S_{x_2}^*(i) = \sum_{i=1}^{i=NT} AT(i) \cdot y_{GT}(i)$$

Avec  $NT$  : le nombre de triangle donné.

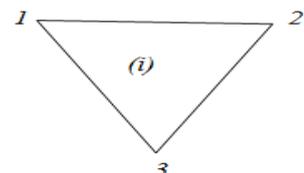
$AT(i)$  : Surface du triangle (i)  $i = 1, 2, 3, \dots, NT$

$y_{GT}(i)$  : Coordonnée  $y_G$  du centre de gravité du triangle (i)

$i = 1, 2, 3, \dots, NT$

a) Pour un triangle(i) on a :

$$AT(i) = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$



$$y_{GT}(i) = \frac{1}{3} \{y_1 + y_2 + y_3\}$$

b) La position des nœuds dans le repère  $Gx_2y_2$  :

Le nombre totale des nœuds  $NN$  est déterminé par :

$$NN = NT + 2$$

On choisit la discrétisation suivante :

Pour obtenir les positions des nœuds :

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\left(\frac{b(y_2)}{a}\right)}{2} + (1 + \cos \theta_2) \cos \theta_2 - \frac{x_G}{a} ; \quad \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{NT}$$

$$\theta = \theta_1 + (i - 2)\Delta\theta$$

$$\frac{R}{a} = 1 + \cos \theta \quad i = 2, 3, 4, \dots, NN$$

$$\frac{x_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right) \cos \theta - \frac{x_G}{a}$$

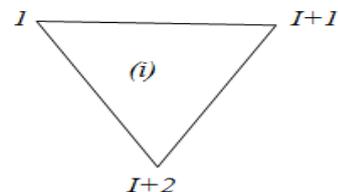
(III.39)

$$\frac{y_i}{a} = \left(\frac{R}{a}\right) \sin \theta$$

c) La numérotation des nœuds de chaque triangle :

Les nœuds de chaque triangle (i) ; sont numérotés dans le sens antihoraire par :

$$i, i+1, i+2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, NT)$$



Finalement :

$$\frac{S_{x_2}^*}{a^3} = \sum_{i=1}^{i=NT} \left( \frac{AT(i)}{a^2} \right) \left( \frac{y_{GT}(i)}{a} \right)$$

Avec :

$$\frac{AT(i)}{a^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x(i+1)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \left[ \frac{y(i+2)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] - \left[ \frac{y(i+1)}{a} - \frac{y(1)}{a} \right] \left[ \frac{x(i+2)}{a} - \frac{x(1)}{a} \right] \right\}$$

Et

$$\frac{y_{GT}(i)}{a} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{y(1)}{a} + \frac{y(i+1)}{a} + \frac{y(i+2)}{a} \right\}$$

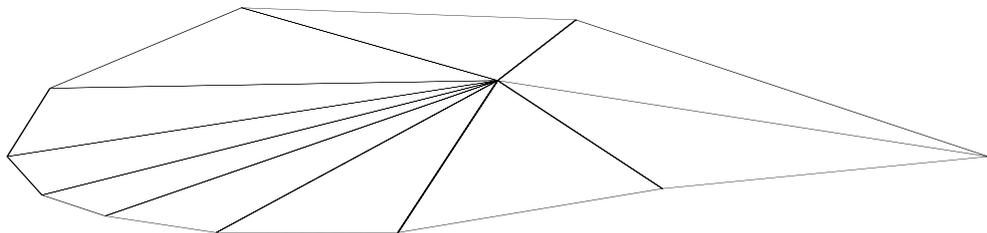
D'où :

$$\tau(y_2) = \frac{T}{a^2} \left\{ \frac{\frac{S_{x_2}^*}{a^3}}{\left( \frac{I_{x_2}}{a^4} \right) \left( \frac{b(y_2)}{a} \right)} \right\}$$

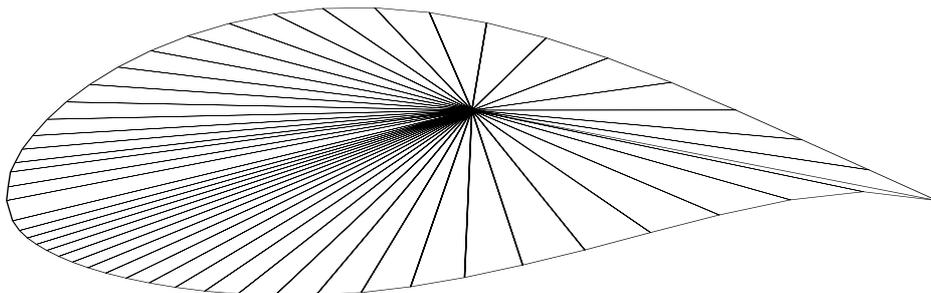
**CHAPITRE IV :****RESULTATS ET COMMENTAIRES**

*Ce quatrième chapitre présente l'ensemble des résultats des exemples déjà donnés au chapitre précédent qui ont été réalisés par un programme en langage Fortran 90.*

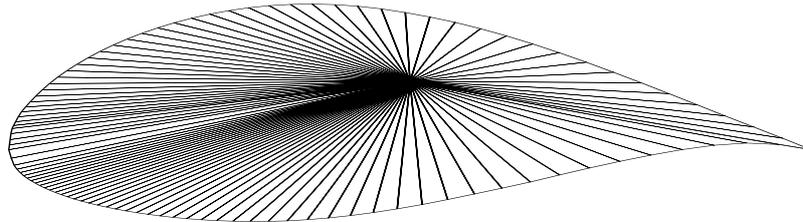
*Dans les figures (IV.1), (IV.2), (IV.3), (IV.4) et (IV.5) on a pris les paramètres suivants  $P=1.9$ ,  $Q=2.00$  pour l'extrados et  $P=0.01$ ,  $Q=2.00$  pour le coté intrados. Notons que la numérotation des nœuds sur l'extrados commence de bord de fuite vers le bord d'attaque tandis que pour l'intrados, la numérotation des nœuds commence de bord d'attaque vers le bord de fuite. Le maillage est fait de telle manière qu'il y a une condensation des nœuds vers le bord d'attaque pour avoir l'arrondissement de la courbure. Cette procédure est importante surtout pour les profils d'ailes subsonique et transsonique.*



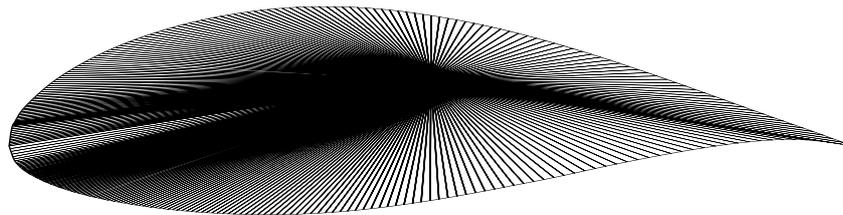
*Fig (IV.1): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec  $NT=10$ .*



Fig(IV.2): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec  $NT=50$ .



Fig(IV.3): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec  $NT=100$ .



Fig(IV.4) : Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec  $NT=300$ .

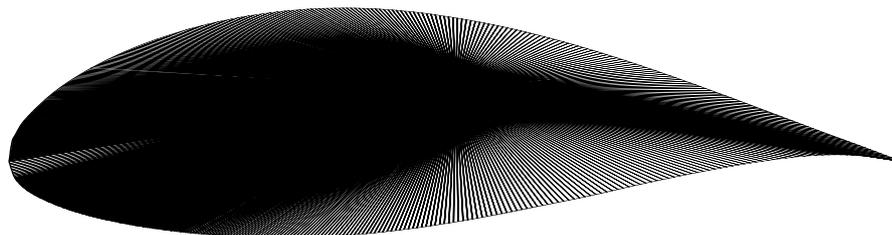
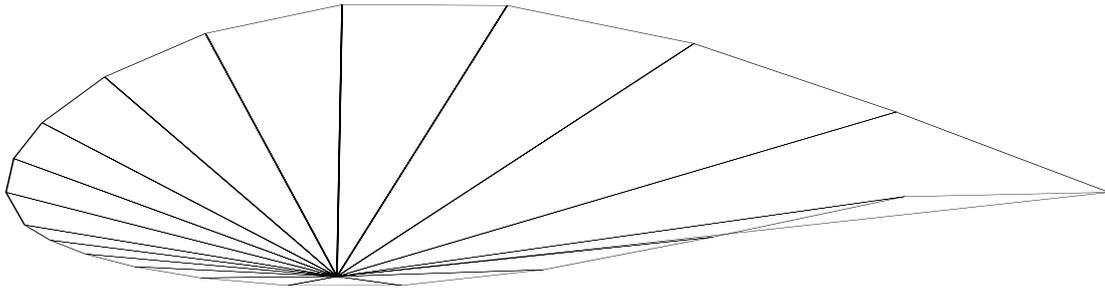


Figure (IV.5): Maillage triangulaire dans la surface d'un profil d'aile avec  $NT=600$ .

Par exemple, pour la figure (IV.6) suivante, le point  $P$  interne n'est pas visible pour les deux derniers segments de l'intrados adjacent au bord de fuite. Alors cette configuration est plus valable pour le calcul des caractéristiques géométriques.



Fig(IV.6) : Position de point interne dans le cas où il n'est plus visible pour le dernier segment de l'intrados.

Sur les figures (IV.1), (IV.2), (IV.3), (IV.4) et (IV.5), l'échelle n'est pas choisie orthonormée pour bien voir la distribution des nœuds sur la frontière.

Le profil choisi dans ces figures est celui le NACA 63-412 non symétrique avec cambrure, dont les points de la définition de la géométrie sont présentés dans la table 1. Notons que ce profil est présenté par 26 points sur chaque cotés. Les data points des profils présentés dans la table (IV.3) se trouvent dans les références [5] et [11].

Les points de la table (IV.1) sont utilisés pour déterminer la fonction analytique de l'extrados et de l'intrados en utilisant l'interpolation cubique spline.

Table (IV.1) : Points de définition de la surface de profil d'aile NACA 63-412.

<b>Extrados</b>			<b>Intrados</b>		
<b>En (%) de C</b>			<b>En (%) C</b>		
	<b>x/C (%)</b>	<b>y/C (%)</b>		<b>x/C (%)</b>	<b>y/C (%)</b>
<b>01</b>	0.000	0.000	<b>01</b>	0.000	0.000
<b>02</b>	0.336	1.071	<b>02</b>	0.664	-0.871
<b>03</b>	0.567	1.320	<b>03</b>	0.933	-1.040
<b>04</b>	1.041	1.719	<b>04</b>	1.459	-1.291
<b>05</b>	2.257	2.460	<b>05</b>	2.743	-1.716
<b>06</b>	4.727	3.544	<b>06</b>	5.273	-2.280
<b>07</b>	7.218	4.379	<b>07</b>	7.782	-2.685
<b>08</b>	9.718	5.063	<b>08</b>	10.282	-2.995
<b>09</b>	14.735	6.138	<b>09</b>	15.265	-3.446
<b>10</b>	19.765	6.929	<b>10</b>	20.235	-3.745
<b>11</b>	24.800	7.499	<b>11</b>	25.200	-3.919
<b>12</b>	29.840	7.872	<b>12</b>	30.160	-3.984
<b>13</b>	34.882	8.059	<b>13</b>	35.111	-3.939
<b>14</b>	39.924	8.062	<b>14</b>	40.076	-3.778

<b>15</b>	44.964	7.894	15	45.035	-3.514
<b>16</b>	50.000	7.567	16	50.000	-3.164
<b>17</b>	55.031	7.125	17	54.969	-2.745
<b>18</b>	60.057	6.562	18	59.943	-2.278
<b>19</b>	5.076	5.899	19	64.924	-1.799
<b>20</b>	70.087	5.153	20	69.913	-1.265
<b>21</b>	75.089	4.344	21	74.911	-0.764
<b>22</b>	80.084	3.492	22	79.916	-0.308
<b>23</b>	85.070	2.618	23	84.930	0.074
<b>24</b>	90.049	1.739	24	89.951	0.329
<b>25</b>	95.023	0.881	25	94.977	0.330
<b>26</b>	100.000	0.000	26	100.000	0.000

Le deuxième problème consiste à justifier la convergence des résultats numériques vers la solution exacte. On prend l'exemple d'un demi-cercle de rayon  $R=1.00$  placé à l'origine de coordonnées. On s'intéresse uniquement à la convergence des valeurs de  $A$ ,  $y_G$ ,  $I_x'$ ,  $I_y'$  et  $I_{xy}'$  puisque elles dépendent de la discrétisation. Dans ce cas  $x_G=0.0$  et  $I_{xy}'=0.00$  par raison de symétrie. Si les paramètres convergent alors les autres paramètres comme  $I_{xy}'$  convergent aussi, sauf qu'ici on a pris un exemple d'une section symétrique. On peut déduire les autres paramètres comme  $I_{max}$  et  $I_{min}$  ainsi que l'orientation des axes principaux d'inerties, par l'application des relations analytiques [1], [2], [3] et [4]. Les résultats sur l'aire de la section sont normalisées par le carré de la valeur de la corde de profil. Concernant le centre de gravité, il est normalisé par la corde du profil.

