

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En

Mathématiques Appliquées

Option : Recherche Opérationnelle

THÈME

*Étude et comparaison de
divers plans d'expériences*

Réalisé par

AOUICHA Mohamed

&

MAKRACHI Djilali

Devant le jury composé de :

Mr. TAMI O.

Maitre de conférences B

Président

Mme. RABER D.

Maitre assistante A

Examineur

Mr. ELMOSSAOUI H.

Maitre de conférences A

Rapporteur

2022/2023

ملخص

معظم المهندسين والفنيين يحسنون منتجاتهم أو عمليات إنتاجهم من خلال التجارب. للأسف، الاستراتيجيات المستخدمة عادة لإجراء هذه التجارب غالبًا ما تكون مكلفة وغير فعالة وتؤدي إلى العديد من التجارب التي يصعب استغلالها. لهذه الأسباب، يلجأ العديد من المهندسين والفنيين إلى تخطيط التجارب تسمح خطط التجارب بتنظيم التجارب المصاحبة للبحوث العلمية أو الدراسات الصناعية بأفضل طريقة. يمكن تطبيقها في العديد من التخصصات وجميع الصناعات بدءًا من اللحظة التي نبحث فيها عن الرابط بين متغير مهم (y) والمتغيرات (x_i). لذلك، هدفها هو تحديد النماذج الرياضية التي تربط المتغيرات المهمة بالمتغيرات التحكيمية.

في هذا البحث، نقدم نظرة شاملة على أنواع مختلفة من خطط التجارب، التي تستخدم على نطاق واسع في البحث التجريبي وتشكل أساس هذه الطريقة. ثم أجرينا مقارنة بناءً على عدد من معايير الأمثلة لتلبية احتياجات كل دراسة ومستخدم.

الكلمات الرئيسية: خطط التجارب، خطط العوامل عند مستويين، خطط مركبة، معايير الأمثلة، خطط

Box-Behenken.

Résumé

La plupart des ingénieurs et techniciens améliorent leurs produits ou leurs processus de production à partir des expériences. Malheureusement, les stratégies couramment utilisées pour mener ces expériences sont souvent coûteuses et peu performantes et elles conduisent à de nombreuses expériences difficiles exploitables. Pour toutes ces raisons, de nombreux ingénieurs et techniciens font appel à la planification des expériences.

Les plans d'expériences permettent d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique ou des études industrielles. Ils sont applicables à de nombreuses disciplines et à toutes les industries à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt (y) et des variables (x_i). Elle a donc pour but de déterminer des modèles mathématiques reliant les grandeurs d'intérêt aux variables contrôlables.

Dans ce mémoire, nous présentons un état d'art sur les différents types de plans d'expériences, qui sont largement utilisés dans la recherche expérimentale et constituent les fondements de cette méthode. Ensuite, nous avons effectué une comparaison selon certain nombre de critères d'optimalité pour répondre aux besoins spécifiques de chaque étude et de chaque utilisateur.

Mots clés : Plans d'expériences, plans factoriel à deux niveaux, plans composite, critères d'optimalités, plans de Box-Behenken.

Abstract

Most engineers and technicians improve their products or production processes based on experiments. Unfortunately, the commonly used strategies for conducting these experiments are often costly, inefficient, and lead to numerous unexplainable experiments. For these reasons, many engineers and technicians turn to designs of experiments.

Designs of experiments allow for optimal organization of trials accompanying scientific research or industrial studies. They are applicable to various disciplines and industries as long as the relationship between an outcome variable (y) and controllable variables (x_i) is sought.

The aim is to determine mathematical models that relate the outcome variables to the controllable variables. In this thesis, we present a state-of-the-art overview of different types of experimental designs, which are widely used in experimental research and form the foundations of this method. Additionally, we conducted a comparison based on various optimality criteria to meet the specific needs of each study and user.

Keywords: Experimental designs, two-level factorial designs, composite designs, optimality criteria, Box-Behnken designs.

REMERCIEMENTS

Nous remercions en premier lieu **Dieu**, le tout puissant de nous avoir donné tant de courage, de patience et de volonté pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous tenons à remercier Mr. H. Elmossaoui, Maître de Conférences à l'Université Blida1, notre directeur de mémoire, qui nous a encadré et conseillé judicieusement durant ce travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à Mr. O. Tami, le Chef de département de Mathématiques à l'Université Blida1 pour toute l'aide qu'il nous donne.

Nous profitons de cette occurrence pour exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nous n'oublierons pas de remercier les membres de la scolarité du département de Mathématiques en particulier : Mr. H. hadj allah, Mme N. Djenas et Mme S. Takarli

Enfin, que les membres de jury trouvent ici l'expression de toute notre gratitude pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail



DEDECACE

Je Dédie Ce Travail :

A Mes Très Chers PARENTS Mon FRERE Et Ma SŒUR Qui M'ont Toujours Soutenu Pendant Tout Ma Vie.

A Ma FEMME Qui M'a Toujours Soutenu.

A Tout Mes COLLEQUE De Travail.

Je Leur Souhaite Le Bonheur Et La Bonne Santé.

Djil Makrachi



DEDECACE

Je Dédie Ce Présent Mémoire :

A Mes Très Chers PARENTS Mon FRERE Et Mes SŒURS Qui Ont Toujours Soutenu Pendant Tout Ma Vie.

A la Famille Aouicha

&

A Tout Mes COLLEQUE De Travail.

A Tout Ceux Qui Ont Contribué De Près Ou De Loin Pour L'achèvement De Ce Modeste Travail

Je Leur Souhaite Le Bonheur Et La Bonne Santé.

MOHAMED



Table Des Matières

Résumé	
Remerciements	
Table Des Matières	
Liste Des Illustrations, Graphiques Et Tableaux	
Introduction	10
1. Introduction à la Méthodologie de la Méthode de Plans d'Expériences	
1.1. Historique	12
1.2. La méthode des plans d'expériences	13
1.3. Intérêt de la méthode des plans d'expériences	13
1.4. Vocabulaire de base des plans d'expériences	14
1.4.1. Réponse	15
1.4.2. Facteurs et espace expérimental	15
1.4.3. Domaine d'étude et Surface de réponse	17
1.4.4. Coordonnées centrées réduites	18
1.4.5. Plans d'expériences	18
1.4.6. Matrice d'expériences	19
2. Outils Mathématiques Pour les Plans d'Expériences	
2.1. Notion de modélisation mathématique	20
2.1.1. Modèle statistique	20
2.1.2. Modélisation linéaire	21
2.2. Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés	21
2.3. Prédiction de la réponse moyenne	24
2.4. Fonction de variance de prédiction	25
2.5. Analyse de la variance	25
2.6. Tests statistiques	28
2.6.1. Le coefficient de corrélation multiple R^2	28
2.6.2. Le F de Fisher	28
2.7. Conclusion	28
3. Étude de divers plans d'Expériences	
3.1. Plans factoriels complets à deux niveaux	29
3.1.1. Construction des plans factoriels complets à deux niveaux	30

3.1.2. Plan factoriel à deux facteurs	32
3.1.3. Plans factoriels à trois facteurs 2^3	34
3.1.4. Plan complet à quatre facteurs 2^4	35
3.1.5. Plan complet 2^k	35
3.1.6. Optimalité des plans 2^k	36
3.1.7. Avantages et inconvénients des plans factoriels complets à deux niveaux	36
3.2. Plans de MOZZO	36
3.2.1. Plan de Mozzo pour deux facteurs	37
3.2.2. Plan de Mozzo pour trois facteurs	38
3.2.3. Avantages et inconvénients	39
3.3. Plans composites	39
3.3.1. Construction des plans composites	39
3.3.2. Les différentes classes de plans composites	40
3.3.3. Propriétés des plans composites	42
3.3.4. Avantages et inconvénients	45
3.4. Plans factoriels complets à trois niveaux	46
3.4.1. Construction des plans complets à trois niveaux	46
3.4.2. Avantages et inconvénients	46
3.5. Plans de Box-Behnken	47
3.5.1. Construction des plans de Box-Behnken	48
3.5.2. Propriété du plan de Box-Behnken	50
3.5.3. Avantages et inconvénients	52
3.6. Les plans de Dœhlert	52
3.6.1. Plans de Doehlert pour 2 facteurs	53
3.6.2. Plans de Doehlert pour 3 facteurs	54
3.6.3. Plans de Doehlert pour n facteurs	55
3.6.4. Plans de Doehlert et de Box-Behnken pour 3 facteurs	55
3.6.5. Propriété du plan de Doehlert	56
3.6.6. Avantages et inconvénients	57
3.7. Les plans de Roquemoire	57
3.7.1. Plan 311A de Roquemoire	57
3.7.2. Autres plans de Roquemoire	60
3.7.3. Avantages et inconvénients	61
4. Etude Comparative des divers plans d'Expériences	

4.1. Critères d'optimalités pour les plans d'expériences	62
4.1.1. Critère de O-optimalité	62
4.1.2. Critère d'orthogonalité	62
4.1.3. Critère de presque'orthogonalité	63
4.1.4. Critère de D-optimalité	63
4.1.5. Critère de A-optimalité	63
4.1.6. Critère de G-optimalité	63
4.1.7. Critère de E-Optimalité	63
4.1.8. Critère M	64
4.1.9. Critère d'iso-variance par rotation	64
4.2. Comparaison des qualités des matrices d'expériences	64
4.2.1. Modèle polynômial du premier degré	65
4.2.2. Modèle polynomial du second degré	66
4.2.3 Matrice d'expérience à quatre variables	68
Conclusion	70
Appendice	71
A. Code Matlab Pour Les Résultats Présentés En Chapitre 4	71
Références	79

Liste Des Illustrations, Graphiques Et Tableaux

Figure 1.1	L'environnement du système	14
Figure 1.2	Domaine de variation du facteur	16
Figure 1.3	Définition de l'espace expérimental	16
Figure 1.4	Niveaux des facteurs définissant des points expérimentaux dans l'espace expérimental	16
Figure 1.5	Définition du domaine d'étude pour deux facteurs	17
Figure 1.6	Définition de la surface de réponse	18
Figure 1.7	La théorie des plans d'expériences montre que les meilleurs emplacements sont les sommets A, B, C et D du domaine d'étude	19
Figure 3.1	Domaine d'étude d'un plan 2^2	31
Figure 3.2	Domaine expérimental d'un plan 2^3	31
Figure 3.3	Effet du facteur 1	33
Figure 3.4	Domaine d'étude du plan de Mozzo pour deux facteurs	37
Figure 3.5	Domaine d'étude du plan de Mozzo pour trois facteurs	38
Figure 3.6	Plans composites centrés dans les faces	40
Figure 3.7	Plan composite centrés pour l'étude de deux facteurs	41
Figure 3.8	Domaine d'étude pour un plan 3^2	47
Figure 3.9	Domaine d'étude pour un plan 3^3	47
Figure 3.10	Plan de Box-Behnken pour trois facteurs	49
Figure 3.11	Plan de Doehlert pour 2 facteurs	53
Figure 3.12	Plan de Doehlert pour trois facteurs	54
Figure 3.13	Un plan de Box-Behnken pour trois facteurs peut être regardé comme un plan de Doehlert	55
Figure 3.14	Emplacement des points expérimentaux du plan de Roquemore 311A.	58
Tableau 1.1	Matrice d'expériences	19
Tableau 3.1	Matrice d'expériences d'un plan 2^2	30
Tableau 3.2	Matrice d'expériences d'un plan 2^3	30
Tableau 3.3	Matrice des effets d'un plan 2^3	34
Tableau 3.4	Plans de Mozzo pour 2, 3 et 4 facteurs	37
Tableau 3.5	Matrice d'expériences d'un plan composite pour deux facteurs	41
Tableau 3.6	Matrice d'expérience pour un plan 3^2	46
Tableau 3.7	Plan de Box-Behnken pour trois facteurs	49

Tableau 3.8	Matrice d'expériences d'un plan de Doehlert pour deux facteurs	53
Tableau 3.9	Plans de Roquemore 311A pour trois facteurs	58
Tableau 3.10	Plans de Roquemore 311B pour trois facteurs	60
Tableau 3.11	Plans deRoquemore 416B pour quatre facteurs	61
Tableau 3.12	Plans de Roquemore 416C pour quatre facteurs	61
Tableau 4.1	Caractéristiques des matrices d'expériences du premier degré	65
Tableau 4.2	Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à deux variables	66
Tableau 4.3	Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à trois variables	67
Tableau 4.4	Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à quatre variables	68

INTRODUCTION

La méthode des plans d'expériences (Méthodologie de la Recherche Expérimentale) est utile à toutes les personnes qui entreprennent des recherches scientifiques ou des études industrielles. L'emploi des plans d'expériences pour l'étude empirique d'une loi de réponse, pose aux statisticiens ou aux chercheurs des problèmes particuliers. Alors qu'ils ont peu d'informations sur cette loi, ils ne peuvent disposer en général que d'un échantillon d'observations très limité au regard du nombre des paramètres des modèles qu'ils peuvent envisager pour leurs analyses. Avant toute observation de la réponse, il doit donc préciser, non seulement quels modèles utiliser, mais encore, comment organiser les expériences. En effet, la qualité de l'analyse statistique dépend étroitement du plan expérimental utilisé pour observer la réponse. Par ailleurs, il faut généralement recourir à l'analyse combinatoire pour construire les plans d'expériences proposés.

Les plans d'expériences ont été étudiés par des auteurs comme Fisher [1], Kiefer [2], Box [3]...etc. Les plans classiques ont tendance à positionner les points aux bords du domaine pour prendre en compte la variation aléatoire et offrir une tendance plus fiable en présence d'erreurs de mesures. La plupart des critères de ces plans utilisent l'erreur expérimentale qui existe dans le cadre d'expériences réelles. La diversité des plans d'expériences proposés dans la littérature vient du fait qu'il n'existe pas un plan parfait où tous les critères d'optimalité sont vérifiés en même temps. Chaque plan présente des avantages pour un certain critère d'optimalité et un inconvénient pour un autre. Il s'agira donc de trouver un compromis pour les besoins de chaque étude.

L'objectif de notre travail est de présenter un état d'art sur la méthode de plans d'expériences via l'étude de certain nombre de plans d'expériences largement utilisées dans la recherche expérimentale et de réaliser une étude comparative des ces plans étudiés en utilisant certain nombre de critères d'optimalités afin d'évaluer et comparer la qualité de ces plans.

La thèse est composée de quatre chapitres organisés comme suit :

- Le premier chapitre présente une introduction à la méthode de plans d'expériences et la théorie de la méthodologie des plans d'expériences.
- Le deuxième chapitre introduit les outils mathématiques utilisés par la méthode de plans d'expériences, dont la notion de modèle mathématique et la régression multi linéaire seront décrits.
- Le troisième chapitre est consacré à un état d'art sur les plans d'expériences couramment utilisés en expérimentation.

- Le quatrième chapitre comporte une étude comparative sur les plans présentés dans le troisième chapitre à l'aide de certain nombre de critères d'optimalités.

Enfin, une conclusion termine ce travail, donnant quelques perspectives pour des travaux futurs.

En annexe, nous présentons les programmes développés dans le logiciel MATLAB permettant de réaliser les tables de comparaison présentées dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE I

Introduction à la Méthodologie de la Méthode de Plans d'Expériences

Dans ce chapitre sont synthétisés et résumés les différentes hypothèses entrant en jeu dans l'utilisation de la méthode des plans d'expériences. Une méthode utile à tout expérimentateur qui entreprend des recherches scientifiques ou des études industrielles. Elle est applicable à toutes les disciplines à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt y , et des variables x_i pouvant modifier les valeurs de cette dernière. Pour cela il faut suivre des règles mathématiques et adopter une démarche rigoureuse.

1.1. Historique

La méthode des plans d'expériences est à la fois nouvelle et ancienne [1]. Dès le moyen âge Nicolas Oresme (1325-1382) aborde cette question dans ses écrits. Inspirateur de Descartes et Leibnitz, Francis Bacon (1561-1626) est un des précurseurs de la méthode expérimentale [2]. Cette méthode est récente puisqu'on peut la faire démarrer avec les travaux de Sir Ronald Fisher [3]. Suite à son emploi, en 1919, au centre de recherche agronomique situé au nord de Londres. Il cherche à augmenter les rendements agricoles en combinant divers types d'engrais, de variétés végétales, de types de sols...etc. Face à l'impossibilité de réaliser la totalité des expériences, ceci l'amène à proposer des configurations expérimentales basées sur des modèles statistiques rigoureux (tels que les carrés latins).

Divers statisticiens comme Yate, Youden, Cochran, Plackett et Burman, et bien d'autres, ont par la suite marché dans les traces de Fisher afin de promouvoir et développer l'utilisation des techniques de planification expérimentales dans d'autres domaines que l'agronomie. Dès les années 50, les travaux de Box [4] et de ses collaborateurs s'appuyant notamment sur les travaux de Yate, développent des méthodes particulières de construction de plans fractionnaires à deux niveaux. Mais ce sont certainement les travaux de Taguchi et Masuyama qui ont permis une vaste diffusion des plans d'expériences en élaborant des tables permettant de construire des plans d'expériences orthogonaux adaptés à la majorité des problèmes industriels [5]. Ces tables ont été publiées en 1959 et 1961.

De nombreux chercheurs contemporains ont continué le développement de cette branche de la Statistique dans des voies diverses et variées : adaptation des plans d'expériences pour les problèmes de mélanges [6], introduction d'effets de blocs [7], utilisation de modèles non-linéaires[8], utilisation de modèles contenant des effets de voisinage, plans d'expériences pour expériences numériques, ...etc.

