

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Saad DAHLAB de Blida
Faculté de Technologie
Département d'Aéronautique

Projet de Fin d'Études
En vue d'obtention du Diplôme Master Académique en Aéronautique
Option: CNS/ATM
Communication Navigation Surveillance/Air Traffic Management

THEME

**COMMANDE DE VOL ROBUSTE ET ADAPTATIVE AVEC
TOLERANCE DES PERTURBATIONS EXTERNES**

Réalisé par:

MESSAI Moustapha
TEBIB Salah Eddine

Encadré et dirigé par:

Mr. H. BENCHOUBANE

Membres du jury:

Mr L. BOUNATIRO	Professeur USDB	Président
Mr M. LAGHA	Maitre de conférences USDB	Examineur
Mme A.KHLIFA	Chargée de cours USDB	Examinatrice
Mr H. BENCHOUBANE	Maitre de conférences USDB	Promoteur

Promotion: 2011-2012

الملخص

لقد تم تصميم نظام التحكم بالحركة الجانبية لطائرة النقل AIR BUS-A300 و ذلك لاكتفاء شروط الجودة من

اجل طيران مستقر

و إكمال هذا الهدف يتم إبتداءا بالالتزام في صياغة نموذج رياضي غير خطي يتحكم في حركة الطائرة ،ثم سنقوم باستخدام نظرية الحركات الصغيرة لجعل النظام خطي .

ثم يتم تطبيق صنفين من التحكم خطي كلاسيكي – و متكيف غير خطي مثل السيطرة على التكيف مع النموذج المرجعي على مفاهيم إيجابية في الإفراط في الاستقرار عندما يتعرضون لأنواع مختلفة من الاضطرابات الخارجية كهبوب الرياح .

كلمات مفتاحية : التحكم التكيفية ، الإفراط في الاستقرار ، مرجعية نموذجية ، التحكم في الطيران.

Abstract

A control system of lateral and longitudinal movement of a transport aircraft, type AIR-BUS A300, was designed to meet the qualities of a stable flight. This objective is completed, all start in our work has the formulation of mathematical model nonlinear who governed the motion of an airplane. Then we turn to the theory of linearization of small movements around a flight regime, for a system of linear equation represented in state space after two class-mounted control, linear multi-variable control by state feedback and state feedback with integral action and adaptive control with a reference model based on the concept of hyper-positive stability when subjected to an external perturbation system which can be air as a gust of wind

Key words: adaptive control ,hyper-stable, model reference, flight control

Résumé

Un système de contrôle du mouvement latéral et longitudinal d'un avion de transport, du type AIR-BUS A300, a été conçu pour satisfaire les qualités d'un vol stable .cet objectif est réaliser, toute en commençant notre travaille par la formulation du modèle mathématique non-linéaire qui régi le mouvement d'un avion. Ensuite nous ferons appel à la théorie de linéarisation des petits mouvements autour d'un régime de vol ,pour obtenir un système d'équations linéaires représenter dans l'espace d'état, puis on applique deux classe de commande, commande linaire multi-variable par retour d'état et par retour d'état avec action intégrale ainsi que la commande adaptative avec un modèle de référence qui se base sur les concept de positivité de l'hyper-stabilité ,puis on fait subir au système une perturbation externe qui peut être atmosphérique comme un rafale de vent pour tester la robustesse de ces commandes.

Mot clés : commande adaptative, hyper-stabilité, model de référence, commande de vol



DEDICACE

Au nom de DIEU clément et miséricordieux et que le salut de DIEU soit sur son Prophète MOHAMMED

Je dédie ce modeste travail aux personnes qui me sont les plus chères :

La lumière de ma vie et l'espoir de mon existence, source d'affection de courage et d'inspiration qui a autant sacrifié pour me voir atteindre ce jour...ma chère mère

Celui qui m'a rendu tel que je suis et tel qu'il souhaite, source de respect, en témoignage de ma profonde reconnaissance pour tout l'effort et le soutien incessant qui m'a toujours apporté...mon cher père.

Mes chères frères :Rabeh,Saïd et AbdArafaa

Mes chères sœurs :Radia ,Sarah,Rahma et lyna

A toute la famille Messai et rebouh

A mon binôme Salah et sa famille pour lequel je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.

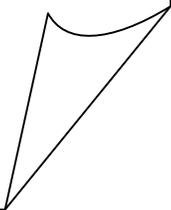
Mes très chers amis et surtout du bloc deux

Je remercie enfin tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail.

Et à tous ceux qui me connaissent...

A toute la promotion 2012 et le département d'aéronautique.

MOUSTAPHA





DEDICACE

Au nom de DIEU clément et miséricordieux et que le salut de DIEU soit sur son Prophète MOHAMMED

Je dédie ce modeste travail aux personnes qui me sont les plus chères :

La lumière de ma vie et l'espoir de mon existence, source d'affection de courage et d'inspiration qui a autant sacrifié pour me voir atteindre ce jour...ma chère mère

Celui qui m'a rendu tel que je suis et tel qu'il souhaite, source de respect, en témoignage de ma profonde reconnaissance pour tout l'effort et le soutien incessant qui m'a toujours apporté...mon cher père.

Mes chères frères :Mohamed,Bilel et Chaker

Ma chère sœur :Hana

A toute la famille Tebib et Sahraoui

A mon binôme Mustapha et sa famille pour lequel je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.

Mes très chers amis et surtout du bloc deux

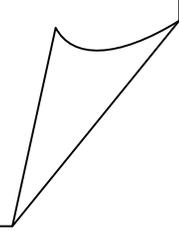
Et surtout pour Ma chère amie Nassima

Je remercie enfin tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail.

Et à tous ceux qui me connaissent...

A toute la promotion 2012 et le département d'aéronautique.

SALAH EDDINE



Remerciement

*Nous remercions avant tout **ALLAH** de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude. Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études*

Au terme de ce travail, je tiens à présenter mes remerciements :

- aux membres du jury, qui m'ont fait l'insigne honneur d'examiner ce modeste travail ;

*- Nos plus grands remerciements les plus s'insèrent vont à notre promoteur Monsieur **Hacine BENCHOUBANE**, pour nous avoir guidé pour la réalisation de cette étude et aussi pour sa patience et la justesse de ses orientations*

*A Me : **A.Khlifa** qui nous accorde l'honneur et le plaisir de nous orienter pour élaborer ce travail et pour toute l'aide quelle nous a donnée*

- à mes parents, pour m'avoir inculqué l'amour du savoir et l'esprit du travail ;

- à toutes les personnes qui m'ont permis d'accomplir ce travail ;

- ainsi qu'à toute autre personne m'ayant aidé de près ou de loin et dont j'ai oublié de citer le nom.

MOUSTAPHA ET SALAH EDDINE

Symboles Et Abréviation

a	[ms ⁻¹]	Vitesse du son
$a_{x,k}$	[g]	Accélération cinématique suivant X_B
$a_{y,k}$	[g]	Accélération cinématique suivant Y_B
$a_{z,k}$	[g]	Accélération cinématique suivant Z_B
A_x	[g]	Force spécifique au c.g suivant X_B
A_y	[g]	Force spécifique au e.g suivant Y_B
A_z	[g]	Force spécifique au c.g suivant Z_B
b	[m]	Envergure
\bar{C}	[m]	Corde moyenne
C_1	[-]	Coefficient de moment autour de X_B
C_m	[-]	Coefficient de moment autour de Y_B
C_n	[-]	Coefficient de moment autour de Z_B
C_x	[-]	Coefficient de force suivant X_B
C_y	[-]	Coefficient de force suivant Y_B
C_z	[-]	Coefficient de force suivant Z_B
\bar{D}	[N]	Traînée
F_x	[N]	Force totale suivant X_B
F_y	[N]	Force totale suivant Y_B
F	[N]	Force totale suivant Z_B
g	[ms ⁻²]	Force de gravité
H	[m]	Altitude
I_i	[kgm ²]	Paramètres d'inertie
I_x	[kgm ²]	Moment d'inertie suivant X_B
I_y	[kgm ²]	Moment d'inertie suivant Y_B
I_z	[kgm ²]	Moment d'inertie suivant Z_B
J_{xy}	[kgm ²]	Produit d'inertie dans le plan $X_B Y_B$
J_{xz}	[kgm ²]	Produit d'inertie dans le plan $X_B Z_B$
J_{yz}	[kgm ²]	Produit d'inertie dans le plan $Y_B Z_B$
L	[m]	Moment de roulis total.
\bar{L}	[m]	Portance aérodynamique totale.
m	[kg]	Masse totale de l'avion.
χ	[-]	Nombre de Mach.
M	[Nm]	Moment de tangage t
M_a	[kgkmol ⁻¹]	Masse moléculaire de l'air.
M_0	[kgkmol ⁻¹]	Masse moléculaire de l'air au niveau de la mer.

N	[Nm]	Moment de lacet total.
r	[rads ⁻¹]	Vitesse angulaire de lacet.
q	[rads ⁻¹]	Vitesse angulaire de tangage.
p	[rads ⁻¹]	Vitesse de roulis.
R	[JK ⁻¹ kg ⁻¹]	Constante spécifique de l'air.
S	[m ²]	Surface de référence (surface des ailes).
T	[K]	Température ambiante.
T _t	[K]	Température totale.
u	[ms ⁻¹]	Composante de vitesse suivant l'axe X _B .
v	[ms ⁻¹]	Composante de vitesse suivant l'axe Y _B .
V	[ms ⁻¹]	Vitesse vraie.
W	[N]	Poids de l'avion.
X _a	[N]	Force aérodynamique suivant l'axe X _B
X _p	[N]	Force propulsive suivant l'axe X _B
Y _a	[N]	Force aérodynamique suivant Y _B
Y _p	[N]	Force propulsive suivant l'axe Y _B .
Z _a	[N]	Force aérodynamique suivant l'axe Z _B .
Z _p	[N]	Force propulsive suivant l'axe Z _B
α	[rad]	Angle d'incidence.
β	[rad]	Angle de dérapage.
γ	[rad]	La pente.
δ _a	[rad]	Déflexion de la gouverne de gauchissement.
δ _m	[rad]	Déflexion de la gouverne de profondeur.
δ _x	[-]	la position de la manette des gaze
δ _r	[rad]	Déflexion de la gouverne de direction.
θ	[rad]	L'assiette (angle de tangage)
λ	[Km ⁻¹]	Gradient de température.
μ	[Kgm ⁻¹ s ⁻¹]	Viscosité dynamique.
ρ	[Kgm ⁻³]	Densité de l'air.
φ	[rad]	Angle de roulis.
Ψ	[rad]	Angle de lacet (cap)
ω	[rads ⁻¹]	Pulsation angulaire.
ω _n	[rads ⁻¹]	Pulsation propre.
Ω	[rads ⁻¹]	Pulsation spatiale.
A		Matrice d'état du système linéaire.
B		Matrice d'action des commandes du système
linéaire.		
C		Matrice d'état de sortie du système linéaire.
D		Matrice de commande de sortie du système linéaire.

MRAC
MRAS
PI
P

Model reference adaptative control
Model référence adaptative system
Proportionnelle Intégrateur
Proportionnel

Sommaire

Résumé-----	
Remerciement-----	
Dédicace-----	
Symboles et Abréviations-----	
Sommaire-----	
Liste des Figures et Tableaux-----	
Introduction générale-----	2

CHAPITRE 1

Modèle Mathématique D'un Aéronef

1 Introduction -----	5
2 TRIEDRE DE REFERENCE -----	6
2.1 TRIEDRE TERESTRE -----	6
2.2 TRIEDRE AERODYNAMIQUE -----	6
2.3 TRIEDRE AVION -----	7
2.4 POSITION RELATIVE DES TRIEDRE ET MATRICE DE PASAGE ASSOSIEES ----	7
3 BASES DE LA MECHANIQUE DU VOL -----	11
3.1 FORCES EXTERIEURES ET MOMENTS RESULTANTS -----	12
3.2 VECTEUR VITESSE, MOMENT CENTRIQUE ET EQUATIONS CINEMATIQUES --	15
4 EQUATION DU MOUVEMENT DE L'AVION -----	17
4.1 EQUATIONS DE FORSES (DANS LE TRIEDRE AVION) -----	17
4.2 EQUATION DE MOMENT (DANS LE TRIEDRE AVION) -----	17
4.3 EQUATION CINEMATIQUE -----	18
5 LE SYSTEME LONGITUDINAL ET LATERAL -----	18
6 APPLICATION SUR UN AVION DE TRANSPORT DU TYPE AIR-BUS 300 -----	19
6.1 CARACTERISTIQUE D'UN AIR-BUS 300 -----	19
6.2 SIMULATION ET INTERPRETATIONS EN BOUCLE OUVERTE -----	22
7 CONCLUSION -----	27

CHAPITRE 2

ETUDE Et Développement De Commandes Par Placement Des Pôles

1 INTRODUCTION -----	29
2 LOI DE COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT -----	29
2.1 DETERMINATION DE LA COMMANDE -----	29
2.2 DETERMINATION DE LA MATRICE K-----	30
2.3 DETERMINATION DE LA MATRICE K_r -----	31
2.4 SIMULATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS -----	32
3 COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC ACTION INTEGRALE -----	39
3.1 INTRODUCTION-----	39
3.2 DETERMINATION DE LA MATRICE K ET K_i -----	40
3.3 SIMULATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS -----	42
4 CONCLUSION-----	48

CHAPITRE 3

Synthèse Des Lois De Commande Adaptative Avec Un Modèle De Référence(MRAC)

1. INTRODUCTION-----	50
2. LA THEORIE DE L'HYPER-STABILITE -----	51
3. COMMANDE ADAPTATIVE -----	52
3.1 COMMANDE ADAPTATIVE AVEC MODELE DE REFERENCE -----	53
3.1.1 INTRODUCTION -----	53
3.2 CHOIX DU MODELE DE REFERENCE -----	53
3.3 SYNTHESE DES LOIS DE COMMANDES ADAPTATIVES AVEC UN MODELE DE REFERENCE(MRAC) POUR LE MODE LATERAL -----	54
3.3.1 MRAC SANS PERTURBATION EXTERIEUR -----	54
3.3.1.1 FORME PROPORTIONNEL(P) -----	55
3.3.1.2 FORME PROPORTIONNELLE INTEGRATEUR(PI) -----	56
3.3.2 MRAC AVEC PERTURBATION EXTERIEURE-----	58
4. CONCLUSION -----	58

CHAPITRE 4

SIMULATION ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS

1. INTRODUCTION	60
2. DEFINITION DU SIMULINK	60
3. CAMMANDE MRAC SANS PERTURBATION	60
3.1 COMMANDE MRAC PROPORTIONNELLE (P)	61
3.2 COMMANDE MRAC AVEC ACTION INTEGRALE(PI)	69
4. COMMANDE MRAC AVEC UNE PERTURBATION EXTERIURE	71
4.1 PERTURBATION ALEATOIRE GAUSSIENNE	71
5. CONCLUSION	78
CONCLUSION GENERALE	80

BIBLIOGRAPHIES

ANNEXE

LISTE DES FIGURES & TABLEAUX

CHAPITRE 1

Fig(1.1) position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion-----7

Fig(1.2) position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre porter
par l'avion-----8

Fig(1.3) position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre
normal terrestre-----10

Fig(1.4) simulation en boucle ouvert pour δ_a =impulsion d'amplitude (10^0), $\delta_r=0$ -----22

Fig(1.5) simulation en boucle ouvert pour $\delta_a=0$, δ_r = impulsion d'amplitude (10)-----23

Fig(1.6) simulation en boucle ouvert pour δ_a =impulsion d'amplitude (10^0),
 δ_r = impulsion d'amplitude (10^0) -----23

Fig(1.7) simulation en boucle ouvert pour δ_a =échelon d'amplitude (5^0), $\delta_r=0$ -----24

Fig(1.8) simulation en boucle ouvert pour $\delta_a=0$, δ_r = échelon d'amplitude (5^0) -----24

Fig(1.9) simulation en boucle ouvert pour δ_a = échelon d'amplitude (5^0),
 δ_r = échelon d'amplitude (5^0) -----25

Fig(1.10) simulation en boucle ouvert pour δ_m =impulsion d'amplitude (10^0)-----25

Fig(1.11) simulation en boucle ouvert pour δ_m =échelon d'amplitude (5^0) -----26

Tableau (1.1) Direction des axes liés à l'avion et la nomenclature utilisée
pour l'application de la loi de Newton-----12

Tableau (1.2) les différents coefficients utiliser dans le mouvement latéral -----20

CHAPITRE 2

Fig (2.1) schéma bloc de la commande par retour d'état-----30

Fig (2.2) commande par retour d'état pour P1-----34

Fig (2.3) commande par retour d'état pour P2-----37

Fig (2.4) :Commande par retour d'état avec perturbation pour **Variance = 0.01**-----37

Fig (2.5) :Commande par retour d'état avec perturbation pour **Variance = 10**-----39

Fig (2.6) schéma bloc de Commande par retour d'état avec action intégrale-----39

Fig (2.7) command par retour d'état avec action intégral pour P1-----43

Fig(2.8) command par retour d'état avec action intégral pour P2-----45
Fig(2.9) Commande par retour d'état a action intégrale avec perturbation
 Pour **Variance = 0.01** -----46
Fig (2.10) Commande par retour d'état a action intégrale avec perturbation pour
Variance = 10-----48

CHAPITRE 3

Fig(3.1) Diagramme d'un système hyper-stable-----51
Fig(3.2) schéma de principe de la commande MRAC-----54

CHAPITRE 4

Fig(4.1) Le temps de réponsed'angle de dérapage et d'inclination de la commande
 MRAC sans action intégrale Avec α et $\beta=0$ -----61
Fig(4.1.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes
 de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec α et $\beta=0$ -----62
Fig(4.1.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----62
Fig(4.2) Le temps de réponsed'angle de dérapageet d'inclination de la commande
 MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.001$ et $\beta=0$ -----63
Fig (4.2.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes
 de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.001$ et $\beta=0$ -----64
Fig(4.2.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----64
Fig(4.3) Le temps de réponsed'angle de dérapageet d'inclination de
 la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0$ et $\beta=0.001$ -----65
Fig(4.3.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes
 de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0$ et $\beta=0.001$ -----66
Fig(4.3.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----66
Fig(4.4) Le temps de réponsed'angle de dérapageet d'inclination de la commande
 MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.01$ et $\beta=0.01$ -----67
Fig(4.4.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes
 de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha =0.01$ et $\beta=0.01$ -----68
Fig(4.4.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----68

Fig(4.5) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec action intégrale (PI) Avec $\alpha'=0.001$ et $\beta'=0.001$ -----69

Fig(4.5.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec action intégrale Avec α' et $\beta'=0.001$ -----70

Fig(4.5.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----70

Fig(4.6) signal aléatoire -----71

Fig(4.7) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC Variance = 0.01 -----72

Fig(4.7.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 0.01-----73

Fig(4.7.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----73

Fig(4.8) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 0.5-----74

Fig(4.8.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 0.5-----75

Fig (4.8.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----75

Fig (4.9) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 10-----76

Fig(4.9.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 10-----77

Fig(4.9.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle-----77

INTRODUCTION GENERALE

L'histoire de l'automatique théorique peut être partagée en trois périodes. La première période ; se situe avant la première guerre mondiale, et était marquée par la résolution de problèmes de régulation en particulier ou de contrôle au moyen du calcul différentiel. Puis, au cours de la seconde guerre mondiale, se réalise une première unification de la théorie harmonique des systèmes asservis linéaires, avec le développement des systèmes de commandes. La troisième période s'est caractérisée par le développement de la théorie des variables d'état. Cette théorie fournit une description très générale des systèmes multidimensionnels, et c'est pour la première fois, que la description des propriétés dynamiques des systèmes de commande dans un espace d'état, a permis d'établir une théorie générale de la commande qui englobe dans une même représentation, toutes les formes des systèmes multidimensionnels d'ordre quelconque.

Un peu plus tard, les commandes adaptatives sont venues palier aux carences des commandes linéaires faces aux systèmes physiques non-linéaires et varient dans le temps, pour lesquels la commande linéaire pourrait aboutir à des résultats imprévisibles ; En effet, il est montré pratiquement, que la commande adaptative est très robuste et fiable lorsqu'il s'agit de commande un système sujet à des contraintes sévères et a des perturbations de types externes et internes qui tendent à le déstabiliser

Donc, ce mémoire de projet fin d'étude est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on parlera du modelé mathématique d'un aéronef, se basent sur des hypothèses pour obtenir un modèle mathématique non-linéaire couplé, ensuite nous ferons appel à la théorie des petites perturbations pour découpler ce système d'équations, afin d'aboutir à un système d'équations linéaires représenté dans l'espace des variables d'état, et en fin en a fait une simulation en boucle ouverte.

Le second chapitre est réservé à l'étude et développement des lois de commandes classique suivantes :

- Commande par retour d'état.
- Commande par retour d'état avec action intégrateur

Dans le troisième chapitre, nous présentons la synthèse des lois de commandes adaptatives avec modèle de référence basée sur les concepts de positivité et d'hyper-stabilité, lorsqu'on fait subir au système différentes sortes de perturbations extérieures ou une variation de ses paramètres internes, et on appliquera :

- Le MRAC avec action P et PI
- Le MRAC avec perturbations extérieures.

Le quatrième chapitre est consacré aux résultats obtenus par simulation. Plusieurs tests ont été effectués sur différents types de commande grâce au langage MATLAB(SIMULINK) ainsi que leurs interprétations physiques. Une application de ces lois de commandes à l'avion AIR-BUS 300 sera le fruit de notre travail.

Enfin, on donnera une conclusion générale avec des perspectives.

1. INTRODUCTION

Le 17 décembre 1903, fut la date du 1^{er} vol réussi des frères WRIGHT. Quatre ans plutôt, l'essai de vol qu'ils ont effectué s'est terminé par un accident « crash », qui a sévèrement endommagé leur appareil. Cet accident a eu lieu suite à un coup de rafale qui a complètement déstabilisé l'avion. C'est cette catastrophe qui a incité les frères WRIGHT à étudier et à analyser le comportement d'un avion en présence de perturbations en vue d'assurer une stabilité minimale.

En effet, il leur a fallu quatre années de durs travaux et de recherche pour tester leur modèle en soufflerie et aboutir à des résultats satisfaisants ; Ce fut le succès du 17.12.1903. Depuis lors, apparaissait l'importance des études de stabilité et de contrôle dans le domaine aéronautique. De ce fait, la conception aura pour critère essentiel de donner à l'aéronef une tendance inhérente qui lui permettra de s'opposer ou de diminuer les déviations de mouvements dues à des perturbations. Cette qualité inhérente à ces déviations dans le vol désiré peut être obtenue par sélection d'une configuration à travers des analyses de stabilité.

Dans ce chapitre, les notions fondamentales concernant la mécanique du vol sont rappelées afin d'éclairer le lecteur non familier de ce domaine. Pour cela, quelques points généraux sont développés, L'objectif est de présenter trois trièdres utilisés en mécanique du vol ainsi que les matrices nécessaires pour passer d'un repère à l'autre. Dans un second temps, les bases de la mécanique du vol conduisant aux expressions des forces extérieures, des moments résultants, du vecteur vitesse, du moment cinétique et des équations cinématiques sont rappelées, et après en passe à la détermination des conditions de vol permanentes en suit aux équations générales des petits mouvements et en terminent par une application sur un avion de transport du type A 300. [1], [2], [5], [7], [8], [9]

2 TRIEDRE DE REFERENCE

Les forces et les moments qui s'exercent sur un appareil doivent être exprimés dans un repère convenablement défini. L'aérodynamique et la mécanique du vol font parfois appel à des repères différents et il convient d'y accorder une attention particulière. Des conventions en matière d'orientation et de notation ont été établies.

2.1 TRIEDRE TERRESTRE (Oxoyozo)

La position dans l'espace d'un objet mobile est a priori définie dans un repère "fixe", c'est à dire lié à la terre.

- L'origine O est fixe par rapport à la terre,
- Ozo est orienté suivant la verticale descendante,
- Oxo et Oyo sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan horizontal.

Ce trièdre qui apparaît sur les figures (1.2) et (1.3) est appelé trièdre normal terrestre. Il est en outre commode de définir un trièdre équivalent au trièdre précédent et dont l'origine est liée à l'avion (généralement, son centre de gravité) : ce trièdre est dit trièdre normal terrestre porté par l'avion.

Le champ de vitesse de la rafale de vent est souvent connu dans le repère terrestre. Ce trièdre se prête également bien à l'expression de l'effet de la pesanteur.

2.2 TRIEDRE AERODYNAMIQUE (Oxayaza)

Ce trièdre est lié à la vitesse de l'avion (c'est le repère soufflerie).

- est un point fixe de l'avion (généralement le centre de gravité de l'avion),
- L'axe Ox_a est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de la vitesse,
- L'axe Oz_a est perpendiculaire à Ox_a , situé dans le plan de symétrie de l'avion, et orienté

Positivement vers le ventre de l'avion,

- L'axe Oy_a complète le trièdre positif.

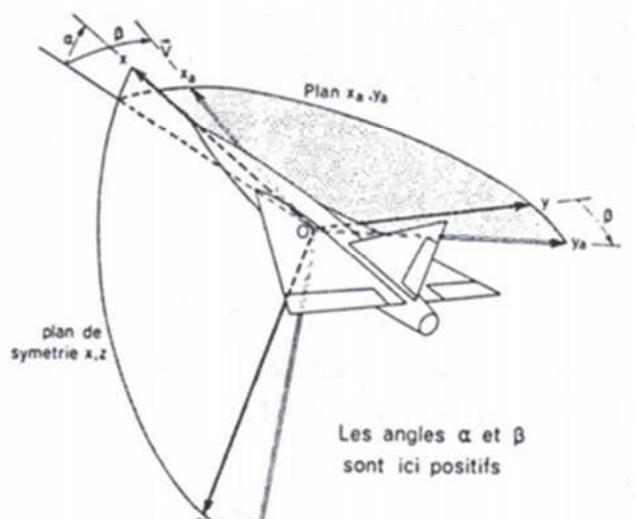
Notons que ce trièdre (voir figures (1.1) et (1.3)) est utilisé pour exploiter comparativement des résultats de mesure en soufflerie. Le repère aérodynamique est souvent utilisé pour exprimer les forces aérodynamiques. Les coefficients aérodynamiques sont pratiquement toujours exprimés dans ce repère. L'orientation des axes de ce trièdre aérodynamique n'est pas liée "rigidement" à l'avion mais à la vitesse

2.3 TRIEDRE AVION ($Oxyz$)

Ce trièdre est rigidement lié à l'appareil (considéré lui-même comme rigide).

- O est l'origine conventionnelle des axes, située dans le plan de symétrie de l'avion et qui peut être le centre de gravité.
- Les axes Ox et Oz sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan de symétrie de l'avion.
- Ox est orienté positivement de l'arrière vers l'avant de l'avion.
- L'axe Oz , normal à Ox , est orienté positivement vers le ventre de l'avion.
- L'axe Oy complète le trièdre positif (il est donc orienté positivement vers la droite du pilote). Ce trièdre qui apparaît sur les figures (1.1) et (1.2) est utilisé pour exprimer les forces de propulsions. Ce trièdre se prête également à l'expression des moments.

2.4 POSITIONS RELATIVES DES TRIEDRES ET MATRICES DE PASSAGE ASSOCIEES



Fig(1.1) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion

Il faut en général trois angles pour définir l'orientation d'un trièdre par rapport à un autre. Dans le cas qui nous intéresse (voir Fig 1.1), deux angles suffisent, l'axe Oz_a étant situé par définition dans le plan Oxz (plan de symétrie de l'avion).

L'angle d'incidence α est l'angle de l'axe Ox (référence fuselage) avec le plan $Ox_a y_a$ du trièdre aérodynamique. L'incidence est positive si la projection de la vectrice vitesse sur l'axe Oz est positive.

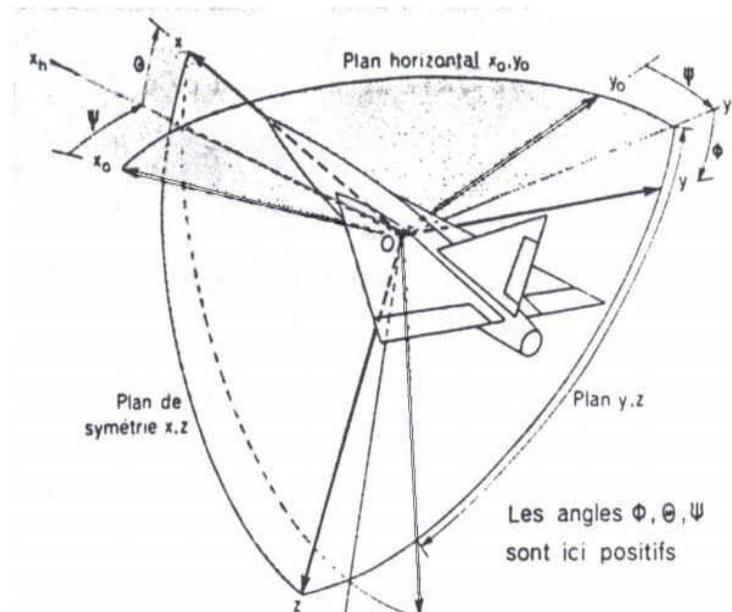
L'angle de dérapage β est l'angle d' Ox_a avec le plan de symétrie Oxz de l'avion. Cet angle est positif si la projection du vecteur vitesse sur l'axe Oy est positive.

La matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre avion se note :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$[T]^{-1}$ est la symétrique de $[T]$ et représente la matrice de passage du trièdre avion au trièdre aérodynamique



Fig(1.2) Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre porte par l'avion

La position du trièdre avion $Oxyz$ peut être repérée par rapport au trièdre terrestre par plusieurs systèmes d'angles d'Euler. Le système suivant (voir figure 1.2) est en général le plus utilisé. Soit le trièdre auxiliaire $Ox'y'z'$ confondu avec le trièdre normal terrestre, amené en coïncidence avec le trièdre avion à l'aide de trois rotations successives (voir figure 1.2)

-Une première rotation (angle ψ) autour de l'axe z_0 amené Ox' en position Ox_h dans le plan vertical passant par Ox (plan Oxz_0). Oy' vient alors en Oy_h ,

- Une deuxième rotation (angle θ) autour de Oy_h amené l'axe Ox' de la position Ox_h à la position Ox .

-Enfin une dernière rotation (angle ϕ) autour de Ox amené l'axe Oy' de la position Oy_h la position Oy . Les angles ψ , θ et ϕ portent respectivement les noms d'azimut, d'assiette longitudinale et d'angle de gîte.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta & -\sin\psi \\ R_1 & R_3 & \cos\theta \sin\phi \\ R_2 & R_4 & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\text{avec } R_1 = -\sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\theta \sin\phi, R_2 = \sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi;$$

$$R_3 = \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\theta \sin\phi = -\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi$$

$[R]^{-1}$ est la symétrique de $[R]$ et représente la matrice de passage du trièdre avion au trièdre normal terrestre.

La position du trièdre aérodynamique $Ox_a y_a z_a$ par rapport au trièdre normal terrestre $Oxoyazo$ est repérée habituellement par un système de trois angles d'Euler.

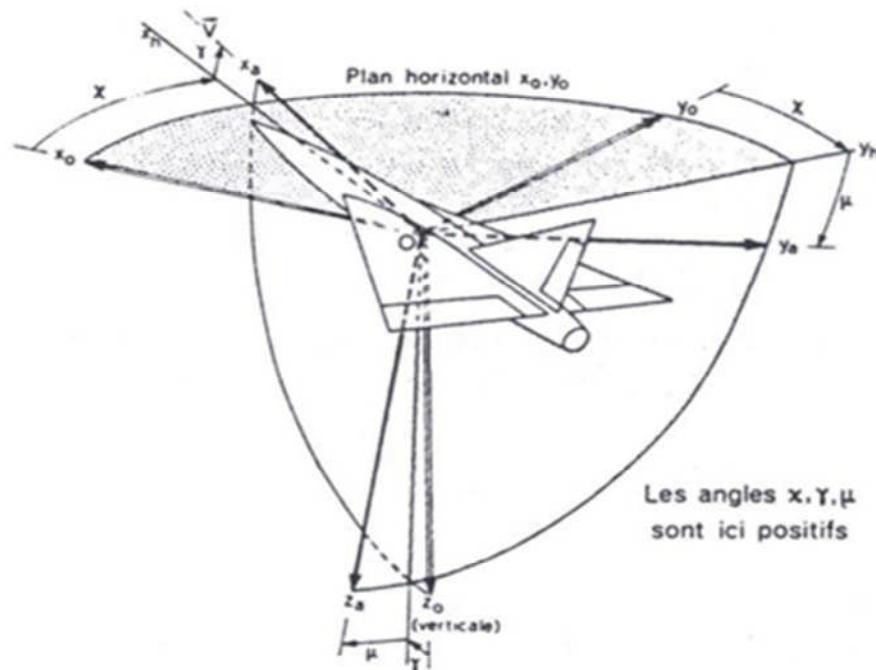


Fig (1.3) Position du trièdre aerodynamique par rapport au trièdre normal terrestre

Soit $Ox'y'z'$ un trièdre auxiliaire confondu avec le trièdre normal terrestre $Ox_0y_0z_0$. Ce trièdre est amené en coïncidence avec le trièdre aérodynamique à l'aide de trois rotations successives (voir Fig (1.3)) :

- Une première rotation (angle χ) autour de l'axe az_0 amené Ox' en position Ox_h dans le plan vertical contenant Ox_a , (plan $Ox_a z_0$), Oy' vient alors en Oy_h
- Une deuxième rotation (angle γ) autour de Oy_h amené l'axe Ox' de la position Ox_h à la position Ox_a ,
- Enfin une dernière rotation (angle μ) autour de Ox_a , amené l'axe Oy' de la position Oy_h la position Oy_a .

Les angles χ , γ , μ sont positifs si ces rotations sont effectuées dans le sens positif des rotations dans un trièdre direct. Les angles χ , γ et μ portent respectivement les noms d'azimut aérodynamique, de pente aérodynamique et angle de gite aérodynamique.

La matrice de passage du trièdre normal terrestre au trièdre aérodynamique se note :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = [R'] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$[R'] = \begin{bmatrix} \cos x \cos \gamma & \sin x \cos \gamma & -\sin \gamma \\ R'_1 & R'_3 & \cos \gamma \sin \mu \\ R'_2 & R'_4 & \cos \gamma \cos \mu \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\text{avec } R'_1 = -\sin x \cos \mu + \cos x \sin \gamma \sin \mu; R'_2 = \sin x \sin \mu + \cos x \sin \gamma \cos \mu$$

$$R'_3 = \cos x \cos \mu + \sin x \sin \gamma \sin \mu$$

$$\text{et } R'_4 = -\cos x \sin \mu + \sin x \sin \gamma \cos \mu$$

$[R']^{-1}$ est la symétrique de $[R']$ et représente la matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre normale terrestre [5], [1]

3. BASES DE LA MECANIQUE DU VOL

Un avion est un système dynamique complexe, difficile à aborder dans toute sa généralité. L'appareil est un solide déformable, comportant des pièces tournantes (hélices, réacteurs) ou mobiles (gouvernes). Il est soumis à des forces externes très variables, dépendant à la fois de sa trajectoire, de son attitude, de ses déformations et de l'action de la pesanteur terrestre. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte simultanément tous les facteurs régissant le mouvement de l'avion. Des hypothèses simplificatrices appropriées au type de problème que l'on cherche à traiter ici sont donc introduites.

Hypothèse .1 : L'avion est un corps rigide à six degrés de liberté comportant un plan de symétrie.

Hypothèse .2: La masse et la matrice d'inertie de l'avion sont constantes.

Hypothèse .3 : La terre est supposée plate et immobile, le repère terrestre est donc galiléen. [17]

En appliquant le principe fondamental de la dynamique a un solide rigide, on obtient les équations différentielles suivantes, exprimées dans le trièdre terrestre :

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{terre} = \vec{F}_{ext} \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{d\vec{C}}{dt} \right|_{terre} = \vec{M}_{ext} \quad (1.8)$$

Ou m représente la masse du solide, V est la vitesse de son centre de gravité G , C est le moment cinétique du solide agissant en G , F_{ext} est la résultante des forces extérieures agissant sur le Solide, et M_{ext} est le moment résultant de ces forces par rapport à G

Remarque : $\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{terre}$ et $\left. \frac{d\vec{C}}{dt} \right|_{terre}$ sont définies comme étant les dérivées de la vitesse et du Moment cinétique dans le repère terrestre

3.1 FORCES EXTERIEURES ET MOMENTS RESULTANTS

Nous allons définir les différentes grandeurs utilisées dans la dérivation des équations du mouvement, en les représentant dans le tableau suivant : **[18]**

Axes	X	Y	Z
Vitesse linéaire le long de l'axe	U	V	Z
Vitesse angulaire autour de l'axe	P « roulis »	q « tangage »	r « lacet »
Somme des moments autour de l'axe	ΣL	ΣM	ΣN
Rotation autour de l'axe	Φ	θ	Ψ
Somme des forces suivant l'axe	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z
Moment cinématique suivant l'axe	H_x	h_y	h_z
Moment d'inertie	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}

Tableau (1.1) Direction des axes liés à l'avion et la nomenclature utilisée pour l'application de la loi de Newton

FORCE EXTERIEURES

Les différentes forces extérieures agissant sur l'avion sont les suivantes

La force de propulsion :

Dans un souci de précision, la résultante des forces de propulsion exprimée dans le trièdre avion est présentée :

$$\vec{F}_{prop/avion} = \begin{bmatrix} F_{prop} \cos(\varepsilon) \\ 0 \\ -F_{prop} \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Ou ε est un angle constant

Il traduit le fait que les forces de propulsion ne sont pas tout à fait parallèles à l'axe longitudinal de l'avion.