Pour les moments d'inerties, les résultats sont normalisés par  $C^4$ . Les résultats trouvés sont présentés dans la table (IV.2).

Table (IV.2) : Effet de la discrétisation sur la convergence

NN	$A/C^2$	$y_G/C$	$I_x'/C^4$	$I_y'/C^4$
10	1.366025	0.410683	0.095860	0.273424
50	1.556667	0.425612	0.108811	0.380670
100	1.565860	0.425038	0.109356	0.388254
200	1.569144	0.424676	0.109594	0.391161
500	1.570370	0.424495	0.109706	0.392290
1000	1.570705	0.424431	0.109745	0.392612
3000	1.570793	0.424414	0.109755	0.392696
8000	1.570802	0.424413	0.109756	0.392704
10000	1.570802	0.424413	0.109756	0.392704

On remarque à partir de cette table (IV.2), que l'aire de la section converge vers la section exacte avant la convergence de  $y_G$  ensuite  $I_x'$  et  $I_y'$ . Pour avoir une précision de  $\epsilon=10^{-6}$ , il faut environ une discrétisation de 7000 points pour cette section.

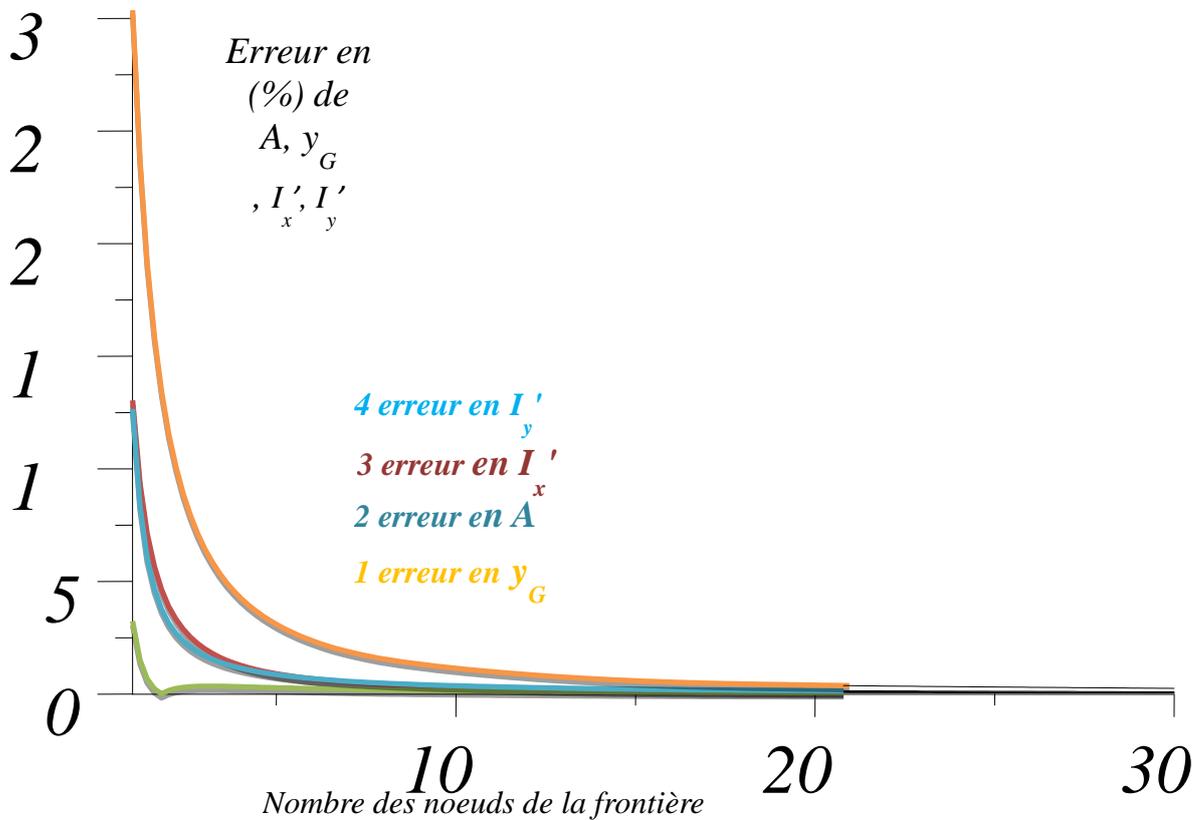


Fig. (IV.7) : Erreur relative des paramètres  $A, y_G, I_x'$  et  $I_y'$  en fonction de nombre de points de la frontière.

La figure (IV.1) représente l'erreur relative sur les paramètres  $A$ ,  $y_G$ ,  $I_x'$  et  $I_y'$  en fonction de nombre de points sur la frontière de domaine. On remarque que la convergence est faite d'une façon monotone et que la valeur de  $y_G$  convergence en premier lieu ensuite l'aire de la section ensuite moment d'inertie central  $I_x'$  et en fin le moment d'inertie central  $I_y'$ .

Table (IV.3) : Aire de la section des différents profils d'ailes.

<b>N°</b>	<b>Profil d'aile</b>	<b>A/C<sup>2</sup></b>
<b>1</b>	<b>NACA0012</b>	<b>0.082055</b>
<b>2</b>	<b>NACA 63-412</b>	<b>0.075572</b>
<b>3</b>	<b>RAE 2822</b>	<b>0.077874</b>
<b>4</b>	<b>NACA 0010-34</b>	<b>0.070332</b>
<b>5</b>	<b>NACA 62</b>	<b>0.079999</b>
<b>6</b>	<b>RAF 30</b>	<b>0.084460</b>
<b>7</b>	<b>E-385</b>	<b>0.052908</b>
<b>8</b>	<b>NACA 23009</b>	<b>0.061020</b>
<b>9</b>	<b>NACA 2412</b>	<b>0.081935</b>
<b>10</b>	<b>NASA AMES A-01</b>	<b>0.073867</b>
<b>11</b>	<b>AQUILA 9.3%</b>	<b>0.062041</b>
<b>12</b>	<b>AVISTAR</b>	<b>0.098823</b>
<b>13</b>	<b>CHEN</b>	<b>0.080130</b>
<b>14</b>	<b>FAUVEL 14%</b>	<b>0.088348</b>
<b>15</b>	<b>EIFFEL 385</b>	<b>0.085813</b>
<b>16</b>	<b>WORTMANN FX 2</b>	<b>0.135732</b>
<b>17</b>	<b>NACA M1</b>	<b>0.043951</b>
<b>18</b>	<b>ONERA OA209</b>	<b>0.063816</b>
<b>19</b>	<b>OAF 128</b>	<b>0.077549</b>
<b>20</b>	<b>ONERA NACA CAMBRE</b>	<b>0.078835</b>
<b>21</b>	<b>NASA LANGLEY RC-08 B3</b>	<b>0.058713</b>

<b>22</b>	<i>NASA LANGLEY RC-08 N1</i>	<i>0.052830</i>
<b>23</b>	<i>TRAINER 60</i>	<i>0.117166</i>
<b>24</b>	<i>TSAGI 8%</i>	<i>0.055092</i>
<b>25</b>	<i>TSAGI 12%</i>	<i>0.082490</i>
<b>26</b>	<i>EPPLER 520</i>	<i>0.096675</i>
<b>27</b>	<i>EPPLER 635</i>	<i>0.076116</i>
<b>28</b>	<i>LOCKHEED L-188 ROOT</i>	<i>0.096874</i>
<b>29</b>	<i>NACA 63-415</i>	<i>0.093841</i>
<b>30</b>	<i>NACA 63-210</i>	<i>0.063168</i>
<b>31</b>	<i>NACA 64-108</i>	<i>0.050974</i>
<b>32</b>	<i>NASA LANGLEY 64-012</i>	<i>0.075871</i>

*Table (IV.4) : Position du centre de gravité des différentes sections*

<b>N°</b>	<b><math>x_G/C</math></b>	<b><math>y_G/C</math></b>
<b>1</b>	<i>0.420140</i>	<i>0.000000</i>
<b>2</b>	<i>0.408059</i>	<i>0.018247</i>
<b>3</b>	<i>0.423024</i>	<i>0.004443</i>
<b>4</b>	<i>0.456492</i>	<i>0.010800</i>
<b>5</b>	<i>0.424989</i>	<i>0.000000</i>
<b>6</b>	<i>0.417490</i>	<i>0.000000</i>
<b>7</b>	<i>0.395866</i>	<i>0.065633</i>
<b>8</b>	<i>0.416665</i>	<i>0.012368</i>
<b>9</b>	<i>0.420004</i>	<i>0.015671</i>
<b>10</b>	<i>0.427888</i>	<i>0.010394</i>
<b>11</b>	<i>0.412244</i>	<i>0.031870</i>

---

<b>12</b>	<i>0.431799</i>	<i>0.016442</i>
<b>13</b>	<i>0.406882</i>	<i>0.047129</i>
<b>14</b>	<i>0.391245</i>	<i>0.013107</i>
<b>15</b>	<i>0.396116</i>	<i>0.063444</i>
<b>16</b>	<i>0.448082</i>	<i>0.025545</i>
<b>17</b>	<i>0.435090</i>	<i>0.000000</i>
<b>18</b>	<i>0.422121</i>	<i>0.010153</i>
<b>19</b>	<i>0.380560</i>	<i>0.007638</i>
<b>20</b>	<i>0.424568</i>	<i>0.009142</i>
<b>21</b>	<i>0.448388</i>	<i>0.007719</i>
<b>22</b>	<i>0.429594</i>	<i>0.011036</i>
<b>23</b>	<i>0.402856</i>	<i>0.001122</i>
<b>24</b>	<i>0.434106</i>	<i>0.008528</i>
<b>25</b>	<i>0.434231</i>	<i>0.012695</i>
<b>26</b>	<i>0.411404</i>	<i>0.000000</i>
<b>27</b>	<i>0.412580</i>	<i>0.015713</i>
<b>28</b>	<i>0.433125</i>	<i>0.015941</i>
<b>29</b>	<i>0.406008</i>	<i>0.018335</i>
<b>30</b>	<i>0.409342</i>	<i>0.009139</i>
<b>31</b>	<i>0.417749</i>	<i>0.004563</i>
<b>32</b>	<i>0.415146</i>	<i>0.000000</i>

---

Table (IV.5) : Moments d'inerties centraux des différents profils d'ailes.

N°	$I_x'/C^4$ $\times 10^4$	$I_y'/C^4$ $\times 10^2$	$I_{xy}'/C^4$ $\times 10^4$	$I_P/C^4$ $\times 10^2$
1	0.680850	0.449961	0.000000	0.456769
2	0.626664	0.356460	0.333899	0.362727
3	0.656618	0.381017	0.734876	0.387583
4	0.419910	0.381014	0.091848	0.385213
5	0.658346	0.426943	0.000000	0.433526
6	0.776864	0.442631	0.000000	0.450399
7	0.293604	0.256252	0.419879	0.259188
8	0.298304	0.328142	-0.532930	0.331125
9	0.698550	0.446935	0.075475	0.453920
10	0.485877	0.415784	-0.473303	0.420643
11	0.362594	0.323438	-0.483433	0.327064
12	1.213518	0.538859	-0.189258	0.550994
13	1.073318	0.467305	-2.989970	0.478039
14	1.063061	0.453687	-1.845268	0.464318
15	1.003570	0.457915	-1.491523	0.467951
16	3.391618	0.664142	1.998717	0.698059
17	0.098507	0.251254	0.000000	0.252239
18	0.328390	0.343620	-0.512950	0.346904
19	0.683397	0.398350	0.093947	0.405183
20	0.608441	0.432101	-0.551573	0.438186
21	0.235030	0.335478	-0.260739	0.337829
22	0.203703	0.270996	-0.429491	0.273033
23	2.165327	0.618330	-0.163497	0.639983
24	0.214209	0.299568	-0.365493	0.301710
25	0.717247	0.449155	-0.819278	0.456327
26	1.271488	2.093213	0.000000	0.469655
27	0.668562	0.405830	-1.731414	0.412515
28	1.126240	0.521983	0.323426	0.533246
29	1.202264	0.438758	0.408098	0.450780
30	0.358821	0.299137	0.146401	0.302725
31	0.183599	0.244406	0.054539	0.246242

32	0.610931	0.360474	0.000000	0.366583
----	----------	----------	----------	----------

Les valeurs dans les tables (IV.3), (IV.4) et (IV.5) sont obtenues pour une discrétisation de 20 millions de points sur la frontière de domaine.