1.2. La méthode des plans d'expériences

Les plans d'expériences sont applicables à de nombreuses disciplines et à toutes les industries à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt y , et des variables x_i que nous appellerons par la suite réponse et facteur respectivement. La modélisation mathématique consiste à trouver une fonction f telle que $y = f(x)$ avec $x \in \mathfrak{R}^k$. Une méthode classique d'étude consiste à la mesure de la réponse y pour plusieurs valeurs de la variable x_i tout en laissant fixe la valeur des $(k-1)$ autres variables. On itère alors cette méthode pour chacune des variables. Ainsi, par exemple, si nous avons 4 variables et si l'on décide de donner 5 valeurs expérimentales à chacune d'elles, nous sommes conduits à effectuer $5^4 = 625$ expériences. Ce nombre élevé dépasse les limites de faisabilité tant en temps qu'en coût. Il faut donc réduire le nombre d'expériences à effectuer sans pour autant perdre sur la qualité des résultats recherchés.

Avec les plans d'expériences on obtient un maximum de renseignements avec un minimum d'expériences. Pour cela, il faut suivre des règles mathématiques et adopter une démarche rigoureuse. Il existe de nombreux plans d'expériences adaptés à tous les cas rencontrés par un expérimentateur. L'utilisation d'un plan d'expérience donne alors une stratégie dans le choix des méthodes d'expérimentation.

La grande nouveauté de la méthode des plans d'expériences est qu'elle propose une *expérimentation factorielle*, c'est-à-dire que tous les facteurs varient simultanément. Le traitement des résultats se fait à l'aide de la régression linéaire multiple et l'analyse de la variance.

La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle *d'espace expérimental* et celle de *modélisation mathématique* des grandeurs étudiées.

1.3. Intérêt de la méthode des plans d'expériences

L'étude d'un phénomène peut se schématiser de la manière suivante : l'expérimentateur s'intéresse à une grandeur, par exemple le rendement en blé d'une parcelle de terre, le prix de revient d'un produit chimique ou l'usure d'une pièce de moteur automobile. Cette grandeur

dépendra d'un grand nombre de variables. L'étude du phénomène se ramène alors à la mesure de la grandeur en fonction des différentes valeurs que l'on peut donner aux variables.

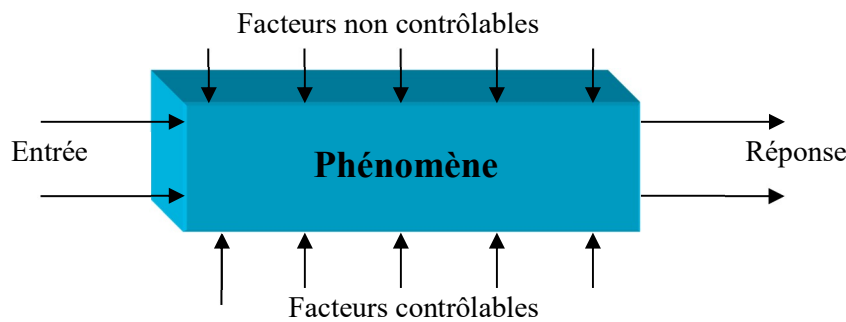


Figure 1.1 : L'environnement du système.

L'intérêt principal de la méthode tient au fait que l'on peut faire varier, à la fois, les niveaux de toutes les variables à chaque expérience, mais de manière programmée et raisonnée. Aussi choquant que cela paraisse au premier abord, le fait de faire varier toutes les variables à la fois n'est pas un inconvénient mais au contraire offre de nombreux avantages parmi lesquels :

- Diminution du nombre des essais,
- Nombre de facteurs étudiés peut être très grand,
- Détection des interactions entre facteurs,
- Meilleure précision sur les résultats,
- Modélisation des résultats et obtention de l'optimum.

Les plans d'expériences permettent l'étude de nombreux facteurs tout en maintenant le nombre d'essais à des valeurs raisonnables. Une de leurs applications principales est la recherche des facteurs influents. La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle d'espace expérimental et celle de modélisation mathématique des grandeurs étudiées [9].

1.4. Vocabulaire de base des plans d'expériences

La technique des plans d'expériences possède un vocabulaire particulier en méthodologie de la recherche expérimentale. Ses termes spécifiques sont classiques mais il peut arriver que dans certains domaines des statistiques, ils aient des significations un peu différentes. Pour que notre présentation soit bien comprise, nous préférons rappeler la signification de quelques termes importants.

1.4.1. Réponse

Une réponse expérimentale d'un système est une manifestation mesurable que l'on observe lorsque l'on fait varier les facteurs étudiés pour connaître l'effet des facteurs sur le système. La réponse peut être de type quantitatif continu, comme un rendement, caractéristique mécanique,...etc. Ou de type qualitatif. Les réponses quantitatives sont en général plus faciles à traiter.

1.4.2. Facteurs et espace expérimental

Les facteurs sont les variables que l'on désire étudier et qui sont supposés avoir une influence sur le système. La valeur donnée à un facteur pour réaliser un essai est appelée «Niveau ». Un facteur peut être :

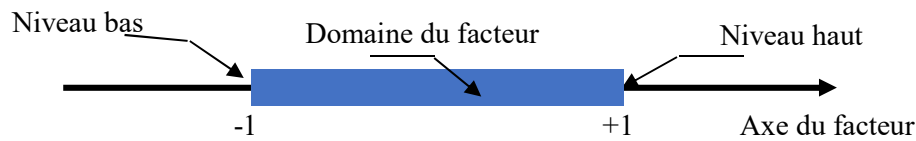
- **Un facteur contrôlable** : C'est un facteur que l'on peut maîtriser, gérer, modifier,
- **Un facteur non contrôlable** : C'est un facteur considéré comme non retenu pour l'étude, car il est non influent et laissé à sa valeur habituelle, soit un facteur inconnu que l'on subit au cours de l'expérimentation,
- **Un facteur quantitatif** : Il se traduit par une grandeur numérique mesurable, se sera une vitesse, une température, une intensité,...etc,
- **Un facteur qualitatif** : Il ne peut pas donner lieu à une quantification directe, on peut seulement identifier ses différents niveaux : ce sera une marque, un procédé, une méthode, un fournisseur...etc.

En général un facteur varie entre deux bornes : la borne inférieure et la borne supérieure. Les facteurs sont définis par leurs plages de variation de la manière suivante (voir la figure 1.2) :

- **Borne inférieure (b_{inf})** : c'est le niveau bas (ou limite basse) que l'on note le plus souvent par -1,
- **Borne supérieure (b_{sup})** : c'est le niveau haut (ou limite haute) que l'on note le plus souvent par +1.

Le premier facteur peut être représenté par un axe gradué et orienté (figure 1.2), l'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre le facteur entre le niveau bas (-1) et le niveau haut (+1) s'appelle le domaine de variation ou domaine du facteur.

Lorsque l'on étudie l'influence d'un facteur, en général, on limite ses variations entre deux bornes (borne inférieure c'est le niveau bas ; borne supérieure c'est le niveau haut).



Figure

1.2 : Domaine de variation du facteur.

L'effet d'un facteur est le changement de réponse provoqué par un changement de niveau dans l'un des facteurs. L'interaction entre deux facteurs caractérise le couplage des effets de ces deux facteurs sur la réponse. S'il y a un second facteur, il est représenté, lui aussi, par un axe. Nous définissons, comme pour le premier facteur, son niveau bas, son niveau haut et son domaine de variation. Ce second axe est disposé orthogonalement au premier. On obtient ainsi un repère cartésien qui définit un espace euclidien à deux dimensions. Cet espace est appelé l'espace expérimental (Figure 1.3).

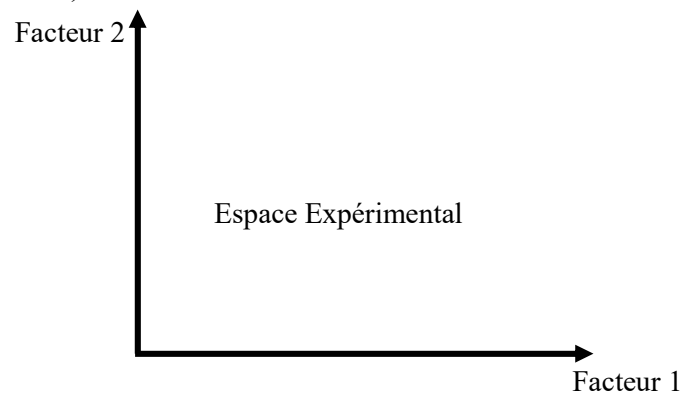


Figure 1.3 : Définition de l'espace expérimental.

Le niveau x_1 du facteur 1 et le niveau x_2 du facteur 2 peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point de l'espace expérimental (Figure 1.4).

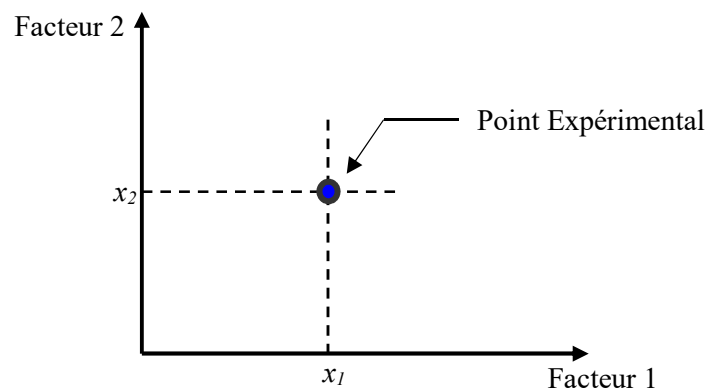


Figure 1.4 : Niveaux des facteurs définissant des points expérimentaux dans l'espace expérimental.

Une expérience donnée est alors représentée par un point dans ce système d'axes. Un plan d'expériences est représenté par un ensemble de points expérimentaux.

1.4.3. Domaine d'étude et Surface de réponse

Le regroupement des domaines des facteurs définit le « domaine d'étude ». Etant donné la définition des k facteurs et de leurs variations respectives, il devient naturel de définir un espace k -dimensionnel, dans lequel chaque point correspond à une configuration des k facteurs. Cet espace est appelé domaine d'étude ou encore espace de recherche. Les points d'expérience peuvent se situer soit à l'intérieur soit sur les frontières du domaine (figure 1.5).

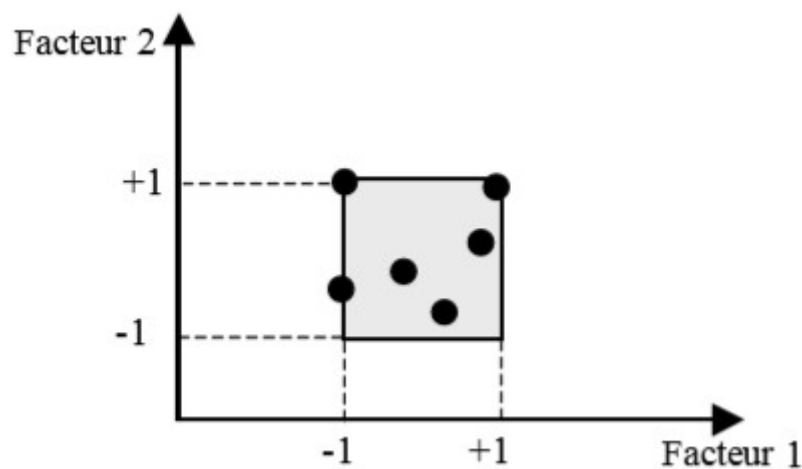


Figure 1.5 : Définition du domaine d'étude pour deux facteurs.

A chaque point du domaine d'étude correspond une réponse. A l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localisent sur une surface appelée surface de réponse. On distingue deux types de surface de réponse.

- **Surface de réponse réelle** : La surface de réponse réelle du procédé est l'ensemble des valeurs que prend la réponse,
- **Surface de réponse théorique** : Dans le cas où les variables sont continues, une surface de réponse théorique peut être calculée. En pratique, cette surface de réponse est construite à partir de quelques points expérimentaux retenus par l'expérimentateur. Généralement, le problème fondamental des plans d'expériences est de chercher à identifier un modèle polynomial qui permet d'obtenir une meilleure approximation de la surface de réponse réelle (figure 1.6).

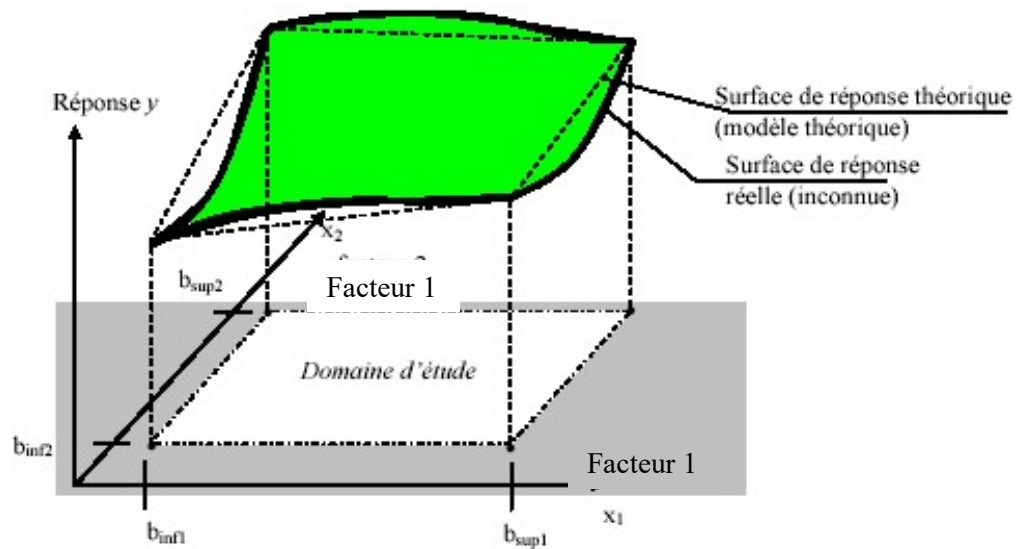


Figure 1.6 : Définition de la surface de réponse

1.4.4. Coordonnées centrées réduites

Lorsqu'on attribue la valeur -1 au niveau bas d'un facteur et la valeur +1 au niveau haut, on effectue deux modifications importantes, on déplace l'origine des mesures et on change l'unité des mesures. Ces deux modifications entraînent l'introduction de nouvelles variables que l'on appelle variables centrées réduites, centrées pour indiquer le changement d'origine et réduites pour signaler la nouvelle unité. Le passage des variables d'origine z aux variables centrées réduites x (variables sans dimensions), et inversement, est donné par la formule suivante :

$$x = \frac{z - z_0}{pas}$$

Où $z_0 = (\text{niveau haut} + \text{niveau bas})/2$, $pas = (\text{niveau haut} - \text{niveau bas})/2$

L'intérêt des variables centrées réduites est de pouvoir présenter les plans d'expériences de la même manière quels que soient les domaines d'études retenus et quels que soient les unités des facteurs. La théorie des plans d'expériences présente ainsi une grande généralité [10].

1.4.5. Plans d'expériences

Chaque point du domaine d'étude représente des conditions opératoires possibles, donc une expérience que l'opérateur peut réaliser.

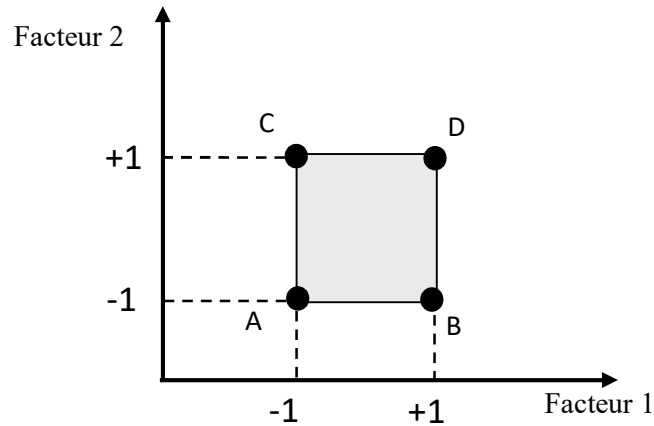


Figure 1.7 : La théorie des plans d'expériences montre que les meilleurs emplacements sont les sommets A, B, C et D du domaine d'étude.

Le choix du nombre et de l'emplacement des points d'expériences est le problème fondamental des plans d'expériences. On a l'habitude d'appeler plans d'expériences des ensembles de points expérimentaux répondant à des propriétés bien précises. Ce sont les plans d'expériences classiques. Ils sont connus et largement publiés. Lorsque les points expérimentaux sont disposés autrement que dans les plans d'expériences classiques, on parle de plans non conventionnels. Leurs propriétés sont le plus souvent moins bonnes que celles des plans classiques. Mais ce sont des plans que l'on rencontre car il n'est pas toujours possible de respecter les impératifs des plans d'expériences classiques [11].

1.4.6. Matrice d'expériences

Une matrice d'expériences est un objet mathématique qui représente, sous forme codée ou normée, l'ensemble des expériences à réaliser. C'est un tableau constitué de n lignes, correspondant aux n expériences, et de k colonnes, correspondant aux k variables (facteurs) étudiées. La matrice d'expériences (Tableau 1.1) définit les essais représentés dans la figure 1.7. L'élément ij de la matrice ainsi formée correspond à la valeur du niveau que prend la $j^{\text{ième}}$ variable à la $i^{\text{ième}}$ expérience. La matrice d'expériences, définit alors, les essais à réaliser. Le terme essai est l'équivalent de point d'expérience [12].