-Le poids exprime dans le trièdre terrestre :

$$P|_{terre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Avec g représente accélération de la pesanteur

La résultante des forces aérodynamiques exprimée dans le trièdre aérodynamique

$$\vec{F}_a /_{aero} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ -C_z \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Ou ρ est la masse volumique de l'air, S est une constante (surface de référence qui est souvent la surface de l'aile prolongée à l'intérieur du fuselage) ; C_x , C_y et C_z sont des coefficients sans dimension appelés respectivement coefficients de trainée, de force latérale et de portance.

Remarque : En application de la convention de la mécanique du vol, les coefficients de traîne et de portance sont précédés d'un signe moins.

MOMENTS RESULTANTS

Les différents moments autour du centre de gravité G résultants des forces précédemment citées sont les suivants

Le moment induit par la force de propulsion :

Il se peut que ces forces ne soient pas symétriques et donc qu'elles induisent un couple de lacet. C'est par exemple le cas lorsque survient une panne d'un propulseur sur un avion multi propulseurs. Le moment résultant de ces forces

$$\overrightarrow{M}_{prop} = \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{F}_{prop}$$

s'écrit en G , avec O le point d'application des forces de propulsion :

Souvent O est proche de G et donc ce moment est négligeable.

Le moment associé au poids : il est nul car la force est appliquée au centre de gravité G . Le moment associé aux forces aérodynamiques exprime *dans le repère avion*, qui s'écrit :

$$\overrightarrow{M}_a \Big|_{\text{avion}} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

ou C_l , C_m et C_n sont des coefficients sans dimension appelés respectivement coefficients de roulis, tangage et lacet

Remarque : Il est à noter que les essais réalisés au sein du Laboratoire d'Analyse du Vol s'effectuent à l'aide d'une maquette dépourvue de motorisation, les forces de propulsion seront donc considérées nulles par la suite, tout comme le moment résultant de celles-ci bien évidemment.

Notations particulières :

En mécanique du vol, il est courant de noter X , Y et Z les composantes des sommes des forces aérodynamiques et de propulsion (ici nulles) sur les axes

respectifs G_x , G_y et G_z du trièdre avion (G étant le centre de gravité de l'avion pris comme origine du trièdre). Il en est de même pour L , M et N , les composantes des sommes des moments aérodynamiques et de propulsion (ici nuls) sur les mêmes axes respectifs du trièdre.

Dans notre cas, ces composantes se notent donc

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{/avion} = [T] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho S V^2 (-C_x) \\ \frac{1}{2} \rho S V^2 C_y \\ \frac{1}{2} \rho S V^2 (-C_z) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}_{/avion} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho S I V^2 C_l \\ \frac{1}{2} \rho S I V^2 C_m \\ \frac{1}{2} \rho S I V^2 C_n \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Avec $[T]$ matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre avion (équation (1.2))

3.2 VECTEUR VITESSE, MOMENT CINÉTIQUE ET EQUATIONS CINEMATIQUES

Afin d'exprimer dans un repère adéquat le vecteur vitesse, le moment cinétique et les équations cinématiques liés à l'avion, les dérivées de V et C , dans les équations (1.7) et (1.8), sont reformulées en se basant sur les lois de composition des vitesses, à savoir

$$\frac{d\vec{V}}{dt}_{/terre} = \frac{d\vec{V}}{dt}_{/avion} + \vec{\Omega}_{avion/terre} \wedge \vec{V} \quad (1.14)$$

$$\frac{d\vec{C}}{dt}_{/terre} = \frac{d\vec{C}}{dt}_{/avion} + \vec{\Omega}_{avion/terre} \wedge \vec{C} \quad (1.15)$$

Où $\vec{\alpha}_{avion/terre}$ représente la vitesse de rotation de l'avion par rapport à la terre

EXPRESSION DU VECTEUR VITESSE

Comme il a été rappelé précédemment, le vecteur vitesse est porté par l'axe Gx_a du repère aérodynamique. Ses composantes dans ce repère sont donc :

$$\vec{V}_{aero} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Ses composantes $(u, v, w)^T$ dans le repère avion sont obtenues à l'aide de la matrice de passage $[T]$ précédemment décrite (équation (1.2)) :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \alpha \cos \beta \\ V \sin \beta \\ V \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

EXPRESSION DE MOMENT CINETIQUE

En utilisant la matrice $[I]$ des inerties de l'avion ainsi que les composantes $(p, q, r)^T$ de la vitesse de rotation Ω avion/terre dans le repère avion, l'expression du moment cinétique C se définit par les relations matricielles suivantes :

$$\vec{C} = [I] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ap - Fq - Er \\ -Fp + Bq - Dr \\ -Ep - Dq + Cr \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

A, B, C, D, E et F représentent les termes liés à la matrice d'inertie.

EXPRESSIONS DES EQUATIONS CINEMATIQUES

La vitesse de rotation $\overrightarrow{\alpha}_{avion/terre}$ peut s'écrire en fonction des dérivées des angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\alpha}_{avion/terre} = \dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\theta} \vec{j}_h + \dot{\phi} \vec{i} \quad (1.19)$$

avec k_0 vecteur unitaire de l'axe Oz_0 , j_h vecteur unitaire de l'axe Oy_h , i vecteur unitaire de l'axe Ox (voir figure 1.2).

Ainsi, les composantes de $\overrightarrow{\alpha}_{\text{avion/terre}}$ dans le *référentiel avion* s'écrivent :

$$\begin{aligned} p &= -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ q &= \cos \theta \sin \phi \dot{\psi} + \cos \phi \dot{\theta} \\ r &= \cos \theta \cos \phi \dot{\psi} - \sin \phi \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.20)$$

4. EQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'AVION

4.1 Equations de forces (dans le trièdre avion)

En projetant l'équation (1.9) dans le repère avion et en utilisant les relations (1.14) et (1.17) dans l'équation (1.7), trois équations de forces sont obtenues :

$$\begin{aligned} m \left[\dot{V} \cos \alpha \cos \beta - V(\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) + V(q \sin \alpha \cos \beta - r \sin \beta) \right] &= X - mg \sin \theta \\ m \left[\dot{V} \sin \beta + V \dot{\beta} \cos \beta + V(r \cos \alpha \cos \beta - p \sin \alpha \cos \beta) \right] &= Y + mg \cos \theta \sin \phi \\ m \left[\dot{V} \sin \alpha \cos \beta - V(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta) + V(p \sin \beta - q \cos \alpha \cos \beta) \right] &= Z + mg \cos \theta \sin \phi \end{aligned} \quad \dots(1.21)$$

4.2 EQUATIONS DE MOMENTS (DANS LE TRIEDRE AVION)

L'hypothèse que le plan Gxz de l'avion soit un plan de symétrie implique que les éléments D et F de la matrice d'inertie sont nuls. En utilisant (1.18) (avec D et F nuls) et en remplaçant (1.15) dans (1.8), trois équations de moments sont obtenues :

$$\begin{aligned} A \dot{p} - E \dot{r} + (C - B)qr - Epq &= L \\ B \dot{q} + (A - C)rp + E(p^2 - r^2) &= M \\ C \dot{r} - E \dot{p} + (B - A)pq + Erq &= N \end{aligned} \quad (1.22)$$

4.3 EQUATIONS CINEMATIQUE

Il est courant de donner les expressions de $\dot{\Theta}$, $\dot{\Phi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction de p , q , r , Θ et Φ) qui sont une simple réécriture des équations (1.20), ce qui donne trois équations cinématiques :

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= q \cos \Phi - r \sin \Phi \\ \dot{\Phi} &= p + \tan \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \\ \dot{\psi} &= \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \Theta}\end{aligned}\quad (1.23)$$

5. Le système longitudinal et latéral

Le système longitudinal qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g \cos \theta_0 & A_{33} & A_{35} & A_{37} & A_{39} \\ -g \sin \theta_0 & A_{53} & A_{55} & A_{57} & A_{59} \\ 0 & X_u & X_w & X_q & X_H \\ A_{33} & \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{32} & B_{34} \\ B_{52} & B_{54} \\ \mu_{\delta m} & \mu_{\delta x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (\text{voir Annexe C})$$

Et le système latéral

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \operatorname{tg} \Theta_0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} \Theta_0 \\ g \cos \Theta_0 & A_{44} & A_{46} & A_{47} \\ 0 & \lambda_v & \lambda_p & \lambda_r \\ 0 & v_v & v_p & v_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{r} \\ \bar{p} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{41} & B_{43} \\ \lambda_{\delta l} & \lambda_{\delta n} \\ v_{\delta l} & v_{\delta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (\text{voir Annexe C})$$

En ce qui concerne le mouvement forcé (action des gouvernes) les deux mouvements se séparent dans la mesure où poussée des moteur et-gouverne de tangage n'induisent pas de moments latéraux autour de Ox ou de Oz , ni de force latérale et où les

gouvernes de lacet et de roulis n'induisent pas de forces suivant Ox ou Oz ni de moment longitudinal autour de Oy.

Dans le cas général du vol stabilisé en virage le système des neuf équations ne peut se séparer en sous-systèmes et le mouvement libre est géré par une équation caractéristique du neuvième ordre dont les racines pour les faibles taux de virage sont voisines des racines des deux équations caractéristiques du 5^{ème} ordre pour le longitudinal, du 4^{ème} ordre pour le latéral.

Dans certains cas l'augmentation du taux de virage peut conduire à une profonde modification des racines, certaines racines imaginaires conjuguées pouvant se transformer en deux racines réelles ce qui modifie complètement le comportement de l'avion. Une telle étude ne peut être menée que dans des cas particuliers et sort du cadre de cet exposé. [2] [7] [8] [17]

6. APPLICATION SUR UN AVION DE TRANSPORT DU TYPE AIR-BUS 300

6.1 CARACTERISTIQUE D'UN AIR-BUS 300

Géométrie –Masse- Inerties

$$\begin{array}{lll}
 S=260 \text{ m}^2, & L=6.61\text{m}, & m = 120000\text{kg} \\
 A = 5.5510^6 \text{kg} \cdot \text{m}^2, & B = 9.72 \cdot 10^6 \text{kg} \cdot \text{m}^2, & C = 14.51 \cdot 10^6 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\
 D = 0, & E = -3.3 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{m}^2, & F=0
 \end{array}$$

Moteur

Bimoteur dont la poussée un moteur au pont fixe au sol $F_0 = 120000N$

Coefficient $\lambda = 0$, Coefficient $\mu = 1$, Calage = 1°

Distance de l'axe moteur au plan de symétrie $XZ = 8\text{m}$

Aérodynamique

- Longitudinale

$$\begin{array}{llll}
 C_z = \alpha / 11.5 (\alpha \text{ en degré}) , & C_{z\alpha} = 4.982 \text{ rad}^{-1} , & C_{z\delta m} = 0.435 \text{ rad}^{-1} , & C_{m\alpha} = -5 \\
 C_{zq} = -0.7 & , & C_{z\dot{\alpha}} = -0.3 & , & C_{m0} = -0.1 & , & C_{m\alpha} = -1.46 \\
 C_{mq} = -15 & , & C_{m\delta m} = -1.46 & & & &
 \end{array}$$

- **Latéral :**

	β	P	R	δ_a	δ_r
C_Y	-1.5			0.05	0.3
C_l	-1.3	-1.3	2.9	-0.33	0.25
C_n	1.75	-1.5	-7.5	-0.125	-1.0

Tableau (1.2) les différents coefficients utilisés dans le mouvement latéral

- **Condition de vol**

L'altitude $H=30000\text{ft}$, densité d'air $\rho=0.458312\text{ kg/m}^3$

L'angle d'attaque initial $\alpha_0=3^{\circ},825$

Nombre de Mach $\chi=0.8$ la vitesse du vol $V_0=242.54\text{ m/s}$

En faisant cette application nous obtiendrons les matrices d'état suivant :

❖ **Pour le mouvement latéral**

(Compte tenu de ce que $\bar{V} = V_0 \bar{\beta}$ on retrouve le système latéral suivant)

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \dots(1.24)$$

Rappelle :

Ou : β : Angle de dérapage

r : vitesse angulaire de lacet

p : vitesse angulaire de roulis

$\dot{\varphi}$: Angle de roulis ; $\dot{\varphi} = p$

δ_a : Angle ailerons

δ_r : Angle de gouverne de direction

Dont les racines de l'équation caractéristique sont : (voir Annexe A)

$\lambda_{1,2} = -5.68e-001 \pm 2.44 i$ se sont deux modes conjugués qui caractérisent le mode roulis hollandais.

$\lambda_3 = -8.31e-001$ caractérise le mode roulis

$\lambda_4 = -6.46e-002$ caractérise le mode spiral

❖ Pour le mouvement longitudinal

Le mouvement longitudinal est gouverné par les deux commandes. Cependant, nous allons procéder à notre contrôle avec manette à gaz fixée, donc la poussée sera en fonction de la vitesse, de la température, de l'altitude et des conditions de vol, et contenu de ce que $\omega = V_0 \alpha$. On trouve le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9.7881 & -0.0058 & 19.3961 & -17.5435 & 0 \\ -0.0027 & -0.0002 & -0.0453 & 1.0819 & 0 \\ 0 & -0.0027 & -9.3654 & -2.6043 & 0 \\ 242.54 & 0.0667 & -241.997 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ u \\ \alpha \\ q \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8476 \\ -0.0523 \\ -9.3011 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta_m] \dots\dots(1.25)$$

Rappelle :

θ : Angle de tangage

u : vitesse linéaire autour de l'axe X

w : vitesse linéaire autour de l'axe Z

q : vitesse angulaire de tangage

H : Hauteur

δ_m : angle de profondeur

Dont les racines de l'équation caractéristique sont : (voir Annexe A)

$\lambda_1=0$ caractérise le mode (apériodique)

$\lambda_{2,3} = -1.32 \pm 2.91 i$ se sont deux poles conjugués qui caractérise le mode (short period)

$\lambda_{4,5} = -4.95e-003 \pm 4.04e-002 i$ caractérise le mode (phoguide)

6.2 SIMULATION ET INTERPRETATIONS EN BOUCLE OUVERTE

Ans ce qui suite, des simulations du mouvement de l'avion en boucle ouverte seront présentées, en lui appliquant un échelon et une impulsion comme signaux d'entrée

Le mode latéral

•Pour : $\delta_a =$ Impulsion d'amplitude (10^0) , $\delta_r = 0$

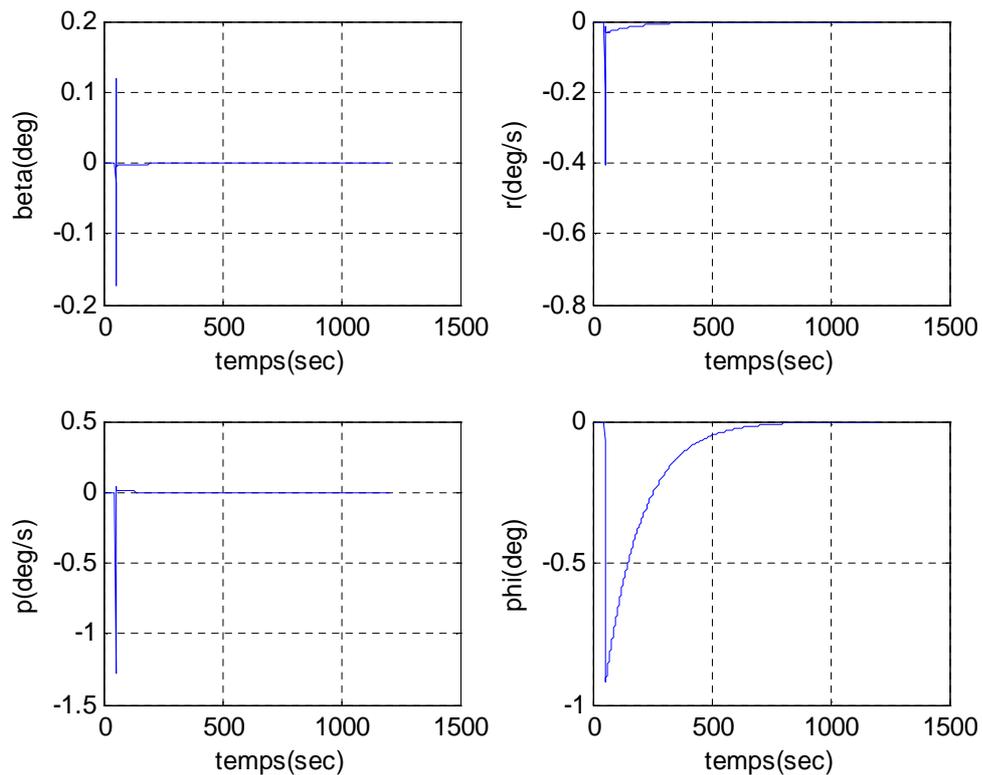


Fig (1.4) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a =$ Impulsion d'amplitude (10^0) , $\delta_r = 0$

•Pour : $\delta_a = 0$, $\delta_r = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$

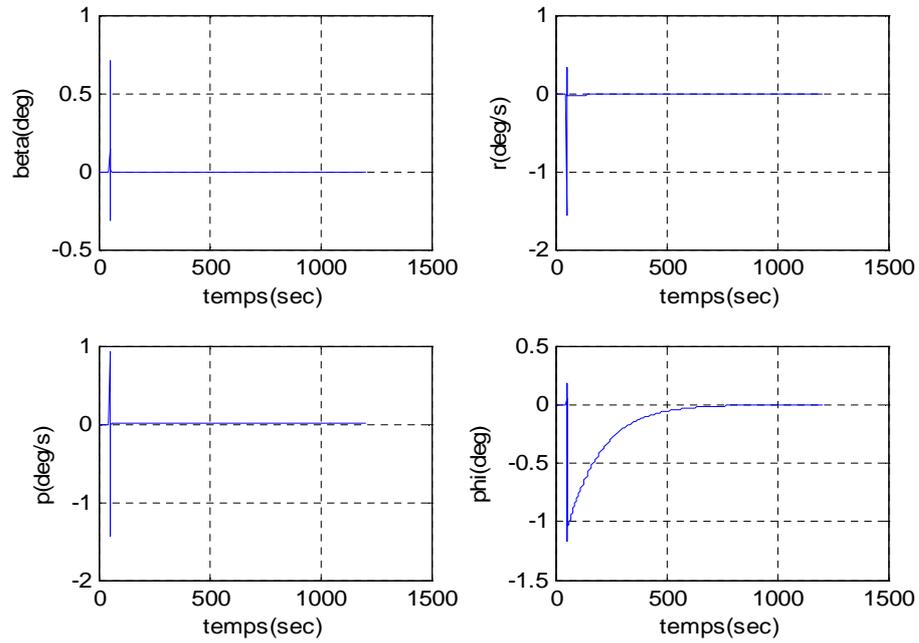


Fig (1.5) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a = 0$, $\delta_r = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$

•Pour : $\delta_a = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$, $\delta_r = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$

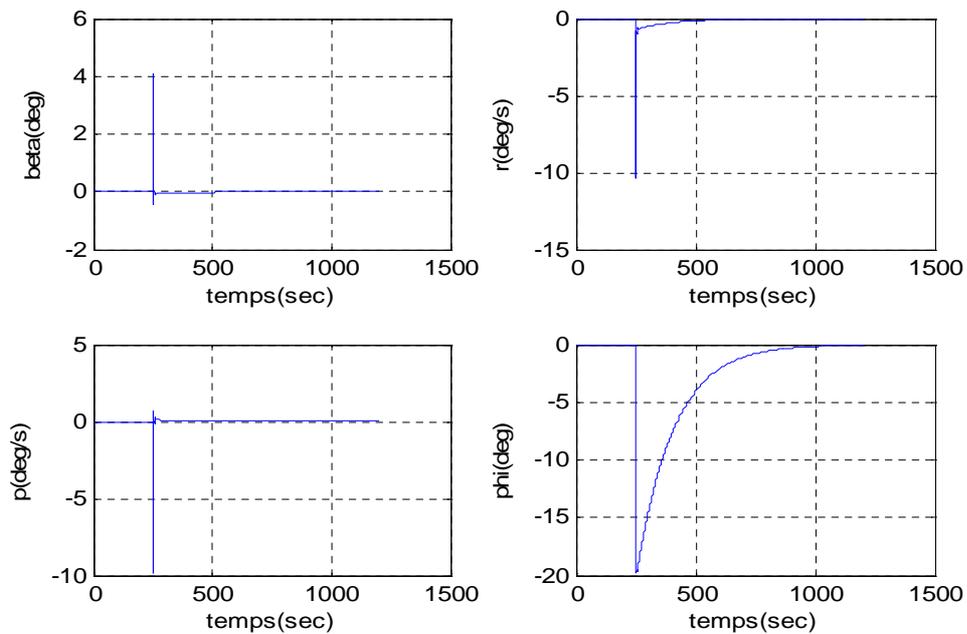


Fig (1.6) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$ $\delta_r = \text{Impulsion d'amplitude } (10^0)$

•Pour : $\delta_a = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$, $\delta_r = 0$

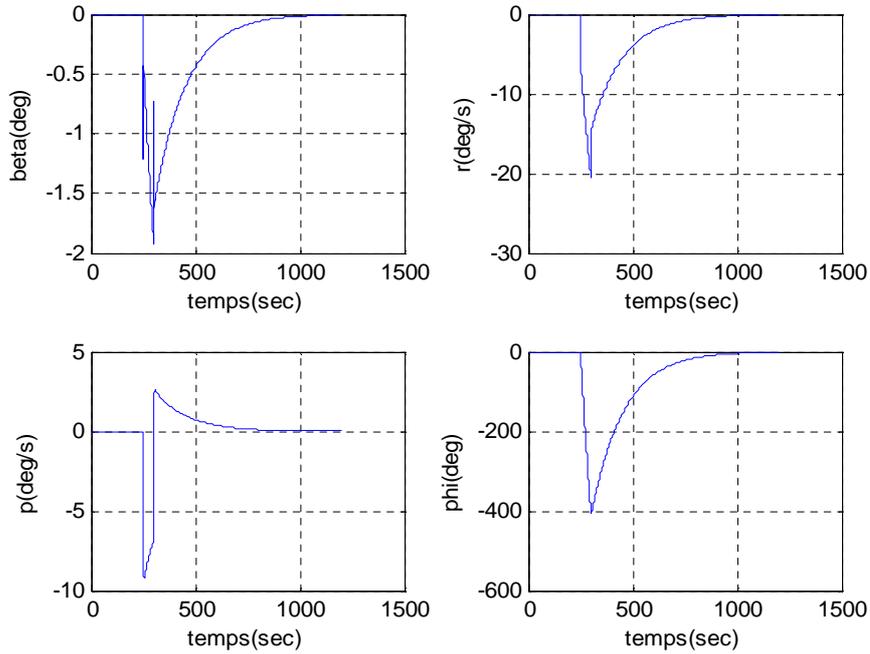


Fig (1.7) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$, $\delta_r = 0$

•Pour : $\delta_a = 0$, $\delta_r = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$

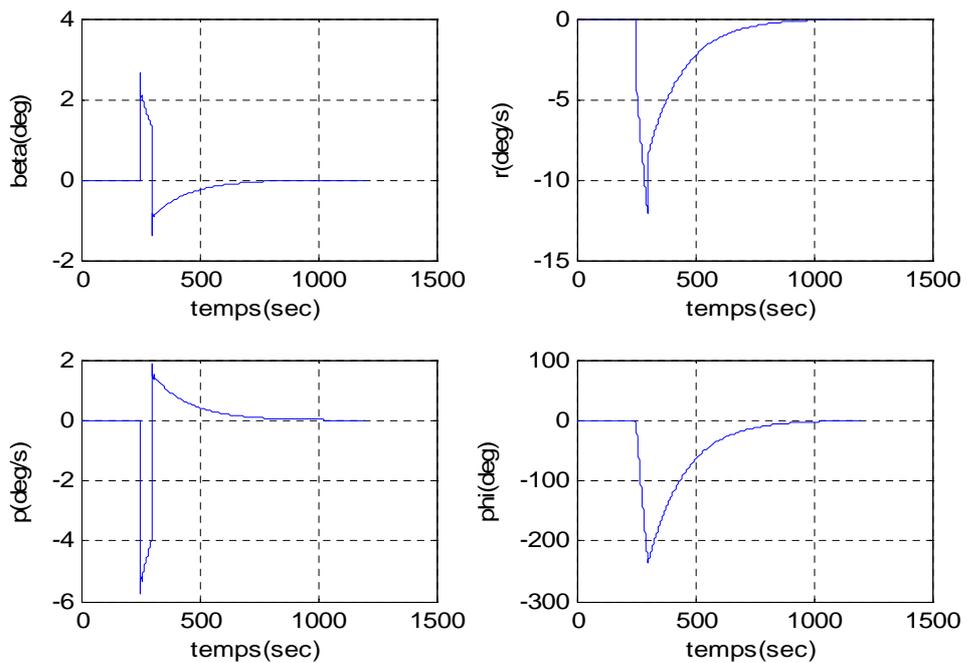


Fig (1.8) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a = 0$, $\delta_r = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$

- Pour : $\delta_a = \text{Échelon d'amplitude } (5^0)$, $\delta_r = \text{Échelon d'amplitude } (5^0)$

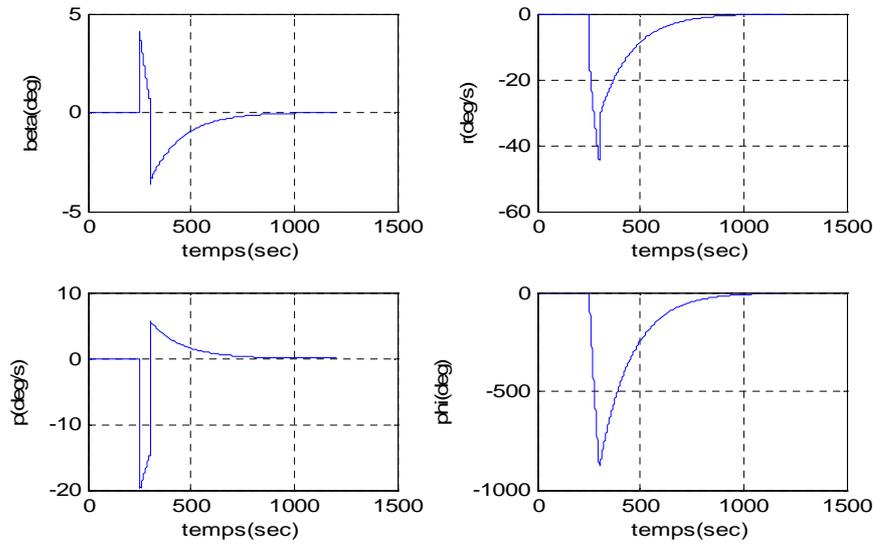


Fig (1.9) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_a = \text{Échelon d'amplitude } (5^0)$, $\delta_r = \text{Échelon d'amplitude } (5^0)$

Le mode longitudinal

- Pour $\delta_m = \text{impulsion d'amplitude } (10^0)$

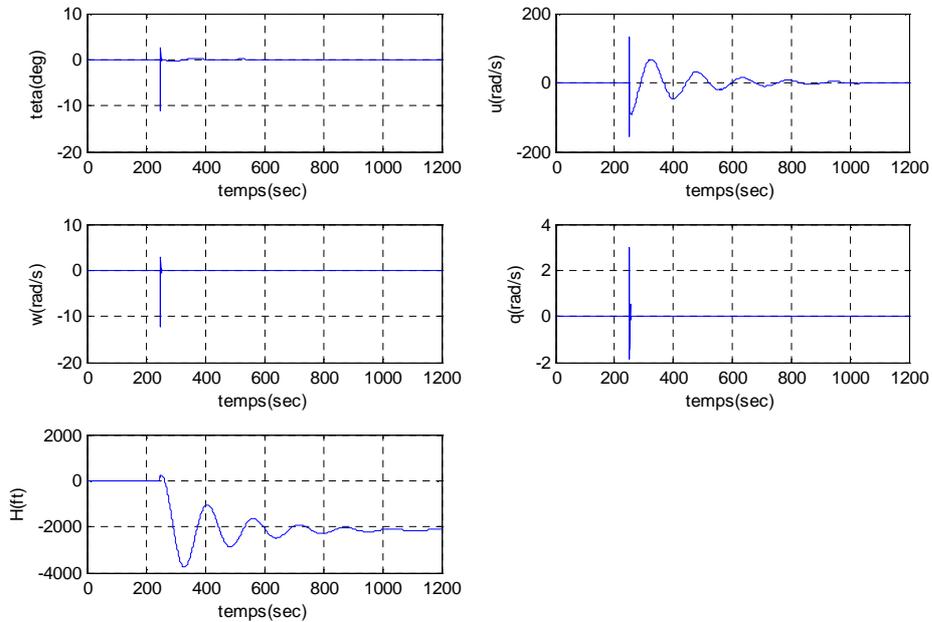


Fig (1.10) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_m = \text{impulsion d'amplitude } (10^0)$

- Pour $\delta_m = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$

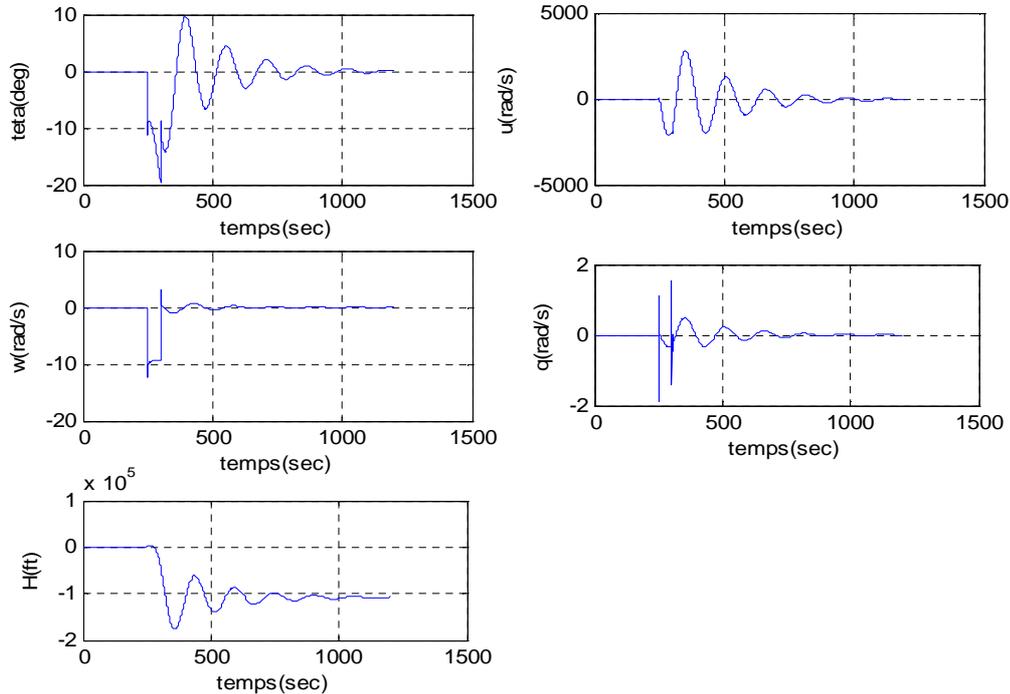


Fig (1.11) Simulation en boucle ouvert pour $\delta_m = \text{Échelon d'amplitude } (5^\circ)$

❖ INTERPRETATIONS DES RESULTATS

Pour le système en boucle ouvert

- En mode latéral, en imposant des signaux d'entrées une fois de type échelon (limité dans le temps, $t=50s$), et une autre fois de type impulsion ($t=1s$), sur les gouvernes de direction « δr » et de gauchissement « δa ». On remarque que les modes qui sont loin de l'axe imaginaire (Roulis, Spiral) ont un effet rapide sur les sorties (se stabilise rapidement). Par contre, le mode complexe (Roulis Hollandais) qui est proche de l'axe imaginaire a un effet long sur les sorties (se stabilise lentement).
- En mode longitudinal, en imposant le même type des signaux d'entrées sur la gouverne de profondeur « δm ». On remarque dans le cas de l'échelon, l'effet du mode (Short Period) qui est un mode apériodique bien amorti sur l'angle d'incidence, tandis que l'effet du mode (phagoïde) qui est un mode oscillatoire mal amorti sur l'angle de tangage.

7. CONCLUSION

Nous avons ainsi testé la stabilité des deux systèmes obtenus, en boucle ouverte. En leurs appliquant un échelon puis une impulsion comme signaux d'entrées. Consternant le premier type de signal, on remarque que la stabilité théorique est acquise, car les deux systèmes possèdent des pôles ayant des parties réelles négatives, seulement que les résultats Obtenus sont inacceptables en pratiques, ceci est dû la présence des pôles très proches de l'axe imaginaire, et qui conduisent rapidement l'avion vers le problème de décrochage. Pour cette raison, nous allons faire appeler au contrôle de vol, afin de stabiliser notre système en boucle fermée, par conséquent éviter ce problème.

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier la synthèse des lois de commandes par placement des pôles, lorsqu'elles sont appliquées à un système multi-variable. L'étude se portera sur deux commandes principales, les plus utilisées et qui sont :

- Loi de commande par retour d'état.
- Loi de commande par retour d'état avec action intégrale

On commencera par déterminer analytiquement chaque commande. On simulera la réponse de nos systèmes

2. LOI DE COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT

- a. Les états sont accessibles(ou mesurables)
- b. Le système physique est contrôlable

Le système est contrôlable si Rank $[B AB \dots A^{n-1}B] = n$

Ou A est une matrice de dimension (nxn)

Donc Rank $\begin{bmatrix} 0.0060 & 0.0361 & -0.7242 & 2.2917 & 1.2020 & -2.4536 & 2.8215 & -11.9770 \\ -0.1964 & -1.5985 & 0.1662 & 0.5588 & -2.2060 & 6.3882 & 4.0233 & -8.4206 \\ -1.3759 & 1.0528 & 1.9351 & -2.2823 & 1.1367 & -8.9130 & -8.9523 & 28.6398 \\ 0 & 0 & -1.3759 & 1.0528 & 1.9351 & -2.2823 & 1.1367 & -8.9130 \end{bmatrix} = 4$

Et on a n=4 donc notre système est contrôlable

2.1 DETERMINATION DE LA COMMANDE

- Système physique :

$$\dot{X} = AX + BU \tag{2.1}$$

$$Y = CX \tag{2.2}$$

Avec

$$X^T = [\beta, p, r, \phi]^T$$

$$U^T = [\delta_r, \delta a]^T$$

Ou $Y = [\beta, \phi]^T$:Le signal de sortie du système

$U^T = [\delta_r, \delta a]^T$:Le signal de commande du système

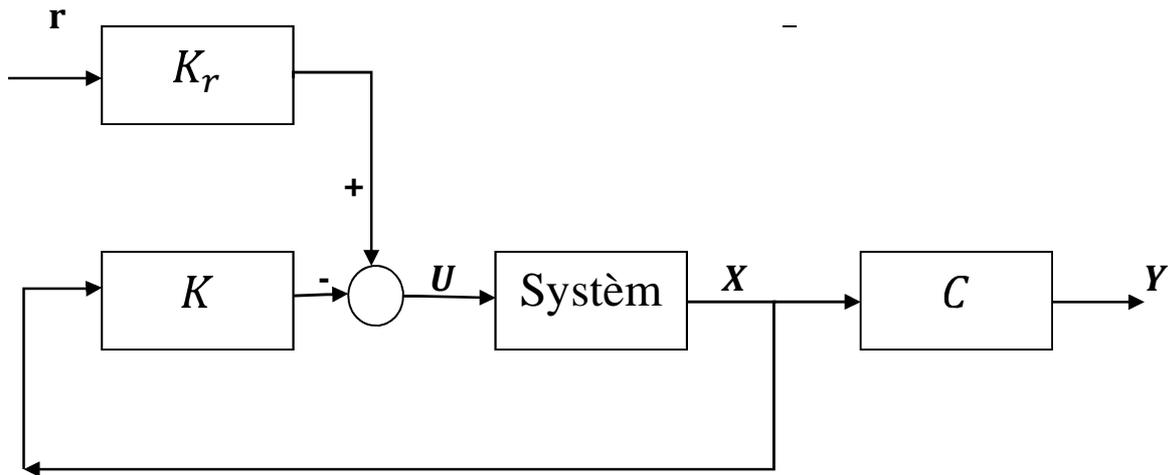


Fig (2.1) Schéma bloc de la commande par retour d'état

- la commande par retour d'état est définie par l'équation suivante : [11] [15]

$$U = -KX + K_r r \tag{2.3}$$

ou

r : le signal de référence.