D'après la table (IV.5), on remarque que le moment d'inertie  $I_x'$  est très inférieure au moment d'inertie  $I_y'$  vu que la dimension du profil suivant l'épaisseur est très inférieure à la corde du profil.

La détermination de la position du centre de gravité est faite par rapport au repère de la définition de la section. Ce repère est lié avec le bord d'attaque de la section (profil d'aile).

Les profils choisis dans cette publication touchent toutes les compagnies aériennes. On a pris 32 profils d'ailes ce que présente la table (IV.3).

Les profils qui possèdent  $y_G=0.0$  veulent dire que ce profil est symétrique. Dans ce cas le produit d'inertie  $I_{xy}'=0.0$ . On trouve ces résultats pour les profils numéro 1 (NACA 0012), numéro 5 (NACA 62), numéro 6 (RAF 30), numéro 17 (NACA M1) d'après la table (IV.3).

Pour étudier le phénomène de traction et de compression des ailes d'avions, les pales d'hélicoptère, les aubes des compresseurs et les turbines, on s'intéresse de connaître l'aire de la section comme présente la table (IV.3).

Les résultats présentés dans les tables (IV.5) et (IV.6) sont très intéressants pour faire l'étude de la flexion des ailes et les autres configurations. Le moment d'inertie polaire a pour but de faire l'étude du phénomène de torsion des profils d'ailes.

**Table (IV.6) Résultats de section de forme lemniscate vertical :**

$\frac{y_2}{a}$	$\frac{b(y_2)}{a}$	$\frac{S_{x_2}^*}{a^3}$	$\tau(y_2) \frac{a^2}{r}$
-0.54876423	0	0	0
-0.054800824379190	0.524874964963739	482.29554843393	41197.9015731
-0.04	0.529476209891321	489.472249615866	41447.59391006
-0.03	0.532242429137162	494.482259890513	41654.21206968
-0.02	0.534730458066197	499.623449367999	41891.46922097
-0.01	0.536938353304066	504.896958350295	42159.55602414
0	0.538863920806690	510.304013345365	42458.78654885
0.01	0.540504470360706	515.845932301110	42789.6006748
0.02	0.541857967991255	521.524130416281	43152.5678919
0.03	0.542920687928818	527.34012659707	43548.3925779
0.04	0.543689527554198	533.29555063879	43977.9208640
0.05480082437919036	0.5442802033218518	542.36972541756	44677.6788660

0.45123577	0	0	0
------------	---	---	---

On trouve pour  $\frac{y_2}{a} = 0.05480082437919036$  ;  $\tau_{max} = 44677.678866 \frac{T}{a^2}$

Connaissant que:  $\tau_{moy} = \frac{T}{A} = \frac{\tau}{0.392699081 a^2}$

Alors :  $\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = (1/44677.678866) \frac{T}{a^2} \cdot (0.392699081) \frac{a^2}{T}$

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = 0.000056996673$$

Table (IV.7) Résultats de section de forme de demi-ellipse :

$\frac{y_2}{R}$	$\frac{b(y_2)}{C}$	$\frac{S_{x_2}^*}{Ch^2}$	$\tau(y_2) = \frac{Ch}{T}$
-0.392699081	2	0	0
-0.393224	1.27149	335731.93678	3072746.21356
-0.31324	1.26742	336334.41829	3088137.12225
-0.23324	1.25525	338139.62420	3134822.48076
-0.15324	1.23504	341140.34029	3214376.51322
-0.07324	1.20694	345322.92360	3329549.76217
0.00676	1.17112	350665.01874	3484480.89837
0.08676	1.12780	357132.64892	3685042.11008
0.16676	1.07727	364676.96103	3939382.60238
0.24676	1.01985	373230.96824	4258782.72451
0.32676	0.95591	382706.67841	4659018.55640
0.607300918	0	0	0

On trouve pour  $\frac{y_2}{C} = 0.32676$  ;  $\tau_{max} = 4659018.55640 \frac{T}{Ch}$

Connaissant que:  $\tau_{moy} = \frac{T}{A} = 0.785398163 \frac{T}{Ch}$

Alors : 
$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = (1/4659018.55640) \frac{T}{Ch} \cdot (0.785398163) \frac{Ch}{T}$$

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = 0.00000027328492$$

Table (IV.8) Résultats de section de forme droite :

$\frac{y_2}{a}$	$\frac{b(y)}{a}$	$\frac{S_x^*(y)}{a}$	$\tau(y) \frac{a^2}{T}$
1	0	0	0
0.9	0.03533174	4481.98311	983121.514240
0.8	0.10278155	4012.105401	302523.58098
0.7	0.194708548	3550.704485	141329.101762
0.6	0.3101149132	3102.488021	77533.528920
0.5	0.450196464	2670.798215	45977.04836
0.4	0.6181164606	2258.3100738	28314.92086
0.3	0.8199225112	1867.13234507	17648.3611215
0.2	1.067514047	1498.3237131	10877.626527
0.1	1.389844966	1149.0810187	6407.467051
0	2	751.2617413023	2911.141841

Par raison de symétrie par rapport à l'axe Ox on a

$$\tau(y) = \tau(-y)$$

Alors la fonction  $\tau(y)$  est symétrique. Par rapport à l'axe Ox.

Dans le tableau présenté au-dessus on a présenté uniquement les résultats pour la moitié supérieur.

Le maximum de la contrainte ( $\tau_{max}$ ) est obtenue sur l'axe Ox.

Pour  $\frac{y}{a} = 0$  ,  $\tau(y = 0) = \tau_{max} = \frac{4096}{(2205)\pi} \frac{T}{a^2} = 0.591291289 \frac{T}{a^2}$

Connaissant que: 
$$\tau_{moy} = \frac{T}{A} = \frac{8}{\pi} \frac{T}{a^2} = 0.848826363 \frac{T}{a^2}$$

Alors : 
$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = 0.5019036343154519$$

Table (IV.9) Résultats de section de forme arc de cycloïde :

$\frac{y_2}{a}$	$\frac{b(y)}{a}$	$\frac{S_x^*(y)}{a}$	$\tau(y) \frac{a^2}{T}$
-0.83333	6.291853071795684	2298.193858779855	139.3287551191244
-0.6	6.181617490128616	2297.92879922679	141.7970218104422
-0.4	6.003063964217156	2297.745566160977	146.0029514660584
-0.2	5.761812399095199	2297.602912332454	152.1067645434230
0	5.457183171011989	2297.500837741222	160.5904875391938
0.2	5.082469979758794	2297.439342387279	172.4256616129944
0.4	4.624045564206448	2297.418426270628	189.5180872156311
0.6	4.056351590859979	2297.438089391266	216.0433461716808
0.7	3.716998267844964	2297.463138165569	235.7701732781168
0.83333	3.181517105659118	2297.512317344353	275.4585487877316

On trouve pour  $\frac{y_2}{a} = 0.83333$  ;  $\tau_{max} = 275.4585487877316 \frac{T}{a^2}$

Connaissant que: 
$$\tau_{moy} = \frac{T}{A} = \frac{T}{9.42477796076 a^2}$$

Alors : 
$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = (275.4585487877316) \frac{T}{a^2} \cdot (9.42477796076) \frac{a^2}{T}$$

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{moy}} = 0.000851878834$$

## **CONCLISION GENERALE :**

*Le présent travail nous a permit de faire la détermination des caractéristiques géométriques des sections simplement connexes utilisées dans le domaine de l'aéronautique pour faire l'étude des problèmes de l'élasticité. On peut tirer à partir de ce travail les points suivants :*

- *La discrétisation est faite par des cellules triangulaires, vu que cet élément est adéquat si on subdivise la courbe en des petits intervalles avec un point commun (observateur).*
- *Un seul point est choisi à l'intérieur du domaine (l'observateur) et tous les autres points sont visible indispensablement pour lui.*
- *Les problèmes de l'élasticité comme la traction, flexion simple ou déviée, flambement et torsion peuvent être étudiées si on connait les caractéristiques géométriques des sections à étudier.*
- *Tous les profils d'ailes considérés sont présentés par des valeurs tabulées. L'interpolation Cubic spline est utilisée dans ce cas pour obtenir une fonction analytique de l'extrados et de l'intrados.*
- *La discrétisation du domaine peut être faite avec n'importe quel nombre de triangle. Des applications sont faites pour une discrétisation de 20 Millions de triangles.*
- *La précision du calcul dépend de la discrétisation. Plus le nombre des triangles est élevé, plus on aura une bonne précision.*

- Une condensation des nœuds vers le bord d'attaque du profil d'aile est utilisée pour raffiner les points vers le bord d'attaque vu la courbure importante dans cette région.
- Le moment d'inertie central  $I_y'$  est très inférieure à  $I_x'$  vu la dimension du profil suivant l'épaisseur (l'axe vertical) est très inférieure à la corde du profil (dimension suivant l'axe horizontal).
- les résultats de cette étude sont valables seulement pour la flexion simple, mais pas pour la flexion déviée.
- Parce qu'il y a deux axes principaux  $x$  et  $y$  donc il y aura deux facteurs de forme selon les deux directions principales.
- la contrainte est nulle aux extrémités (haute et basse) est généralement maximale au centre de gravité.

D'après notre étude on peut proposer des futurs travaux, qui sont :

On pourra dans un premier temps faire un programme numérique pour les profils non symétriques, dans ce cas on a un angle de décalage entre les axes principaux  $x$  et  $y$  et les directions de l'application des efforts tranchants  $T_x, T_y$ .

Deuxièmement il est nécessaire d'étendre l'étude à le même problème pour la flexion déviée pour section creuse à parois mince avec et sans raidisseurs.

## Annexe A

### Nomenclature

#### Latin :

$A, I_{00}$	Aire de la surface d'un triangle.
$AT(i)$	Surface du triangle (i)
$C$	Corde de profil d'aile.
$dz$	élément longitudinal suivant l'axe z
$dx$	élément longitudinal suivant l'axe x
$dy$	élément longitudinal suivant l'axe y
$f, g$	fonctions utilisé dans la méthode de dichotomie.
$I_{20}, I_{02}$	Moments quadratiques d'un triangle.
$I_{10}, I_{01}$	Moments statiques d'un triangle.
$I_{11}$	Produit d'inertie d'un triangle.
$I_P$	Moment d'inertie polaire.
$I_x', I_y'$	Moments d'inerties centraux.
$I_{xy}'$	Produit d'inertie central.
$M_x$	moment de flexion suivant l'axe x
$NT$	Nombre de triangles dans le domaine.

$NN$	Nombre de nœuds sur la frontière de domaine.
$N$	force longitudinale (normale)
$P$	Point interne du profil d'aile.
$P, Q$	Paramètres pour le contrôle des points de maillage (Fonction de condensation).
$R$	rayon du cercle
$S_x$	Moment statique
$T$	effort tranchant
$T_y$	effort tranchant suivant l'axe $y$
$T_x$	effort tranchant suivant l'axe $x$
$(x_j, y_j)$	Coordonnées d'un nœud.
$x_G, y_G$	Coordonnées du centre de gravité.
$y_{GT}(i)$	Coordonnée $y_G$ du centre de gravité du triangle $(i)$
<b>Grec :</b>	
$\varepsilon$	L'erreur de calcul.
$\eta^*$	Variable normalisée
$\sigma$	contrainte normale
$\tau$	contrainte tangentielle
<b>Indices</b>	
123	Triangle limité par les nœuds 1, 2 et 3.
$G$	Centre de gravité.
$i, j$	Compteur sur les nœuds.

*max* moment d'inertie principal maximal.

*min* Moment d'inertie principal minimal.