Tableau 1.1 : Matrice d'expériences

N° essai	Facteur 1	Facteur 2
1(A)	-1	-1
2(B)	+1	-1
3(C)	-1	+1
4(D)	+1	+1

CHAPITRE II***Outils Mathématiques Pour les Plans d'Expériences***

Dans ce chapitre sont présentées les notions mathématiques de base utiles pour une bonne compréhension de la méthode des plans d'expériences. Nous allons aussi décrire une méthode de régressions utilisée dans la théorie des plans d'expériences et permettant de calculer les coefficients du modèle mathématique recherché à partir d'un certain nombre d'expériences.

2.1. Notion de modélisation mathématique

Le modèle est une relation entre les facteurs x_1, x_2, \dots, x_k et la réponse que l'on désire étudier.

2.1.1. Modèle statistique

Considérons un phénomène aléatoire dépendant de k variables et supposons que l'on cherche à modéliser au mieux ce phénomène. La démarche statistique consiste alors à effectuer n expériences, judicieusement choisies dans le cas des plans d'expériences. Chacune est représentée par un point x de \mathbb{R}^k (ceci est possible si les variables étudiées sont quantitatives, pour le cas qualitatif on utilise un sous-ensemble de \mathbb{N}^k)

En désignant par $Y(x)$ la réponse mesurée en x on suppose classiquement que cette réponse résulte de la somme de la loi de réponse f en x (i.e. la réponse réelle recherchée) et du résidu ε en x (i.e. l'erreur commise). Donc :

$$Y(x) = f(x) + \varepsilon(x)$$

Le résidu peut rendre compte de bon nombre de causes telles que des erreurs dues à l'expérimentateur, un mauvais modèle postulé, l'oubli de certaines variables, ...etc. Nous supposons généralement que les résidus sont des variables aléatoires réelles vérifiant les trois hypothèses suivantes [13]:

$$\begin{cases} \forall x, & E(\varepsilon(x)) = 0, \\ \forall x \neq x', & Cov(\varepsilon(x), \varepsilon(x')) = 0 \\ \forall x, & Var(\varepsilon(x)) = \sigma^2 \end{cases}$$

2.1.2. Modélisation linéaire

Nous considérons dans cette partie, un modèle statistique dépendant de k variables avec f fonction linéaire par rapport à p paramètres inconnus. Mathématiquement, un modèle est linéaire par rapport aux paramètres $\beta_{i(i=1,\dots,p)}$ si et seulement si chacune des dérivées partielles $\partial f(x)/\partial \beta_i$ ne dépendent plus de β_i . Etant donné un phénomène aléatoire à expliquer, il n'est généralement pas simple de proposer un modèle adéquat. La fonction f est souvent trop complexe. C'est pourquoi il est courant de l'approcher à l'aide d'une classe de fonctions usuelles (développement de Taylor, séries de Fourier...etc). Si n expériences ont été réalisées, repérées par les points x_i ($i = 1, \dots, n$) de \mathbb{R}^k , nous avons donc :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad Y(x_i) = f(x_i) + \varepsilon(x_i)$$

Puisque f est une fonction linéaire par rapport aux paramètres inconnus, Nous pouvons donc aussi écrire ce modèle sous la forme matricielle suivante :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Avec :

- $Y \in \mathbb{R}^n$: Vecteur de réponses observées,
- $X(n, p)$: Matrice de calcul, qui dépend des points expérimentaux choisis pour exécuter le plan et du modèle postulé,
- $\beta \in \mathbb{R}^p$: Vecteur des coefficients inconnus,
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$: Vecteur des résidus. Les hypothèses mentionnées au paragraphe précédent se traduisent simplement par : $E(\varepsilon) = 0$ et $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$

En conséquence, $X\beta$ est donc la réponse moyenne donnée (prédite) par ce modèle.

2.2. Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés

Une fois le modèle posé, le problème consiste maintenant à déterminer un estimateur $\hat{\beta}$ du β le meilleur possible. Une démarche classique consiste à chercher $\hat{\beta}$ de manière à ce que le vecteur de réponses observées Y et le vecteur des moyenne prédites : $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ soit les plus proches possibles :

Définition 2.1

On dit que $\hat{\beta}$ est l'estimateur des moindres carrés de β si et seulement si $\hat{\beta}$ minimise la fonction :

$$Q(\beta) = \|Y - X\hat{\beta}\|^2$$

L'estimateur des moindres carrés de β donne le minimum de la fonction Q et ce minimum vaut alors :

$$Q(\hat{\beta}) = \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Ceci montre que cette quantité est bien liée à l'erreur (quadratique) commise entre les réponses observées Y_i et les réponses moyennes prédites par le modèle \hat{Y}_i . Concernant la détermination pratique de cet estimateur, nous montrons que :

Proposition 2.1

Soit le modèle statistique $Y = X\beta + \varepsilon$ avec X matrice de plein rang. L'estimateur des moindres carrés de β est donné par :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Preuve : Nous cherchons $\hat{\beta}$ qui minimise la quantité : $\|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$, pour cela, exprimons $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ en fonction de $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 &= (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) \\ &= (Y^T - \hat{\beta}^T X^T)(Y - X\hat{\beta}) \\ &= Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y - Y^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T X\hat{\beta} \end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ est un scalaire et il est aisé de vérifier que tous les termes de la somme sont également des scalaires. Nous avons donc :

$$Y^T X\hat{\beta} = (\hat{\beta}^T X^T Y)^T = \hat{\beta}^T X^T Y$$

Nous aurons,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Y^T Y - 2\hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T X^T X\hat{\beta}$$

Calculons la dérivée de $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ par rapport à l'inconnue $\hat{\beta}$.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial (Y^T Y)}{\partial \hat{\beta}} - 2 \frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T Y)}{\partial \hat{\beta}} + \frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}}$$

Où: $\frac{\partial(Y^T Y)}{\partial \hat{\beta}} = 0$ (car $Y^T Y$ ne dépend pas de $\hat{\beta}$), $\frac{\partial(\hat{\beta}^T X^T Y)}{\partial \hat{\beta}} = X^T Y$ (car $\hat{\beta}^T X^T Y$ est une forme linéaire en $\hat{\beta}$) et $\frac{\partial(\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 2X^T X \hat{\beta}$ (car $\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}$ est une forme quadratique en $\hat{\beta}$)

Il vient donc :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta}$$

La valeur de $\hat{\beta}$ qui minimise $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = 0 &\Rightarrow -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0 \\ &\Rightarrow X^T X \hat{\beta} = X^T Y \Rightarrow \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

Proposition 2.2 :

Si les hypothèses sur les résidus sont vérifiées et si $\hat{\beta}$ est l'estimateur des moindres carrés de β alors :

1. $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β ,
2. $\hat{\beta}$ admet pour matrice des covariances : $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Preuve

1. L'espérance mathématique de $\hat{\beta}$ a pour expression :

$E(\hat{\beta}) = E[(X^T X)^{-1} X^T Y] = (X^T X)^{-1} X^T E(Y)$, car les éléments de X sont considérés comme fixes. En désignant par β le vecteur des p coefficients vrais et ε le vecteur des n écarts entre les résultats expérimentaux et les réponses théoriques, nous obtenons alors :

$$Y = X\beta + \varepsilon, \text{ et } E(Y) = E(X\beta + \varepsilon) = E(X\beta) + E(\varepsilon) = XE(\beta)$$

Car $E(\varepsilon) = 0$ par hypothèse. Nous trouvons :

$$E(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta$$

Le résultat que nous venons d'établir signifie que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β .

2. Par définition la variance de $\hat{\beta}$ est donnée par :

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T]$$

Remplaçons $\hat{\beta}$ par $(X^T X)^{-1} X^T Y$ et Y par $X\beta + \varepsilon$. Nous obtenons :

$$(\hat{\beta} - \beta) = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) - \beta = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

Puisque $(\hat{\beta} - \beta)^T = \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}$, donc,

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}] = (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1}$$

Remplaçons $E(\varepsilon \varepsilon^T)$ par : $E[(\varepsilon - 0)(\varepsilon - 0)^T] = \text{var}(\varepsilon) = \sigma^2$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} \\ &\Rightarrow \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

2.3. Prédiction de la réponse moyenne

Une fois $\hat{\beta}$ déterminé l'expérimentateur est souvent intéressé par l'utilisation du modèle obtenu afin de prédire la réponse moyenne en un point quelconque (où aucune expérience n'a été réalisée). Ceci est primordial lorsque la modélisation doit conduire, par exemple, à la recherche des conditions expérimentales susceptibles de maximiser (ou minimiser) la réponse étudiée. La prédiction de la réponse moyenne au point $x \in \mathbb{R}^k$ est donnée par :

$$\hat{Y}(x) = f(x)^T \hat{\beta}$$

Avec $f(x) \in \mathbb{R}^p$ vecteur de régression, telque $f(x)^T$ est construit de manière identique aux lignes de la matrice X . Connaissant la valeur de la réponse moyenne prédite au point x la qualité de cette prédiction est quantifiée à l'aide du résultat suivant :

Proposition 2.3

La qualité de la prédiction $\hat{Y}(x) = f(x)^T \hat{\beta}$ réalisée au point $x \in \mathbb{R}^k$ est mesurée par :

$$\text{Var}(\hat{Y}) = \sigma^2 f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)$$

On constate que cette erreur sur la réponse calculée (ou réponse prédite) dépend de quatre grandeurs :

- De l'erreur expérimentale sur les réponses mesurées,
- De la position du point x dans le domaine d'étude,

- De l'ensemble des points qui ont été utilisés pour établir les coefficients du modèle, c'est à dire le plan d'expériences lui même,
- Du modèle postulé choisi pour interpréter les résultats (par la matrice de calcul des coefficients et la variance des résidus).

Preuve : Nous avons :

$$\text{Var}(\hat{Y}) = \text{Var}(f(x)^T \hat{\beta}) = f(x)^T \text{var}(\hat{\beta}) f(x) = \sigma^2 f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x),$$

Puisque, $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$.

2.4. Fonction de variance de prédiction

L'erreur commise sur les réponses mesurées dépend de la nature de l'expérimentation, du degré de précision de la technologie employée, du soin, de l'habileté de l'expérimentateur, et de bien d'autres facteurs dont l'expérimentateur est responsable. Ces facteurs ne dépendent pas de la théorie des plans d'expériences mais de la pratique expérimentale [11]. Pour séparer cette partie expérimentale de celle qui dépend de la théorie, on introduit la fonction de variance de prédiction $d^2(\hat{Y})$:

$$d^2(\hat{Y}) = f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)$$

En prenant la racine carrée de la fonction de variance, on obtient la fonction d'erreur de prédiction :

$$d(\hat{Y}) = \sqrt{f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)}$$

2.5. Analyse de la variance

Une fois le modèle ajusté, le problème de la qualité de l'ajustement obtenu se pose alors. Il est possible d'obtenir des indicateurs numériques permettant de quantifier ceci à l'aide des techniques dites d'analyse de la variance. Ces techniques reposent sur des décompositions judicieuses en sommes de carrés. Désignons dans la suite par \bar{Y} la réponse moyenne observée et par Y^* le vecteur des réponses observées centrées. Remarquons que si 1_n est l'indicatrice d'ordre n (c-à-d le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont égales à 1) alors [14]:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} 1_n^T Y \text{ et } Y^* = Y - \bar{Y} 1_n$$

Nous définissons ensuite les trois sommes classiques suivantes (la notation SS venant de l'anglais Sum of Squares):

- Somme totale des carrées : $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ (désignée par SST)
- Somme des carrées due à la régression : $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ (désignée par SSR)
- Somme des carrés due à l'erreur : $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ (désignée par SSE)

Proposition 2.4 :

Pour le modèle des moindres carrés, si $P = X (X^T X)^{-1} X^T$ est le projecteur orthogonal de \mathbb{R}^n sur le sous espace $Im(X)$ et si $I_n \subset Im(X)$ alors les sommes carrées ci-dessus s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2, \quad \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2 \text{ et } \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Y^T (I_n - P) Y$$

Il en dérive la relation fondamentale suivante : $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$

Preuve : Sous une forme matricielle, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = (Y - \bar{Y} \mathbf{1}_n)^T (Y - \bar{Y} \mathbf{1}_n) = Y^T Y - \bar{Y} \mathbf{1}_n^T Y - \bar{Y} \mathbf{1}_n^T Y + \bar{Y}^2 \mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n, \text{ puisque } \mathbf{1}_n^T Y = Y^T \mathbf{1}_n = n\bar{Y} \text{ et}$$

$$\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n = n, \text{ donc } \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2. \text{ Pour } \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) \text{ et comme}$$

$\hat{Y} = X (X^T X)^{-1} X^T Y = P Y$ alors $Y - \hat{Y} = Y - P Y = Y(I_n - P)$, on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = Y^T (I_n - P)(I_n - P) Y = Y^T (I_n - P) Y$$

Pour $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2$, on a : $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}^T \hat{Y} - 2\bar{Y} \hat{Y}^T \mathbf{1}_n + \bar{Y}^2 \mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n$. Or, Pour le modèle

des moindres carrés : $X^T Y = X^T X \hat{A}$. Et par conséquent : $X^T Y = X^T X \hat{A} = X^T \hat{Y}$, en multipliant

les deux parties par $\frac{1}{n} \mathbf{1}_n$, on obtient :

$$X^T \frac{1}{n} Y \mathbf{1}_n = X^T \frac{1}{n} \hat{Y} \mathbf{1}_n \Rightarrow X^T \bar{Y} = X^T \bar{\hat{Y}}$$

Par conséquent, $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$. D'où :

$$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}^T \hat{Y} - 2\bar{Y} \hat{Y}^T \mathbf{1}_n + \bar{Y}^2 \mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n = \hat{Y}^T \hat{Y} - n\bar{Y}^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2.$$

Ceci entraîne bien que :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Car, $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2 + Y^T (I_n - P)Y = Y^T P Y - n\bar{Y}^2$.

Pour Y vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n et $M(n, n)$ une matrice non aléatoire, nous appelons nombre de degrés de liberté de $Y^T M Y$ le rang de la matrice M . Cette notion de degrés de liberté provient de la loi usuelle du khi-deux. En effet, on montre que si Y est un vecteur aléatoire de loi gaussienne $N(\mu, \delta^2 I_n)$ et si M est la matrice d'un projecteur alors $Y^T M Y$ suit une loi du khi-deux décentrée, de paramètre de décentrage $\frac{1}{2} \mu^T A \mu$ avec un nombre de degrés de liberté égal au rang de M [15]. Les degrés de liberté associés aux différentes sommes de carrés sont donnés ci-dessous.

Proposition 2.5 :

Les sommes de carrés SST, SSE et SSR sont associées, respectivement, à $(n - 1)$, $(n - p)$ et $(p - 1)$ degrés de liberté. Ceci permet de définir les sommes moyennes de carré suivantes :

$$MST = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{n - 1}, \quad MSR = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2 - n\bar{Y}^2}{p - 1} \text{ et } MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2}{n - p}$$

(Avec la notation MS dénote la somme moyenne des carrées).

Preuve : D'après la proposition 2.4. Nous avons : $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2 = Y^T (I_n - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T) Y$ et

puisque $\frac{1}{n} 1_n 1_n^T = 1_n (1_n^T 1_n)^{-1} 1_n^T$ est le projecteur orthogonal de \mathbb{R}^n sur $Im X$ alors $(I_n - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T)$ est

la projection orthogonale \mathbb{R}^n sur les sous espace $(Im X)^\perp$, donc la matrice $(I_n - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T)$ a pour

rang $n-1$ car la dimension de $(Im X)^\perp$ est égale à $n-1$.

De même que précédemment :

$$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2 = Y^T (P - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T) Y, \text{ si } 1_n \in Im X \text{ il se retrouve donc aussi dans le noyau}$$

de $P - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T$ et le rang de $P - \frac{1}{n} 1_n 1_n^T$ est égale à $p - 1$ [14].

2.6. Tests statistiques

2.6.1. Le coefficient de corrélation multiple R^2

On appelle R^2 le rapport de la partie des résultats expliqués par le modèle à la totalité de ce qu'il devrait expliquer :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

D'après cette formule, nous voyons que le rapport R^2 varie entre 0 et 1. Le modèle ajusté est d'autant plus "proche" des réponses observées que R^2 est proche de 1. Un seuil classique consiste à valider le modèle dès lors que $R^2 \geq 0.95$.

2.6.2. Le F de Fisher

On appelle coefficient de Fisher le réel :

$$F = \frac{\frac{SSR}{p-1}}{\frac{SSE}{n-p}}$$

Si le F de Fisher est élevé, la variance de la régression (réponses calculées) est plus grande que la variance des résidus. La probabilité que les coefficients du modèle soient tous nuls est alors très faible. Pour avoir des coefficients significatifs, il faut un F de Fisher élevé, c'est-à-dire une probabilité (p -value) faible. Le modèle sera déclaré globalement significatif si $F > F_{1-\alpha, p, n-p-1}$. On peut dire aussi que la qualité du modèle est d'autant meilleure que la variance d'ajustement est plus faible par rapport à la variance expérimentale [16].