K : matrice des gains retour

K_r : matrice des gains d'allée

Dynamique en boucle :

En remplace l'équation (2.3) dans l'équation (2.1),on obtient :

$$\dot{X} = (A-BK) X + B K_r r \tag{2.4}$$

2.2. DETERMINATION DE LA MATRICE K

Pour déterminer la matrice K , on procède par la méthode de l'emplacement des pôles par retour d'état ,c'est-à-dire qu'on impose les pôles du système et on détermine la matrice K

Théorème

On peut spécifier la carte des pôles d'un système boucle par retour d'état si et seulement si (A,B) est contrôlable, c'est-a-dire :

$$\text{Rank } [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

Ou A est une matrice de dimension $(n \times n)$ [4] [11]

Grâce à la structure des matrices A et B, déjà définies ci-dessus (forme canonique pour chaque degrés de liberté), il est facile de voir que le system décrit par l'équation (2.1) et (2.2)

Est contrôlable. Ensuite la fonction PLACE de Matlab, nous permet de déterminer la matrice K, en choisissant des valeurs propres suivantes :

$$P1 = [-0.4 ; -1 ; -0.36000 + 1.4283i ; -0.36000 - 1.4283i]$$

ET on obtient:

$$K = \text{place}(A, B, P) = \begin{bmatrix} 5.2255 & -0.6596 & 0.2067 & -3.9237 \\ 0.4307 & -0.5904 & -0.0959 & -1.9886 \end{bmatrix}$$

Pour P1 : on a choisi ces valeurs propres pour avoir un temps de réponse $t_s = 10s$ ($t_s = 4/V_{pmin}$) et pour minimiser la partie transitoire on augmente le coefficient d'amortissement

2.3 DETERMINATION DE LA MATRICE K_r

Sachant qu'il faut assurer que les sorties Y. Suivent les références donc : **[11] [16]**

L'erreur finale : $\bar{y} - \bar{r} = 0$ pour $t \rightarrow \infty$

D'où $C\bar{x} = \bar{r}$ pour $t \rightarrow \infty$

Si $r = \text{constante}$ $\dot{x} = 0$

$$\text{Alors : } (A - BK) \bar{x} + BK_r \bar{r} = 0 \Rightarrow \bar{x} = -(A - BK)^{-1} BK_r \bar{r} \quad (2.5)$$

$$\text{Et } C\bar{x} = \bar{r} \Rightarrow -C[A - BK]^{-1} BK_r \bar{r} = \bar{r} \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow -C[A - BK]^{-1} BK_r = I_m \quad (2.7)$$

$$\text{Par suite } K_r = [-C[A - BK]^{-1} B]^{-1} I_m \quad (2.8)$$

$$K_r = \begin{bmatrix} 3.0792 & -4.0042 \\ 2.6543 & -2.0471 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perturbation extérieure

Ces perturbations influent directement sur les surfaces de contrôle .c.-à-d. la gouverne de gauchissement, de profondeur et de direction (voir annexe A)

Nous soumettons notre système d'avion à une perturbation causée par une turbulence atmosphérique, telle qu'une rafale de vent, représenté par un bruit blanc gaussien additive très riche en fréquence, en faisant varier sa moyenne

Dynamique en boucle fermée en présence de perturbation externe

Dans le cas de présence d'une perturbation externe représentée par le terme $d(t)$, les équations d'états (2.1) et (2.2) devienne :

$$\dot{X} = AX + Bu + d(t)$$

$$Y = CX$$

Avec : $u = -Kx + K_r r$

D'où : $\dot{X} = (A - BK)X + BKr + d(t)$

$$Y = CX$$

NB : La stabilité en boucle fermée de notre système, en présence de perturbation externe $d(t)$ est acquise, dans la mesure où l'erreur de sortie est bornée tant que le terme $d(t)$ reste borné (Annexe A)

2.4 SIMULATION ET INTERPRITATION DES RUSULTATS

- **La fig (2.2)**

Cette figure représente le résultat de simulation d'une commande par retour d'état sans aucune perturbation extérieure. On remarque que le signal de sortie (angle de dérapage (β) et angle d'inclinaison(φ)), suit le signal de référence (r_1 et r_2) avec un dépassement d'amplitude pour l'angle de dérapage et pour l'angle d'inclinaison et ne s'atténue qu'après 10s puis se stabilise .On constate la présence d'une erreur statique. Mais comme le signal de sortie et les commandes U_{p1} et U_{p2} restent bornées, alors notre système reste stable aussi.

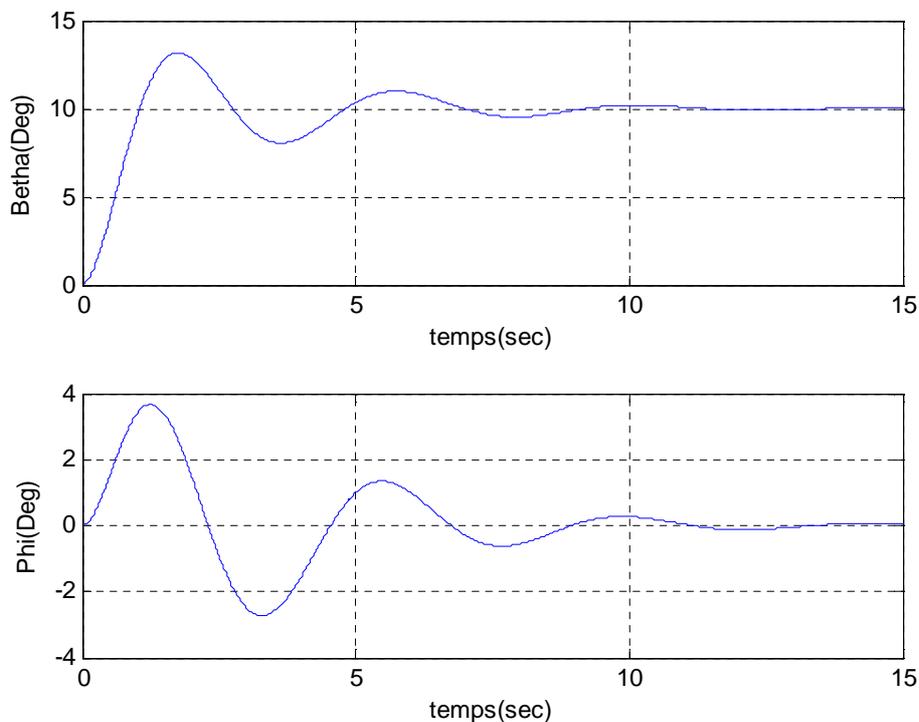
- **La fig (2.3)**

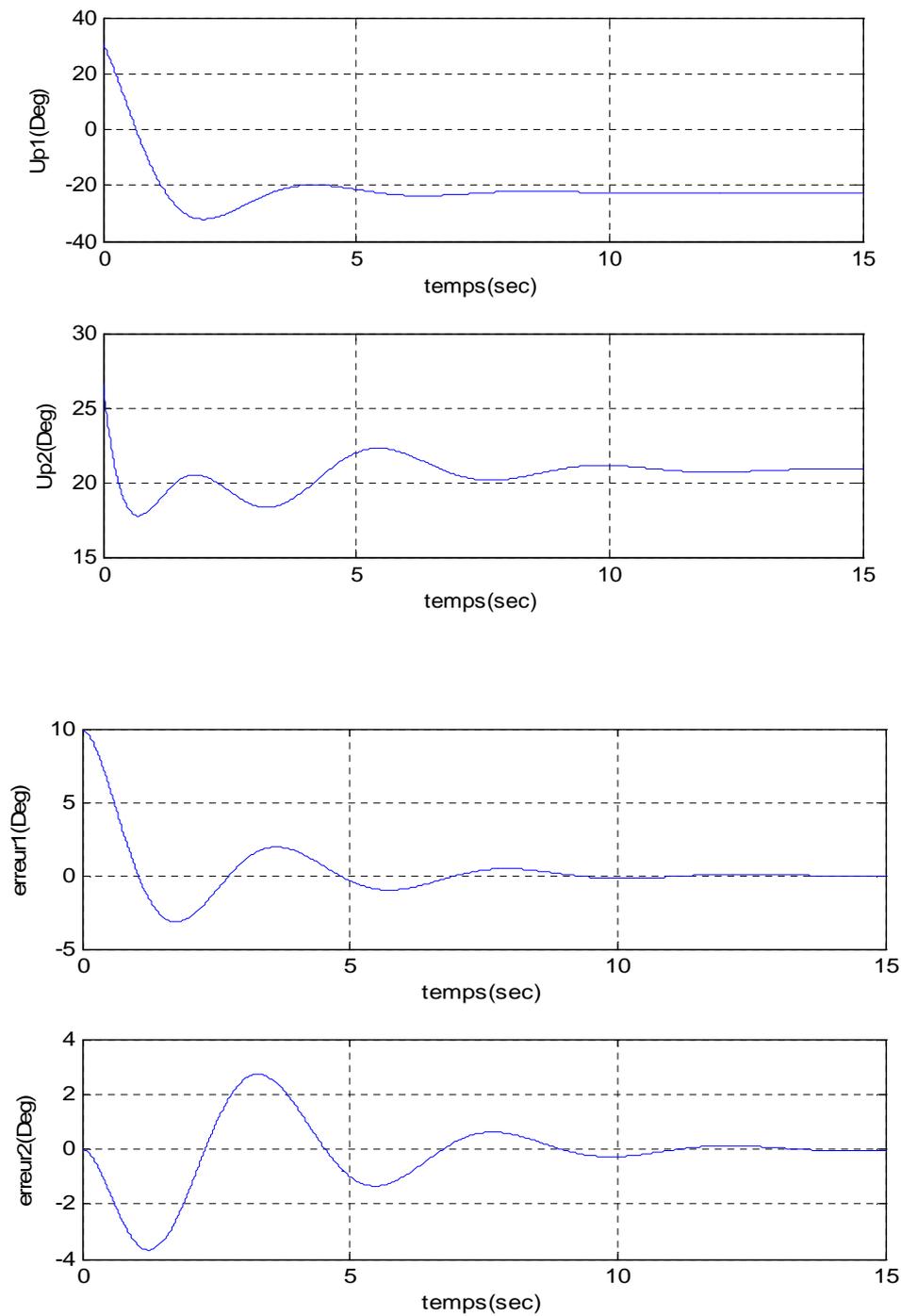
Représente le résultat de simulation d'une commande par retour d'état sans aucune perturbation extérieure. On remarque que le signal de sortie (angle de dérapage (β) et angle d'inclinaison(φ)), suit le signal de référence (r_1 et r_2) avec un dépassement d'amplitude pour l'angle de dérapage et pour l'angle d'inclinaison et ne s'atténue qu'après 5s puis se stabilise .On constate la présence d'une erreur statique .Mais comme le signal de sortie et les commandes U_{p1} et U_{p2} restent bornées, alors notre système reste stable aussi.

- **La fig (2.4)et(2.5)**

Dans ce cas en appliquons a notre système une perturbation externe sévère (rafale de vent) pour deux valeurs différentes de variance (0.01,10).on remarque que les signaux de commandes deviennent de plus en plus excites, chaque fois qu'on fait augmenter le niveau de bruit

Dans tous les cas, nous avons une bonne poursuite des signaux de sorties vers les références et delà, nous pouvons dire que la commande est robuste





Fig(2 .2) :Commande par retour d'état pour P1

Pour :

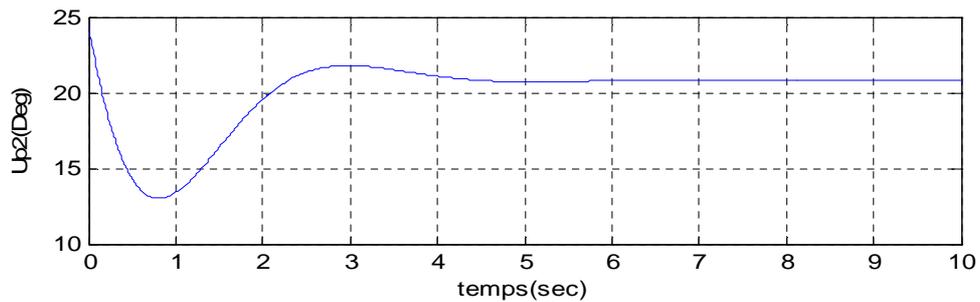
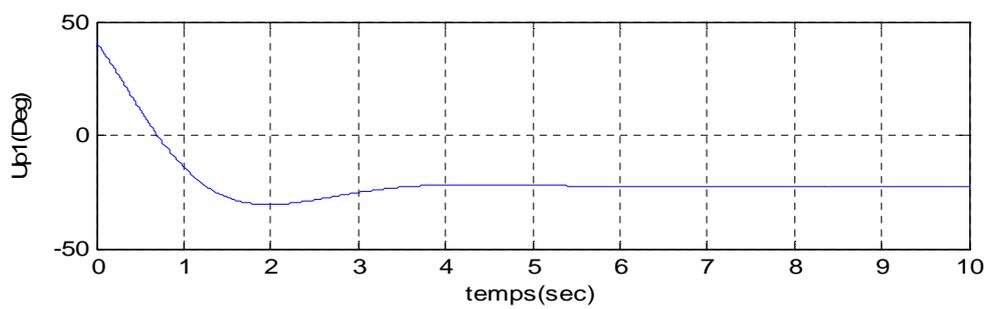
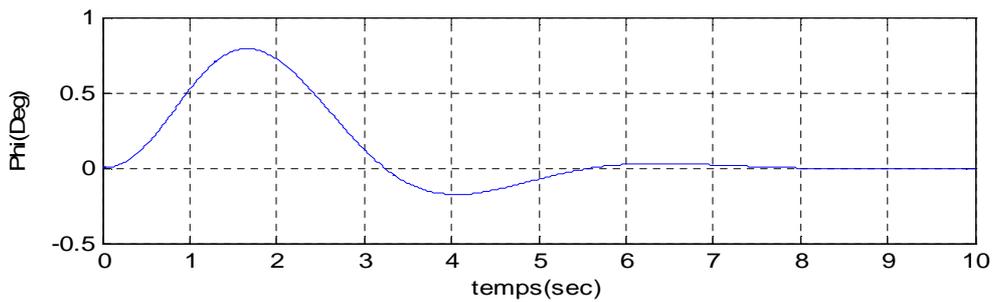
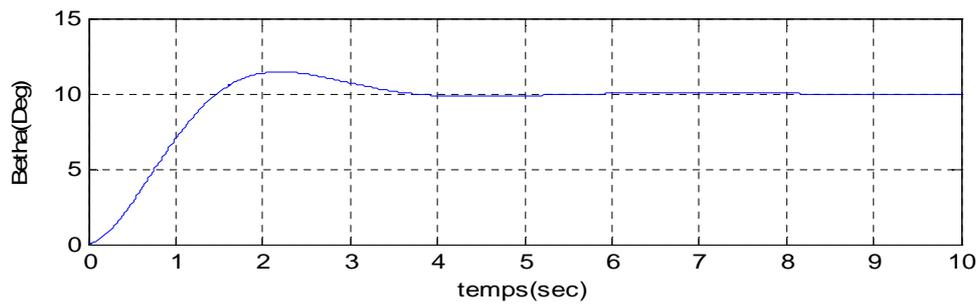
$$P2 = [-1; -2; -0.86000 + 1.4283i; -0.86000 - 1.4283i]$$

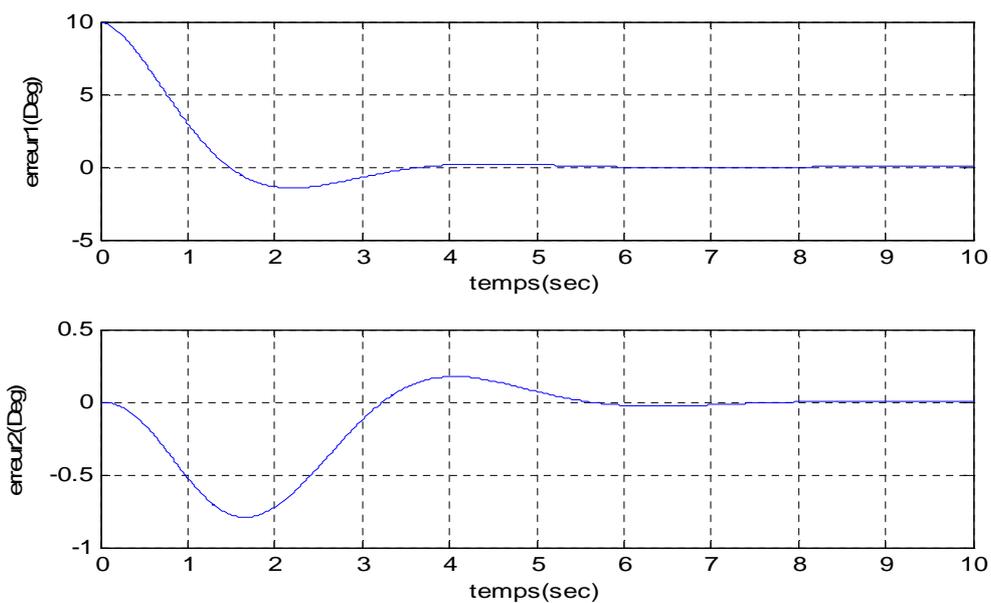
Pour P2 : on a choisi ces valeurs propres pour diminuer dans le temps de réponse a 4s

($t_s = 4/V_p$) et pour minimiser la partie transitoire on augmente le coefficient d'amortissement

$$K=\text{place}(A, B, P)= \begin{bmatrix} 6.1497 & -0.7091 & -0.3788 & -4.2523 \\ 0.2123 & -0.6667 & -0.0342 & -1.2548 \end{bmatrix}$$

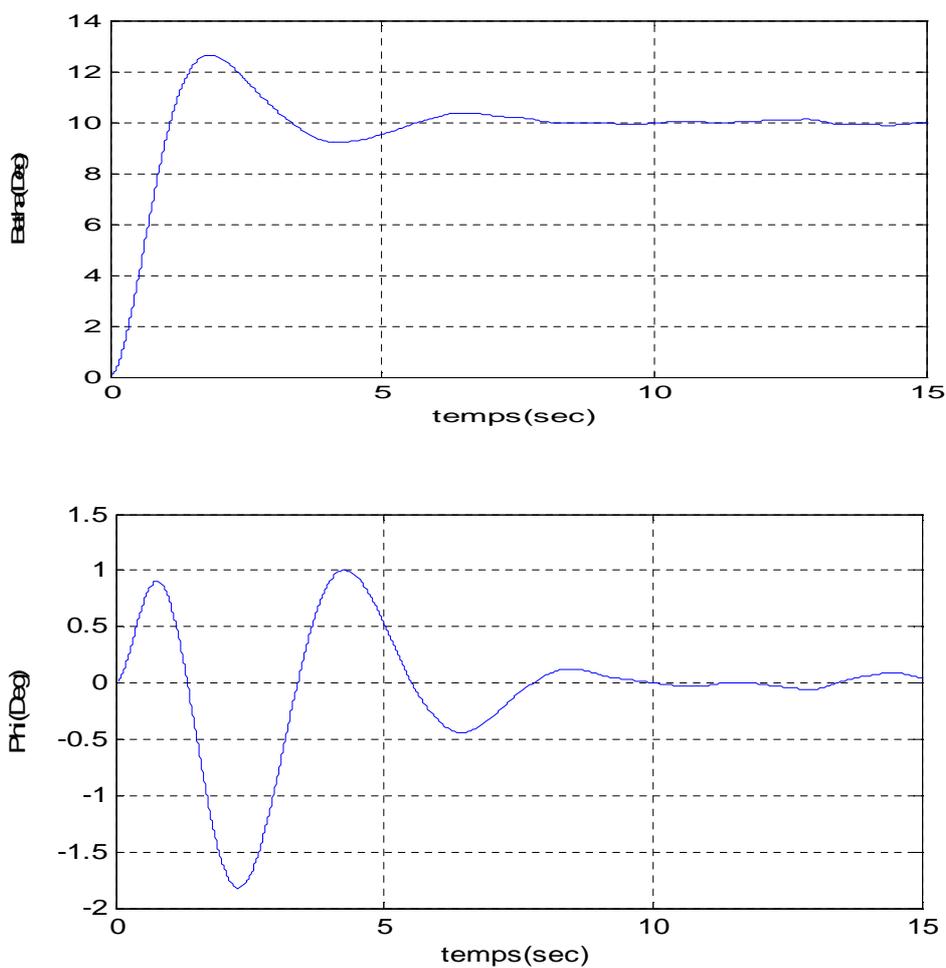
$$k_r = \begin{bmatrix} 4.0985 & -4.3646 \\ 2.4434 & -1.3158 \end{bmatrix}$$

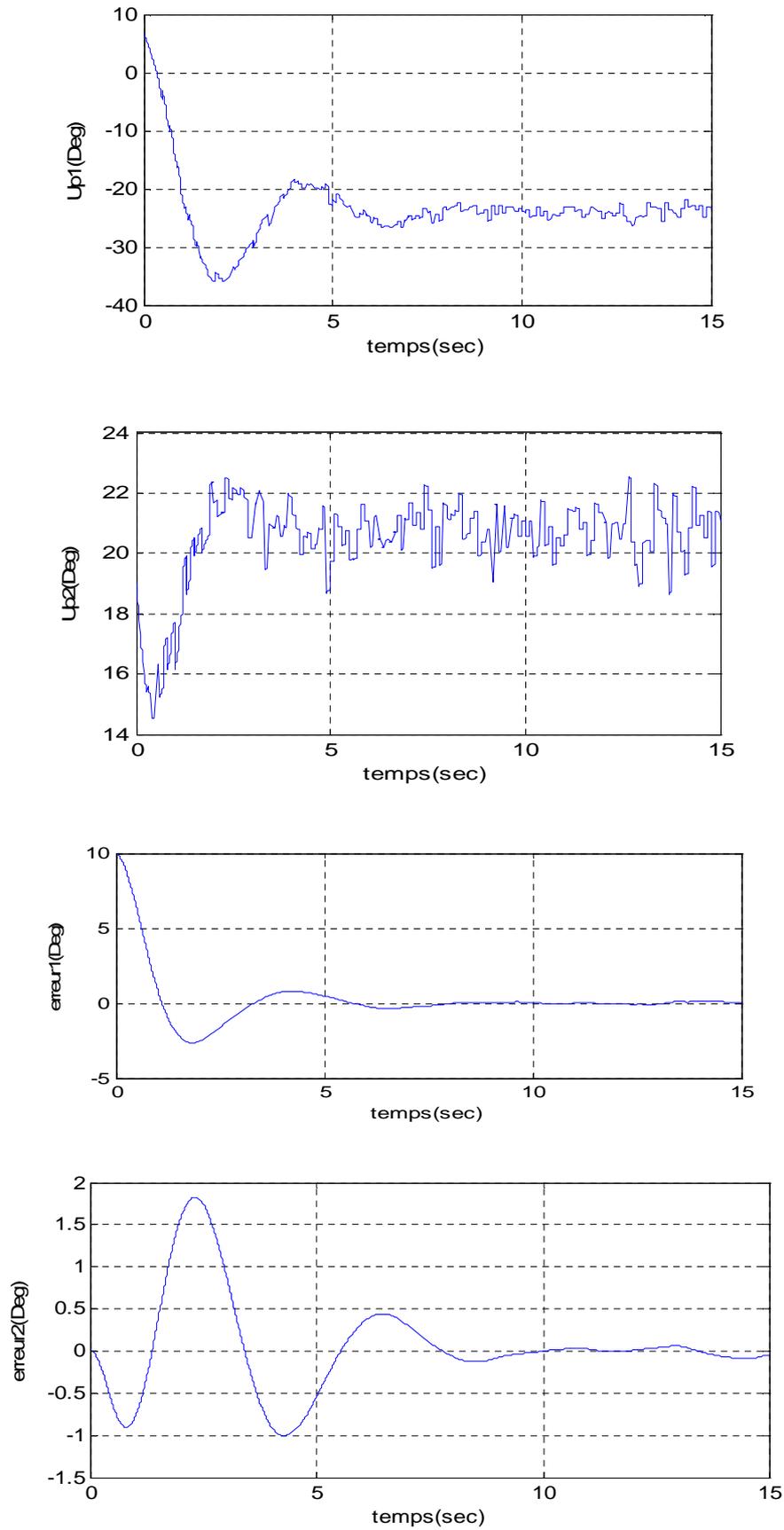




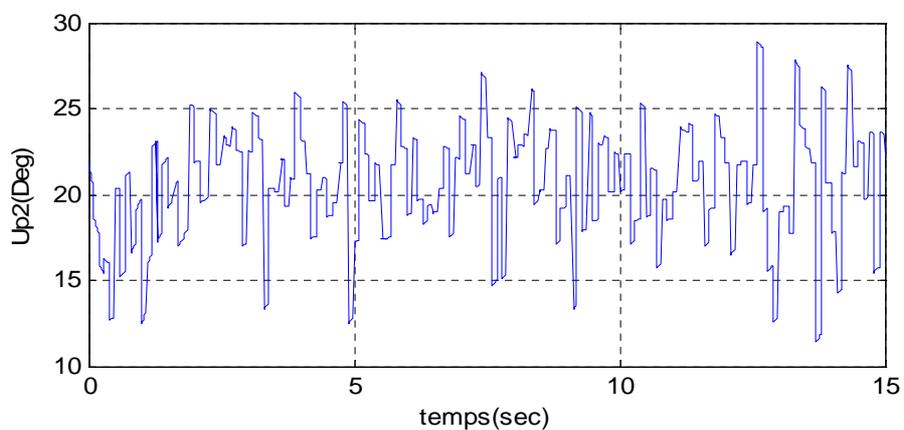
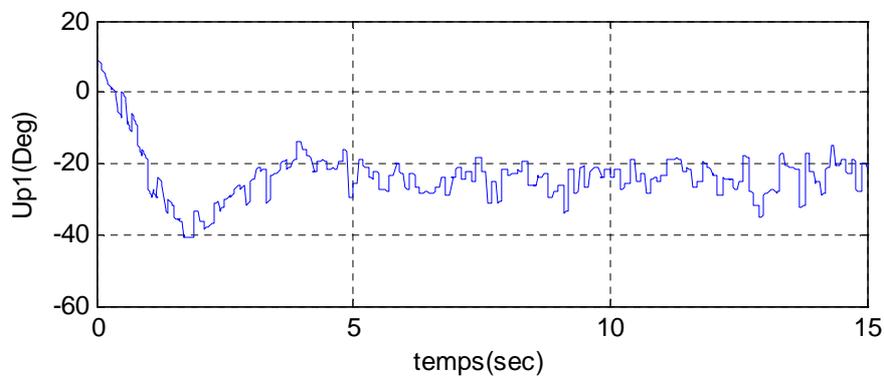
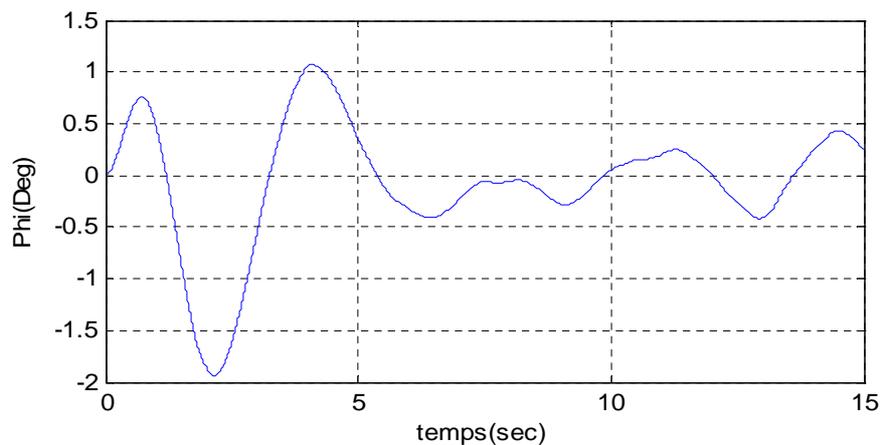
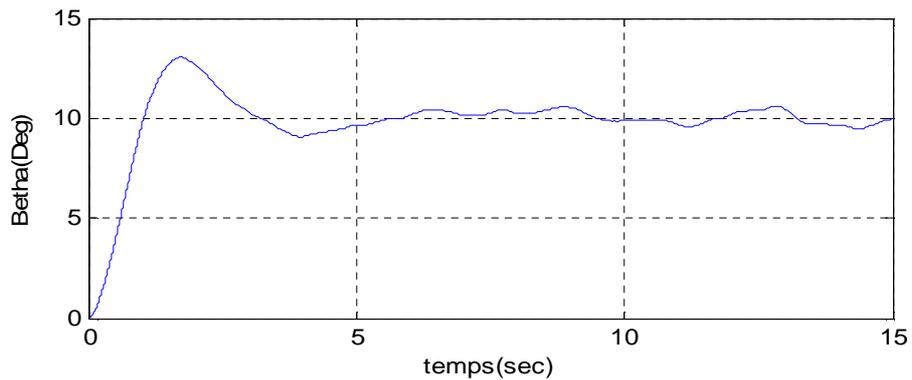
Fig(2.3) :Commande par retour d'état pour P2

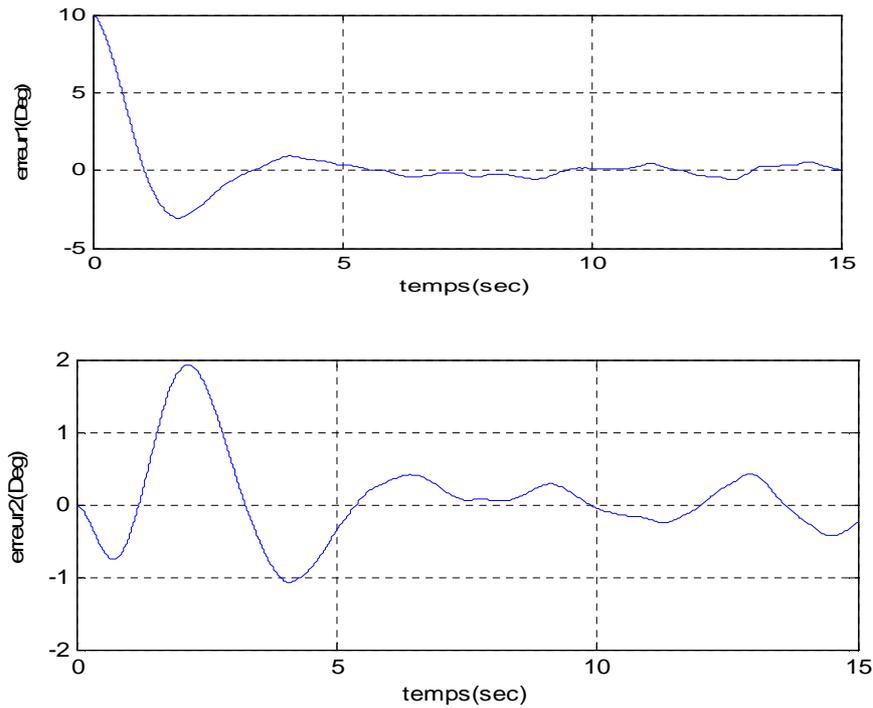
- Commande par retour d'état en présence de perturbation extérieure





Fig(2 .4) :Commande par retour d'état avec perturbation pour Variance = 0.01





Fig(2 .5) :Commande par retour d'état avec perturbation pour **Variance = 10**

3. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC ACTION INTEGRALE

3.1 Introduction

Le problème avec la commande avec retour d'état est que les erreurs (au repos) peuvent avoir lieu, ceci est dû aux variations des paramètres de A et B [11]

(C-à-d du système) pour cela, on combine une action intégrale pour résoudre ce problème. Le terme de l'action intégrale n'est autre que l'intégrale de l'erreur définie par : $e=r - y = r -Cx$

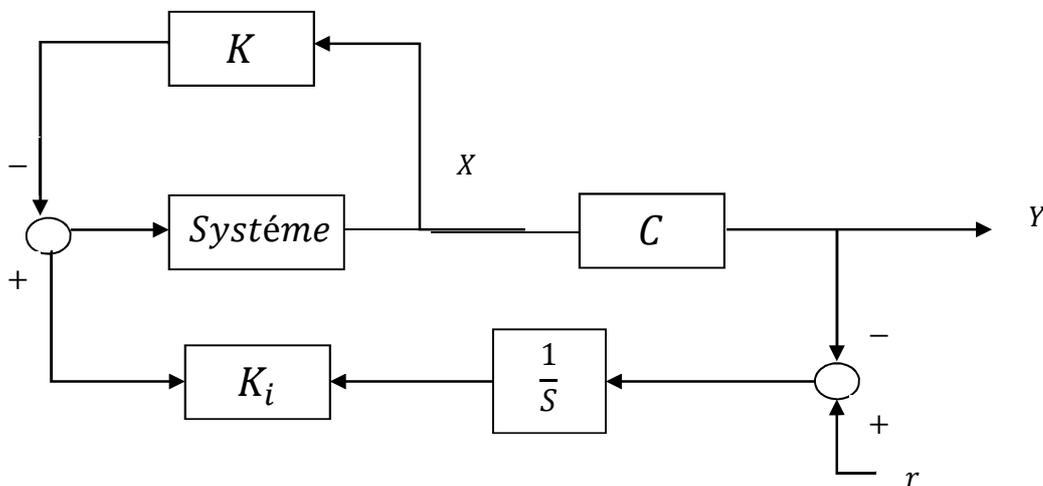


Fig (2.6) Commande par retour d'état avec action intégrale

$$x_i = \int e(\tau) d\tau \tag{2.9}$$

$$\dot{x}_i = r - Cx \tag{2.10}$$

La commande est :

$$U = -kx + K_i x_i \tag{2.11}$$

OU K_i : matrice des gains intégrales

$$\dot{x}(t) = (A - BK) + BK_i x \tag{2.12}$$

$$\dot{x}_i = r - Cx \tag{2.13}$$

3.2. DETERMINATION DE LA MATRICE K ET K_i

On définit un nouveau vecteur d'état augmenté

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Bk & BK_i \\ -C & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} r \tag{2.14}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_{4 \times 2} \\ -C & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} U(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

C'est de la forme :

$$\dot{x}^* = A^* x^* + B^* U \tag{2.16}$$

Avec : $U(t) = -K^* x^*$ (2.17)

Ou : $K^* = [K \ -k_i]$ (2.18)

Pour:

$$P1 = [-0.8 \ ; \ -1 \ ; \ -0.8900 + 1.4283i \ ; \ -0.8900 - 1.4283i \ ; \ 2 \ ; \ -2]$$

On obtient:

$$k = \begin{bmatrix} 12.5455 & -1.5738 & -1.7297 & -11.5293 \\ 4.3966 & -2.1451 & 0.4395 & -3.0772 \end{bmatrix}$$

$$k_i = \begin{bmatrix} 8.8625 & -9.5334 \\ 5.7535 & -2.6864 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dynamique en boucle fermée en présence de perturbation externe

La dynamique est toujours présentée par les équations (2.1) et (2.2) avec la présence du terme $d(t)$ qui représentent les perturbations externes sachant que la commande est :

$$U = -K X + K_i X_i$$

$$\dot{X} = (A - BK)X + BKX_i + d(t)$$

$$\dot{X} = r - CX$$

Donc le système augmente devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Bk & BK_i \\ -C & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{nm} \\ I_m \end{pmatrix} r + d(t)$$

NB : La stabilité en boucle fermée de notre système, en présence de perturbation externe $d(t)$ est acquise, dans la mesure où l'erreur de sortie est bornée tant que le terme $d(t)$ reste borné

3.3 SIMULATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

- **Fig. (2.7)**

Représente le résultat de simulation d'une commande par retour d'état avec action intégrale sans aucune perturbation extérieure. On remarque que le signal de sortie (angle de dérapage (β) et angle d'inclinaison(φ)), suit le signal de référence ($r1$ et $r2$) sans erreur statique avec un dépassement d'amplitude pour l'angle de dérapage et pour l'angle d'inclinaison et ne s'atténue qu'après 5s puis se stabilise. Mais comme le signal de sortie et les commandes U_{p1} et U_{p2} restent bornées, alors notre système reste stable aussi.