## **Annexe B**

### **Interpolation Cubic spline**

*L'interpolation est considérée comme le cœur de l'analyse numérique, vu l'existence des fonctions qui sont tabulées et l'expression analytique est absente. Si on veut chercher la valeur de la fonction pour des points qui ne sont pas tabulés, il est nécessaire d'interpoler ces points.*

*Aujourd'hui l'interpolation se fait par ordinateur.*

- *Interpolation linéaire*
- *Interpolation quadrature*
- *Interpolation cubique*

*Plusieurs auteurs ont développé des procédures d'interpolations des points tabulés.*

*On peut citer à titre d'information :*

- *L'interpolation de Lagrange.*
- *L'interpolation par itération.*
- *Interpolation inverse.*
- *Interpolation de Hermite.*
- *Interpolation par différences finis.*
- *Interpolation par cubique spline.*

*Dans le cas général ,il est possible qu'une séquence d'interpolation polynomiale  $\{p_n(x)\}$  sur un nombre fixé et fini d'intervalles ne converge pas régulièrement à une fonction lissée, c'est-à-dire ,si on veut chercher le comportement de ces polynômes entre les points interpolés, on observe dans certains cas ,les oscillations des polynômes qui quittent volontairement la variation réelle de la fonction .les*

polynômes d'interpolation qui possèdent un degré grand donnent ces situations. Un chemin pour éviter ce problème est de considérer une interpolation polynomiale avec un petit degré sur des petits intervalles de l'intervalle considéré. Avec cela, l'oscillation entre ces points n'est pas significative, ou l'interpolation peut imiter le comportement de la fonction. Cependant, le résultat de la fonction interpolée à partir des petits intervalles avec des polynômes de degré faibles n'est pas nécessairement encore lisse.

Puisqu'on souhaite d'imiter le comportement de la fonction, il est recommandé que pour les polynômes d'interpolation soient lisses

Ces fonctions avec un degré maximal sont nommées 'spline', parmi celle-ci on cite l'interpolation 'Cubic spline' et voici la description de sa formulation :

**A. 1. formulation mathématique de l'interpolation 'cubic spline' :**

L'interpolation cubique spline (dite par morceau) au point de vue mécanique ressemble à un procédé qui consiste à joindre une série des points par une tige élastique (spline).il existe plusieurs types de splines, linéaire, quadratique, cubique,...la plus utilisée c'est la spline cubique qui consiste à lisser chaque segment de deux points successifs par une fonction cubique.

Considérons l'intervalle  $I = [a, b]$  divisée en  $(n-1)$  sous intervalles pas nécessairement de mêmes longueurs

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_{n-1} < a_n = b$$

La fonction spline  $s(x)$  de degré  $m$  est une fonction définie sur l'intervalle  $I$

Par :

- 1) Considère avec le polynome de degré  $m$  sur chacun sous intervalle

$$I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

- 2) Possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $m-1$

Les abscisses  $\{a_i\}$  sont nommées les nœuds du 'spline'. la fonction 'spline'  $S(X)$  est l'interpolation des points  $[a_i, y_i]$  si :

$$S(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La forme la plus simple est du premier degré, nommé fonction d'interpolation linéaire qui n'est pas lisse mais très efficace si la distance entre les nœuds est petite. En effet, toutes les tables des valeurs des fonctions qui utilisent l'interpolation linéaire conduisent à une approximation fondamentale des fonctions par "Spline Linéaire". Spline de degré deux peut être définie, mais puisqu'il y a uniquement un degré de liberté dans sa définition, il y a manque de symétrie dans leur détermination avec relation des points de frontière de l'intervalle. de plus, les fonctions résultantes ne sont pas suffisamment lisses. Cependant, en générale, la meilleure utilisation de 'Spline' est celle de 'Cubic-spline' qui comporte deux paramètres à choisir pour donner le comportement aux extrémités de l'intervalle.

Un type des conditions aux limites est tel que :

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

L'interpolation en 'Cubic Spline' qui satisfait ces conditions est nommée 'Cubic Spline naturelle'

Une deuxième condition qui généralement donne des meilleurs résultats est :

$$S'(a) = f'(a) \quad , \quad S'(b) = f'(b)$$

Cela, évidemment demande des données sur la dérivée aux extrémités.

L'une parmi plusieurs représentations de 'Spline' peut être donnée comme suit :

Soient

$$h_i = a_i - a_{i-1} \quad i = 2, 3, 4, \dots, n \quad (B.1)$$

Cependant,  $S(X)$  est une fonction cubique, alors  $S'(X)$  a une forme quadratique (2<sup>ème</sup> degré) et  $S''(X)$  a une forme linéaire et continues. Cependant, on peut écrire :

$$S''(X) = M_i \frac{a_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - a_{i-1}}{h_i} \quad \text{Sur } I_i \quad (B.2)$$

Pour certaines constantes  $M_i$ , en effet :

$$S''(a) = M_i \quad i = 2, 3, 4, \dots, n \quad (B.3)$$

Intégrant l'équation (B.2) deux fois écrivons la fonction linéaire arbitraire sous la forme indiquée, on obtient :

$$S(X) = M_{i-1} \frac{(a_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - a_{i-1})^3}{6h_i} + C_i(a_i - x) + d_i(x - a_{i-1}) \quad \text{Sur } I_i \quad (B.4)$$

Cependant, on souhaite que la fonction 'Spline' interpole aux nœuds, on a :

$$S(a_{i-1}) = y_{i-1} \quad , \quad S(a_i) = y_i$$

Ces deux équations déterminent les constantes  $C_i$  et  $d_i$ , la fonction  $S(X)$  devient :

$$S(X) = M_{i-1} \frac{(a_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - a_{i-1})^3}{6h_i} + \left( y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i}{6} \right) \frac{a_i - x}{h_i} + \left( y_i - \frac{M_i h_i}{6} \right) \frac{x - a_{i-1}}{h_i} \quad (B.5)$$

Dérivons l'expression (B.5), on obtient :

$$S'(X) = -M_{i-1} \frac{(a_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - a_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i$$

$$\text{Sur } I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad (B.6)$$

Par analogie, sur l'intervalle  $I_{i+1} = [a_i, a_{i+1}]$  on a :

$$S'(X) = -M_i \frac{(a_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - a_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1}$$

Sur  $I_i = [a_{i-1}, a_i]$  (B.7)

On note les valeurs particulières âpres (B.6) et (B.7)

$$S'(a_i) = \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad (B.8)$$

$$S'(a_i) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

Cependant, la fonction  $S'(x)$  doit être continue, ces deux valeurs doivent être égales, cela donne ces équations :

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad i = 2, 3, 4, \dots, n \quad (B.9)$$

On obtient  $(n-2)$  équations linéaire (à l'exception des deux nœuds des extrémités) dont les inconnus sont  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ , d'où deux conditions supplémentaires doivent être ajoutées pour avoir une solution unique.

Une fois les valeurs  $M_i$  sont déterminées, l'interpolation Spline sera complètement déterminée par l'équation (B.5).

Pour simplifier l'écriture de l'équation (B.9) on pose :

$$\sigma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad , \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad , \quad \mu_i = 1 - \lambda_i \quad , \quad d_i = \frac{6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{h_i + h_{i+1}} \quad (B.10)$$

Après substitution de (B.10) dans (B.9), le système d'équation possède la forme suivante :

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (B.11)$$

Les deux conditions supplémentaires possèdent la forme :

$$2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \quad (B.12)$$

$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

Et on indique que plusieurs possibilité pour les choix des constantes  $\lambda_1, d_1, \mu_n$  et  $d_n$ , sous la forme matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (B.13)$$

C'est un système d'équation à matrice tri-diagonales liées.

**1<sup>ere</sup> Cas :** si on choisit  $\lambda_1 = d_1 = \mu_n = d_n = 0$ , alors  $M_1 = M_n = 0$ . ceci donne l'interpolation 'Spline naturelle'

**2<sup>eme</sup> cas :** selon la 2<sup>eme</sup> condition aux limites proposées au paravent :

$$S'(x) = y_1' \quad , \quad S'(x) = y_n' \quad (B.14)$$

On obtient :

$$\lambda_1 = \mu_n = 1$$

$$d_1 = \frac{6}{h_2} \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - y_1 \right)$$

(B.15)

$$d_n = \frac{6}{h_n} \left( y_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_2} \right)$$

**3<sup>eme</sup> cas :** la troisième possibilité est de choisir  $a_i, i = 2, 3, 4, \dots, n-1$ , comme des nœuds du Spline. les points des extrémités ne sont pas donnés comme des nœuds et d'imposer les conditions :

$$S'(a) = y'_1$$

$$S'(a_n) = y'_n$$

Dans ce cas, l'indice 'i' dans l'équation (B.11) varie entre 3 et n-2, et les deux conditions additionnelles sont similaires en forme pour le choix de (B.12). les valeurs de  $\lambda_2$  et  $d_2$  peuvent être rapidement évaluées en supposant  $x = a_1$  dans (B.5) et posons  $S(a) = y_1$ . De même, en informations additionnelles.

De l'équation (B.10): on sait que :

$$0 < \lambda_i < 1$$

$$0 < \mu_i < 1$$

$$i = 2, 3, 4, \dots, n-1$$

Si donc  $|\lambda_1| < 2$  et  $|\mu_n| < 2$ , la matrice dans (B.13) sera en diagonale dominante. Dans ce cas, il est possible de montrer qu'une solution unique de (B.13) existe pour  $d_1, d_2, \dots, d_n$  arbitraire. cependant pour le 1<sup>ere</sup> cas 2<sup>eme</sup> cas ont est assurée l'existence de l'interpolation Spline.

Similairement dans le 3<sup>eme</sup> cas, la solution toujours existe :

**B - 2 . Résolution d'un système d'équation linéaire à matrice Tridiagonale non symétrique par la méthode du double balayage de CHOLESKY :**

Dans le cas des matrices tri diagonales, la méthode du pivot est parfois appelée méthode du double balayage de cholesky. nous la donnerons parce que a mise en œuvre est aisée, et que les matrices tri diagonale interviennent dans de nombreux problèmes, notamment pour interpoler une fonction donnée sous forme d'un tableau.

Le système d'équations tridiagonale s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2 \\ K a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = y_3 \\ 0 = M \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_{i+1} = y_i \\ 0 = M \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = y_n \end{array} \right. \quad (B.16)$$

La premier équation de (B.16) permet d'exprimer l'inconnue  $x_2$  :

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \quad (B.17)$$

Portons cette valeur de  $x_1$  dans la seconde equation de (B.16) on obtient :

$$a_2 \left[ \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \right] + b_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2$$

$$\left[ \frac{-c_1 a_1}{b_1} + b_2 \right] x_2 = -c_2 x_3 + y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1}$$

On a ainsi exprimé  $x_2$  en fonction de  $x_3$ , et ainsi de suite on exprimera chaque inconnue en fonction de la suivante. Supposons qu'on ait obtenu :

$$x_{i-1} = A_{i-1} x_i + B_{i-1}$$

Et portons cette valeur dans la  $i^{\text{eme}}$  equation de (B.16), il vient :

$$a_i (A_{i-1} x_i + B_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = y_i$$

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} \quad (B.18)$$

On peut écrire donc :

$$\begin{cases} x_i = A_i x_{i+1} + B_i \\ A_i = \frac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} \\ B_i = \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} \end{cases} \quad (B.19)$$

En faisant  $i=1$  dans les equations (B.19) et en comparant avec (B.17), on voit que :

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ B_0 = 0 \end{cases} \quad (B.20)$$

Les equations (B.19) et (B.20) nous permettent de calculer aisément de proche en proche, étant donnés  $A_0 = 0$  et  $B_0 = 0$ , les couples  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$ , en utilisant un premier balayage de  $i=1$  à  $n$ .