2.7. Conclusion

Pour résumer, la méthode de plans d'expériences est un ensemble de techniques complémentaires aide son utilisateur dans la détermination des expériences à réaliser et dans la compréhension et l'exploitation des résultats obtenus. Les outils utilisés dans cette méthode sont fondés essentiellement sur des bases statistiques et algébriques. Les développements menés dans ce chapitre ont présentés les fondements, les principes ainsi que les possibilités d'analyse de la méthode des plans d'expériences. Ses multiples aspects en font une méthode d'analyse parfaitement adaptée à l'étude des systèmes.

CHAPITRE III

Étude de divers plans d'Expériences

Dans ce chapitre, nous introduirons les principaux plans d'expériences. Ces plans peuvent être classés en deux catégories : plans pour un modèle de premier degré (plans factoriels complet à deux niveaux), plans de modélisation (plans factoriels complets à trois niveaux, plans composites, plans de Box-Behnken, plans de Doehlert et plans de Roquemore). Ces deux catégories concernent les facteurs indépendants. Par définition des facteurs indépendants sont des facteurs dont on peut choisir les niveaux comme on le désire.

3.1. Plans factoriels complets à deux niveaux

Parmi les différents plans expérimentaux de criblage, les plans factoriels sont courants car ils sont les plus simples à mettre en œuvre et ils permettent de mettre en évidence très rapidement l'existence d'interactions entre les facteurs. Ils permettent en effet de répondre de façon optimale aux questions [17] :

- quels sont les facteurs qui influencent le plus sur le phénomène étudié ?
- si influence il y a, que vaut-elle ?
- y a-t-il des interactions entre facteurs et quelle est l'importance relative de chacune d'elles ?

Les plans factoriels complets à deux niveaux permettent aussi d'étudier k facteurs à raison de deux niveaux par facteur. Ils renferment toutes les combinaisons des k facteurs à leurs deux niveaux, soit 2^k combinaisons.

3.1.1. Construction des plans factoriels complets à deux niveaux

3.1.1.1. Matrice des essais

Pour étudier l'influence d'un facteur sur une réponse, il faut lui affecter au moins deux niveaux. Reprenons les notions du chapitre 1, le premier niveau est repéré par -1, le second par +1. Pour l'étudier deux facteurs 1 et 2, à raison de deux niveaux pour chaque facteur, il faut réaliser $2^2 = 4$ essais. Les conditions opératoires de chaque essai sont décrites dans le tableau 2.1.

Tableau 3.1 : Matrice d'expériences d'un plan 2^2

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Pour trois facteurs le nombre des essais à réaliser est huit essais. La matrice des essais ou d'expériences est donnée par le tableau 3.2.

Tableau 3.2 : Matrice d'expériences d'un plan 2^3

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Pour k facteurs, le nombre d'essais est de 2^k d'où le nom de plan 2^k donné à cette famille de plans. La matrice des essais comporte k colonnes et 2^k lignes. Elle se construit simplement :

- Colonne du 1^{er} facteur : alternance de -1 et +1,
- Colonne du 2^{ième} facteur : alternance de -1 et +1 de 2 en 2,
- Colonne du 3^{ième} facteur : alternance de -1 et +1 de 4 en 4,
- Colonne du 4^{ième} facteur : alternance de -1 et +1 de 8 en 8, ... etc.

3.1.1.2. Domaine expérimental

Le domaine d'étude peut être représenté dans l'espace expérimental des facteurs à dimensions. Lorsque $k=2$, nous obtenons un carré. Les points expérimentaux sont situés aux quatre sommets du carré (Figure 3.1).

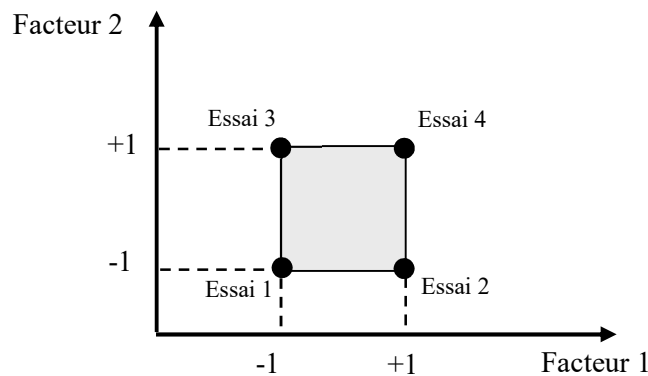


Figure 3.1 : Domaine d'étude d'un plan 2^2

Quand $k > 3$ la représentation géométrique du domaine n'est plus possible mais les points expérimentaux sont toujours aux sommets d'un hyper-cube à k dimensions.

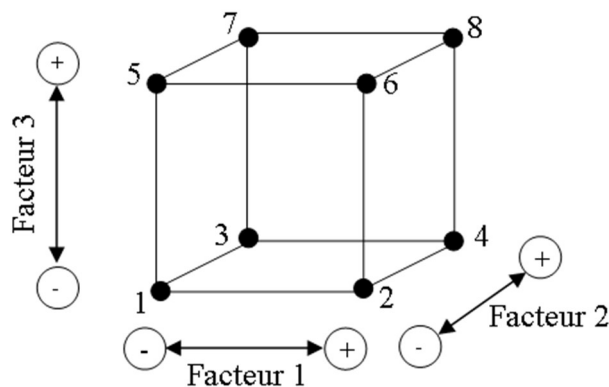


Figure 3.2 : Domaine expérimental d'un plan 2^3

Quand $k > 3$ la représentation géométrique du domaine n'est plus possible mais les points expérimentaux sont toujours aux sommets d'un hyper-cube à k dimensions.

3.1.2. Plan factoriel à deux facteurs

Pour deux facteurs, nous avons vu que le domaine d'étude est un carré. Par exemple la figure 2.1 représente un plan factoriel complet à deux facteurs. Le modèle mathématique postulé est un modèle du premier degré par rapport à chaque facteur. Le modèle est :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 \quad (3.1)$$

Avec,

y : la réponse,

x_i : niveau attribué au facteur i ,

a_0 : valeur de la réponse au centre du domaine d'étude,

a_1 (resp. a_2) : l'effet principal du facteur 1 (resp. facteur 2),

a_{12} : interaction entre les facteurs 1 et 2.

3.1.2.1. Effet d'un facteur

L'expérimentateur ayant réalisé les essais est en possession de quatre valeurs de la réponse : y_1 , y_2 , y_3 , et y_4 . Il a donc un système de quatre équations à quatre inconnues. Les inconnues étant les coefficients du modèle : a_0 , a_1 , a_2 , et a_{12} . En remplaçant dans la relation (3.1) les x_i par leur valeur, on obtient :

$$y_1 = a_0 - a_1 - a_2 + a_{12}$$

$$y_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_{12}$$

$$y_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_{12}$$

$$y_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12}$$

La résolution de ce système donne :

$$a_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (3.2)$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) \quad (3.3)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \quad (3.4)$$

$$a_{12} = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \quad (3.5)$$

3.1.2.2. Signification de a_0

Si nous donnons à x_1 et à x_2 la valeur zéro, nous définissons le centre du domaine d'étude. La relation (3.1) devient alors :

$$y = a_0$$

Le coefficient a_0 est la valeur de la réponse au centre du domaine d'étude. La formule (3.2) montre également que a_0 peut être considéré comme la moyenne des quatre réponses.

3.1.2.3. Signification de a_1

Plaçons nous maintenant au niveau moyen du facteur 2. Pour cela, donnons la valeur zéro à x_2 . La relation (3.3) devient :

$$y = a_0 + a_1 x_1$$

Cette relation permet de tracer l'évolution de la réponse prédite dans un plan de coupe $x_2 = 0$ (Figure 3.3). L'effet du facteur 1 apparaît comme la variation de la réponse quand on passe du niveau bas au niveau haut du facteur 1.

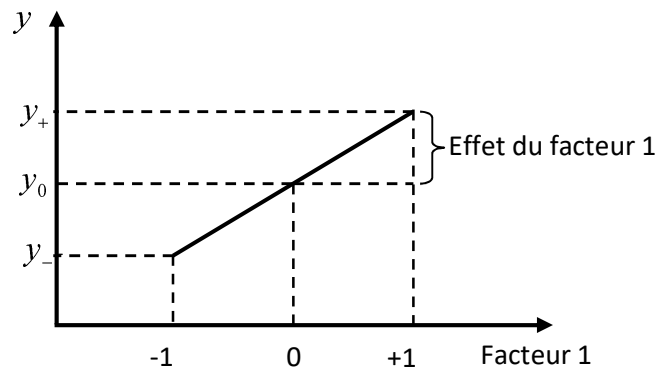


Figure 3.3 : Effet du facteur 1

3.1.2.4. Notation de Box

La colonne des signes du facteur 1 sera notée par un chiffre 1, celle des signes du facteur 2 par 2. La multiplication de ces deux colonnes selon le processus expliqué au paragraphe précédent nous donne la suite des signes de l'interaction entre les facteurs 1 et 2. On peut donc écrire que la colonne des signes de cette interaction est 12, on introduit ainsi une algèbre des colonnes de signes, algèbre dont nous venons de définir la multiplication. Si nous multiplions une colonne de signes par elle-même, nous obtenons une colonne qui ne contient que des signes +. Cette colonne sera notée I , d'où

$1.1 = I$ et on aura de même $2.2 = I$.

3.1.3. Plans factoriels à trois facteurs 2^3

3.1.3.1. Exemple

Pour l'entretien du réseau routier, les pétroliers sont amenés à préparer des émulsions de bitume. Ces émulsions doivent rester stables depuis leurs fabrications jusqu'à leur mise en place. L'étude que nous présentons est la recherche des conditions de stabilité de l'émulsion de bitume en fonction de sa composition. Le responsable a retenu trois facteurs [18]:

- Facteur1 : acide gras à faible et forte concentration
- Facteur2 : acide chlorhydrique très et peu dilué
- Facteur3 : nature de bitume A et B sur la stabilité d'une émulsion de bitume.

Le plan réalisé est un plan 2^3 , 3 facteurs et 2 niveaux par facteur. Ce plan totalise $2^3 = 8$ essais. La figure (3.2) donne l'image géométrique du plan d'expériences. Pour calculer les effets de chacun des facteurs, on construit la matrice de calcul des effets (Tableau 3.3)

Tableau 3.3 : Matrice des effets d'un plan 2^3 .

Essai N°	Moy	1	2	3	12	13	23	123	Réponses
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	38
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	37
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	26
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	24
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	30
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	28
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	19
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	16
Effets	27,25	-1	-6	-4	0,25	0,25	0,25	0	

Seuls les effets 2 et 3 sont significatifs.

3.1.3.2. Conclusions de l'étude

La concentration de l'acide gras est pratiquement sans influence sur la stabilité de l'émulsion. Par contre, la dilution de l'acide chlorhydrique est un facteur important à effet négatif. La nature du bitume est également importante, la meilleure stabilité sera obtenue : avec le bitume B, il n'y a aucune interaction significative.

Remarque

L'effet est négatif quand la réponse diminue lorsque le facteur correspondant passe du niveau -1 au niveau +1.

3.1.4. Plan complet à quatre facteurs 2^4

Nous pouvons généraliser la démarche précédente au cas de 4, 5 facteurs ou plus. Pour 4 facteurs le plan factoriel complet comporte $2^4 = 16$ essais. La matrice des effets permet d'obtenir seize informations qui portent sur :

- les effets de chaque facteur au nombre de 4,
- les interactions de deuxième ordre 12, 13, ... etc, dont le nombre est de $C_4^2 = 6$,
- les interactions du troisième ordre 123, 124, ... etc, dont le nombre est de $C_4^3 = 4$,
- L'interaction du quatrième ordre 1234 qui est unique,
- La moyenne qui est unique.

3.1.5. Plan complet 2^k

Il s'agit de plans pour lesquels on étudie k facteurs prenant chacun deux niveaux. Le modèle mathématique adopté à priori est un polynôme prenant en compte la moyenne, les effets de chaque facteur et les interactions entre les facteurs pris deux à deux.

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j \quad (3.7)$$

Si on remplace les x_i par leurs valeurs en coordonnées centrées réduites on peut écrire sous forme matricielle :

$$y = X A \quad (3.8)$$

Si nous reprenons le système du plan 2^2 , la relation (2.7) prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_{12} \end{pmatrix}$$

Dans le cas des plans factoriels à deux niveaux, la matrice X qui est orthogonale est appelée matrice d'Hadamard. Elle possède l'importante propriété : ${}^t X X = N I$ où N le nombre d'essais et I la matrice d'unité. Si l'on reporte cette expression dans la formule (3.1) on obtient :

$$\hat{A} = ({}^t X X)^{-1} {}^t X y = (N I)^{-1} {}^t X y \quad (3.9)$$

D'où

$$\hat{A} = \frac{1}{N} {}^t X y$$

3.1.6. Optimalité des plans 2^k

Tous les effets et les interactions sont estimés d'une manière indépendante, avec la variance minimale $\text{var}(y)/N$ [4].

3.1.7. Avantages et inconvénients des plans factoriels complets à deux niveaux

Les avantages des plans factoriels sont nombreux et nous n'en citerons que les principaux :

- Les plans factoriels complets sont faciles à construire,
- Comme chaque facteur ne prend que deux niveaux les essais sont faciles à contrôler et les risques d'erreur sont minimisés,
- Le calcul des effets et des interactions est très simple,
- L'interprétation des résultats est à la portée de tout expérimentateur et ne demande pas des connaissances approfondies en statistique,
- Les résultats obtenus avec un premier plan peuvent être utilisés en partie ou en totalité, soit pour explorer une autre zone du domaine expérimental soit, pour établir un modèle mathématique de degré plus élevé.

L'inconvénient de ces plans est que le nombre des essais à réaliser devient rapidement important. De plus, on ne peut calculer que les effets principaux et les interactions donc on ne peut pas obtenir de modèles du second degré et plus.

3.2. Plans de MOZZO

Ces plans ont la particularité d'être séquentiels [19]. On peut d'abord étudier deux facteurs en trois essais dans un domaine triangulaire. Puis, si l'on décide d'étudier un troisième facteur, on fera trois essais de plus (essais 4, 5 et 6 du tableau 3.4). Cette séquentialité n'est obtenue que si on a pris la précaution de fixer les facteurs non étudiés à un niveau constant pendant l'étude des premiers facteurs. Par exemple, le facteur 3 sera fixé au niveau -1 pendant l'étude des facteurs 1 et 2. Pour étudier le facteur 3, on fixera son niveau à +1 et on exécutera un plan triangulaire avec les deux premiers facteurs. Au fur et à mesure que l'on ajoute des facteurs, on peut ajouter certaines interactions au premier modèle de base.

Tableau 3.4: Plans de Mozzo pour 2, 3 et 4 facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4
1	0.268	1	-1	-1
2	0.732	-0.732	-1	-1
3	-1	-0.268	-1	-1
4	-0.268	-1	1	-1
5	-0.732	0.732	1	-1
6	1	0.268	1	-1
7	-0.268	-1	-1	1
8	-0.732	0.732	-1	1
9	1	0.268	-1	1
10	0.268	1	1	1
11	0.732	-0.732	1	1
12	-1	-0.268	1	1

3.2.1. Plan de Mozzo pour deux facteurs

Il s'agit d'un plan permettant d'étudier deux facteurs en trois essais. Les points expérimentaux sont disposés en triangle. La figure 3.4 indique l'une des dispositions possibles de ce triangle.

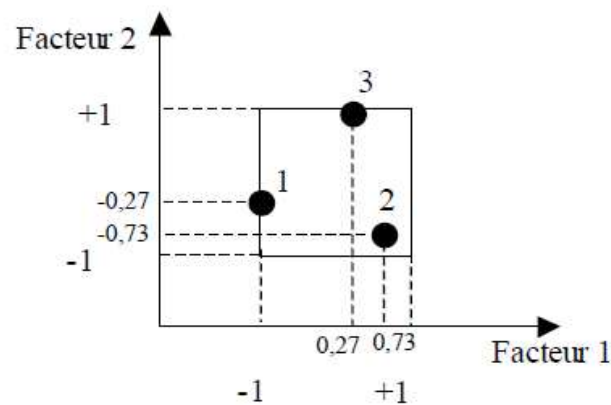


Figure 3.4 : Domaine d'étude du plan de Mozzo pour deux facteurs.

Le modèle mathématique a priori est très simple puisqu'il y a que peu de points expérimentaux. C'est un modèle de premier degré sans interactions.

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2$$

Écrivons la matrice X :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.268 & 1 \\ 1 & 0.732 & -0.732 \\ 1 & -1 & -0.268 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice $X^t X$ se fait immédiatement :

$$X^t X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.608 & 0 \\ 0 & 0 & 1.608 \end{pmatrix}$$

La matrice X est bien orthogonale. On constate que les éléments des termes du premier degré sont égaux. Il en résulte que ce plan satisfait aussi le critère d'isovariance par rotation.

3.2.2. Plan de Mozzo pour trois facteurs

Il s'agit des six premiers essais du tableau 3.5. La figure 3.5 indique la disposition des points expérimentaux dans l'espace expérimental.