La présence de l'action intégrale a permis d'éliminer l'erreur statique entre signal de sortie et référence

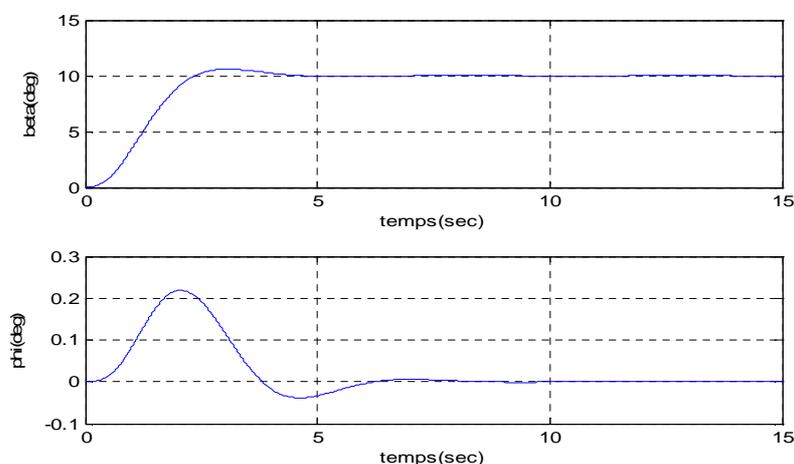
- **Fig. (2.8)**

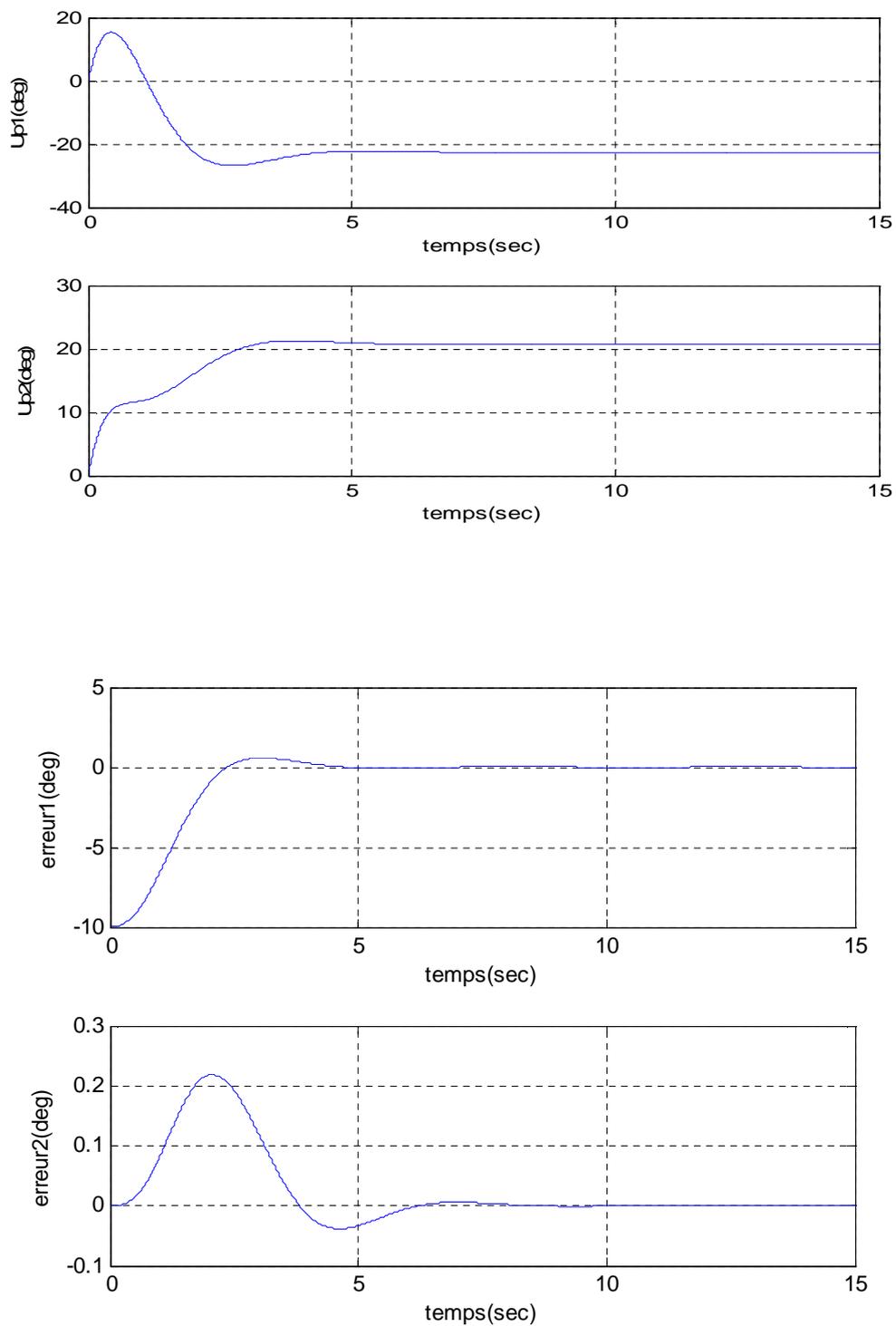
Cette figure représente la simulation comme la précédente seulement on améliore l'amortissement. On remarque qu'il y a toujours une phase oscillatoire, mais elle est plus amortie. Le système reste toujours stable

- **la fig (2.9) et (2.10)**

On applique à notre système une perturbation externe sévère (rafale de vent) pour deux valeurs différentes de variance (0.01,10).on remarque que les signaux de commandes deviennent de plus en plus excites, chaque fois qu'on fait augmenter le niveau de bruit

Mais nous avons une bonne poursuite des signaux de sorties vers les références et delà, le système reste stable mais la commande n'est pas réalisable en pratique





Fig(2.7) command par retour d'état avec action intégral pour P1

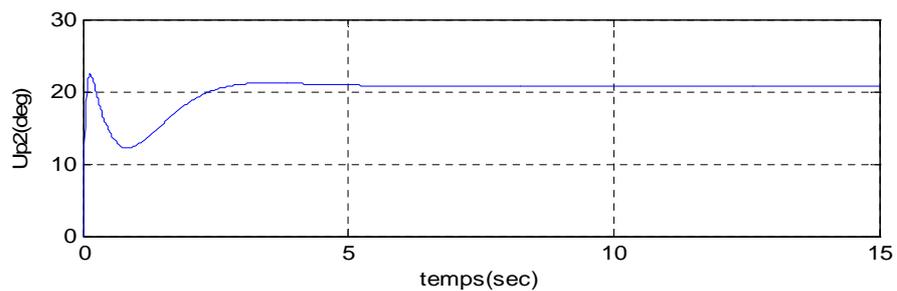
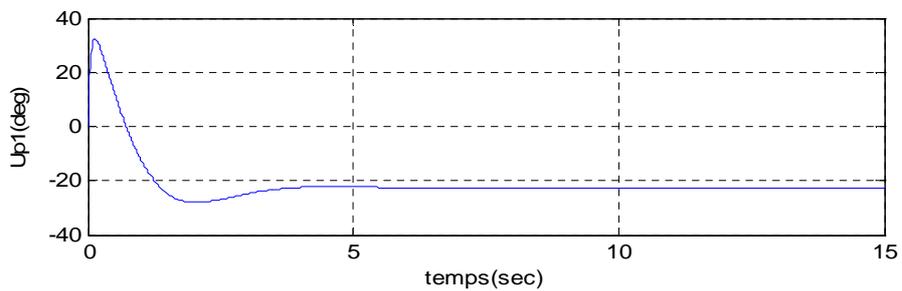
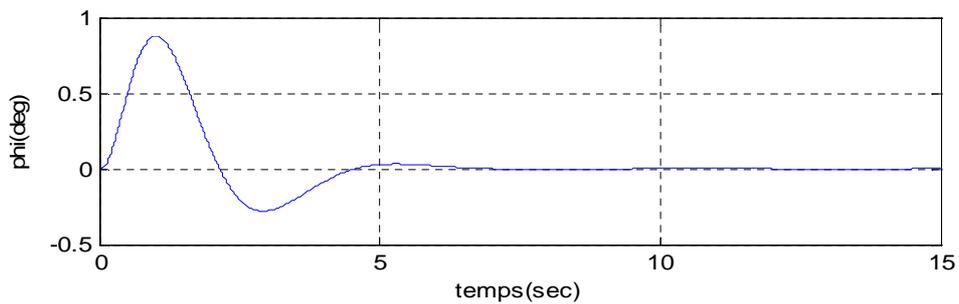
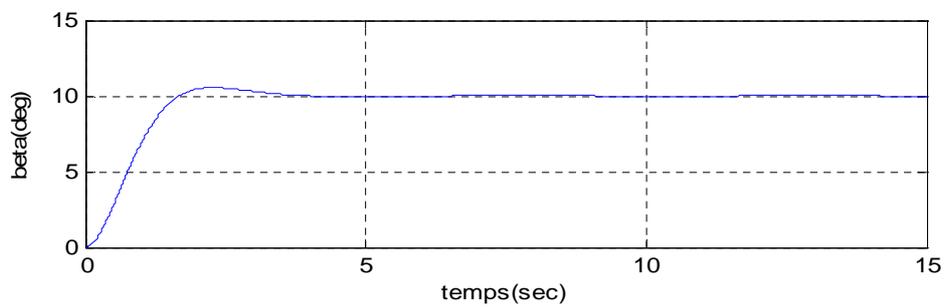
ET pour:

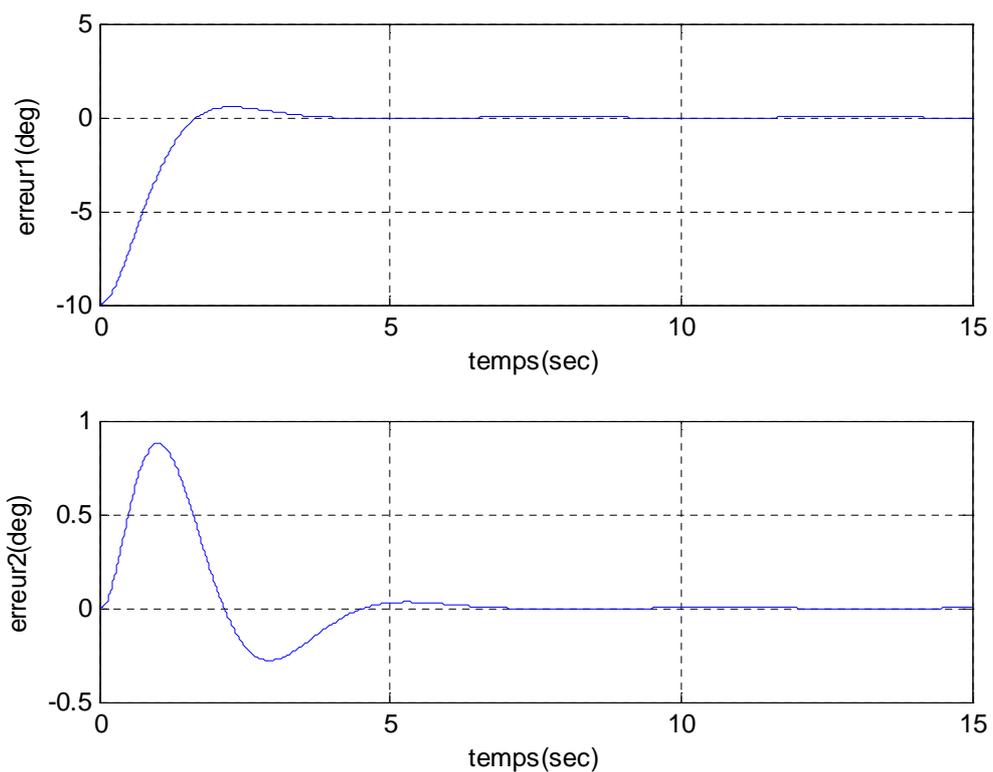
$$P2 = [-1; -2; -1.4000 + 1.4283i; -1.4000 - 1.4283i; 20; -20]$$

On obtient:

$$k = \begin{bmatrix} 11.0859 & -1.5279 & -1.4122 & -9.7372 \\ 3.0487 & -1.5188 & -0.1074 & -3.4762 \end{bmatrix}$$

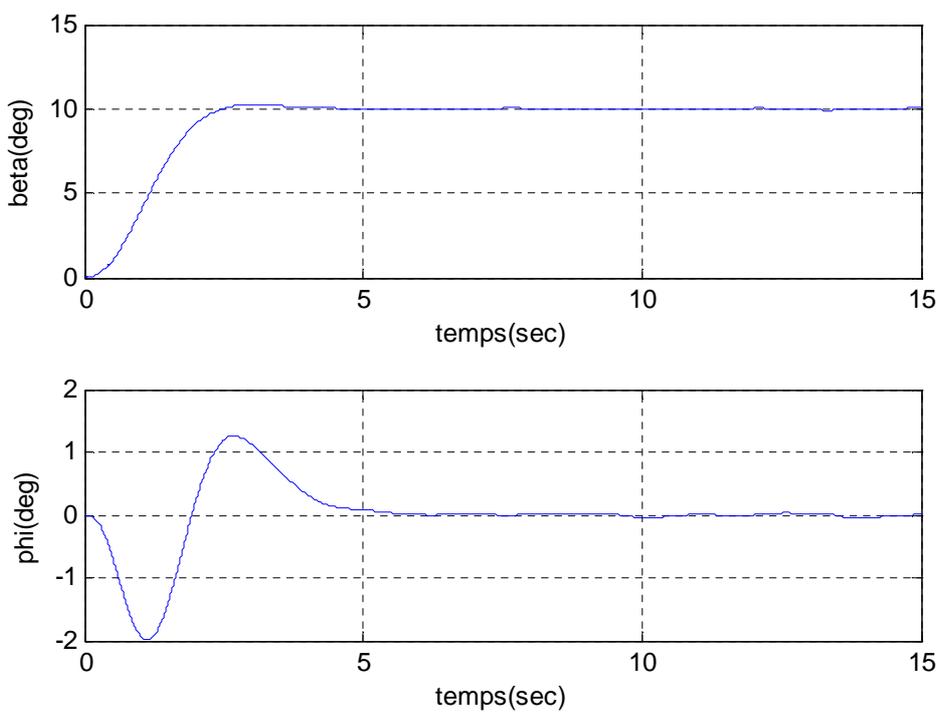
$$k_i = \begin{bmatrix} 7.8334 & -8.5202 \\ 4.9694 & -2.6130 \end{bmatrix}$$

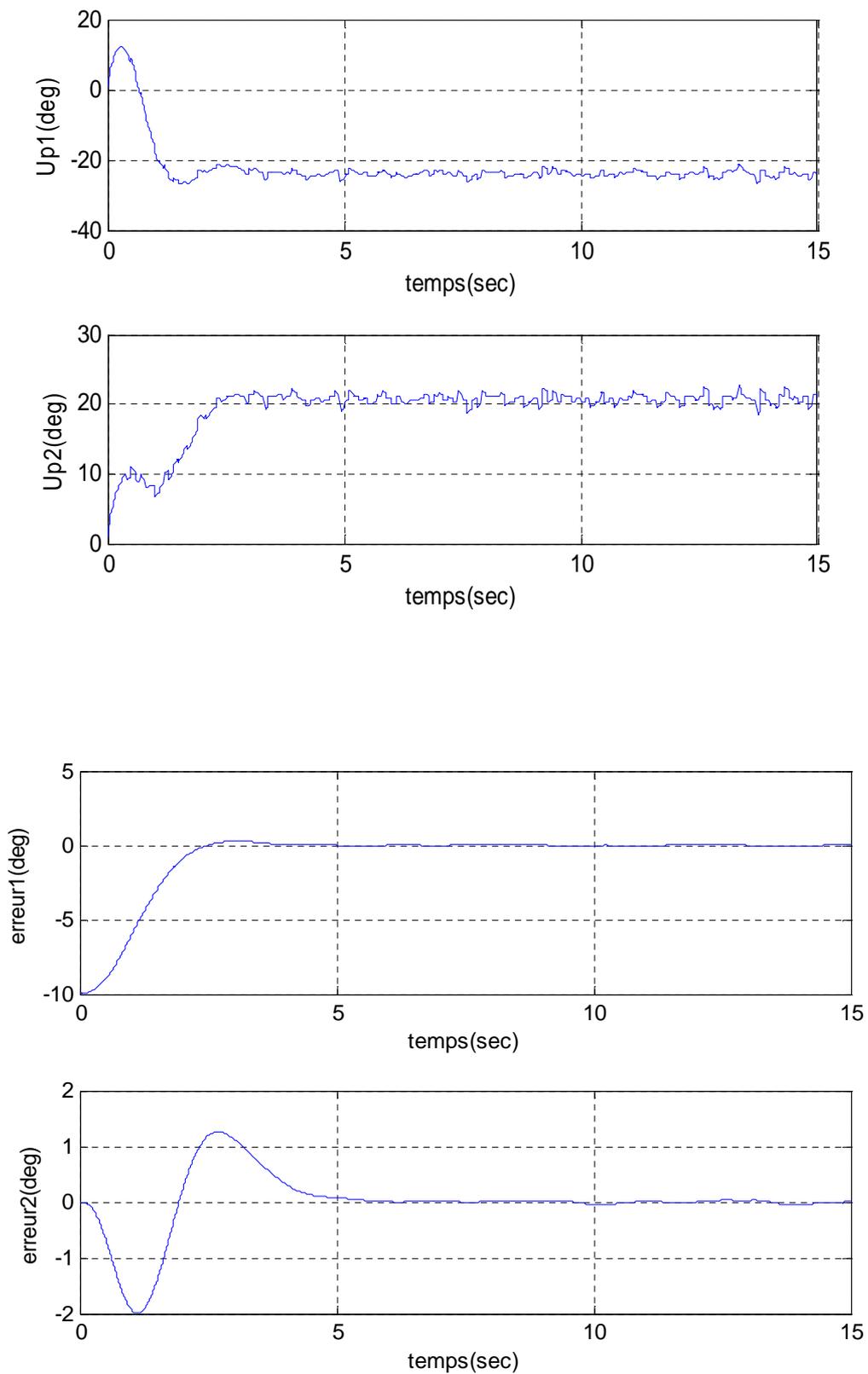




Fig(2.8) command par retour d'état avec action intégral pour P2

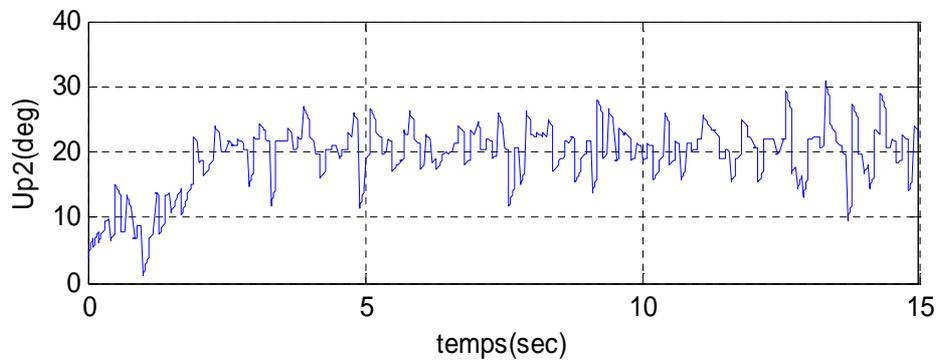
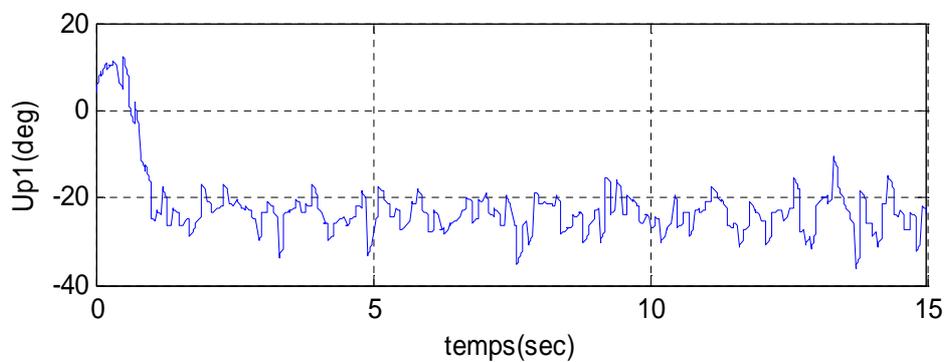
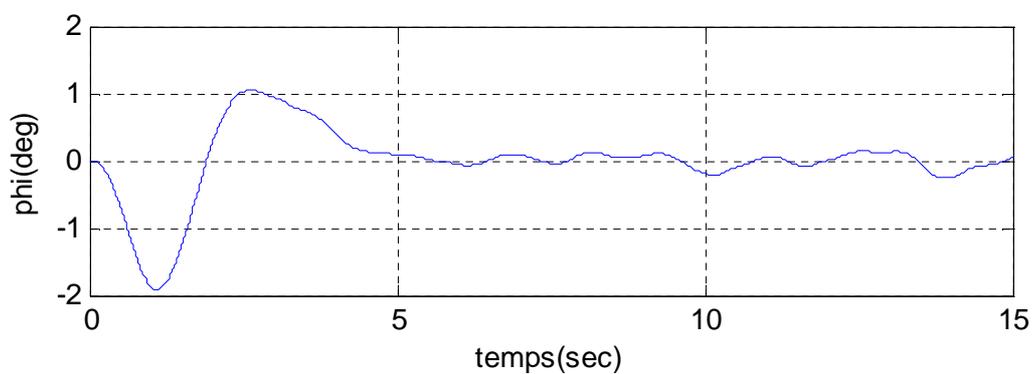
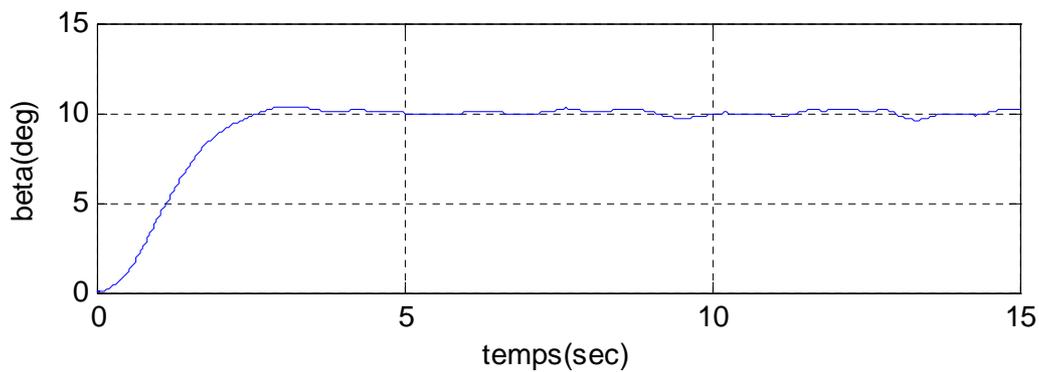
- Commande par retour d'état avec action intégral en présence de perturbation extérieur

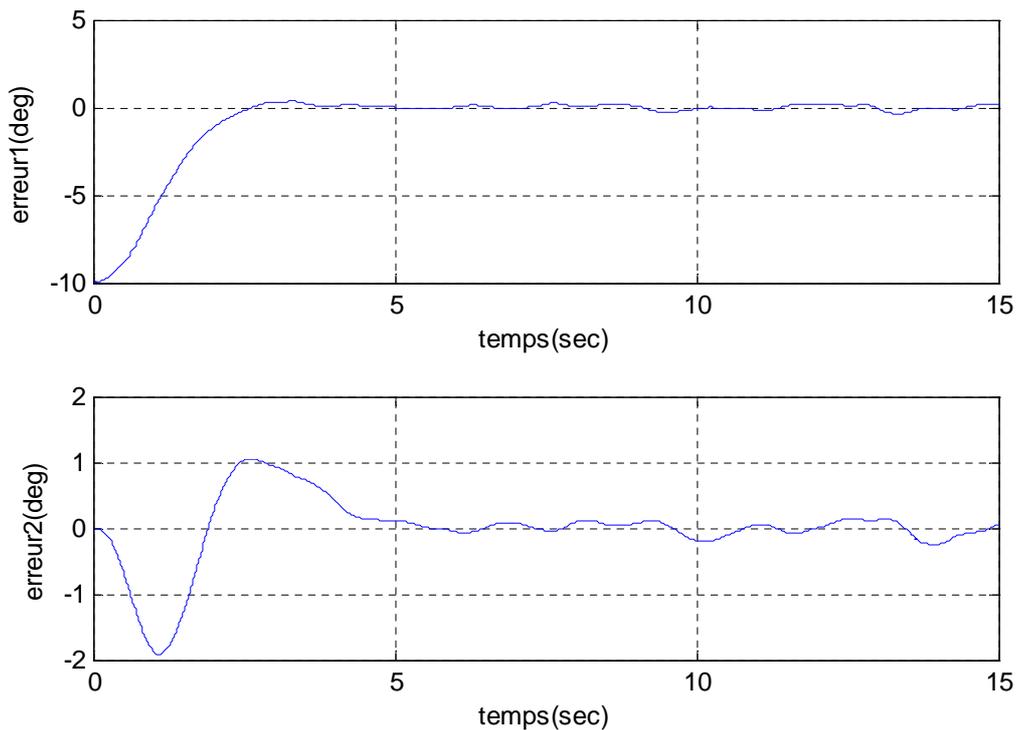




Fig(2 .9) :Commande par retour d'état a action intégrale avec perturbation pour

Variance = 0.01





Fig(2 .10) :Commande par retour d'état a action intégrale avec perturbation pour **Variance = 10**

4. CONCLUSION

Dans cette partie, on a étudié la synthèse de deux commandes classique lorsqu'elles sont appliquées à un système multi-variable soumis à une perturbation externe

A partir des résultats obtenus par simulation on peut dire que notre commande SFBIA est plus robuste que la commande par retour d'état du fait qu'elle fournit de meilleurs résultats. Ceci est dû à l'addition de l'intégrale d'erreur à la commande.

On n'a constaté que l'implémentation d'algorithmes de commande classique pour notre système présente des inconvénients qu'on peut résumer :

Les paramètres du système doivent être connus et supposes constants tout le long du domaine d'opération de la commande, Autrement dit, une variation de ces paramètres entrainera notre système a l'instabilité. D'où la nécessité de faire appel a des lois de commandes non-linéaire plus avancées qui permettront une meilleur adaptation de la commande au système pour avoir une meilleur poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence choisi

1. INTRODUCTION

La commande adaptative semble être ancienne, et même plus ancienne que la commande par retour d'état, seulement les chercheurs ne s'en sont intéressées qu'après 1950.

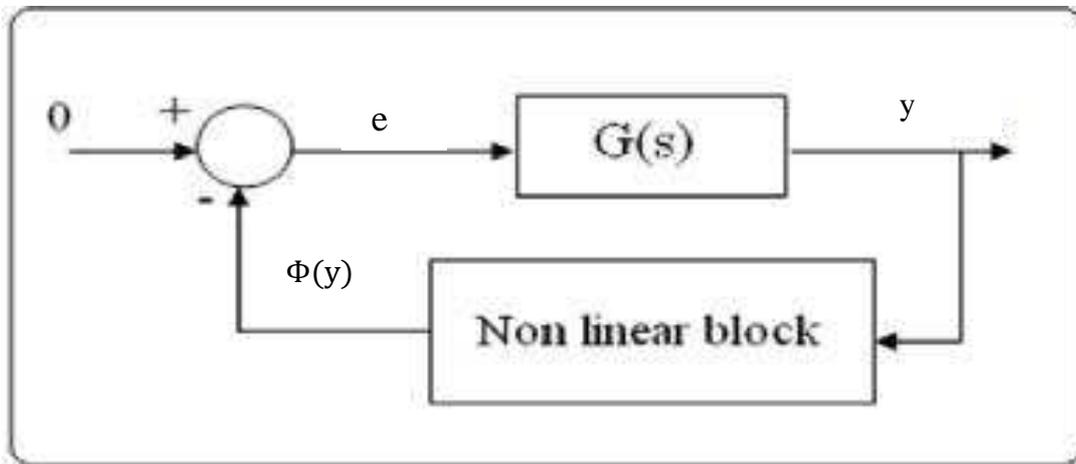
Parmi les différents types de la commande adaptative, le type a model de référence connue sous le nom de MRAS (model référence adaptative system) est l'un les plus importants grâce à sa facilite d'implémentation et à l'importance de sa vitesse d'adaptation. Dans ce type de commande, le modèle de référence est excité par les mêmes entrées que le processus. En terme d'entrées et états du modèle, celui-ci spécifie un critère de performances donne. Dans ce cas la comparaison entre critère désire et critère mesure est obtenue directement par la comparaison des sorties ou états du système de commande adaptative, à ceux du modèle de référence. La déférence est utilisée par le mécanisme d'adaptation, soit pour générer un signal axillaire a l'entrée, pour minimiser cette déférence soit pour modifier les paramètres du système d'adaptation.

La vitesse d'adaptation est l'un des avantages les plus importants .cette vitesse est dû à l'obtention immédiate de la différence entre les deux critères a partir de la comparaison entre les états du modèle et ceux du système. Par contre il faut avoir a priori, des informations sur la structure (parfois du modèle, et parfois du système lui-même) afin de pouvoir implanter ce type de commande

Dans ce chapitre, on va étudier la synthèse des commande adaptative avec un modèle de référence base sur les concepts de positivité et l'hyper-stabilité lorsqu'on fait subir au système différents sortes de perturbation extérieurs [24]

2. LA THEORIE DE L'HYPERSTABILITE

La théorie de l'hyper-stabilité a été introduite par Popov dans le but de généraliser les méthodes pour résoudre le problème de la stabilité absolue.



Fig(3.1) Diagram d'un system hyper-stable

$$\dot{x}(t) = Ax - b \phi(y) \tag{3.1}$$

$$y = C^T x \tag{3.2}$$

$$e = -\phi(y) \tag{3.3}$$

$\phi(y)$: représente la fonction du bloc non linéaire

et $G(s) = C^T[sI-A]^{-1}B$ la fonction de transfert du bloc linéaire

Il faut noter que la notion de stabilité absolue n'est autre que l'asymptotique stabilité au large des système définis par les équation (3.1) et (3.2)

Donc, popov a considéré la classe des systèmes non linéaires vérifiant les conditions suivantes :

$$n(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(y)^T y dt \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t_1 \geq t_0 \tag{3.5}$$

γ_0^2 : est une constante indépendante du temps.

L'inégalité (3.5) est appelée l'inégalité de Popov. [12] [19]

Donc, lorsque qu'un système en boucle fermée décrit par les équations (3.1) et (3.2) est globalement (asymptotiquement) stable pour toutes les chaînes de retour vérifiant l'inégalité de Popov (3.5), alors ce système en boucle fermée sera appelé (asymptotiquement) hyper-stable

Comme la chaîne de retour doit vérifier l'inégalité (3.5), alors les propriétés d'hyper-stabilité du système en boucle fermée vont dépendre de la chaîne directe, c-à-d le block linéaire. [12]

Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour que le système décrit par (3.1, 2,3) avec l'inégalité (3.5) vérifiée soit hyper-stable (ou g.a.s) est la suivante :

- La matrice de transfert $G(s) = C^T[sI - A]^{-1}b$ doit d'être positive réelle.
- Si $G(s)$ est strictement positive réelle alors le système est dite asymptotiquement stable (ou globalement asymptotiquement stable).

Donc la théorie de l'hyper-stabilité est très utilisée dans les systèmes adaptatifs avec application à la robotique, autopilote pour avions ...

En résumé ce concept donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer la stabilité .Il suffit d'examiner une fonction de transfert et vérifier l'inégalité de Popov .Il n'est donc pas nécessaire de rechercher une fonction de Lyapunov.

L'hyper-stabilité est plus facile à utiliser que les fonctions de Lyapunov et demeure ainsi un puissant outil d'analyse pour les systèmes NL. [19]

3. COMMANDE ADAPTATIVE

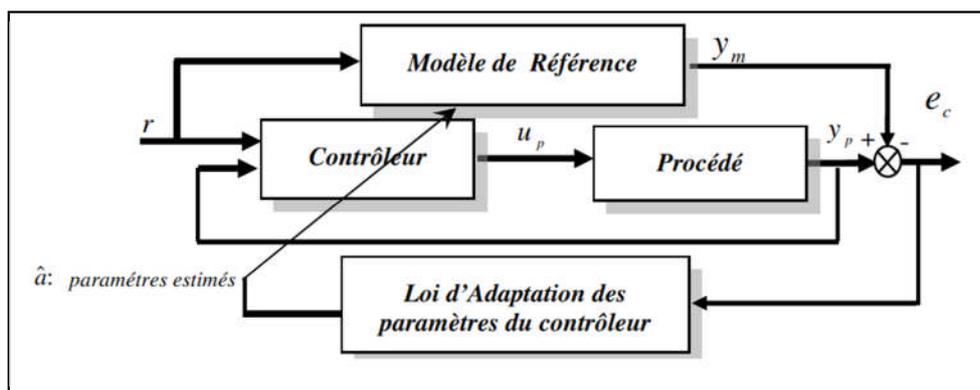
La commande adaptative est un ensemble des techniques utilisées pour l'ajustement automatique des régulateurs pour assurer les performances voulues quand les paramètres du système à contrôler sont inconnus et/ou variaient avec le temps .La commande adaptative peut être structurée selon les catégories suivantes :

- Approximations des stratégies de commande optimale stochastique (Duale)
- Systèmes de Commande Auto-ajustable (Self Tuning Control - S.T.C.)
- Commande Adaptative avec Modèle de Référence (MRAC).

3.1 COMMANDE ADAPTATIVE AVEC UN MODELE DE REFERENCE

3.1.1 Introduction

La commande adaptative directe à modèle de référence (MRAC) a été proposée pour la première fois en 1961 [22] se basant sur la minimisation d'un indice de performances, approche connue généralement sous la règle de conception du MIT [21]. La structure en boucle fermée du MRAC est représentée par la figure.3.2. En effet, la différence entre la sortie du procédé et la sortie du modèle de référence est une mesure de la différence entre les performances réelles et les performances désirées. Cette information est ensuite utilisée par le mécanisme d'adaptation pour ajuster les paramètres du régulateur afin de faire tendre l'erreur de comportement ou l'erreur de poursuite de trajectoire $e_c(t)$ vers zéro [20,23]. Cette technique demande souvent des algorithmes plus rapides et favorise une application en temps réel (cas de robots manipulateurs).



Fig(3.2) Schéma de principe de la commande MRAC

Des théories classiques comme celle de Lyapunov peuvent être employées pour atteindre ce but. La structure de la loi de commande est telle que le comportement du système bouclé soit stable et équivalent au modèle de référence, malgré la présence des dynamiques non modélisées et d'incertitudes paramétriques. Ce type de commande est appelé commande adaptative directe à modèle de référence.

3.2. CHOIX DU MODELE DE REFERENCE

Dans notre projet, le modèle de référence est choisi selon trois critères :

- La matrice d'état A_m est négative définie, pour assurer la stabilité et la contrôlabilité l'avion au même temps.
- Un dérapage induit par les ailerons est nul .pour assurer un virage correct.

- Une inclinaison φ induit par les gouvernes de direction est négative pour améliorer la stabilité statique .En respectant les trois critères cités ci-dessus, les matrices paramètres de l'équation d'état du modèle de référence : **[10] [13]**

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m \tag{3.6}$$

Que nous allons utiliser le long de notre travail seront égales a

$$A_m = \begin{bmatrix} -0.1432 & -1.2711 & 0.6487 & 0 \\ 1.066 & -1.4326 & 0.8104 & 0 \\ 0 & -0.3781 & -2.4242 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.0780 & -0.755 \\ -1.0762 & 1.553 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_m^t = [\beta_m p_m X_m \phi_m], U_m^t = [U_{m1} U_{m2}]$$

3.3 SYNTHESE DES LOI DE COMMANDE ADAPTATIVE AVEC UN MODELE DE REFERENCE (MRAC) POUR LE MODE LATERAL

3.3.1 MRAC SANS PERTURBATION EXTERIEUR

Concèderons un système physique décrit par les équations d'état suivantes:

$$\dot{X}_p = A_p X_p + B_p U_p \tag{3.7}$$

$$Y_p = C_p X_p \tag{3.8}$$

Avec

X_p : vecteur d'état de dimension (n)

U_p : vecteur de commande de dimension (m)

A_p : Matrice de dimension (nxn)

B_p : Matrice de dimension (nxm)

n=4 : nombre de ligne de la matrice A_p

m=2 : nombre de colonne de la matrice B_p

Le modèle de référence étant décrit par :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m \tag{3.9}$$

$$Y_m = C_m X_m \tag{3.10}$$

Avec A_m : Matrice de dimension (nxn) négative définie.

La dynamique de l'erreur :

$$X_e = X_m - X_p \quad (3.11)$$

Est régit l'équation d'état suivante:

$$\dot{X}_e = A_m X_e + (A_m - A_p) X_p + B_m U_m + B_p U_p \quad (3.12)$$

D'après les conditions d'erzerberger[13]

$$A_m - A_p = B_p B_p^+ + (A_m - A_p) \quad (3.13)$$

$$B_m = B_p B_p^+ B_m \quad (3.14)$$

Ou

$$B_p^+ = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T : \text{Pseudo inverse gauche de Penros}$$

On remplace les équations (3.13) et (3.14) dans l'équation (3.12) on obtient :

$$\dot{X}_e = A_m X_e - B_p [B_p^+ + (A_m - A_p) X_p - B_p^+ B_m U_m + U_p] \quad (3.15)$$

$$\dot{X}_e = A_m X_e - B_p \Phi \quad (3.16)$$

$$Y_e = C_e X_e \quad (3.17)$$

Avec:

$$\Phi = B_p^+ + (A_m - A_p) X_p - B_p^+ B_m U_m + U_p \quad (3.18)$$

La méthode de l'hyper-stabilité a la synthèse des lois de commandes adaptatives consiste à ramener le problème de synthèse a un problème d'hyper-stabilité. En effet, on cherche à élaborer un mécanisme d'adaptation des paramètres variables de façon à ce que les systèmes de commande adaptative soit asymptotiquement stable c'est-à-dire l'erreur X_e tend vers zéro en régime permanent

Donc il suffit de choisir les éléments variables de système linéaire de façon à ce que sa fonction de transfert soit strictement réelle positive de façon à ce que le bloc de contre réaction a caractéristique non linéaire vérifie l'inégalité de Popov [19] [12]

3.3.1.1 FORME PROPORTIONNEL(P)

Soit la commande suivante : [10]

$$U_p = K_x X_p + K_u U_m \quad (3.19)$$

On applique l'inégalité de Popov:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(y_e)^T y_e dt \geq -y_0^2 \quad (3.20)$$

En remplaçant l'équation (3.18) dans l'équation (3.20), on obtient:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [K_x - B_p^+ + (A_m - A_p)]X_p + (K_u - B_p^+ B_m)U_m \}^T y_e dt \geq -y_0^2 \quad (3.21)$$

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X_p [K_x - B_p^+ + (A_m - A_p)]^T y_e + U_m^T (K_u - B_p^+ B_m)^T y_e \} dt \geq -y_0^2 \quad (3.22)$$

Une solution qui vérifie cette dernière équation (3.21) est la suivante :

$$[K_x - B_p^+ + (A_m - A_p)]^T = \alpha (X_e Y_e^T)^{2n-1} \quad (3.23)$$

$$(K_u - B_p^+ B_m)^T = \beta (U_m Y_e^T)^{2n-1} \quad (3.24)$$

α : Matrice strictement positive définie de dimension (nxn)

β : Matrice strictement positive définie de dimension (mxm)

Si n=0 alors, on peut déduire K_x, K_u de l'équation (3.23) et (3.24)

On écrit :

$$K_x = B_p^+ (A_m - A_p) + Y_e X_p^T \alpha^T \quad (3.25)$$

$$K_u = B_p^+ B_m + Y_e U_m^T \beta^T \quad (3.26)$$

3.3.1.2 FORME PROPORTIONNELLE INTEGRATEUR(PI)

On définit la forme de la commande U_p comme se suit :

$$U_p = K_r * r = [K_u K_x] [X_p U_m]^T \quad (3.27)$$

Le gain K_r est la somme du gain intégrateur et proportionnelle c'est -à -dire

$$K_r = K_p + K_i \quad (3.28)$$

$$\text{Avec} \quad K_p = Y_e r^T \beta' \geq 0 \quad (3.29)$$

$$K_i = \dot{Y}_e r^T \alpha' \quad (3.30)$$

$$K_i \bullet (t) = K_{i0} \quad (3.31)$$

$$Y_e = C_e (X_m - X_p) \quad (3.32)$$

Ou α, β sont des matrices (n x n) invariant dans le temps et K_{i0} est le gain de l'intégrateur initial.