Nous allons maintenant effectuer un second balayage, de  $i=n$  à  $1$ , qui va nous permettre de calculer les inconnues. en effet, la dernière équation de (B.16) s'écrit :

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = y_n$$

Ce qui s'écrit en remplaçant  $x_{n-1}$  par sa valeur tirée de (B.20) ou on fait  $i=n-1$

$$a_n (A_{n-1} x_n + B_{n-1}) + b_n x_n = y_n$$

D'où :

$$x_n = \frac{y_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}$$

C'est-à-dire, d'après (B.16) ou  $i=n$

$$x_n = B_n$$

On obtient ainsi la valeur cherchée  $x_n$ . On en déduit :

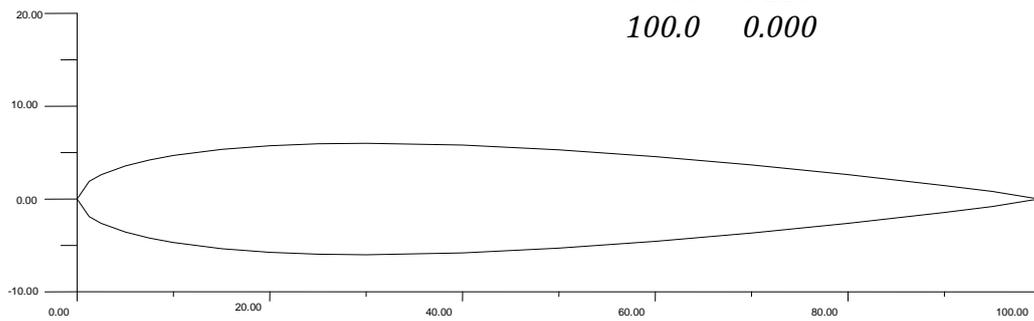
$$x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1} \quad (B.21)$$

Puis  $x_{n-2}$ , etc.....jusqu'à  $x_1$ , de proche en proche

**Annexe C**

60.00	-4.563
70.00	-3.664
80.00	-2.623
90.00	-1.448
95.00	-0.807
99.00	-0.126
100.0	0.000

**Data des profils :**



**Figure 1: PROFIL NACA 0012**

**PROFIL NACA 0012 :**

**Extrados**

(x)	(y)
0.000	0.000
1.250	-1.894
2.500	-2.615
5.000	-3.555
7.500	-4.200
10.00	-4.683
15.00	-5.345
20.00	-5.737
25.00	-5.941
30.00	-6.002
40.00	-5.803
50.00	-5.294

**Intrados**

**(x) (y)**

0.000 0

1.250 -1.894

2.500 -2.615

5.000 -3.555

7.500 -4.200

10.00 -4.683

15.00 -5.345

20.00 -5.737

25.00 -5.941

30.00 -6.002

40.00 -5.803

50.00 -5.294

60.00 -4.563

70.00 -3.664

80.00 -2.623

90.00 -1.448

95.00 -0.807

99.00 -0.126

100.0 0.000

053.0990 008.3592

056.9370 007.9493

060.7780 007.4739

064.5940 006.9329

068.3590 006.3296

072.0430 005.6761

075.6160 004.9972

079.0480 004.3213

082.3090 003.6724

085.3700 003.0674

088.2020 002.5157

090.7750 002.0211

093.0640 001.5819

095.0440 001.1966

096.6980 000.8656

098.0370 000.5878

099.0700 000.3654

099.7540 000.2134

100.0000 000.1577

**PROFIL AQUILA 9.3% :**

**Extrados**

**(x) (y)**

000.0000 -000.1520

000.0980 000.5578

000.5480 001.3840

001.3380 002.0385

02.43300 002.6683

003.8110 003.3807

005.4680 004.1953

007.3950 005.0589

009.5760 005.9061

011.9990 006.6906

014.6480 007.3768

017.5040 007.9484

020.5490 008.4131

023.7600 008.7896

027.1200 009.0928

030.6090 009.3163

034.2040 009.4266

037.8870 009.3994

041.6380 009.2502

045.4350 009.0125

049.2650 008.7118

**Intrados**

**(x) (y)**

000.0000 -000.1520

000.0980 -000.8736

000.5480 -001.7535

001.3380 -002.3921

002.4330 -002.7806

003.8110 -003.0357

005.4680 -003.2981

007.3950 -003.6103

009.5760 -003.9323

011.9990 -004.2246

014.6480 -004.4736

017.5040 -004.6861

020.5490 -004.8689

023.7600 -005.0081

027.1200 -005.0919

030.6090 -005.1202

034.2040 -005.0953

037.8870 -005.0210

041.6380 -004.9040

045.4350 -004.7554

049.2650 -004.5845

053.0990	-004.3925	023.20870	007.18550
056.9370	-004.1697	025.91230	007.22570
060.7780	-003.9055	028.71100	007.19690
064.5940	-003.6034	031.59380	007.11220
068.3590	-003.2834	034.54920	006.97220
072.0430	-002.9673	037.56550	006.78290
075.6160	-002.6692	040.63090	006.55120
079.0480	-002.3935	043.73330	006.28440
082.3090	-002.1300	046.86050	005.98940
085.3700	-001.8605	050.00000	005.67290
088.2020	-001.5858	053.13950	005.34080
090.7750	-001.3368	056.26670	004.99820
093.0640	-001.1525	059.36910	004.64950
095.0440	-001.0375	062.43450	004.29840
096.6980	-000.9412	065.45080	003.94830
098.0370	-000.7926	068.40620	003.60200
099.0700	-000.5555	071.28900	003.26230
099.7540	-000.2893	074.08770	002.93200
100.0000	-000.1634	076.79130	002.61400
		079.38930	002.31130

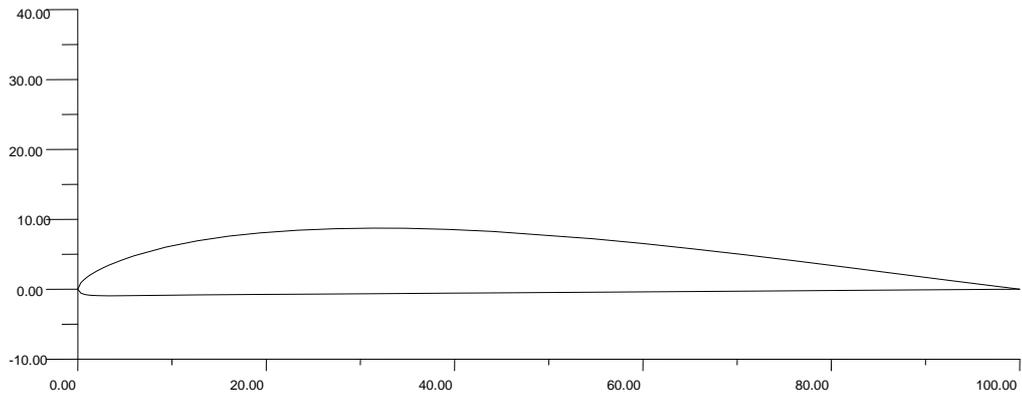


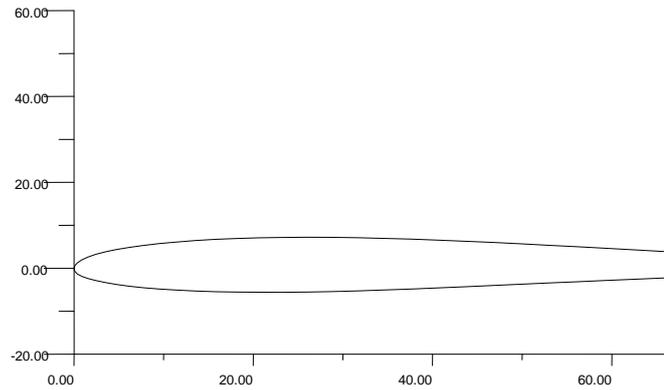
Figure 2: PROFIL AQUILA 9.3%

**PROFIL OAF 128 :**

<b>Extrados</b>		
<b>(x)</b>	<b>(y)</b>	
000.00000	000.00000	081.87120 002.02680
000.09870	000.63720	084.22740 001.76370
000.39430	001.30080	086.44840 001.52430
000.88560	001.97420	088.52570 001.31090
001.57080	002.63590	090.45080 001.12480
002.44720	003.26580	092.21640 000.96650
003.51120	003.85040	093.81530 000.83560
004.75860	004.38610	095.24140 000.73050
006.18470	004.87680	096.48880 000.64910
007.78360	005.33000	097.55280 000.58840
009.54920	005.74980	098.42920 000.54500
011.47430	006.13280	099.11440 000.51560
013.55160	006.46740	099.60570 000.49710
015.77260	006.73980	099.90130 000.48710
018.12880	006.94360	099.95000 000.48390
020.61070	007.08680	100.00000 000.00000

**Intrados**

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.09870	-00.73700
000.39430	-01.36370
000.88560	-01.90730
001.57080	-02.40160
002.44720	-02.87360
003.51120	-03.33460
004.75860	-03.77820
006.18470	-04.18710
007.78360	-04.54500
009.54920	-04.84680
011.47430	-05.09930
013.55160	-05.30960
015.77260	-05.46830
018.12880	-05.55200
020.61070	-05.58650
023.20870	-05.60020
025.91230	-05.54310
028.71100	-05.43230
031.59380	-05.27340
034.54920	-05.07300
037.56550	-04.83880
040.63090	-04.57880
043.73330	-04.30040
046.86050	-04.01080
050.00000	-03.71590
053.13950	-03.42100
056.26670	-03.12970
059.36910	-02.84510
062.43450	-02.56930
065.45080	-02.30380
068.40620	-02.04990
071.28900	-01.80890
074.08770	-01.58230
076.79130	-01.37170
079.38930	-01.17910
081.87120	-01.00670
084.22740	-00.85640
086.44840	-00.73010
088.52570	-00.62890
090.45080	-00.55320
092.21640	-00.50210
093.81530	-00.47390
095.24140	-00.46540
096.48880	-00.47270
097.55280	-00.49100
098.42920	-00.51520
099.11440	-00.54030
099.60570	-00.56190
099.90130	-00.57630
099.95000	-00.58140
100.00000	00.00000



**Figure 3 : PROFIL OAF 128**

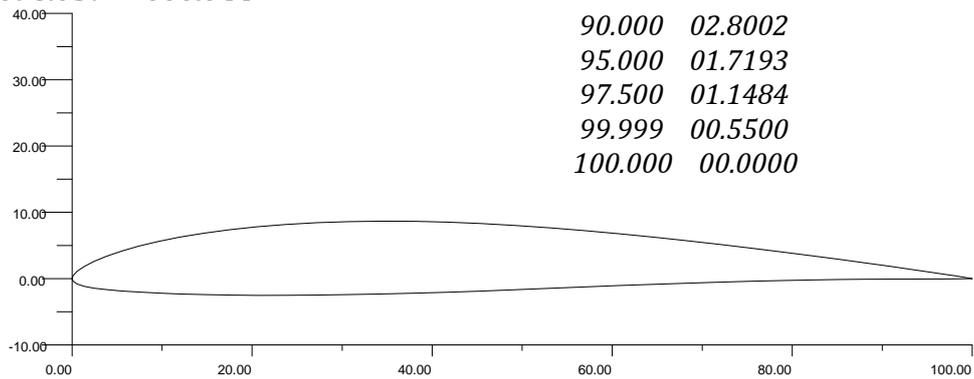
068.359	005.713
072.043	005.150
075.616	004.575
079.048	003.999
082.309	003.430
085.370	002.879
088.202	002.357
090.775	001.871
093.064	001.430
095.044	001.040
096.698	000.706
098.037	000.428
099.070	000.206
099.754	000.055
100.000	000.000

**PROFIL K3311 SMOOTHED:**

<b>Extrados</b>		<b>Intrados</b>	
<b>(x)</b>	<b>(y)</b>	<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.000	000.000	000.000	000.000
000.098	000.432	000.098	-000.381
000.548	001.100	000.548	-000.822
001.338	001.829	001.338	-001.171
002.433	002.593	002.433	-001.444
003.811	003.372	003.811	-001.666
005.468	004.147	005.468	-001.859
007.395	004.899	007.395	-002.033
009.576	005.609	009.576	-002.189
011.999	006.267	011.999	-002.320
014.648	006.861	014.648	-002.422
017.504	007.381	017.504	-002.491
020.549	007.821	020.549	-002.525
023.760	008.174	023.760	-002.524
027.120	008.436	027.120	-002.490
030.609	008.604	030.609	-002.424
034.204	008.674	034.204	-002.329
037.887	008.647	037.887	-002.207
041.638	008.525	041.638	-002.057
045.435	008.315	045.435	-001.879
049.265	008.025	049.265	-001.679
053.099	007.666	053.099	-001.466
056.937	007.246	056.937	-001.253
060.778	006.772	060.778	-001.049
064.594	006.257	064.594	-000.859

068.359	-000.686	099.070	-000.026
072.043	-000.531	099.754	-000.008
075.616	-000.396	100.000	000.000
079.048	-000.283		
082.309	-000.195		
085.370	-000.132		
088.202	-000.094		
090.775	-000.074		
093.064	-000.067		
095.044	-000.063		
096.698	-000.057		
098.037	-000.044		

90.000	02.8002
95.000	01.7193
97.500	01.1484
99.999	00.5500
100.000	00.0000



**Figure 4: PROFIL K3311 SMOOTHED**

**PROFIL ARA-D 6%:**

**Extrados**

(x)	(y)
000.000	000.000
00.300	00.9099
01.000	01.7152
02.000	02.4678
04.000	03.5135
07.000	04.5809
10.000	05.3377
15.000	06.2118
20.000	06.8235
25.000	07.2750
30.000	07.6067
35.000	07.8178
40.000	07.9022
45.000	07.8668
50.000	07.7173
55.000	07.4566
60.000	07.0912
65.000	06.6260
70.000	06.0628
75.000	05.4022
80.000	04.6416
85.000	03.7752

**Intrados**

(x)	(y)
000.000	000.0000
00.300	-00.4658
01.000	-00.7411
02.000	-00.8934
04.000	-00.9318
07.000	-00.7339
10.000	-00.4076
15.000	00.2198
20.000	00.7996
25.000	01.2750