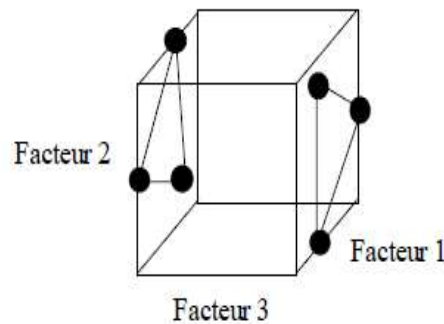


Figure 3.5 : Domaine d'étude du plan de Mozzo pour trois facteurs

Comme il y a six points expérimentaux, on peut, théoriquement, déterminer six inconnues. On peut donc adopter un modèle du premier degré avec des interactions. Mais étant donné la disposition des points, on ne peut pas obtenir d'interaction avec le troisième facteur. On ne peut introduire que l'interaction entre les facteurs 1 et 2. Soit le modèle :

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3 + \hat{a}_{12} x_1 x_2$$

Écrivons la matrice X :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0,268 & 1 & -1 & 0,268 \\ 1 & 0,732 & -0,732 & -1 & -0,536 \\ 1 & -1 & -0,268 & -1 & 0,268 \\ 1 & -0,268 & -1 & 1 & 0,268 \\ 1 & -0,732 & 0,732 & 1 & -0,536 \\ 1 & 1 & 0,268 & 1 & 0,268 \end{pmatrix}$$

On peut calculer la matrice pour voir si l'orthogonalité est toujours conservée.

$$X^t X = \begin{pmatrix} 6 & & & & \\ & 3.22 & & & \\ & & 3.22 & & \\ & & & 6 & \\ & & & & 0.86 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Avantages et inconvénients

- L'avantage principal de ces plans c'est le nombre d'essais à réaliser qui est très restreint. Pour deux facteurs il faut réaliser juste trois essais et chaque facteur prend trois niveaux.
- les inconvénients des plans de Mozzo sont : le plan n'existe pas pour n'importe quel nombre de facteurs, le modèle retenu n'admet pas d'une façon générale toutes les interactions entre les facteurs.

3.3. Plans composites

Les plans composites permettent de calculer un modèle polynomial du second degré. On parle de modèle quadratique. Ils sont composés d'une première partie qui est un plan fractionnaire ou complet, puis d'un ou plusieurs essais au centre du domaine d'étude et enfin d'essais supplémentaires permettant le calcul du modèle quadratique [10].

Les *plans centraux composites* sont des plans intéressants dans la mesure où ils permettent de faire une étude d'un système de manière séquentielle.

L'utilisateur peut réaliser les premiers essais du plan factoriel et calculer un modèle linéaire. Dans le cas où la précision du modèle par rapport au procédé réel n'est pas suffisante, les essais complémentaires sont réalisés et un modèle quadratique est calculé.

Le plan composite est constitué de trois parties distinctes, autorisant une étude séquentielle :

1. Le plan factoriel. Il peut être soit complet, soit fractionnaire à deux niveaux par facteurs.
2. Le plan en étoile. Les points expérimentaux sont situés à la même distance du centre du domaine d'étude.
3. Les points au centre du domaine.

3.3.1. Construction des plans composites

Revenons en détail sur les trois éléments des plans composites :

– *Plan factoriel*

La partie factorielle est constituée de points d'expériences situés aux sommets de carrés, de cubes ou d'hyper-cubes suivant le nombre de facteurs étudiés, et si possible des points de contrôle situés au centre du domaine d'étude.

– *Plan en étoile*

Le choix de l'emplacement des points en étoile est lié aux conditions expérimentales et à des considérations théoriques basées sur les critères d'optimalité. Les conditions expérimentales dépendent de la facilité ou de l'impossibilité d'atteindre certaines zones

du domaine d'étude.

– **Points au centre**

On contrôle la validité et la stabilité des plans factoriels et des plans en étoile en ajoutant des points d'expériences situés, le plus souvent, au centre du domaine d'étude. Ces points sont importants et ils ont plusieurs rôles :

- Ils servent à tester la validité du modèle du premier degré,
- Ils servent à s'assurer qu'il n'y a pas de glissement (stabilité) entre les deux séries d'essais,
- Ils permettent d'obtenir une estimation de l'erreur expérimentale,
- Ils diminuent l'erreur de prédiction près du point central,
- Ils interviennent dans le calcul de α .

Le nombre total n d'essais à réaliser est la somme de chacun des parties qui composent le plan :

- Les essais du plan factoriel, soit n_f ;
- Les essais du plan en étoile, soit n_a ;
- Les essais au centre, soit n_0 .

Le nombre total n d'essais d'un plan composite est donné par la relation :

$$n = n_f + n_a + n_0$$

3.2.2. Les différentes classes de plans composites

On précise parfois deux types de différentes classes de plans composites :

- ❖ **Plans composites centrés dans les faces** : ces plans peuvent être considérés comme un cas particulier des plans composites centrés, la charge expérimentale est la même, chaque facteur est étudié sur 3 niveaux seulement (figure 3.6).

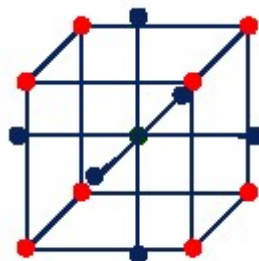


Figure 3.6 : Plans composites centrés dans les faces.

- ❖ **Plans composites centrés** : Si les points en étoile sont à l'extérieur du domaine cubique (figure 3.7).

Le nombre de niveaux d'un plan composite est de cinq par facteur : le point central, les deux niveaux du plan factoriel et les deux niveaux des points en étoile.

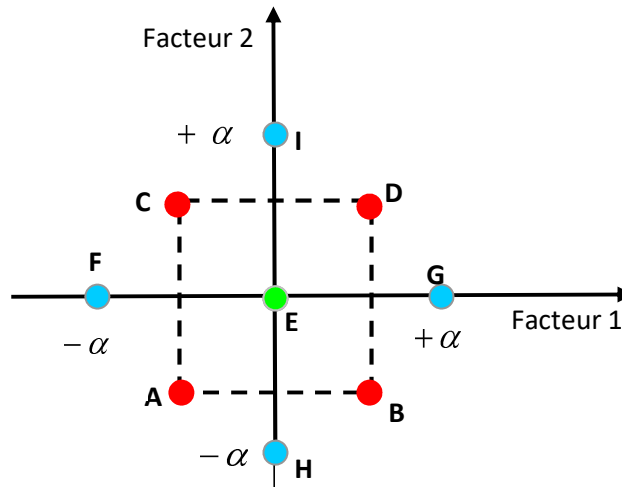


Figure 3.7 : Plan composite centré pour l'étude de deux facteurs.

- Les points *A*, *B*, *C* et *D* sont les points expérimentaux d'un plan factoriel 2^2 ,
- Le point *E* est le point central. Ce point peut avoir été répliqué une ou plusieurs fois,
- Les points *F*, *G*, *H* et *I* sont les points d'un plan en étoile.

La matrice d'expériences correspondante à ce plan est donnée par le tableau 3.5. La distance des points en étoile au centre du domaine est notée par la lettre grecque α .

Tableau 3.5 : Matrice d'expériences d'un plan composite pour deux facteurs.

Essai n°	Facteur 1	Facteur 2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	$-\alpha$	0
6	$+\alpha$	0
7	0	$-\alpha$
8	0	$+\alpha$
9 à 11	0	0

3.3.3. Propriétés des plans composites

3.3.3.1. Modèle mathématique postulé

Est un modèle du second degré dans lequel on conserve le coefficient constant, les termes du premier degré, les termes rectangles et les termes du second degré. Il n'y a pas d'interaction d'ordre 3 ou plus élevé.

- a. Pour deux facteurs le modèle s'écrit :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2$$

- b. Pour trois facteurs le modèle s'écrit :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + e$$

3.3.3.2. Matrice de calcul

La matrice du calcul est notée X . Elle est caractérisée par p colonnes et n lignes.

Pour deux facteurs la matrice de calcul X est une matrice de dimensions (11×6) puisqu'il y a 11 expériences et 6 coefficients dans le modèle postulé :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.3.3. Matrice d'information

La matrice d'information est définie à partir du produit matriciel entre la transposée de la matrice du calcul, notée X^T . Il s'agit d'une matrice carrée contenant p ligne et p colonnes. Le déterminant de cette matrice est un indicateur algébrique qui traduit la qualité d'une matrice d'expériences de taille n .

La matrice d'information est calculée à partir de la matrice de calcul, elle égale à $X^T X$.

Pour 2 facteurs on a :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 4+2\alpha^2 \\ 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 4+2\alpha^4 & 4 \\ 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4+2\alpha^4 \end{pmatrix}$$

Avec X^T matrice transposée de la matrice de calcul.

D'une manière générale, la matrice d'information peut s'écrire :

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & n_f + 2\alpha^2 & n_f + 2\alpha^2 \\ 0 & n_f + 2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_f + 2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_f & 0 & 0 \\ n_f + 2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & n_f + 2\alpha^4 & n_f \\ n_f + 2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & n_f & n_f + 2\alpha^4 \end{pmatrix}$$

3.3.3.4. Critères d'optimalité

Nous n'envisageons ici que le cas où tous les points axiaux sont à la même distance (en grandeurs centrées réduites) du centre du domaine d'étude. Suivant les critères d'optimalité choisis, la valeur de α ne sera pas la même [15].

a. Iso variance par rotation

Les éléments de la matrice d'information doivent satisfaire la relation suivante :

$$3 n_f = n_f + 2 \alpha^4$$

$$\Rightarrow 2n_f = 2\alpha^4$$

$$\Rightarrow \alpha = (n_f)^{\frac{1}{4}}$$

Dans le cas d'un plan composite pour deux facteurs ayant ses points en étoile situés à $\alpha = (4)^{1/4} = 1.414$ du centre, la matrice d'information est la suivante :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 11 & & & & 8 & 8 \\ & 8 & & & & \\ & & 8 & & & \\ & & & 4 & & \\ 8 & & & & 12 & 4 \\ 8 & & & & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Cette matrice respecte bien le critère d'isovariance par rotation : $3 \times 4 = 12$.

Dans ces conditions, l'erreur de prédiction des réponses calculées est la même pour les points situés à la même distance du point central. Le critère d'isovariance par rotation est respecté quand tous les points du plan sont à la même distance du point central, c'est-à-dire sur un cercle, une sphère ou une hypersphère.

b. Presque orthogonalité

C'est un autre critère d'optimalité très utilisé. Au lieu de l'isovariance par rotation, on pourrait vouloir respecter le critère d'orthogonalité. Il faudrait une disposition des points qui entraîne une matrice $X^T X$ diagonale. Cela n'est pas possible car on ne peut pas annuler les éléments correspondants aux termes constants et aux termes carrés. Rappelons qu'il faut que la sous matrice, obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne de $(X^T X)^{-1}$ doit être diagonale. On démontre que cela est possible si

$$\alpha = \left(\frac{n_f (\sqrt{n} - \sqrt{n_f})^2}{4} \right)^{1/4}$$

Pour deux facteurs on a : $\alpha = \left(\frac{4(\sqrt{4+4+4} - \sqrt{4})^2}{4} \right)^{1/4} = (1.46)^{1/2} = 1.210$.

Écrivons la matrice d'information correspondante :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 6928 & 6928 \\ 0 & 6928 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6928 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6928 & 0 & 1 & 0 & 8287 & 4 \\ 6928 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8287 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice d'information traduit la quantité d'information apportée par une stratégie expérimentale donnée, pour l'estimation des coefficients d'un modèle postulé A . Si ce

déterminant est nul il est impossible d'obtenir son inverse et de poursuivre la mise en œuvre de la méthode des moindres carrés, conduisant à l'estimation des coefficients du modèle. Plus le déterminant de cette matrice est grand, plus la qualité d'estimation des coefficients du modèle sera meilleure. En effet, les incertitudes affectant les coefficients du modèle et les effets moyens des facteurs seront faibles. Il convient donc de choisir les combinaisons des modalités des facteurs qui maximisent le déterminant de la matrice d'information : c'est l'objet de la construction d'un plan optimal.

3.3.3.5. Matrice de dispersion

La matrice de dispersion correspondante est bien presque orthogonale puisque si l'on élimine la première ligne et la première colonne, on obtient une matrice diagonale.

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,239 & 0 & 0 & 0 & -0,135 & -0,135 \\ 0 & 0,144 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ -0,135 & 0 & 1 & 0 & 0,233 & 4 \\ -0,135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,233 \end{pmatrix}$$

La matrice de dispersion joue un rôle important dans la construction d'un plan optimal. Elle est définie à partir de l'inverse de la matrice d'information. Les diagonaux de la matrice de dispersion sont appelés les coefficients de variance, ces derniers traduisent l'incertitude affectant les estimations des coefficients du modèle mathématique. On cherche donc à minimiser la trace de la matrice de dispersion en construisant un plan optimal, on garantira une plus grande indépendance entre les valeurs estimées des effets moyens.

3.3.4. Avantages et inconvénients

Les plans composites permettent d'établir un modèle du second degré en deux étapes. Il faut d'abord réaliser un plan factoriel complet avec des points centraux, puis un plan en étoile auquel on ajoute également des points centraux. Cette stratégie présente de nombreux avantages :

- Ils sont très économiques : le nombre total d'essais est réduit,
- Chaque facteur est étudié sur 5 niveaux,
- Ils permettent une modélisation séquentielle : si, après avoir réalisé un plan factoriel à 2 niveaux et des points au centre, l'expérimentateur veut améliorer son modèle en

ajoutant des termes carrés, il lui suffit de compléter les essais déjà réalisés par les points en étoile.

Mais elle a l'inconvénient de nécessiter plus de points expérimentaux que de coefficients à déterminer. Si l'on est sûr de connaître tous les facteurs influents et si l'on soupçonne que la surface de réponse est du second degré, on peut envisager de réaliser tout de suite un plan du second degré sans passer par l'étape du plan factoriel.

3.4. Plans factoriels complets à trois niveaux

Ces plans permettent d'étudier k facteurs à raison de trois niveaux par facteur. La notation de ces plans est 3^k , le k en exposant signifie qu'il y a k facteurs à étudier, et le trois signifie que chaque facteur prend 3 niveaux. Cette notation indique également le nombre d'essais à effectuer [11].

3.4.1. Construction des plans complets à trois niveaux

Les plans à 3 niveaux seront tous définis de la manière suivante :

- La suite des chiffres du premier facteur est -1, 0, +1; -1, 0, +1;...
- La suite des chiffres du deuxième facteur est constituée de -1, -1, -1 suivis de 0, 0, 0 et de +1, +1, +1, ..., -1,-1,-1; 0, 0, 0; +1, +1, +1; -1, -1, -1; 0, 0, 0; +1,+1,+1; ...
- Le troisième facteur aura 9 niveaux égaux à -1 suivis de 9 égaux à 0 et enfin de 9 égaux à +1,
- Le quatrième facteur aura 27 niveaux égaux à -1 suivis de 27 égaux à 0 et enfin de 27 égaux à +1,
- etc...

Pour deux facteurs, le nombre d'essais à réaliser est $3^2 = 9$ essais. La matrice d'expériences est donnée par le tableau 3.6.

Tableau 3.6 : Matrice d'expérience pour un plan 3^2

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	-1	0
5	0	0
6	1	0
7	-1	1
8	0	1
9	1	1

Le domaine d'étude est représenté par la figure 3.8.

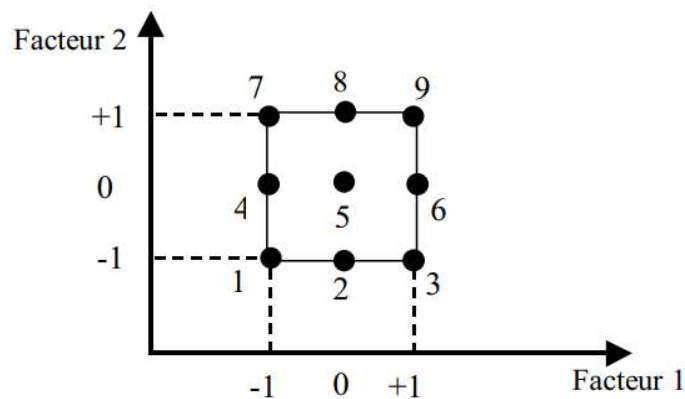


Figure 3.8 : Domaine d'étude pour un plan 3^2

Pour 3 facteurs nous obtenons un cube dont les vingt-sept essais sont indiqués dans la figure 3.9.

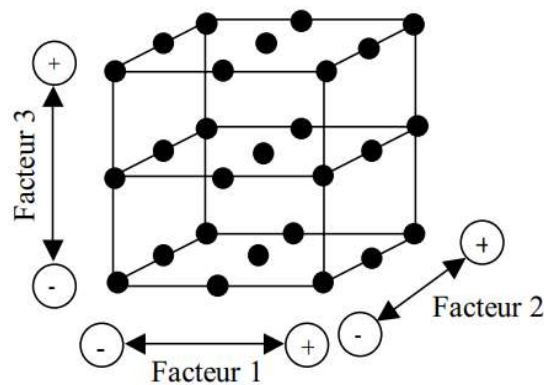


Figure 3.9 : Domaine d'étude pour un plan 3^3

3.4.2. Avantages et inconvénients

Les avantages des plans factoriels complets à trois niveaux sont les mêmes que ceux des plans factoriels complets à deux niveaux. Mais, le modèle retenu par ces plans est du second degré.

L'inconvénient principal de ces plans est que la taille du plan peut être très grande lorsque le nombre de facteurs augmente.

3.5. Plans de Box-Behnken

Box et Behnken [4] ont proposé en 1960 ces plans qui permettent d'établir des modèles du second degré. En effet tous les facteurs ont trois niveaux, -1, 0 et +1. Ces plans sont faciles à mettre en œuvre et possèdent la propriété de séquentialité par rapport aux facteurs, c'est-à-dire que l'on peut entreprendre l'étude des k premiers facteurs en se réservant la possibilité d'en ajouter de

nouveaux sans perdre les résultats des essais déjà effectués. Cette propriété est précieuse quand on veut faire une exploration rapide des deux ou trois facteurs qui paraissent les plus utiles tout en se réservant la possibilité d'en étudier d'autres plus tard.