L'équation (3.18) peut s'écrire donc,

$$\phi = [B_p^+ (A_p - A_m) - B_p^+ B_m] [X_p U_m]^T + U_p = (L_r + K_r) r \quad (3.33)$$

$$\text{Avec} \quad K_r = [K_x, K_u] \quad (3.34)$$

$$L_r = [B_p^+ (A_p - A_m), -B_p^+ B_m] \quad (3.35)$$

On applique le critère Popov, on obtient :

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [L_r + K_r]^T Y_e dt \geq -y_0^2 \quad (3.36)$$

En remplaçant les équations (3.28, 29, 30,31) dans l'équation (3.36) cette dernière s'écrira donc

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} r^t \left[L_r^T + \int_0^t Y_e r^T \alpha_2 d\tau \right]^T Y_e dt + \int_{t_0}^{t_1} r^T \beta_2^T r Y_e^T Y_e dt \geq -y_0^2 \quad (3.37)$$

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} r^t \alpha_2^T \left[\alpha_2^{-1} L_r^T + \int_0^t r Y_e^T d\tau \right] Y_e dt + \int_{t_0}^{t_1} r^T \beta_2^T r Y_e^T Y_e dt \geq -y_0^2 \quad (3.38)$$

La dernière équation (3.37) est vérifiée si :

$$\alpha_2^T > 0 \quad \text{et} \quad \beta_2^T \geq 0$$

L'erreur X_e est asymptotiquement stable si et seulement si :

• La fonction de transfert $G(s) = C_e (sI - A_m)^T B_p$ est strictement positive réelle

$$\alpha'^2 > 0 \quad \text{et} \quad \beta'^2 \geq 0 \quad [14]$$

3.3.2 MRAC AVEC PERTURBATION EXTERIEUR

De la même façon que pour le MRAC sans perturbation extérieure. Cependant il suffit de connaître la valeur maximale de la perturbation. considérons le système physique décrit par les équations d'état suivantes :

$$\dot{X}_p = A_p X_p + B_p U_p + D \quad (3.39)$$

$$Y_p = C_p X_p \quad (3.40)$$

Où D représente la perturbation extérieure qui affecte le système considéré

4. CONCLUSION

La commande adaptative avec un modelé de référence (MRAC) a connu mainte application industrielle et surtout dans le domaine de l'aéronautique. En effet la convergence de tel algorithme est liée à une condition de positivité concernant soit une matrice soit une fonction de transfert.

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous utilisons la programmation dans le langage MATLAB (SIMULINK). Simuler la réponse de notre système (avion) par la Commande adaptative avec un modèle de référence (MRAC) le signal de référence est choisi égale à 10 degrés

2. DEFINITION DU SIMULINK

Simulink est une plate-forme de simulation multi-domaine et de modélisation de systèmes dynamiques. Il fournit un environnement graphique et un ensemble de bibliothèques contenant des blocs de modélisation qui permettent le design précis, la simulation, l'implémentation et le contrôle de systèmes de communications et de traitement du signal. **Simulink** est intégré à MATLAB, fournissant ainsi un accès immédiat aux nombreux outils de développement algorithmique, de visualisation et d'analyse de données de MATLAB. [3]

3. COMMANDE MRAC SANS PERTURBATION

On applique une commande adaptative avec un modèle de référence sans aucune perturbation extérieure avec une forme Proportionnelle du gain de commande. Pour différentes valeurs de α et β .

Comme il a été procédé pour les commande classiques, étudiées dans le deuxième chapitre. Nous allons simuler pour la commande adaptative avec modèle de référence MRAC, la réponse de notre système.

Pour cela, le signal de référence choisi $r(t)$ est toujours un signal échelon d'amplitude 10 degré

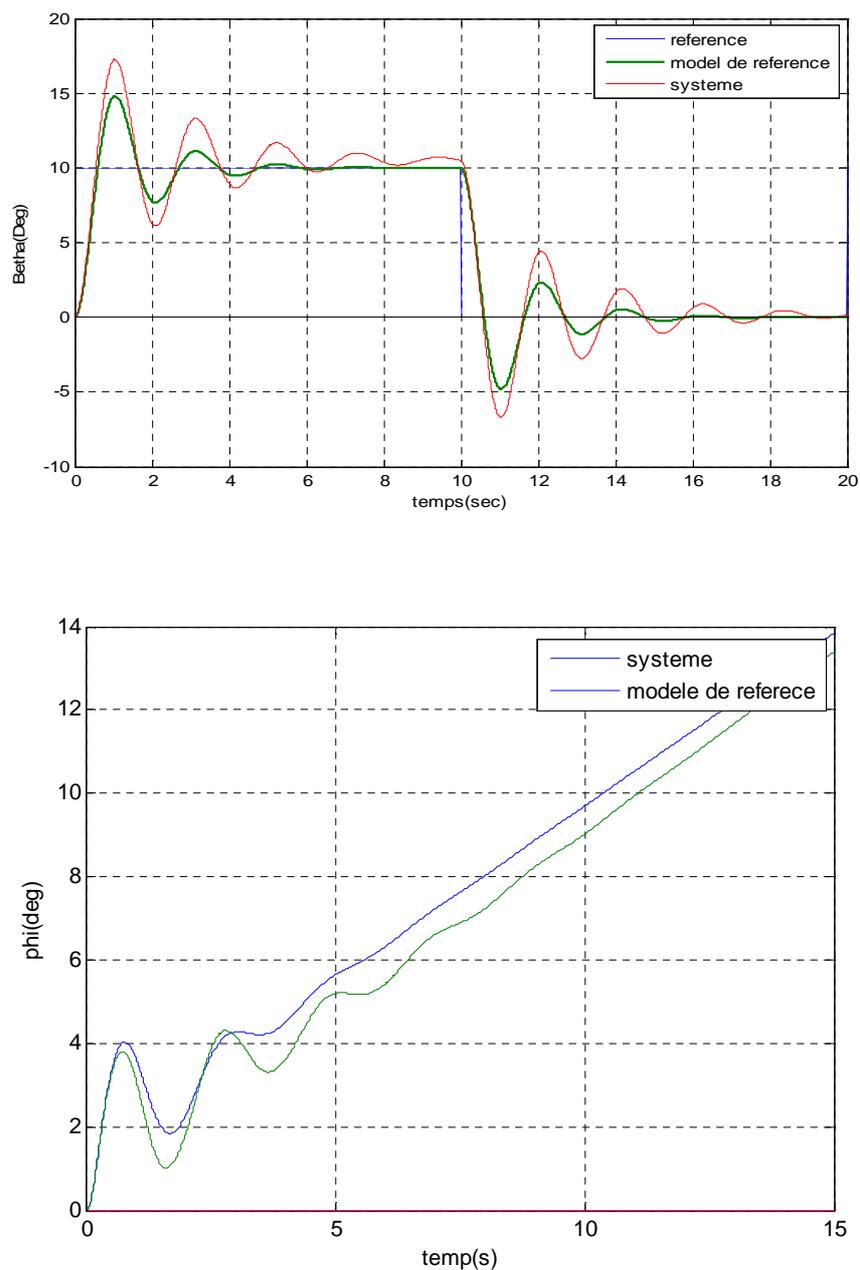
Il est à rappeler aussi, que l'état de notre système (l'angle β et φ) est sensé suivre l'état désire défini par le modèle de référence linéaire et non pas le signal de référence.

Les simulations effectuées, deux angles d'avion (β et φ), deux commande (Up_1, Up_2) et une erreur de sortie Y_e

3.1. COMMANDE MRAC PROPORTIONNELLE (P)

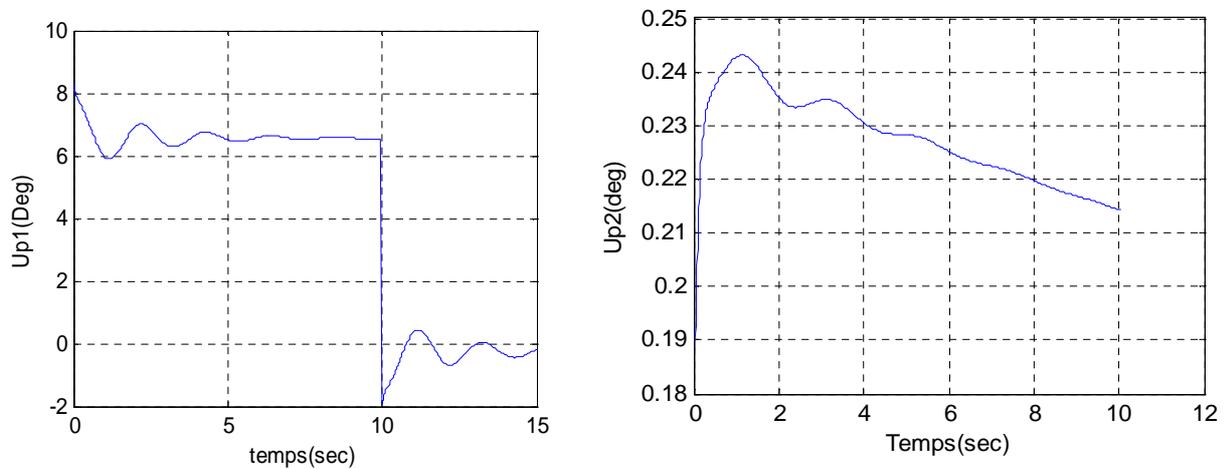
On applique une commande adaptative avec un modèle de référence sans aucune perturbation extérieure avec une forme Proportionnelle du gain de commande. Pour différentes valeurs de α et β .

Premièrement on choisi $\beta = 0$; $\alpha = 0$ est on obtient les signaux suivant



Fig(4.1) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC sans action intégrale Avec α et $\beta=0$

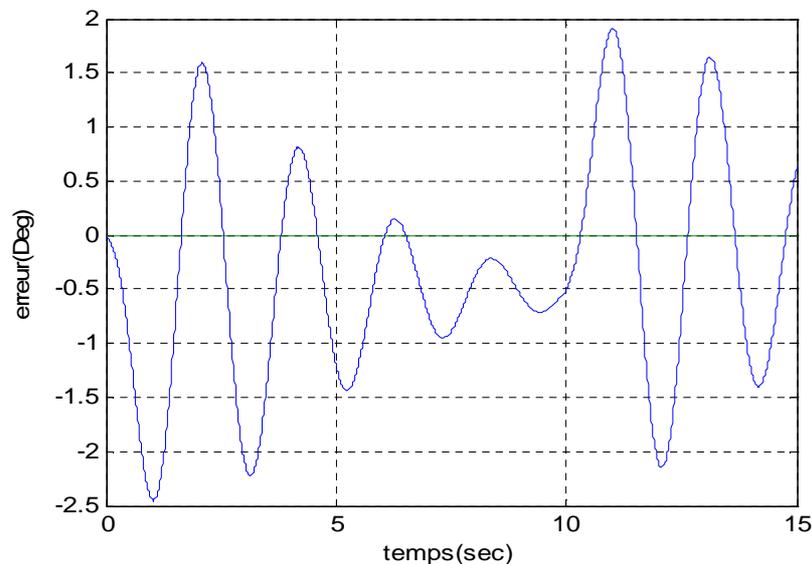
- Dans la figure 4.1 on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du système ne suivent pas le modèle de référence (β_m, φ_m)



Fig(4.1.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons

Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec α et $\beta=0$

- les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont bornées la fréquence d'oscillation est très faible (commandes lisse)

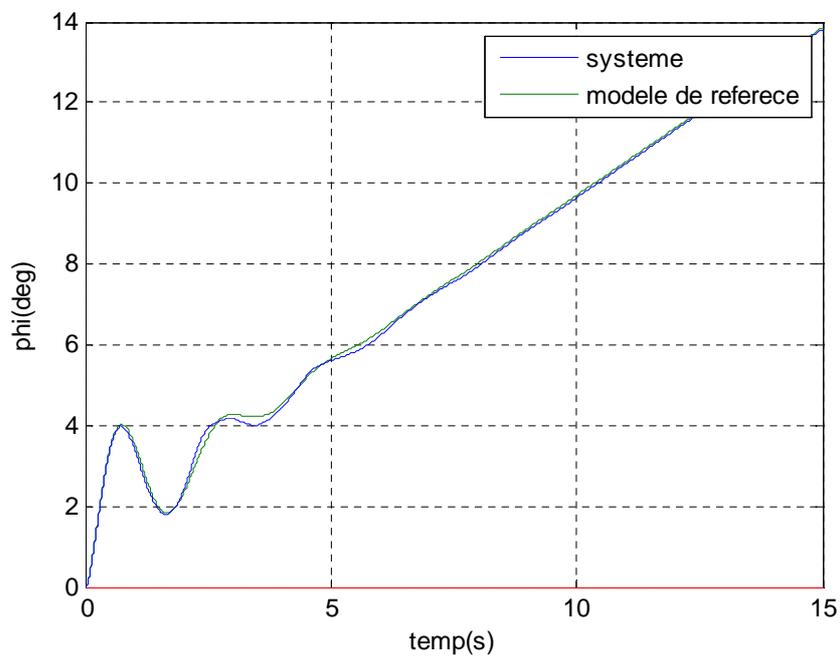
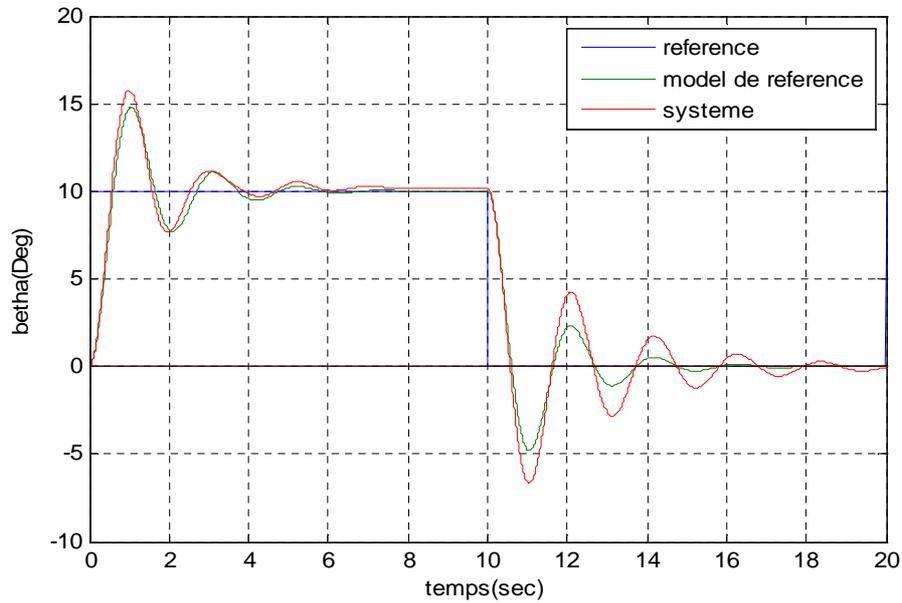


Fig(4.1.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- Comme la sortie de système ne suit pas le modèle de référence donc il y a une erreur important

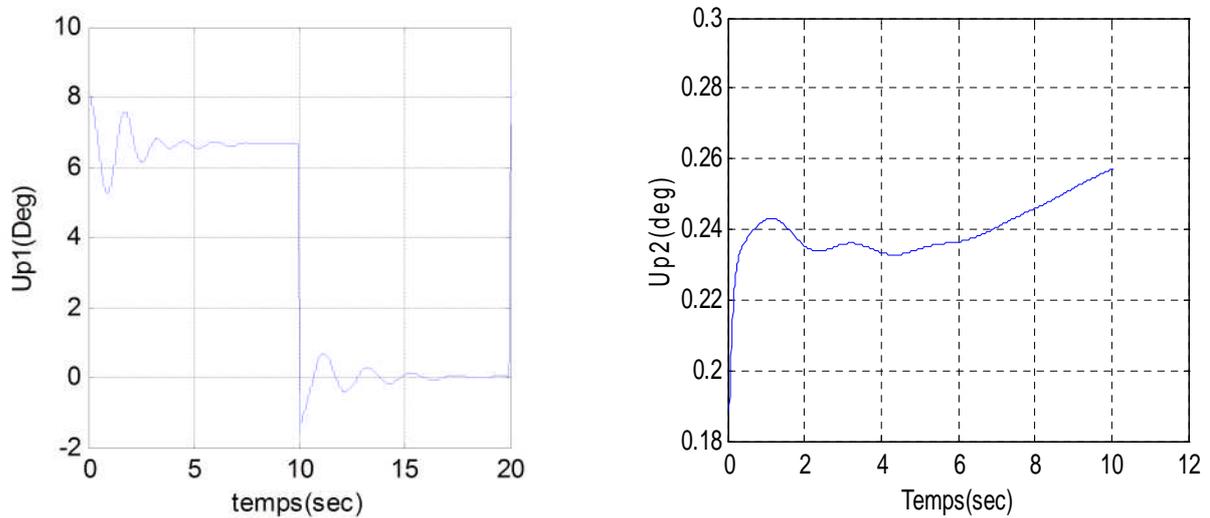
Nous essayons de changer un peu les valeurs de α et β et on prenant le cas suivant :

Pour $\beta = 0 ; \alpha = 0.001 I_{4 \times 4}$ on obtient :



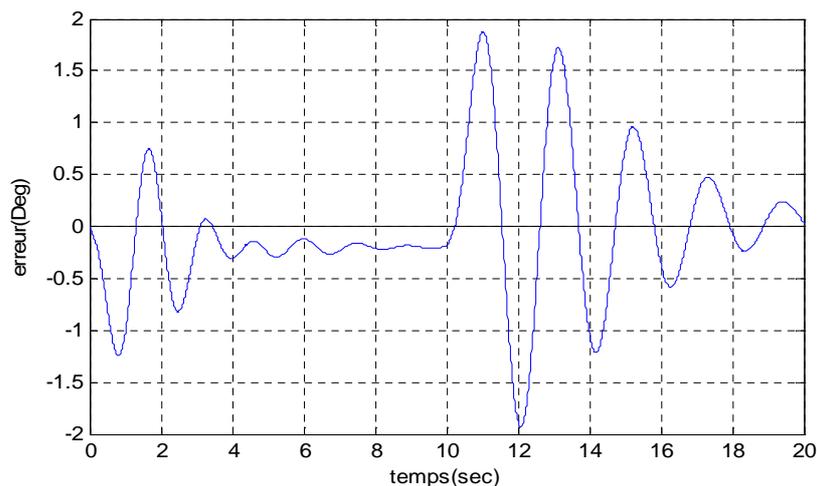
Fig(4.2) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.001$ et $\beta=0$

- Dans la figure 4-2 on remarque la même chose que la figure précédente on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du système ne suivent pas le modèle de référence (β_m, φ_m) pour



Fig(4.2.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.001$ et $\beta=0$

- Les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont bornées la fréquence d'oscillation est très faible (commandes lisse).



Fig(4.2.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- Comme la sortie de système ne suit pas le modèle de référence donc il y a une erreur important

Nous essayons de changer un peu les valeurs de α et β et on prenant le cas suivant :

Pour $\beta = 0.001. I_{2 \times 2}$; $\alpha = 0$

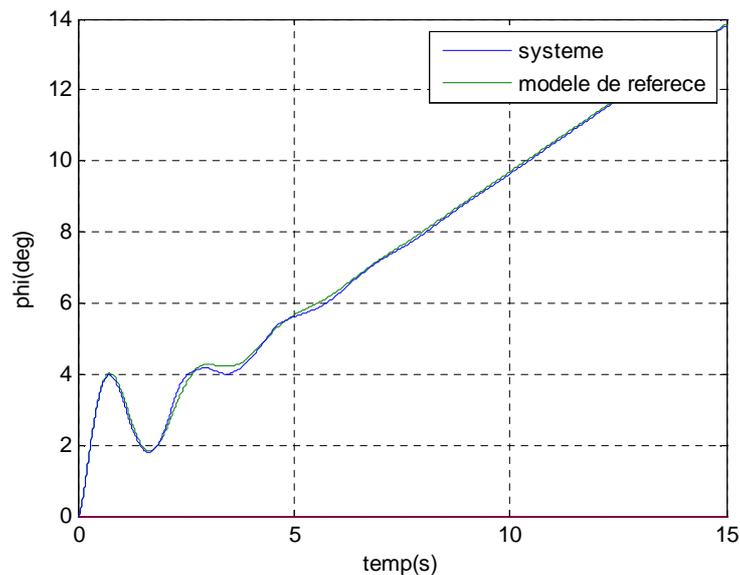
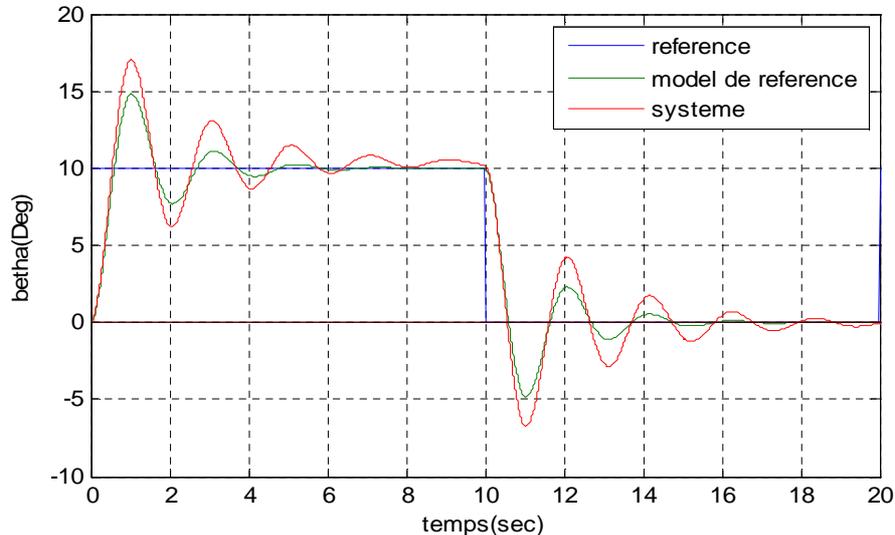
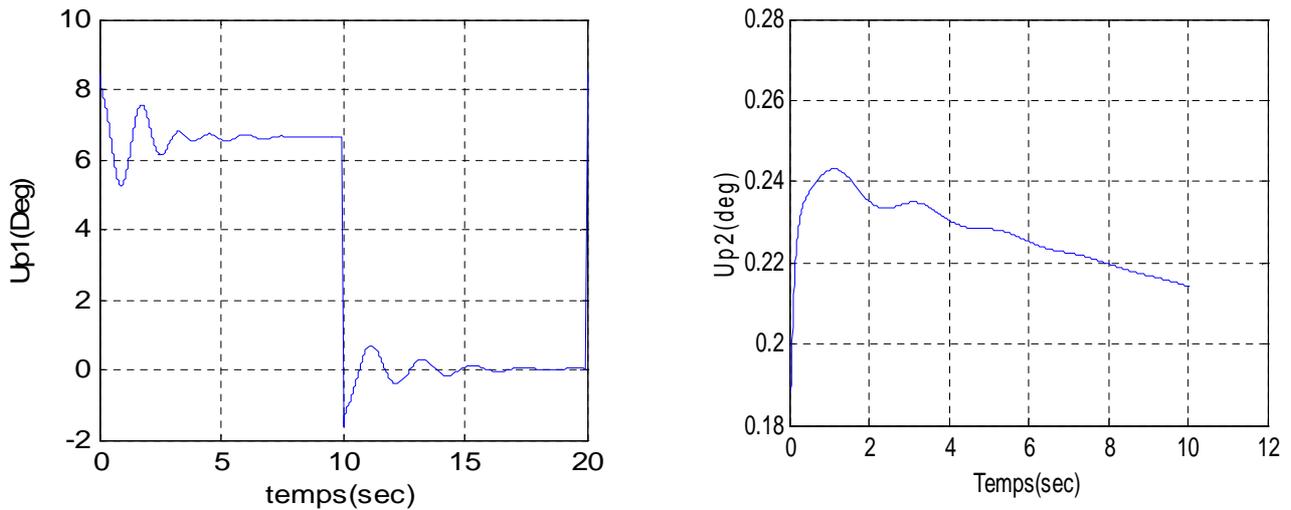


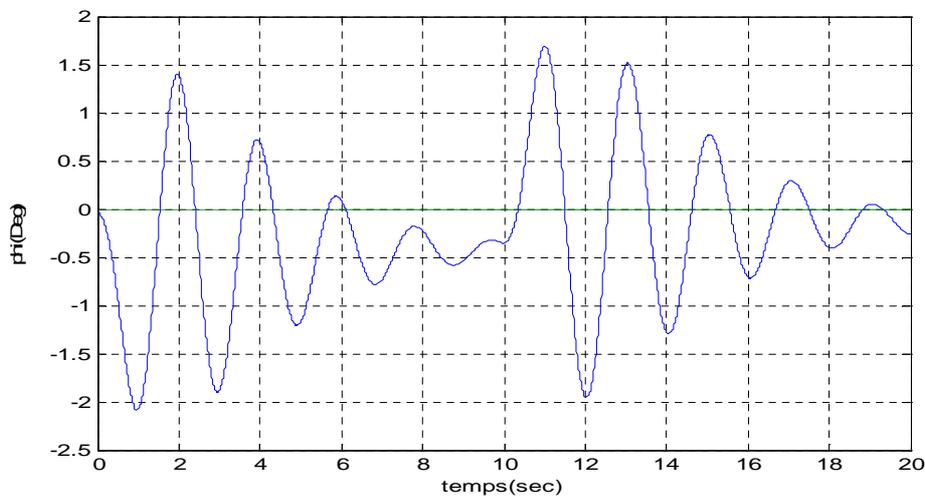
Fig (4.3) Le temps de réponsed'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0$ et $\beta=0.001$

- Dans la figure 4-3 on remarque la meme chose que la figure précédent ,on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du systeme ne suive pas le modèle de référence (β_m, φ_m).



Fig(4.3.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0$ et $\beta=0.001$

- Les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont bornées la fréquence d'oscillation est très faible (commandes lisse).

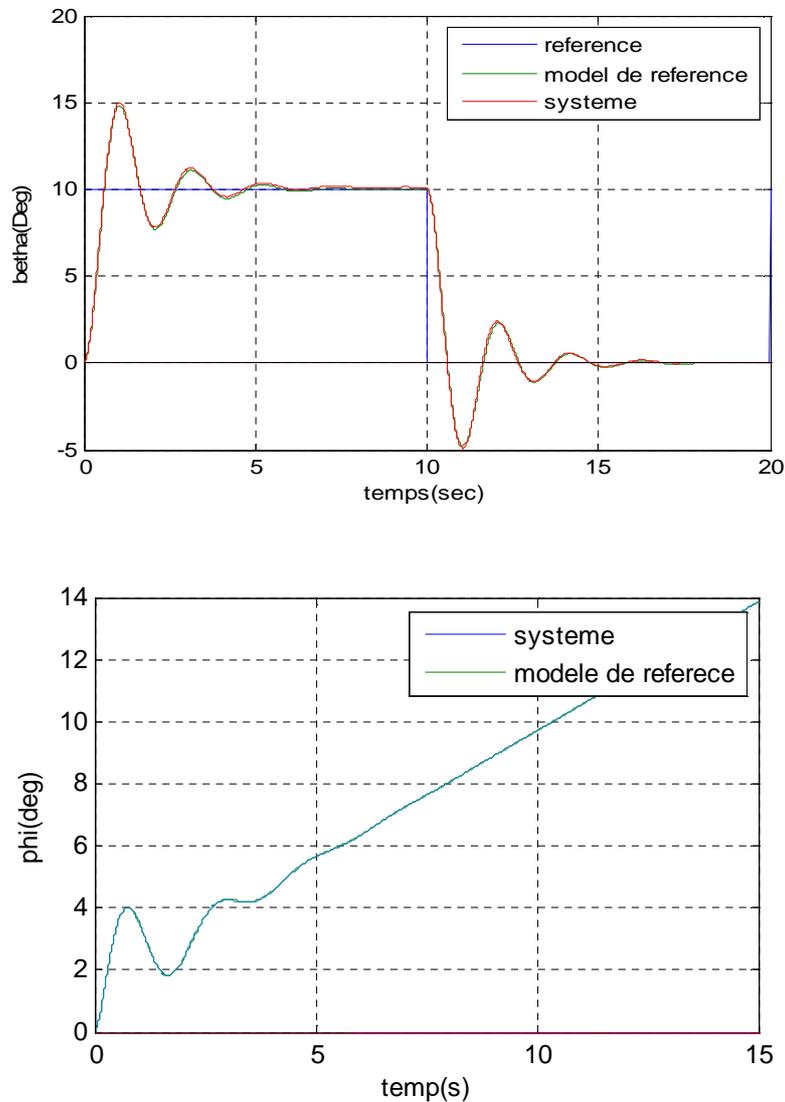


Fig(4.3.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle.

- Comme la sortie de système ne suit pas le modèle de référence donc il y a une erreur important.
- On remarque que dans le cas où les paramètres α et β sont nulle ou bien l'un des Paramètres est nulle les commande est bornées et lisses mais la sortie de système ne suit pas le modèle de référence avec une erreur important.

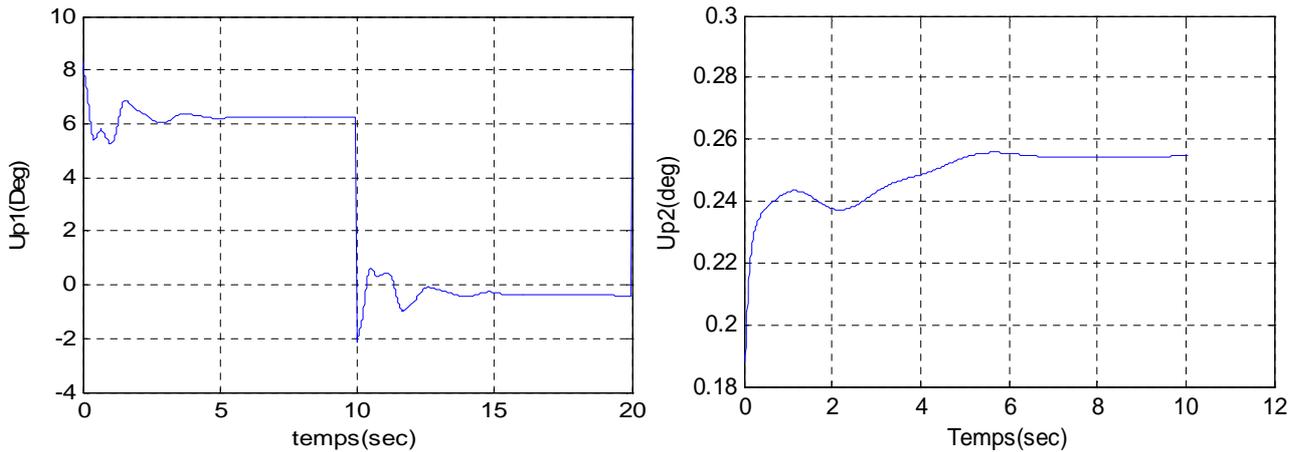
Maintenant on prendre le cas où les paramètres ne sont par nulle par exemple :

Pour $\beta = 0.01.I_{2 \times 2}$; $\alpha = 0.01.I_{4 \times 4}$



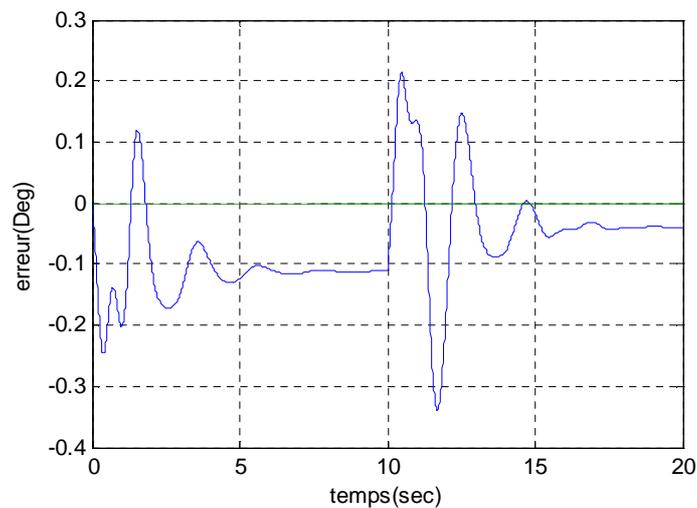
Fig(4.4) Le temps de réponsed'angle de dérapageet d'inclinisation de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha=0.01$ et $\beta=0.01$

- On remarque que le signal de sortie suit le modèle de référence (βm , φm) avec une erreur petite et constante, on peut dire que $\alpha = 0.01.I$ et $\beta = 0.01.I$ sont des bon choix.



Fig(4.4.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC sans action intégrale Avec $\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.01$

- les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont bornées la fréquence d'oscillation est très faible (commandes lisse)



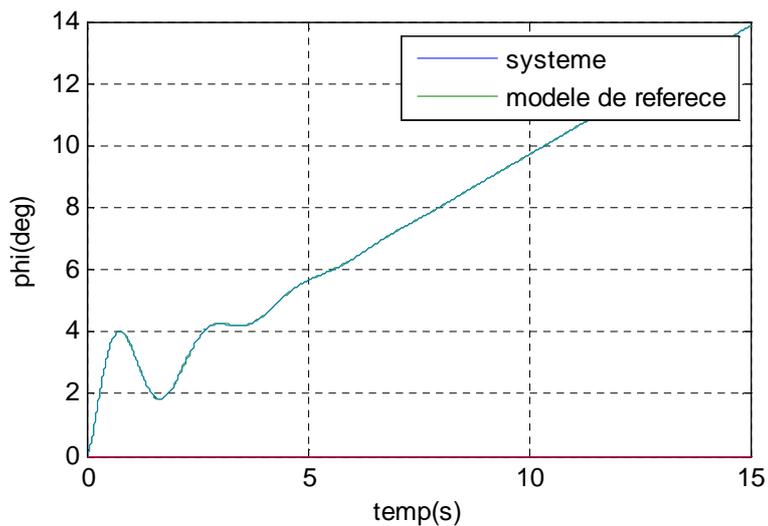
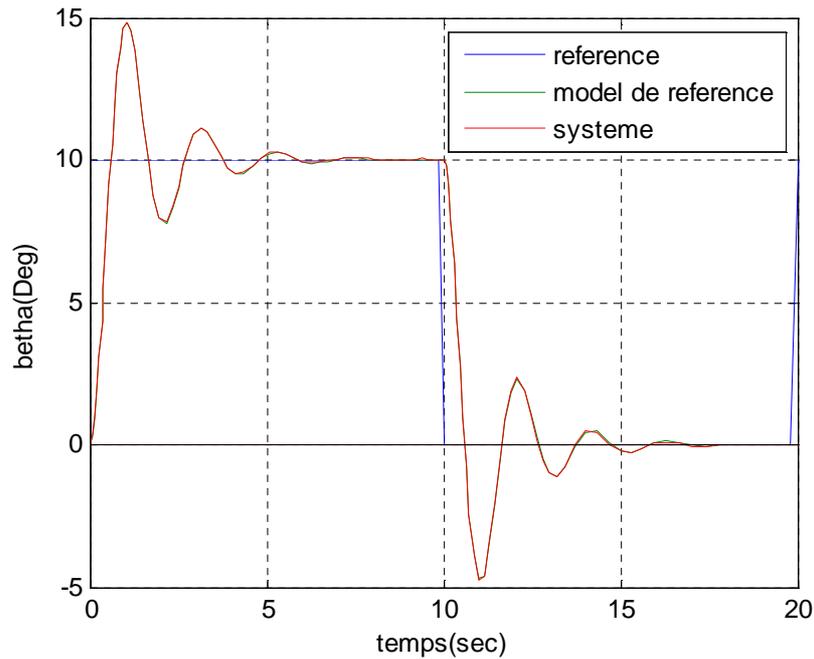
Fig(4.4.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- Dans ce cas l'erreur est très petite mais non pas nulle.
- On remarque aussi que le signal de sortie suit le modèle de référence ($\beta m, \varphi m$) avec une erreur constante pour un bon choix des constants $\alpha = 0.01.I$ et $\beta = 0.01.I$, les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont bornées la fréquence d'oscillation est très faible (commandes lisse).