30.000 01.6295  
 35.000 01.8834  
 40.000 02.0553  
 45.000 02.1539  
 50.000 02.1827  
 55.000 02.1435  
 60.000 02.0401  
 65.000 01.8750  
 70.000 01.6501  
 75.000 01.3723  
 80.000 01.0504  
 85.000 00.6940  
 90.000 00.3084  
 95.000 -00.1015  
 97.500 -00.3184  
 99.999 -00.5500  
 100.000 00.0000

090.00000 001.26000  
 095.00000 000.64000  
 100.00000 000.00000

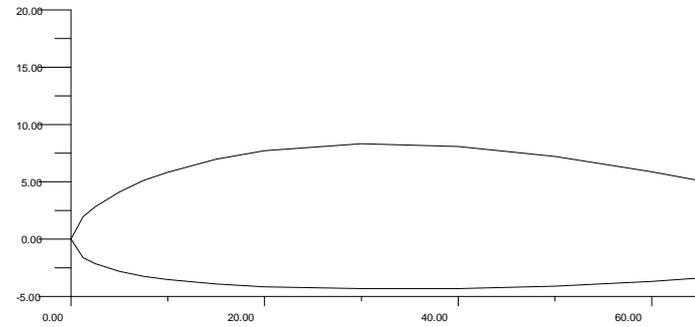


Figure 6:PROFIL RAF 34

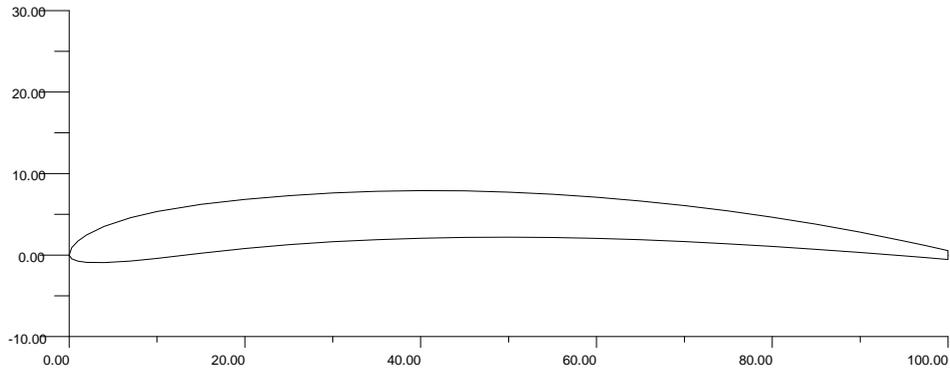


Figure 5 : PROFIL ARA-D 6%

**PROFIL RAF 34 :**

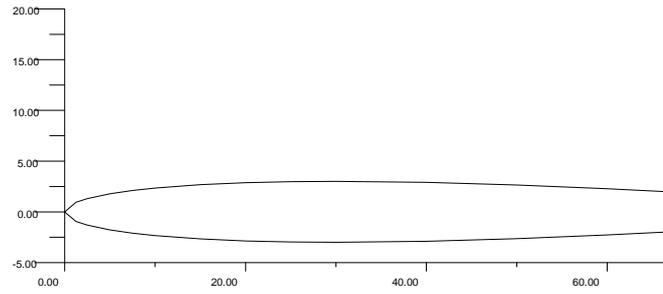
**Extrados**

(x)	(y)
000.00000	000.00000
001.25000	001.96000
002.50000	002.82000
005.00000	004.11000
007.50000	05.12000
010.00000	005.83000
015.00000	006.97000
020.00000	007.72000
030.00000	008.32000
040.00000	008.08000
050.00000	007.21000
060.00000	005.87000
070.00000	004.31000
080.00000	002.70000

**Intrados**

(x)	(y)
000.00000	000.00000
001.25000	-01.62000
002.50000	-02.14000
005.00000	-02.81000
007.50000	-03.25000
010.00000	-03.53000
015.00000	-03.91000
020.00000	-04.16000
030.00000	-04.32000
040.00000	-04.32000
050.00000	-04.11000
060.00000	-03.69000
070.00000	-03.09000
080.00000	-02.30000
090.00000	-01.34000

095.00000 -00.76000  
 100.00000 000.00000



**Figure 7:PROFIL NACA 0006**

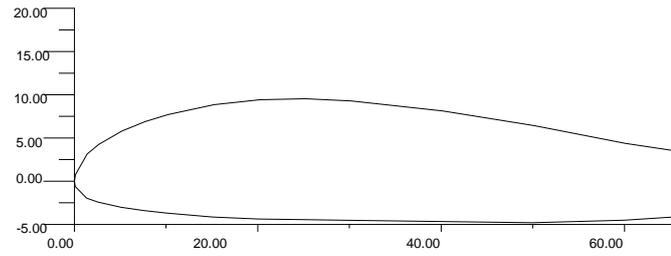
**PROFIL NACA 0006:**

***Extrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
0.0	0.0
1.25	0.947
2.50	1.307
5.0	1.777
7.5	2.100
10.0	2.341
15.0	2.673
20.0	2.869
25.0	2.971
30.0	3.001
40.0	2.902
50.0	2.647
60.0	2.282
70.0	1.832
80.0	1.312
90.0	0.724
95.0	0.403
99.0	0.063
100.0	0.0

***Intrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
0.0	0.0
1.25	-0.947
2.50	-1.307
5.0	-1.777
7.5	-2.100
10.0	-2.341
15.0	-2.673
20.0	-2.869
25.0	-2.971
30.0	-3.001
40.0	-2.902
50.0	-2.647
60.0	-2.282
70.0	-1.832
80.0	-1.312
90.0	-0.724
95.0	-0.403
99.0	-0.063
100.0	0.0



**Figure 8:PROFIL FAUVEL 14%**

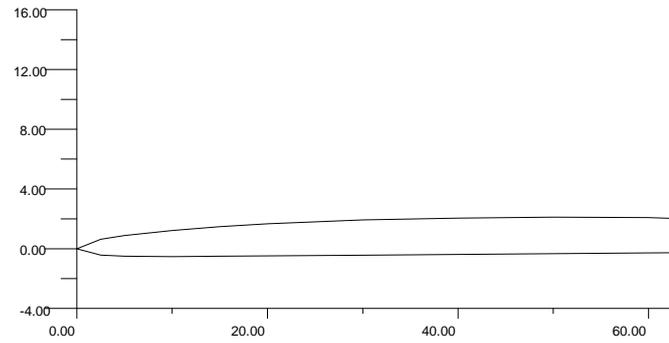
**PROFIL FAUVEL 14%:**

***Extrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.11073	000.73763
001.39486	003.14635
002.65991	004.25664
005.18005	005.79806
007.69359	006.89001
010.20302	007.70231
015.21485	008.84749
020.21831	009.42337
025.21488	009.52981
030.20616	009.27669
040.17920	008.12125
050.14448	006.43644
060.10416	004.37210
070.07105	002.79716
080.04306	001.57180
090.02036	000.70599
100.00000	000.00000

***Intrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.09064	-00.63070
001.31976	-01.96743
002.56179	-02.42523
005.05054	-03.02122
007.54237	-03.40747
010.03567	-03.69383
015.02402	-04.14671
020.01560	-04.37985
025.00953	-04.45319
030.00346	-04.52652
039.99131	-04.67320
049.97917	-04.81987
059.97362	-04.51710
069.97366	-03.83478
079.97838	-02.83285
089.98751	-01.53129
100.00000	000.00000



**Figure 5:PROFIL GOE 9K**

**PROFIL GOE 9K:**

***Extrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
002.50000	000.63200
005.00000	000.88500
010.00000	001.22000
015.00000	001.47500
020.00000	001.67000
030.00000	001.93000
040.00000	002.05000
050.00000	002.12000
060.00000	002.09000
070.00000	001.87000
080.00000	001.48000
090.00000	000.90000
095.00000	000.53500
100.00000	000.00000

***Intrados***

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
002.50000	-00.42800
005.00000	-00.50500
010.00000	-00.53000
015.00000	-00.50500
020.00000	-00.48000
030.00000	-00.43000
040.00000	-00.38000
050.00000	-00.33000
060.00000	-00.28000
070.00000	-00.23000
080.00000	-00.18000
090.00000	-00.13000
095.00000	-00.10500
100.00000	000.00000

042.88430 004.74661  
 046.43310 004.59796  
 050.00000 004.41159  
 053.56700 004.19132  
 057.11580 003.94233  
 060.62830 003.66959  
 064.08660 003.37888  
 067.47320 003.07696  
 070.77080 002.77090  
 073.96250 002.46820  
 077.03210 002.17567  
 079.96390 001.89698  
 082.74300 001.63337  
 085.35540 001.38566  
 087.78750 001.15514  
 090.02710 000.94290  
 092.06270 000.75017  
 093.88400 000.57784  
 095.48160 000.42673  
 096.84750 000.29765  
 097.97470 000.19116  
 098.85730 000.10779  
 099.49110 000.04796  
 099.87260 000.01201  
 100.00000 000.00000

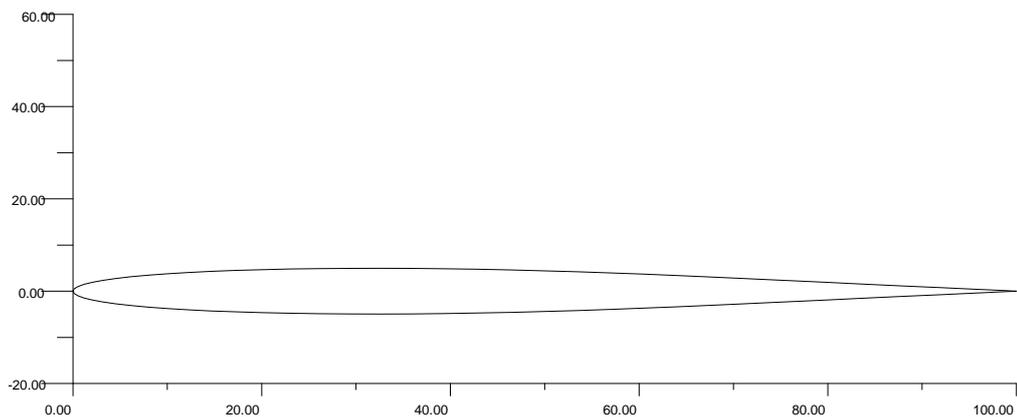
**PROFIL RAYEN BQM-34 FIREBEE**

**WING:**

**Extrados**  
 (x) (y)  
 000.00000 000.00000  
 000.12740 000.51850  
 000.50890 000.99999  
 001.14270 001.46679  
 002.02540 001.91428  
 003.15250 002.33938  
 004.51840 002.73973  
 006.11610 003.11273  
 007.93730 003.45580  
 009.97290 003.76642  
 012.21250 004.04242  
 014.64470 004.28243  
 017.25700 004.48654  
 020.03610 004.65493  
 022.96800 004.78668  
 026.03760 004.88054  
 029.22930 004.93530  
 032.52680 004.94975  
 035.91340 004.92319  
 039.37170 004.85536

**Intrados**  
 (x) (y)  
 000.00000 000.00000  
 000.12740 -00.51850  
 000.50890 -00.99999  
 001.14270 -01.46679  
 002.02540 -01.91428  
 003.15250 -02.33938  
 004.51840 -02.73973  
 006.11610 -03.11273  
 007.93730 -03.45580  
 009.97290 -03.76642  
 012.21250 -04.04242  
 014.64470 -04.28243  
 017.25700 -04.48654  
 020.03610 -04.65493  
 022.96800 -04.78668  
 026.03760 -04.88054  
 029.22930 -04.93530  
 032.52680 -04.94975  
 035.91340 -04.92319

039.37170 -04.85536	001.25000 001.03000
042.88430 -04.74661	002.50000 001.36000
046.43310 -04.59796	005.00000 001.80000
050.00000 -04.41159	007.50000 002.10000
053.56700 -04.19132	010.00000 002.34000
057.11580 -03.94233	015.00000 002.67000
060.62830 -03.66959	020.00000 002.88000
064.08660 -03.37888	030.00000 003.08000
067.47320 -03.07696	040.00000 003.05000
070.77080 -02.77090	050.00000 002.85000
073.96250 -02.46820	060.00000 002.53000
077.03210 -02.17567	070.00000 002.08000
079.96390 -01.89698	080.00000 001.54000
082.74300 -01.63337	090.00000 000.91000
085.35540 -01.38566	095.00000 000.57000
087.78750 -01.15514	099.00000 000.20000
090.02710 -00.94290	100.00000 000.00000
092.06270 -00.75017	
093.88400 -00.57784	
095.48160 -00.42673	
096.84750 -00.29765	
097.97470 -00.19116	
098.85730 -00.10779	
099.49110 -00.04796	
099.87260 -00.01201	
100.00000 000.00000	