3.5.1. Construction des plans de Box-Behnken

Pour 3 facteurs nous avons un cube pour 4 et 5 facteurs nous aurons des hyper-cubes à 4 et 5 dimensions (lorsque le nombre de facteurs dépasse 3, nous parlerons de 4-cube, 5-cube, ..., k-cube). On place les points expérimentaux non pas aux sommets du cube ou l'hyper-cube, mais au milieu des arêtes, au centre des faces (carrés) ou au centre des cubes. Ils se construisent de la manière suivante :

- Ecrire un plan 2^2 sur des facteurs et mettre les $k-2$ variables restantes au niveau 0,
- Répéter l'opération pour toutes les combinaisons possibles des facteurs,
- Ajouter des points au centre.

Pour 3 facteurs les points expérimentaux sont placés au milieu des arêtes du cube comme l'indique la figure 3.10, Cette disposition a pour conséquence de placer tous les points expérimentaux à égale distance du centre du domaine d'étude, donc sur une sphère. Un cube possède 12 arêtes, il y aura donc 12 essais et suivant les conseils de Box et Behnken, on ajoute 3 points au centre du domaine d'étude. Les plans de Box Behnken pour 3 facteurs contiennent donc 15 points expérimentaux. Les points expérimentaux étant sur une sphère, le critère d'isovariance par rotation sera respecté. Remarquons également que si l'on place 4 points au centre, au lieu de 3, on obtient un plan qui répond au critère de Presque orthogonalité [3].

Nous constatons que les sommets du cube ne font pas partie du plan : la modélisation séquentielle n'est pas possible. Bien que le domaine soit inscrit dans un cube, nous retrouvons une symétrie sphérique, ce plan particulier est isovariant par rotation.

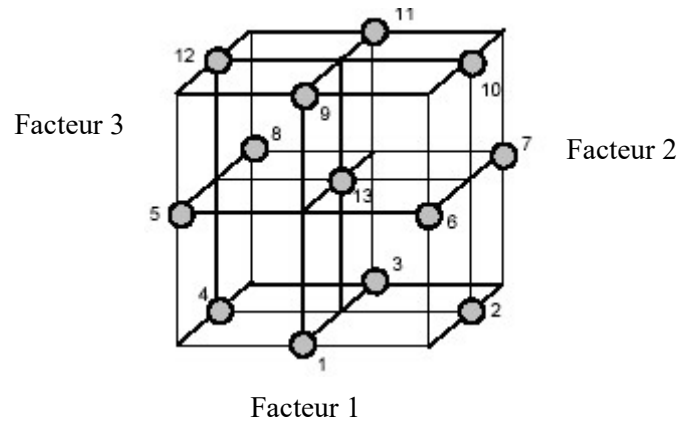


Figure 3.10 : Plan de Box-Behnken pour trois facteurs

Les points situés au centre d'une arête ont pour coordonnées $(0, \pm 1, \pm 1)$. La construction du plan suit le principe suivant : deux facteurs décrivent un carré (4 essais d'un plan 2^2) et les coordonnées correspondantes du troisième facteur sont égales à 0. Le Tableau 3.7 applique ce principe.

Tableau 3.7 : Plan de Box-Behnken pour trois facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	-1	-1	0
2	1	-1	0
3	-1	1	0
4	1	1	0
5	-1	0	-1
6	1	0	-1
7	-1	0	1
8	1	0	1
9	0	-1	-1
10	0	1	-1
11	0	-1	1
12	0	1	1
13 à 15	0	0	0

Pour 4 facteurs le plan de Box-Behnken pour 4 facteurs se construit comme celui de 3 facteurs. Les points expérimentaux sont situés au milieu des arêtes d'un hyper cube à 4 dimensions et on ajoute des points au centre. Nous ne pouvons en donner qu'une représentation matricielle.

3.5.2. Propriété du plan de Box-Behnken

Avant de réaliser les essais, il est possible de connaître un certain nombre de propriétés du plan d'expériences :

- L'erreur sur les coefficients du modèle à un constant pré,
- L'erreur sur les réponses prédites,
- La fonction de variance indiquant la répartition de l'erreur de prédiction dans le domaine d'étude.

Les propriétés qui vont être établies ne sont valables que pour le modèle mathématique postulé choisi au paragraphe suivant. Si, pour certaines raisons, l'expérimentateur est amené à changer de modèle, il devra établir les nouvelles propriétés de ce plan.

3.5.2.1. Modèle mathématique postulé

Le modèle mathématique postulé utilisé avec le plan de Box-Behnken pour 3 facteurs est un modèle du second degré avec les interactions d'ordre deux :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + e$$

Ce modèle comporte 10 coefficients. Il faut donc au minimum 10 équations pour les estimer. Le plan classique de Box-Behnken pour 3 facteurs comportant 13 équations indépendantes, il y a donc une solution mathématique à ce problème. Comme il y a 15 points expérimentaux fournissant chacun 1 équation, 10 équations servent à calculer les coefficients, et 5 le résidu. Comme il y a des points répétés au centre du domaine d'étude.

3.5.2.2. Matrice de calcul

La matrice de calcul est construite à partir du plan d'expériences et du modèle postulé. Pour trois facteurs la matrice est donnée par :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5.2.3. Matrice d'information

Cette matrice est calculée à partir de la matrice de calcul, et elle égale à $X^T X$. Pour trois facteurs on a :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 15 & & & & & & & 8 & 8 & 8 \\ & 8 & & & & & & & & \\ & & 8 & & & & & & & \\ & & & 8 & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & \\ & & & & & 4 & & & & \\ & & & & & & 4 & & & \\ 8 & & & & & & & 8 & 4 & 4 \\ 8 & & & & & & & 4 & 8 & 4 \\ 8 & & & & & & & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

On remarque que pour 3 facteurs le plan ne respecte pas l'isovariance par rotation, 8 n'est pas une valeur qui égale à 3×4 .

3.5.2.4. Matrice de dispersion

Cette matrice est l'inverse de la matrice d'information. Pour 3 facteurs on obtient :

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,333 & & & & & & -0,167 & -0,167 & -0,167 \\ & 0,125 & & & & & & & \\ & & 0,125 & & & & & & \\ & & & 0,125 & & & & & \\ & & & & 0,25 & & & & \\ & & & & & 0,25 & & & \\ & & & & & & 0,25 & & \\ -0,167 & & & & & & & 0,271 & 0,021 & 0,021 \\ -0,167 & & & & & & & 0,021 & 0,271 & 0,021 \\ -0,167 & & & & & & & 0,021 & 0,021 & 0,271 \end{pmatrix}$$

La matrice de dispersion montre que ce plan ne respecte pas le critère de presque orthogonalité. Mais si l'on ajoute quatre points au centre au lieu de trois, on obtiendra un plan de Box-Behnken qui respecte ce critère.

3.5.3 Avantages et inconvénients

Les plans de Box-Benhenk en sont faciles à construire, et permettent de réaliser un modèle du deuxième degré. Mais dès que le nombre de facteurs à étudier devient grand ces plans obligent à faire beaucoup d'essais.

3.6. Les plans de Dœhlert

Les points d'expériences des plans proposés par David H .Doehlert en 1970 remplissent de manière uniforme l'espace expérimental. Ils sont encore appelés réseaux uniformes car les points expérimentaux sont uniformément distribués dans l'espace [12] :

- Aux sommets et au centre d'un hexagone régulier (figure3.8) pour $k=2$,
- Aux sommets et au centre d'un dodécaèdre pour $k=3$.

C'est une démarche différente de celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. On ne cherche pas le meilleur emplacement des points expérimentaux pour un modèle donné. On répartit simplement de manière régulière les points dans l'espace expérimental sans choisir de modèle et sans se poser de question sur le critère d'optimalité.

Les plans de Doehlert permettent de réaliser tout de suite un plan du second degré sans passer par l'étape du plan factoriel. Les plans de Doehlert commencent à deux facteurs et peuvent être ensuite utilisés pour trois, quatre, cinq facteurs et plus. Ils possèdent la propriété de séquentialité par rapport aux facteurs, c'est-à-dire que l'on peut entreprendre l'étude des k premiers facteurs en se réservant la possibilité d'en ajouter ensuite de nouveaux sans perdre les résultats des essais déjà effectués. La seule précaution à prendre est de maintenir le niveau des facteurs non étudiés à une valeur constante pendant l'étude des facteurs actifs. On maintient les facteurs inactifs au niveau 0 en unités codées. Cette propriété offre la possibilité d'exploration rapide de deux ou trois facteurs qui paraissent les

plus utiles sans compromettre l'étude de futurs facteurs.

Les points d'expériences disposés plans de Doehlert remplissent l'espace expérimental de manière compacte et uniforme. Cette disposition permet d'étendre facilement le plan vers n'importe quelle direction de l'espace en ajoutant des points qui seront, eux aussi, régulièrement repartis. La possibilité d'étendre le champ d'investigation dans toutes les directions facilite l'exploration de l'espace expérimental. La recherche d'un optimum ou d'une valeur cible sera facilitée par ces plans.

3.6.1. Plans de Doehlert pour 2 facteurs

Les points expérimentaux sont disposés selon un hexagone régulier avec un point central. On a l'habitude de représenter le plan de Doehlert pour 2 facteurs comme sur la figure 3.11. Mais, si des raisons pratiques nécessitent une autre orientation, rien ne nous empêche de faire tourner l'hexagone d'un angle quelconque autour du centre. Il faudra simplement changer les coordonnées des points expérimentaux en conséquence. Par exemple, si l'on veut avoir autant de niveaux sur les deux axes, on pourra faire tourner l'hexagone de 15° , on aura alors des niveaux de mêmes valeurs pour chacun des deux facteurs.

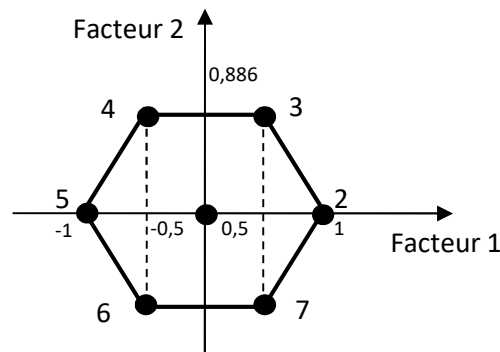


Figure 3.11 : Plan de Doehlert pour 2 facteurs.

La matrice d'expériences correspondante à ce plan est donnée par le tableau 3.8 :

Tableau 3.8 : Matrice d'expériences d'un plan de Doehlert pour deux facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2
1	0	0
2	1	0
3	0,5	0,866
4	-0,5	0,866
5	-1	0
6	-0,5	-0,866
7	0,5	-0,866

La disposition des points expérimentaux selon la figure 3.8 conduit à cinq niveaux pour le premier facteur x_1 et trois niveaux pour le deuxième facteur x_2 . Le plan ne respecte pas le critère isovariance par rotation. Tous les points du plan de Doehlert sont sur un cercle de rayon unité (en grandeurs centrées réduites). Le domaine défini par les plans de Doehlert est un domaine sphérique, un cercle pour deux facteurs, une sphère pour trois facteurs et une hyper sphère pour plus de trois facteurs. Cette matrice d'expériences permet le calcul des coefficients d'un modèle de surface de réponse de degré 2.

3.6.2. Plans de Doehlert pour 3 facteurs

Les points sont disposés régulièrement dans l'espace expérimental comme des billes qui seraient en contact les unes à côté des autres. On retrouve l'hexagone pour les deux premiers facteurs, le troisième facteur étant au niveau 0. Au-dessus de l'hexagone, il y a 3 points d'expériences, et autant en dessous. Le plan comprend donc 13 essais. Le modèle postulé du second degré possède 10 coefficients. Il reste donc 3 degrés de liberté pour évaluer l'erreur globale.

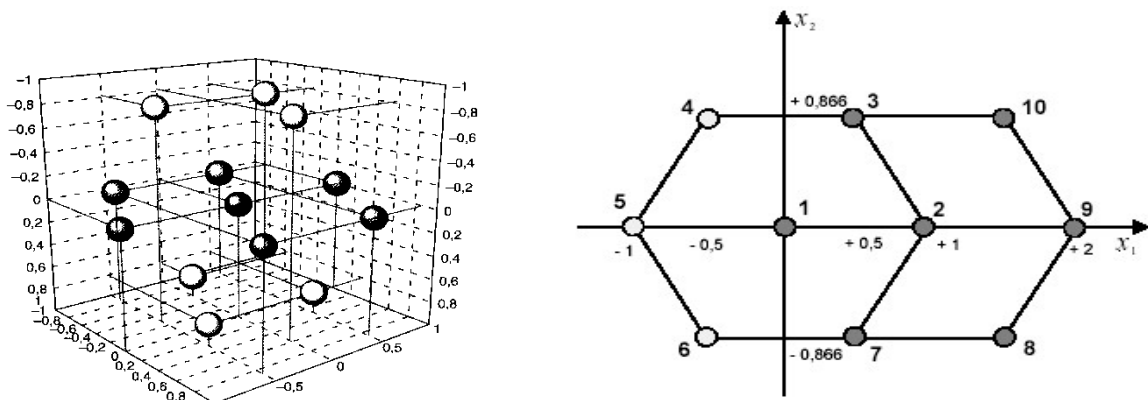


Figure 3.12 : Plan de Doehlert pour trois facteurs.

Les 7 points initiaux de l'hexagone sont conservés et l'on y ajoute 6 points dont la position est illustrée par la figure 3.12. Les sept premiers points peuvent être considérés comme les centres de sphères jointives. Il y a un empilement compact de billes. Si l'on regarde la face supérieure de cette figure, on constate que ces sept sphères laissent six creux dont trois peuvent être utilisés pour placer trois nouvelles billes. On peut faire de même pour la face du dessous. On obtient encore un empilement compact. Il y a 13 billes serrées les unes contre les autres dans un espace à 3 dimensions. Les points d'expériences forment un réseau uniforme.

Nous n'avons signalé qu'un seul point central, mais rien n'empêche, comme pour tous les autres plans, d'en réaliser plusieurs. Ils apportent toujours les mêmes renseignements :

- l'assurance qu'il n'y a pas de glissement entre les deux séries d'essais. Il faut prévoir un ou plusieurs points centraux pour le premier plan à deux facteurs, et un ou plusieurs points centraux pour le deuxième plan qui introduit le troisième facteur,
- ils permettent d'obtenir une estimation de l'erreur expérimentale, ils diminuent l'erreur de prédiction autour du point central.

3.6.3. Plans de Doehlert pour n facteurs

L'empilement compact des points d'expériences peut se poursuivre dans des espaces à quatre, cinq et plus encore de dimensions. Nous indiquons, en l'annexe, sur un seul tableau.

3.6.4. Plans de Doehlert et de Box-Behnken pour 3 facteurs

La disposition relative des points d'expériences des plans de Doehlert et des plans de Box-Behnken pour 3 facteurs est tout à fait identique. Les deux types de plans ne diffèrent que par l'orientation des axes de référence. On passe du plan de Doehlert au plan de Box-Behnken par une simple rotation. Pour s'en persuader, il suffit de considérer la grande diagonale du cube des plans de Box-Behnken. On trouve trois points dans un même plan, puis les six points de l'hexagone et du point central et enfin les trois derniers points dans un troisième plan. Les propriétés des plans de Doehlert et de Box-Behnken seront donc les mêmes.

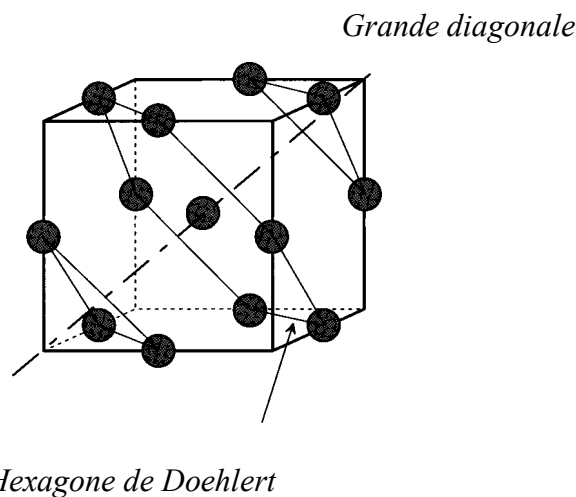


Figure 3.13 : Un plan de Box-Behnken pour trois facteurs peut être regardé comme un plan de Doehlert.