3.2. COMMANDE MRAC AVEC ACTION INTEGRALE(PI)

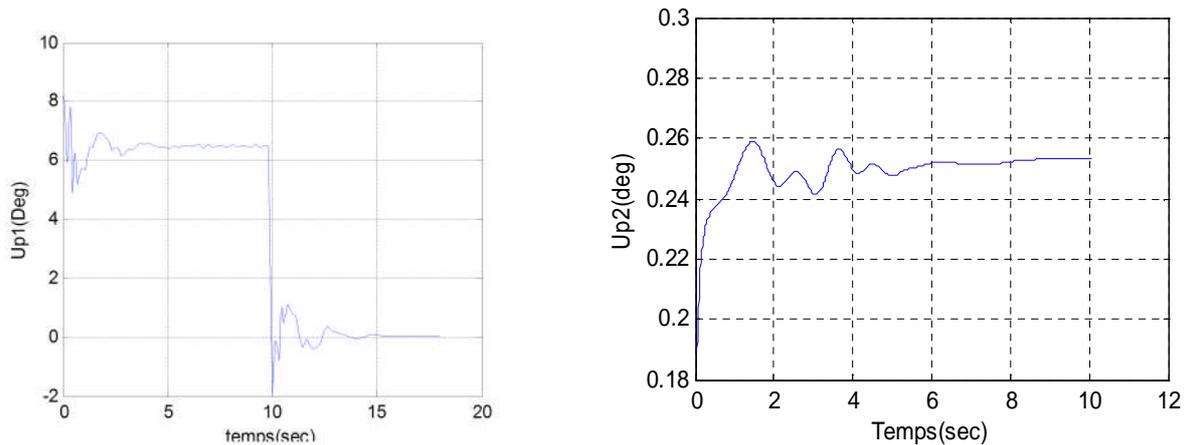
On applique une commande adaptative avec un modèle de référence sans aucune perturbation extérieure avec une forme Proportionnelle Intégrateur du gain de commande. Pour les bonne choix des valeurs de α et β

avec $\beta' = 0.001 \cdot I_{2 \times 2}$; $\alpha' = 0.001 \cdot I_{4 \times 4}$



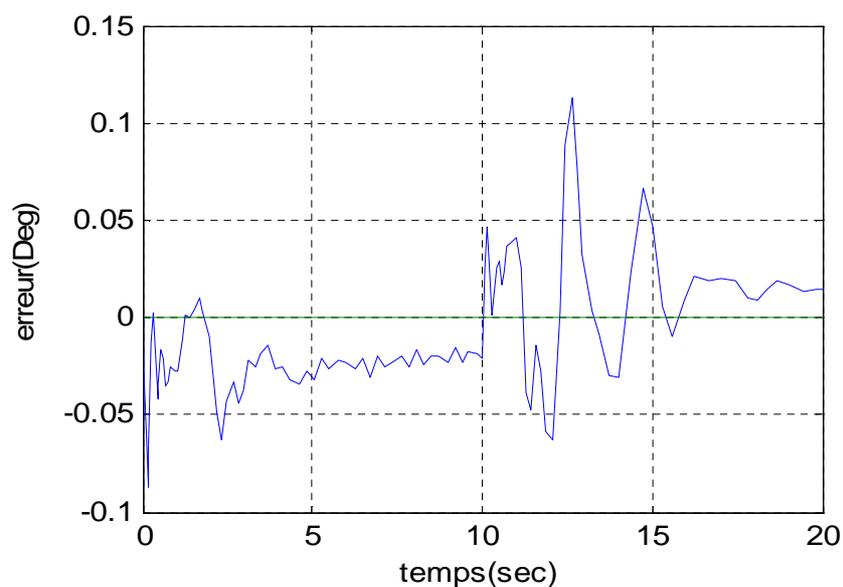
Fig(4-5) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec action intégrale(PI) Avec $\alpha'=0.001$ et $\beta'=0.001$

- Observe une très bonne poursuite du modèle de référence par le signal de sortie car l'effet de d'intégrateur joue un rôle très important pour obtenir une meilleure performance transitoire.



Fig(4-5.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec action intégrale Avec α' et $\beta'=0.001$

- les commandes sont bornées mais présentent des variations d'amplitudes.



Fig(4.5.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- L'erreur entre le modèle et la sortie est très négligeable (valeur maximale de l'ordre de 0.06 degré) mais ne s'annule pas tout à fait, donc cette erreur bornée

4. COMMANDE MRAC AVEC UNE PERTURBATION EXTERIEURE

On applique une commande adaptative avec un modèle de référence MRAC avec perturbation extérieure par exemple (signal aléatoire et signal aléatoire uniforme) on prend les bonnes valeurs de ϵ et β .

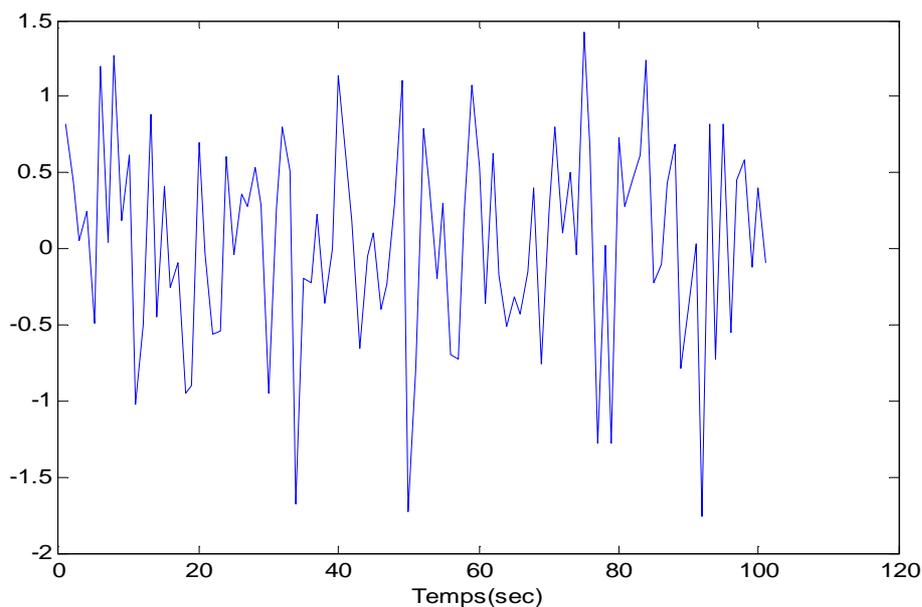
On prendre deux types de perturbations :

Perturbations aléatoire (Random number)

Perturbations aléatoire uniforme (Uniforme random number)

4.1 PERTURBATIONS ALEATOIRE GAUSSIENNE (Random number)

Le bloc à nombre aléatoire produit des nombres aléatoires normalement distribués. Pour se produire uniformément a distribué des nombres aléatoires, emploient le bloc à nombre aléatoire uniforme.



Fig(4.6) signal aléatoire

On varie dans ce cas la variance de bloc à nombre aléatoire de tel façons que l'erreur tend vers zéro et le signal de sortie suite le modèle de référence sont aucun perturbations

Pour la valeur de Variance = 0.01

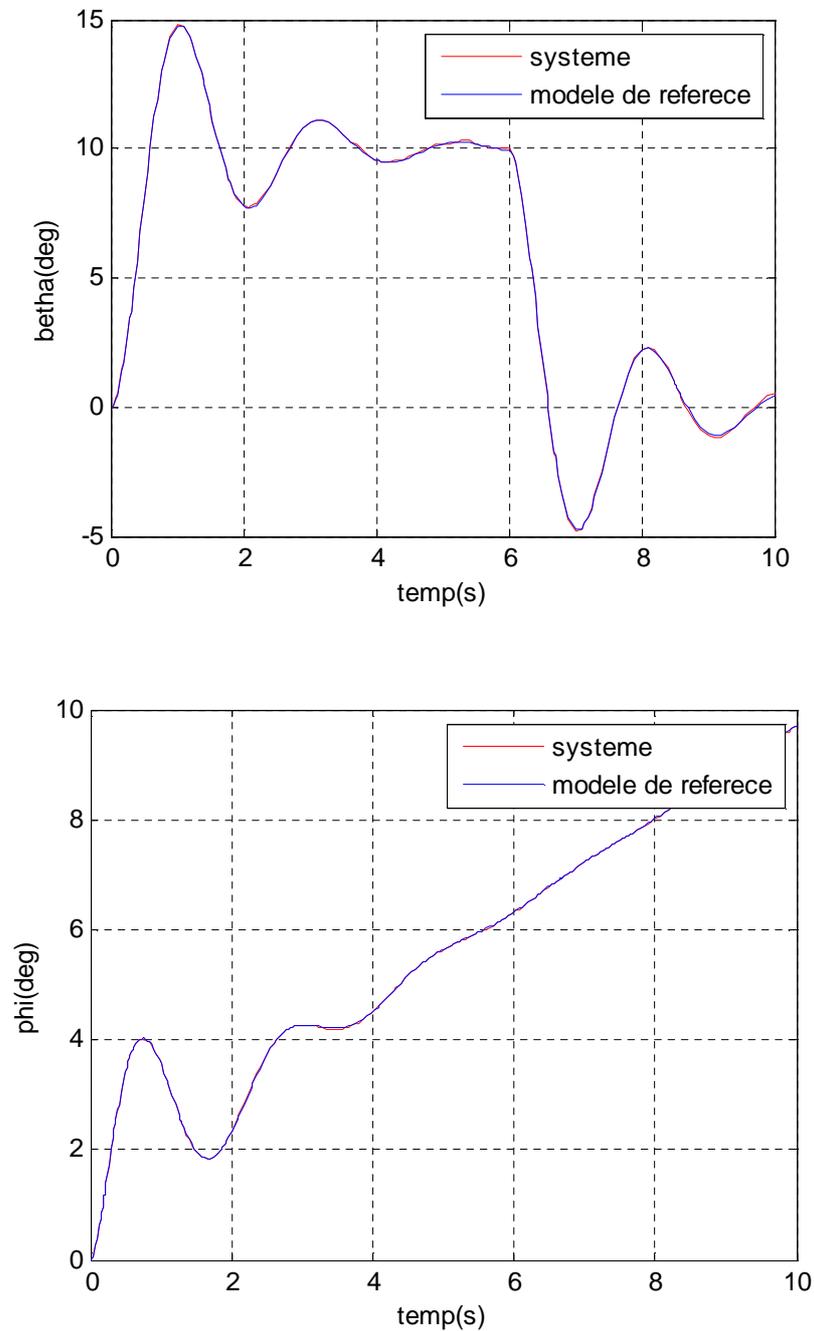
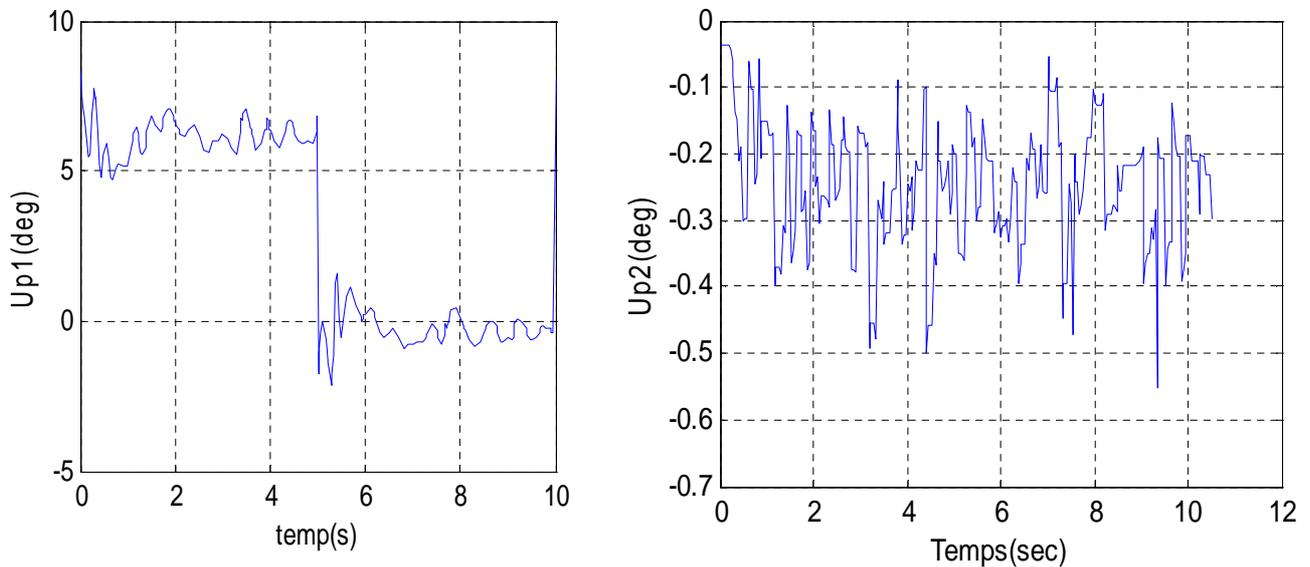


Fig (4.7) Le temps de réponsed'angle de dérapageet d'inclinsation de la commande MRAC

Variance = 0.01 :

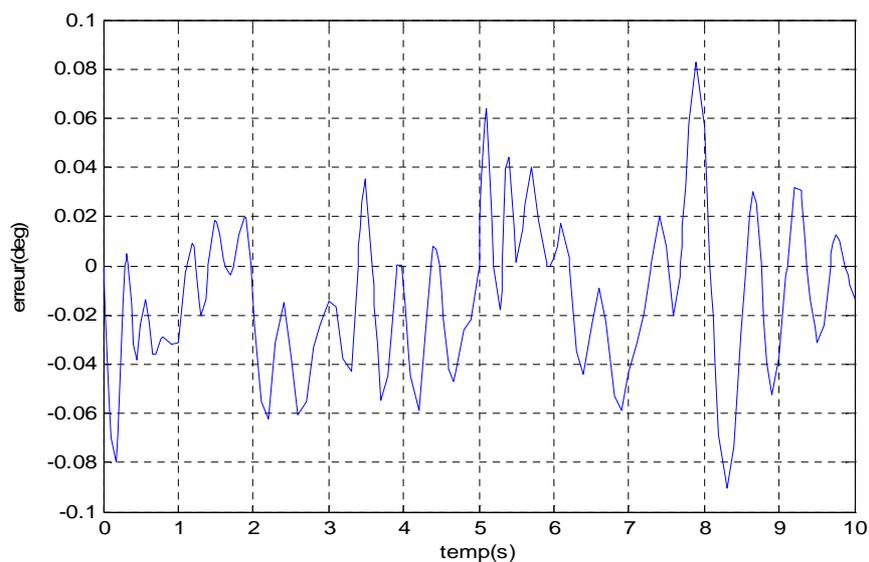
- on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du système suit le modèle de référence (β_m, φ_m) avec des petites perturbations



Fig(4.7.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons

Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieur
(signal aléatoire) Variance = 0.01

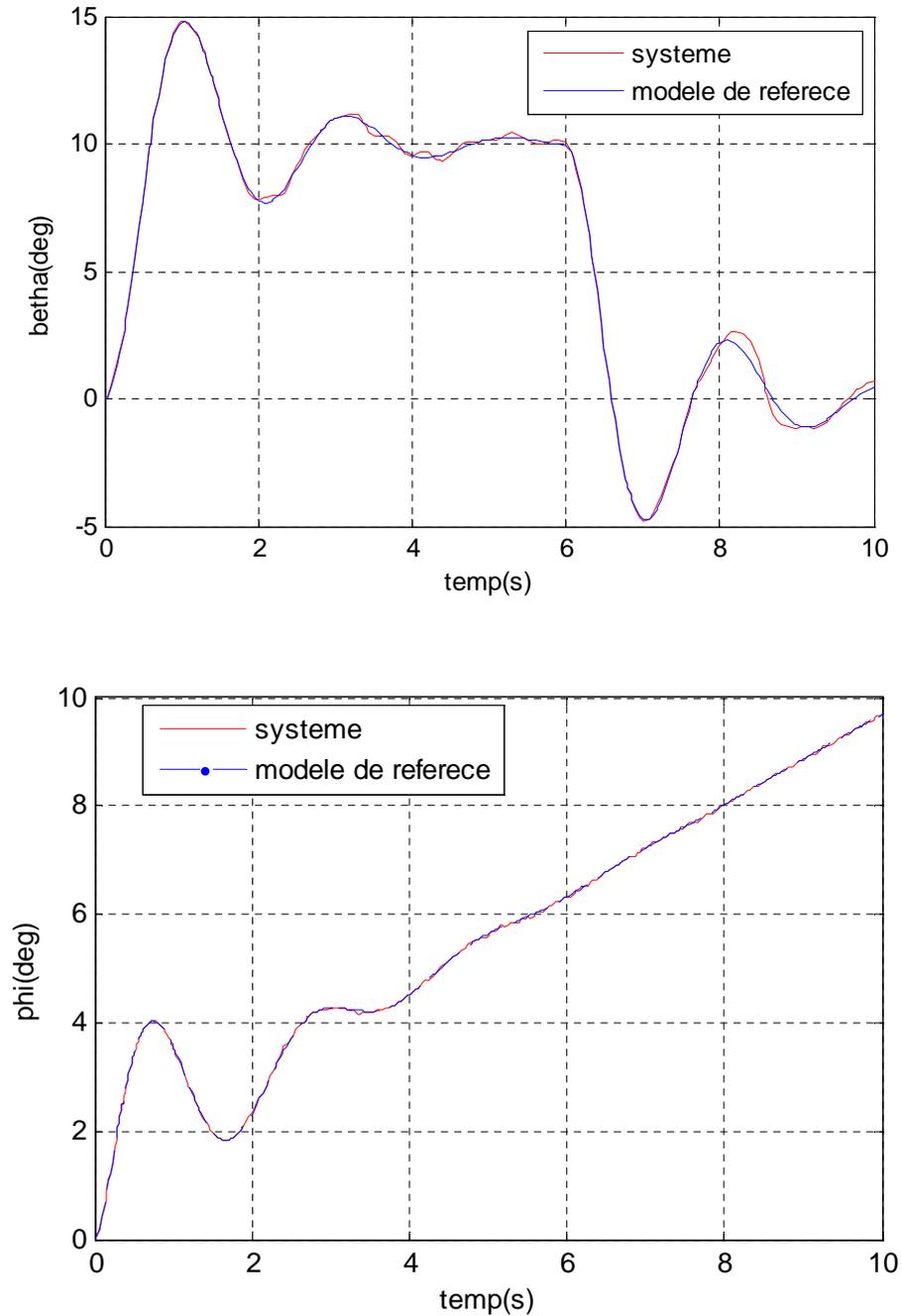
- Les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont riches en fréquence et non pas lisse



Fig(4.7.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

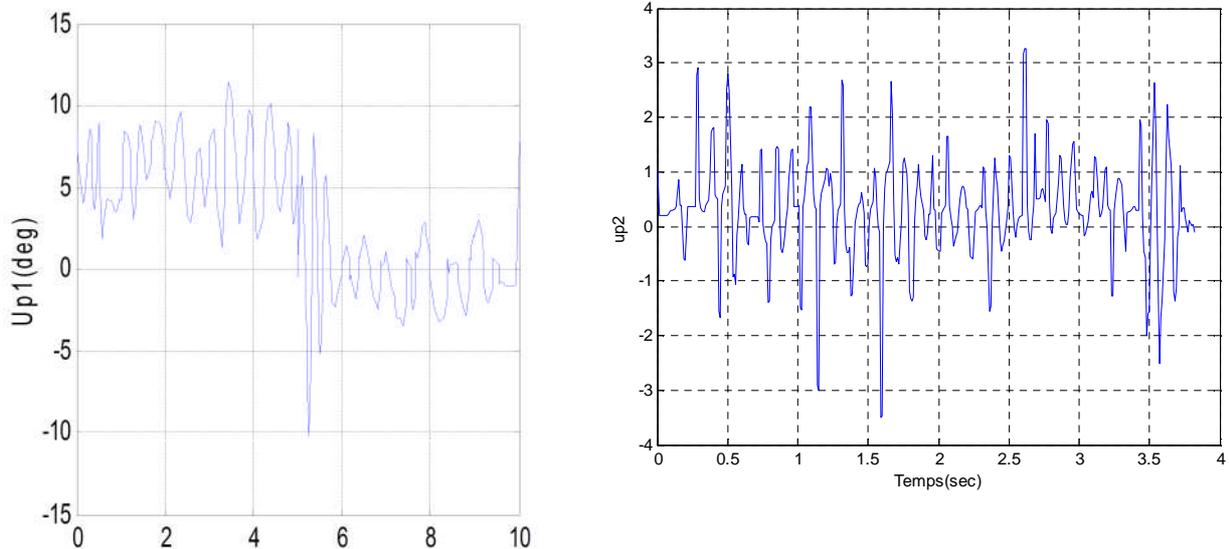
- L'erreur dans ce cas tend vers zéro est no pas nulle

Maintenant on change la valeur de variance est on prendre le cas où Variance = 0.5



Fig(4.8) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec perturbation extérieur (signal aléatoire) Variance = 0.5

- on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du système suit le modèle de référence (β_m, φ_m) avec des perturbations plus que le cas précédent.



Fig(4.8.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons

Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieur
(signal aléatoire) Variance = 0.5

- Les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont riches en fréquence plus que le cas précédent et non pas lisse

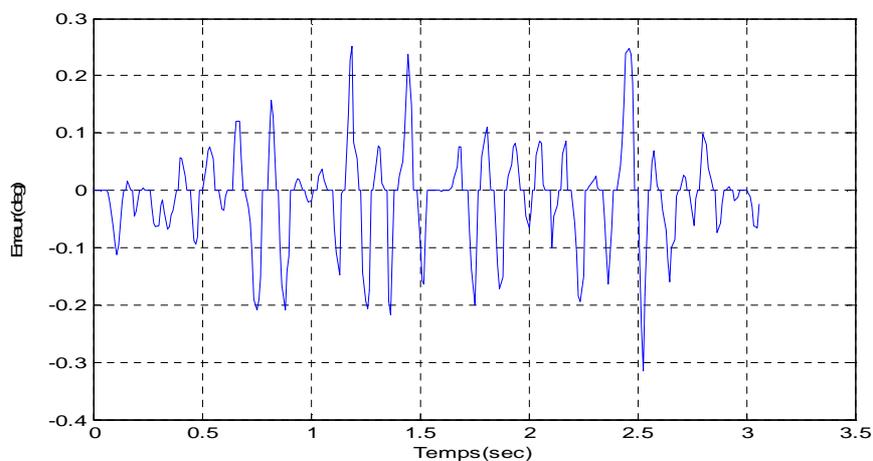


Fig (4.8.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- L'erreur dans ce cas est importante est augmenté par rapport où cas précédente

Maintenant on augmentera plus la valeur de Variance = 10.

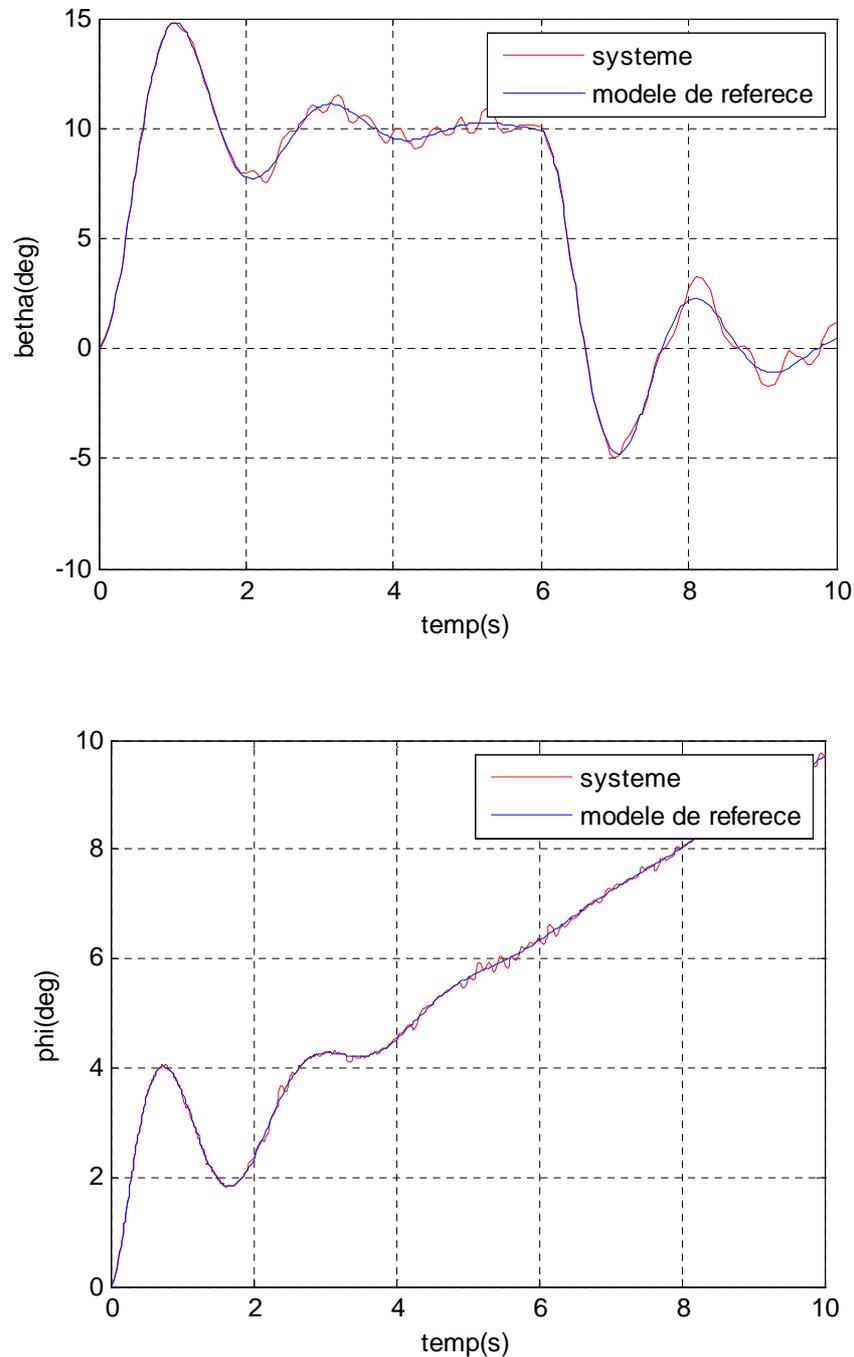


Fig (4-9) Le temps de réponse d'angle de dérapage et d'inclinaison de la commande MRAC avec perturbation extérieure (signal aléatoire) Variance = 10

- on observe que l'angle de dérapage et l'angle d'inclinaison (β, φ) de la sortie du système suit le modèle de référence (β_m, φ_m) avec des perturbations plus que les cas précédent.

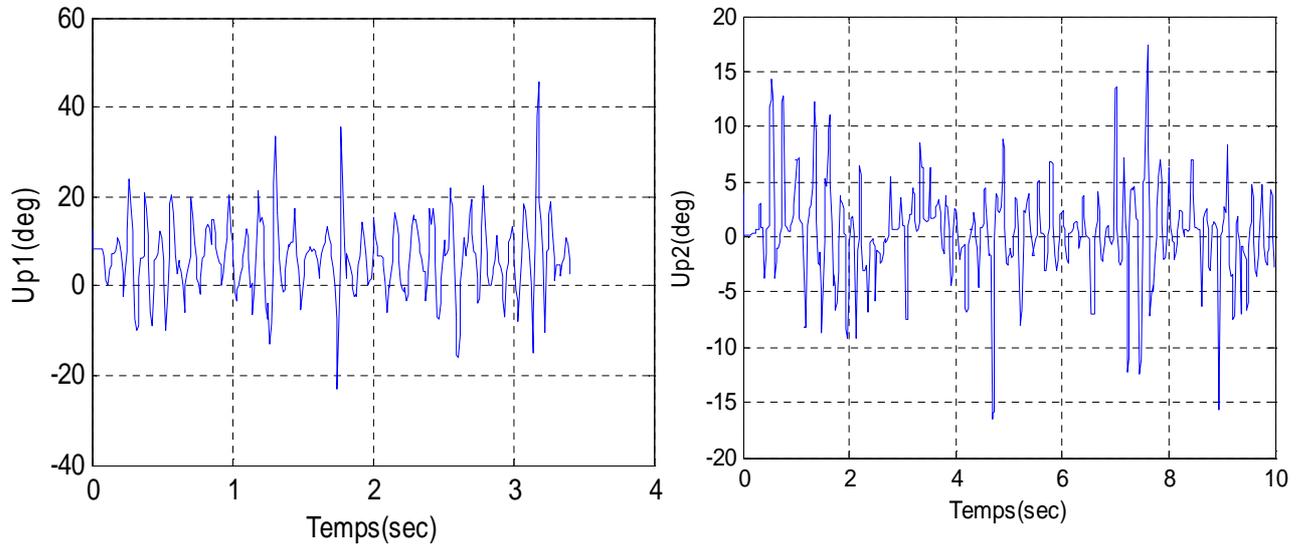


Fig (4.9.a) Le temps de réponse déflexion des ailerons Et déflexion des gouvernes de direction de la commande MRAC avec perturbation extérieur (signal aléatoire) Variance = 10

- Les commandes ($Up1$ et $Up2$) sont riches en fréquence plus que les cas précédent et non pas lisse

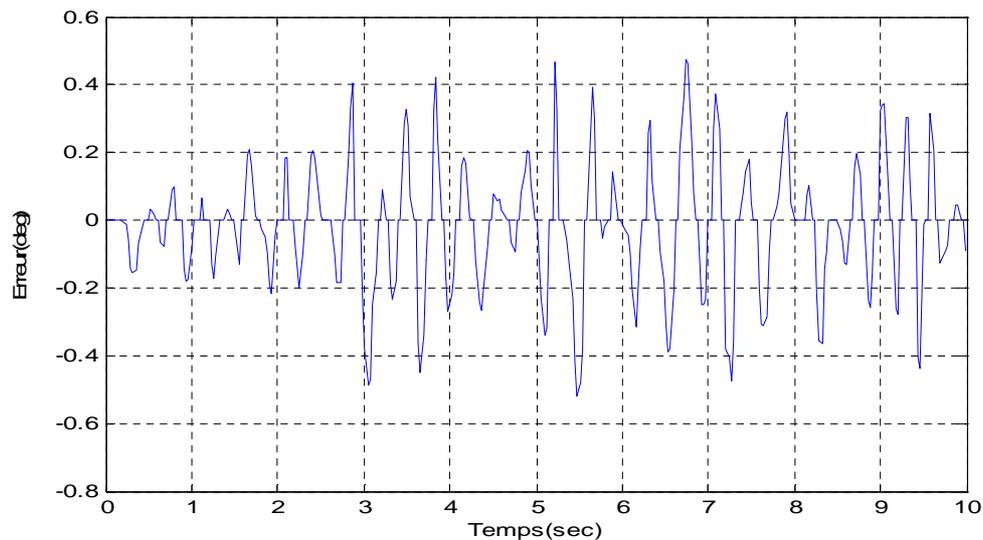


Fig (4.9.b) L'erreur entre la sortie de système et la sortie de modèle

- Même chose pour L'erreur dans ce cas est importante est augmenté par apport où cas précédent

Remarque

On remarque que les sortie du système (β, φ) suit le signal de référence avec des petite perturbations, l'erreur tend vers zéro mais non pas nul pour les petite valeurs de variance, les commandes sont bornées avec des variations d'amplitude riche en fréquence.

On conclut pour ce cas que pour les petites valeurs de variance l'erreur est diminuée (tolérable)

5. Conclusion

La commande adaptative avec modèle de référence (MRAC) donne de très bons résultats pour notre système, les perturbations extérieures n'affectent en rien la stabilité du système.

On obtient une très bonne poursuite du modèle de référence avec une erreur qui reste bornée faible mais non nulle dans le cas d'intégrateur et le cas de proportionnelle avec les bonne choix des α, β , les commandes sont un peut lisses sauf en présence des perturbations extérieures, il apparait des oscillations qui ne répondent plus aux caractéristiques des gouvernes.

Conclusion générale

La modélisation mathématique consiste à établir un modèle mathématique dynamique du mouvement d'un avion avec les forces et les moments aérodynamiques estimés selon les conditions de vol et les caractéristiques géométriques de l'avion. Le modèle obtenu est représenté par un système d'équations non-linéaire couplées, cependant nous ferons appel aux méthodes de linéarisation pour obtenir deux systèmes d'équations linéaires, le premier système gouverne le mouvement latéral et le seconde pour le mouvement longitudinal.

Ensuite, on a étudié et développé la commande par retour d'état et commande par retour d'état avec action intégrateur en basant sur l'emplacement des pôles du système.

La synthèse des lois de commande adaptative avec un modèle de référence se fait soit à l'aide de la théorie de Liapunov soit à partir du concept d'hyper-stabilité et de positivité. Ce sont des dernières approches qui sont les plus répondues et que nous allons développer dans ce mémoire pour une perturbation extérieurement on verra : le MRAC avec action Pet PI et le MRAC avec perturbation extérieure.

Plusieurs teste de simulation ont été effectués sur différents types de commande grâce au langage MTALAB(SIMULINK) ainsi que leurs interprétations physique. Une application de ces lois de commande a l'avion AIR-BUS 300 montre une très bonne poursuite du modèle de référence par le signal de sortie du système, car l'effet du terme d'intégration joue un rôle très important pour l'obtention d'une meilleur poursuite du modèle de référence.

Finalement, l'ensemble des résultats obtenus confirme l'apport très significatif de ce type de commande et sa souplesse pour tenir compte les caractéristiques géométriques des gouvernes et le confort des passagers. Mais l'inconvénient majeur de ce genre de commande réside au niveau de grande variance pour les perturbations extérieur sinon les signaux de commandes pressentent des amplitudes de plus en plus importantes en fonction de la variance.

Perspective

Cette étude nous permis d'enrichir nos connaissances sur le domaine vaste du contrôle, et en particulier sur le contrôle de vol, sachant que le transport aérien fut l'un des moyens les plus utilisent à nos jours. Pour des raisons de sécurité, ce travaille peut être étendu en contrôlant la dynamique complète de l'avion (système couplé) avec les deux mouvements latéral et longitudinal couples représenter par un système non-linéaire. On peut aussi introduire la flexibilité de la structure dans la mobilisation.

Nous souhaitons aussi améliorer la qualité de contrôle par l'application de la méthode de Lyapunov

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1]. **G.ANDREI**. Contribution a la commande tolérante aux pannes dans la conduite du vol (These doctorat /INSA. Toulouse le 03.12.2010)
- [2]. **MICHAELE V.COOK**. Flight dynamics principles (Elsevier. 2eme edition 2007)
- [3]. **M.RAUW**. FDC 1,2 A Simulink toolbox flight dynamics and control analysis (2eme edition. Le 05.10.2001)
- [4]. **P.ALBERTOS, I.MAREELS**. Feedback and control for everyone (springer. Verlag berlin Heidelberg 2010)
- [5]. **F.VAYSSET**. Modélisation et identification du comportement de l'avion en vol (thèse doctorat/ ECL ET USTL le 17.11.2006)
- [6]. **D.PEAUCELLE**. Cours EDSYS. Commande adaptative (Toulouse mai 2011)
- [7]. **J.ROSKAM**. Airplane flight dynamics and automatique flight controls Part 1 (Dar Corporation 2001)
- [8]. **J.ROSKAM**. Airplane flight dynamics and automatique flight controls Part 2 (Dar Corporation 1998)
- [9]. **R.STENGAL**. Cours aircraft flight dynamics (MAE.331. 2010)
- [10]. **A.MADDI, A.GUESSOUM, D.BERKANI**. Applying model reference adaptative controller for lateral motion of aircraft (American journal of applied sciences 7(2):235-240.2010)
- [11]. **H.BENCHOUBANE**. Cours PGRS .partie sur les commandes linéaires 2011(USDB instituts d'aéronautique blida)
- [22]. **H. BENCHOUBANE and D.P.STOTEN**. "Robustness of minimal controller synthesis algorithm " INT. J. CONTROL, 1990, VOL. 51, NO. 4, 851-861.
- [13]. **D.R.STOTEN, H.BENCHOUBANE**. Empirical studies of an MRAC algorithm with minimal controller synthesis (INT.j.contol.1990.vol 51.no .4, 823-849)
- [14]. **A.MADDI**. cours système adaptative a modèle de référence 2011(USDB departement d'électronique)
- [15]. **J.BAILLOU, J.P.CHEMLA, B.GASNIE, M.LITIECQ**. Cours de système asservie (polythec tours 'alger',2009)

Références Bibliographique

- [16]. **D.ALZELIER**. Représentation et analyse des système linéaire (notes de cours version 5,2)
- [17]. **J.C.WANNER**. Dynamique et pilotage des avions
- [18]. **A.KHLIFA**. commandes auto-ajustables du vol latéral et longitudinal d'un avion de type AIR BUS 300.(thèse Magister USDB institut d'aéronautique blida 2001)
- [19]. **POPOV,V.M**. Hyper-stabilité of Automatique control système .(springer verlage ,New york)
- [20]. **M.OLIVIER**. Etude et comparaison de différentes structures de commande multi contrôleurs application a un axe robotise (L'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy, Université de Savoie, Juillet 2001)
- [21]. **OSBURN, P. V., H. P. WHITAKER and A. KEZER**. New developments in the design of adaptive control systems (In: Institute of Aeronautical Sciences, pp. 61-39. 1961).
- [22]. **G. RAMOND**. Contribution à la Commande Prédictive Généralisée Adaptative Directe et Application(Université Paris XI U.F.R. Scientifique D'Orsay, thèse doctorat Sept 2001.)
- [23]. **S.COLIN**. Adaptive speed identification for vector control of induction motors without rotational transducers Without Rotational Transducers (Conf. Rec. IEEE IAS Annu, Meeting, pp. 493-499, 1989.)
- [24]. **T.LAHMER** commande adaptative a modèle de référence des robot manipulateurs(thèse ingénieur, école national polytechnique, 1991)
- [25]. **A.CHENTIR** étude de commandes de position d'un bras manipulateur classe 1(thèse magister. USDB/département d'électronique de blida 1993)

Annexe A

1-DESCRIPTION DES COMMANDES ET GOUVERNES

Les commandes qui sont à la disposition du pilote sont :

1.1 La commande de profondeur qui déplace la gouverne de profondeur:

Volet situé généralement à l'arrière de l'avion, le braquage de cette commande crée un couple de tangage, tendant à faire cabrer ou piquer l'avion.