**Figure 6: PROFIL RAYEN BQM-34 FIREBEE WING**

**PROFIL NACA-M1:**

**Extrados**  
**(x) (y)**  
 000.00000 000.00000

**Intrados**  
**(x) (y)**  
 000.00000 000.00000

001.25000 -01.03000  
 002.50000 -01.36000  
 005.00000 -01.80000  
 007.50000 -02.10000  
 010.00000 -02.34000  
 015.00000 -02.67000  
 020.00000 -02.88000  
 030.00000 -03.08000  
 040.00000 -03.05000  
 050.00000 -02.85000  
 060.00000 -02.53000  
 070.00000 -02.08000  
 080.00000 -01.54000  
 090.00000 -00.91000  
 095.00000 -00.57000  
 099.00000 -00.20000  
 100.00000 -00.00000

007.51941 007.39301  
 010.00570 008.50687  
 014.98328 010.23515  
 019.96558 011.49395  
 024.95240 012.30325  
 029.94312 012.72298  
 039.93490 012.53360  
 049.93711 011.30538  
 059.94664 009.34796  
 069.96058 006.95104  
 079.97553 004.45423  
 089.98927 002.07728  
 094.99514 000.98870  
 100.00000 000.00000

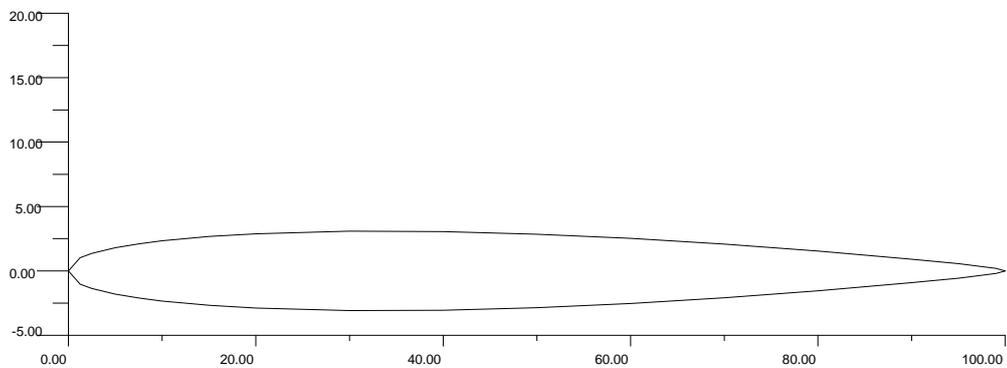


Figure 7:PROFIL NACA-M1

**PROFIL B-29 ROOT:**

**Extrados**

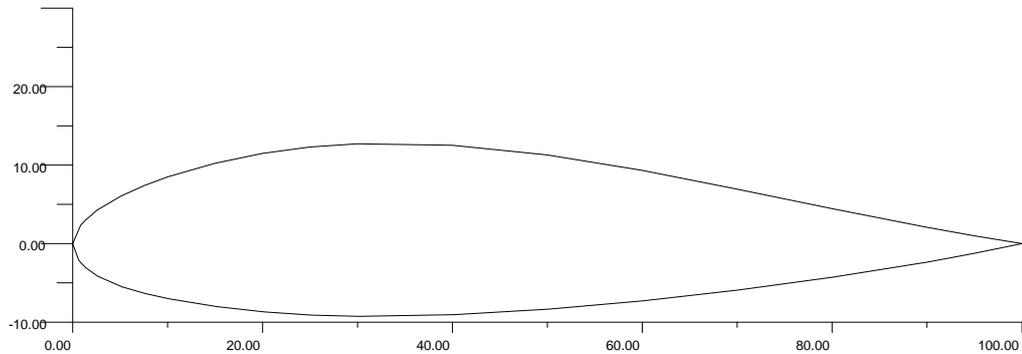
<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.82707	002.33088
001.32000	002.98517
002.55597	004.25630
005.03554	006.03942

**Intrados**

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.61140	-02.08973
000.62188	-02.10669
000.87532	-02.47377

001.38088 -03.07807  
 002.64052 -04.16431  
 005.15127 -05.48774  
 007.65762 -06.37165  
 010.16176 -07.03581  
 015.16652 -08.01452  
 020.16828 -08.69356  
 025.16733 -09.10290  
 030.16387 -09.26252  
 040.15163 -09.05235  
 050.13438 -08.34273  
 060.11363 -07.28351  
 070.08976 -05.91463  
 080.06328 -04.28603  
 090.03380 -02.35778  
 095.01740 -01.22883  
 100.00000 000.00000

005.219 003.435  
 005.969 003.648  
 006.728 003.842  
 007.672 004.057  
 008.617 004.243  
 008.977 004.307  
 009.217 004.346  
 009.337 004.365  
 009.457 004.384  
 009.577 004.401  
 009.766 004.428  
 009.955 004.453  
 010.145 004.476  
 010.522 004.521  
 010.901 004.563  
 011.493 004.624  
 011.871 004.662  
 012.628 004.730  
 013.619 004.815  
 014.943 004.915  
 016.266 005.004  
 017.401 005.074  
 018.724 005.146



**Figure 8:PROFIL B-29 ROOT**

**PROFIL NLR-7223-62:**

**Extrados**

(x) (y)  
 000.000 000.000  
 000.125 000.617  
 000.416 001.023  
 000.978 001.508  
 001.748 002.005  
 002.729 002.515  
 003.956 003.017  
 004.498 003.207

020.093 005.212  
 021.605 005.275  
 022.738 005.317  
 024.162 005.363  
 025.673 005.404  
 027.184 005.438  
 028.701 005.465  
 030.211 005.486  
 031.722 005.501

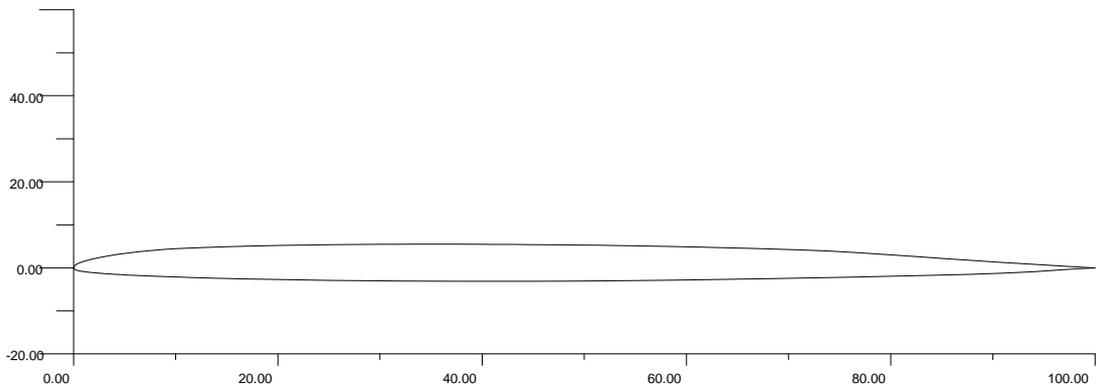
033.421 005.512  
 034.814 005.516  
 036.513 005.514  
 038.024 005.508  
 039.533 005.497  
 041.232 005.478  
 042.929 005.455  
 044.628 005.425  
 046.137 005.394  
 047.976 005.351  
 049.485 005.310  
 051.353 005.254  
 053.239 005.189  
 054.748 005.133  
 056.635 005.055  
 058.091 004.991  
 059.600 004.919  
 061.263 004.833  
 062.960 004.740  
 064.741 004.635  
 066.250 004.539  
 067.758 004.438  
 071.085 004.192  
 073.974 003.909  
 076.970 003.505  
 079.864 003.053  
 082.615 002.614  
 085.176 002.196  
 087.705 001.772  
 090.954 001.262  
 094.056 000.820  
 097.405 000.345  
 098.674 000.161  
 100.000 000.000

**Intrados**

**(x) (y)**  
 000.000 000.000  
 000.054 -00.251  
 000.118 -00.363  
 000.265 -00.520  
 000.450 -00.641  
 000.730 -00.765  
 000.992 -00.860  
 001.334 -00.964  
 001.749 -01.072  
 002.181 -01.170  
 002.769 -01.286  
 003.500 -01.411  
 003.938 -01.477  
 004.638 -01.573  
 005.274 -01.654

006.154 -01.754  
 006.978 -01.840  
 007.732 -01.913  
 008.778 -02.008  
 009.531 -02.072  
 010.662 -02.162  
 011.645 -02.234  
 012.776 -02.313  
 013.908 -02.387  
 015.039 -02.455  
 016.170 -02.520  
 017.490 -02.589  
 018.864 -02.656  
 020.185 -02.714  
 021.505 -02.768  
 022.825 -02.817  
 024.145 -02.862  
 025.655 -02.908  
 027.168 -02.949  
 028.678 -02.985  
 031.696 -03.043  
 034.904 -03.083  
 038.098 -03.107  
 041.307 -03.115  
 044.726 -03.106  
 048.125 -03.078  
 051.389 -03.030  
 054.720 -02.959  
 058.067 -02.861  
 061.492 -02.754  
 064.771 -02.638  
 067.813 -02.512  
 070.940 -02.375  
 074.105 -02.238  
 076.943 -02.097  
 079.937 -01.947  
 082.514 -01.805  
 085.298 -01.653  
 087.654 -01.505  
 090.896 -01.250  
 094.070 -00.885  
 097.353 -00.352  
 098.677 -00.135  
 100.000 000.000

000.9000 001.1644  
 001.0000 001.2265  
 001.2000 001.3416  
 001.2500 001.3687  
 001.4000 001.4469  
 001.6000 001.5445  
 001.8000 001.6357  
 002.0000 001.7215  
 002.5000 001.9174  
 003.0000 002.0924  
 003.5000 002.2513  
 004.0000 002.3974  
 005.0000 002.6593  
 006.0000 002.8898  
 007.0000 003.0959  
 007.5000 003.1913  
 008.0000 003.2822  
 009.0000 003.4519  
 010.0000 003.6073  
 012.0000 003.8820  
 014.0000 004.1162  
 015.0000 004.2202



**Figure 9:PROFIL NLR-7223-62**

**PROFIL RAE 101:**

***Extrados***

**(x) (y)**  
 000.0000 000.0000  
 000.1000 000.3905  
 000.2000 000.5518  
 000.3000 000.6753  
 000.4000 000.7792  
 000.5000 000.8705  
 000.6000 000.9529  
 000.7000 001.0285  
 000.7500 001.0642  
 000.8000 001.0987

016.0000 004.3163  
 018.0000 004.4867  
 020.0000 004.6304  
 022.0000 004.7496  
 024.0000 004.8455  
 025.0000 004.8851  
 026.0000 004.9190  
 028.0000 004.9700  
 030.0000 004.9969  
 032.0000 004.9956  
 034.0000 004.9724  
 035.0000 004.9536

036.0000 004.9307  
 038.0000 004.8728  
 040.0000 004.8005  
 042.0000 004.7153  
 044.0000 004.6183  
 045.0000 004.5657  
 046.0000 004.5106  
 048.0000 004.3932  
 050.0000 004.2670  
 052.0000 004.1329  
 054.0000 003.9915  
 055.0000 003.9183  
 056.0000 003.8436  
 058.0000 003.6899  
 060.0000 003.5310  
 062.0000 003.3676  
 064.0000 003.2003  
 065.0000 003.1154  
 066.0000 003.0297  
 068.0000 002.8563  
 070.0000 002.6807  
 072.0000 002.5034  
 074.0000 002.3251  
 075.0000 002.2357  
 076.0000 002.1463  
 078.0000 001.9674  
 080.0000 001.7886  
 082.0000 001.6097  
 084.0000 001.4309  
 085.0000 001.3414  
 086.0000 001.2520  
 088.0000 001.0731  
 090.0000 000.8943  
 092.0000 000.7154  
 092.5000 000.6707  
 094.0000 000.5366  
 095.0000 000.4471  
 096.0000 000.3577  
 097.5000 000.2236  
 098.0000 000.1789  
 098.7500 000.1118  
 100.0000 000.0000

**Intradados**

(x) (y)  
 000.0000 000.0000  
 000.1000 -000.3905  
 000.2000 -000.5518  
 000.3000 -000.6753  
 000.4000 -000.7792  
 000.5000 -000.8705  
 000.6000 -000.9529  
 000.7000 -001.0285  
 000.7500 -001.0642  
 000.8000 -001.0987