3.6.5. Propriété du plan de Doehlert

3.6.5.1. Module mathématique postulé

Le modèle mathématique postulé des plans de Doehlert est, en général, un modèle du second degré avec interactions d'ordre deux. Pour deux facteurs, on a :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + e$$

3.6.5.2. Matrice de calcul

La matrice de calcul est construite à partir du plan d'expériences et du modèle postulé. Pour deux facteurs la matrice est donnée par :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.866 & 0.433 & 0.25 & 0.750 \\ 1 & -0.5 & 0.866 & -0.433 & 0.25 & 0.750 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.866 & 0.433 & 0.25 & 0.750 \\ 1 & 0.5 & -0.866 & -0.433 & 0.25 & 0.750 \end{pmatrix}$$

3.6.5.3. Matrice d'information

Cette matrice est calculée à partir de la matrice de calcul, et elle égale à $X^T X$. Pour deux facteurs on a :

$$X^T X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2.25 & 0.75 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 2.25 \end{pmatrix}$$

3.6.5.4. Matrice de dispersion

Cette matrice est l'inverse de la matrice d'information. Pour 2 facteurs on obtient :

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0.833 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0.833 & 1.5 \end{pmatrix}$$

3.6.6. Avantages et inconvénients

La multiplicité des niveaux dans les plans de Doehlert ne facilite pas la construction du plan d'expériences. Lorsqu'on passe à quatre facteurs et plus il devient difficile de définir même les niveaux de chacun des facteurs. Il faut alors avoir recours à des matrices préparées à l'avance. Les plans de Doehlert permettent d'obtenir un modèle du second degré avec un minimum d'essais. Si on les compare avec plans composites on constate un léger gain pour deux facteurs (sept essais) alors qu'il faut neuf essais avec un plan composite pour explorer le domaine expérimental et calculer les coefficients du modèle. Dans le cas où les essais sont longs et coûteux, l'économie de deux expériences peut être avantageuse. C'est donc un plan très économique qui est utile lorsque l'on est pressé ou lorsque les expériences content chères.

3.7. Les plans de Roquemore

Les plans d'expériences proposés par Roquemore en 1976[20] sont conçus pour des surfaces du second degré. Ils essayent de respecter à la fois le critère d'isovariance par rotation et le critère de presque orthogonalité. C'est la raison pour laquelle on les appelle les plans hybrides. Il est impossible de respecter simultanément ces deux critères. Ces plans sont presque saturés. Ils sont donc utiles lorsqu'on veut faire le moins d'essais possible. Ces plans existent pour trois, quatre et six facteurs et portent des noms particuliers. Ces noms sont constitués de trois indicateurs :

1. Le nombre de facteurs,
2. Le nombre d'expériences,
3. Une lettre pour différencier deux plans ayant le même nombre d'expériences et construits pour traiter le même nombre de facteurs.

Pour trois facteurs , il y a deux plans de Roquemore, le 311A et le 311B. Ils permettent d'étudier 3 facteurs en 11 essais. Pour quatre facteurs il y a deux plans de Roquemore le 411A et le 411B. Pour 6 facteurs, il y a un plan de Roquemore, le 618A. Nous étudierons en détail le plans 311A et nous indiquerons simplement les autres plans sans les analyser.

3.7.1. Plan 311A de Roquemore

Comme son nom l'indique, ce plan permet d'étudier 3 facteurs en 11 essais.

3.7.1.1. Matrice d'expériences

Les points expérimentaux situés comme l'indique le tableau 3.9.

Tableau 3.9 : Plans de Roquemore 311A pour trois facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	0	0	2
2	0	0	-1
3	-1,414	-1,414	1
4	1,414	-1,414	1
5	-1,414	1,414	1
6	1,414	1,414	1
7	-2	0	-1
8	2	0	-1
9	0	-2	-1
10	0	2	-1
11	0	0	0

L'examen du tableau permet de distinguer les éléments suivants :

- Un plan 2^2 constitué de quatre points situés aux sommets d'un carré (essais 3, 4, 5 et 6). Ces essais sont au niveau +1 pour le facteurs 3,
- Quatre points situés aux sommets d'un carré (essais 7, 8, 9 et 10) décalés de 45° par rapport au carré précédent. Ces points sont au niveau -1 du facteur 3,
- 3 points situés sur un axe passant par les centres des deux carrés précédents, le premier point est situé au niveau 0 du facteurs 3, c'est le point central. Les deux autres points sont respectivement situés au niveau +2 et -2 pour le troisième facteur (Figure 3.14).

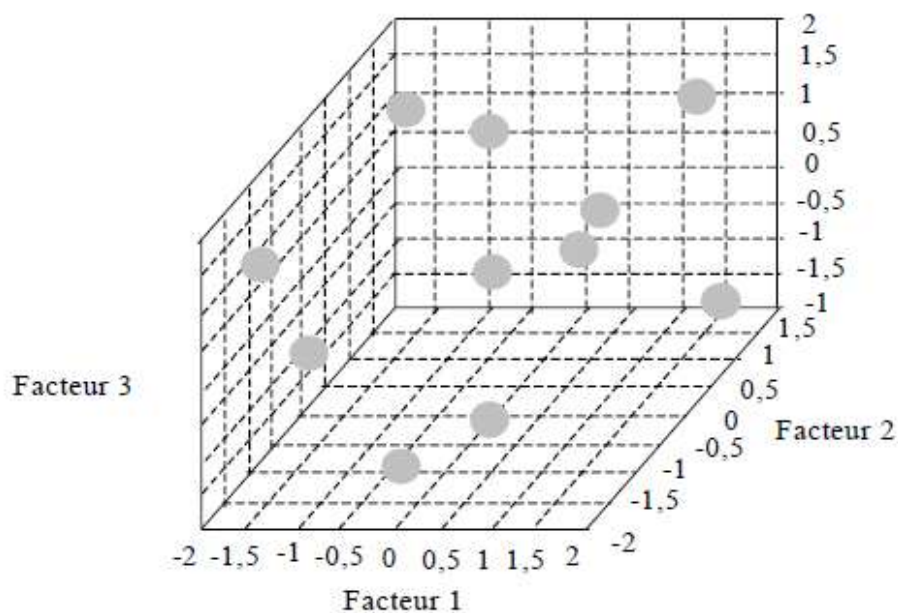


Figure 3.14 : Emplacement des points expérimentaux du plan de Roquemore 311A.

3.7.1.2. Modèle Mathématique

Le modèle mathématique postulé des plans de Roquemore est un modèle du seconde degré avec interactions d'ordre deux. Pour trois facteurs :

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_1 + \hat{a}_2x_2 + \hat{a}_3x_3 + \hat{a}_{12}x_1x_2 + \hat{a}_{13}x_1x_3 + \hat{a}_{23}x_2x_3 + \hat{a}_{11}x_1^2 + \hat{a}_{22}x_2^2 + \hat{a}_{33}x_3^2$$

3.7.1.3. Matrice de calcul

Pour le plan de Roquemore 311A, la matrice de calcul X est une matrice (10,10) puisqu'il y a 10 coefficients dans le modèle postulé et que l'on effectue 11 essais. Ce plan est donc presque saturé.

3.7.1.3. Matrice d'information

La matrice d'information est une matrice (10,10)

$$X^tX = \begin{pmatrix} 11 & & & & & & & & & & 16 & 16 & 16 \\ & 16 & & & & & & & & & & & & \\ & & 16 & & & & & & & & & & & \\ & & & 16 & & & & & & & & & & \\ & & & & 16 & & & & & & & & & \\ & & & & & 16 & & & & & & & & \\ & & & & & & 16 & & & & & & & \\ & & & & & & & 16 & & & & & & \\ 16 & & & & & & & & 16 & & & & & \\ 16 & & & & & & & & & 48 & 16 & 16 & & \\ 16 & & & & & & & & & 16 & 48 & 16 & & \\ & & & & & & & & & 16 & 16 & 40 & & \end{pmatrix}$$

L'isovariance par rotation est respectée pour les facteurs 1 et 2 car $48=3 \times 16$. Elle ne l'est pas pour le facteurs 3 ($40 \neq 3 \times 16$).

3.7.1.4. Matrice de dispersion

La matrice de dispersion est également une matrice (10,10). Elle va nous servir à calculer les variances des coefficients.

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & -0,188 & -0,188 & -0,188 \\ & 0,063 & & & & & & & \\ & & 0,063 & & & & & & \\ & & & 0,063 & & & & & \\ & & & & 0,063 & & & & \\ & & & & & 0,063 & & & \\ & -0,188 & & & & & 0,061 & 0,029 & 0,029 \\ & -0,188 & & & & & 0,029 & 0,06 & 0,029 \\ & -0,188 & & & & & 0,029 & 0,039 & 0,094 \end{pmatrix}$$

3.7.1.5. Critère d'optimalité

L' examen de la matrice d'information montre que le plan de Roquemore 311A pour 3 facteurs respecte le critère d'isovariance par rotation pour 2 facteurs et ne le respecte pas pour le troisième. L'examen de la matrice de dispersion montre que le plan de Roquemore 311A ne respecter pas le critère de presque orthogonalité. Mais les valeurs des éléments hors diagonale principale sont faibles.

3.7.2. Autres plans de Roquemore

Les principaux plans hybrides de Roquemore concernent les plans à trois ou quatre facteurs. Ils existent aussi pour six facteurs. Nous indiquons ces divers plans dans les tableaux suivants: 3.10, 3.11. Les propriétés de ces plans s'obtiennent de la même manière que le plan 311A.

Tableau 3.10 : Plans de Roquemore 311B pour trois facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	0	0	2,449
2	0	0	-2,499
3	-0,751	-2,106	-1
4	0,751	-2,106	1
5	-0,751	2,106	1
6	0,751	2,106	-1
7	-2,106	-0,751	1
8	2,106	-0,751	-1
9	-2,106	0,751	-1
10	2,106	0,751	1
11	0	0	0

Tableau 3.11: Plans de Roquemore 416B pour quatre facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4
1	0	0	0	1,732
2	0	0	0	-0,269
3	-1	-1	-1	0,605
4	1	-1	-1	0,605
5	-1	1	-1	0,605
6	1	1	-1	0,605
7	-1	-1	1	0,605
8	1	-1	1	0,605
9	-1	1	1	0,605
10	1	1	1	0,605
11	-1,518	0	0	-1,05
12	1,518	0	0	-1,05
13	0	-1,518	0	-1,05
14	0	1,518	0	-1,05
15	0	0	-1,518	-1,05
16	0	0	1,518	-1,05

Tableau 3.12: Plans de Roquemore 416C pour quatre facteurs.

Essai N°	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4
1	0	0	0	1,765
2	1	0	-1	-0,568
3	-1	-1	-1	0,568
4	1	-1	-1	0,568
5	-1	1	-1	0,568
6	1	1	1	0,568
7	-1	-1	1	0,568
8	1	-1	1	0,568
9	-1	1	1	0,568
10	1	0	0	-1,051
11	-1,470	0	0	-1,051
12	1,470	1,470	0	-1,051
13	0	1,470	0	-1,051
14	0	0	-1,470	-1,051
15	0	0	-1,470	-1,051
16	0	0	0	-1,051

3.7.3. Avantages et inconvénients

Avec ces plans on peut étudier 4 facteurs en 16 essais seulement et réaliser un modèle du deuxième degré. Si on les compare aux plans de Doehlert, il faut réaliser 21 essais. L'inconvénient de ces plans est qu'ils existent que pour 3, 4 et 6 facteurs seulement.

CHAPITRE IV***Etude Comparative des divers plans d'Expériences***

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à comparer les performances des plans d'expériences étudiés en troisième chapitre afin de tirer les indications qui puissent guider les expérimentateurs dans leurs choix.

4.1. Critères d'optimalités pour les plans d'expériences

Il existe plusieurs critères permettant d'évaluer la qualité d'un plan d'expérience. En fonction des objectifs de l'étude, il est possible que les emplacements optimaux des points expérimentaux dans le domaine d'étude ne soient pas symétriques. La planification des points d'expérience dépend des contraintes propres à l'étude ainsi que d'un modèle préalablement établi. Elle implique également l'utilisation de critères d'optimalités essentiels, tels que [20].

4.1.1. Critère de O-optimalité

La matrice de calcul X est une matrice orthogonale d'Hadamard. Il en résulte que la matrice $(X^T X)^{-1}$ est une matrice diagonale. Seuls les termes diagonaux de cette matrice sont différents de zéro et l'on démontre que la variance des coefficients est la plus faible possible.

4.1.2. Critère d'orthogonalité

Une matrice d'expériences est orthogonale si elle permet d'obtenir des estimations des coefficients indépendants. Cela se caractérise par des axes de l'ellipsoïde parallèles aux axes des coefficients. Cette propriété est obtenue quand $(X^T X)^{-1}$ est diagonale donc quand les covariances des coefficients sont nulles.

4.1.3. Critère de presque-orthogonalité

Si la sous-matrice obtenue en retirant la première ligne et la première colonne de la matrice $(X^T X)^{-1}$ est diagonale, le critère de presque-orthogonalité est respecté.

4.1.4. Critère de D-optimalité

Si l'on veut la plus petite variance possible sur l'ensemble des coefficients, il faut que les termes diagonaux de la matrice de dispersion soient eux-mêmes les plus petits possibles. On obtient ce résultat en maximisant le déterminant de la matrice $X^T X$. Le critère correspondant s'appelle le critère de D-optimalité.

4.1.5. Critère de A-optimalité

La somme des variances des coefficients peut être minimisée. Dans ce cas on parle de critère de A-optimalité. Un plan est A-optimal si la position des points expérimentaux minimise la trace de la matrice $(X^T X)^{-1}$.

4.1.6. Critère de G-optimalité

Parmi les variances des coefficients il y en a une qui est plus grande que toutes les autres. On peut vouloir que cette forte variance soit la plus faible possible. Le critère correspondant s'appelle le critère de G-optimalité.

$$d_{max} = \text{Max}(d^2(\hat{y}_p))$$

La meilleure matrice d'expériences vis à vis de ce critère étant celle qui a la plus petite valeur.

Efficacité-G : L'efficacité-G d'une matrice d'expérience est donné par la formule suivante :

$$Eff - G = \frac{q}{N d_{max}} 100$$

4.1.7. Critère de E-Optimalité

Une matrice d'expériences est dite E-optimale, si elle conduit à la valeur propre maximale de $(X^T X)^{-1}$ la plus faible possible.

4.1.8. Critère M (critère du déterminant de la matrice des Moments)

Le critère M permet de tenir compte de la qualité d'information apportée par l'expérience. Ce critère est indépendant du nombre des essais du plan d'expériences.

On appelle matrice des moments M, la matrice définie par :

$$\mathbf{M} = \frac{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})}{N}$$

Grâce à ce critère on peut comparer deux matrices d'expériences, n'ayant pas forcément le même nombre d'expériences. Soient M1 et M2 deux matrices des moments associées à deux matrices d'expériences constituées respectivement de N1 et N2 expériences.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)}{N_1}$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{(\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2)}{N_2}$$

Nous dirons que le premier plan est plus efficace que le deuxième plan vis à vis du critère M si :

$$|\mathbf{M}_1| > |\mathbf{M}_2|.$$

4.1.9. Critère d'iso-variance par rotation

On désire que les réponses calculées avec le modèle issu du plan d'expériences aient une erreur de prévision identique pour des points situés à la même distance du centre du domaine d'étude. Dans ce cas on parle de plan iso-variant par rotation (rotatable en anglais). On remarquera que ces critères conduisent à des qualités de modélisation différentes. Certains privilégient une bonne précision sur les coefficients du modèle, d'autres assurent une répartition homogène de l'erreur de prévision.

4.2. Comparaison des qualités des matrices d'expériences

Dans les différents tableaux qui regroupent les caractéristiques des matrices d'expérience, nous avons rapporté pour chaque matrice d'expériences : le nombre d'expériences ('nb.exp'), le nombre de niveaux pris par chaque variable (nb.niveaux'), le déterminant de matrice dispersion

$|(X^T X)^{-1}|$ (critère optimale-D) la trace de $(X^T X)^{-1}$ (critère A), le déterminant de la matrice des moments noter $|M|$ (critère M), la valeur maximale de la fonction de variance de prédiction d_{max} et l'efficacité-G (critère G).

4.2.1. Modèle polynômial du premier degré

Un modèle polynômial du 1er de à deux variables comporte quatre coefficients à estimer ($p=4$). Les valeurs du critère de qualité calculées pour chacune des matrices d'expériences sont regroupées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Caractéristiques des matrices d'expérience du premier degré

<i>Plan</i> <i>Critère</i>	<i>Plan Factoriel</i> 2^2	<i>Plan Factoriel</i> 2^3	<i>Plan de Mozzo</i>
<i>Nb.exp</i>	4	8	3
<i>Nb.niveaux</i>	2 ; 2	2 ; 2	3;3
$ (\epsilon XX)^{-1} $	$3.9*10^{-3}$	$5.96*10^{-8}$	0,129
<i>Trace</i> $ (\epsilon XX)^{-1} $	1	1	1,5771
$ M $	1	1	0,287
d_{max}	1	1	1,56
<i>Eff-G(%)</i>	100%	100%	64,41
<i>Orthogonalité</i>	Oui	Oui	Oui

D'après le tableau 4.1, si on compare les propriétés des deux plans : plan complet à deux niveaux et plan de Mozzo on constate qu'à part l'économie du nombre des essais à effectuer, toutes les propriétés d'optimalité sont améliorées. Pour le plan à deux niveaux le déterminant de $(X^t X)^{-1}$ est petit par rapport au plan de Mozzo. Suivant le critère de D-optimalité le plan à deux niveaux est meilleur. Il en est de même pour la trace de $(X^t X)^{-1}$ et donc le critère A est mieux respecté. On voit que le déterminant de la matrice des moments pour le plan à deux niveaux est plus grand que celui de plan de Mozzo. Suivant le critère M le plan à deux niveaux est plus

efficace. De même les valeurs de d_{max} et $Eff-G(\%)$ montrent que le plan à deux niveaux est toujours le meilleur.

4.2.2. Modèle polynomial du second degré

4.2.2.1. Matrice d'expériences à deux variables

Un modèle polynomial du second degré à deux variables comporte six coefficients à estimer ($p=6$). Les valeurs des critères de qualité, calculées pour chacune des matrices d'expériences, sont regroupées dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 : Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à deux variables.