1.2 La commande de gauchissement qui déplace les ailerons:

Volets situés au bord de fuite, extrémité de la voilure et qui ont pour rôle de détruire partiellement la portance sur l'une ou l'autre des demi-voilures ; le braquage de ces gouvernes crée un couple de roulis, tendant à faire incliner l'avion à droite ou à gauche

Ces deux commandes sont regroupées sur le manche :

- En poussant ou en tirant le manche on crée un couple de tangage piqueur ou cabreur.
- En déplaçant le manche à gauche ou à droite on crée un couple de roulis faisant baisser l'aile gauche ou droite (l'avion tend à rester perpendiculaire au manche).

1.3 La commande de direction qui déplace la gouverne de direction:

Volet placé au bord de fuite de la dérive. En appuyant avec le pied droit on crée un couple de lacet déplaçant le nez de l'avion vers la droite.

Cependant, ces trois commandes permettent au pilote d'être maître de l'attitude instantanée de l'avion. A l'aide de la profondeur il modifiera l'incidence, avec la direction il modifiera le dérapage et à l'aide du gauchissement, il fera tourner l'avion autour du vecteur vitesse.

2. DEFINITIONS DES MODES ASSOCIES AU MOUVEMENT LATERAL ET LONGITUDINALE

L'étude de la dynamique de l'avion, correspondant aux mouvements de l'avion lorsqu'il est perturbé et avant qu'il ne rejoigne un état d'équilibre introduit la notion de modes associés à cette dynamique. Ces modes seront cités comme suit:

2.1 LE MOUVEMENT LONGITUDINAL :

Nous avons trouvé que l'équation caractéristique du mouvement longitudinal est du cinquième

$$\text{Ordre: } d = (s-s_1) (s^2+2\xi_1\omega_{n1}+\omega_{n1}^2) (s^2+2\xi_2\omega_{n2}+\omega_{n2}^2).$$

Où autrement, $d = (s - s_1) [(s - a)^2 + b^2] [(s - p)^2 + q^2]$, avec s_1 , la valeur propre réelle, $a \pm ib$ et $p \pm iq$ les valeurs propres imaginaires conjuguées deux à deux de cette équation caractéristique. Nous voyons donc clairement que le mouvement longitudinal possède trois modes et qui sont:

2.1.1. Le mode d'oscillation d'incidence (fortement amortie): Ce mode est déterminant pour les qualités de vol longitudinal. En effet il se situe dans une plage de fréquences très élevée par rapport aux fréquences de pilotage, dont la limite supérieure voisine l'Hertz. Il est donc difficile à maîtriser, de plus avec un mauvais réglage de l'avion, il peut devenir instable. La fréquence et la pulsation de ce mode sont obtenus à partir des racines correspondantes aux états a et q , qui sont conjugués.

2.1.2. Le mode d'oscillation phagoïde (faiblement amortie): Ce mode présente un intérêt important puisqu'il peut s'analyser directement «à la main ». Il ne crée pas de difficultés majeures pour le réglage des qualités de vol puisqu'il est lent et quasiment toujours stable bien que mal amorti. C'est donc un mode facilement pilotable autant par le pilote que par le pilote automatique. C'est aussi le premier mode découvert expérimentalement et ensuite analysé par LANCHESTER à la fin du siècle dernier. Les caractéristiques de ce mode sont obtenues à partir des pôles des deux états u et v qui sont aussi conjugués

2.1 3. Le mode de rappel de propulsion (apériodique): ce mode apériodique et très lent est lié à l'étude du vol équilibré en montée ou autrement dit à l'altitude (H).

2.2 LE MOUVEMENT LATERAL:

Nous avons trouvé que l'équation caractéristique du mouvement latéral est du quatrième ordre : $d = (s - s_1) (s - s_2) (s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)$, où autrement, $d = (s - s_1) (s - s_2) [(s - a)^2 + b^2]$, avec s_1 et s_2 , deux valeurs propres réelles et $a \pm ib$ la valeur propre imaginaire conjuguée de cette équation caractéristique. Nous voyons donc clairement que le mouvement latéral possède trois modes et qui sont:

2.2.1. Le mode d'oscillation de dérapage: Ce mode est souvent désigné par l'appellation roulis hollandais. En effet, il s'agit fondamentalement d'une oscillation entre le dérapage p et la vitesse de roulis r , de telle sorte que cette oscillation provoque un mouvement de roulis très sensible pendant le vol.

2.2.2. Le mode spiral: ce mode apériodique est associé à l'équation cinématique ϕ et par la suite il engage l'angle d'azimut ψ avec $\beta = 0$; c'est un mouvement très lent caractérisé par une racine prédite que, le mode spiral serait stable, il n'est pas pourtant le cas en pratique, car cette racine, même qu'elle soit négative mais très proche de l'axe imaginaire, d'où on peut avoir un spiral divergent, comme on peut avoir un spiral convergent. .

2.2.3. Le mode de roulis:

ce mouvement engage fondamentalement l'angle de roulis ϕ avec $\Psi = \beta = 0$.

3. ORIENTATION DE L'AVION :

Pour décrire l'orientation de l'avion par rapport à la terre, il suffit de décrire le système d'axes $Oxyz$ liés à l'avion par rapport au système d'axes liés à la terre.

Pour cela on considère que le système d'axes $Oxyz$ est translaté parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de gravité de l'avion C .

L'orientation de l'avion est donnée par une série de trois rotations consécutives, dont l'ordre est important parce que, ces angles ne sont pas orthogonaux, ils sont appelés les angles d'EULER, et le système d'axes est appelé système d'axes d'EULER.

L'avion est initialement supposé orienté de manière telle que ces axes $Oxyz$ seraient parallèles au système d'axes terrestre, puis il sera soumis aux trois rotations suivantes :

1- une rotation d'angle positif ψ autour de Oz , amenant les axes à $Ox_1y_1z_1$, ce mouvement est

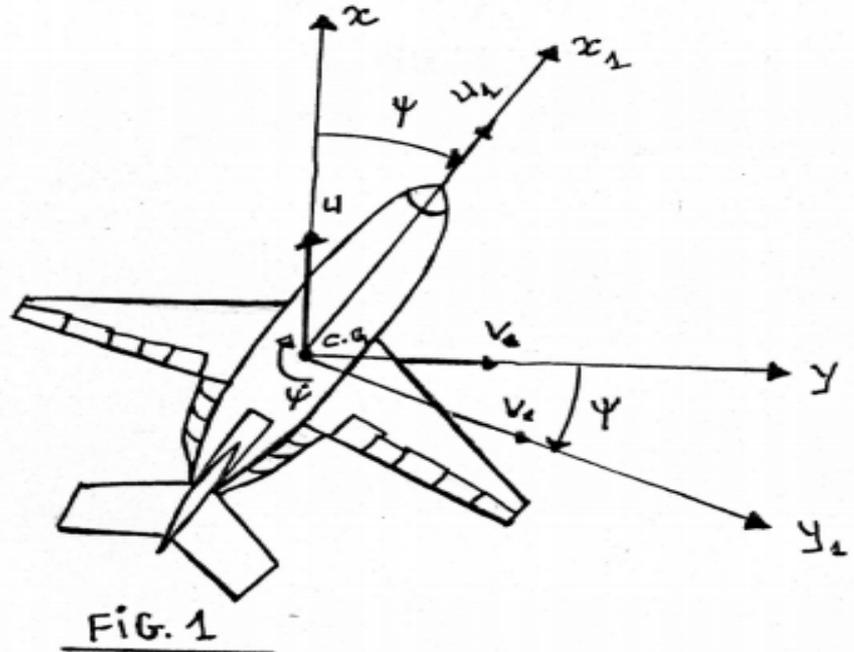
le mouvement de lacet:

D'où :

$$x_1 = \cos\psi x + \sin\psi y$$

$$y_1 = -\sin\psi x + \cos\psi y$$

$$z_1 = z$$



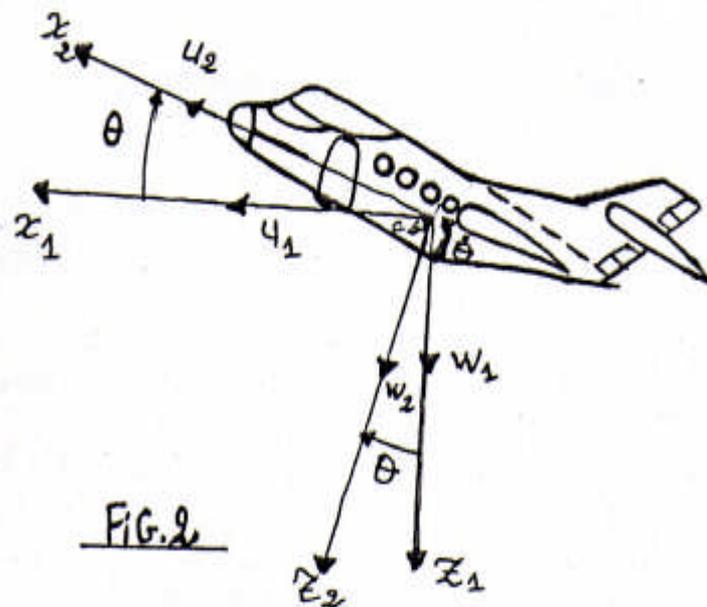
2- Une rotation d'angle positif θ autour de Oy_1 , amenant les axes à $Ox_2y_1z_2$, ce mouvement est le mouvement de tangage.

D'où:

$$x_2 = \cos \theta x_1 - \sin \theta z_1$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = \sin \theta x_1 + \cos \theta z_1$$



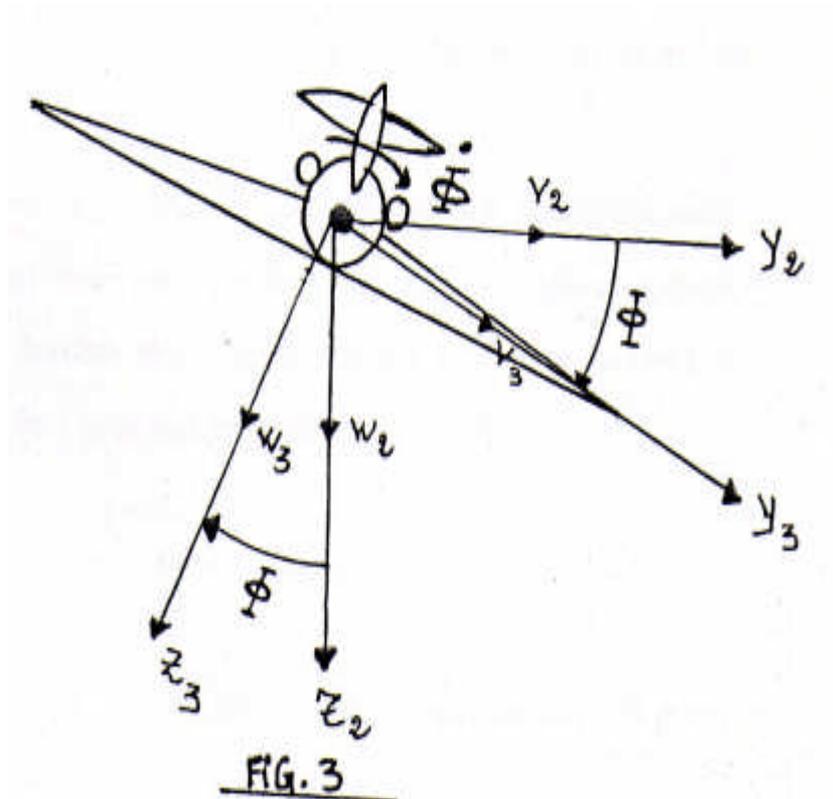
3- Une rotation d'angle positif ϕ autour de Ox_2 , amenant les axes à $Ox_2y_3z_3$. Ce mouvement est le mouvement de roulis

D'où

$$x_3 = x_2$$

$$y_3 = \cos \phi y_2 + \sin \phi z_2$$

$$z_3 = -\sin \phi y_2 + \cos \phi z_2$$



4. PREUVE DE STABILITE EN PRESENCE DE PERTURBATION:

Considérons notre système d'avion dans le cas de présence de perturbations extérieures décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + d(t)$$

avec:

- pour le mouvement latéral

$$\dim(x) = 4 \times 1 ; \dim(u) = 2 \times 1 ; \dim(A) = 4 \times 4 ; \dim(B) = 4 \times 2 ; \dim(d) = 4 \times 1$$

-pour le mouvement longitudinal

$$\dim(x) = 5 \times 1 ; \dim(u) = 1 \times 1 ; \dim(A) = 5 \times 5 ; \dim(B) = 5 \times 1 ; \dim(d) = 5 \times 1$$

Le terme $d(t)$ représente un vecteur qui englobe les perturbations extérieures appliquées au système.

Une étude de stabilité a été développée par LYAPUNOV, assure que pour un système stable en boucle ouverte de telle sorte que les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives, soumis à des perturbations externes bornées et si l'erreur statique est limitée (bornée), le système est donc stable en boucle fermée (pour plus de détail, voire [27]).

Théorème de LYAPUNOV :[18]

La perturbation $d(t)$ est bornée et l'erreur $e = r-y$ est bornée \Rightarrow le système est stable en présence de cette perturbation.

5. LES ANGLES

Pour repérer le déplacement de l'avion dans l'espace, il faut utiliser des angles positionnant l'avion par rapport aux axes des trièdres de référence.

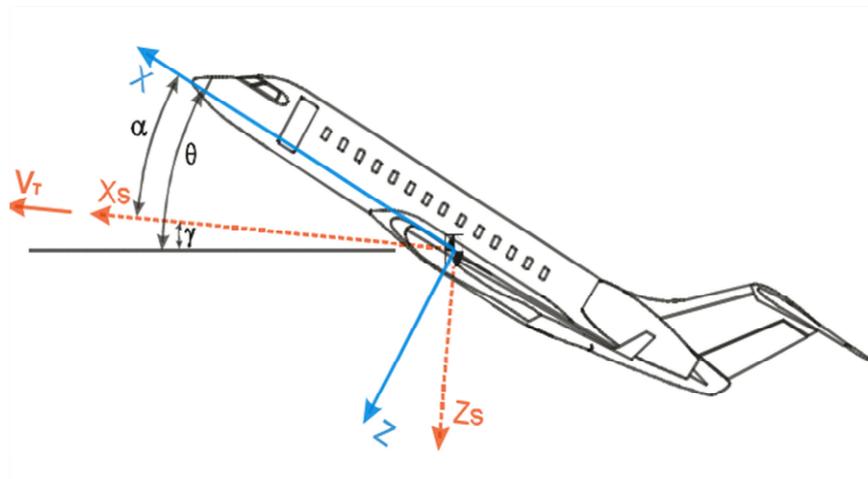


Fig 4 : Les angles

- **Angle d'assiette θ** : angle entre l'axe de l'avion et l'horizontale géographique (attitude). Elle est comptée positivement si le nez de l'avion est au-dessus de l'horizon et négativement s'il est en dessous. C'est l'angle indiqué par l'horizon artificiel.
- **Incidence α** : angle entre la direction de la vitesse (vent) et l'axe de l'avion. Elle est comptée positivement si la ligne de foi est au-dessus de la direction de la vitesse.

- **Pente γ** : angle entre la direction de la vitesse et l'horizontale géographique ($\gamma = 0$ en vol horizontal). Elle matérialise la trajectoire de l'avion. La pente est positive si la vitesse est au-dessus de l'horizontale.

Avec ces définitions, les trois angles sont reliés entre eux par :

$$\theta = \alpha + \gamma$$

L'inclinaison ϕ est l'angle formé entre le plan des ailes et l'horizontale. Il est repéré dans l'avion à l'aide de l'horizon artificiel ou de l'indicateur de virage. En vol à vue, on le repère par l'inclinaison du capot moteur sur l'horizon. L'inclinaison a pour but principal de permettre d'effectuer des virages plus ou moins serrés.

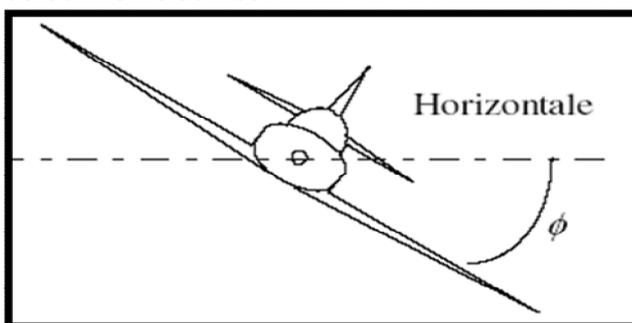


Fig 5 : L'inclinaison ϕ

Le dérapage β est l'angle entre l'axe X de l'avion et la vitesse. Il est compté positivement par la droite (nez à gauche de la vitesse). Il est indiqué à bord de l'avion par la bille. Si elle est au centre, le dérapage est nul, si elle est à droite, le dérapage est à droite (la bille indique le sens de la vitesse vraie).

L'angle de dérapage est important car s'il n'est pas nul en croisière l'avion consomme plus de carburant que nécessaire pour effectuer son vol. En phase d'approche il est encore plus important car il augmente la vitesse de décrochage. En cas d'approche dérapée involontaire, une tenue rigoureuse de la vitesse habituelle d'approche peut entraîner un décrochage de l'appareil. Il est très important de surveiller ce dérapage. On crée ce type de décrochage volontairement que pour certaines figures de voltige.

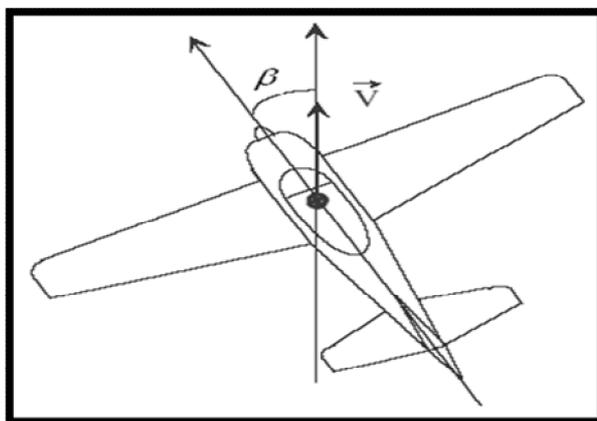
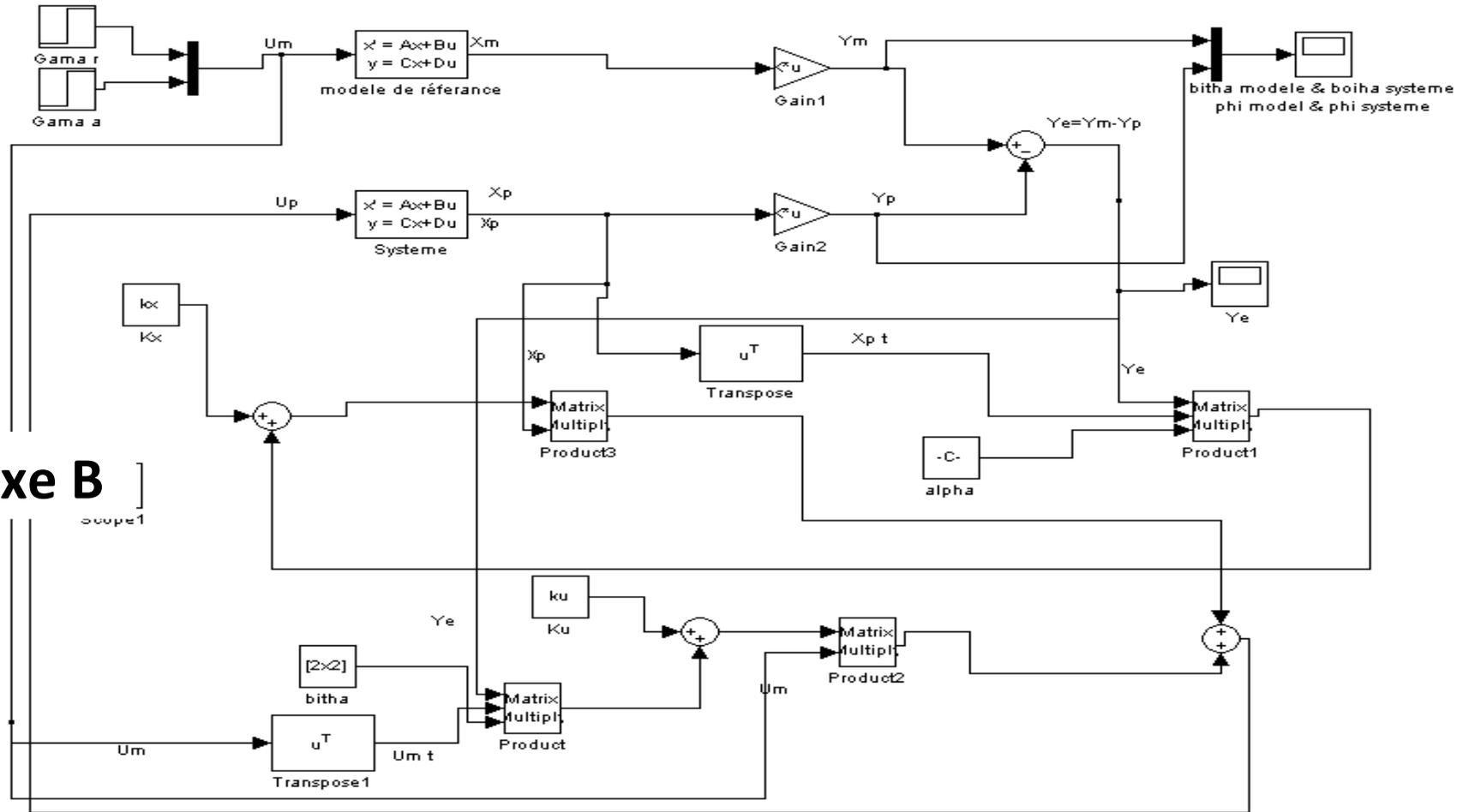


Figure 6 Le dérapage β

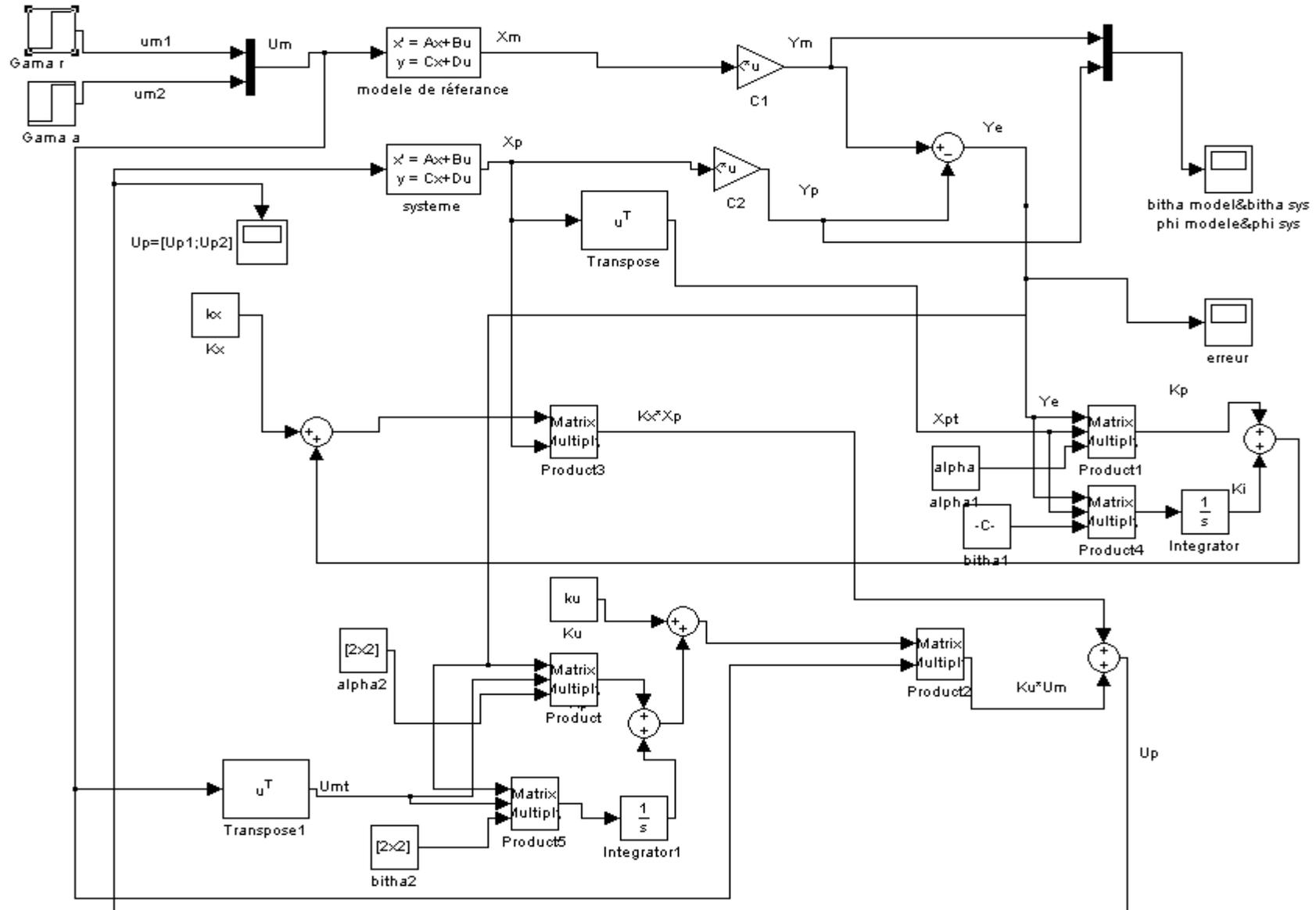
MRAC Proportionnelle avec alpha et bitha varie



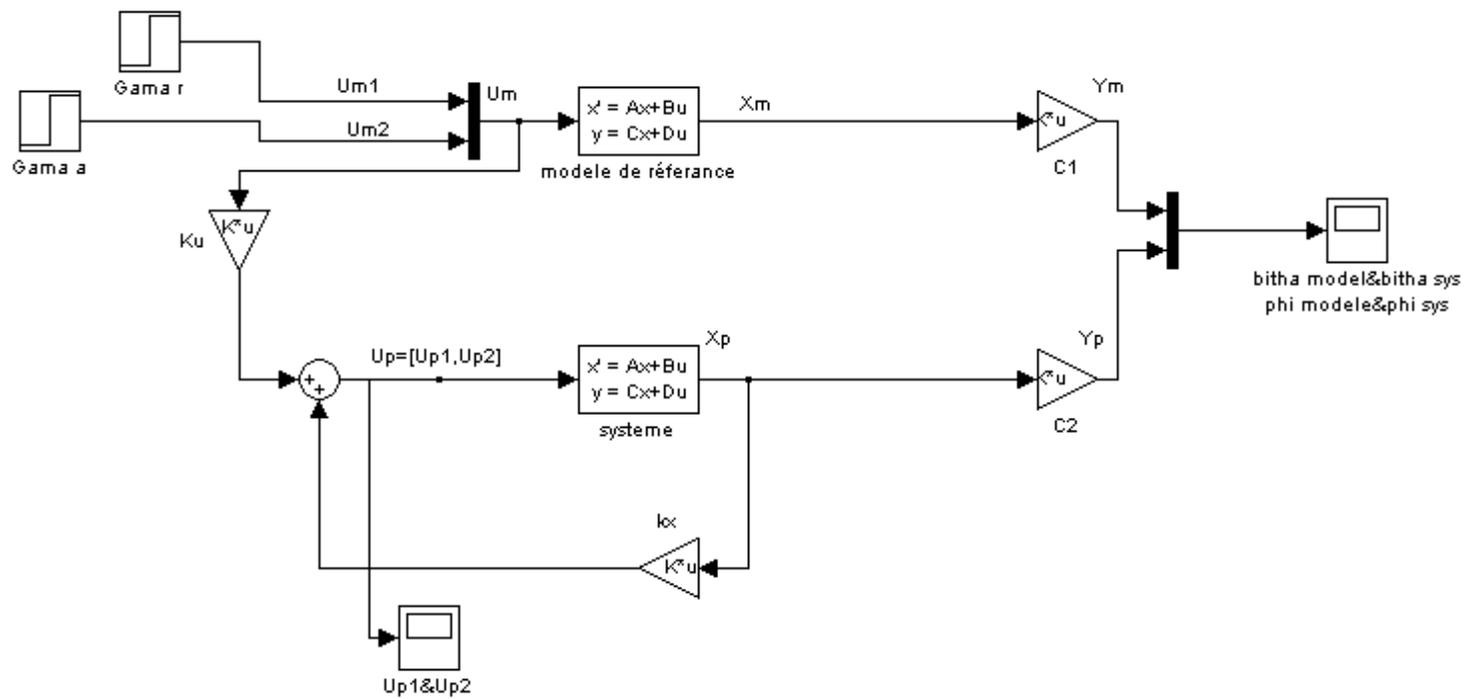
Annexe B

scope1

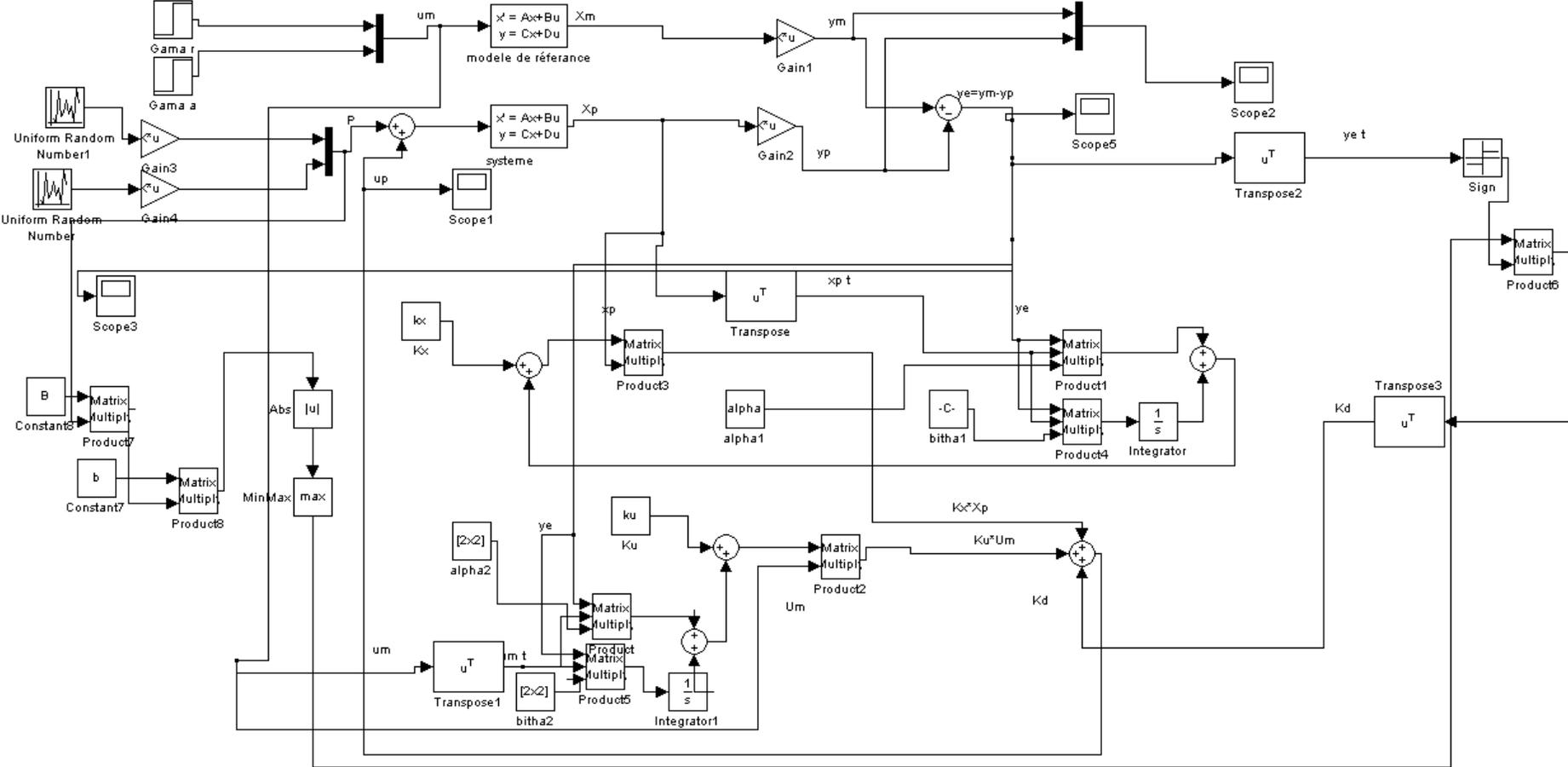
MRAC avec action intégrale



MRAC Proportionnelle avec alpha et bitha egale zéro



MRAC avec perturbations exterieure



1. DÉTERMINATION DES CONDITIONS DE VOL PERMANENTES

Nous appellerons conditions de vol permanentes tout mouvement pour lequel les paramètres suivants : ϕ , Θ , u , v , w , p , q , r sont constants. Les quatre fonctions x , y , H et ψ du temps déterminent alors la trajectoire dite trajectoire permanente.

Les paramètres ϕ, Θ, p, r, q sont alors liés par les deux relations cinématiques :

$$\dot{\Theta} - q_0 \cos \Theta_0 - r_0 \sin \phi_0 = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\phi} = p_0 + \text{tg } \Theta_0 (q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) = 0 \quad (\text{C.2})$$

et le système de force conduisant à ce mouvement permanent est donné par :

$$X_0 = m (q_0 w_0 - r_0 v_0) + mg \sin \Theta_0 \quad (\text{C.3})$$

$$Y_0 = m (r_0 u_0 - p_0 w_0) - mg \cos \Theta_0 \sin \phi_0 \quad (\text{C.4})$$

$$Z_0 = m (p_0 v_0 - q_0 u_0) - mg \cos \Theta_0 \cos \phi_0 \quad (\text{C.5})$$

$$L_0 = (C - B) q_0 r_0 + p_0 (Fr_0 - Eq_0) + D(rq - qp) \quad (\text{C.6})$$

$$M_0 = (A - C) r_0 p_0 + q_0 (Dp_0 - Fr_0) + E(pq - r^2) \quad (\text{C.7})$$

$$N_0 = (B - A) p_0 q_0 + r_0 (Eq_0 - Dp_0) + F(qg - p^2) \quad (\text{C.8})$$

Par conséquent une trajectoire permanente est définie par six paramètres indépendants.

La trajectoire est alors déterminée par :

$$\dot{\Psi} = \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos \Theta_0} = \dot{\Psi}_0$$

Soit

$$\Psi = \dot{\Psi}_0 (t - t_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Et} \quad \dot{x} = & (u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 - \cos \Phi_0) \cos \psi \\ & + (w_0 \sin \Phi_0 - v_0 \cos \Phi_0) \sin \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & (v_0 \cos \Phi_0 - w_0 \sin \Phi_0) \cos \psi \\ & + (u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0) \sin \psi \end{aligned}$$

$$\dot{H} = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = \dot{H}_0$$

En posant :

$$A \cos \varpi = u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$A \sin \varpi = w_0 \sin \Phi_0 - v_0 \cos \Phi$$

Il vient :

$$\dot{x} = A \cos (\psi - \varpi) \qquad \dot{y} = A \sin (\psi - \varpi)$$

$$\text{Et en intégrant avec } \psi = \dot{\psi}_0 (t - t_0) \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = \frac{A}{\dot{\psi}_0} \sin \left(\dot{\psi}_0 (t - t_0) - \omega \right) \\ y - y_0 = -\frac{A}{\dot{\psi}_0} \cos \left(\dot{\psi}_0 (t - t_0) - \omega \right) \\ H = \dot{H}_0 t + H_0 \end{array} \right\}$$

On reconnaît l'équation d'une hélice d'axe vertical s'enroulant sur un cylindre de

$$\text{rayon } A / \dot{\psi}_0$$

1.1 DEFINITION DE LA STABILITE

Nous venons de définir le mouvement permanent le plus général d'un corps quelconque et de déterminer le système de forces correspondant. Etudier la stabilité de ce mouvement consiste à voir si un écart de l'un ou de plusieurs des huit paramètres Φ , θ , u , v , w , p , q , r par rapport aux valeurs Φ_0 , θ_0 , u_0 , v_0 , w_0 , p_0 , q_0 , r_0 conduit à un mouvement tendant ou non vers l'état permanent. Pour mener cette étude il importe de définir la façon dont le système de force X, Y, Z, L, M, N , évolue avec les écarts $\bar{\theta}, \bar{\Phi}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ des huit paramètres $\Phi, \theta, u, v, w, p, q, r$ par rapport aux valeurs $\Phi_0, \theta_0, u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ correspondant à l'état permanent. [17] [2]

1.2 MOUVEMENTS PERMANENTS ET STABILITE DE L'AVION :

- Le système des forces aérodynamiques dépend :
 - du module de la vitesse aérodynamique (V),
 - des angles d'incidence et de dérapage (α, β).
 - du nombre de Mach (μ .)
 - de l'altitude (H) (par l'intermédiaire de p).
 - des vitesses de rotation (p, q, r),

- de la position des différentes gouvernes ($\delta_a, \delta_r, \delta_m$)
 - Le système des forces de propulsion dépend
- du nombre de Mach μ ,
- de l'altitude par l'intermédiaire de la pression p et de la température T ,
- de la position de la manette des gaz. (δ_x).