000.9000 -001.1644  
 001.0000 -001.2265  
 001.2000 -001.3416  
 001.2500 -001.3687  
 001.4000 -001.4469  
 001.6000 -001.5445  
 001.8000 -001.6357  
 002.0000 -001.7215  
 002.5000 -001.9174  
 003.0000 -002.0924  
 003.5000 -002.2513  
 004.0000 -002.3974  
 005.0000 -002.6593  
 006.0000 -002.8898  
 007.0000 -003.0959  
 007.5000 -003.1913  
 008.0000 -003.2822  
 009.0000 -003.4519  
 010.0000 -003.6073  
 012.0000 -003.8820  
 014.0000 -004.1162  
 015.0000 -004.2202  
 016.0000 -004.3163  
 018.0000 -004.4867  
 020.0000 -004.6304  
 022.0000 -004.7496  
 024.0000 -004.8455  
 025.0000 -004.8851  
 026.0000 -004.9190  
 028.0000 -004.9700  
 030.0000 -004.9969  
 032.0000 -004.9956  
 034.0000 -004.9724  
 035.0000 -004.9536  
 036.0000 -004.9307  
 038.0000 -004.8728  
 040.0000 -004.8005  
 042.0000 -004.7153  
 044.0000 -004.6183  
 045.0000 -004.5657  
 046.0000 -004.5106  
 048.0000 -004.3932  
 050.0000 -004.2670  
 052.0000 -004.1329  
 054.0000 -003.9915  
 055.0000 -003.9183  
 056.0000 -003.8436  
 058.0000 -003.6899  
 060.0000 -003.5310  
 062.0000 -003.3676  
 064.0000 -003.2003  
 065.0000 -003.1154  
 066.0000 -003.0297  
 068.0000 -002.8563

070.0000 -002.6807	001.20957 002.43900
072.0000 -002.5034	001.39586 002.58471
074.0000 -002.3251	001.63900 002.76143
075.0000 -002.2357	001.83529 002.89471
076.0000 -002.1463	002.17043 003.10729
078.0000 -001.9674	002.50600 003.30343
080.0000 -001.7886	003.82014 003.96357
082.0000 -001.6097	004.03171 004.05543
084.0000 -001.4309	004.26057 004.15114
085.0000 -001.3414	004.49714 004.24686
086.0000 -001.2520	004.75314 004.34614
088.0000 -001.0731	005.02629 004.44800
090.0000 -000.8943	005.31729 004.55200
092.0000 -000.7154	005.62771 004.65786
092.5000 -000.6707	005.95929 004.76571
094.0000 -000.5366	006.31214 004.87471
095.0000 -000.4471	006.68914 004.98514
096.0000 -000.3577	007.09000 005.09614
097.5000 -000.2236	
098.0000 -000.1789	
098.7500 -000.1118	
100.0000 000.0000	

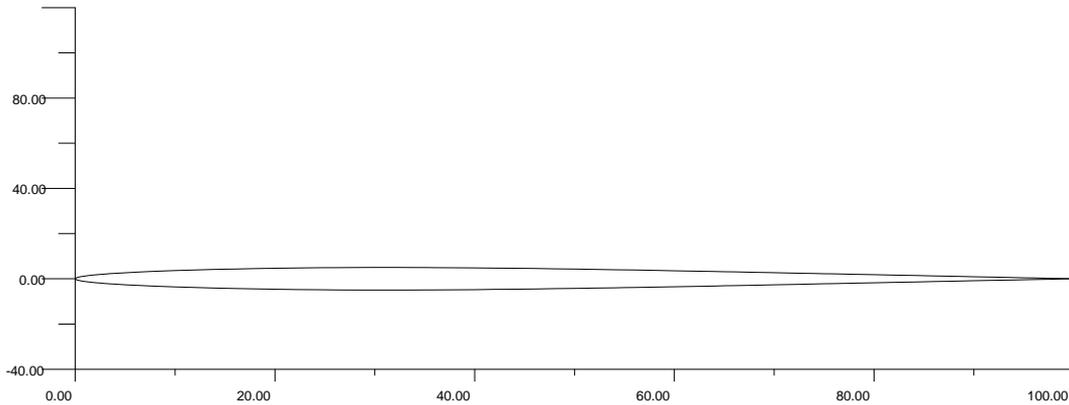


Figure 10:PROFIL RAE 101

**PROFIL GRUMMAN K-3:**

**Extrados**

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>	
000.00000	000.00000	007.51571 005.20743
000.04886	000.57214	007.96643 005.31886
000.15386	001.06043	008.44271 005.43029
000.20200	001.20129	008.94343 005.54129
000.25914	001.34300	009.47000 005.65229
000.31186	001.45029	010.02157 005.76286
000.38543	001.57514	010.59843 005.87314
000.47071	001.69829	011.20114 005.98314
000.58000	001.83600	011.83043 006.09286
000.68843	001.95829	012.48714 006.20214
000.82629	002.09986	013.17014 006.31071
000.99843	002.26014	013.88129 006.41857

014.62143 006.52586  
 015.39000 006.63200  
 016.13686 006.73043  
 016.91000 006.82757  
 017.71143 006.92371  
 018.54086 007.01843  
 019.39843 007.11143  
 020.28471 007.20257  
 021.19943 007.29143  
 022.14343 007.37814  
 023.11686 007.46200  
 024.11829 007.54314  
 025.14843 007.62086  
 026.20586 007.69514  
 027.29143 007.76557  
 028.40300 007.83200  
 029.54000 007.89414  
 030.70257 007.95171  
 031.88786 008.00457  
 033.09529 008.05243  
 034.32414 008.09471  
 035.57186 008.13129  
 036.83757 008.16186  
 038.11843 008.18643  
 039.41443 008.20457  
 040.72057 008.21600  
 042.03357 008.22086  
 043.35143 008.21914  
 044.66657 008.21071  
 045.97629 008.19571  
 047.27386 008.17443  
 048.55114 008.14729  
 049.80371 008.11443  
 051.02629 008.07657  
 052.22157 008.03371  
 053.38314 007.98657  
 054.51071 007.93529  
 055.59843 007.88071  
 056.64200 007.82329  
 057.64200 007.76343  
 058.59743 007.70171  
 059.51100 007.63829  
 060.38271 007.57414  
 061.21743 007.50771  
 062.01800 007.44171  
 062.78971 007.37357  
 063.53586 007.30486  
 064.26300 007.23300  
 064.97643 007.15957  
 065.68086 007.08386  
 066.38243 007.00414  
 067.09114 006.92000  
 067.80857 006.82914  
 071.76971 006.23014

073.21471 005.99429  
 074.70571 005.73614  
 076.52600 005.39671  
 078.19986 005.06757  
 079.62300 004.77214  
 081.18129 004.43214  
 083.25857 003.94843  
 085.46343 003.40514  
 087.83143 002.77714  
 090.22829 002.07614  
 091.96157 001.52829  
 093.76943 000.90271  
 095.33286 000.32571  
 097.28586 -00.38986  
 098.90486 -00.96900  
 099.60643 -01.20514  
 100.00000 -01.32229

**Intrados**

<b>(x)</b>	<b>(y)</b>
000.00000	000.00000
000.03100	-00.75229
000.11129	-01.25671
000.22557	-01.75200
000.36986	-02.18157
000.55971	-02.61943
000.80329	-03.06029
001.10157	-03.49057
001.57857	-04.03014
001.78443	-04.22057
001.98043	-04.39357
002.29600	-04.64700
002.81086	-05.01057
003.54271	-05.45171
004.51557	-05.94271
005.70871	-06.44200
007.04843	-06.90557
007.41900	-07.02771
008.59486	-07.35500
010.17029	-07.72429
011.37200	-07.96300
012.67543	-08.18786
013.90057	-08.37186
014.64771	-08.46900
015.22171	-08.54514
016.38014	-08.67786
016.65686	-08.70371
018.10486	-08.84686
019.09529	-08.92714
021.19743	-09.07386

022.99400 -09.16971  
 024.26600 -09.22214  
 025.75586 -09.26814  
 027.12729 -09.29600  
 028.57757 -09.31171  
 030.10900 -09.31100  
 031.72943 -09.29171  
 033.44229 -09.24971  
 035.49871 -09.16871  
 037.12514 -09.08000  
 038.66614 -08.97500  
 040.10714 -08.85829  
 041.14871 -08.76300  
 043.21914 -08.54586  
 045.42043 -08.27486  
 047.76771 -07.94414  
 050.24986 -07.55214  
 052.82900 -07.10729  
 055.31829 -06.65000  
 057.60700 -06.21257  
 059.08929 -05.92229  
 061.02186 -05.54214  
 062.82757 -05.18729  
 065.06800 -04.75157  
 067.24843 -04.33714  
 069.90900 -03.85157  
 071.92486 -03.50343  
 074.18586 -03.13214  
 077.55743 -02.62900  
 079.57643 -02.35871  
 081.77829 -02.09357  
 083.81357 -01.87900  
 086.09457 -01.67443  
 088.46300 -01.50700  
 091.27500 -01.37843  
 093.83243 -01.33900  
 095.98229 -01.37814  
 097.93386 -01.57214  
 099.12757 -01.80571  
 099.66357 -01.95957  
 100.00000 -01.32229

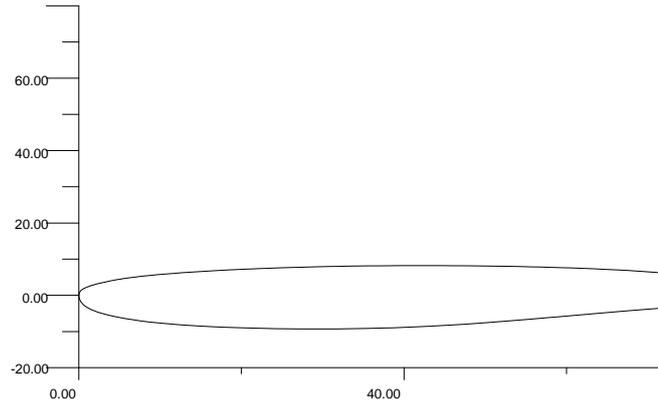


Figure 11:PROFIL GRUMM

## Références

- [1] Zebbiche T., "Résistance des matériaux," Cours pour les l'ingénieurs, Department of Aeronautics, Faculty of Technology, Université SAAD Dahleb of Blida, 2013.
- [2] Miroloubov I. et al., "Résistance des matériaux manuel de résolution de problèmes," 4<sup>ème</sup> Edition, Edition Mir, Moscou, 1977.
- [3] Muvdi B. B. and McNabb J. W., "Engineering Mechanics of Materials," Macmillan Publishing company, 1984.
- [4] Pissatenko G., Yakoulev at Matveev V., "Aide mémoire de résistance des matériaux," Edition Moscou, 1979.
- [5] Abbott I. H. and von Doenhoff A. E., "Theory of wing sections: Including a summary of Airfoil data," Dover Publications, Inc., New York, Vol. II, 1959.
- [6] Boun-jad M. et Zebbiche T., "Résolution de l'équation de Poisson dans un domaine simplement connexe," Editions Universitaire Européenne, Avril 2012, ISBN 978-3-8417-9282-2.
- [7] Imbert J. F., 'Analyse des Structures par Eléments Finis,' 3<sup>ème</sup> Edition, Sup'Aéro, Cepadues-Editions, 1991, France.
- [8] Kardestuncer H. et al, 'Finite Element Handbook,' McGraw-Hill Book Company, 2010, USA.
- [9] Reddy J. N., 'An Introduction to the Finite Element Method,' Edition Mc-Graw Hill Book Company, 2007.
- [10]Gouri D. et Touzot G. 'Une présentation de méthode des éléments finis,' Université Laval, Moline S. A. Editeur, Paris, 1999.
- [11] [http://www.ae.illinois.edu/mseelig/ads/coord\\_database.html#A](http://www.ae.illinois.edu/mseelig/ads/coord_database.html#A)
- [12] Demidovitch B. et Marron I., 'Eléments de Calcul Numérique,' Edition Mir, Moscou, 1987.

- [13] Ralston, A. and Rabinowitz, A., "A First Course in Numerical Analysis", McGraw Hill Book Company, 2005.
- [14] Fletcher C. A. J., 'Computational Techniques for Fluid Dynamics,' Volume II, Specific Techniques for Different Flow Categories, Springer-Verlag, 1988, Austria.
- [15] IRWIN E. Treager, 'Les reacteurs 'principes de fonctionnement, traduction DEDIER Féminier, FIRST American Edition 1974, version française 1983, OTTAWA.