<i>Plan</i> <i>Critère</i>	<i>Plan Factoriel</i> 3^2	<i>Composite</i> ($a=1.414$)	<i>Doehlert</i>
<i>Nb.exp</i>	9	11	7
<i>Nb.niveaux</i>	3 ; 3	5 ; 5	5 ; 3
$ (\hat{X}X)^{-1} $	$1.92*10^{-4}$	$1.02*10^{-5}$	$3.2*10^{-2}$
<i>Trace</i> $ (\hat{X}X)^{-1} $	2.1389	1.19	6.0001
$ M $	$9.754*10^{-3}$	$5.5*10^{-2}$	$2.52*10^{-4}$
d_{max}	0.81	0.63	1
<i>Eff-G(%)</i>	82.30	86.58	85.71
<i>Orthogonalité</i>	Non	Non	Non
<i>Presque Orthogonalité</i>	Oui	Non	Non
<i>Iso-variance Par Rotation</i>	Non	Oui	Non

D'après le tableau 4.2 si on compare les propriétés des trois plans : plan factoriel complet à trois niveaux, plan composite et plan de Doehlert. Pour le plan composite le déterminant de $(X^T X)^{-1}$ est petit par rapport aux autres plans. Suivant le critère de *D-optimalité* le plan

composite est meilleur. Il en est de même pour la trace de $(X^T X)^{-1}$ et donc la critère A est mieux respecté.

On voit que le déterminant de la matrice des moments pour le plan composite et plus grand que celui des deux autres plans. Suivant le critère M le plan composite et plus efficace.

De même les valeurs de d_{max} et $Eff-G(\%)$ montrent que le plan composite est toujours meilleur.

4.2.2.2. Matrice d'expériences à trois variables

Le nombre de coefficients à estimer et de dix ($p=10$), les caractéristiques des matrices d'expériences à trois variables rassemblées dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 : Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à trois variables

Plan Critère	Plan Factoriel 3 ³	Plan Box- Behnken	Plan composite ($\alpha=0.9$)	Plan Requemore 311A	Plan Requemore 311B
Nb.exp	27	15	15	11	11
Nb.niveaux	3 ; 3 ; 3	3 ; 3 ; 3	5 ; 5 ; 5	5 ; 5 ; 5	5 ; 5 ; 5
$ (^tXX)^{-1} $	$1.702*10^{-11}$	$3.97*10^{-8}$	$7.44*10^{-11}$	$2.01*10^{-11}$	$2.16*10^{-11}$
Trace $ (^tXX)^{-1} $	1.18	2.27	2.08	12	11.8
$ M $	$2.85*10^{-4}$	$4.364*10^{-5}$	$2.33*10^{-2}$	$1.4*10^{-4}$	$1.75*10^{-4}$
d_{max}	0.51	0.73	0.99	1.16	1
Eff-G(%)	72.73	91.32	67.34	78.62	90.90
Orthogonalité	Non	Non	Non	Non	Non
Presque orthogonalité	Oui	Oui	Oui	Non	Non
Iso-variance par rotation	Non	Non	Non	Oui	Non

Entre les deux matrices suivantes, les matrices *Requemore 311A* et *Requemore 311B*, la seconde meilleure à tout point de vue, et les caractéristiques de cette matrice est excellentes ($d_{max} = 1$ $Eff-G(\%) = 90 \%$). Pour le plan factoriel complet à trois niveaux le déterminant de $(X^T X)^{-1}$ et le plus petit par rapport les autres plans (le critères-D est satisfait). De même pour la trace de $(X^T X)^{-1}$ et plus petite et donc le critère A est mieux respecté. On voit que la valeur de d_{max} est la meilleure pour les plans factoriels complets à trois niveaux aussi. D'après le critère M on voit que la matrice d'expériences du plan composite pour trois facteurs et plus efficace que les autres plans. Et pour $Eff-G(\%)$ le plan *Box-Behnken* est meilleur.

4.2.3 Matrice d'expériences à quatre variables

Les matrices d'expérience à quatre variables regroupées dans le tableau 4.4 permettre l'estimation des quinze coefficients du modèle polynomial du second degré correspondant ($p=15$).

Tableau 4.4 : Caractéristiques des matrices d'expériences du second degré à quatre variables

<i>Plan</i> <i>Critère</i>	<i>Requemore</i> <i>416B</i>	<i>Requemore</i> <i>416C</i>	<i>Composite</i> <i>orthogonale</i> <i>(a=1.21)</i>	<i>Composite</i> <i>retatable</i> <i>(a=1.414)</i>	<i>Box-Behnken</i>
<i>Nb.exp</i>	16	16	25	25	25
<i>Nb.niveaux</i>	5 ; 5 ; 5 ; 4	5 ; 5 ; 5 ; 4	5 ; 5 ; 5 ; 5	5 ; 5 ; 5 ; 5	3 ; 3 ; 3 ; 3
<i>Trace (XX)⁻¹ </i>	18.80	18.49	15.22	13.33	13.33
<i> M </i>	$7.7 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$9.3 \cdot 10^{-8}$	$9.3 \cdot 10^{-8}$
d_{max}	1.27	1.21	1.78	1	1
<i>Eff-G(%)</i>	74.03	77.49	33.74	60	60
<i>Orthogonalité</i>	Non	Non	Non	Non	Non
<i>Presque</i> <i>Orthogonalité</i>	Oui	Non	Oui	Non	Oui
<i>Iso-variance</i> <i>par rotation</i>	Non	Non	Oui	Oui	Non

Les matrices *416B* et *416C* ont des caractéristiques très proches, sont satisfaisantes avec une légère préférence pour la *416C*. Parmi les matrices d'expérience à vingt-cinq points les

matrices *composites rotatable* et de *Box-Behnken*, bien que différentes, ont les mêmes caractéristiques. Ces deux matrices ont un déterminant de matrice M et fonction de variance maximale sont très satisfaisante ($|M|= 9.3*10^{-8}$; $d_{max}=1$). Ici encore, le choix de la matrice dépend des contraintes sur le nombre de niveaux des variables. En revanche, la matrice d'expériences composite orthogonale et de qualité médiocre ($Trace(X^T X)^{-1} = 15.22$; $|M|=1.5*10^{-8}$; $d_{max}=1.78$; $Eff-G(\%)=33.74$).

Conclusion

Le fait de considérer n'importe quel système comme une boîte noire, c'est-à-dire qu'on ne s'intéresse qu'aux entrées (facteurs) et aux sorties (réponses), tout en ignorant complètement la structure interne de ce système, permet de donner une puissance considérable aux Plans d'expériences, puisqu'on peut traiter n'importe quel système de n'importe quelle discipline (physique, chimie, génie civil, mécanique, biologie, etc... et même de gestion). La méthode basée sur les statistiques ne prétend pas remplacer les résultats obtenus par chacune des autres disciplines, mais elle permet d'apporter des résultats complémentaires très utiles, notamment pour valider des résultats théoriques de ces autres disciplines, d'obtenir certains résultats pratiques et de faire une optimisation. Le modèle adopté par les statisticiens, en plus de sa simplicité puisqu'il se présente toujours sous forme d'un polynôme, permet de rassembler en une seule relation l'ensemble des informations pouvant être apportées par chaque facteur séparément ou conjointement (le nombre de ces facteurs pouvant largement dépasser 2 facteurs).

La Méthodologie de la Recherche Expérimentale, ou méthode de plans d'expériences, est une discipline mathématique. La théorie de la méthode des plans d'expériences reste toujours en développement et elle a pris une importance si grande, grâce à l'existence de logiciels spécifiques.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés en premier lieu à présenter un état d'art sur certain nombre de plans d'expériences, ces plans largement utilisés dans la recherche expérimentale constituent les fondements de la méthode de plans d'expériences.

En second lieu, une comparaison a été réalisée pour les besoins de chaque étude et chaque utilisateur.

Enfin, le travail réalisé dans ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives, telles que l'exploration d'autres catégories de plans d'expériences, comme les plans de mélanges et les plans numériques.

ANNEXE A

CODE MATLAB POUR LES RESULTAS PRESENTES DANS LE CHAPITRE 04

```
%Plans factoriel 2^2%
disp('Plans factoriel 2^2: ')
X=[1 -1 -1;1 1 -1;1 -1 1;1 1 1];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....
%Plans factoriel 2^3 %
disp(' Plans factoriel 2^3: ')
X=[1 -1 -1 -1 ;1 1 -1 -1;1 -1 1 -1;1 1 1 -1;1 -1 -1 1;1
1 -1 1;1 -1 1 1;1 1 1 1 ];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
```

```

%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....
%Plans de Mozzo pour 2 facteur %
disp(' Plans de Mozzo : ')
X=[1 0.268 1 ; 1 0.732 -0.732 ; 1 -1 -0.268 ];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....
%Plans factoriel 3^2 %
disp(' Plans factoriel 3^2 : ')
X=[1 -1 -1 ; 1 0 -1 ; 1 1 -1 ; 1 -1 ; 1 0 0 ; 1 1 0 ;
1 -1 1 ; 1 0 1 ; 1 1 1 ];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100

```

```

%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans composite  $\alpha=1.414$  %
disp(' Plans composite  $\alpha=1.414$  : ')
X=[1 -1 -1 1 1 1 ;1 1 -1 -1 1 1 ;1 -1 1 -1 1 1 ; 1 1 1
1 1 1 ;1 -1.414 0 0 1.999396 0 ; 1 1.414 0 0 1.999396
0 ;1 0 -1.414 0 0 1.999396 ;1 0 1.414 0 0 1.999396 ;1 0
0 0 0 0 ;1 0 0 0 0 0];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans Doehlert %
disp(' Plans Doehlert: ')
X=[1 0 0 0 0 0 ;1 1 0 0 1 0 ; 1 0.5 0.866 0.433 0.25
0.750 ; 1 -0.5 0.866 -0.433 0.25 0.750 ; 1 -1 0 0 1 0 ;
1 -0.5 -0.866 0.433 0.25 0.750 ; 1 0.5 -0.866 -0.433
0.25 0.750];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')

```

```

valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans factoriel 3^3 %
disp(' Plans factoriel 3^3: ')
X=[1 -1 -1 -1 ;1 0 -1 -1 ;1 1 -1 -1 ;1 -1 0 -1 ;1 0 0 -
1 ; 1 1 0 -1 ; 1 -1 1 -1 ;1 0 1 -1 ;1 1 1 -1 ;1 -1 -1
0 ;1 0 -1 0 ; 1 1 -1 0 ;1 -1 0 0 ;1 0 0 0 ;1 1 0 0 ;1 -
1 1 0 ;1 0 1 0 ;1 1 1 0 ;1 -1 -1 1 ;1 0 -1 1 ;1 1 -1
1 ;1 -1 0 1 ;1 0 0 1 ;1 1 0 1 ;1 -1 1 1 ;1 0 1 1 ;1 1 1
1];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans Box-Behnken %
disp(' Plans Box-Behnken : ')
X=[1 -1 -1 0 1 0 0 1 1 0 ;1 1 -1 0 -1 0 0 1 1 0 ;1 -1 1
0 -1 0 0 1 1 0 ;1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 ;1 -1 0 -1 0 1 0 1

```

```

0 1 ;1 1 0 -1 0 -1 0 1 0 1 ;1 -1 0 1 0 -1 0 1 0 1 ;1 1
0 1 0 1 0 0 0 1 ;1 0 -1 -1 0 0 1 0 1 1 ;1 0 1 -1 0 0 -1
0 1 1 ; 1 0 -1 1 0 0 -1 0 1 1 ;1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 ; 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;1 0 0 0 0 0 0 0 0 ;1 0 0 0 0 0 0 0
0 0];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans Requemore 311A %
disp(' Plans Requemore 311A : ')
X=[1 0 0 2 ;1 0 0 -1 ; 1 -1.414 -1.414 1 ;1 1.414 -
1.414 1 ;1 -1.414 1.414 1 ;1 1.414 1.414 1 ;1 -2 0 -
1 ;1 2 0 -1 ;1 0 -2 -1 ;1 0 2 -1 ;1 0 0 0];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100

```

```

%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans Requemore 311B %
disp(' Plans Requemore 311B : ')
X=[1 0 0 2.449 ;1 0 0 -2.499 ; 1 -0.751 -2.106 -1 ;1
0.751 -2.106 1 ;1 -0.751 2.106 1 ;1 0.751 2.106 -1 ;1
-2.106 -0.751 1 ;1 2.106 -0.751 -1 ;1 -2.106 0.751 -
1 ;1 2.106 0.751 -1 ;1 0 0 0];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)
.....

%Plans Requemore 416B pour 4 fact %
disp(' Plans Requemore 416B : ')
X=[1 0 0 0 1.732 ;1 0 0 0 -0.269 ;1 -1 -1 -1 0.605 ;1 1
-1 -1 0.605 ;1 -1 1 -1 0.605 ;1 1 1 -1 0.605 ;1 -1 -1 1
0.605 ; 1 1 -1 1 0.605 ;1 -1 1 1 0.65 ;1 1 1 1 0.605 ;1
-1.518 0 0 -1.05 ;1 1.518 0 0 -1.05 ;1 0 -1.518 0 -
1.05 ; 1 0 1.518 0 -1.05 ;1 0 0 -1.518 -1.05 ;1 0 0
1.518 -1.05];
%critère A%
disp('critère A : ')

```

```

trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')
M=1/numel(X) * (X.'*X);
det = det(M)

```

```

.....

%Plans Requemore 416C pour 4 fact %
disp(' Plans Requemore 416C : ')
X=[1 0 0 0 1.765 ;1 1 0 -1 -0.568 ;1 -1 -1 -1 0.568 ;1
1 -1 -1 0.568 ;1 -1 1 -1 0.568 ;1 1 1 1 0.568 ;1 -1 -1
1 0.568 ; 1 1 -1 1 0.568 ;1 -1 1 1 0.568 ;1 1 0 0 -1.05
;1 -1.470 0 0 -1.05 ;1 1.470 1.470 0 -1.05 ; 1 0 1.470
0 -1.05 ;1 0 0 -1.470 -1.051 ;1 0 0 -1.470 -1.05 ;1 0 0
0 -1.05];
%critère A%
disp('critère A : ')
trace=trace((X.'*X)^(-1))
%critère D
disp('critère D : ')
det=det((X.'*X)^(-1))
%critère E%
disp('critère E : ')
valpmax=max(eig((X.'*X)^(-1)))
%critère G
disp('criiere G : ')
dmax=max(var(X))
%Eff-G
disp('critère Eff-G : ')
Eff-G = q * (1/(N* dmax)) * 100
%critère M
disp('criiere M : ')

```

```
M=1/numel(X) * (X.'*X);  
det = det(M)
```

Références

1. Schimmerling p., Sisson j.c. et Zaïdi a., “ Pratique des plans d’expériences”, Editions Tec Doc, Paris, (1998), 526 pages.
2. Tinsson, W., “Plans d'expérience : constructions et analyses statistiques”, Springer, Berlin Heidelberg, (2010).
3. Fisher, R.A., “ The Design of Experiments”, 2nd edn, Olivier and Boyd, Edinburgh (1935).
4. Box , G.E.P., and BEHNKEN, D.W., “Some new three level designs for the study of quantitative variables”, Technometrics, vol.2, (1960), P.455-475.
5. Taguchi, G., and Wu, Y., “Introduction to off-line quality control”, Central Japan Quality Control Association, Nagoya, (1980).
6. GOUPY J., “Plans d’expériences : les mélanges”, DUNOD Paris, (2000), 303 pages.
7. Sergio Ivan, L.S., “Optimal statistical design for variance components in multistage variability modele”, Doctoral thesis, University of Manchester, 2014.
8. Gauchi, J.P., ”Plans d’expériences optimaux pour modèles non linéaires, Plan d’expériences ‘’, Application `a l’entreprise, Editions Technip, (1997).
9. Goupy, J., “Modélisation par les plans d’expériences”, Techniques de l’Ingénieur, traité mesures et contrôle, R 275, (2000), 1-23.
10. Goupy, J., “La méthode des plans d’expériences”, DUNOD, Paris, (1988), 303 pages.
11. Goupy, J., “Plans d’expériences pour surface de réponse”, DUNOD, Paris, (1999), 409 pages.
12. Mathieu D., Phan tan-luu, R. et Sergent, M., “Méthodologie de la recherche expérimentale”, LPRAI, Université d’Aix-Marseille, (1998).
13. Saporta, G., “Probabilités, Analyse des données et Statistique”, Editions Technip, (1990).
14. Walter, T., “Plans d’expériences : Construction et analyse statistique”, Edition Springer (2010).
15. Dodge, Y. et Rousson, V., “Analyse de régression appliquée”, Dunod, n° ISBN : 2-10-048659-4, (2004).
16. Mathieu D., “Contribution de la Méthodologie de la Recherche Expérimentale à la relation structure-activité ‘’, Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille (1981).
17. D. Mathieu, R.Phan-Tan-Luu, M.Sergent, « Méthodologie de la recherche expérimentale», LPRAI Université d’Aix-Merseille (1998).

18. A. Peissik, « Méthodologie de la Recherche Expérimentale: Propriétés et caractéristiques des matrices d'expériences pour les modèles polynomiaux du second degré», Thèse en sciences, Université d'Aix-Marseille (1995).
19. D. Mathieu, R.Phan-Tan-Luu,« Planification d'expériences en formulation», Techniques de l'Ingénieur, traité Génie des procédés, Doc.J242 (2000).
20. H. Elmoosaoui « contribution à la méthodologie des plans d'expériences », thèse de doctorat, université Blida 1 (2020).