(En toute rigueur la résultante et surtout le moment résultant dépendent également de α , β , p , q et r mais les effets de ces différents paramètres sont le plus souvent négligeables et négligés).

Dans un mouvement permanent les angles d'incidence et de dérapage sont constants ainsi que le module de la vitesse puisque u , v , w sont constants. A positions de gouvernes données, le système de force aérodynamique ne dépend donc que de l'altitude par l'intermédiaire de p et de μ (à V donné, μ varie avec la vitesse du son $a = \sqrt{\tau RT}$ donc avec l'altitude).

De même le système des forces de propulsion à position de manette des gaz donnée dépend de l'altitude (par p , T et μ).

On ne peut donc pour un avion parler de mouvement permanent à positions fixes des gouvernes lorsque ce mouvement s'effectue à altitude non constante.

Le seul mouvement permanent réalisable à positions de gouvernes fixes est donc le virage uniforme en palier.

Aux équations (C.9) et (C.10) soient

$$q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$p_0 + \text{tg } \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) = 0 \quad (\text{C.10})$$

Nous ajouterons donc la condition :

$$\dot{H} = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = 0. \quad (\text{C.11})$$

Nous allons étudier la stabilité autour de ces mouvements permanents en restreignant encore la notion de mouvement permanent au cas particulier du vol à dérapage nul.

Nous ne considérerons donc que le cas du vol permanent en virage horizontal à dérapage nul (*avec la voie rectiligne comme cas particulier*).

$$\text{Si} \quad \beta = 0$$

$$\text{Alors} \quad \nu = 0$$

Par ailleurs l'avion étant géométriquement symétrique la force *latérale* Y est nulle

$$Y = 0.$$

Nous allons déterminer les conditions de vol permanent en virage horizontal à dérapage nul.

Un certain nombre de calculs préliminaires sont à effectuer avant d'atteindre ce résultat.

- **Relation assiette de tangage, angle de gîte, incidence dans le cas du vol en virage horizontal :**

Dans le trièdre avion le vecteur vitesse (ou sa projection sur le plan de symétrie lorsqu'il y a dérapage) est dans le plan de symétrie - ce vecteur a pour coordonnées dans $x y z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{array} \right.$$

La composante suivant Oz_g d'un vecteur x, y, z est.

$$-x \cdot \sin \Theta + y \cdot \cos \Theta \sin \Phi + z \cdot \cos \Theta \cos \Phi.$$

Pour le vecteur $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ cette composante est nulle lorsque la vitesse est horizontale

$$-\sin \Theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \Theta \cos \Phi = 0$$

Soit

$$\text{tg } \Theta = \text{tg } \alpha \cdot \cos \Phi \quad (\text{C.12})$$

- **Définition de l'assiette latérale Φ_1 (à ne pas confondre avec l'angle de gîte Φ).**

C'est l'angle de l'axe avion Oy avec le plan horizontal.

Le vecteur unitaire de Oy a pour composantes $0, 1, 0$ dans le trièdre avion. Sa composante suivant Oz_g soit $\sin \Phi_1$ est donc $\cos \Theta \sin \Phi$. Par suite

$$\sin \Phi_1 = \cos \Theta \sin \Phi \quad (\text{C.13})$$

L'élimination de Φ entre (C.12) et (C.13) donne

$$\sin \Theta = \sin \alpha \cdot \cos \Phi \quad (\text{C.14})$$

- **Les deux conditions :**

$$\dot{\Phi} = 0 \quad \dot{\Theta} = 0$$

Soient

$$q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$p_0 + \text{tg } \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) = 0 \quad (\text{C.16})$$

Imposent un vecteur vitesse instantanée de rotation verticale comme on peut le vérifier en calculant p_g et q_g

$$p_g = p \cos \psi \cos \Theta + q(-\sin \psi \cos \Phi + \cos \psi \sin \Theta \sin \Phi) + r(\sin \psi \sin \Phi + \cos \psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$q_g = p \sin \psi \cos \Theta + q(\cos \psi \cos \Phi + \sin \psi \sin \Theta \sin \Phi) + r(-\cos \psi \sin \Phi + \sin \psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$r_g = -p \sin \Theta + q \cos \Theta \sin \Phi + r \cos \Theta \cos \Phi$$

$$p_g = \cos \psi (p \cos \Theta + q \sin \Theta \sin \Phi + r \sin \Theta \cos \Phi) + \sin \psi (-q \cos \Phi + r \sin \Phi) = 0$$

$$q_g = \cos \psi (p \cos \Phi - r \sin \Phi) + \sin \psi (p \cos \Theta + q \sin \Theta \sin \Phi + r \sin \Theta \cos \Phi) = 0$$

$$r_g = \cos \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) + \frac{\sin^2 \Theta}{\cos \Theta} (q \sin \Phi + r \cos \Phi) = \frac{q \sin \Theta r \cos \Phi}{\cos \Theta} = \dot{\psi}$$

Posons $\dot{\psi} = \Omega_0$ compte tenu des relations (C.1) et (C.2) il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \Omega_0 \sin \Phi_0 \cos \Theta_0 = \Omega_0 \sin \Phi_1^0 \\ r_0 = \frac{\Omega_0 \sin \Phi_1^0}{\text{tg } \Phi_0} \\ p_0 = -\Omega_0 \cos \Theta_0 \end{array} \right.$$

- **Soit V_0 le module du vecteur vitesse.** La trajectoire étant horizontale et le dérapage nul ($v_0 = 0$)

$$u_0 \sin \theta_0 - w_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 = 0$$

Par ailleurs

$$u_1^2 + w_0^2 = V_0^2$$

d'où

$$u_0 = V_0 \frac{\cos \theta_0 \cos \Phi_0}{\cos \Phi_1}$$

$$w_0 = V_0 \frac{\sin \theta_0}{\cos \Phi_1}$$

- **Le dérapage étant nul et l'avion symétrique, $Y_0 = 0$:**

$$r_0 u_0 - p_0 w_0 = g \cos \theta_0 \sin \Phi_0$$

en tenant compte de

$$r_0 = q_0 \frac{\sin \Phi_0}{\sin \Phi_0} \quad p_0 = -q_0 \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 \sin \Phi_0}$$

et
$$\Omega_0 = \frac{g}{V_0} \operatorname{tg} \Phi_1^0$$

- **Détermination de X_0 et Z_0 :**

$$X_0 = m q_0 w_0 + m g \sin \theta_0$$

$$Z_0 = -m q_0 u_0 - m g \cos \theta_0 \cos \Phi_0$$

Ce qui s'écrit encore :

$$x_0 = m g \cdot \sin \theta_0 \left[1 + \frac{q_0 V}{V_0} \frac{1}{\cos \Phi_1^0} \right] = m g \cdot \sin \theta_0 \frac{1}{\cos \Phi_1^0}$$

$$z_0 = -m g \cdot \cos \theta_0 \cdot \cos \Phi_0 \left[1 + \frac{q_0 V}{V_0} \frac{1}{\cos \Phi_1^0} \right] = -m g \cdot \cos \theta_0 \frac{\cos \theta_0}{\cos \Phi_1^0}$$

Posons:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\cos^2 \Phi_1^0}$$

$$X_0 = \mathbf{n}^2 \cdot m g \cdot \sin \theta_0$$

$$Z_0 = -\mathbf{n}^2 \cdot m g \cdot \cos \theta_0 \cos \phi_0$$

X_0 et Z_0 sont les composantes des forces de propulsion et des forces aérodynamiques sur les axes avion Gx et Gz

$$X_0 = F_0 \cos \varpi + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0$$

$$Z_0 = -F_0 \sin \varpi + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0$$

$$C_x = \cos A \cos \beta C_{xa} - \cos A \sin \beta C_{ya} - \sin A C_{za}$$

$$C_y = \sin \beta C_{xa} + \cos \beta C_{ya}$$

$$C_z = \sin A \cos \beta C_{xa} - \sin A \sin \beta C_{ya} + \cos A C_{za}$$

Exprimons C_x, C_y, C_z , coefficients aérodynamiques dans le trièdre avion, en fonction de C_{xa}, C_{ya}, C_{za} coefficients aérodynamiques dans le trièdre aérodynamique (matrice $\|A\|$)

Dans notre cas particulier ($\beta = 0, C_{ya} = 0$)

$$C_x^0 = \cos A_0 C_{xa}^0 - \sin A_0 C_{za}^0$$

$$C_y^0 = 0$$

$$C_z^0 = \sin A_0 C_{xa}^0 + \cos A_0 C_{za}^0$$

En utilisant les coefficients de traînée et de portance C_x et C_z

$$C_x = -C_{xa}$$

$$C_z = -C_{za}$$

Il vient

$$C_x^0 = -\cos \alpha_0 C_{xa}^0 + \sin \alpha_0 C_{za}^0$$

$$C_z^0 = -\sin \alpha_0 C_{xa}^0 - \cos \alpha_0 C_{za}^0.$$

Les deux équations de force s'écrivent alors :

$$n^2 \cdot mg \cdot \sin \Theta_0 = F \cos \varpi + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 (-\cos A_0 C_{xa}^0 + \sin A_0 C_{za}^0)$$

$$-n^2 \cdot mg \cdot \cos \Theta_0 \cdot \cos \Phi_0 = F \sin \varpi + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 (-\sin A_0 C_{xa}^0 - \cos A_0 C_{za}^0)$$

En éliminant C_z :

$$n^2 \cdot mg \cdot [\sin \Theta_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi]$$

$$= F \cos (A + \varpi) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0.$$

La relation (C.12) entre Θ, α, Φ donne

$$\sin \Theta_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi = 0$$

d'où

$$F \cos (\alpha + \varpi) = \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0$$

En éliminant C_x

$$\begin{aligned} n^2 \cdot mg \cdot (\sin \theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \theta_0 \cos \Phi_0 \cos \alpha_0) \\ = F \sin (\alpha + \varpi) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 \end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned} \sin \theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \theta_0 \cos \Phi_0 \cos \alpha_0 &= \\ \sin \theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \theta_0 \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \cos \alpha_0 &= \\ = \sin \theta_0 \sin \alpha_0 + \sin \theta_0 \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} \frac{\cos \theta_0}{\sin \alpha_0} &= \cos \Phi_0 \end{aligned}$$

donc

$$n \cdot mg \cdot (\sin \theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \theta_0 \cdot \cos \Phi_0 \cdot \cos \alpha_0) = n \cdot mg$$

$$F \sin (\alpha + \varpi) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 = n \cdot mg$$

On retrouve évidemment les équations de force projetées sur les axes aérodynamiques (n est le facteur de charge. Nous pouvons dès lors déterminer les caractéristiques du vol en virage permanent horizontal à dérapage nul.

Données

Module de la vitesse V_0

Vitesse instantanée de rotation Ω_0

Altitude de vol H_0 (masse volumique ρ_0)

Masse avion m , Surface S , Polaire $C_2 = C_z(\alpha)$, $C_x = C_x(\alpha)$

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{V_0 \Omega_0}{g} \longrightarrow \Phi_1^0$$

$$n = \frac{1}{\cos \Phi_1^0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 \sin (\alpha_0 + \varpi) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 = n mg \\ F_0 \cos (\alpha_0 + \varpi) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\sin \Theta_0 = \sin \alpha_0 \cos \Phi_1^0 \longrightarrow \Theta_0$$

$$\sin \Phi_0 = \frac{\sin \Phi_1^0}{\cos \Theta_0} \longrightarrow \Phi_0$$

$$u_0 = v_0 \frac{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0}{\cos \Phi_1^0} \longrightarrow u_0$$

$$w_0 = u_0 = v_0 \frac{\sin \Theta_0}{\cos \Phi_1^0} \longrightarrow w_0$$

$$p_0 = -\Omega_0 \cdot \cos \Theta_0 \longrightarrow p_0$$

$$q_0 = -\Omega_0 \cdot \sin \Theta_0 \longrightarrow q_0$$

$$r_0 = \Omega_0 \frac{\sin \Phi_1^0}{\operatorname{tg} \Phi_0} \longrightarrow r_0$$

Les équations de moment (C.6), (C.7), (C.8) donnent L_0, M_0, N_0 qui joints à la connaissance de F_0 déterminent les positions de gouverne et la position de la manette des gaz (L, M, N et F dépendent de p, q, r, α, ρ, V et de $\delta_X, \delta_L, \delta_N$).

2. ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES PETITS MOUVEMENTS

En soustrayant des équations générales du mouvement régissant $\Phi, \Theta, u, v, w, p, q, r, H$ soient: [17]

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi$$

$$\dot{\Phi} = p + \operatorname{tg} \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi)$$

$$\dot{H} = u \sin \Theta - v \cos \Theta \sin \Phi - w \cos \Theta \cos \Phi$$

$$m[\dot{u} + qw - rv] = X - mg \sin \Theta$$

$$m[\dot{v} + ru - pw] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi$$

$$m[\dot{w} + pv - qu] = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi$$

$$A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + (C - B)qr + p(Fr - Eq) + D(r^2 - q^2) = L$$

$$B\dot{q} - D\dot{r} - F\dot{p} + (A - C)rp + q(Dp - Fr) + E(p^2 - r^2) = M$$

$$C\dot{r} - E\dot{p} - D\dot{q} + (B - A)pq - r(Eq - Dp) + F(q^2 - p^2) = N$$

Les équations d'équilibre soient :

$$q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0$$

$$0 = p_0 + \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0)$$

$$V_0 \sin \tau_0 = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$m[q_0 w_0 - r_0 v_0] = X_0 - mg \sin \Theta_0$$

$$m[r_0 u_0 - p_0 w_0] = Y_0 + mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0$$

$$m[p_0 v_0 - q_0 u_0] = Z_0 + mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$(C - B)q_0 r_0 + p_0(Fr_0 - Fq_0) + D(r_0^2 - q_0^2) = L_0$$

$$(A - C)r_0 p_0 + q_0(Dp_0 - Fr_0) + E(p_0^2 - r_0^2) = M_0$$

$$(B - A)p_0 q_0 + r_0(Eq_0 - Dp_0) + F(q_0^2 - p_0^2) = N_0$$

et en considérant les variables

$$\bar{\Theta} = \Theta - \Theta_0$$

$$\bar{\Phi} = \Phi - \Phi_0$$

$$\bar{u} = u - u_0$$

$$\bar{v} = v - v_0$$

$$\bar{w} = w - w_0$$

$$\bar{H} = H - H_0$$

$$\bar{p} = p - p_0$$

$$\bar{q} = q - q_0$$

$$\bar{r} = r - r_0$$

Comme du premier ordre par rapport aux valeurs de $\Theta_0, \Phi_0, p_0, q_0, r_0, u_0, v_0, w_0$, les équations régissant variables $\bar{\Theta}, \bar{\Phi}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ s'écrivent (en tenant compte de ce que v_0 est nul)

$$\dot{\bar{\Theta}} = -\bar{\Phi} (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) + \bar{q} \cos \Phi_0 - \bar{r} \sin \Phi_0$$

$$\dot{\bar{\Phi}} = \bar{\Theta} \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos^2 \Theta_0} + \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0) \bar{\Phi}$$

$$+ \bar{p} + \sin \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \bar{q} + \cos \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \bar{r}$$

$$\dot{\bar{u}} = \frac{X-X_0}{M} - G \cos \Theta_0 \bar{\Theta} + R_0 \bar{v} - Q_0 \bar{w} - W_0 \bar{q}$$

$$\dot{\bar{v}} = \frac{Y-Y_0}{M} - G \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} + G \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \bar{\Phi} R_0 \bar{u} - P_0 \bar{w} - W_0 \bar{p} - U_0 \bar{r}$$

$$\dot{\bar{w}} = \frac{Z-Z_0}{M} - G \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} + G \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \bar{\Phi} Q_0 \bar{u} - P_0 \bar{v} - U_0 \bar{q}$$

$$A \dot{\bar{p}} - F \dot{\bar{q}} - E \dot{\bar{r}} = L - L_0 + \bar{p} (E Q_0 - F R_0) + \bar{q} ((B-C) R_0 + E P_0 + 2 D Q_0) + \bar{r} ((B-C) Q_0 - F P_0 - 2 D R_0)$$

$$B \dot{\bar{q}} - D \dot{\bar{r}} - F \dot{\bar{p}} = M - M_0 + \bar{q} (F R_0 - D P_0) + \bar{r} ((C-A) P_0 + F Q_0 + 2 E R_0) + \bar{p} ((C-A) R_0 - D Q_0 - 2 E P_0)$$

$$C \dot{\bar{r}} - E \dot{\bar{p}} - D \dot{\bar{q}} = N - N_0 + \bar{r} (D P_0 - E Q_0) + \bar{p} ((A-B) Q_0 + D R_0 + 2 F P_0) + \bar{q} ((A-B) P_0 - E R_0 - 2 F Q_0)$$

$$\dot{\bar{H}} - V_0 \sin \Theta_0 = \bar{\Theta} [W_0 \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 + u_0 \cos \Theta_0]$$

$$+ \bar{\Phi} W_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0$$

$$+ \bar{u} \sin \Theta_0 - \bar{v} \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - \bar{w} \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

Par ailleurs les variables auxiliaires V, A, et B sont liées à \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} par

$$\bar{u} = \bar{v} \cos A_0 - V_0 \sin A_0 \cdot \alpha$$

$$\bar{v} = \cos A_0 \cdot \bar{u} + \sin A_0 \cdot w$$

$$\bar{v} = V_0 \bar{\beta}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\cos \alpha_0 \cdot \bar{w} + \sin \alpha_0 \cdot \bar{u}}{V_0}$$

$$\bar{w} = \bar{v} \sin A_0 - V_0 \cos A_0 \cdot \alpha$$

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{V_0}$$

Il est enfin utile de faire intervenir les variations du nombre de Mach

$$\bar{\mu} = M - M_0 (M_0 = V_0 / A_0)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_0} = \frac{\bar{v}}{v_0} - \frac{\bar{\alpha}}{a_0}$$

Comme $a = \sqrt{\gamma \tau T}$ et $T = T_0 - kH$ (avec en atmosphère standard $T_0 = 288,15$ et $K = 6,5 \cdot 10^{-3}$ au-dessous de 11000 m et $T_0 = 216,65$ et $k = 0$ entre 11000 et 20000 m).

il vient

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \bar{v} \frac{\mu_0}{v_0} - \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} \bar{H} \\ &= \frac{\mu_0}{v_0} (\cos A_0 \bar{u} + \sin A_0 \bar{w}) + \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} \bar{H}\end{aligned}$$

Calculons maintenant les variations des six composantes du système de forces.

- **Force :**

$$X - X_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0 + (F - F_0) \cos \pi$$

$$Y - Y_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_y - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_y^0$$

$$Z - Z_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 + (F - F_0) \sin \pi$$

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 C_i^0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 V_0^2 \left[2 C_i^0 \frac{\bar{V}}{V_0} + \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dH} C_i^0 \bar{H} + \bar{C}_i \right]$$

$$F - F_0 = \frac{\sigma F}{\sigma V} \bar{V} + \frac{\sigma F}{\sigma H} \bar{H} + \frac{\sigma F}{\sigma \delta_x} \bar{\delta}_x$$

Or (rappelons que $C_x = -C_{x_a}$, $C_y = +C_{y_a}$, $C_z = +C_{z_a}$)

$$C_x = -\cos \alpha \cos \beta C_x - \cos \alpha \sin \beta C_y + \sin \alpha C_z$$

$$C_y = -\sin \beta C_x + \cos \beta C_y$$

$$C_z = -\sin \alpha \cos \beta C_x - \sin \alpha \sin \beta C_y - \cos \alpha C_z$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} C_x^0 = -\cos \alpha_0 C_x^0 + \sin \alpha_0 C_z^0 \\ C_y^0 = 0 \\ C_z^0 = -\sin \alpha_0 C_x^0 + \sin \alpha_0 C_z^0 \end{array} \right.$$

$$\bar{C}_x = C_{xU} \frac{\bar{U}}{V_0} + C_{xV} \frac{\bar{V}}{V_0} + C_{xW} \frac{\bar{W}}{V_0} + C_{xP} \frac{\bar{PL}}{V_0} + C_{xq} \frac{\bar{ql}}{V_0} + C_{xr} \frac{\bar{rl}}{V_0} + C_{xH} \bar{H} + C_{x\delta l} \bar{\delta l} + C_{x\delta m} \bar{\delta m} + C_{x\delta n} \bar{\delta n}$$

$$\bar{C}_y = C_{yU} \frac{\bar{U}}{V_0} + C_{yV} \frac{\bar{V}}{V_0} + C_{yW} \frac{\bar{W}}{V_0} + C_{yP} \frac{\bar{PL}}{V_0} + C_{yq} \frac{\bar{ql}}{V_0} + C_{yr} \frac{\bar{rl}}{V_0} + C_{yH} \bar{H} + C_{y\delta l} \bar{\delta l} + C_{y\delta m} \bar{\delta m} + C_{y\delta n} \bar{\delta n}$$

$$\bar{C}_z = C_{zU} \frac{\bar{U}}{V_0} + C_{zV} \frac{\bar{V}}{V_0} + C_{zW} \frac{\bar{W}}{V_0} + C_{zP} \frac{\bar{PL}}{V_0} + C_{zq} \frac{\bar{ql}}{V_0} + C_{zr} \frac{\bar{rl}}{V_0} + C_{zH} \bar{H} + C_{z\delta l} \bar{\delta l} + C_{z\delta m} \bar{\delta m} + C_{z\delta n} \bar{\delta n}$$

Nous supposons ici que les coefficients aérodynamiques ne dépendent pas de α et de β . Autrement dit nous négligeons les phénomènes d'aérodynamique instationnaire (les forces aérodynamiques ne dépendent que du champ de vitesse instantané et non pas de sa variation instantanée)./La levée de cette hypothèse conduit à introduire des termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dans \bar{C} donc à introduire des termes en \dot{u} , \dot{v} et \dot{w} dans les seconds membres. Il est alors nécessaire de procéder à des combinaisons linéaires des trois équations de force pour parvenir à la forme canonique donnée en fin de chapitre ce qui alourdit beaucoup les calculs.

$$C_{xu} = -\sin \alpha_0 C_{x\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_x^0$$

$$C_{yu} = -\sin \alpha_0 C_{y\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_y^0$$

$$C_{zu} = -\sin \alpha_0 C_{z\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_z^0$$

$$C_{x\beta} = C_{x\beta}^0$$

$$C_{y\beta} = C_{y\beta}^0$$

$$C_{z\beta} = C_{z\beta}^0$$

$$C_{xw} = -\sin \alpha_0 C_{x\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_x^0 \mu$$

$$C_{yw} = -\sin \alpha_0 C_{y\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_y^0 \mu$$

$$C_{zw} = -\sin \alpha_0 C_{z\alpha}^0 + \mu_0 \cos \alpha_0 C_z^0 \mu$$

$$C_{xH} = \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} C_{x\mu}$$

$$C_{yH} = \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} C_{y\mu}$$

$$C_{zH} = \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} C_{z\mu}$$

avec

$$C_{x\alpha}^0 = \sin \alpha_0 (C_x^0 + C_{z\alpha}^0) \cos \alpha_0 (C_z^0 + C_{x\alpha}^0)$$

$$C_{x\beta}^0 = \sin \alpha_0 C_{z\beta}^0 \cos \alpha_0 C_{x\beta}^0$$

$$C_{y\alpha}^0 = C_{y\alpha}^0$$

$$C_{y\beta}^0 = C_{y\beta}^0 C_x^0$$

$$C_{z\alpha}^0 = \sin \alpha_0 (C_z^0 + C_{x\alpha}^0) \cos \alpha_0 (C_{z\alpha}^0 + C_x^0)$$

$$C_{z\beta}^0 = -\sin \alpha_0 C_{x\beta}^0 - \cos \alpha_0 C_{z\beta}^0$$

$$C_{x\mu}^0 = -\cos \alpha_0 C_x^0 \cdot \mu + \sin \alpha_0 C_z^0 \cdot \mu$$

$$C_y^0 \cdot \mu = C_y^0 \cdot \mu$$

$$C_z^0 \cdot \mu = -\cos \alpha_0 C_z^0 \cdot \mu - \sin \alpha_0 C_x^0 \cdot \mu$$

$$C_{xt} = -\cos \alpha_0 C_{xt}^0 \cdot \mu + \sin \alpha_0 C_{zt}^0$$

$$C_{yt} = C_{yt}^0 \quad \text{avec} \quad t = p, q \text{ ou } r$$

$$C_{x\mu}^0 = -\cos \alpha_0 C_x^0 \cdot \mu + \sin \alpha_0 C_z^0 \cdot \mu$$

$$C_{zt} = -\cos \alpha_0 C_{zt}^0 - \sin \alpha_0 C_{xt}^0$$

$$\text{Avec} \quad C_{xt}^0 = \frac{\sigma C_x}{\sigma V_0} \text{ et } C_{zt}^0 = \frac{\sigma C_z}{\sigma V_0}$$

$$C_{x\delta i} = -\cos \alpha_0 C_{x\delta i}^0 + \sin \alpha_0 C_z^0 \delta i$$

$$C_{y\delta i} = C_y^0 \delta i \quad i = l, m ; n$$

$$C_{z\delta i} = -\cos \alpha_0 C_{z\delta i}^0 + \sin \alpha_0 C_{x\delta i}^0$$

• Moments

La variation de l'une R des trois composantes L, M, N peut s'écrire : (R_F est la composante du moment de la poussée sur le même axe).

$$\begin{aligned} \overline{R} &= R - R_0 = \frac{1}{2} P_0 S L V_0^2 C_R - \frac{1}{2} P_0 S L V_0^2 C_{rR} + R_F - R_{F0} \\ &= \frac{1}{2} P_0 S L V_0^2 \left[2 C_R^2 \frac{\overline{V}}{V_0} + \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dH} C_r^0 \overline{H} + \overline{C}_R \right] + \frac{\sigma R_F}{\sigma V} \overline{V} + \frac{\sigma R_F}{\sigma H} \overline{H} + \frac{\sigma R_F}{\sigma V} \overline{\delta}_x \end{aligned}$$

AVEC

$$\overline{C}_R = C_{R\alpha}^0 \overline{\alpha} + C_{R\beta}^0 \overline{\beta} + C_{RP}^0 \frac{\overline{P}_L}{V_0} + C_{Rq}^0 \frac{\overline{q}_L}{V_0} + C_{Rr}^0 \frac{\overline{r}_L}{V_0} + C_{R\mu}^0 \overline{\mu} + C_{R\delta l}^0 \overline{\delta}_l + C_{R\delta m}^0 \overline{\delta}_m + C_{R\delta n}^0 \overline{\delta}_n$$

En exprimant $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ET \bar{V} EN FONCTION DE \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} IL VIENT :

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \left[\frac{1}{2} P_0 SL V_0 (-C_{R\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{R\mu}^0 \mu_0 \cos \alpha_0 + 2 C_R^0 \sin \alpha_0) + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_H} \right] \cos \alpha_0 \bar{u} + \frac{1}{2} P_0 SL V_0 C_{R\beta} \bar{V} \\ & + \left[\frac{1}{2} P_0 SL V_0 (C_{R\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{R\mu}^0 \mu_0 \sin \alpha_0 + 2 C_R^0 \sin \alpha_0) + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_V} \right] \sin \alpha_0 \bar{w} + \frac{1}{2} P_0 SL^2 V_0^2 C_{Rp} \bar{p} \\ & + \frac{1}{2} P_0 SL^2 V_0 C_{Rp} \bar{q} + \frac{1}{2} P SL^2 V_0 C_{Rr} \bar{r} \\ & + \left(\frac{1}{2} P SL^2 V_0^2 \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dH} C_R^0 + \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} C_{R\mu} + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_H} \right) \bar{H} \\ & + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{\delta x}} \bar{\delta x} + \frac{1}{2} P_0 SL V_0^2 C_{R\delta l}^0 \bar{\delta l} + \frac{1}{2} P_0 SL V_0^2 C_{R\delta m}^0 \bar{\delta m} + \frac{1}{2} P_0 SL V_0^2 C_{R\delta n}^0 \bar{\delta n} \end{aligned}$$

$$\text{ET} \quad C_R^0 = R_0 / \frac{1}{2} P_0 SL V_0^2 \quad (R_0 = L_0 - L_{F0} ; M_0 - M_{F0} ; N_0 - N_{F0})$$

Les trois équations de moment s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} A \bar{p} - F \bar{q} - E \bar{r} = & L_U \bar{u} + L_V \bar{v} + L_W \bar{w} + L_P \bar{p} + L_Q \bar{q} + L_R \bar{r} + L_H \bar{H} + L_{\Delta X} \bar{\Delta X} + L_{\Delta L} \bar{\Delta L} \\ & + L_{\Delta m} \bar{\Delta m} + L_{\Delta n} \bar{\Delta n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \bar{q} - D \bar{r} - F \bar{p} = & M_U \bar{u} + M_V \bar{v} + M_W \bar{w} + M_P \bar{p} + M_Q \bar{q} + M_R \bar{r} + M_H \bar{H} + M_{\Delta X} \bar{\Delta X} + M_{\Delta L} \bar{\Delta L} \\ & + M_{\Delta m} \bar{\Delta m} + M_{\Delta n} \bar{\Delta n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \bar{r} - E \bar{p} - D \bar{q} = & N_U \bar{u} + N_V \bar{v} + N_W \bar{w} + N_P \bar{p} + N_Q \bar{q} + N_R \bar{r} + N_H \bar{H} + N_{\Delta X} \bar{\Delta X} + N_{\Delta L} \bar{\Delta L} \\ & + N_{\Delta m} \bar{\Delta m} + N_{\Delta n} \bar{\Delta n} \end{aligned}$$

Avec:

$$R_u = \frac{1}{2} P_0 SL V_0 \left[-C_{R\alpha} \sin \alpha_0 + C_{R\mu} \mu_0 \cos \alpha_0 + 2 C_R^2 \cos \alpha_0 \right] + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_V} \sin \alpha_0$$

$$R_v = \frac{1}{2} P_0 SL C_{R\beta}$$

$$R_w = \frac{1}{2} P_0 SL V_0 \left[C_{R\alpha} \sin \alpha_0 + C_{R\mu} \mu_0 \cos \alpha_0 + 2 C_R^2 \sin \alpha_0 \right] + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_V} \sin \alpha_0$$

$$R_H = \frac{1}{2} P_0 SL V_0 \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dH} C_R^0 + \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} C_{R\mu} + \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_H}$$

$$L_p = \frac{1}{2} P_0 SL^2 V_0 C_{LP}^0 + Eq_0 - Fr_0$$

$$L_q = \frac{1}{2} p_0 S L^2 V_0 C_{Lq}^0 + (B - C) r_0 + E p_0 + 2 D q_0$$

$$L_r = \frac{1}{2} p_0 S L^2 V_0 C_{Lr}^0 + (B - C) q_0 + F p_0 + 2 D r_0$$

$$M_p = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{MP}^0 + (C - A) r_0 - D q_0 - 2 E p_0$$

$$M_q = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{MP}^0 + F r_0 - D p_0$$

$$M_r = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{MP}^0 + (C - A) r_0 - F q_0 - 2 E r_0$$

$$N_p = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{NP}^0 + (C - A) q_0 - D r_0 - 2 F p_0$$

$$N_q = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{Nq}^0 + (A - B) p_0 - E r_0 - 2 F q_0$$

$$N_r = \frac{1}{2} p_0 S l^2 V_0 C_{Nr}^0 + D p_0 - E q_0$$

$$R_{\delta x} = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{\delta x}}$$

$$R_{\delta x} = \frac{1}{2} p_0 S l V_0^2 C_{R\delta l}$$

$$R_{\delta m} = \frac{1}{2} p_0 S l V_0^2 C_{R\delta m}$$

$$R_{\delta n} = \frac{1}{2} p_0 S l V_0^2 C_{R\delta n}$$

Ces trois équations se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \lambda_u \bar{u} + \lambda_v \bar{v} + \lambda_w \bar{w} + \lambda_p \bar{p} + \lambda_q \bar{q} + \lambda_r \bar{r} + \lambda_H \bar{H} \\ &\quad + \lambda_{\delta x} \bar{\delta x} + \lambda_{\delta l} \bar{\delta l} + \lambda_{\delta mx} \bar{\delta m} + \lambda_{\delta nx} \bar{\delta n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= u_u \bar{u} + u_v \bar{v} + u_w \bar{w} + u_p \bar{p} + u_q \bar{q} + u_r \bar{r} + u_H \bar{H} \\ &\quad + u_{\delta x} \bar{\delta x} + u_{\delta l} \bar{\delta l} + u_{\delta mx} \bar{\delta m} + u_{\delta nx} \bar{\delta n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= v_u \bar{u} + v_v \bar{v} + v_w \bar{w} + v_p \bar{p} + \lambda_q \bar{q} + \lambda_r \bar{r} + \lambda_H \bar{H} \\ &\quad + \lambda_{\delta x} \bar{\delta x} + \lambda_{\delta l} \bar{\delta l} + \lambda_{\delta mx} \bar{\delta m} + \lambda_{\delta nx} \bar{\delta n} \end{aligned}$$

Les λ_i u_i , v_i sont liés aux coefficients L_i , M_i , N_i par :

$$\lambda_i = [L_i(BC - D^2) + M_i(CF + DE) + N_i(ED + BE)] / \Delta$$

$$u_i = [M_i(CA - D^2) + N_i(AD + EF) + L_i(DE + CF)] / \Delta$$

$$v_i = [N_j(AB - F^2) + L_i(BE + FD) + M_i(EF + AD)] / \Delta$$

avec

$$\Delta = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF$$

avec

$$i = u, v, w, p, q, r, H, \delta_x, \delta_m, \delta_n$$

Les neuf variables $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ et \bar{H} , sont donc régies un système de neuf équations que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Theta}} \\ \dot{\bar{\Phi}} \\ \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{p}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{r}} \\ \dot{\bar{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{17} & A_{18} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{27} & A_{28} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} & A_{49} \\ A_{91} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{54} & A_{56} & A_{57} & A_{58} & A_{59} \\ 0 & 0 & \lambda_u & \lambda_v & \lambda_w & \lambda_p & \lambda_q & \lambda_r & \lambda_H \\ 0 & 0 & \mu_q & \mu_q & \mu_q & \mu_q & \mu_q & \mu_r & \mu_H \\ 0 & 0 & v_q & v_q & v_q & v_q & v_q & v_r & v_H \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} & A_{94} & A_{95} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{\Phi} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \\ \bar{H} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} \\ \lambda_{\delta l} & \lambda_{\delta m} & \lambda_{\delta n} & \lambda_{\delta x} \\ \mu_{\delta l} & \mu_{\delta m} & \mu_{\delta n} & \mu_{\delta x} \\ v_{\delta l} & v_{\delta m} & v_{\delta n} & v_{\delta x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta r \\ \delta m \\ \delta x \end{bmatrix}$$

Avec $\dot{\bar{H}} = \dot{H} - V_0 \sin \tau_0$

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

- **Conditions d'équilibre :**

Vol symétrique en-ressource dans le plan vertical

$$P_0 = r_0 = 0 \quad \Phi_0 = 0$$

- Les coefficients aérodynamiques longitudinaux ne dépendent pas du dérapage β et des vitesses de roulis p et de lacet r :

$$C_{x\beta} = C_{x\dot{\beta}} = C_{xr} = C_{z\dot{p}} = C_{zr} = 0$$

$$C_{m\beta} = C_{m\dot{\beta}} = C_{mr} = 0$$

- Les coefficients aérodynamiques latéraux ne dépendent pas de l'incidence α , ni de la vitesse de tangage q ni du nombre de Mac $h \mu$.

$$C_{y\alpha} = C_{y\mu} = 0$$

- L'avion est non seulement géométriquement mais, aussi massivement symétrique. Ainsi

$$D = E = 0$$

et les moments d'équilibrage latéraux L_0 et N_0 sont nuls. Dans ces conditions il est facile de voir que le système des neuf équations du mouvement libre se sépare en deux sous-systèmes indépendants :

Le système longitudinal qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\theta}} \\ \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g \cos \theta_0 & A_{33} & A_{35} & A_{37} & A_{39} \\ -g \sin \theta_0 & A_{53} & A_{55} & A_{57} & A_{59} \\ 0 & X_u & X_w & X_q & X_H \\ A_{33} & \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{32} & B_{34} \\ B_{52} & B_{54} \\ \mu_{\delta m} & \mu_{\delta x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m \\ \delta_x \end{bmatrix}$$

Et le système latéral

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Phi}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{p}} \\ \dot{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \operatorname{tg} \Theta_0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} \Theta_0 \\ g \cos \Theta_0 & A_{44} & A_{46} & A_{47} \\ 0 & \lambda_v & \lambda_p & \lambda_r \\ 0 & v_v & v_p & v_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{v} \\ \bar{p} \\ \bar{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{41} & B_{43} \\ \lambda_{\delta l} & \lambda_{\delta n} \\ v_{\delta l} & v_{\delta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

(Compte tenu de ce que $\bar{v} = V_0 \bar{\beta}$ on retrouve le système latéral étudié au paragraphe précédent).

Ces remarques justifient donc la séparation des deux mouvements dans le cas du vol équilibré rectiligne ou en évolution dans le plan vertical (au voisinage de la pente nulle) et précisent les hypothèses complémentaires nécessaires.

